0.1 Monotoniegenskaper

De fleste funksjonsverdier varierer. Beskrivelser av hvordan funksjonene varierer kaller vi beskrivelser av funksjonenes **monotoniegenskaper**.

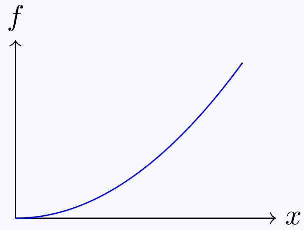
0.1 Voksende og avtagende funskjoner

Gitt en funksjon $f(x)$.

- f er **voksende** på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \tag{1}$$

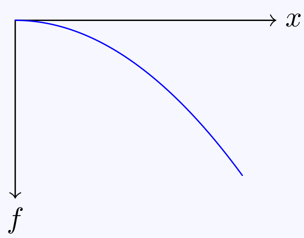
  Hvis $f(x_1) \leq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) < f(x_2)$, er f **strengt voksende** på intervallet.



- f er **avtagende** på intervallet $[a, b]$ hvis vi for alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ har at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \tag{2}$$

  Hvis $f(x_1) \geq f(x_2)$ kan erstattes med $f(x_1) > f(x_2)$, er f **strengt avtagende** på intervallet.



0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte

Gitt $f(x)$ deriverbar på intervallet $[a, b]$.

- Hvis $f' \geq 0$ for $x \in (a, b)$, er f voksende for $x \in [a, b]$
- Hvis $f' \leq 0$ for $x \in (a, b)$, er f avtagende for $x \in [a, b]$

Hvis henholdsvis $\geq$ og $\leq$ kan erstattes med $>$ og $<$, er f strengt voksende/avtagende.

Eksempel

Avgjør på hvilke intervaller f er voksende/avtagende når

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x \qquad , \qquad x \in [0, 8]$$

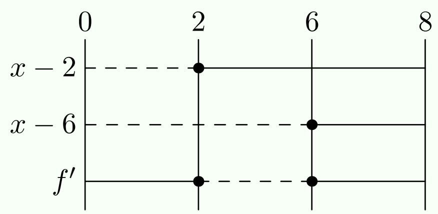
Svar

Vi har at

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

For å tydeliggjøre når f' er positiv, negativ eller lik 0 gjør vi to ting; vi faktoriserer uttrykket til f', og tegner et fortegnsskjema:

$$f'(x) = (x - 2)(x - 6)$$



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket $x - 2$ er negativt når $x \in [0, 2)$, lik 0 når $x = 2$, og positivt når $x \in (2, 8]$.
- Uttrykket $x - 6$ er negativt når $x \in [0, 8)$, lik 0 når $x = 6$, og positivt når $x \in (6, 8]$.
- Siden $f' = (x - 2)(x - 6)$, er

$$f' \geq 0 \text{ når } x \in (0, 2) \cup (6, 8)$$
$$f' = 0 \text{ når } x \in \{2, 6\}$$
$$f' \leq 0 \text{ når } x \in (2, 6)$$

Dette betyr at

$$f \text{ er voksende når } x \in [0,2] \cup [6,8]$$
$$f \text{ er avtagende når } x \in [2,6]$$

0.3 Definisjonsmengde på voksende/avtagende intervall

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ strengt voksende/avtagende for $x \in [a,b]$. Verdimengden til f på dette intervallet er da $[f(a), f(b))]$.

0.2 Ekstremalpunkt, vendepunkt og infleksjonspunkt

0.4 Maksimum og minimum

Merk: Et tall c kan omtales som et punkt i funskjonsdrøftinger, underforstått at det er snakk om punktet $(c, 0)$.

Gitt en funksjon $f(x)$ og et tall c.

- f har **absolutt maksimum** $f(c)$ hvis $f(c) \geq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har **absolutt minimum** $f(c)$ hvis $f(c) \leq f(x)$ for alle $x \in D_f$.
- f har et **lokalt maksimum** $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in I$.
- f har et **lokalt minimum** $f(c)$ hvis det finnes et åpent intervall I om c slik at $f(c) \leq f(x)$ for $x \in I$.

Språkboksen

Et maksimum/minimum blir også kalt en **maksimumsverdi/minimumsverdi**.

