Eksamen R1 Høsten 2023 Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

Oppgave 1

Av produktregelen ved derivasjon har vi at

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' \\ &= 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\ &= x(2 \ln x + 1) \end{aligned}$$

Oppgave 2

Vi har at

$$2 \ln e = 2$$

$$3 \log 70 = 3 \log 7 + 3 \log 10 = 3 \log 7 + 3 > 2$$

$$e^{3 \ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Da $\log 7 < 1$, er $3 \log 7 + 3 < 8$, og dermed er

$$2 \ln e < 3 \log 70 < e^3 \ln 2$$

Oppgave 3

a) Vi har at

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-3), -2 - (-1)] = [5, -1]$$

$$\overrightarrow{BC} = [3, 4]$$

$$\overrightarrow{AC} = [8, 3]$$

Videre er

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{73}$$

Dermed er BC kortest.

b) For to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har vi at $\vec{a} \cdot \vec{b} \iff \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$. Videre har vi at

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 5 \cdot 3 + (-1)4 = 11$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 37$$

Dermed er ingen av vinklene i trekanten 90°.

Oppgave 4

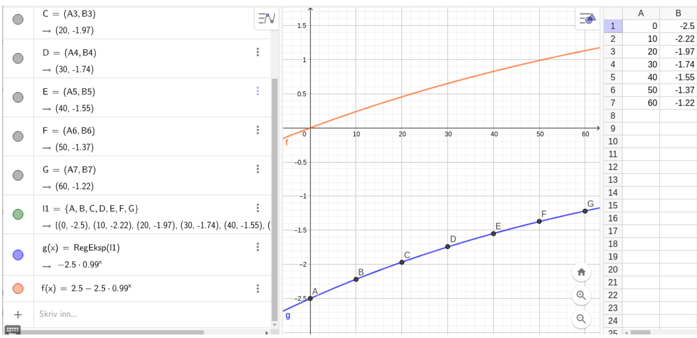
a) I skriptet:
Linje 1-2: Definerer $f(x)$.
Linje 4-5: Definerer $f'(x)$
Linje 6-7: Setter verdiene til h og a
Linje 10-11: Kjører en while-loop som stopper når $df(a,h) \geq 0$, og som øker a med 1 for hver iterasjon.

Egil antar at $f'(a) < 0$ for $a = 0$, og forsøker etterpå å finne a-verdien hvor $f(x)$ skifter fortegn. Hvis $f'(x)$ skifter fra negativt til positivt fortegn i a, vil dette være bunnpunktet til f.

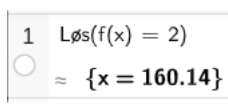
b) Å øke a med 1 gjør at Egil bare sjekker for $a \in \mathbb{N}$. Han bør derfor øke a med en mye mindre verdi. Forslag for Linje 11:
```
a = a + 0.01
```

Oppgave 1

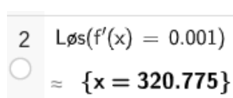
a) Da potensfunksjoner ikke kan gå gjennom punktet $(0,0)$, bruker vi tallene i tabellen hvor konsentrasjonen er fratrekt 2,5. Ved regresjon får vi potensfunksjonene $g(x)$. Da denne tilnærmet går gjennom alle punktene vi har lagt inn, ser $g(x)$ ut til å være en god modell. $f(t)$ fra oppgaven gjennkjenner vi som $g(t) + 2{,}5$, og dermed er f en god modell for konsentrasjonen av stoffet.



b) Ved hjelp av CAS finner vi at konsentrasjonen vil være 2.0 mmol/L etter ca. 160 sekunder.



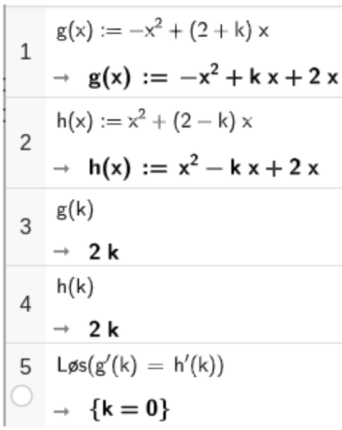
c) Ved hjelp av CAS finner vi at konsentrasjonen vil øke med mindre enn 0,001 mmol/L per sekund etter ca 321 sekunder.



Oppgave 2

I CAS-celle 1 og 2 definerer vi $g(x)$ og $h(x)$ slik at

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \quad x < k \\ h(x) & , \quad x \geq k \end{cases}$$



a) Av celle 3 og 4 ser vi at $\lim_{x \to k} f(x) = 2k$, og dermed er f kontiuerlig for alle k.

b) For at f skal være deriverbar i $x = k$, må vi at at

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(k+h) - g(k)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(k+h) - h(k)}{h}$$

Da både $g(x)$ og $h(x)$ er polynomer, har de en kontinuerlig deriverte funksjon for alle k, og dermed er det tilstrekkelig å sjekke for hvilke verdier $g'(k) = h'(k)$. Av celle 5 ser vi at dette bare gjelder for $k = 0$.

c) Da $g(x)$ er en konkav funksjon, er den injektiv for alle $x \in [\infty, x_m]$, hvor x_m er maksimumspunktet til g. Maksimumspunktet finner vi ved å kreve at $g'(x) = 0$ (celle 6). I tillegg må vi kreve at $x_m < k$, som gir at $k > 2$ (celle 7). En tilsvarende utregning med hensyn på $h(x)$ (celle 8 og 9) gir at $k \leq 2$. Altså er f injektiv dersom $-2 \leq k < 2$.

