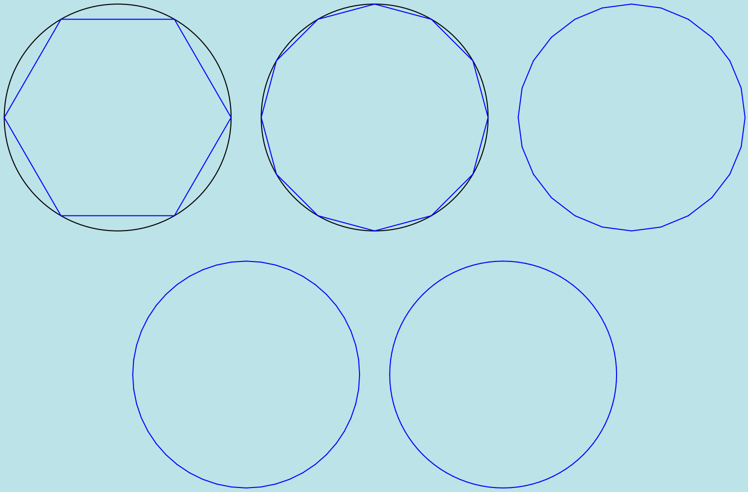
Matematikkens byggesteiner



Sindre Sogge Heggen

*"Wahrlich es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen,
nicht das Besitzen, sondern das Erwerben,
nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen,
was den grössten Genuss gewährt"*

*"Det er ikke å vite, men å lære,
ikke å eie, men å erverve,
ikke å være til stede, men å komme dit,
som gir den største gleden."*

— Carl Friedrich Gauss

This book is part of the OpenMathBooks project. OpenMathBooks © 2022 by Sindre Sogge Heggen is licensed under CC BY-NC-SA 4.0. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

04.11.2023

Forord

Matematikk har et enormt omfang av forgreninger og anvendelser, men det aller meste bygger på en overkommeleg mengde med grunnprinsipper. Det er disse jeg ønsker å presentere i denne boka. Et prinsipp i oppsummert form har jeg valgt å kalle en *definisjon* eller en *regel*. Regler/definisjoner finner du i blå tekstbokser, som oftest etterfulgt av eksempler på bruken av dem. Ett av hovudmålene til denne boka er å gi leseren en forståelse av hvorfor reglene er som de er. I kapittel 1 - 5 vil du finne forklaringer[1] i forkant av hver regel, mens i kapittel 6 finner du forklaringer enten i forkant av eller direkte etter en regel (og eventuelle eksempel). Fra og med kapittel 7 er noen forklaringer lagt til den avsluttende seksjonen *Forklaringer*. Dette indikerer at de kan vere noe krevende å forstå og/eller at regelen er så intuitiv at mange vil oppleve det som overflødig å få den forklart.

Boka si oppbygging

Boka er delt inn i en *Del I* og en *Del II*. *Del I* handler i stor grad om å bygge en grunnleggende forståelse av tallene våre, og hvordan vi regner med dem. *Del II* introduserer konseptet algebra og de nært beslektede temaene potenser, likninger og funskjoner. I tillegg har både *Del I* og *Del II* avsluttende kapittel som handler om geometri.

[1] Å *forklare* reglene i steden for å *bevise* dem er et bevisst valg. Et bevis stiller sterke matematiske krav som ofte må defineres både på forhand og underveis i en utledning av en regel, noe som kan føre til at forståelsen av hovedpoenget drukner i smådetaljer. Mange av forklaringene vil likevel være gyldige som bevis.

Takk til

Anne Jordal Myrset

Charlotte Merete Dahl

For mange gode innspill og kommentarer.

Symbol

$=$	"er lik"
$<$	"er mindre enn"
$>$	"er større enn"
$\leq$	"er mindre enn eller lik"
$\geq$	"er større enn eller lik"
$\in$	"er inneholdt i"
$\vee$	"eller"
$\wedge$	"og"
$[a, b]$	lukket intervall fra og med a til og med b
$\|a\|$	lengden/tallverdien til a
$\perp$	"vinkelrett på"
$\parallel$	"parallell med"
$\triangle$	"trekant"
$\square$	"firkant"

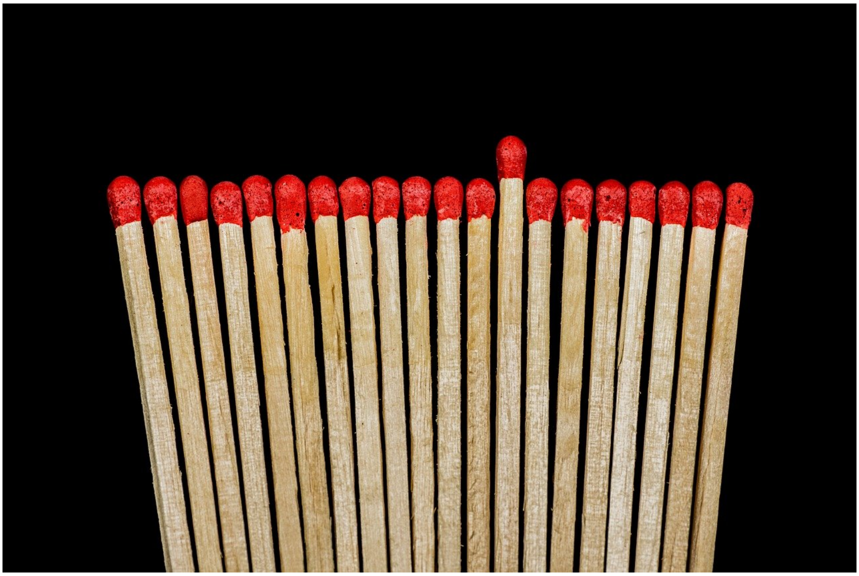
Innhold

Del I

Tall, rekning og geometri

Kapittel 1

Tallene våre



Bilde fra pixabay.com

1.1 Likhetstegnet, mengder og tallinjer

Likhetstegnet

Som navnet tilsier, viser **likhetstegnet** $=$ til at noe er likt. I hvilken grad og når man kan si at noe er likt er en filosofisk diskusjon, og innledningsvis er vi bare prisgitt dette: *Hvilken likhet* $=$ *sikter til må bli forstått ut ifra konteksten tegnet blir brukt i.* Med denne forstelsen av $=$ kan vi studere noen grunnleggende egenskaper for tallene våre, og så komme tilbake til mer presise betydninger av tegnet.

Språkboksen

Vanlige måter å si $=$ på er

- ”er lik”
- ”er det samme som”

Mengder og tallinjer

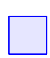
Tall kan representere så mangt. I denne boka skal vi holde oss til to måter å tolke tallene på; tall som en *mengde* og tall som en *plassering på en linje*. Alle representasjoner av tall tar utganspunkt i hva forståelsen er av tallene 0 og 1.

Tall som mengde

Når vi snakkar om en mengde, vil tallet 0 være[1] knyttet til ”ingenting”. En figur der det ikke er noe til stede vil slik være det samme som 0:

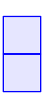
$$= 0$$

1 vil vi tegne som en rute:

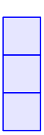


$= 1$

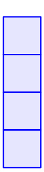
Andre tall vil da være definert ut ifra hvor mange ”enerruter” (”enere”) vi har:



$= 2$



$= 3$

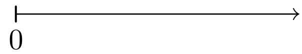


$= 4$

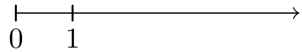
[1] I kapittel 2 skal vi se at det også er andre tolkninger av 0.

Tall som plassering på ei linje

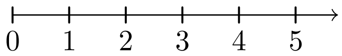
Når vi plasserer tall på en linje, vil 0 være utgangspunket vårt:



Så plasserer vi 1 en viss lengde til høyre for 0:



Andre tall vil da være definert ut ifra hvor mange enerlengder (enere) vi er unna 0:



Positive heltall

Vi skal straks se at tall ikke nødvendigvis trenger å være *hele* antall enere, men tallene som *er* det har et eget navn:

1.1 Positive heltall

Tall som er et helt antall enere kalles **positive**[1]**heltall**. De positive heltallene er

$$1, 2, 3, 4, 5 \text{ og så videre.}$$

Positive heltall blir også kalt **naturlige tal**.

Hva med 0?

Noen forfattere inkluderer også 0 i begrepet naturlige tal. I noen sammenhenger vil dette lønne seg, i andre ikke.

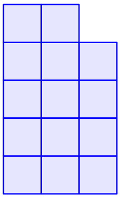
[1]Hva ordet 'positiv' innebærer skal vi se i kapittel 5.

1.2 Tall, siffer og verdi

Tallene våre er bygd opp av **sifrene** $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og *plasseringen* av dem. Sifrene og deres plassering definerer[1] **verdien** til tallet.

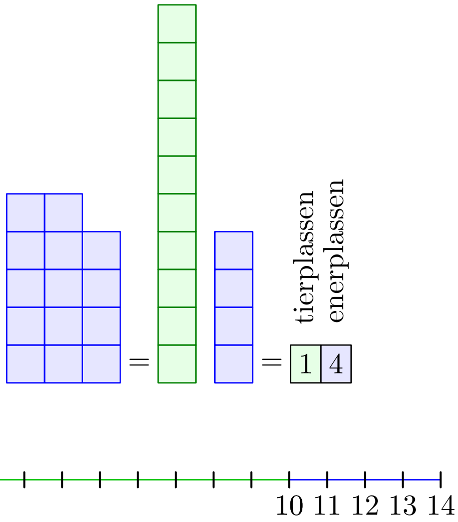
Heltall større enn 9

La oss som et eksempel skrive tallet 'fjorten' ved hjelp av sifrene våre.

fjorten =


En gruppe med ti enere kaller vi en "tier". Av fjorten kan vi lage 1 tier, og i tillegg har vi da 4 enere. Da skriver vi 'fjorten' slik:

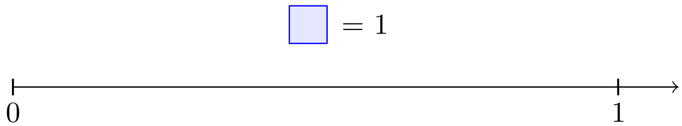
$$\text{fjorten} = 14$$



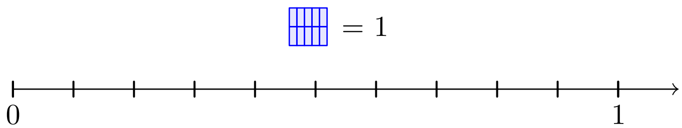
[1]Etter hvert skal vi også se at *fortegn* er med på å definere verdien til tallet (se kapittel 5).

Desimaltall

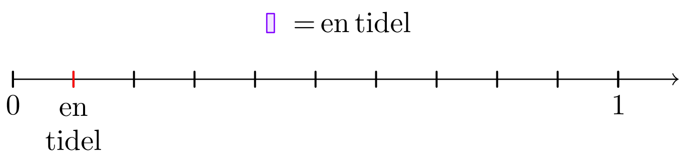
I mange tilfeller har vi ikke et helt antall enere, og da vil det være behov for å dele 1 inn i mindre biter. La oss starte med å tegne en ener:



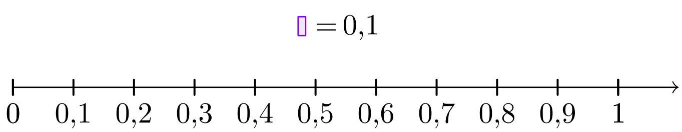
Så deler vi eneren vår inn i 10 mindre biter:



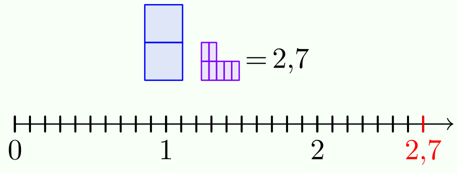
Siden vi har delt 1 inn i 10 biter, kaller vi en slik bit for "en tidel":



Tideler skriver vi ved hjelp av **desimaltegnet** , :



Eksempel



Språkboksen

På engelsk bruker man punktum . som desimaltegn:

$$3{,}5 \quad (\textit{norsk})$$
$$3.5 \quad (\textit{english})$$

Titallsystemet

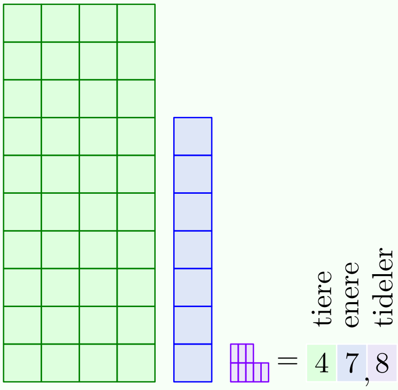
Vi har nå sett hvordan vi kan uttrykke verdien til tall ved å plassere siffer etter antall tiere, enere og tideler, og det stopper selvsagt ikke der:

1.2 Titallsystemet

Verdien til et tall er gitt av sifrene $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ og 9, og plasseringen av dem. Med sifferet som angir enere som utgangspunkt vil

- siffer til venstre (i rekkefølge) indikere antall tiere, hundrere, tusener og så videre.
- siffer til høyre (i rekkefølge) indikere antall tideler, hundredeler, tusendeler og så videre.

