

a) Vi bruker den eksplisitte formelen for en aritmetisk følge, og får:

$$a_4 = a_1 + d(i - 1)$$

$$30 = 3 + d(4 - 1)$$

$$27 = 3d$$

$$9 = d$$

Altså er

$$a_i = 3 + 9(i - 1)$$

c) Vi observerer at:

$$a_5 - a_3 = a_1 + d(5 - 1) - (a_1 + d(3 - 1))$$

$$a_5 - a_3 = 2d$$

$$26 - 14 = 2d$$

$$6 = d$$

Videre har vi at:

$$a_3 = a_1 + 2d$$

$$14 = a_1 + 12$$

$$2 = a_1$$

Altså er

$$a_i = 2 + 6(i - 1)$$

??

a) Vi har at:

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$$

Dermed er det eksplisitte uttrykket gitt som:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{i-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3^{1-i} \end{aligned}$$

**b)** Vi vet at:

$$a_1 \cdot k^{4-1} = a_4$$

$$5 \cdot k^3 = 40$$

$$k^3 = 8$$

$$k = 2$$

Altså får vi:

$$a_n = 5 \cdot 2^{i-1}$$

??

a) Vi observerer at rekka er en aritmetisk rekke med  $a_1 = 7$  og  $d = 6$ . For å finne summen trenger vi verdien til  $a_{10}$ :

$$\begin{aligned}a_{10} &= 7 + 6(10 - 1) \\ &= 61\end{aligned}$$

Summen  $S_{10}$  blir da:

$$\begin{aligned}S_{10} &= 10 \cdot \frac{7 + 61}{2} \\ &= 340\end{aligned}$$

b) Se a.

??

Rekken er aritmetisk med  $a_1 = 8$  og  $d = 3$ . Vi har at:

$$\begin{aligned}n \frac{8 + (8 + 3(n - 1))}{2} &= 435 \\ 3n^2 + 13n - 870 &= 0\end{aligned}$$

Vi bruker *abc*-formelen og får at  $n \in \{15, -\frac{58}{3}\}$ , hvorav  $n = 15$  er eneste mulige svar.

?? Dette er den aritmetiske rekken fra eksempelet på side ?? . I formelen for  $S_n$  setter vi inn det eksplisitte uttrykket for  $a_n$ , og får at

$$\begin{aligned}S_n &= n \frac{a_1 + a_1 + d(n - 1)}{2} \\ 2 \cdot 903 &= n(3 + 3 + 4(n - 1)) \\ 0 &= 6n + 4n^2 - 4n - 2 \cdot 903 \\ 0 &= 2n^2 + n - 903\end{aligned}$$

Denne ligningen har løsningene  $n \in \{21, -\frac{43}{2}\}$ . Vi søker et positivt heltall, derfor er  $n = 21$  eneste mulige løsning.

?? Dette er den geometriske rekken fra eksempelet på side ?? . Vi lar  $n$  være

antall ledd, og får at

$$3 \cdot \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 93$$

$$2^n - 1 = \frac{93}{3}$$

$$2^n = 31 + 1$$

$$2^n = 2^5$$

$$n = 5$$

??

$$3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot \dots \cdot 3^n = 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \dots \cdot 3^n$$

$$= 3^{1+2+\dots+n}$$

$$= 3^{n \frac{1+n}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

Som er det vi skulle vise.

??

Rekken er geometrisk, med  $a_1 = 3$  og  $k = 4$ . For å finne summen må vi vite hvor mange ledd rekken består av:

$$3 \cdot 4^{n-1} = 768$$

$$4^{n-1} = 256$$

$$4^{n-1} = 4^4$$

$$n - 1 = 4$$

$$n = 5$$

??

a) Summen  $S_n$  er gitt som:

$$S_n = 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{1 - 3}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 - 3^k}{-2}$$

$$= 3^k - 1$$

b)

$$\begin{aligned}S_3 &= 3^3 - 1 \\ &= 26\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}3^n - 1 &= 728 \\ 3^n &= 729 \\ 3^n &= 3^6 \\ n &= 6\end{aligned}$$

?? Dette er gen geometriske rekken fra eksempelet på side ??.

a) Hvis rekka har en endelig sum  $S_\infty = \frac{3}{2}$ , er

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &= \frac{3}{2} \\ 2x &= 3(x-1) \\ x &= 3\end{aligned}$$

Summen av rekka er altså  $\frac{3}{2}$  når  $x = 3$ .

b) Skal summen bli  $-1$ , må  $x$  oppfylle følgende ligning:

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &= -1 \\ x &= -(x-1) \\ x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Men  $x = \frac{1}{2}$  oppfyller ikke kravet om at rekka er konvergent (den er divergent) for dette valget av  $x$ . Altså er det ingen verdier for  $x$  som oppfyller ligningen.

