

## 0.1 Faktorisering

### 0.1 Kvadratsetningene

For to reelle tall  $a$  og  $b$  er

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (1. \text{ kvadratsetning})$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2. \text{ kvadratsetning})$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad (3. \text{ kvadratsetning})$$

### Språkboksen

$(a + b)^2$  og  $(a - b)^2$  kalles **fullstendige kvadrat**.

3. kvadratsetning kalles også **konjugatsetningen**.

Alle kvadratsetningene er *identiteter*. En **identitet** er en ligning som er oppfylt uansett hvilke verdier man gir variablene i ligningen.

### Eksempel 1

Skriv om  $a^2 + 8a + 16$  til et fullstendig kvadrat.

**Svar**

$$\begin{aligned} a^2 + 8a + 16 &= a^2 + 2 \cdot 4a + 4^2 \\ &= (a + 4)^2 \end{aligned}$$

### Eksempel 2

Skriv om  $k^2 + 6k + 7$  til et uttrykk der  $k$  er et ledd i et fullstendig kvadrat.

**Svar**

$$\begin{aligned} k^2 + 6k + 7 &= k^2 + 2 \cdot 3k + 7 \\ &= k^2 + 2 \cdot 3k + 3^2 - 3^2 + 7 \\ &= (k + 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

### Eksempel 3

Faktoriser  $x^2 - 10x + 16$ .

#### Svar

Vi starter med å lage et fullstendig kvadrat:

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 16 &= x^2 - 2 \cdot 5x + 5^2 - 5^2 + 16 \\&= (x - 5)^2 - 9\end{aligned}$$

Vi legger merke til at  $9 = 3^2$ , og bruker 3. kvadratsetning:

$$\begin{aligned}(x - 5)^2 - 3^2 &= (x - 5 + 3)(x - 5 - 3) \\&= (x - 2)(x - 8)\end{aligned}$$

Altså er

$$x^2 - 10x + 16 = (x - 2)(x - 8)$$

### 0.1 Kvadratsetningene (forklaring)

Kvadratsetningene følger direkte av distributiv lov ved multiplikasjon (se [MB](#)).

### 0.2 Sum-produkt-metoden

Gitt  $x, b, c \in \mathbb{R}$ . Hvis  $a_1 + a_2 = b$  og  $a_1 a_2 = c$ , er

$$x^2 + bx + c = (x + a_1)(x + a_2) \quad (1)$$

### Eksempel 1

Faktoriser uttrykket  $x^2 - x - 6$ .

#### Svar

Siden  $2(-3) = -6$  og  $2 + (-3) = -1$ , er

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

## Eksempel 2

Faktoriser uttrykket  $b^2 - 5b + 4$ .

### Svar

Siden  $(-4)(-1) = 4$  og  $(-4) + (-1) = -5$ , er

$$b^2 - 5b + 4 = (b - 4)(b - 1)$$

## Eksempel 3

Løs ulikheten

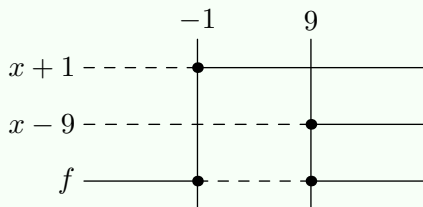
$$x^2 - 8x - 9 \leq 0$$

### Svar

Siden  $1(-9) = -9$  og  $1 + (-9) = -8$ , er

$$x^2 - 8x - 9 = (x + 1)(x - 9)$$

Vi setter  $f = (x + 1)(x - 9)$ , og lager et **fortegnsskjema**:



Fortegnsskjemaet illustrerer følgende:

- Uttrykket  $x + 1$  er negativt når  $x < -1$ , lik 0 når  $x = -1$ , og positivt når  $x > -1$ .
- Uttrykket  $x - 9$  er negativt når  $x < 9$ , lik 0 når  $x = 9$ , og positivt når  $x > 9$ .
- Siden  $f = (x + 1)(x - 9)$ , er

$$f > 0 \text{ når } x \in [-\infty, -1) \cup (9, \infty]$$

$$f = 0 \text{ når } x \in \{-1, 9\}$$

$$f < 0 \text{ når } x \in (-1, 9)$$

Altså er  $x^2 - 8x - 9 \leq 0$  når  $x \in [-1, 9]$ .