Eksempel 1



Eksempel 2

tusener hundrere tiere enere tideler hundredeler

3805,72

1.3 Partall og oddetall

Heltall som har 0, 2, 4, 6 eller 8 på enerplassen kalles **partall**.

Heltall som har 1, 3, 5, 7 eller 9 på enerplassen kalles **oddetall**.

Eksempel

De ti første (positive) partallene er

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ \text{og}\ 18$$

De ti første (positive) oddetallene er

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ \text{og}\ 19$$

1.3 Koordinatsystem

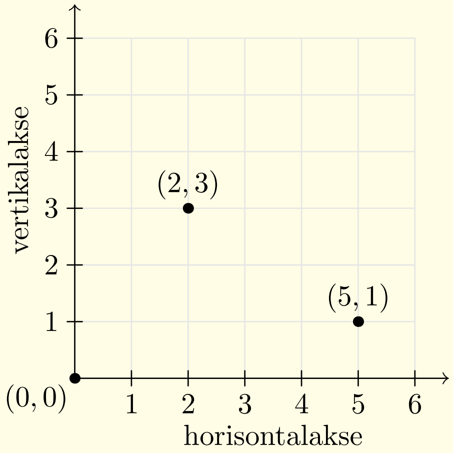
I mange tilfeller er det nyttig å bruke to tallinjer samtidig. Dette kaller vi et **koordinatsystem**. Vi plasserer da én tallinje (en akse) som går *horisontalt* og én som går *vertikalt*. En plassering i et koordinatsystem kaller vi et **punkt**.

Strengt tatt finnes det mange typer koordinatsystem, men i denne boka bruker vi ordet om bare én sort, nemlig det **kartesiske koordinatsystem**. Det er oppkalt etter den franske filosofen og matematikeren René Descartes.

Et punkt skriver vi som to tall inni en parentes. De to tallene blir kalt **førstekoordinaten** og **andrekoordinaten** til punktet.

- Førstekoordinaten forteller oss hvor langt vi skal gå langs horisontalaksen.
- Andrekoordinaten forteller oss hvor langt vi skal gå langs vertikalaksen.

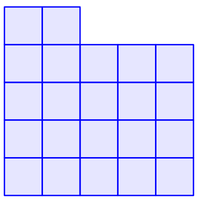
I figuren ser vi punktene $(2, 3)$, $(5, 1)$ og $(0, 0)$. Punktet der aksene møtes, altså $(0, 0)$, kalles **origo**.

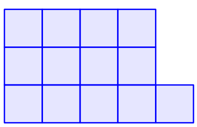


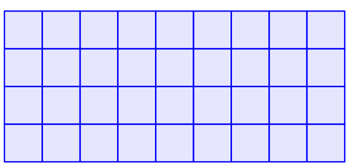
Oppgaver for kapittel 1

1.1.1

Skriv verdien til tallet.

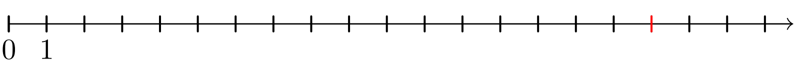
a) 

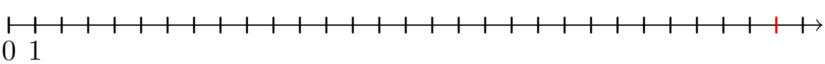
b) 

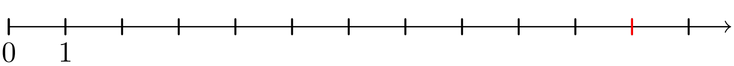
c) 

1.1.2

Skriv verdien til tallet som er markert med rødt.

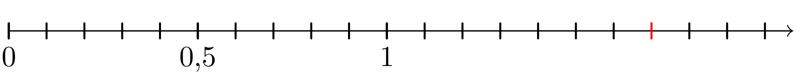
a) 

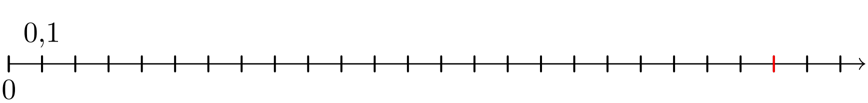
b) 

c) 

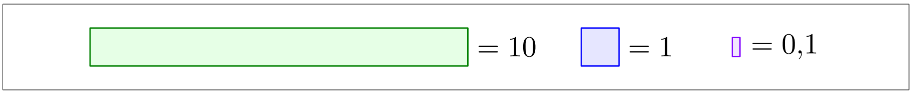
1.1.3

Skriv verdien til tallet som er markert med rødt.

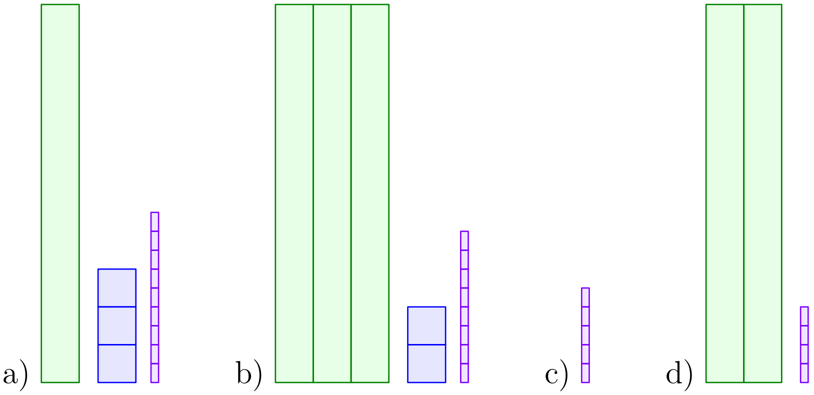
a) 

b) 

1.1.4

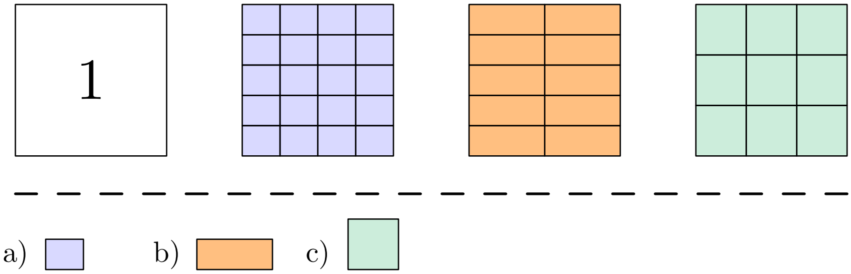


Skriv verdien til tallet.



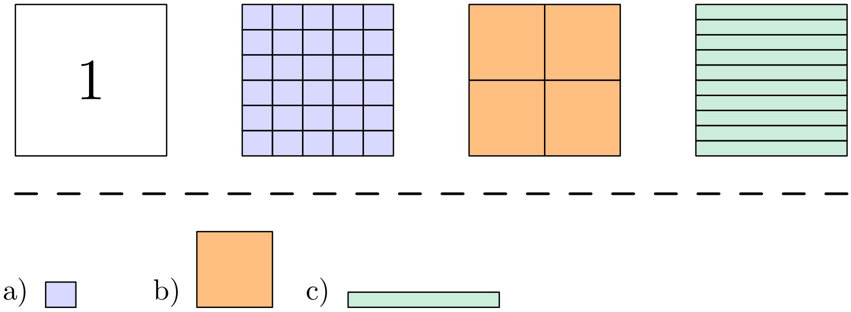
1.1.5

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.



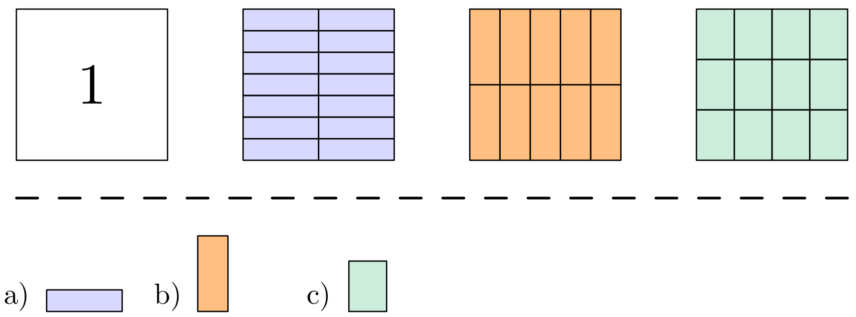
1.1.6

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.



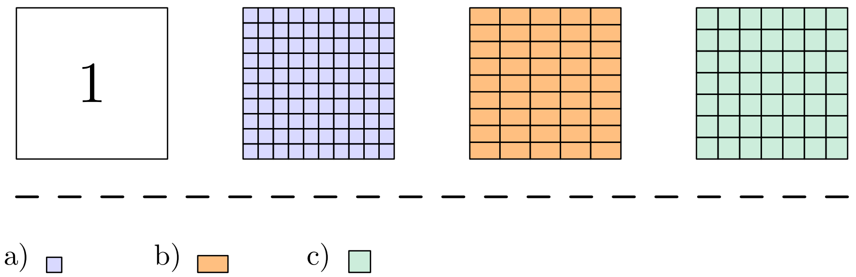
1.1.7

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,1.



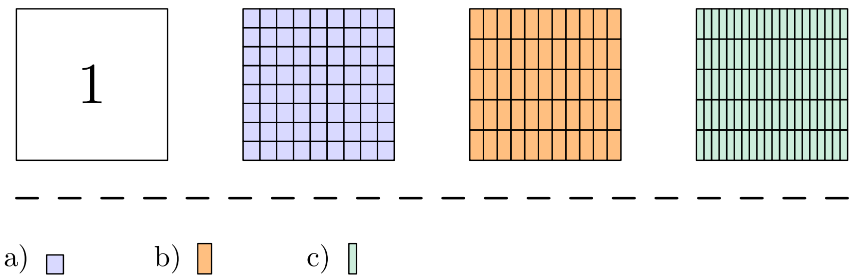
1.1.8

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,01.



1.1.9

Velg hvilken av a), b) og c) som har verdien 0,01.



Kapittel 2

De fire regneartene

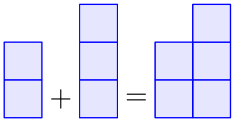
Bilde fra pxhere.com

2.1 Addisjon

Addisjon med mengder; å legge til

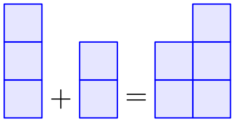
Når vi har en mengde og skal legge til mer, bruker vi **plusstegnet** $+$. Har vi 2 og skal legge til 3, skriver vi

$$2 + 3 = 5$$



Rekkefølgen vi legger sammen tallene på har ikke noe å si; å starte med 2 og så legge til 3 er det samme som å starte med 3 og så legge til 2:

$$3 + 2 = 5$$



Språkboksen

Et addisjonsstykke består av to eller flere **ledd** og én **sum**. I regnestykket

$$2 + 3 = 5$$

er både 2 og 3 ledd, mens 5 er summen.

Vanlige måter å si $2 + 3$ på er

- ”2 pluss 3”
- ”2 addert med 3”
- ”2 og 3 lagt sammen”

Det å legge sammen tall kalles også *å summere*.

2.1 Addisjon er kommutativ

Summen er den samme uansett rekkefølge på leddene.

Eksempel

$$2 + 5 = 7 = 5 + 2$$

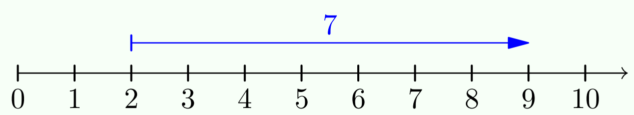
$$6 + 3 = 9 = 3 + 6$$

Addisjon på tallinja; Vandring mot høyre

På en tallinje vil addisjon med positive tall innebære vandring *mot høyre*:

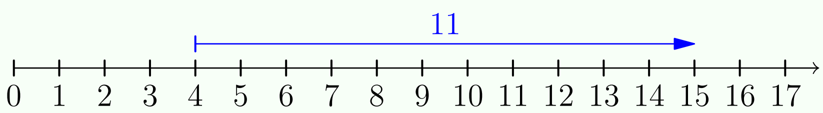
Eksempel 1

$$2 + 7 = 9$$



Eksempel 2

$$4 + 11 = 15$$



Betydningen av $=$

$+$ gir oss muligheten til å uttrykke tall på mange forskjellige måter, for eksempel er $5 = 2 + 3$ og $5 = 1 + 4$. I denne sammenhengen vil $=$ bety "har samme verdi som". Dette gjelder også ved subtraksjon, multiplikasjon og divisjon, som vi skal se på i de neste tre seksjonene.

2.2 Subtraksjon

Subtraksjon med mengder: Å trekke ifra

Når vi har en mengde og tar bort en del av den, bruker vi **minustegnet** $-$. Har vi 5 og skal ta bort 3, skriver vi

$$5 - 3 = 2$$

Språkboksen

Et subtraksjonsstykke består av to eller flere **ledd** og én **differanse**. I subtraksjonsstykket

$$5 - 3 = 2$$

er både 5 og 3 ledd og 2 er differansen.

