?? **a)** $f'(x) = 20x^4$ **b)** $f(2) - f(0) = 128$

?? $F(4) - F(1) = 8$

??
a) Vi bruker kjerneregelen to ganger. Først setter vi $u(x) = \cos^2 x$ og $g(u) = e^u$. Deretter setter vi $h(x) = \cos x$ og $i(h) = h^2$. Vi får da at:

$$\begin{aligned} u'(x) &= i'(h)h'(x) \\ &= 2h \cdot (-\sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \end{aligned}$$

Videre har vi da at:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(u)u'(x) \\ &= e^u \cdot (-2\cos x \sin x) \\ &= -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x} \end{aligned}$$

b) Av (**??**) har vi at $2\cos x \sin x = \sin(2x)$, og derfor kan vi skrive:

$$\begin{aligned} \int -\sin(2x)\, e^{\cos^2 x}\, dx &= \int -2\cos x \sin x \, e^{\cos^2 x}\, dx \\ &= \int f'(x)\, dx \\ &= f(x) + C \\ &= e^{\cos^2 x} + C \end{aligned}$$

Overgangen mellom andre og tredje linje følger av definisjonen av det ubestemte integralet.

??
a) Vi må vise at $(x^2 e^x)'$ tilsvarer uttrykket i integranden.

$$\begin{aligned} \left(x^2 e^x\right)' &= 2xe^x + x^2 e^x \\ &= xe^x(2 + x) \end{aligned}$$

b) Vi må vise at $\left(e^{\cos x + x^2}\right)'$ tilsvarer uttrykket i integranden:

$$\begin{aligned} \left(e^{\cos x + x^2}\right)' &= e^{\cos x + x^2} \cdot (\cos x + x^2)' \\ &= e^{\cos x + x^2}(-\sin x + 2x) \\ &= -e^{\cos x + x^2}(\sin x - 2x) \end{aligned}$$

?? Av (**??**) vet vi at perioden $\cos x$ er 2π. Dette betyr at hvis vi for en konstant c har at $a = c$, så er $b = a + 2\pi$. Integralet blir da:

$$\begin{aligned}\int\limits_{c}^{c+2\pi} (\cos x + k)\, dx &= \Big[\sin x + kx\Big]_{c}^{c+2\pi} \\ &= \Big[\sin(c + 2\pi) + k(c + 2\pi) - (\sin c + kc)\Big] \\ &= 2k\pi\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har vi brukt at $\sin(c + 2\pi) = \sin c$. Gjennomsnittet kan altså skrives som

$$\frac{1}{(c + 2\pi) - c} \cdot 2k\pi = k$$

??

a) Vi setter $u = x^2$ og $g(u) = e^u$. Siden $u' = 2x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int xe^{x^2}\, dx &= \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \int u'e^u\, dx \\ &= \frac{1}{2} \int e^u\, du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} + C\end{aligned}$$

b) Vi starter med å finne det ubestemte integralet ved å bruke bytte av variabel. Vi setter $u = 2x^2 - 3$ og $g(u) = e^u$, siden $u' = 4x$ får vi:

$$\begin{aligned}\int 8xe^{2x^2-3}\, dx &= 2 \int 4xe^{2x^2-3}\, dx \\ &= 2 \int u'e^u\, dx \\ &= 2 \int e^u\, du \\ &= 2e^u + C\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir derfor:

$$\begin{aligned}\Big[2e^{2x^2-3}\Big]_1^2 &= 2\left[e^{2\cdot 2^2-3} - e^{2\cdot 1-3}\right] \\ &= 2\left[e^5 - e^{-1}\right]\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = u$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx &= -\int \frac{u'}{u}\,dx \\ &= -\int \frac{1}{u}\,du \\ &= -\ln u + C \\ &= -\ln(\cos x) + C\end{aligned}$$

d) Vi setter $u = \cos x$ og $g(u) = \frac{1}{u^3}$. Siden $u' = -\sin x$, får vi:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx &= \int \frac{-u'}{u^3}\,dx \\ &= -\int u^{-3}\,dx \\ &= \frac{1}{2}u^{-2} + C\end{aligned}$$

Siden $u(0) = \cos 0 = 1$ og $u(\frac{\pi}{3}) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2^{-1}$ blir det bestemte integralet:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}u^{-2}\right]_1^{2^{-1}} &= \frac{1}{2}\left[(2^{-1})^{-2} - 1^{-2}\right] \\ &= \frac{1}{2}[4-1] \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

e) Vi setter $u = 2x^2 + 5x$ og $g(u) = \frac{1}{u}$. Da er

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{2x^2+5x}\,dx &= \int \frac{u'}{u}\,dx \\ &= \int \frac{1}{u}\,du \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(2x^2+5x) + C\end{aligned}$$

f) Vi setter $u = 3x^2 + 4x + 3$ og $g(u) = \frac{1}{u}$, og får da:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x+2}{3x^2+4x+3}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{6x+4}{3x^2+4x+3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1}\,du \\
&= \frac{1}{2}\ln u \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(3x^2+4x+3\right)
\end{aligned}$$

??

