

??

a) Vi har at

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x &= 0 \\ x(2x - 4) &= 0\end{aligned}$$

Altså er  $x = 0$ , eller

$$\begin{aligned}2x - 4 &= 0 \\ 2x &= 4 \\ x &= 2\end{aligned}$$

??

La  $x_b$  være minimumspunktet til  $f$ . Av symmetriegenskapene til  $f$  har vi at  $x_b = \frac{x_1+x_2}{2}$  hvis  $f(x_1) = f(x_2)$ . Da  $(-2)4 = -8$  og  $4 - 2 = 2$ , er

$$f(x) = x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

Dette betyr at  $f(2) = f(-4) = 0$ , og da er

$$x_b = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

### Gruble ??

Da

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = x^2 + 2\sqrt{xy} + y^2 = 27$$

må  $\sqrt{xy}$  også være et heltall, og dermed må  $xy$  være et kvadrattall.  
Ved litt prøving og feiling finner vi at

$$x = 3 \quad , \quad y = 12$$

### Gruble ??

a)

$$\begin{aligned} 10 - 2\sqrt{21} &= 10 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= \sqrt{7}^2 + \sqrt{3}^2 - 2\sqrt{7}\sqrt{3} \\ &= (\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 13 + 2\sqrt{22} &= 13 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= \sqrt{11}^2 + \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{11}\sqrt{2} \\ &= (\sqrt{11} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

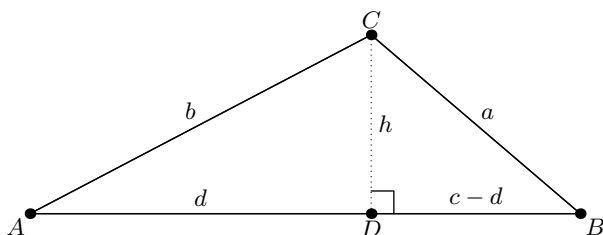
c)

$$\begin{aligned} 8 + 4\sqrt{3} &= 2(4 + 2\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3}^2 + \sqrt{1}^2 + 2\sqrt{1}\sqrt{3}) \\ &= 2(\sqrt{3} + 1)^2 \\ &= (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 42 - 14\sqrt{5} &= 7(6 - 2\sqrt{5}) \\ &= 7(\sqrt{5}^2 + \sqrt{1}^2 - \sqrt{5}\sqrt{1}) \\ &= 7(\sqrt{5} - \sqrt{1})^2 \\ &= (\sqrt{35} - \sqrt{7})^2 \end{aligned}$$

### Gruble ??



Vi setter  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $h = CD$  og  $d = AD$ . Av Pytagoras' setning med hensyn på  $\triangle ADC$  og  $\triangle DCB$  har vi at

$$\begin{aligned} b^2 - d^2 &= a^2 - (c - d)^2 \\ d &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \end{aligned}$$

Videre er

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 \\ &= (b + d)(b - d) \\ &= \left(b + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \left(b - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}\right) \\ &= \frac{1}{4c^2} [(b + c)^2 - a^2] [a^2 - (b - c)^2] \\ &= \frac{1}{4c^2} (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c) \end{aligned}$$

Da  $h > 0$ , er

$$h = \frac{1}{2c} \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)}$$

Arealet  $T$  til  $\triangle ABC$  er nå gitt som

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}hc \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)} \end{aligned}$$

*Merk:* Da en trekant må ha et areal med positiv verdi, kan Herons formel brukes for å vise *trekantulikheten*, som vi utledet i [MB](#).

## Gruble 1

### Alternativ 1

Skal grafen til  $f$  være symmetrisk om linja  $y = -\frac{b}{2a}$ , må vi for et tall  $k$  ha at

$$f\left(k - \frac{b}{2a}\right) = f\left(-k - \frac{b}{2a}\right) \quad (1)$$

For et tall  $d$  har vi at

$$d - \frac{b}{2a} = \frac{2ad - b}{2a}$$

Videre er

$$\begin{aligned} f\left(d - \frac{b}{2a}\right) &= a\left(\frac{2ad - b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{2ad - b}{2a}\right) + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - 4abd + b^2}{4a} + \frac{2abd - b^2}{2a} + c \\ &= \frac{4a^2d^2 - b^2}{4a} + c \end{aligned}$$

Dette betyr at uansett om  $d = k$  eller om  $d = -k$ , så vil uttrykket over være likt, og altså er (1) gyldig.

### Alternativ 2

Skal  $f$  være symmetrisk om en vertikallinje, må det bety at to tall  $t$  og  $s$  gir lik  $f$ -verdi:

$$\begin{aligned} f(s) &= f(t) \\ as^2 + bs + c &= at^2 + bt + c \\ a(s^2 - t^2) + b(s - t) &= 0 \\ a(s - t)(s + t) + b(s - t) &= 0 & (s \neq t) \\ a(s + t) + b &= 0 \\ t &= -\frac{b}{a} - s \end{aligned}$$

Vi lar  $x_s$  være  $x$ -verdien til symmetrilinja til  $f$ .  $x_s$  må ligge midt mellom  $s$  og  $t$ . Vi lar  $t > s$ , da er

$$\begin{aligned} x_s &= s + \frac{1}{2}(t - s) \\ &= s + \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a} - s - s\right) \\ &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

**Gruble ??**

$$\begin{aligned}d^2r^2 - (d+r)^2r^2 + 4bd^2(b-r) \\&= (-2dr - r^2)r^2 + 2bd(2bd - 2dr) \\&= (2bd - 2dr - r^2)r^2 - 2bdr^2 + 2bd(2bd - 2dr - r^2) + 2bdr^2 \\&= (2bd - 2dr - r^2)(r^2 + 2bd)\end{aligned}$$

**Gruble ??**

Hvis  $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ , har vi for et tall  $k$  at

$$f\left(\pm k - \frac{b}{2a}\right) = \frac{4a^2k^2 - b^2}{4a} + c = 0$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på  $k$ , får vi at

$$k = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dette betyr at

$$f\left(\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}\right) = 0$$