Vanlige måter å si $5 - 3$ på er

- ”5 minus 3”
- ”5 fratrekt 3”
- ”3 subtrahert fra 5”

En ny tolkning av 0

Innledningsvis i denne boka nevnte vi at 0 kan tolkes som ”ingenting”. Subtraksjon gir oss muligheten til å uttrykke 0 via andre tall. For eksempel er $7 - 7 = 0$ og $19 - 19 = 0$.

Subtraksjon på tallinja: Vandring mot venstre

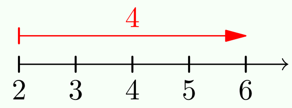
I seksjon 2.1 har vi sett at $+$ (med positive tall) innebærer at vi skal gå *mot høyre* langs tallinja. Med $-$ gjør vi omvendt, vi går *mot venstre*[1]:

Merk

I *Eksempel 1* og *Eksempel 2* under går vi i motsatt retning av den som pila peker i. Dette kan først virke litt rart, men spesielt i kapittel 5 vil det lønne seg å tenke slik.

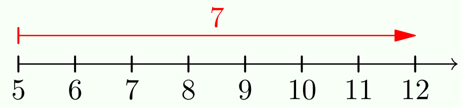
Eksempel 1

$$6-4=2$$



Eksempel 2

$$12-7=5$$



[1] I figurer med tallinjer vil rødfargede piler indikere at man starter ved pilspissen og vandrer til andre enden.

2.3 Multiplikasjon (ganging)

Ganging med heltall; innledende definisjon

Når vi legger sammen like tall, kan vi bruke **gangetegnet** $\cdot$ for å skrive regnestykkene våre kortere:

Eksempel

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5$$

Språkboksen

Et gangestykke består av to eller flere **faktorer** og ett **produkt**. I gangestykket

$$4 \cdot 3 = 12$$

er 4 og 3 faktorer, mens 12 er produktet.

Vanlige måter å si $4 \cdot 3$ på er

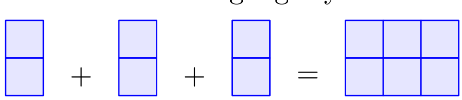
- "4 ganger 3"
- "4 ganget med 3"
- "4 multiplisert med 3"

Mange nettsteder og bøker på engelsk bruker symbolet $\times$ i steden for $\cdot$. I de fleste programmeringsspråk er * symbolet for multiplikasjon.

Ganging av mengder

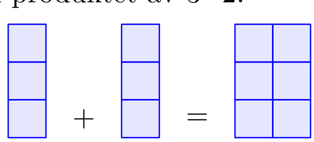
La oss nå bruke en figur for å se for oss gangestykket $2 \cdot 3$:

$2 \cdot 3 =$



Og så kan vi legge merke til produktet av $3 \cdot 2$:

$3 \cdot 2 =$



2.2 Multiplikasjon er kommutativ

Produktet er det samme uansett rekkefølge på faktorene.

Eksempel

$$3 \cdot 4 = 12 = 4 \cdot 3$$

$$6 \cdot 7 = 42 = 7 \cdot 6$$

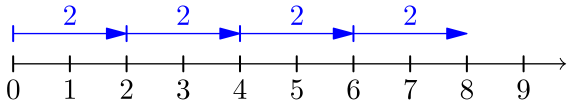
$$8 \cdot 9 = 72 = 9 \cdot 8$$

Ganging på tallinja

Vi kan også bruke tallinja for å regne ut gangestykker. For eksempel kan vi finne hva $2 \cdot 4$ er ved å tenke slik:

"$2 \cdot 4$ betyr å vandre 2 plasser *mot høyre*, 4 ganger."

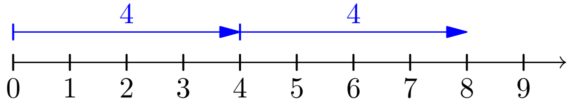
$$2 \cdot 4 = 8$$



Også tallinja kan vi bruke for å overbevise oss om at rekkefølgen i et gangestykke ikke har noe å si:

"$4 \cdot 2$ betyr å vandre 4 plasser *mot høyre*, 2 ganger."

$$4 \cdot 2 = 8$$



Endelig definisjon av ganging med positive heltall

Det ligger kanskje nærmest å tolke "2 ganger 3" som "3, 2 ganger". Da er

$$\text{"2 ganger 3"} = 3 + 3$$

På side 25 presenterete vi $2 \cdot 3$, altså "2 ganger 3", som $2 + 2 + 2$. Med denne tolkningen vil $3 + 3$ svare til $3 \cdot 2$, men nettopp det at multiplikasjon er en kommutativ operasjon (regel 2.2) gjør at den ene tolkningen ikke utelukker den andre; $2 \cdot 3 = 2 + 2 + 2$ og $2 \cdot 3 = 3 + 3$ er to uttrykk med samme verdi.

2.3 Ganging som gjentatt addisjon

Ganging med et positivt heltal kan uttrykkes som gjentatt addisjon.

Eksempel 1

$$4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$8 + 8 = 8 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 \cdot 5 = 5$$

Merk

At ganging med positive heltal kan uttrykkes som gjentatt addisjon, utelukker ikke andre uttrykk. Det er ikke feil å skrive at $2 \cdot 3 = 1 + 5$.

2.4 Divisjon (deling)

: er **divisjonstegnet**. I praksis har divisjon tre forskjellige betydninger, her eksemplifisert ved regnestykket $12 : 3$:

2.4 Divisjon sine tre betydninger

- **Inndeling av mengder**

  $12 : 3 =$ "Antallet i hver gruppe når 12 deles inn i 3 like store grupper"

- **Antall ganger**

  $12 : 3 =$ "Antall ganger 3 går på 12"

- **Omvendt operasjon av multiplikasjon**

  $12 : 3 =$ "Tallet man må gange 3 med for å få 12"

Språkboksen

Et divisjonsstykke består av en **dividend**, en **divisor** og en **kvotient**. I divisjonstykket

$$12 : 3 = 4$$

er 12 dividenden, 3 er divisoren og 4 er kvotienten.

Vanlige måter å uttale $12 : 3$ på er

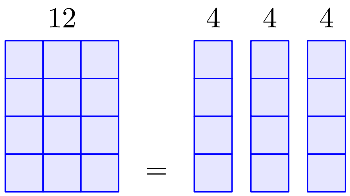
- "12 delt med/på 3"
- "12 dividert med/på 3"
- "12 på 3"

I noen sammenhenger blir $12 : 3$ kalt "**forholdet** mellom 12 og 3". Da er 4 **forholdstallet**.

Ofte brukes / i steden for :, spesielt i programmeringsspråk.

Divisjon av mengder

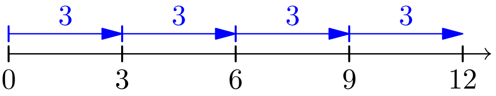
Regnestykket 12 : 3 forteller oss at vi skal dele 12 inn i 3 like store grupper:



Vi ser at hver gruppe inneholder 4 ruter, dette betyr at

$$12 : 3 = 4$$

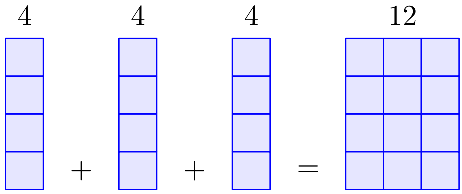
Antall ganger



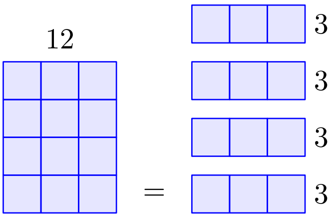
3 går 4 ganger på 12, altså er 12 : 3 = 4.

Omvendt operasjon av multiplikasjon

Vi har sett at hvis vi deler 12 inn i 3 like grupper, får vi 4 i hver gruppe. Altså er $12 : 3 = 4$. Om vi legger sammen igjen disse gruppene, får vi naturligvis 12:



Men dette er det samme som å gange 4 med 3. Altså; om vi vet at $4 \cdot 3 = 12$, så vet vi også at $12 : 3 = 4$. I tillegg vet vi da at $12 : 4 = 3$.



Eksempel 1

Siden $6 \cdot 3 = 18$, er

$$18 : 6 = 3$$

$$18 : 3 = 6$$

Eksempel 2

Siden $5 \cdot 7 = 35$, er

$$35 : 5 = 7$$

$$35 : 7 = 5$$

Oppgaver for kapittel 2

2.1.1

Skriv tallene som summen av to tall.

Eksempel
3 kan skrives som $1 + 2$

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8 f) 9

2.1.2

Skriv tallene som summen av tre tall.

Eksempel
4 kan skrives som $1 + 2 + 1$

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9 f) 10

2.1.3

To tall som til sammen utgjør 10 kalles **tiervenner**. For eksempel er 1 og 9 tiervenner fordi $1 + 9 = 10$.

1) Finn tiervennen til

   a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2) Når man har gjort oppgave 1), hvorfor er det ikke ”nødvendig” å finne tiervennene til 6, 7 og 8?

2.1.4

Merk: Du kan tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler. For bevis, se oppgave 14.

Velg rett alternativ av 1), 2) og 3).

a) Summen av to partall er
   1) et partall.
   2) et oddetall.
   3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

b) Summen av to oddetall er
   1) et partall.
   2) et oddetall.
   3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

c) Summen av et partall og et oddetall er
   1) et partall.
   2) et oddetall.
   3) noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

2.2.1

Skriv tallene som differansen mellom to tall.

Eksempel
1 kan skrives som $8 - 7$.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7 g) 8

2.2.2

(I denne oppgaven kan du tillate deg å svare på spørsmålene bare ved å prøve ut et par eksempler. For bevis, se oppgave oppgave 14.)

a) Differansen mellom to partall er
   1) Et partall.
   2) Et oddetall.
   3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

b) Differansen mellom to oddetall er
   1) Et partall.
   2) Et oddetall.
   3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

c) Differansen mellom et partall og et oddetall er
   1) Et partall.
   2) Et oddetall.
   3) Noen ganger et partall, andre ganger et oddetall.

2.3.1

Skriv som gangestykker og alternativ sum.

Eksempel
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5$

a) $2 + 2 + 2$

b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

c) $4 + 4$

d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$

e) $6 + 6 + 6 + 6$

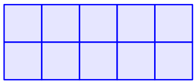
f) $7 + 7 + 7 + 7$

2.3.2

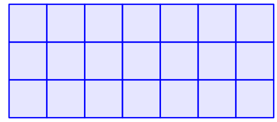
Tegn ruter og finn svaret på gangestykket.

Eksempel

$2 \cdot 5 = 10$



$3 \cdot 7 = 21$



a) $4 \cdot 5$ b) $8 \cdot 3$ c) $2 \cdot 9$ d) $5 \cdot 6$ e) $7 \cdot 8$

2.3.3

a) Vil et heltall ganget med 2 alltid resultere i et partall eller et oddetall?

b) Vil et partall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?

c) Vil et oddetall ganget med 5 alltid resultere i et partall eller et oddetall? Hvilket siffer vil alltid stå på enerplassen?

Kapittel 3

Faktorisering og regnerekkefølge

3.1 Regnerekkefølge

Prioriteringen av regneartene

Se på følgende regnestykke:

$$2 + 3 \cdot 4$$

Et slikt regnestykke *kunne* man tolket på to måter:

(i) "2 pluss 3 er 5. 5 ganget med 4 er 20. Svaret er 20."

(ii) "3 ganget med 4 er 12. 2 pluss 12 er 14. Svaret er 14."

Men svarene blir ikke like! Det er altså behov for å ha noen regler om hva vi skal regne ut først. Den ene regelen er at vi må regne ut ganging eller deling *før* vi legger sammen eller trekker ifra, dette betyr at

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 4 &= \text{"Regn ut } 3 \cdot 4\text{, og legg sammen med 2"} \\ &= 2 + 12 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Men hva om vi ønsket å legge sammen 2 og 3 først, og så gange summen med 4? Å fortelle at noe skal regnes ut først gjør vi ved hjelp av parenteser:

$$\begin{aligned} (2 + 3) \cdot 4 &= \text{"Legg sammen 2 og 3, og gang med 4 etterpå"} \\ &= 5 \cdot 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

3.1 Regnerekkefølge

1. Uttrykk med parentes
2. Multiplikasjon eller divisjon
3. Addisjon eller subtraksjon

Eksempel 1

Regn ut

$$23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7$$

Svar

$$\begin{aligned}23 - (3 + 9) + 4 \cdot 7 &= 23 - 12 + 4 \cdot 7 && \text{Parentes}\\ &= 23 - 12 + 28 && \text{Ganging}\\ &= 39 && \text{Addisjon og subtraksjon}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Regn ut

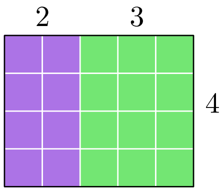
$$18 : (7 - 5) - 3$$

Svar

$$\begin{aligned}18 : (7 - 5) - 3 &= 18 : 2 - 3 && \text{Parentes}\\ &= 9 - 3 && \text{Deling}\\ &= 6 && \text{Addisjon og subtraksjon}\end{aligned}$$

Ganging med parentes

Hvor mange ruter ser vi i figuren under?



