Eksamen 1T Våren 2024

Løsning fra OpenMathBooks prosjektet

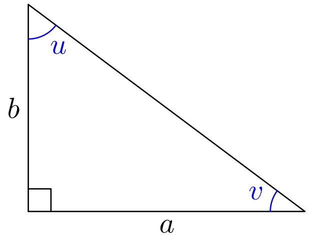
Oppgave 1

a) $\tan u = \frac{6}{8}$ og $\tan v = \frac{8}{6}$, dermed er $\tan u \cdot \tan v = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{6} = 1$.

b) Vi setter a og b som vist i figuren under. Da er $\tan u = \frac{a}{b}$ og $\tan v = \frac{b}{a}$. Følgelig er

$$\tan u \cdot \tan v = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Altså gjelder dette for alle rettvinklede trekanter.



Oppgave 2

Hun kan ha utført polynomdivisjon på regnestykket $\frac{2x^3+3x^2-11x-6}{2x^2+7x+3}$ eller $\frac{2x^3+3x^2-11x-6}{x-2}$.

$$\begin{aligned}
&(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6) : (2x^2 + 7x + 3) = x - 2 \\
-&\underline{(2x^3 + 7x^2 + 3x)} \\
&\qquad 10x^2 - 14x - 6 \\
&\quad - \underline{(10x^2 - 14x - 6)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6) : (x - 2) = 2x^2 + 7x + 3 \\
-&\underline{(2x^3 - 4x^2)} \\
&\qquad 7x^2 - 11x - 6 \\
&\quad - \underline{(7x^2 - 14x)} \\
&\qquad\qquad 3x - 6 \\
&\qquad - \underline{(3x - 6)} \\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Polynomdivisjonene viser at både $x - 2$ og $2x^2 + 7x + 3$ er faktorer i $2x^3 + 2x^2 - 11x - 6$.

Oppgave 3

Vi setter to uttrykk for arealet til det grønne området lik hverandre:

$$\begin{aligned} a(a-b+b) - b^2 \cdot &= a \cdot (a-b) + b(a-b) \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \end{aligned}$$

Oppgave 4

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2 - 3 \cdot 0 + 7 = 7 \\ f(5) &= 5^2 - 3 \cdot 5 + 7 = 17 \\ \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} &= \frac{17 - 7}{5} = 2 \end{aligned}$$

Verdien 2 vil bli skrevet ut, og dette forteller at den gjennomsnittlige endringen til f er 2 på intervallet $[0, 5]$.

Oppgave 5

a) Av nullpunktene vet vi at vi kan skrive $f(x) = a(x+3)(x-4)$. Videre har vi at

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a(0+3)(0-4) \\
24 &= -12a \\
a &= -2
\end{aligned}
$$

Dermed er $f(x) = -2(x+3)(x-4)$

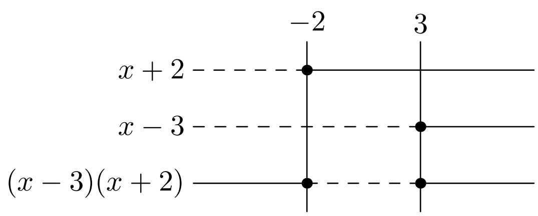
b)

$$
\begin{aligned}
-2(x+3)(x-4) &> 12 \\
(x+3)(x-4) &< -6 \\
x^2 - 4x + 3x - 12 + 6 &< 0 \\
x^2 - x - 6 &< 0
\end{aligned}
$$

Siden $(-3) \cdot 2 = 6$ og $-3 + 2 = -1$, har vi at

$$(x-3)(x+2) < 0$$

Av fortegnsskjemaet ser vi at ulikheten over er oppfylt når $x \in (-2, 3)$.