0.5 Ekstremalverdi og ekstremalpunkt

Gitt en funksjon $f(x)$ med maksimum/minimum $f(c)$. Da er

- $f(c)$ en **ekstremalverdi** for f.
- c et **ekstremalpunkt** for f. Nærmere bestemt et maksimalpunkt/minimumspunkt for f.
- $(c, f(c))$ et **toppunkt/bunnpunkt** for f.

0.6 Kritiske punkt

Et tall c er et **kritisk punkt** for en funksjon $f(x)$ hvis én av følgende gjelder:

- f er ikke deriverbar i c
- $f'(c) = 0$

0.7 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og $c \in [a, b]$.

(i) Hvis c er et lokalt ekstremalpunkt for f, er $f'(c) = 0$

(ii) Hvis $f' > 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' < 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt maksimumspunkt for f

(iii) Hvis $f' < 0$ for $x \in (a, c)$ og $f' > 0$ for $x \in (c, b)$, er c et lokalt minimumspunkt for f

Språkboksen

Det som blir beskrevet i punkt (ii) og (iii) omtales ofte som at ”f skifter fortegn i c”.

Eksempel 1

Finn det lokale bunnpunktet og toppunktet til

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x$$

Svar

Vi starter med å finne f':

$$\begin{aligned} f' &= 6x^2 + 18x - 60 \\ &= 6(x^2 + 3x - 10) \end{aligned}$$

Siden $5(-2) = 10$ og $5 - 2 = 3$, har vi av regel **??** at

$$f' = 6(x-2)(x+5)$$

$f' = 0$ for $x = 2$ og $x = -5$. Vi har at

$$f(-5) = 2^3 + 9 \cdot 2^2 - 60 \cdot 2 = -68$$

$$f(2) = 5^3 + 9 \cdot 5^2 - 60 \cdot 5 = 275$$

Altså er $(-5, 275)$ toppunktet til f og $(2, -68)$ er bunnpunktet til f.

0.8 Andrederiverttesten

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$ og et tall c.

- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, er $f(c)$ et lokalt maksimum.
- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, er $f(c)$ et lokalt minimum.
- Hvis $f'(c) = f''(c) = 0$, kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om $f(c)$ er et lokalt maksimum eller minimum.

0.8 Andrederiverttesten (forklaring)

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h) - f'(c)}{h}$$

Når $f'(c) = 0$, er

$$f''(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h}$$

Når $f''(c) < 0$, betyr dette at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(c+h)}{h} < 0$$

Altså må $f'(c+h)$ være positiv når h går mot 0 fra venstre og negativ når h går mot 0 fra høgre. Dermed skifter f' fortegn i c, som da må være et maksimalpunkt for f. Tilsvarende må c være et minimumspunkt for f hvis $f(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.

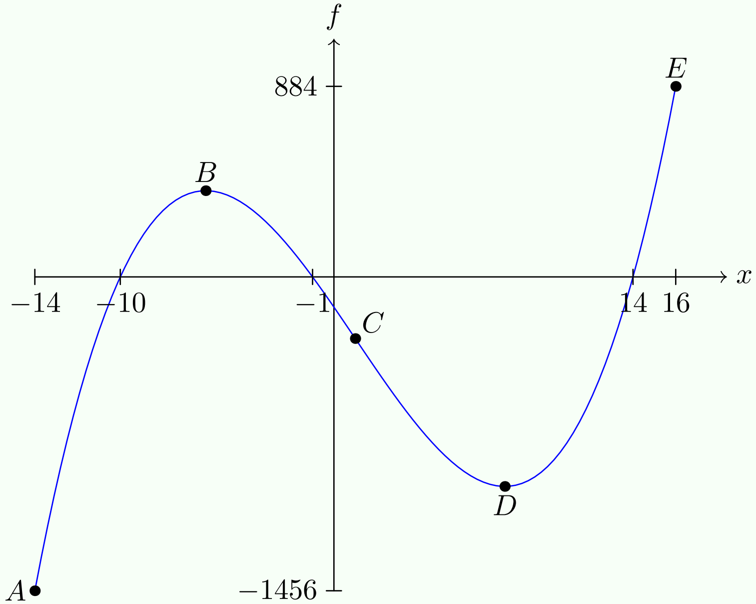
0.9 Infleksjonspunkt og vendepunkt

For en kontinuerlig funksjon $f(x)$ har vi at

- Hvis $f''(c) = 0$ og f'' skifter fortegn i c, er c et **infleksjonspunkt** for f.
- Hvis c er et infleksjonspunkt for f, er $(c, f(c))$ et **vendepunkt**.
- f er konveks på intervall hvor $f'' > 0$, og konkav på intervall hvor $f'' < 0$. (Se regel 0.12 angående kovekse og konkave funksjoner.)