To måter man kan tenke på er disse:

(i) Det er $2 \cdot 4 = 8$ lilla ruter og $3 \cdot 4 = 12$ grønne ruter. Til sammen er det $8 + 12 = 20$ ruter. Dette kan vi skrive som

$$2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 20$$

(ii) Det er $2 + 3 = 5$ ruter bortover og 4 ruter oppover. Altså er det $5 \cdot 4 = 20$ ruter totalt. Dette kan vi skrive som

$$(2 + 3) \cdot 4 = 20$$

Av disse to utregningene har vi at

$$(2+3)\cdot 4 = 2\cdot 4 + 3\cdot 4$$

3.2 Ganging med parentes (distributiv lov)

Når et parentesuttrykk er en faktor, kan vi gange de andre faktorene med hvert enkelt ledd i parentesuttrykket.

Eksempel 1

$$(4+7)\cdot 8 = 4\cdot 8 + 7\cdot 8$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(10-7)\cdot 2 &= 10\cdot 2 - 7\cdot 2\\ &= 20-14\\ &= 6\end{aligned}$$

Merk: Her vil det selvsagt være raskere å regne slik:

$$(10-7)\cdot 2 = 3\cdot 2 = 6$$

Eksempel 2

Regn ut $12\cdot 3$.

Svar

$$\begin{aligned}12\cdot 3 &= (10+2)\cdot 3\\ &= 10\cdot 3 + 2\cdot 3\\ &= 30+6\\ &= 36\end{aligned}$$

Merk

Vi introduserte parenteser som en indikator på hva som skulle regnes ut først, men regel 3.2 gir en alternativ og likeverdig betydning av parenteser.

Å gange med 0

Vi har tidligere sett at 0 kan skrives som en differanse mellom to tall, og dette kan vi nå utnytte til å finne produktet når vi ganger med 0. La oss se på regnestykket

$$(2-2)\cdot 3$$

Av regel 3.2 har vi at

$$\begin{aligned}(2-2)\cdot 3 &= 2\cdot 3 - 2\cdot 3\\ &= 6-6\\ &= 0\end{aligned}$$

Siden $0 = 2-2$, må dette bety at

$$0\cdot 3 = 0$$

3.3 Gonging med 0

Viss 0 er en faktor, er produktet lik 0.

Eksempel 1

$$7\cdot 0 = 0$$

$$0\cdot 219 = 0$$

Assosiative lover

3.4 Assosiativ lov ved addisjon

Plasseringen av parenteser mellom ledd har ingen påvirkning på summen.

Eksempel

$$(2+3)+4 = 5+3 = 9$$

$$2+(3+4) = 2+7 = 9$$

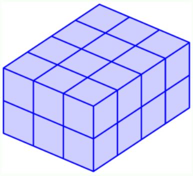
3.5 Assosiativ lov ved multiplikasjon

Plasseringen av parenteser mellom faktorer har ingen påvirkning på produktet.

Eksempel

$$(2 \cdot 3) \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$$

$$2 \cdot (3 \cdot 4) = 2 \cdot 12 = 24$$



I motsetning til addisjon og multiplikasjon, er hverken subtraksjon eller divisjon assosiative:

$$(12 - 5) - 4 = 7 - 4 = 3$$

$$12 - (5 - 4) = 12 - 1 = 11$$

$$(80 : 10) : 2 = 8 : 2 = 4$$

$$80 : (10 : 2) = 80 : 5 = 16$$

Vi har sett at parentesene hjelper oss med å si noe om *prioriteringen* av regneartene, men det at subtraksjon og divisjon ikke er assosiative fører til at vi også må ha en regel for hvilken *retning* vi skal regne i.

3.6 Retning på utregninger

Regnearter som ut ifra regel 3.1 har lik prioritet, skal regnes fra venstre mot høyre.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 12 - 5 - 4 &= (12 - 5) - 4 \\ &= 7 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 80 : 10 : 2 &= (80 : 10) : 2 \\ &= 8 : 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} 6 : 3 \cdot 4 &= (6 : 3) \cdot 4 \\ &= 2 \cdot 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

3.2 Faktorisering

Når en heltalls dividend og en heltalls divisor resulterer i en heltalls kvotient, sier vi at dividenden er **delelig** med divisoren. For eksempel er 6 delelig med 3 fordi $6 : 3 = 2$, og 40 er delelig med 10 fordi $40 : 10 = 4$. Begrepet delelig er med på å definere **primtall**:

3.7 Primtall

Et naturlig tall som er større enn 1, og som bare er delelig med seg selv og 1, er et primtall.

Eksempel

De fem første primtallene er $2, 3, 5, 7$ og 11.

3.8 Faktorisering

Faktorisering innebærer å skrive et tall som et produkt av andre tall.

Eksempel

Faktoriser 24 på tre forskjellige måter.

Svar

$$24 = 2 \cdot 12$$

$$24 = 3 \cdot 8$$

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Språkboksen

Da 12 er delelig med 4, sier vi at 4 er en faktor i 12.

3.9 Primtallsfaktorisering

Faktorisering med bare primtall som faktorer kalles **primtallsfaktorisering**.

Eksempel

Skriv 12 på primtallsfaktorisert form.

Svar

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Primtallene mellom 1-100

91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10

Oppgaver for kapittel 3

3.1.1

Regn ut ved å skrive tallene som summen av enere, tiere og hundrere, og bruk distributiv lov.

Eksempel

$15 \cdot 3 = (10+5) \cdot 3 = 10 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 30 + 15 = 45$

$147 \cdot 2 = (100+40+7) \cdot 2 = 100 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 200 \cdot 80 + 14 = 294$

a) $17 \cdot 2$ b) $59 \cdot 3$ c) $25 \cdot 4$ d) $582 \cdot 2$ e) $981 \cdot 3$

3.2.1

Skriv tallene som et gangestykke med to faktorer.

a) 100 b) 30 c) 40 d) 70

e) 42 f) 32 g) 84 h) 90

3.2.2

Primtallsfaktoriser tallene fra oppgave 3.2.1.

Merk: Det er anbefalt at leseren finner sin egen metode for å primtallsfaktorisere tall, men for den som ønsker en skjematisk metode vises det til oppgave 3.2.5.

3.2.3

Faktoriser tallene fra oppgave 3.2.1 på tre forskjellige måter.

3.2.4

6 kalles et **perfekt tall** fordi summen av alle faktorene til 6 (inkludert 1, men ekskludert 6) er lik 6: $1 + 2 + 3 = 6$. Finn det neste perfekte tallet (det ligger mellom 15 og 30).

3.2.5

Eksemplene under viser en metode for å primtallsfaktorisere tall. Forklar metoden.

Eksempel 1

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

	:	
84	2	42
42	2	21
21	3	7

Eksempel 2

$595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$

	:	
595	5	119
119	7	17

Gruble 1
Forklar hvorfor produktet av to oddetall alltid er et oddetall.

Gruble 2
Beskriv en metode for å finne nye primtall.

Kapittel 4

Brøk

4.1 Introduksjon

4.1 Brøk som omskriving av delestykke

En brøk er en annen måte å skrive et delestykke på. I en brøk kaller vi dividenden for **teller** og divisoren for **nevner**.

$$1 : 4 = \frac{\overset{\longleftarrow \text{ Teller}}{1}}{\underset{\longleftarrow \text{ Nevner}}{4}}$$

Språkboksen

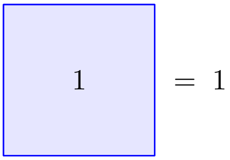
Vanlige måter å si $\frac{1}{4}$ på er[1]

- "én firedel"
- "1 av 4"
- "1 over 4"

[1] I tillegg har vi utsagnene fra språkboksen på side 28.

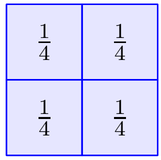
Brøk som mengde

La oss se på brøken $\frac{1}{4}$ som en mengde. Vi starter da med å tenke på tallet 1 som en rute[1]:



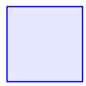
[1] Av praktiske årsaker velger vi oss her en enerrute som er større enn den vi brukte i kapittel 1.

Så deler vi denne ruten inn i fire mindre ruter som er like store. Hver av disse rutene blir da $\frac{1}{4}$ (1 av 4):



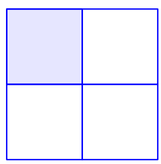
$$= 1$$

Har vi én slik rute, har vi altså 1 firedel:



$$= \frac{1}{4}$$

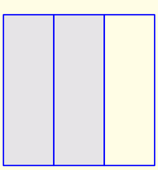
Men skal man bare ut ifra en figur kunne se hvor stor en brøk er, må man vite hvor stor 1 er, og for å få dette lettere til syne skal vi også ta med de "tomme" rutene:



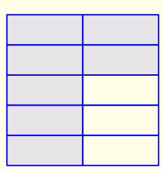
$$= \frac{1}{4}$$

Slik vil de blå og de tomme rutene fortelle oss hvor mange biter 1 er delt inn i, mens de blå rutene alene forteller oss hvor mange slike biter det *egentlig* er. Slik kan vi si at

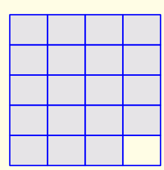
$$\begin{aligned} \text{antall blå ruter} &= \text{teller} \\ \text{antall blå ruter} + \text{antall tommme ruter} &= \text{nevner} \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{3}$$



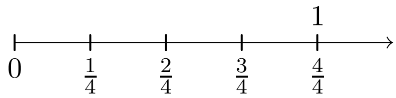
$$= \frac{7}{10}$$



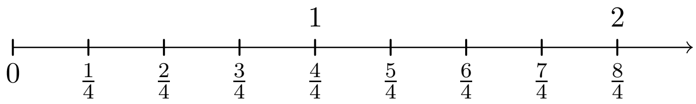
$$= \frac{19}{20}$$

Brøk på tallinja

På tallinja deler vi lengden mellom 0 og 1 inn i like mange lengder som nevneren angir. Har vi en brøk med 4 i nevner, deler vi lengden mellom 0 og 1 inn i 4 like lengder:



Tallinja er også fin å bruke for å tegne inn brøker som er større enn 1:



Teller og nevner oppsummert

Selv om vi har vært innom det allerede, er det så avgjørende å forstå hva telleren og nevneren sier oss at vi tar en kort oppsummering:

- Nevneren forteller hvor mange biter 1 er delt inn i.
- Telleren forteller hvor mange slike biter det er.

4.2 Verdi, utviding og forkorting av brøk

4.2 Verdien til en brøk

Verdien til en brøk finner vi ved å dele telleren med nevneren.

Eksempel

Finn verdien til $\frac{1}{4}$.

Svar

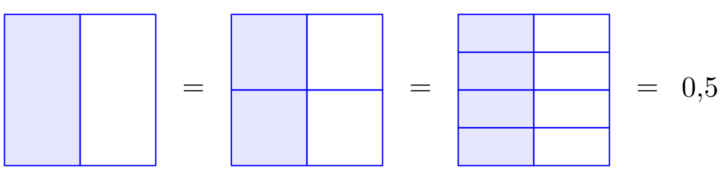
$$\frac{1}{4} = 0{,}25$$

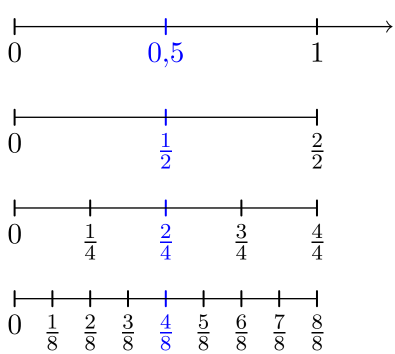
(Se kapittel 6 for hvordan man kan finne at $1 : 4 = 0{,}25$.)

Brøker med samme verdi

Brøker kan ha samme verdi selv om de ser forskjellige ut. Hvis du regner ut $1 : 2$, $2 : 4$ og $4 : 8$, får du i alle tilfeller 0,5 som svar. Dette betyr at

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$





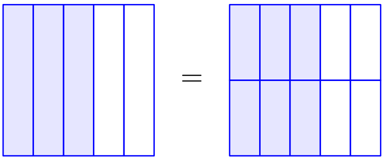
Utviding

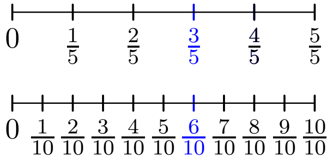
At brøker kan se forskjellige ut, men ha samme verdi, betyr at vi kan endre på utseendet til en brøk uten å endre verdien. La oss som eksempel gjøre om $\frac{3}{5}$ til en brøk med samme verdi, men med 10 som nevner:

- $\frac{3}{5}$ kan vi gjøre om til en brøk med 10 i nevner om vi deler hver femdel inn i 2 like biter, for da blir 1 til sammen delt inn i $5 \cdot 2 = 10$ biter.