Av (**??**) og (**??**) kan vi skrive:

$$\int \sin(2x)e^{1-\cos^2 x}\,dx = \int 2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}$$

Vi setter så $u = \sin x$ og $g(u) = 2ue^{u^2}$. Siden $u' = \cos x$ kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
\int 2\sin x\cos x\, e^{\sin^2 x}\,dx &= 2\int uu'e^{u^2}\,dx \\
&= 2\int ue^{u^2}\,dx
\end{aligned}$$

Vi setter nå $v = u^2$ og $h(v) = e^v$. Siden $v' = 2u$ får vi:

$$\begin{aligned}
2\int ue^{u^2}\,dx &= \int v'e^v\,dx \\
&= \int e^v\,dx \\
&= e^v + C \\
&= e^{u^2} + C \\
&= e^{\sin^2 x} + C
\end{aligned}$$

??

b) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{\frac{1}{2}}$ og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x} \ln x \, dx &= \int uv' \, dx \\
&= uv - \int u'v \, dx \\
&= \ln x \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \int x^{-1} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \\
&= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3 \ln x - 2) + C
\end{aligned}$$

c) Vi setter $u = \ln x$ og $v' = x^{-2}$, og får da at $u' = x^{-1}$ og $v = -x^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\int \ln x \, x^{-2} \, dx &= \int uv' \, dx \\
&= uv - \int u'v \, dx \\
&= \ln x \, (-x^{-1}) - \int x^{-1}(-x)^{-1} \, dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} + \int x^{-2} \, dx \\
&= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C \\
&= -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C
\end{aligned}$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{x}(\ln |x| + 1) \right]_1^e &= -\left[\frac{1}{e}(\ln e + 1) - \frac{1}{1}(\ln 1 + 1) \right] \\
&= -\left[\frac{2}{e} - 1 \right] \\
&= 1 - \frac{2}{e}
\end{aligned}$$

?? Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$, og får da at $u' = \cos x$ og $v = -\cos x$:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\,dx &= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\
2\int \sin^2 x\,dx &= -\sin x \cos x + \int 1\,dx \\
\int \sin^2 x\,dx &= \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C
\end{aligned}$$

?? a) Vi starter med å faktorisere nevneren i integranden:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Altså kan vi skrive:

$$\begin{aligned}
\frac{13-4x}{x^2-5x+6} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \\
13 - 4x &= A(x-3) + B(x-2)
\end{aligned}$$

Når $x = 3$ får vi:

$$\begin{aligned}
13 - 4\cdot 3 &= B(3-2) \\
1 &= B
\end{aligned}$$

Og når $x = 2$ får vi:

$$\begin{aligned}
12 - 4\cdot 2 &= A(2-3) \\
5 &= -A \\
-5 &= A
\end{aligned}$$

Det ubestemte integralet vi ønsker å løse kan derfor skrives som:

$$\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x-2}\right)dx = \ln(x-3) - 5\ln(x-2) + C$$

Det bestemte integralet blir da:

$$\begin{aligned}
\Big[\ln|x-3| - 5\ln|x-2|\Big]_4^5 &= \ln|5-3| - 5\ln|5-2| - (\ln|4-3| - 5\ln|4-2|) \\
&= \ln 2 - 5\ln 3 - \ln 1 + 5\ln 2 \\
&= 6\ln 2 - 5\ln 3
\end{aligned}$$

?? Se eksempel på side **??**

??

a) Ut ifra figuren ser vi at

$$\int_a^b g\,dx = A + (b-a)k - B$$

$$\int_a^b f\,dx = A - B = \int_a^b g\,dx - (b-a)k$$

b) Vi har at

$$\begin{aligned}
\int_a^b g\,dx &= \int_a^b f + k\,dx \\
&= \int_a^b f\,dx + [kx]_a^b \\
&= \int_a^b f\,dx + (b-a)k
\end{aligned}$$

$$\int_a^b g\,dx - (b-a)k = \int_a^b f\,dx$$

??

a) Tverrsnittet langs x-aksen blir en sirkel med høyde $\sqrt{r^2 - x^2}$. Tverrsnittsareale blir derfor

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\sqrt{r^2 - x^2}^{\,2} \\ &= \pi(r^2 - x^2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{-r}^{r} A(x)\,dx \\ &= \pi \int\limits_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)\,dx \\ &= \pi \left[xr^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{\pi}{3}\left(3rr^2 - r^3 - (3(-r)r^2 - (-r)^3)\right) \\ &= \frac{\pi}{3}(3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3) \\ &= \frac{4\pi}{3}r^3 \end{aligned}$$

??