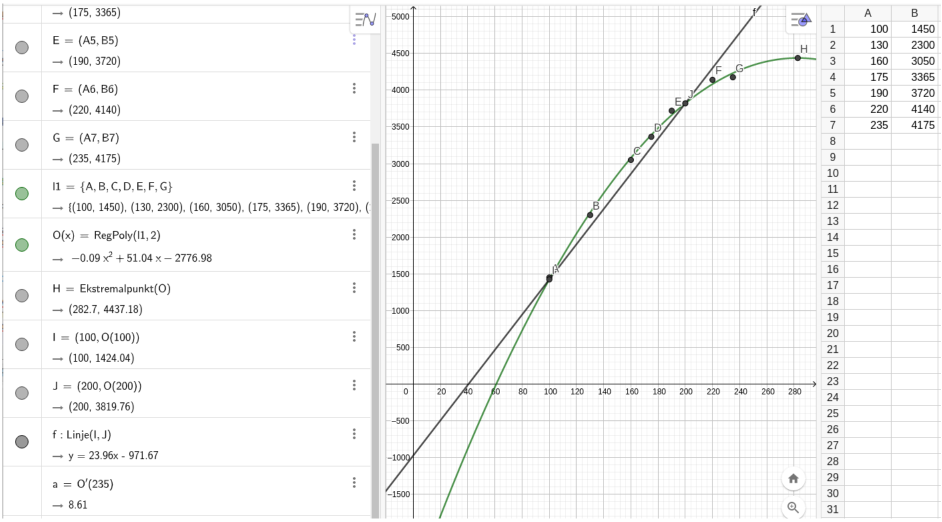
Oppgave 1

a) Skriver tallene inn i regnearket i GeoGebra, lager liste med punkt, og bruker regresjon med andregradspolynom. Får da $O(x)$ som samsvarer med $O(x)$ i oppgaven. I grafikkfeltet ser vi at grafen til O (den grønne kurven) tilnærmet skjærer alle punktene, og derfor er en god modell.

b) Det største overskuddet får vi i toppunktet til O, som vi finner ved kommandoen `Ekstremalpunkt(O)`. Da får vi at det største overskuddet oppstår ved å selge 282-283 baguetter i uka.

c) Vi skriver inn punktene som I og J, finner linja mellom dem med kommandoen `Linje(I, J)`. Da får vi at stigningstallet til linja er 23.96. Dette betyr at på intervallet $[100, 200]$, så har overskuddet i gjennomsnitt endret seg med 23.96 kroner per solgte baguett.

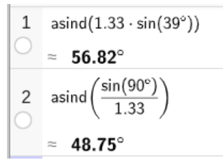
d) Finner den momentane vekstfarten ved å skrive `O'(235)`, som gir at $O(235) = 8.61$. Dette betyr at akkurat når salget nådde 235 baguetter, så endret overskuddet seg meg 8.61 kronger per solgte baguett.



Oppgave 2

a) Vinkelen må være ca. $59°$ (celle 1).

b) Når u går mot $90°$, går v mot ca. $48.75°$ (celle 2).



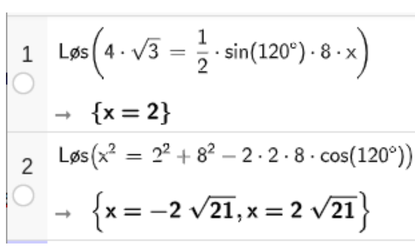
c) Si at $u = v = t$. For $\sin t \neq 0$ har vi at

$$\begin{aligned} \sin t &= 1.33 \sin t \\ 1 &= 1.33 \end{aligned}$$

Dette fører altså til en selvmotsigelse. Hvis derimot $\sin t = 0°$, er ligningen over oppfylt. Dermed er u og v bare like når $t = \operatorname{asind}(0)$, som gir at $t = 0°$.

Oppgave 3

Bruker arealsetningen, og finner at $AC = 2$ (celle 1). Bruker cosinus-setningen, og finner at $BC = 2\sqrt{21}$ (celle 2).



Oppgave 4

a) Oddetall nr i er gitt ved formelen $2i-1$.

```python
S = 0

for i in range(1, 21):
  S = S + 2*i-1
  print("S"+str(i) + ":", S)
```

Utdata

```
S1: 1
S2: 4
S3: 9
S4: 16
S5: 25
S6: 36
S7: 49
S8: 64
S9: 81
S10: 100
S11: 121
S12: 144
S13: 169
S14: 196
S15: 225
S16: 256
S17: 289
S18: 324
S19: 361
S20: 400
```

b) At summene ser vi at $S_i = i^2$. Summen av i oddetall danner et kvadrat med lengde i, og dermed er summen lik i^2.

Oppgave 5

a) Skriver inn tabellen i rengearket i GeoGebra, lager liste med punkt, og bruker regresjon med potensfunksjon. Får da

$$K(x) = 7.56x^{0.38}$$

b) Aris modell:

$$f(x) = 1000 \cdot 0.88^x$$

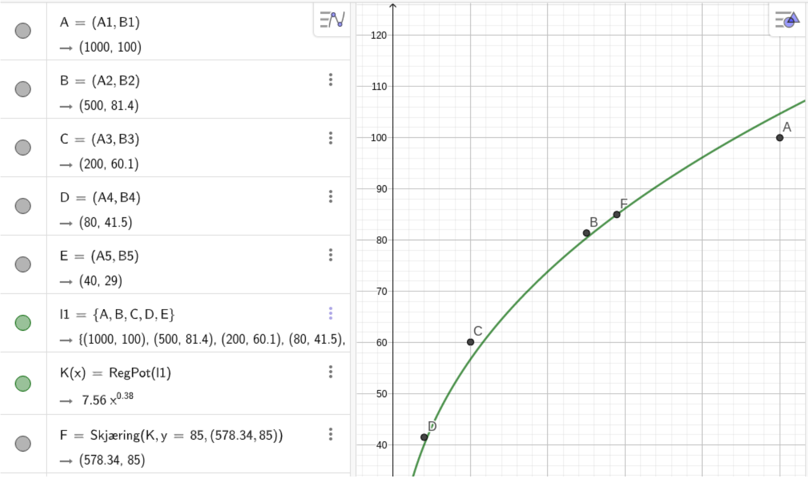
der f er lufttrykket og x er km over havet.