## 0.2 Sum-produkt-metoden (forklaring)

Vi har at

$$\begin{aligned}(x + a_1)(x + a_2) &= x^2 + xa_2 + a_1x + a_1a_2 \\ &= x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2\end{aligned}$$

Hvis  $a_1 + a_2 = b$  og  $a_1a_2 = c$ , er

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + bx + c$$

## 0.2 Andregradslikninger

### 0.3 Andregradslikning med konstantledd

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$$

hvor  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Da er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (abc\text{-formelen})$$

Hvis  $x = x_1$  og  $x = x_2$  er løsningene gitt av  $abc$ -formelen, er

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

### Eksempel 1

a) Løs likningen  $2x^2 - 7x + 5 = 0$ .

b) Faktoriser uttrykket på venstre side i oppgave a).

#### Svar

a) Vi bruker  $abc$ -formelen. Da er  $a = 2$ ,  $b = -7$  og  $c = 5$ . Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{4} \\ &= \frac{7 \pm \sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{7 \pm 3}{4} \end{aligned}$$

Enten er

$$x = \frac{7 + 3}{4} = \frac{5}{2}$$

eller så er

$$x = \frac{7 - 3}{4} = 1$$

b)  $2x^2 - 7x + 5 = 2(x - 1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

## Eksempel 2

Løs likningen

$$x^2 + 3 - 10 = 0$$

**Svar**

Vi bruker *abc*-formelen. Da er  $a = 1$ ,  $b = 3$  og  $c = -10$ . Nå får vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} \\ &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = -5 \quad \vee \quad x = 2$$

## Eksempel 3

Løs likningen

$$4x^2 - 8x + 1$$

**Svar**

Av *abc*-formelen har vi at

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{8 \pm 4\sqrt{4 - 1}}{8} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

## Andregradslikninger (forklaring)

Gitt likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi starter med å omskrive likningen:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Så lager vi et fullstendig kvadrat, og anvender konjugatsetningen til å faktorisere uttrykket:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right)^2 \\&= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \\&= \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\end{aligned}$$

Uttrykket over er lik 0 når

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \vee \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## 0.3 Polynomdivisjon

### 0.3.1 Metoder

Når to gitte tall ikke er delelige med hverandre, kan vi bruke brøker for å uttrykke kvotienten. For eksempel er

$$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3} \quad (4)$$

Tanken bak (4) er at vi skriver om telleren slik at vi får fram den delen av 17 som er delelig med 3:

$$\frac{17}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = 5 + \frac{2}{3}$$

Den samme tankegangen kan brukes for brøker med polynomer, og da kalles det **polynomdivisjon**.

#### Eksempel 1

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5}$$

**Svar**

#### Metode 1

Vi gjør følgende trinnvis; med den største potensen av  $x$  i telleren som utgangspunkt, lager vi uttrykk som er delelige med telleren.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 3x - 4}{x + 5} &= \frac{2x(x + 5) - 10x + 3x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7x - 4}{x + 5} \\ &= 2x + \frac{-7(x + 5) + 35 - 4}{x + 5} \\ &= 2x - 7 + \frac{31}{x + 5} \end{aligned}$$



## Metode 2

(Se utregningen under punktene)