- Telleren i $\frac{3}{5}$ forteller at der er 3 femdeler. Når disse blir delt i to, blir de totalt til $3 \cdot 2 = 6$ tideler. Altså har $\frac{3}{5}$ samme verdi som $\frac{6}{10}$.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$$





Forkorting

Vi kan også gå ”motsatt vei”. $\frac{6}{10}$ kan vi gjøre om til en brøk med 5 i nevner ved å dele både teller og nevner med 2:

$$\frac{6}{10} = \frac{6:2}{10:2} = \frac{3}{5}$$

> **4.3 Utviding og forkorting av brøk**
>
> Vi kan gange eller dele teller og nevner med det samme tallet uten at brøken endrer verdi.
>
> Å gange med et tall større enn 1 kalles å **utvide** brøken. Å dele med et tall større enn 1 kalles å **forkorte** brøken.

Eksempel 1

Utvid $\frac{3}{5}$ til en brøk med 20 som nevner.

Svar

Da $5 \cdot 4 = 20$, ganger vi både teller og nevner med 4:

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} &= \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{12}{20} \end{aligned}$$

Eksempel 2

Utvid $\frac{150}{50}$ til en brøk med 100 som nevner.

Svar

Da $50 \cdot 2 = 100$, ganger vi både teller og nevner med 2:

$$\begin{aligned} \frac{150}{50} &= \frac{150 \cdot 2}{50 \cdot 2} \\ &= \frac{300}{100} \end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort $\frac{18}{30}$ til en brøk med 5 som nevner.

Svar

Da $30 : 6 = 5$, deler vi både teller og nevner med 6:

$$\begin{aligned} \frac{18}{30} &= \frac{18 : 6}{30 : 6} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

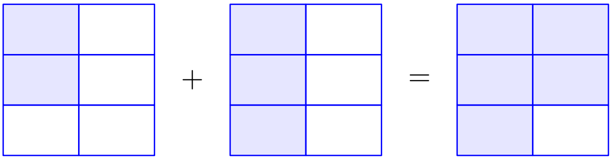
4.3 Addisjon og subtraksjon

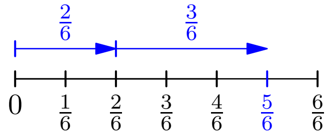
Addisjon og subtraksjon av brøker handler i stor grad om nevnerne. Husk at nevnerne forteller oss om inndelingen av 1. Hvis brøker har lik nevner, representerer de et antall biter med lik størrelse. Da gir det mening å regne addisjon eller subtraksjon mellom tellerne. Hvis brøker har ulike nevnere, representerer de et antall biter med ulik størrelse, og da gir ikke addisjon eller subtraksjon mellom tellerne direkte mening.

Lik nevner

Om vi for eksempel har 2 seksdeler og adderer 3 seksdeler, ender vi opp med 5 seksdeler:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$





4.4 Addisjon/subtraksjon av brøkar med lik nevner

Når vi regner addisjon/subtraksjon mellom brøker med lik nevner, finner vi summen/differansen av tellerne, og beholder nevneren.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{2}{7} + \frac{8}{7} &= \frac{2+8}{7}\\ &= \frac{10}{7}\end{aligned}$$

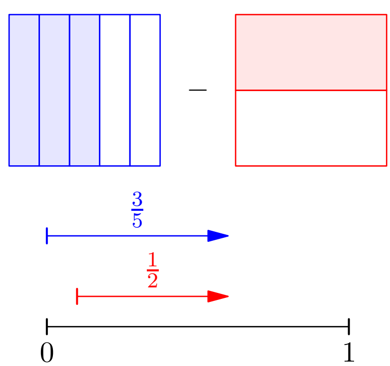
Eksempel 2

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}$$
$$=\frac{2}{9}$$

Ulike nevnere

La oss se på regnestykket[1]

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}$$

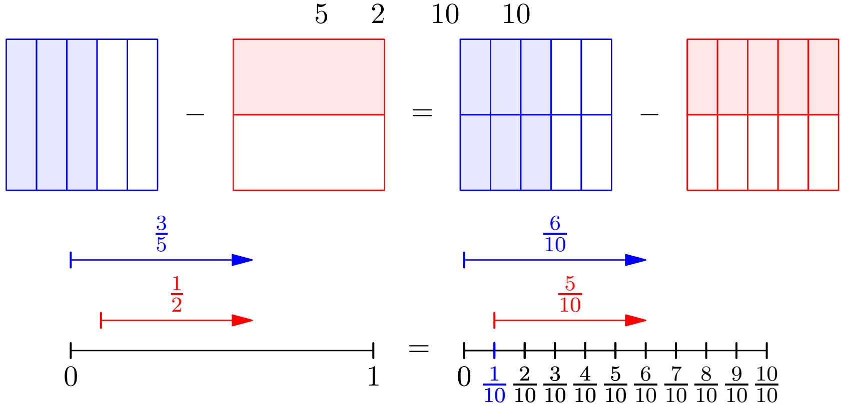


Skal vi skrive differansen som en brøk, må vi sørge for at brøkene har samme nevner. De to brøkene våre kan begge ha 10 som nevner:

$$\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}=\frac{6}{10}\qquad\qquad \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 5}=\frac{5}{10}$$

Dette betyr at

$$\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}$$



[1]Vi minner om at rødfargen på pila indikerer at man skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Det vi har gjort, er å utvide begge brøkene slik at de har samme nevner, nemlig 10. Når nevnerne i brøkene er like, kan vi regne ut subtraksjonsstykket for tellerne:

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} - \frac{1}{2} &= \frac{6}{10} - \frac{5}{10} \\ &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

4.5 Addisjon/subtraksjon av brøkar med ulik nevner

Når vi regner addisjon/subtraksjon mellom brøker med ulik nevner, må vi utvide brøkene slik at de har lik nevner, for så å bruke regel 4.4.

Eksempel 1

Regn ut

$$\frac{2}{9} + \frac{6}{7}$$

Begge nevnerne kan bli 63 hvis vi ganger med rett heltal. Vi utvider derfor til brøker med 63 i nevner:

$$\begin{aligned}\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7} + \frac{6 \cdot 9}{7 \cdot 9} &= \frac{14}{63} + \frac{54}{63} \\ &= \frac{68}{63}\end{aligned}$$

Fellesnevner

I *Eksempel 1* på side 56 blir 63 kalt en **fellesnevner**. Dette fordi det finnes heltall vi kan gange nevnerne med som gir oss tallet 63:

$$9 \cdot 7 = 63$$
$$7 \cdot 9 = 63$$

Hvis vi ganger sammen alle nevnerne i et regnestykke, finner vi alltid en fellesnevner, men vi sparer oss for store tall om vi finner den *minste* fellesnevneren. Ta for eksempel regnestykket

$$\frac{7}{6} + \frac{5}{3}$$

Her kan vi bruke fellesnevneren $6 \cdot 3 = 18$, men det er bedre å merke seg at $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ også er en fellesnevner. Altså er

$$\begin{aligned}\frac{7}{6} + \frac{5}{3} &= \frac{7}{6} + \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 2} \\ &= \frac{7}{6} + \frac{10}{6} \\ &= \frac{17}{6}\end{aligned}$$

Eksempel 2

Regn ut

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4}$$

Svar

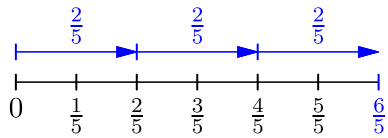
Alle nevnerne kan bli 8 hvis vi ganger med rett heltall. Vi utvider derfor til brøker med 8 i nevner:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{10}{4} &= \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 4} - \frac{5}{8} + \frac{10 \cdot 2}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{12}{8} - \frac{5}{8} + \frac{20}{8} \\ &= \frac{27}{8}\end{aligned}$$

4.4 Brøk ganget med heltall

I seksjon 2.3 så vi at ganging med heltall er det samme som gjentatt addisjon. Skal vi for eksempel regne ut $\frac{2}{5} \cdot 3$, kan vi derfor regne slik:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ &= \frac{2+2+2}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$



Men vi vet også at $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 3$, og derfor kan vi forenkle regnestykket vårt:

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \cdot 3 &= \frac{2 \cdot 3}{5} \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

Multiplikasjon mellom heltall og brøk er også kommutativ[1]:

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{2}{5} &= 3 \cdot 2 : 5 \\ &= 6 : 5 \\ &= \frac{6}{5}\end{aligned}$$

[1]Husk at $\frac{2}{5}$ bare er en omskriving av $2 : 5$, og at vi av regel 3.6 regner fra venstre mot høyre.

4.6 Brøk ganget med heltal

Når vi ganger en brøk med et heltall, ganger vi heltallet med telleren i brøken.

Eksempel 1

$$\frac{1}{3}\cdot 4 = \frac{1\cdot 4}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

Eksempel 2

$$3\cdot\frac{2}{5} = \frac{3\cdot 2}{5}$$
$$= \frac{6}{5}$$

En tolkning av ganging med brøk

Av regel 4.6 kan vi også danne en tolkning av hva å gange med en brøk innebærer. For eksempel, å gange 3 med $\frac{2}{5}$ kan tolkes på disse to måtene:

- Vi ganger 3 med 2, og deler produktet med 5:

$$3\cdot 2 = 6 \quad , \quad 6:5 = \frac{6}{5}$$

- Vi deler 3 med 5, og ganger kvotienten med 2:

$$3:5 = \frac{3}{5} \quad , \quad \frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{3\cdot 2}{5} = \frac{6}{5}$$

4.5 Brøk delt med heltall

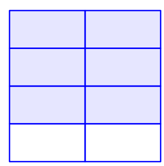
Det er nå viktig å huske på to ting:

- Deling kan man se på som en lik fordeling av et antall.
- I en brøk er det telleren som forteller noe om antallet (nevneren forteller om inndelingen av 1).

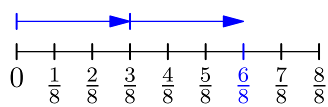
Tilfellet der telleren er delelig med divisoren

La oss regne ut $\frac{6}{8}$ delt på 2:

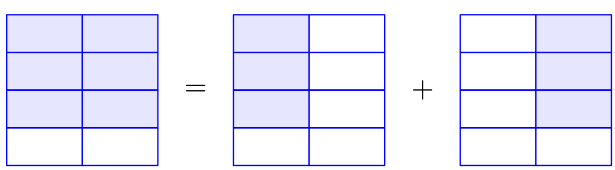
$$\frac{6}{8} : 2$$

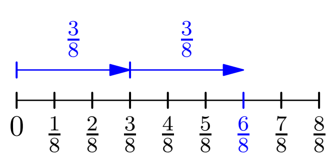


$: 2$



Vi har her 6 åttedeler som vi skal fordele likt på 2. Dette blir $6 : 2 = 3$ åttedeler.





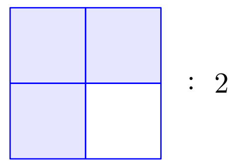
Altså er

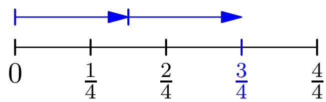
$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$$

Tilfellet der telleren ikke er delelig med divisoren

Hva nå om vi skal dele $\frac{3}{4}$ på 2?

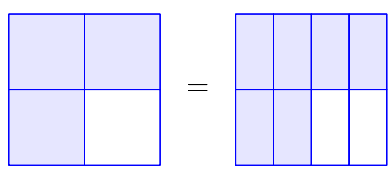
$$\frac{3}{4} : 2$$

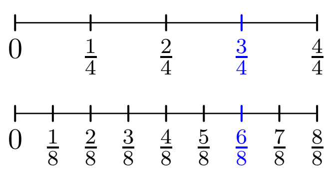




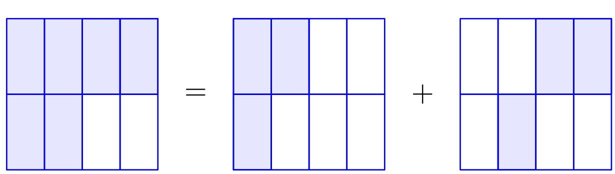
Vi kan alltid utivde brøken vår slik at telleren blir delelig med divisoren. Siden vi skal dele med 2, utvider vi brøken vår med 2:

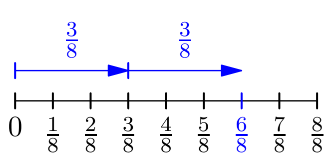
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$$





Nå har vi 6 åttedeler. 6 åttedeler delt på 2 blir 3 åttedeler:





Altså er

$$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$$

Rent matematisk har vi rett og slett ganget nevneren til $\frac{3}{4}$ med 2:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} : 2 &= \frac{3}{4 \cdot 2} \\ &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

4.7 Brøk delt med heltal

Når vi deler en brøk med et heltall, ganger vi nevneren med heltallet.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} : 6 &= \frac{5}{3 \cdot 6} \\ &= \frac{5}{18}\end{aligned}$$

Merk

På side 60 fant vi at

$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{3}{8}$$

Da ganget vi ikke nevneren med 2, slik regel 4.7 tilsier. Om vi gjør det, får vi

$$\frac{6}{8} : 2 = \frac{6}{8 \cdot 2} = \frac{6}{16}$$

Men

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{6}{16}$$

De to svarene har altså samme verdi. Skal vi dele en brøk på et heltall, og telleren er delelig med heltallet, kan vi direkte dele telleren på heltallet. I slike tilfeller er det altså ikke *feil*, men heller *ikke nødvendig* å bruke regel 4.7.