??

**a)** Dette er en uendelig geometrisk rekke med  $k = \frac{1}{4}$ . Siden  $|k| < 1$  er rekka konvergent.

**b)** Siden rekka er uendelig geometrisk og konvergent, har rekka en endelig sum  $S_\infty$  gitt ved:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a_1}{1 - k} \\ &= \frac{4}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

??

**a)**  $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots$  Dette er en geometrisk rekke med  $a_1 = \frac{9}{10}$  og  $k = 10^{-1}$ . **b)** Fordi  $|k| < 1$  er rekken konvergent. Den uendelige summen er derfor gitt som:

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Summen av rekken blir 1, altså er  $0.999\dots = 1$  (!).

??

**a)** Vi observerer at  $k = x - 2$ . Skal rekka konvergere må altså  $|x - 2| < 1$ . Skal dette være sant må vi ha at:

$$\begin{aligned} -1 &< x - 2 \\ 1 &< x \end{aligned}$$

og videre at:

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Derfor må vi ha at  $1 < x < 3$ .

b)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{18 - 6x} = \frac{2}{9}$$

$$18 - 6x = 9$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$x = \frac{3}{2}$  ligger i konvergensområdet, og er derfor et gyldig svar.

c)

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - (x - 2)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3(3 - x)} = \frac{1}{6}$$

$$3(3 - x) = 6$$

$$x = 1$$

Men  $x = 1$  ligger ikke i konvergensområdet, og er derfor ikke et gyldig svar.  
 $S_n = \frac{1}{6}$  har derfor ingen løsning.

??

a) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd,  $k$  får vi:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2}$$

$$\frac{k(k + 1)}{2} + k + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{k(k + 1) + 2(k + 1)}{2} &= \\ \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} &= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

**b)** Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1 = 2^n - 1$$

$$1 = 1$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$ , får vi:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k+1-1} = 2^{k+1} - 1$$

$$2^k - 1 + 2^k =$$

$$2 \cdot 2^k - 1 =$$

$$2^{k+1} - 1 = 2^{k+1} - 1$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

**c)** Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$4 = \frac{4}{3}(4^1 - 1)$$

$$4 = \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$4 = 4$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for



$n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd,  $k$  får vi:

$$\begin{aligned}4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{k+1} &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) \\ \frac{4}{3}(4^k - 1) + 4^{k+1} &= \\ \frac{4^{k+1} - 1 + 3 \cdot 4^{k+1}}{3} &= \\ \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1) &= \frac{4}{3}(4^{k+1} - 1)\end{aligned}$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

**d)** Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1(2 \cdot 1 + 1)(1 + 1)}{6} \\ &= \frac{6}{6} \\ 1 &= 1\end{aligned}$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for

$n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$  får vi:

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^3 \dots + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)((k+1)+1)}{6} \\
 \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2 &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6} \\
 \frac{k(2k+1)(k+1) + 6(k+1)^2}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+1) + 2k + 4k + 6)}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+3) + 4k + 6)}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k(2k+3) + 2(2k+3))}{6} &= \\
 \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k+3)(k+2)}{6}
 \end{aligned}$$

Og dermed har vi vist det vi skulle.

*Merk:* Faktorisering er en treningsak, men observer hvordan vi i overgangen mellom linje 5 og 6 framkalte leddet  $2k + 3$ . Hvis man ikke kommer i mål med ren faktorisering, kan man selvfølgelig etter linje 4 vise at  $k(2k+1) + 6(k+1) = (2k+3)(k+2)$  ved å skrive ut uttrykkene på begge sider.

??

Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$1(1^2 + 2) = 1 \cdot 3$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer for  $n = k$ , får vi:

$$\begin{aligned}
 (k+1)((k+1)^2 + 2) &= (k+1)(k^2 + 2k + 3) \\
 &= (k+1)(k(k+2) + 3)
 \end{aligned}$$

Antakelsen vår sier at  $k(k+2)$  er delelig med 3, noe tallet 3 også er. Faktoren  $(k(k+2)+3)$  er derfor delelig med 3, mens  $(k+1)$  er et heltall. Uttrykket i ligningen over er derfor delelig med 3.

??

a) Vi sjekker påstanden for  $n = 1$ :

$$\frac{(2 \cdot 1)!}{(2 \cdot 1 - 1)!} = 2^1 \cdot 1!$$

$$\frac{1 \cdot 2}{1} = 2$$

$$2 = 2$$

Påstanden er sann for  $n = 1$ , vi går derfor videre til å sjekke påstanden for  $n = k + 1$ . Når vi antar at formelen stemmer fram til ledd  $k$ , får vi:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(2(k+1))!}{(2(k+1) - 1)!} = 2^{k+1}(k+1)!$$

$$2^k k! \frac{(2(k+1))!}{(2k+1)!} =$$

$$2^k k! \frac{(2k+1)!(2k+2)}{(2k+1)!} =$$

$$2^{k+1} k! (k+1) =$$

$$2^{k+1} (k+1)! = 2^{k+1} (k+1)!$$

Dermed har vi vist det vi skulle.

b) Venstresiden kan enklere skrives som:

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1)$$

For  $n = 1$ :

$$2 = 2^1 \cdot 1!$$

$$2 = 2$$

For  $n = k + 1$ :

$$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2(k+1) = 2^{k+1}(k+1)!$$

$$2^k k! \cdot 2(k+1) =$$

$$2^{k+1}(k+1)! = 2^{k+1}(k+1)!$$

### Gruble ??

a) Da summen av den uendelige rekka er 8, og  $a_1 = 4$ , har vi av (??) at

$$8 = \frac{4}{1 - k}$$

Altså er  $k = \frac{1}{2}$ , og dermed har vi av (??) at

$$S_4 = 4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{15}{2}$$

b) Da  $a_i = a_1 + d(i - 1)$ , har vi at

$$a_1 + a_4 + a_7 = a_1 + (a_1 + 3d) + (a_1 + 6d) = 3a_1 + 9d = 3(a_1 + 3d) = 3a_4$$

Altså er

$$3a_4 = 114$$

$$a_4 = 38$$

## Gruble ??

- a) Summen av de  $n$  første oddetallene tilsvare  $n^2$  (se f. eks ??b), derfor kan vi skrive kvadratene som summer av oddetall.
- b) Vi får  $n$  enere,  $n - 1$  treere,  $n - 2$  femmere og så videre. Den isolerte  $n$ -en på høyresiden representerer de  $n$  enerene, mens summen representerer bidragene fra alle de andre oddetallene (skriv opp hvis du synes det er vanskelig å se).
- c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (n-i)(2i+1) \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= n + \sum_{i=1}^n (2in + n - 2i^2 - i) \\ \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i^2 &= n + \sum_{i=1}^n ((2n-1)i + n) \\ \sum_{i=1}^n 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1) \sum_{i=1}^n i \\ \sum_{i=1}^n 3i^2 &= n + n^2 + (2n-1) \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n(1+n) + (2n-1)n(n+1)}{6} \\ &= \frac{(2n + (2n-1)n)(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2 + (2n-1))(n+1)}{6} \\ &= \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\end{aligned}$$

## Gruble ??

Vi starter med å skrive opp noen ledd i følgen:

$$a_2 = ka_1 + d$$

$$a_3 = k(ka_1 + d) + d = k^2a_1 + d(1 + k)$$

$$a_4 = k(k^2a_1 + d(k + 1)) = k^3a_1 + d(1 + k + k^2)$$

Ut ifra dette finner vi at det første leddet i  $a_n$  kan skrives som

$$ka_1^{n-1}$$

Det andre leddet i  $a_n$  gjenkjenner vi som en geometrisk rekke med  $n - 1$  ledd, med sum lik

$$d \frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$

Altså er

$$a_n = k^{n-1}a_1 + d \frac{1 - k^{n-1}}{1 - k}$$