Oppgaver for kapittel 0

0.1.1

a) Skriv opp de tre første partallene. Lag en rekursiv og en eksplisitt formel for det i-te partallet.

b) Skriv opp de tre første oddetallene. Lag en eksplisitt formel for det i-te oddetallet.

0.1.2

Finn det eksplisitte uttrykket til den aritmetiske følgen når du vet at

a) $a_1 = 3$ og $a_4 = 30$

b) $a_1 = 5$ og $a_{11} = -25$

c) $a_3 = 14$ og $a_5 = 26$

0.1.3

Finn det eksplisitte uttrykket til den geometriske følgen når du vet at

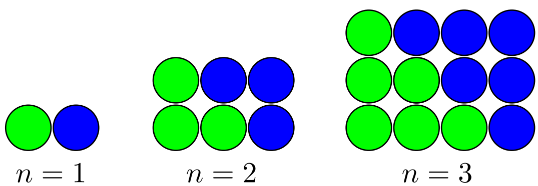
a) $a_1 = \frac{1}{2}$ og $a_2 = \frac{1}{6}$

b) $a_1 = 5$ og $a_4 = 40$

0.2.1

a) Bruk figuren under til å forklare at summen S_n av de n første naturlige tallene er gitt ved

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



b) Skriv opp summen av det første, de to første og de tre første oddetallene. Bruk en lignende figur som i oppgave a) til å vise at summen

S_n av de n første oddetallene er

$$S_n = n^2$$

0.2.2

$-1 - 2 - 3$ er en rekke. Skriv om rekka slik at den blir uttrykt ved ledd som adderes med hverandre.

0.2.3

Finn S_{10} for rekkene:

a) $7 + 13 + 19 + 25 + \dots$ **b)** $1 + 9 + 17 + 25 + \dots$

0.2.4

Gitt rekken

$$8 + 11 + 14 + \dots$$

For hvilken n er summen av rekken lik 435?

0.2.5

Gitt den uendelige rekken

$$3 + 7 + 11 + ...$$

For hvilken n er summen av rekken lik 903?

0.2.6

Gitt den uendelige rekken

$$3 + 6 + 12 + 24 + ...$$

For hvor mange element er summen av rekken lik 93?

0.2.7

Bruk summen av en aritmetisk rekke til å vise at ligningen gitt i *Eksempel 3* på s. **??** er sann.

0.2.8

Gitt rekken

$$3 + 12 + 48 + \ldots + 768$$

Finn summen av rekken.

0.2.9

En geometrisk rekke har $a_1 = 2$ og $k = 3$.

a) Vis at summen S_n kan skrives som:

$$S_n = 3^n - 1$$

b) Regn ut summen for de tre første leddene.

c) For hvilken n er $S_n = 728$?

0.2.10

Gitt den uendelige rekken

$$4 + 1 + \frac{1}{4} + \dots$$

a) Forklar hvorfor rekken er konvergent.

b) Finn summen av den uendelige rekken.

0.2.11

Gitt den uendelige rekka

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + ...$$

a) For hvilken x er summen av rekka lik $\frac{3}{2}$?

b) For hvilken x er summen av rekka lik -1?

0.2.12

a) Skriv det uendelige desimaltallet 0.999... som en uendelig geometrisk rekke.

b) Forklar hvorfor rekken er konvergent og bruk dette faktumet til å finne summen av rekken.

0.2.13

Gitt den uendelige rekken

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(x-2)^2 + \dots$$

a) For hvilke x er rekken konvergent?

b) For hvilken x er $S_n = \frac{2}{9}$?

c) For hvilken x er $S_n = \frac{1}{6}$?

0.3.1

Vis ved induksjon at for alle $n \in \mathbb{N}$ er

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

c) $4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^n = \dfrac{4}{3}(4^n - 1)$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(2n+1)(n+1)}{6}$

0.3.2

Vis ved induksjon at $n(n^2+2)$ er delelig med 3 for alle $n \in \mathbb{N}$.

0.3.3

a) Vis ved induksjon at:

$$\frac{1 \cdot 2}{1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n)!}{(2n-1)!} = 2^n n!$$

Hint: $(2(k+1))! = (2k+1)!(2k+2)$.

b) Hvordan kan venstresiden i a) skrives enklere? Utfør induksjonsbeviset på nytt etter forenklingen.

Gruble 1

a) Gitt $n,m \in \mathbb{N}$. Vis at vi for en aritmetisk følge $\{a_n\}$ har at

$$a_n = a_m + (m - n) \cdot d$$

hvor d er den konstante differansen mellom to naboelement.

b) Gitt $n,m \in \mathbb{N}$. Vis at vi for en geometrisk følge $\{g_n\}$ har at

$$g_n = g_m k^{n-m}$$

hvor k er den konstante kvotienten mellom to naboelement.

c) Løs oppgave Oppgave 0.1.3c og Oppgave 0.1.2b ved å bruke formlene fra a) og b).

Gruble 2

(R2H23D1)
En uendelig geometrisk rekke $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ konvergerer mot 8.

a) Bestem summen av de fire første leddene når du får vite at $a_1 = 4$.

I en aritmetisk rekke er $a_1 + a_4 + a_7 = 114$.

b) Bestem a_4.

Gruble 3

Gitt en følge med rekursiv formel

$$a_i = ka_{i-1} + d$$

hvor k og d er konstanter. Finn en eksplisitt formel for følgen uttrykt ved a_1, k, d og $n \in \mathbb{N}$.

Gruble 4

Målet med denne oppgaven er å, uten bruk av induksjon, vise at summen av n kvadrater er gitt ved følgende formel:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \tag{I}$$

a) Forklar hvorfor vi kan skrive

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots = 1 + (1+3) + (1+3+5) + \ldots$$

Hint: Se opg. 0.2.1 b).

b) Ut ifra det du fant i a), forklar at

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = n + \sum_{i=1}^{n} (n-i)(2i+1)$$

c) Skriv ut alle kjente summer fra b) og løs ligningen med hensyn på $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$. Du skal da komme fram til (I).