4.6 Brøk ganget med brøk

Vi har sett[1] hvordan å gange med en brøk innebærer å gange det andre tallet med telleren, og så dele produktet med nevneren. La oss bruke dette til å regne ut

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}$$

Da skal vi først gange $\frac{5}{4}$ med 3, og så dele produktet med 2. Av regel 4.6 er

$$\frac{5}{4}\cdot 3=\frac{5\cdot 3}{4}$$

Og av regel 4.7 er

$$\frac{5\cdot 3}{4}:2=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}$$

Altså er

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}$$

4.8 Brøk ganget med brøk

Når vi ganger to brøker med hverandre, ganger vi teller med teller og nevner med nevner.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{9}&=\frac{4\cdot 6}{7\cdot 9}\\&=\frac{24}{63}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}&=\frac{1\cdot 9}{2\cdot 10}\\&=\frac{9}{20}\end{aligned}$$

[1]Se tekstboksen med tittelen *En tolkning av ganging med brøk* på side 59.

4.7 Kansellering av faktorer

Når telleren og nevneren har lik verdi, er verdien til brøken alltid 1. For eksempel er $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{25}{25} = 1$ og så videre. Dette kan vi utnytte for å forenkle brøkuttrykk.

La oss forenkle brøkuttrykket

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8}$$

Da $8 \cdot 5 = 5 \cdot 8$, kan vi skrive

$$\frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8}$$

Og som vi nylig har sett (regel 4.8) er

$$\frac{5 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8}$$

Siden $\frac{8}{8} = 1$, har vi at

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{8} &= \frac{5}{9} \cdot 1 \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Når bare ganging er til stede i brøker, kan man alltid omrokkere slik vi har gjort over, men når man har forstått hva omrokkeringen ender med, er det bedre å bruke **kansellering**. Man setter da en strek over to og to like faktorer for å indikere at de utgjør en brøk med verdien 1. Tilfellet vi akkurat så på skriver vi da som

$$\frac{\cancel{8} \cdot 5}{9 \cdot \cancel{8}} = \frac{5}{9}$$

4.9 Kansellering av faktorer

Når bare ganging er til stede i en brøk, kan vi kansellere par av like faktorer i teller og nevner.

Eksempel 1

Kanseller så mange faktorer som mulig i brøken

$$\frac{3 \cdot 12 \cdot 7}{7 \cdot 4 \cdot 12}$$

Svar

$$\frac{3 \cdot \cancel{12} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot 4 \cdot \cancel{12}} = \frac{3}{4}$$

Eksempel 2

Forkort brøken $\frac{12}{42}$.

Svar

Vi legger merke til at 6 er en faktor i både 12 og 42, altså er

$$\begin{aligned}\frac{12}{42} &= \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 7} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Forkort brøken $\frac{48}{16}$.

Svar

Vi legger merke til at 16 er en faktor i 48, altså er

$$\begin{aligned}\frac{48}{16} &= \frac{3 \cdot \cancel{16}}{\cancel{16}} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3\end{aligned}$$

Merk: Hvis alle faktorer er kansellert i teller eller nevner, er dette det samme som at tallet 1 står der.

Forkorting via primtalsfaktorisering

Det er ikke alltid like lett å legge merke til en felles faktor, slik vi har gjort i *Eksempel 2* og *Eksempel 3* på side 65. Vil man være helt sikker på at man ikke har oversett felles faktorer, kan man alltid primtalsfaktorisere (se seksjon 3.2) både teller og nevner. For eksempel har vi at

$$\begin{aligned}\frac{12}{42} &= \frac{\cancel{2}\cdot 2\cdot \cancel{3}}{\cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot 7} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

Brøker forenkler utregninger

Desmialtallet 0,125 kan vi skrive som brøken $\frac{1}{8}$. Regnestykket

$$0{,}125\cdot 16$$

vil for de fleste av oss ta en stund å løse for hand med vanlige multiplikasjonsregler. Men bruker vi brøkuttrykket, får vi at

$$\begin{aligned}0{,}125\cdot 16 &= \frac{1}{8}\cdot 16 \\ &= \frac{2\cdot \cancel{8}}{\cancel{8}} \\ &= 2\end{aligned}$$

”Å stryke nuller”

Et tall som 3000 kan vi skrive som $3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$, mens 700 kan vi skrive som $7 \cdot 10 \cdot 10$. Brøken $\frac{3000}{700}$ kan vi derfor forkorte slik:

$$\begin{aligned}\frac{3000}{700} &= \frac{3 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot 10}{7 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{7} \\ &= \frac{30}{7}\end{aligned}$$

I praksis er dette det samme som ”å stryke nuller”:

$$\frac{30\cancel{00}}{7\cancel{00}} = \frac{30}{7}$$

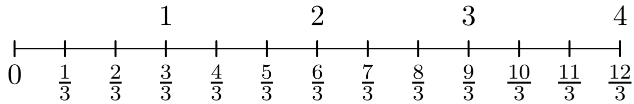
Obs! Nuller er de eneste sifrene vi kan ”stryke” slik, for eksempel kan vi ikke forkorte $\frac{123}{13}$ på noen som helst måte. I tillegg kan vi bare ”stryke” nuller som står som bakerste siffer, for eksempel kan vi ikke ”stryke” nuller i brøken $\frac{101}{10}$.

4.8 Deling med brøk

Deling ved å se på tallinja

La oss regne ut $4 : \frac{2}{3}$. Siden brøken vi deler 4 på har 3 i nevner, kan det være en idé å gjøre om også 4 til en brøk med 3 i nevner. Vi har at

$$4 = \frac{12}{3}$$

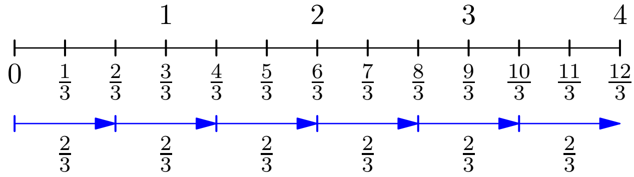


Husk nå at en betydning av $4 : \frac{2}{3}$ er

"Hvor mange ganger $\frac{2}{3}$ går på 4."

Ved å se på tallinja, finner vi at $\frac{2}{3}$ går 6 ganger på 4. Altså er

$$4 : \frac{2}{3} = 6$$



En generell metode

Vi kan ikke se på en tallinje hver gang vi skal dele med brøker, så nå skal vi komme fram til en generell regnemetode ved igjen å bruke $4 : \frac{2}{3}$ som eksempel. For denne metoden bruker vi denne betydningen av divisjon:

$$4 : \frac{2}{3} = \text{"Tallet vi må gange } \tfrac{2}{3} \text{ med for å få 4."}$$

For å finne dette tallet starter vi med å gange $\frac{2}{3}$ med tallet som gjør at produktet blir 1. Det er **den omvendte brøken** av $\frac{2}{3}$, som er $\frac{3}{2}$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Nå gjenstår det bare å gange med 4 for å få 4:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 4 = 4$$

$\frac{3}{2} \cdot 4$ er altså tallet vi må gange $\frac{2}{3}$ med for å få 4 . Dette betyr at

$$\begin{aligned} 4 : \frac{2}{3} &= \frac{3}{2} \cdot 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

4.10 Brøk delt på brøk

Når vi deler et tall med en brøk, ganger vi tallet med den omvendte brøken.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3 : \frac{2}{9} &= 3 \cdot \frac{9}{2} \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} : \frac{5}{8} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} \\ &= \frac{32}{15} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3}$$
$$= \frac{30}{15}$$

Her bør vi også se at brøken kan forkortes:

$$\frac{30}{15} = \frac{2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15}}$$
$$= 2$$

Merk: Vi kan spare oss for store tall hvis vi kansellerer faktorer underveis i utregninger:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{\cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{3}}$$
$$= 2$$

4.9 Rasjonale tall

4.11 Rasjonale tall

Et hvert tall som kan bli skrevet som en brøk med heltalls teller og nevner, er et **rasjonalt tall**.

Merk

Rasjonale tall gir oss en samlebetegnelse for

- **Heltall**

  For eksempel $4 = \frac{4}{1}$.

- **Desimaltall med endelig antall desimaler**

  For eksempel $0{,}2 = \frac{1}{5}$.

- **Desimaltall med repeterende desimalmønster**

  For eksempel [1] $0{,}08\bar{3} = \frac{1}{12}$.

---

[1] $\bar{3}$ indikerer at 3 fortsetter i det uendelige. En annen måte å indikere dette på er å bruke symbolet ... . Altså er $0{,}08\bar{3} = 0{,}08333333...$

4.12 Blanda tall

Om vi adderer et heltal med en brøk der telleren er mindre enn nevneren, får vi et **blanda tall**.

Eksempel 1

Tre forskjellige blanda tall:

$$2 + \frac{5}{7} \qquad 8 + \frac{2}{7} \qquad \frac{1}{10} + 4$$

Obs!

I mange tekster vil du finne tall som dem fra *Eksempel 1* skrevet slik:

$$2\frac{5}{7} \qquad 8\frac{2}{7} \qquad 4\frac{1}{10}$$

Eksempel 2

Skriv om brøken $\frac{17}{3}$ til et blanda tall.

Svar

Vi legger merke til at telleren er 17 og nevneren er 3. Det største heltalet vi kan gange med 3 uten at produktet blir større enn 17, er 5. Altså kan vi skrive

$$\begin{aligned}\frac{17}{3} &= \frac{5\cdot 3+2}{3}\\ &= \frac{5\cdot \cancel{3}}{\cancel{3}}+\frac{2}{3}\\ &= 5+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Eksempel 3

Skriv om det blanda tallet $3+\frac{4}{5}$ til en brøk.

Svar

Vi har at $3=\frac{3}{1}$, altså er

$$3+\frac{4}{5}=\frac{3}{1}+\frac{4}{5}$$

Videre har vi at[1]

$$\begin{aligned}\frac{3}{1}+\frac{4}{5} &= \frac{3\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{4}{5}\\ &= \frac{15}{5}+\frac{4}{5}\\ &= \frac{19}{5}\end{aligned}$$

[1] Se regel 4.5.

Oppgaver for kapittel 4

4.1.1

Finn verdien til brøken.

a) $\dfrac{18}{3}$ b) $\dfrac{20}{4}$ c) $\dfrac{10}{5}$ d) $\dfrac{42}{6}$ e) $\dfrac{63}{7}$ f) $\dfrac{32}{8}$

4.1.2

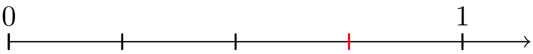
Finn verdien til brøken. Bruk kalkulator om nødvendig.

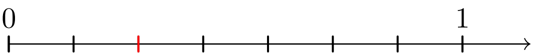
a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{3}{4}$ e) $\dfrac{2}{5}$ f) $\dfrac{3}{5}$ g) $\dfrac{4}{5}$

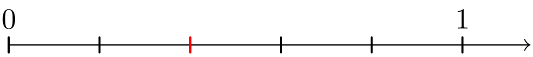
f) $\dfrac{3}{2}$ g) $\dfrac{1}{3}$ h) $\dfrac{5}{2}$ i) $\dfrac{5}{6}$ j) $\dfrac{7}{5}$ k) $\dfrac{11}{4}$ l) $\dfrac{7}{10}$

4.1.3

Skriv brøken markert med raudt.

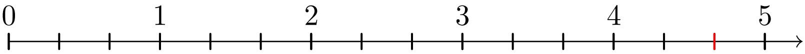
a) 

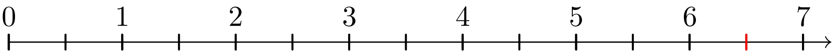
b) 

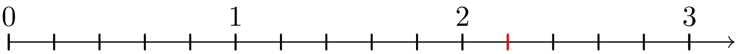
c) 

4.1.4

Skriv brøken markert med raudt.

a) 

b) 

c) 

4.2.1

Eksempel

$$\frac{9}{8} \text{ utvida med } 3 = \frac{9 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{27}{24}$$

Utvid

a) $\dfrac{10}{3}$ med 2. b) $\dfrac{3}{4}$ med 3. c) $\dfrac{3}{7}$ med 4.

c) $\dfrac{9}{8}$ med 5. d) $\dfrac{9}{5}$ med 6. e) $\dfrac{11}{4}$ med 7.

4.2.2

Utvid

a) $\frac{7}{3}$ til ein brøk med 15 som nemnar.

b) $\frac{3}{4}$ til ein brøk med 32 som nemnar.

c) $\frac{10}{9}$ til ein brøk med 63 som nemnar.

4.2.3

Eksempel

$$\frac{10}{8} \text{ forkorta med } 2 = \frac{10 : 2}{8 : 2} = \frac{5}{4}$$

Forkort

a) $\dfrac{14}{26}$ med 2. b) $\dfrac{15}{12}$ med 3. c) $\dfrac{20}{16}$ med 4.

c) $\dfrac{35}{50}$ med 5. d) $\dfrac{54}{18}$ med 6. e) $\dfrac{49}{63}$ med 7.