Eksempel

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 144x - 140 \quad , \quad x \in [-14, 16]$$



punkt/verdi	**type**
$A = (-14, -1456)$	absolutt bunnpunkt
-14	ekstremalpunkt; absolutt minimum
-1456	absolutt minimum
$B = (-6, 400)$	lokalt toppunkt
-6	ekstremalpunkt; lokalt maksimalpunkt
400	lokalt maksimum
$C = (-1, -286)$	vendepunkt
-1	infleksjonspunkt
$D = (8, -972)$	lokalt bunnpunkt
8	ekstremalpunkt; lokalt minimumspunkt
-972	lokal minimum
$E = (16, 884)$	absolutt maksimum
16	ekstremalpunkt; absolutt maksimumspunkt
884	absolutt maksimum
-10, -1 og 14	nullpunkt

0.3 Asymptoter

0.10 Vertikale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$ og en konstant c.

- Hvis $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote ovenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote nedenfra** for f.
- Hvis $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$, er c en **vertikal asymptote** for f.

Eksempel

Finn den vertikale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = \pm\infty$$

Altså er $x = 3$ en vertikal asymptote for f.

0.11 Horisontale asymptoter

Gitt en funksjon $f(x)$. Da er $y = c$ en **horisontal asymptote** for f hvis

$$\lim_{x \to |\infty|} f(x) = c$$

Eksempel

Finn den horisontale asymptoten til

$$f(x) = \frac{1}{x-3} + 2$$

Svar

Vi observerer at

$$\lim_{x \to |\infty|} \left[\frac{1}{x-3} + 2 \right] = 2$$

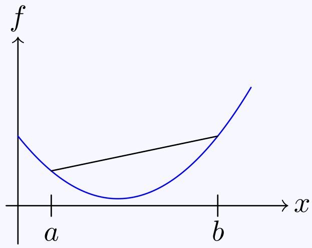
Altså er $y = 2$ en horisontal asymptote for f.

0.4 Konvekse og konkave funksjoner

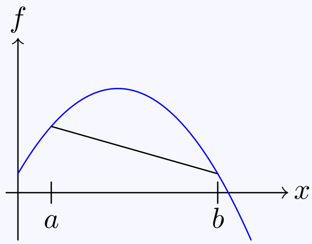
0.12 Konvekse og konkave funksjoner

Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$.

Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger over grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f **konveks** for $x \in [a, b]$.



Hvis hele linja mellom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ ligger under grafen til f på intervallet $[a, b]$, er f **konkav** for $x \in [a, b]$.



0.5 Injektive og omvendte funksjoner

Injektive funksjoner

0.13 Injektive funksoner

Gitt en funksjon $f(x)$. Hvis alle verdier til f er unike på intervallet $x \in [a, b]$, er f **injektiv** på dette intervallet.

Språkboksen

Et annet ord for injektiv er **én-entydig**.

Omvendte funksjoner

Gitt funksjonen $f(x) = 2x + 1$, som åpenbart er injektiv for alle $x \in \mathbb{R}$. Dette betyr at likningen $f = 2x + 1$ bare har én løsning, uavhengig om vi løser med hensyn på x eller f. Løser vi med hensyn på x, får vi at

$$x = \frac{f - 1}{2}$$

Nå har vi gått fra å ha et uttrykk for f til det ”omvendte”, et uttrykk for x. Siden x og f begge er variabler, er x en funksjon av f, og for å tydeliggjøre dette kunne vi ha skrevet

$$x(f) = \frac{f - 1}{2}$$

Denne funksjonen kalles den **omvendte funksjonen** til f. Setter vi uttrykket til f inn i uttrykket til $x(f)$, får vi nødvendigvis x:

$$\begin{aligned} x\,(2x + 1) &= \frac{2x + 1 - 1}{2} \\ &= x \end{aligned}$$

Likningen over synliggjør et problem; det er veldig rotete å behandle x som en funksjon og som en variabel samtidig. Det er derfor vanlig å omdøpe både f og x, slik at den omvendte funksjonen og variabelen den avhenger av får nye symboler. For eksempel kan vi sette $y = f$ og $g = x$. Den omvendte funksjonen g til f er da at

$$g(y) = \frac{y - 1}{2}$$

0.14 Omvendte funksjoner

Gitt to injektive funksjoner $f(x)$ og $g(y)$. Hvis

$$g(f) = x$$

er f og g **omvendte** funksjoner.