6 Løs$(g'(x) = 0)$

$\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2} k + 1 \right\}$

7 Løs$\left(\frac{1}{2} k + 1 < k\right)$

$\rightarrow \{k > 2\}$

8 Løs$(h'(x) = 0)$

$\rightarrow \left\{ x = \frac{1}{2} k - 1 \right\}$

9 Løs$\left(\frac{1}{2} k - 1 \geq k\right)$

$\rightarrow \{k \leq -2\}$

Oppgave 3

a) Vi definerer tredjegradsfunksjonen f med koeffisienter $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ (celle 1). Ska f ha et ekstremalpunkt, må det finnes en reell løsning av ligningen $f'(x) = 0$. Av celle 2 ser vi at hvis $c_2^2 < 3c_1c_3$, så har ikke ligningen en rell løsning. Det er åpenbart at det finnes sett med c_1, c_2 og c_3 som oppfyller ulikheten (for eksempel $c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1$), og dermed er ikke Påstand 1 gyldig for alle sett med c_1, c_2 og c_3.

b) For at $y = ax + b$ skal skjære f, må ligningen $f = ax + b$ ha minst én løsning. Dette er en tredjegradsligning. Alle tredjegradsligninger har minst én reell løsning, og dermed er påstand 2 riktig.

c) **Løsning 1**
Vi definerer $g(x) = f'(x)$. Da f er en tredjegradsfunksjon, er g en andregradsfunksjon, og siden $g'(3) = 0$ er $(3, g(3))$ ekstremalpunktet til g. Da $x = 1$ og $x = 5$ har lik horisontalavstand til ekstremalpunktet, har vi av symmetriegenskapene til en andregradsfunksjon at $g(1) = g(3)$. Altså er Påstand 3 riktig.

Løsning 2
Hvis f har et vendepunkt i $x = 3$, er $f''(3) = 0$. Da er $c_2 = -9c_3$ (celle 3). Vi definerer $g(x)$ som f med koeffisienter $c_1, c_2 = -9c_3$ og c_3 (cell 4). Da stemmer det at $g'(x) = g'(5)$ (celle 5).

1	$f(x) := c_3 \cdot x^3 + c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + d$ $\rightarrow$ $\mathbf{f(x) := c_3\, x^3 + c_2\, x^2 + c_1\, x + d}$
2	Løs$(f'(x) = 0)$ $\rightarrow \left\{ x = \frac{-\sqrt{-3\, c_1\, c_3 + c_2^2} - c_2}{3\, c_3}, x = \frac{\sqrt{-3\, c_1\, c_3 + c_2^2} - c_2}{3\, c_3} \right\}$
3	Løs$(f''(3) = 0)$ $\rightarrow \{c_2 = -9\, c_3\}$
4	$g(x) :=$ ByttUt$(f, c_2, -9c_3)$ $\rightarrow$ $\mathbf{g(x) := c_3\, x^3 - 9\, c_3\, x^2 + c_1\, x + d}$
5	$g'(1) \stackrel{?}{=} g'(5)$ $\rightarrow$ **true**

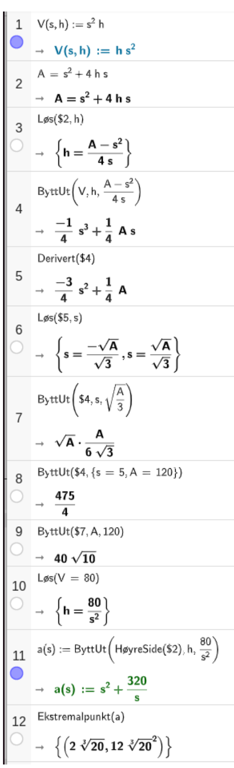
Oppgave 4

Vi setter sidelengden til grunnflaten lik s og høyden lik h. Da er volumet V og overflatearealet A til prismen gitt i CAS-celle 1 og 2. I celle 3 finner vi h uttrykt ved s og A, og setter dette inn i V (celle 4). I celle 5 og 6 finner vi ekstremalpunktene til uttrykket fra celle 4. Da dette er et 3. gradsuttrykk med negativ koeffisient foran s^3, forventer vi at ekstremalpunktet lengst til høgre på x-aksen er maksimalpunktet. Setter vi ekstremalpunktet inn i uttrykket for V (celle 7), ser vi at det største volumet oppnås ved å ha en så stor overflate som tillat.

