1.1 Introduction

Незважаючи на те, що кожний математичний вираз, що включає $=$, є *рівнянням*, традиційно це слово тісно пов'язане з наявністю *невідомого* числа.

Припустимо, ми хочемо знайти число, яке, будучи доданим до 4, дає в результаті 7. Назву цього невідомого числа можна вибрати довільно, але зазвичай його називають x. Наше рівняння тепер можна записати як

$$x + 4 = 7$$

Значення x[1], яке робить значення з обох сторін знака рівності однаковими, є *розв'язком* рівняння. Нічого поганого в тому, щоб просто спостерігати, яким має бути значення x. Ймовірно, ви вже зрозуміли, що $x = 3$ є розв'язком рівняння, оскільки

$$3 + 4 = 7$$

Проте, більшість рівнянь важко розв'язати, просто спостерігаючи, тому мудро користуватися більш загальними методами. Насправді, існує лише один принцип, якому слід слідувати:

> Ми завжди можемо виконати математичну операцію на одній із сторін знака рівності, якщо ми виконуємо операцію й на іншій стороні.

Математичні операції, представлені в цій книзі, є чотирма елементарними операціями. Стосовно цих принцип звучить так:

> Ми завжди можемо додавати, віднімати, множити чи ділити на число з однієї сторони знака рівності, якщо ми також робимо це з іншої сторони.

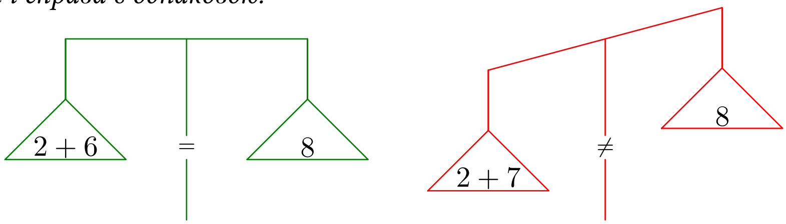
Принцип випливає зі значення $=$. Коли два вирази мають однакову вартість, їхні значення залишаються однаковими, доки ми виконуємо ідентичні математичні операції з ними. У наступному розділі ми конкретизуємо цей принцип для кожної окремої елементарної операції. Якщо вам вже все зрозуміло, ви можете без великої втрати розуміння перейти до Section 1.3.

---

[1] У інших випадках може бути кілька значень.

1.2 Solving with the elementary operations

На малюнках цього розділу ми зрозуміємо рівняння з того, що ми називаємо принципом ваги. У цьому випадку $=$ *вказує*[1] *на те, що вага (або значення) зліва і справа є однаковою.*

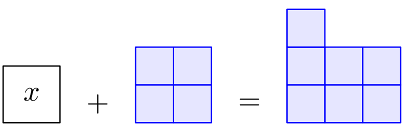


Додавання та віднімання; перенесення членів

Перший приклад

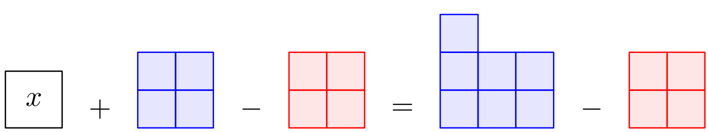
Ми вже знайшли розв’язок цього рівняння, але зараз давайте розв’яжемо його іншим способом[2]:

$$x + 4 = 7$$



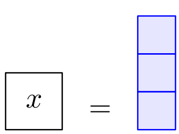
Значення x стає очевидним, якщо x залишиться сам на одній із сторін, і ми можемо ізолювати x з лівого боку, видаляючи 4. Але якщо ми збираємося видалити 4 з лівого боку, ми також повинні видалити 4 з правого боку, щоб зберегти рівні значення з обох сторін.

$$x + 4 - {\color{red}4} = 7 - {\color{red}4}$$



Оскільки $4 - {\color{red}4} = 0$ і $7 - {\color{red}4} = 3$, ми отримуємо

$$x = 3$$



[1] $\neq$ символи ”не дорівнює”.

[2] *Note*: На попередніх малюнках розмір коробок відповідав (абсолютній) величині числа, яке вони представляли. Це не стосується коробок, які представляють x.

