Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 4x^5$.

b) Finn det bestemte integralet $\int\limits_0^2 20x^4\,dx$.

0.1.2

Relasjonen mellom en funksjon $F(x)$ og $f(x)$ er at $F'(x) = f(x)$. Videre er $F(1) = 1$ og $F(4) = 9$.

Finn det bestemte integralet $\int\limits_1^4 f(x)\,dx$.

0.1.3

a) Deriver funksjonen $f(x) = e^{\cos^2 x}$.

b) Finn det ubestemte integralet

$$\int -\sin(2x)\,e^{\cos^2 x}\,dx$$

0.1.4

Vis at

a) $\displaystyle\int x(x+2)e^x\,dx = x^2e^x + C$

b) $\displaystyle\int -e^{x^2+\cos x}(-2x+\sin x)\,dx = e^{\cos x + x^2} + C$

0.2.1

Finn integalene:

a) $\displaystyle\int \frac{3}{4x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int -\frac{7}{\cos^2 t}\,dt$ **c)** $-4x^5$

d) $\displaystyle\int \cos(\pi x)\,dx$ **e)** $\displaystyle\int 4e^{-4t}\,dt$ **f)** $\displaystyle\int \left(2x^4\,dx - \frac{3}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int \sqrt{x^5}\,dx$

0.2.2

Regn ut de bestemte integralene.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(4x^3 - x\right)\, dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} e^{2x}\, dx$

0.2.3

Gjennomsnittet av en funksjon $f(x)$ over et intervall $[a, b]$ kan vi skrive som

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Gitt et vilkårlig tall c, vis at gjennomsnittet av $f(x) = \cos x + k$ over intervallet $[c, c + 2\pi]$ er lik k.

0.2.4

Bevis (**??**)-(**??**) ved å bruke integrasjon ved substutisjon.

0.2.5

Finn integralene:

a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\, dx$ **b)** $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} 8xe^{2x^2-3}\, dx$ **c)** $\displaystyle\int \tan x\, dx$

d) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx$ **e)** $\displaystyle\int \frac{4x+5}{2x^2+5x}\, dx$ **f)** $\displaystyle\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3}\, dx$

0.2.6

Anvend to av de trigonometriske identitetene og bytte av variabel to ganger for å finne integralet

$$\int \sin(2x) e^{1-\cos^2 x}\, dx$$

0.2.7

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

a) $\displaystyle\int (x-1)\cos x\, dx$ **b)** $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\, dx$ **c)** $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}$

0.2.8

Vis at

$$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

0.2.9

Finn det bestemte/ubestemte integralet:

a) $\displaystyle\int_4^5 \frac{13-4x}{x^2-5x+6}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{41-4x}{(x-5)(x+2)}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x^2+9x-16}{(x-2)(x^2-1)}dx$ **d)** $\displaystyle\int \frac{3x^2-14x+10}{x^3-3x^2+2x}$

0.2.10

Finn det ubestemte integralet:

$$\int \frac{3x^3-2x^2-20x+2}{x^2-x-6}\,dx$$

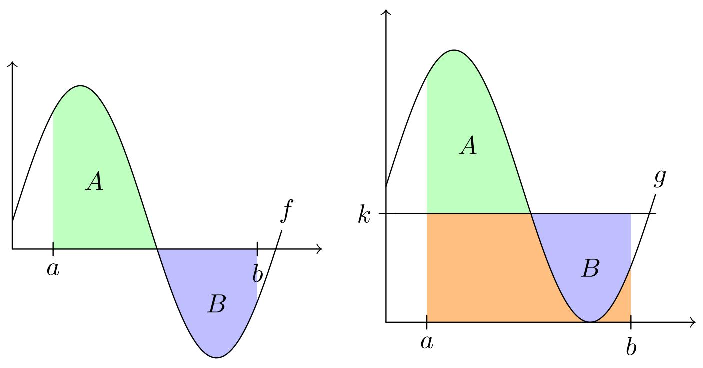
Hint: Bruk polynomdivisjon.