4.2.4

Forkort

a) $\frac{27}{12}$ til en brøk med 4 som nemnar.

b) $\frac{36}{20}$ til en brøk med 5 som nemnar.

c) $\frac{18}{63}$ til en brøk med 7 som nemnar.

4.3.1

Regn ut.

a) $\frac{4}{3}+\frac{6}{3}$ b) $\frac{5}{4}+\frac{9}{4}$ c) $\frac{1}{6}+\frac{10}{6}$ d) $\frac{8}{7}+\frac{2}{7}$ e) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

4.3.2

Regn ut.

a) $\frac{10}{3}+\frac{4}{3}+\frac{8}{3}$ b) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$ c) $\frac{11}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}$

4.3.3

Regn ut.

a) $\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$ b) $\frac{9}{4}-\frac{7}{4}$ c) $\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$ d) $\frac{11}{7}-\frac{4}{7}$ e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$

4.3.4

Regn ut.

a) $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}-\frac{1}{5}$ b) $\frac{11}{7}-\frac{2}{7}-\frac{4}{7}$ c) $\frac{10}{3}-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}$

4.3.5

Regn ut.

a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{6}$ b) $\frac{5}{7}+\frac{4}{9}$ c) $\frac{10}{3}+\frac{7}{8}$ d) $\frac{7}{5}+\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

4.3.6

Regn ut.

a) $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}$ b) $\frac{5}{4}-\frac{4}{9}$ c) $\frac{10}{9}-\frac{1}{8}$ d) $\frac{4}{5}-\frac{1}{4}$ e) $\frac{5}{2}-\frac{5}{3}$

4.3.7

Regn ut.

a) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ b) $\frac{10}{2}-\frac{1}{6}+\frac{2}{5}$ c) $\frac{9}{2}-\frac{2}{7}-\frac{1}{8}$

4.4.1

Regn ut.

a) $\frac{4}{3} \cdot 5$ b) $\frac{5}{7} \cdot 8$ c) $\frac{9}{10} \cdot 6$ d) $\frac{8}{7} \cdot 10$ e) $\frac{3}{2} \cdot 7$

f) $7 \cdot \frac{4}{3}$ g) $5 \cdot \frac{7}{3}$ h) $3 \cdot \frac{10}{7}$ i) $1 \cdot \frac{5}{11}$ j) $8 \cdot \frac{9}{17}$

4.5.1

Regn ut.

a) $\frac{4}{3} : 5$ b) $\frac{5}{7} : 8$ c) $\frac{9}{10} : 6$ d) $\frac{8}{7} : 10$ e) $\frac{3}{2} : 7$

f) $\frac{9}{10} : 11$ g) $\frac{1}{5} : 12$ h) $\frac{9}{10} : 29$ i) $\frac{8}{9} : 51$ j) $\frac{3}{2} : 79$

4.6.1

Regn ut.

a) $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{9}$ b) $\frac{7}{8} \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{9}{3}$ d) $\frac{10}{3} \cdot \frac{6}{5}$ e) $\frac{3}{2} \cdot \frac{7}{5}$

f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$ g) $\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3}$ h) $\frac{10}{3} \cdot \frac{8}{3}$ i) $\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{7}$ j) $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{6}$

4.7.1

Regn ut.

a) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{4}$ b) $\frac{17}{8} \cdot \frac{9}{4}$ c) $\frac{23}{8} \cdot \frac{2}{4}$ d) $\frac{7}{81} \cdot \frac{3}{8}$ e) $\frac{7}{8} \cdot \frac{29}{41}$

4.8.1

Kanseller så mange faktorer som mulig i brøken.

a) $\frac{3 \cdot 11 \cdot 8}{4 \cdot 8 \cdot 3}$ b) $\frac{5 \cdot 12 \cdot 7 \cdot 2}{2 \cdot 8 \cdot 12}$ c) $\frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 9 \cdot 10}$ d) $\frac{7 \cdot 4 \cdot 3}{7 \cdot 3}$

4.8.2

Forkort brøken så mykje som mogleg.

a) $\dfrac{28}{16}$ b) $\dfrac{18}{42}$ c) $\dfrac{24}{36}$ d) $\dfrac{56}{49}$ e) $\dfrac{25}{50}$ f) $\dfrac{21}{14}$

4.8.3

Eksempel 1

$$\frac{3}{4}\cdot 20 = \frac{3}{\cancel{4}}\cdot\cancel{4}\cdot 5 = 3\cdot 5 = 15$$

Utnytt at nemnaren er ein faktor i talet det blir gonga med, og rekn ut

a) $\dfrac{7}{3}\cdot 21$ b) $\dfrac{9}{5}\cdot 30$ c) $\dfrac{10}{7}\cdot 49$ d) $\dfrac{8}{9}\cdot 18$ e) $\dfrac{5}{4}\cdot 24$

f) $8\cdot\dfrac{3}{2}$ g) $35\cdot\dfrac{5}{7}$ h) $63\cdot\dfrac{2}{9}$ i) $48\cdot\dfrac{1}{6}$ j) $27\cdot\dfrac{7}{3}$

4.9.1

Regn ut.

a) $4:\dfrac{9}{8}$ b) $7:\dfrac{3}{5}$ c) $10:\dfrac{7}{3}$ d) $5:\dfrac{4}{5}$ e) $2:\dfrac{5}{11}$

4.9.2

Rekn ut, og forkort brøken så mykje som mogleg.

a) $4:\dfrac{8}{9}$ b) $7:\dfrac{21}{5}$ c) $10:\dfrac{5}{3}$ d) $5:\dfrac{5}{4}$ e) $2:\dfrac{8}{11}$

4.9.3

Regn ut.

a) $\dfrac{2}{3}:\dfrac{5}{7}$ b) $\dfrac{8}{9}:\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{10}{3}:\dfrac{7}{3}$ d) $\dfrac{1}{5}:\dfrac{4}{7}$ e) $\dfrac{6}{5}:\dfrac{3}{11}$

4.9.4

Eksempel

$$\frac{3}{4}:\frac{15}{8} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}\cdot\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{2}\cdot 2}{\cancel{3}\cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Merk: Her har vi valgt å primtalsfaktorisere alle tala, men ein treng ikkje gjere det viss ein ser kva faktorar som er felles for tellarane og nemnarane.

Utnytt at tellarane og nemnarane har felles faktorar, og rekn ut.

a) $\dfrac{7}{9} : \dfrac{21}{12}$ b) $\dfrac{35}{24} : \dfrac{7}{18}$ c) $\dfrac{84}{55} : \dfrac{42}{77}$

Gruble 3

Bruk regel 4.7 og regel 4.8 til å fylle inn heltallet som mangler der det står "_".

a) Å gange med $\frac{1}{2}$ er det samme som å dele med _ .

b) Å gange med $\frac{1}{4}$ er det samme som å dele med _ .

c) Å gange med $\frac{1}{5}$ er det samme som å dele med _ .

Se tilbake til svarene for oppgave **4.1.2a) - g)**. Fyll inn heltallet som mangler der det står "_".

d) Å gange med 0,5 er det samme som å dele med _ .

e) Å gange med 0,25 er det samme som å dele med _ .

f) Å gange med 0,2 er det samme som å dele med _ .

g) Å gange med 0,75 er det samme som å gange med _ og dele med _ .

h) Å gange med 0,4 er det samme som å gange med _ og dele med _ .

i) Å gange med 0,6 er det samme som å gange med _ og dele med _ .

j) Å gange med 0,8 er det samme som å gange med _ og dele med _ .

Gruble 4

Se tilbake til regel 4.10 og svarene for oppgave 4.1.2a) - g). Fyll inn heltallet som mangler der det står "__".

(a) Å dele med 0,5 er det samme som å gange med __ .

(b) Å dele med 0,25 er det samme som å gange med __ .

(c) Å dele med 0,2 er det samme som å gange med __ .

(d) Å dele med 0,75 er det samme som å gange med __ og dele med __ .

(e) Å dele med 0,4 er det samme som å gange med __ og dele med __ ..

(f) Å dele med 0,6 er det samme som å gange med __ og dele med __ ..

(g) Å dele med 0,8 er det samme som å gange med __ og dele med __ ..

Gruble 5

Utnytt primtalsfaktorisering til å finne fellesnevner, og regn ut

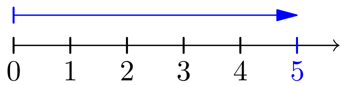
a) $\dfrac{5}{204} + \dfrac{7}{198}$ b) $\dfrac{11}{350} + \dfrac{17}{315}$

Kapittel 5

Negative tall

5.1 Introduksjon

Vi har tidligere sett at (for eksempel) tallet 5 på ei tallinje ligger 5 enerlengder til høyre for 0.

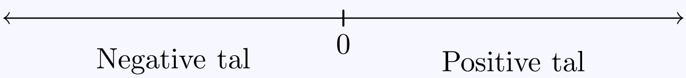


Men hva om vi går andre veien, altså mot venstre? Dette spørsmålet svarer vi på ved å innføre *negative tall.* .

5.1 Positive og negative tal

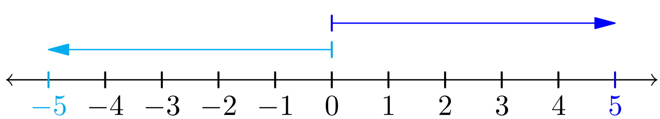
På en tallinje gjelder følgende:

- Tall plassert *til høyre* for 0 er **positive tall**.
- Tall plassert *til venstre* for 0 er **negative tal**.



Vi kan ikke hele tiden bruke en tallinje for å avgjøre om et tall er negativt eller positivt, og derfor bruker vi et tegn for å vise at tall er negative. Dette tegnet er rett og slett $-$, altså det samme tegnet som vi bruker ved subtraksjon. 5 er med dét et positivt tall, mens -5 er et negativt tall. På tallinja er det slik at

- 5 ligger 5 enerlengder *til høyre* for 0.
- -5 ligger 5 enerlengder *til venstre* for 0.



Den store forskjellen på 5 og -5 er altså på hvilken side av 0 tallene ligger. Da 5 og -5 har samme avstand til 0, sier vi at 5 og -5 har samme **lengde**.

5.2 Lengde

Lengden til et tall skrives ved symbolet $|\ |$.

Lengden til et positivt tall er verdien til tallet.

Lengden til et negativt tall er verdien til det positive tallet med samme siffer.

Eksempel 1

$$|27| = 27$$

Eksempel 2

$$|-27| = 27$$

Språkboksen

Andre ord for lengde er **tallverdi** og **absoluttverdi**.

Fortegn

Fortegn er en samlebetegnelse for $+$ og $-$. 5 har $+$ som fortegn og -5 har $-$ som fortegn.

5.2 De fire regneartene med negative tall

Ved innføringen av negative tall får de fire regneartene nye sider som vi må se på trinnvis. Når vi adderer, subtraherer, multipliserer eller dividerer med negative tall vil vi ofte, for tydeligheten sin skyld, skrive negative tall med parentes rundt. Da skriver vi for eksempel -4 som (-4).

Addisjon

Når vi adderte i seksjon 2.1 så vi på $+$ som vandring *mot høyre*. Negative tall gjør at vi må utvide begrepet for $+$:

$+$ ”Like langt og i *samme* retning som”

La oss se på regnestykket

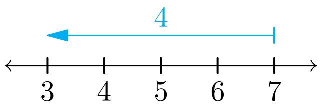
$$7 + (-4)$$

Vår utvidede definisjon av $+$ sier oss nå at

$$7 + (-4) = \text{”7 og like langt og i } \textit{samme} \text{ retning som } (-4)\text{”}$$

(-4) har lengde 4 og retning *mot venstre*. Vårt regnestykke sier altså at vi skal starte på 7, og deretter gå lengden 4 *mot venstre*.

$$7 + (-4) = 3$$



5.3 Addisjon med negative tall

Å addere et negativt tall er det samme som å subtrahere tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$4 + (-3) = 4 - 3 = 1$$

Eksempel 2

$$-8 + (-3) = -8 - 3 = -11$$

Addisjon er kommutativ

Regel 2.1 er gjeldende også etter innføringen av negative tall, for eksempel er

$$7 + (-3) = 4 = -3 + 7$$

Subtraksjon

I seksjon 2.2 så vi på $-$ som vandring *mot venstre*. Også betydningen av $-$ må utvides når vi jobber med negative tall:

$-$ "Like langt og i *motsatt* retning som"

La oss se på regnestykket

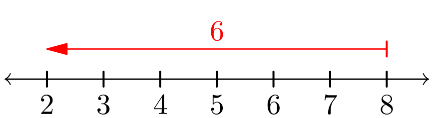
$$2 - (-6)$$

Med vår utvidede betydning av $-$, kan vi skrive

$$2 - (-6) = \text{"2 og like langt og i \textit{motsatt} retning som } (-6)\text{"}$$

-6 har lengde 6 og retning *mot venstre*. Når vi skal gå samme lengde, men i *motsatt* retning, må vi altså gå lengden 6 *mot høyre*[1]. Dette er det samme som å addere 6:

$$2 - (-6) = 2 + 6 = 8$$



5.4 Subtraksjon med negative tall

Å subtrahere et negativt tall er det samme som å addere det positive tallet med samme tallverdi.