- i) Vi observerer at leddet med den høyste ordenen av  $x$  i dividenden er  $2x^2$ . Dette uttrykket kan vi få fram ved å multiplisere dividenden med  $2x$ . Vi skriver  $2x$  til høyre for likhetstegnet, og subtraherer  $2x(x+5) = 2x^2 + 10x$ .
- ii) Differansen fra punkt ii) er  $-7x - 4$ . Vi kan få fram leddet med høyest ordenen av  $x$  ved å multiplisere dividenden med  $-7$ . Vi skriver  $-7$  til høyre for likhetstegnet, og subtraherer  $-7(x+5) = -7x - 35$ .
- iii) Differansen fra punkt iii) er  $31$ . Dette er et uttrykk som har lavere orden av  $x$  enn dividenden, og dermed skriver vi  $\frac{31}{x+5}$  til høyre for likhetstegnet.

$$\begin{array}{r} (2x^2 + 3x - 4) : (x + 5) = 2x - 7 + \frac{31}{x + 5} \\ - \underline{(2x^2 + 10x)} \\ \phantom{-} - 7x - 4 \\ \phantom{-} - \underline{(-7x - 35)} \\ \phantom{-} \phantom{-} 31 \end{array}$$

## Eksempel 2

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2}$$

**Svar**

Metode 1

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} &= \frac{x(x^2 - 2) + 2x - 4x^2 + 9}{x^2 - 2} \\ &= x + \frac{-4x^2 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\ &= x + \frac{-4(x^2 - 2) - 8 + 2x + 9}{x^2 - 2} \\ &= x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2}\end{aligned}$$

Metode 2

$$\begin{array}{r}(x^3 - 4x^2 + 9) : (x^2 - 2) = x - 4 + \frac{2x + 1}{x^2 - 2} \\ \underline{-(x^3 - 2x)} \phantom{+ 9} \\ -4x^2 + 2x + 9 \\ \underline{-(-4x^2 + 8)} \\ 2x + 1\end{array}$$

### Eksempel 3

Utfør polynomdivisjon på uttrykket

$$\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4}$$

#### Svar

*Metode 1*

---

$$\begin{aligned}\frac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} &= \frac{x^2(x - 4) + 4x^2 - 3x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + \frac{x(x - 4) + 4x - 6x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + x + \frac{-2x + 8}{x - 4} \\ &= x^2 + x - 2\end{aligned}$$

*Metode 2*

---

$$\begin{array}{r} (x^3 - 3x^2 - 6x + 8) : (x - 4) = x^2 + x - 2 \\ -(x^3 - 4x^2) \\ \hline x^2 - 6x + 8 \\ -(-x^2 - 4x) \\ \hline -2x + 8 \\ -(-2x + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

### 0.3.2 Delelighet og faktorer

Eksempelene på side 8-11 peker på noen viktige sammenhenger som gjelder for generelle tilfeller:

#### 0.4 Polynomdivisjon

La  $A_k$  betegne et polynom  $A$  med grad  $k$ . Gitt polynomet  $P_m$ , da fins polynomene  $Q_n$ ,  $S_{m-n}$  og  $R_{n-1}$ , hvor  $m \geq n > 0$ , slik at

$$\frac{P_m}{Q_n} = S_{m-n} + \frac{R_{n-1}}{Q_n} \quad (5)$$

#### Språkboksen

Hvis  $R_{n-1} = 0$ , sier vi at  $P_m$  er **delelig** med  $Q_n$ .

#### Eksempel 1

Undersøk om polynomene er delelige med  $x - 3$ .

a)  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 22x - 56$

b)  $K(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42$

#### Svar

a) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{P}{x-2} = x^2 + 8x + 2 - \frac{50}{x-2}$$

Altså er  $P$  ikke delelig med  $x - 3$ .

b) Ved polynomdivisjon finner vi at

$$\frac{K}{x-2} = x^2 + 9x + 14$$

Altså er  $K$  delelig med  $x - 3$ .

## 0.5 Faktorer i polynomer

Gitt et polynom  $P(x)$  og en konstant  $a$ . Da har vi at

$$P \text{ er delelig med } x - a \iff P(a) = 0 \quad (6)$$

Hvis dette stemmer, fins det et polynom  $S(x)$  slik at

$$P = (a - x)S \quad (7)$$

### Eksempel 1

Gitt polynomet

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

- a) Vis at  $x = 1$  løser likningen  $P = 0$ .
- b) Faktoriser  $P$ .