Це можна записати стисліше так

$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 7 \\
x &= 7 - 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Між першою і другою лініями зазвичай кажуть, що *4 змінило сторону і тому також знак (з + на −).*

Другий приклад

Перейдемо до трохи складнішого рівняння[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$

Щоб отримати вираз з x виключно на одному боці, ми видаляємо $3x$ з обох сторін:

$$4x - 2 - {\color{red}3x} = 3x + 5 - {\color{red}3x}$$

Тепер,

$$x - 2 = 5$$

Щоб ізолювати x, ми додаємо 2 з лівого боку. Тоді ми також повинні додати 2 з правого боку:

$$x - 2 + {\color{blue}2} = 5 + {\color{blue}2}$$

Отже

$$x = 7$$

Кроки, які ми зробили, можна підсумувати так:

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. малюнок} \\
4x - {\color{red}3x} - 2 &= 3x - {\color{red}3x} + 5 && \text{2. малюнок} \\
x - 2 &= 5 && \text{3. малюнок} \\
x - 2 + {\color{blue}2} &= 5 + {\color{blue}2} && \text{4. малюнок} \\
x &= 7 && \text{5. малюнок}
\end{aligned}
$$

Стисліше можна записати

$$
\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 \\
4x - {\color{red}3x} &= 5 + {\color{blue}2} \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

[1] Зверніть увагу, що малюнок ілюструє $4x + (-2)$ (див. Section ??) з лівого боку. Однак, $4x + (-2)$ дорівнює $4x - 2$ (див. Section ??).

1.1 Переміщення чисел через знак рівності

Щоб розв'язати рівняння, ми збираємо всі x-члени і всі відомі члени на відповідних сторонах знака рівності. Член, який переходить на іншу сторону, також змінює знак.

Example 1

Розв'яжіть рівняння

$$3x + 5 = 2x + 9$$

Answer

$$3x - 2x = 9 - 5$$
$$x = 4$$

Example 2

Розв'яжіть рівняння

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Answer

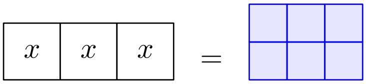
$$-4x + 5x = 12 + 3$$
$$x = 15$$

Множення та ділення

Ділення

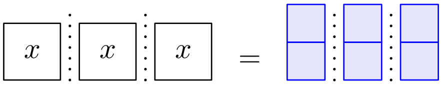
Досі ми вивчали рівняння, які призводили до одного випадку x на одній стороні знаку рівності. Часто x зустрічається кілька разів, як, наприклад, у рівнянні

$$3x = 6$$



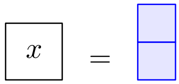
Якщо ми розділимо лівий бік на три рівні групи, то отримаємо одне x в кожній групі. І, розділяючи праву сторону на три рівні групи, всі групи мають однакову вартість

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Отже

$$x = 2$$



Підсумуємо наші обчислення:

$$3x = 6$$ 1. малюнок

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{6}{3}$$ 2. малюнок

$$x = 2$$ 3. малюнок

1.2 Ділення обох сторін рівняння

Ми можемо ділити обидві сторони рівняння на одне і те ж число.

Example 1

Розв'язати рівняння

$$4x = 20$$

Answer

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Example 2

Розв'язати рівняння

$$2x + 6 = 3x - 2$$

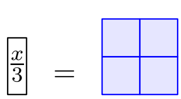
Answer

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Множення

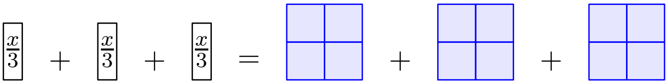
Давайте розв'яжемо рівняння

$$\frac{x}{3} = 4$$



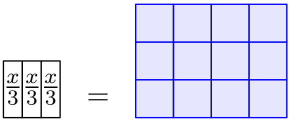
Ми можемо отримати одиничне x зліва, якщо додамо ще два випадки $\frac{x}{3}$. Рівняння вказує, що $\frac{x}{3}$ дорівнює 4, це означає, що на кожний випадок $\frac{x}{3}$, який ми додаємо зліва, ми повинні додати 4 справа, щоб зберегти баланс.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



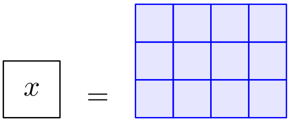
Тепер ми помічаємо, що $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ і $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$



Оскільки $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$ і $4 \cdot 3 = 12$, ми маємо

$$x = 12$$



Наші кроки можна підсумувати таким чином:

$$\frac{x}{3} = 4 \qquad \text{1. малюнок}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4 \qquad \text{2. малюнок}$$

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3 \qquad \text{3. малюнок}$$

$$x = 12 \qquad \text{4. малюнок}$$

У стислішій формі це можна записати як

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

1.3 Множення обох сторін рівняння

Ми можемо множити обидві сторони рівняння на одне і те ж число.