a) I celle 8 finner vi at det største volumet når $s = 5$ er $\frac{475}{4}\,\mathrm{L} = 118.75\,\mathrm{L}$.

b) I celle 9 finner vi at det maksimale volumet kassen kan få er $40\sqrt{10}\,\mathrm{L} \approx 126.49\,\mathrm{L}$.

c) Vi løser ligningen $V = 80$, og får et uttrykk for h (celle 10). Deretter lager vi funksjonen $a(s)$ (celle 11), hvor uttrykket for h er satt inn i uttrykket for A i celle 2. Da a bare har ett ekstremalpunkt (celle 12) er det ut i fra oppgaven naturlig å anta at dette er et bunnpunkt (dette kan også bekreftes av grafen til a). Dermed er det minste samlede arealet platene kan ha lik $12 \cdot 20^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{dm}^2 \approx 88{,}42\,\mathrm{dm}^2$.

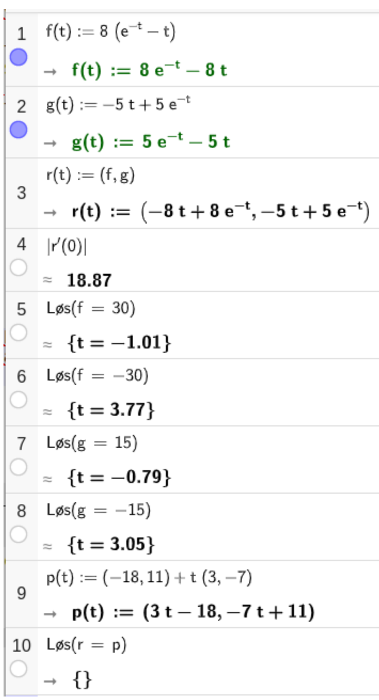


Oppgave 5

a) Vi definerer $f(t)$ og $g(t)$ slik at $r(t) = [f, g]$ (celle 1, 2 og 3). $r'(t)$ er fartsvektoren til pucken, som dermed har utgangsfart ca. lik 18,87 m/s (celle 3).

b) Vi tiden det vil ta før r antar x- og y-verdiene til randsonene (celle 5-8), og finner at den minste gyldige tiden er ca 3,05 s. Dett er altså tiden det tok før pucken traff vantet.

c) Vi definerer posisjonsvektoren til spilleren som $p(t)$ (celle 9), og sjekker om $r = p$ har en løsning (celle 10). Det har den ikke, og dermed treffer ikke pucken spilleren. (Hvis vi skulle sjekket om p og r kan anta samme posisjon, måtte vi brukt to forskjellige variabler, men siden det her er snakk om samme posisjon til samme tid, kan vi bruke t for begge).

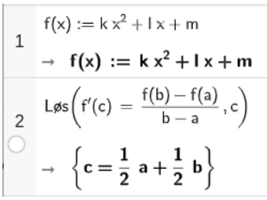


Oppgave 6

Kommentar: Vi vil her presentere to løsninger. Den første løsningen fremhever viktigheten av å lese alle deloppgaver før man setter i gang med besvarelsen, og styrken av å bruke CAS så mye som mulig.

Løsning 1

Vi definerer $f(x) = kx^2 + lx + m$ hvor $k, l, m \in \mathbb{R}$ (celle 1). I celle 2 har vi da et generelt uttrykk som gjelder for alle andregradsfunksjoner.



a) Av uttrykket vi har funnet er $c = \frac{3+1}{2} = 2$.

b) Se linje 2-3 i Python-skriptet.

c) Linje 5-7 bekrefter det vi har funnet, at $c = \frac{a+b}{2}$.

d) Da $\frac{2+8}{2} = 5$, er Annes påstand riktig.

Løsning 2

Vi har at $f'(x) = 2x + 3$. Dermed er

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$c = \frac{1}{2}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - 3\right)$$

a) Vi bruker skriptet fra oppgave b) og får at $c = 2$ (linje 8).

b) Se linje 2-6.

c) Ut i fra forsøk med tilfeldige tall ser det ut til at $c = \frac{a+b}{2}$.

d) Gitt $f(x) = kx^2 + lx + m$ hvor $k, l, m \in \mathbb{R}$. Ved å generalisere uttrykket vi har funnet for c, får vi at

$$c = \frac{1}{2k}\left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - l\right)$$

Videre er

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= kb^2 + 3lb + m - (ka^2 + 3la + m) \\ &= k(a+b)(b-a) + l(b-a) \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2k} k(a+b) \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

Uttrykket gjelder altså for alle andregradsfunksjoner, og dermed er Annes påstand riktig.

```

def f(x):
  return x**2 + 3*x + 1

def c(a, b):
  return 1/2.0*(( f(b)-f(a) ) / (b-a) - 3)

print(c(1, 3))
print(c(2, 7))
print(c(10, 100))
```

Utdata

```
2.0
4.5
55.0
```