### Svar

- a) Vi undersøker  $P(1)$ :

$$\begin{aligned} P(1) &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Altså er  $P = 0$  når  $x = 1$ .

- b) Siden  $P(1) = 0$ , er  $x - 1$  en faktor i  $P$ . Ved polynomdivisjon finner vi at

$$P = (x - 1)(x^2 - 2x - 8)$$

Da  $2(-4) = -8$  og  $-4 + 2 = -2$ , er

$$x^2 - 2x - 8 = (x + 2)(x - 4)$$

Dette betyr at

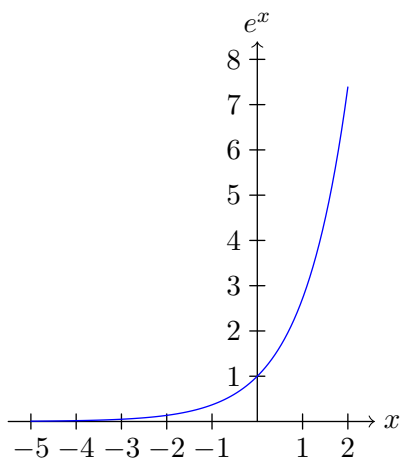
$$P = (x - 1)(x + 2)(x - 4)$$

## 0.4 Eulers tall

**Eulers tall** er en konstant som har så stor betydning i matematikk at den har fått sin egen bokstav;  $e$ . Tallet er irrasjonalt<sup>1</sup>, og de ti første sifrene er

$$e = 2.718281828...$$

De mest fascinerende egenskapene til dette tallet kommer til syne når man undersøker funksjonen  $f(x) = e^x$ . Dette er en eksponentialfunksjon som er så viktig at den rett og slett går under navnet **eksponentialfunksjonen**. Denne funksjonen skal vi undersøke nærmere i [vedlegg ??](#) og [kapittel ??](#).



---

<sup>1</sup>Og [trascendentalt](#).

## 0.5 Logaritmer

I MB så vi på potenstall, som består av et grunntall og en eksponent. En **logaritme** er en matematisk operasjon relativ til et tall. Hvis en logaritme er relativ til grunntallet til en potens, vil operasjonen resultere i eksponenten.

Logaritmen relativ til 10 skrives  $\log_{10}$ . Da er for eksempel

$$\log_{10} 10^2 = 2$$

Videre er for eksempel

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Følgelig kan vi skrive

$$1000 = 10^{\log_{10} 1000}$$

Med potensreglene som utgangspunkt (se MB), kan man utlede mange regler for logaritmer.

### 0.6 Logaritmer

La  $\log_a$  betegne logaritmen relativ til  $a > 0$ . For  $m \in \mathbb{R}$  er da

$$\log_a a^m = m \quad (8)$$

Alternativt kan vi skrive

$$m = a^{\log_a m} \quad (9)$$

#### Eksempel 1

$$\log_5 5^9 = 9$$

#### Eksempel 2

$$3 = 8^{\log_8 3}$$

### Språkboksen

$\log_{10}$  skrives ofte som  $\log$ , mens  $\log_e$  skrives ofte som  $\ln$  eller (!)  $\log$ . Når man bruker digitale hjelpemidler til å finne verdier til logaritmer er det derfor viktig å sjekke hva som er grunntallet. I denne boka skal vi skrive  $\log_e$  som  $\ln$ .

Logaritmen med  $e$  som grunntall kalles den **naturlige logaritmen**.

**Eksempel 3**

$$\log 10^7 = 7$$

**Eksempel 4**

$$\ln e^{-3} = -3$$

**0.7 Logaritmereglene**

*Merk:* Logaritmereglene er her gitt ved den naturlige logaritmen. De samme reglene vil gjelde ved å erstatte  $\ln$  med  $\log_a$ , og  $e$  med  $a$ , for  $a > 0$ .