Volumet V er gitt ved ligningen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int\limits_{0}^{1} f^2\,dx \\ &= \pi \int\limits_{0}^{1} (e^x)^2\,dx \\ &= \pi \int\limits_{0}^{1} e^{2x}\,dx \end{aligned}$$

Vi setter $u = 2x$ og $g(u) = e^u$, da blir $u' = 2$:

$$\begin{aligned} \int e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int u'e^u\,du \\ &= \frac{1}{2}e^u + C \end{aligned}$$

Siden $u(0) = 0$ og $u(1) = 2$ blir det bestemte integralet

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^2 &= \frac{1}{2}\left[e^2 - e^0\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^2 - 1\right]\end{aligned}$$

Altså er

$$V = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$$

Gruble ??
Vi har at

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx$$

Vi setter $u = \sin x$ og $v' = \sin x$. Da er

$$u' = \cos x \qquad\qquad v = -\cos x$$

Altså har vi at

$$\int \sin x \cdot \sin x\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx$$
$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x\,dx + \int \sin^2 x\,dx$$

Ettersom $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, følger det at

$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + \int 1\,dx$$
$$2\int \sin^2 x\,dx = -\sin x \cos x + x$$
$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \sin x \cos x\right)$$

Gruble ??

a) Vi har at $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Da $(\sin x)' = \cos x$ og $(\cos x)' = -\sin x$ har vi av divisjonsregelen ved derivasjon (se TM1) at

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

b) Vi setter $u = \tan x$. Av oppgave a) har vi da at

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}\,dx = \int \frac{u'}{u}\,dx = \int \frac{1}{u}\,dx = \ln|u| + C = \ln|\tan x|$$

Gruble ??
Vi har at

$$\int_{-1}^{1} x^3 + 2x\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} + 1 - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = 0$$

Svaret forteller at arealet avgrenset av $f(x) = x^3 + 2x$ og x-aksen for $f \geq 0$ er like stort som arealet avgrenset av f og x-aksen for $f \leq 0$ på intervallet $x \in [-1, 1]$.

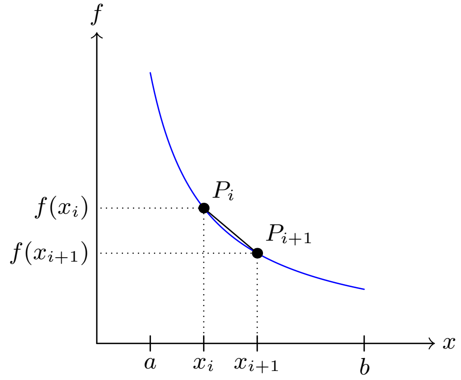
Gruble ??
f og g skjærer hverandre når

$$\sin x = \cos x$$
$$\tan x = 1$$

Da $\operatorname{atan} 1 = \frac{\pi}{4}$, skjærer f og g hverandre når $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ for $n \in \mathbb{Z}$. De to skjæringspunktene i figuren må dermed være $x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}]$. Da $f > g$ på dette intervallet, er arealet til det fargede området gitt som

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x\,dx &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Gruble ??



For $i, n \in \mathbb{N}$ setter vi $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, hvor $\lim_{n\to\infty} \Delta x = 0$. Da er $f(x_i + 1) - f(x_i) = f(x_i + \Delta)$. Avstanden mellom P_{i+1} og P_i er da gitt som

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + [f(x_i + \Delta x) - f(x_i)]^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i + \Delta x) - f(\Delta x)}{(\Delta x)^2}\right)^2}$$

I tilfellet der $\Delta x \to 0$ gjenkjenner vi brøken som $[f'(x_i)]^2$, og dermed er

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i+1} - P_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$$

Av (**??**) har vi da at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |P_{i+1} - P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + g^2}\, dx$$

Gruble ??

Vi har at

$$\begin{aligned}\int x^2\, dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)\Delta x)^2 \Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(a^2 \Delta x + 2a(i-1)(\Delta x)^2 + (i-1)^2 (\Delta x)^3\right)\end{aligned}$$

Vi har at

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a^2 \Delta x = a^2 \frac{b-a}{n} n = a^2 b - a^3$$

Ved å bruke summen av en aritmetisk rekke får vi at

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2a(i-1)(\Delta x)^2 = 2a\frac{(n-1)n}{2}\frac{(b-a)^2}{n^2} = a(b-a)^2$$

Ved å bruke bruke (**??**) finner vi at

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2(\Delta x)^3 = \frac{(n-1)(2(n-1)+1)n}{6}\frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{1}{3}(b-a)^3$$

Dermed er

$$\int x^2\,dx = a^2b - a^3 + a(b-a)^2 + \frac{1}{3}(b-a)^3 = \frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

a) Det er rett skrevet at $x_i = a + (a - i)\Delta x$. Dette gjør at differansen mellom to naboliggende x_i-verdier er Δx, og det er denne differansen man ganger med $f(x_i)$.

b) Det stemmer at kjerneregelen gir

$$f'(x) = g'(u)u'(x)$$

I teksten du viser til gir kjerneregelen

$$F'(x) = G'(u)u'(x)$$

Og da vi har definert $F'(x) = f(x)$ og $G'(u) = g'(u)$, kan vi skrive

$$f(x) = g(u)u$$