Vedlegg A: Tangeringslinja til en graf

Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se *figur 1a*.)

Gitt en deriverbar funksjon $f(x)$. Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til f i punktet* $(a, f(a))$ som linja som går gjennom $(a, f(a))$ og har stigningstall $f'(a)$ (Spivak, 1994). (Se *Figur 1b*.)

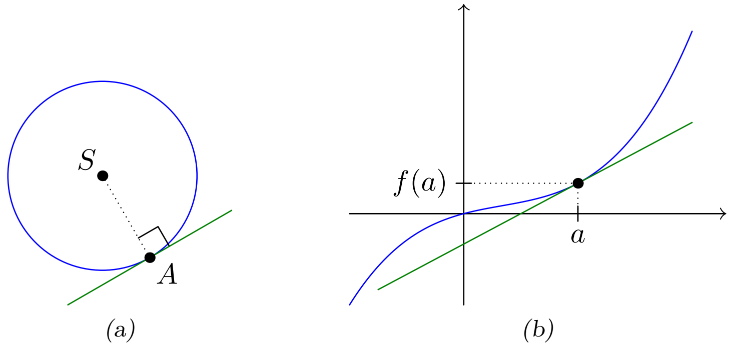


Figure 1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

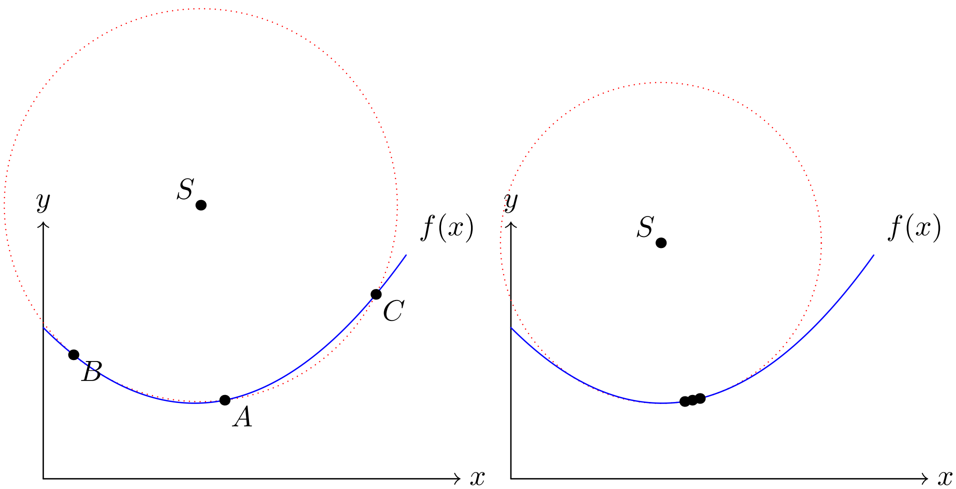
Senteret til krumningen

Gitt en funksjon $\vec{r}(t) = [f(t), g(t)]$ der f og g er kontinuerlige og to ganger deriverbare for alle $t \in \mathbb{R}$, og hvor $f''(t), g''(t) \neq 0$. For $a, h \in \mathbb{R}$ setter vi $b = a - h$ og $c = a + h$. Videre innfører vi punktene

$$A = \vec{r}(a) \quad , \quad B = \vec{r}(b) \quad , \quad C = \vec{r}(c)$$

I tillegg introduserer vi skrivemåten $k_d^{\hat{n}}(t)$, hvor $\hat{n}$ erstattet med n eksemplar av $'$ viser til den n-te deriverte av funksjonen $k(t)$ i punktet d.

La $S = (S_x, S_y)$ være sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$. På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne **krumningen** i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$ når h går mot 0.



(a) (b)

Figure 2

Et likningssett for S

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [f_s - f_b, g_a - g_b]$$

$$\overrightarrow{AC} = [f_c - f_a, g_c - g_a]$$

La B_m og C_m være midptunktene til henholdsvis (sekantene) AB og AC. Da er

$$B_m = \frac{1}{2}(A + B) \qquad , \qquad C_m = \frac{1}{2}(A + C)$$

$[g_a - g_b, f_b - f_a]$ er en normalvektor for $\overrightarrow{BA}$, dette betyr at midtnormalen $\boldsymbol{l}_1$ til AB kan parameterisere som

$$\boldsymbol{l}_1(p) = B_m + [g_a - g_b, f_b - f_a]p$$

Tilsvarende er midtnormalen $\boldsymbol{l}_2$ til AC parameterisert ved

$$\boldsymbol{l}_2(q) = C_m + [g_a - g_c, f_c - f_a]q$$

S sammenfaller med skjæringspunktet til $\boldsymbol{l}_1$ og $\boldsymbol{l}_2$. Ved å kreve at $\boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2$, får vi et lineært likningssett med p og q som ukjente. La $q = q_s$ være løsningen av dette likningssettet, da vet vi at

$$S = C_m + [g_a - g_c, f_c - f_a]q_s$$

Videre er

$$\lim_{h\to 0} S = \lim_{h\to 0} \left(C_m + [g_a - g_c, f_c - g_a] \frac{h}{h} q_s \right) = A + [g'_a, -f'_a] \lim_{h\to 0} hq_s$$

At grensen $\lim\limits_{h\to 0} hq_s$ eksisterer viser vi avslutningsvis, og observerer nå dette: Når $h \to 0$, blir $\overrightarrow{AS}$ parallell med vektoren $[g'_a, -f'_a]$. Vi har at $\vec{r}'(a) = [f'_a, g'_a]$, og dermed er er

$$\overrightarrow{AS} \cdot \vec{r}\,'(a) = 0$$

Linja som går gjennom punktet $\vec{r}(a)$, og som har $\vec{r}\,'(a)$ som retningsvektor er altså en tangeringslinje til sirkelen som beskriver krumningen til $\vec{r}$ i a.

Undersøkelse av grenseverdien

Ved å løse det nevnte ligningssettet, finner vi at

$$q_s = \frac{1}{2} \frac{f_c(f_c - f_a) + f_b(f_a - f_c) + g_c(g_c - g_a) + g_b(g_a - g_c)}{f_b(g_c - g_a) + f_c(g_a - g_b) + f_a(g_b - g_c)}$$

Videre er

$$\lim_{h\to 0} q_s = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} q_s = \lim_{h\to 0} \frac{f_c f'_a - f_b f'_a + g_c g'_a - g_b g'_a}{f_b g'_a + f_c g'_b - 2 f_a g'_a}$$

Ved samme prosedyre har vi at

$$\lim_{h\to 0} q_s = \lim_{h\to 0} \frac{(f'_a)^2 + (g'_a)^2}{f'_a g'_b - f'_b g'_a}$$

Videre har vi at

$$\lim_{h\to 0} hq_s = h \frac{(f'_a)^2 + (g'_a)^2}{f'_a g'_b - f'_b g'_a - f'_b g'_b + f'_b g'_b} = \frac{(f'_a)^2 + (g'_a)^2}{f''_b g'_b + f'_b g''_b}$$