Eksempel 1

Gitt funksjonen $f(x) = 5x - 3$.

a) Finn den omvendte funksjonen g til f.

b) Vis at $g(f) = x$.

Svar

a) Vi setter $y = f$, og løser likningen med hensyn på x:

$$y = 5x - 3$$
$$x = \frac{y+3}{5}$$

Da er $g(y) = \frac{y+3}{5}$.

b) Når $y = f$, har vi at

$$\begin{aligned} g(y) &= g(5x-3) \\ &= \frac{5x-3+3}{5} \\ &= x \end{aligned}$$

$\boldsymbol{f^{-1}}$

Hvis f og g er omvendte funksjoner, skrives g ofte som f^{-1}. Da er det viktig å merke seg at f^{-1} ikke er det samme som $(f)^{-1}$. For eksempel, gitt $f(x) = x + 1$. Da er

$$f^{-1} = x - 1 \qquad , \qquad (f)^{-1} = \frac{1}{x+1}$$

I alle andre tilfeller enn ved $n = -1$, vil det i denne boka være slik at

$$f^n = (f)^n$$

Forklaringer

0.2 Monotoniegenskaper og den deriverte (forklaring)

Gitt $f(x)$, hvor $f' \geq 0$ for $x \in [a, b]$. La $x_1, x_2 \in (a, b)$ og $x_2 > x_1$. Av middelverdisetningen finnes det et tall $c \in (x_1, x_2)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Da $c \in [a, b]$, er $f'(x) \geq 0$, og da er

$$0 \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Følgelig er $f(x_2) \geq f(x_1)$, og av definisjon 0.1 er da f voksende på intervallet (a, b).

0.3 Definisjonsmengde på voksende/avtagende intervall (forklaring)

Vi ønsker å vise at for et hvilket som helst tall $c \in (f(a), f(b))$ finnes det et tall x_c slik at $f(x_c) = c$.

Vi lar $f(x)$ være en strengt voksende funksjon og definerer $P(c, n)$ gitt ved følgende prosedyre, beskrevet av en Python-funksjon (se AM1 for en innføring i Python):

```python
def P(c, n):
    x1 = a
    x2 = b
    x3 = (a+b)/2
    for i in range(n):
        if f(x3) == c:
            break
        if c < f(x3):
            x2 = x3
        if c > f(x3):
            x1 = x3
        x3 = (x1 + x2)/2.0
    return f(x3)
```

Da f er strengt voksende kan vi hele tiden være sikre på at $f(x_1) \leq f(x_3) \leq f(x_2)$ og $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$ ved starten av hver iterasjon. Når $n \to \infty$ vil $x_2 \to x_1$, og da f er kontinuerlig vil $\lim_{n\to\infty} f(x_1) = f(x_2)$. Dette betyr at $\lim_{n\to\infty} P(c,n) \to c$, og dermed må det finnes et tall $x_c \in (a,b)$ som gir at $f(x_c) = c$.

0.7 $f' = 0$ for lokale ektstremalpunkt (forklaring)

Punkt (i)

La c være et lokalt maksimumspunkt for f. For et tall h må vi da ha at $c \geq x$ for $x \in (c - |h|, c + |h|)$. Da er

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

Dette betyr at

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

og at

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Følgelig er

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Altså er $f'(c) = 0$, og f' skifter fortegn fra positiv til negativ i c. Med samme framgangsmåte kan det vises at dette også gjelder dersom c er et minimumspunkt, bare at da skifter f' fra negativ til positiv.

Punkt (ii)

Hvis $f' > 0$ på intervallet (a, c), har vi av regel 0.2 at f er sterkt voksende der. Hvis $f' < 0$ på (c, b), er f sterkt avtagende der. Dette må nødvendigvis bety at $f(c) \geq f(x)$ for $x \in (a, b)$, og da er c et maksimumspunkt.

Punkt (iii)

Tilsvarende resonnement som for punkt (ii).