Lisas modell:

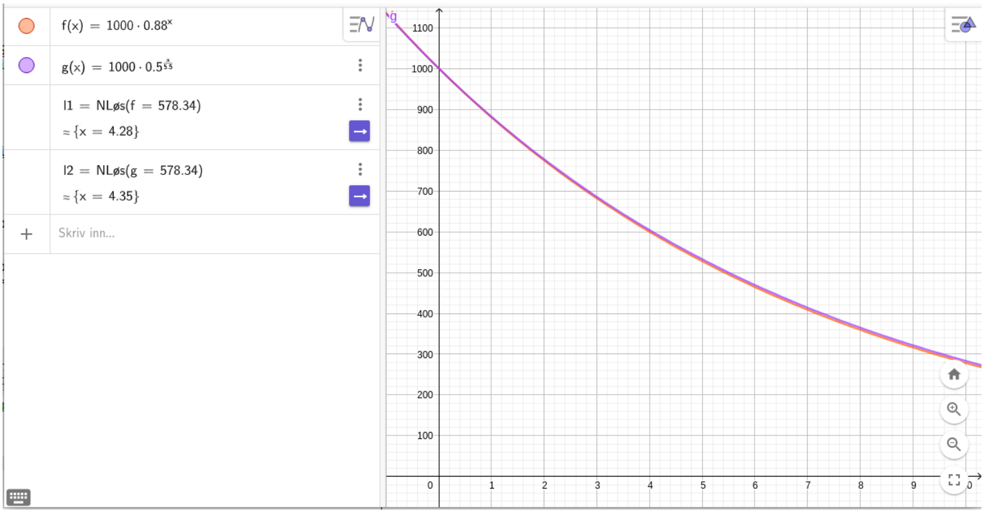
$$g(x) = 1000 \cdot 0.5^{\frac{x}{5.5}}$$

der g er lufttrykket og x er km over havet.

c) Ved å skrive `Skjæring(K, y=85)`, finner vi at lufttrykket har verdi 578.34 når kokepunktet er 85°. Vi skriver så modellene til Ari og Lisa inn i GeoGebra, og finner at begge modellene gir en høyde på ca. 4.3 km over havet.



	A	B
1	1000	100
2	500	81.4
3	200	60.1
4	80	41.5
5	40	29
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		

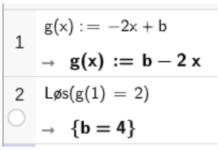


f(x) = 1000 · 0.88^x
g(x) = 1000 · 0.5^(x/5.5)
l1 = NLøs(f = 578.34)
≈ {x = 4.28}
l2 = NLøs(g = 578.34)
≈ {x = 4.35}
Skriv inn...
g
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Oppgave 6

Vi definerer $g(x) = ax + b$ som tangeringslinja til f i punktet $P = (1, 2)$. Av figuren ser vi at for $x = 1$ er stigningstallet til g lik -2. Siden grafen til g skjærer grafen til f i P, har vi at $g(1) = 2$. Ved å løse denne ligningen får vi at

$$g(x) = -2x + 4$$



Oppgave 7

Ut ifra figur og krav ser vi at det kan passe med en tredjegradsfunksjon, en andregradsfunksjon og en lineær funksjon. Vi setter

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

I bunnpunktet til en funksjon er den deriverte lik 0, og da er

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0$$

Siden bunnpunktet ligger på y-aksen har vi at

$$f'(0) = c = 0$$

Vi velger oss derfor

$$f(x) = x^2(x + 2)$$

Da har $(0, f(0))$ og $(-2, f(-2))$ samme y-verdi, nemlig 0. For at andregradsfunksjonen vår skal ha bunnpunkt i $x = 0$, må vi også kreve at leddet proporsjonalt med x er lik 0 (på samme måte som vi fikk $c = 0$ for f). For at den i tillegg skal ha $(-2, 0)$ på grafen, tar vi med faktoren $x + 2$. Disse to kravene gir oss at

$$g(x) = (x + 2)(x - 2)$$

Til slutt finner vi linja mellom to punkt på grafene til f og g, og får funksjonen

$$h(x) = -3x + 6$$