0.3.1

Relasjonen mellom to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ og en positiv konstant
k er at

$$g = f + k$$

a) Ta det for gitt at f og g er som vist på figuren under.



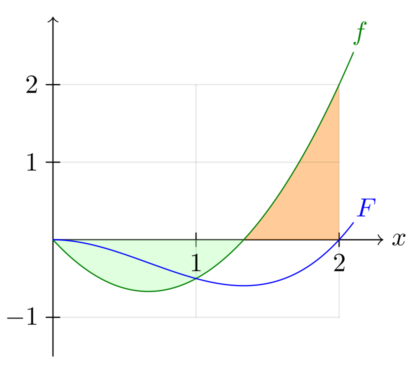
Forklar ut ifra en arealbetraktning hvorfor

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b g\,dx - (b-a)k$$

b) Bekreft likheten i oppgave a) ved integrasjon.

0.3.2

Under vises grafen til $F(x)$ og $f(x)$. F er en antiderivert av f.



Forklar hvorfor arealet av det oransje området er like stort som arealet av det grønne området.

0.4.1

La en kule med radius r være plassert i et koordinatsystem med variabelen x langs horisontalaksen. Kula er plassert slik at sentrum ligger i origo.

a) Lag en tegning og bestem kulas tverrsnitt A langs horisontalaksen, uttrykt ved r og x.

b) Finn volumet V av kula.

0.4.2

Finn volumet av omdreiningslegemene til funksjonene på intervallet $[0, 1]$:

a) $f(x) = e^x$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos(2\pi x)}$

Gruble 1

(R2V23D1)

a) Vis at hvis $f(x) = \tan x$, så er $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}\, dx$$

Gruble 2

(R2H23D1)

Regn ut integralet

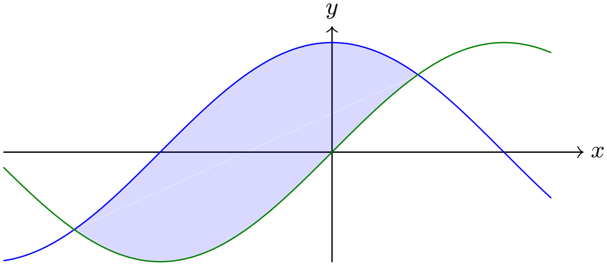
$$\int_{-1}^{1} x^3 + 2x\, dx$$

Hva forteller svaret deg?

Gruble 3

(R2H23D1)

Figuren viser grafene til funksjonene $f(x) = \cos x$ og $g(x) = \sin x$.



Bestem arealet til det fargede området.

Gruble 4

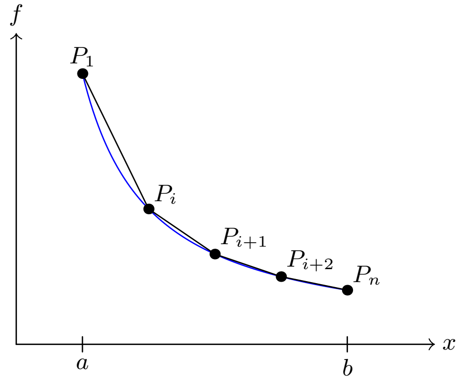
Gitt en funksjon $f(x)$ integrerbar på intervallet $[a, b]$. Ta det for gitt at lengden l til grafen til f er gitt som

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i+1} - P_i|$$

For $i,n \in \mathbb{N}$, hvor $P_i = (x_i, f(x_i))$, $x_1 = a$, $x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = \Delta x$, og $\lim_{n\to\infty} \Delta x = 0$. Vis at vi da kan skrive

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g^2}\, dx$$

hvor $g(x) = f'(x)$.



Gruble 5

Bruk definisjonen fra (**??**) til å vise at

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$