For  $x, y > 0$  har vi at

$$\ln e = 1 \tag{10}$$

$$\ln 1 = 0 \tag{11}$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \tag{12}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \tag{13}$$

For et tall  $y$  og  $x > 0$ , er

$$\ln x^y = y \ln x \tag{14}$$

**Eksempel 1**

$$\ln(ex^5) = \ln e + \ln x^5 = 1 + 5 \ln x$$

**Eksempel 2**

$$\ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = \ln 2$$



## Logaritmerregler (forklaring)

### Likning (10)

$$\ln e = \ln e^1 = 1$$

### Likning (11)

$$\ln 1 = \ln e^0 = 0$$

### Likning (12)

For  $m, n \in \mathbb{R}$ , har vi at

$$\begin{aligned}\ln e^{m+n} &= m + n \\ &= \ln e^m + \ln e^n\end{aligned}$$

Vi setter<sup>1</sup>  $x = e^m$  og  $y = e^n$ . Siden  $\ln e^{m+n} = \ln(e^m \cdot e^n)$ , er da

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

### Likning (13)

Ved å undersøke  $\ln a^{m-n}$ , og ved å sette  $y = a^{-n}$ , blir forklaringen tilsvarende den gitt for likning (12).

### Likning (14)

Siden  $x = e^{\ln x}$  og<sup>2</sup>  $(e^{\ln x})^y = e^{y \ln x}$ , har vi at

$$\begin{aligned}\ln x^y &= \ln e^{y \ln x} \\ &= y \ln x\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Vi tar det her for gitt at alle positive tall forskjellig fra 0 kan uttrykkes som et potenstall.

<sup>2</sup>Se potensregler i [MB](#).

## 0.6 Forklaringer

### 0.4 Polynomdivisjon (forklaring)

Gitt polynomene

$P_m$ , hvor  $ax^m$  er leddet med høyest grad

$Q_n$ , hvor  $bx^n$  er leddet med høyest grad

Da kan vi skrive

$$P_m = \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n - \frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$$

Vi setter  $U = -\frac{a}{b}x^{m-n}Q_n + P_m$ , og merker oss at  $U$  nødvendigvis har grad lavere eller lik  $m - 1$ . Videre har vi at

$$\frac{P_m}{Q_n} = \frac{a}{b}x^{m-n} + \frac{U}{Q_n} \quad (15)$$

La oss kalle det første og det andre leddet på høgresiden i (15) for henholdsvis et "potensledd" og en "resterende brøk". Ved å følge prosedyren som ledet oss til (15), kan vi også uttrykke  $\frac{U}{Q_n}$  ved et "potensledd" og et "resterende ledd". Dete "potensleddet" vil ha grad mindre eller lik  $m - 1$ , mens telleren i det "resterende leddet" vil ha grad mindre eller lik  $m - 2$ . Ved å anvende (15) kan vi stadig lage nye "potensledd" og "resterende ledd" fram til vi har et "resterende ledd" med grad  $n - 1$ .

### 0.5 Faktorisering av polynom (forklaring)

**$P$  er delelig med  $x - a \Rightarrow P(a) = 0$ .**

For et polynom  $S$  har vi av (5) at

$$\begin{aligned}\frac{P}{x-a} &= S \\ P &= (x-a)S\end{aligned}$$

Da er åpenbart  $x = a$  en løsning for likningen  $P = 0$ .

**$P$  er delelig med  $x - a \Leftarrow P(a) = 0$ .**

Av (5) finnes et polynom  $S$  og en konstant  $R$  slik at

$$\begin{aligned}\frac{P}{x-a} &= S + \frac{R}{x-a} \\ P &= (x-a)S + R\end{aligned}$$

Siden  $P(a) = 0$ , er  $0 = R$ , og da er  $P$  delelig med  $x - a$ .