Example 1

Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x}{5} = 2$$

Answer

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$

$$x = 10$$

Example 2

Розв'яжіть рівняння

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Answer

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$

$$6x = 180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

1.3 Solving with elementary operations summarized

1.4 Методи розв'язання з використанням елементарних операцій

Ми завжди можемо

- додавати або віднімати однакове число з обох боків рівняння. Це еквівалентно перенесенню терміну з одного боку на інший, також змінюючи знак терміну.
- множити або ділити обидва боки рівняння на одне і те ж число.

Example 1

Розв'яжіть рівняння

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Answer

$$\begin{aligned} 3x - 2x &= 6 + 4 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Example 2

Розв'яжіть рівняння

$$9 - 7x = -8x + 3$$

Answer

$$\begin{aligned} 8x - 7x &= 3 - 9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

Example 3

Розв'яжіть рівняння

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Answer

$$10x - 7x = 20 - 5$$
$$3x = 15$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Example 4

Розв'яжіть рівняння

$$15 - 4x = x + 5$$

Answer

$$15 - 5 = x + 4x$$
$$10 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}$$
$$2 = x$$

Note: У інших прикладах ми вирішили збирати випадки x з лівого боку рівняння, але ми можемо так само зібрати їх і з правого боку. Зробивши це тут, ми уникли обчислень з від'ємними числами.

Example 5

Розв'яжіть рівняння

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Answer

$$\frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} = 20 + 8$$

$$\frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} = \frac{28}{7}$$

$$\frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} = 4 \cdot 9$$

$$x = 36$$

Example 6

Розв'яжіть рівняння

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Answer

Щоб уникнути дробів, множимо обидві сторони на спільний знаменник 12:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 = \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12 \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \tag{$*$}$$

$$4x + 2 = 5x + 24 \tag{1.2}$$

$$4x - 5x = 24 - 2 \tag{1.3}$$

$$-x = 22 \tag{1.4}$$

$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{22}{-1} \tag{1.5}$$

$$x = -22 \tag{1.6}$$

Порада

Деякі вважають за краще правило, що "ми можемо множити або ділити всі терміни на одне й те ж число". У цьому випадку ми могли б перейти до другого рядка у обчисленнях згаданого прикладу.

Example 7

Розв'яжіть рівняння

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Answer

Множимо обидві сторони на спільний знаменник $2x$:

$$2x\left(3-\frac{6}{x}\right)=2x\left(2+\frac{5}{2x}\right)$$

$$6x-12=4x+5$$

$$6x-4x=5+12$$

$$2x=17$$

$$x=\frac{17}{2}$$

1.4 Рівняння зі ступенями

Давайте розв'яжемо рівняння

$$x^2 = 9$$

Це називається *ступеневим рівнянням*. Загалом, ступеневі рівняння важко розв'язати, застосовуючи лише чотири елементарні операції. Застосовуючи правила ступенів, підносимо обидві сторони до ступеня, оберненого до показника ступеня при x:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

За Rule ??, маємо

$$x^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Оскільки $3^2 = 9$, маємо $9^{\frac{1}{2}} = 3$. Тепер зверніть увагу:

Принцип, викладений на сторінці 1 каже, що ми можемо, як ми щойно зробили, виконувати математичну операцію на обох сторонах рівняння. Однак, дотримання цього принципу не гарантує, що будуть знайдені всі розв'язки.

Стосовно нашого рівняння, ми знаємо, що $x = 3$ є розв'язком. Заради цього ми можемо підтвердити це обчисленням

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Але ми також маємо

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Отже, -3 також є розв'язком нашого оригінального рівняння!

1.5 Ступеневі рівняння

Рівняння, яке можна записати як

$$x^a = b$$

де a і b є сталими, є *ступеневим* рівнянням.

Рівняння має a різних розв'язків.

Example 1

Розв’яжіть рівняння

$$x^2 + 5 = 21$$

Answer

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Оскільки $4 \cdot 4 = 16$ і $(-4) \cdot (-4) = 16$, маємо

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Example 2

Розв’яжіть рівняння

$$3x^2 + 1 = 7$$

Answer

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Отже,

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Note

Хоча рівняння

$$x^a = b$$

має a розв’язків, вони не обов’язково всі *дійсні*[1]. Стосовно цієї книги, це означає, що ми задовольняємося знаходженням усіх раціональних або ірраціональних чисел, які розв’язують рівняння. Наприклад,

$$x^3 = 8$$

має 3 розв’язки, але ми задовольняємося з розв’язком $x = 2$.

[1] Як зазначалося раніше, *дійсні* та *уявні* числа виходять за рамки цієї книги.