Eksempel 1

$$11 - (-9) = 11 + 9 = 20$$

[1]Vi minner enda en gang om at rødfargen på pila indikerer at man skal vandre fra pilspissen til andre enden.

Eksempel 2

$$-3-(-7)=-3+7=4$$

Multiplikasjon

I seksjon 2.3 introduserte vi ganging med positive heltall som gjentatt addisjon. Med våre utvidede begrep av addisjon og subtraksjon, kan vi nå også utvide begrepet multiplikasjon:

5.5 Multiplikasjon med positive og negative tall

Ganging med et positivt heltall er det samme som gjentatt addisjon.

Ganging med et negativt heltal er det samme som gjentatt subtraksjon.

Eksempel 1

$$\begin{aligned}2\cdot 3 &= \text{"Like langt og i } \textit{samme} \text{ retning som 2, 3 ganger"}\\ &= 2+2+2\\ &= 6\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-2)\cdot 3 &= \text{"Like langt og i } \textit{samme} \text{ retning som } (-2)\text{, 3 ganger"}\\ &= -2-2-2\\ &= -6\end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned}2\cdot(-3) &= \text{"Like langt og i } \textit{motsatt} \text{ retning som 2, 3 ganger"}\\ &= -2-2-2\\ &= -6\end{aligned}$$

Eksempel 4

$$\begin{aligned}(-3)\cdot(-4) &= \text{"Like langt og i } \textit{motsatt} \text{ retning som } -3\text{, 4 ganger"}\\ &= 3+3+3+3\\ &= 12\end{aligned}$$

Multiplikasjon er kommutativ

Eksempel 2 og *Eksempel 3* på side 86 illustrerer at regel 2.2 også er gjeldende etter innføringen av negative tall:

$$(-2) \cdot 3 = 3 \cdot (-2)$$

Det blir tungvint å regne ganging som gjentatt addisjon/subtraksjon hver gang vi har et negativt tall involvert, men som en direkte konsekvens av regel 5.5 kan vi lage oss følgende to regler:

5.6 Ganging med negative tall I

Produktet av et negativt og et positivt tall er et negativt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir tallverdien til produktet.

Eksempel 1

Regn ut $(-7) \cdot 8$

Svar

Siden $7 \cdot 8 = 56$, er $(-7) \cdot 8 = -56$

Eksempel 2

Regn ut $3 \cdot (-9)$.

Svar

Siden $3 \cdot 9 = 27$, er $3 \cdot (-9) = -27$

5.7 Ganging med negative tall II

Produktet av to negative tall er et positivt tall.

Tallverdien til faktorene ganget sammen gir verdien til produktet.

Eksempel 1

$$(-5) \cdot (-10) = 5 \cdot 10 = 50$$

Eksempel 2

$$(-2) \cdot (-8) = 2 \cdot 8 = 16$$

Divisjon

Definisjonen av divisjon (se seksjon 2.4), kombinert med det vi vet om multiplikasjon med negative tall, gir oss nå dette:

$$-18 : 6 = \text{"Tallet jeg må gange 6 med for å få } -18\text{"}$$

$$6 \cdot (-3) = -18, \text{ altså er } -18 : 6 = -3$$

$$42 : (-7) = \text{"Tallet jeg må gange } -7 \text{ med for å få 42"}$$

$$(-7) \cdot (-8) = 42, \text{ altså er } 42 : (-7) = -8$$

$$-45 : (-5) = \text{"Tallet jeg må gange } -5 \text{ med for å få } -45\text{"}$$

$$(-5) \cdot 9 = -45, \text{ altså er } -45 : (-5) = 9$$

5.8 Divisjon med negative tall

Divisjon mellom et positivt og et negativt tall gir et negativt tall.

Divisjon mellom to negative tall gir et positivt tall.

Tallverdien til dividenden delt med tallverdien til divisoren gir tallverdien til kvotienten.

Eksempel 1

$$-24 : 6 = -4$$

Eksempel 2

$$24 : (-2) = -12$$

Eksempel 3

$$-24 : (-3) = 8$$

Eksempel 4

$$\frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Eksempel 5

$$\frac{-10}{7} = -\frac{10}{7}$$

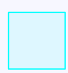
5.3 Negative tall som mengde

Obs! Denne tolkningen av negative tall blir først brukt i seksjon 9.2, som er en seksjon noen lesere uten tap av forståelse kan hoppe over.

Så langt har vi sett på negative tall ved hjelp av tallinjer. Å se på negative tall ved hjelp av mengder er i første omgang vanskelig, fordi vi har likestilt mengder med antall, og negative antall gir ikke mening! For å skape en forståelse av negative tall ut ifra et mengdeperspektiv, bruker vi det vi skal kalle **vektprinsippet**. Dette innebærer at vi ser på tallene som krefter. De positive tallene er antall krefter som virker nedover og de negative tallene er antall krefter som virker oppover[1]. Svarene på regnestykker med positive og negative tall kan man da se på som resultatet av en veiing av de forskjellige mengdene. Slik vil altså et positivt tall og et negativt tall med samme tallverdi *utligne* hverandre.

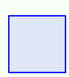
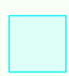
5.9 Negative tall som mengde

Negative tall vil vi indikere som en lyseblå mengde:

 $= -1$

Eksempel

$$1 + (-1) = 0$$

 $+$  $= 0$

[1] Fra virkeligheten kan man se på de positive og negative tallene som ballonger fylt med henholdsvis luft og helium. Ballonger fylt med luft virker med en kraft nedover (de faller), mens heliumballonger virker med en kraft oppover (de stiger).

Oppgaver for kapittel 5

5.1.1

Eksempel
8 har retning mot høgre og lengde 8.
-7 har retning mot venstre og lengde 7.

Fyll inn ordene som mangler.

a) 9 har retning mot .... og lengde ....

b) 4 har retning mot .... og lengde ....

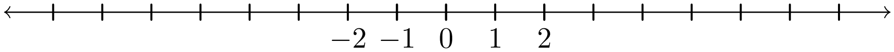
c) -3 har retning mot .... og lengde ....

d) 12 har retning mot .... og lengde ....

e) -11 har retning mot .... og lengde ....

f) -25 har retning mot .... og lengde ....

5.1.2



Tegn av tallinja over og plasser tallene.

a) 3 b) -4 c) -8 d) 7 e) -3 f) 5 g) -5

5.1.3

Se tilbake på tallene fra oppgave 5.1.2. Skriv ned hvilke av tallene som er

a) positive tall b) negative tall

5.2.1
Regn ut.

a) $8 + (-7)$ b) $12 + (-5)$ c) $9 + (-3)$ d) $7 + (-7)$

e) $-5 + 8$ f) $-9 + 10$ g) $-1 + 11$ h) $-4 + 9$

5.2.2
Regn ut.

a) $3+(-19)$ b) $7+(-15)$ c) $-20+(-3)$ d) $7+(-7)$

e) $-4 + (-19)$ f) $-2 + (-15)$ g) $-8 + 5$ h) $-6 + 6$

5.2.3
Regn ut.

a) $8 - (-7)$ b) $12 - (-5)$ c) $9 - (-3)$ d) $7 - (-7)$

e) $-5 - 8$ f) $-9 - 10$ g) $-1 - 11$ h) $-4 - 9$

5.2.4
Regn ut.

a) $3-(-19)$ b) $7-(-15)$ c) $-20-(-3)$ d) $7-(-7)$

e) $-4 - (-19)$ f) $-2 - (-15)$ g) $-8 - 5$ h) $-6 - 6$

5.2.5
Regn ut.

a) $3 \cdot (-4)$ b) $5 \cdot (-10)$ c) $7 \cdot (-9)$ d) $4 \cdot (-6)$

e) $(-7) \cdot 8$ f) $(-3) \cdot 9$ g) $(-1) \cdot 12$ h) $(-10) \cdot 4$

i) $(-3)\cdot(-7)$ j) $(-5)\cdot(-5)$ k) $(-6)\cdot(-2)$ l) $(-8)\cdot(-9)$

5.2.6
Regn ut.

a) $(-32) : 8$ b) $(-42) : 7$ c) $(-30) : 6$ d) $(-20) : 5$

e) $72 : (-9)$ f) $63 : (-7)$ g) $50 : (-10)$ h) $25 : (-5)$

i) $(-72) : (-9)$ j) $(-63) : (-7)$ k) $(-50) : (-10)$

Kapittel 6

Utregningsmetoder

6.1 Addisjon

Oppstilling

Denne metoden baserer seg på plassverdisystemet, der man trinnvis regner ut summen av enerne, tierne, hundrene, og så videre

Eksempel 1

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4 \\ + & 6 & 1 & 2 \\ \hline = & 8 & 4 & 6 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{cccc} & \scriptstyle 1 & & \\ & 2 & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline = & 3 & 5 & 9 \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{cccc} & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 1 & \\ & & 8 & 5 \\ + & & 7 & 9 \\ \hline = & 1 & 6 & 4 \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{cccccc} & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 1 & \scriptstyle 1 & & \\ & 3 & 9 & 7 & , & 2 \\ + & & 8 & 5 & , & 9 \\ \hline = & 4 & 8 & 2 & , & 1 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4 \\ + & 6 & 1 & 2 \\ \hline & & & 6 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4 \\ + & 6 & 1 & 2 \\ \hline & & 4 & 6 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 3 & 4 \\ + & 6 & 1 & 2 \\ \hline = & 8 & 4 & 6 \end{array}$$

(c)

a) Vi legger sammen enerne: $4 + 2 = 6$

b) Vi legger sammen tierne: $3 + 1 = 4$

c) Vi legger sammen hundrene: $2 + 6 = 8$

Eksempel 2 (forklaring)

$$\begin{array}{cccc} & 2 & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline & & & 9 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 2 & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline & & 5 & 9 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 2 & 7 & 3 \\ + & & 8 & 6 \\ \hline = & 3 & 5 & 9 \end{array}$$

(c)

a) Vi legger sammen enerne: $3 + 6 = 9$

b) Vi legger sammen tierne: $7 + 8 = 15$. Siden 10 tiere er det samme som 100, legger vi til 1 på hundreplassen, og skriver opp de resterende 5 tierne på tierplassen.

c) Vi legger sammen hundrene: $1 + 2 = 3$.

Språkboksen

Det å skrive 1 på neste sifferplass kalles ”å skrive 1 i mente”.

6.2 Subtraksjon

Oppstilling

Subtraksjon med oppstilling baserer seg på plassverdisystemet, der man trinnvis regner differansen mellom enerne, tierne, hundrene, o.l. Metoden tar også utgangspunkt i et mengdeperspektiv, og tillater derfor ikke differanser med negativ verdi (se forklaringen til *Eksempel 2*).

Eksempel 1

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{ccc} & & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{9} & 3 \\ - & 5 & 7 \\ \hline = & 3 & 6 \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{cccc} & & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{5} & \cancel{6} & 4 \\ - & 4 & 7 & 8 \\ \hline = & & 8 & 6 \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle \cancel{10}} & & {\scriptstyle 10} \\ & \cancel{2} & 0 & \cancel{6}, & 1 \\ - & & 3 & 1, & 7 \\ \hline = & 1 & 7 & 4, & 4 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline & & & 5 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline & & 6 & 5 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 9 \\ - & 3 & 2 & 4 \\ \hline = & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

(c)

(a) Vi finner differansen mellom enerne: $9 - 4 = 5$

(b) Vi finner differansen mellom tierne: $8 - 2 = 6$.

(c) Vi finner differansen mellom hundrene: $7 - 3 = 4$.

Eksempel 2 (forklaring)

$$
\begin{array}{ccc}
 & \cancel{9} & \overset{10}{3} \\
- & 5 & 7 \\
\hline
 & & 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \cancel{9} & \overset{10}{3} \\
- & 5 & 7 \\
\hline
= & 3 & 6
\end{array}
$$

(a) *(b)*

(a) Vi merker oss at 7 er større enn 3, derfor tar vi 1 tier fra de 9 på tierplassen. Dette markerer vi ved å sette en strek over 9. Så finner vi differansen mellom enerne: $13 - 7 = 6$

(b) Siden vi tok 1 fra de 9 tierne, er der nå bare 8 tiere. Vi finner differansen mellom tierne: $8 - 5 = 3$.

Tabellmetoden

Tabellmetoden for subtraksjon tar utgangspunkt i at subtraksjon er en omvendt operasjon av addisjon. For eksempel, svaret på spørsmålet ”Hva er $789-324$?” er det samme som svaret på spørsmålet ”Hvor mye må jeg legge til på 324 for å få 789?”. Med tabellmetoden følger du ingen spesiell regel underveis, men velger selv tallene du mener passer best for å nå målet.

Eksempel 1

$789 - 324 = 465$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 324 \\
\hline
6 & 330 \\
70 & 400 \\
389 & 789 \\
\hline
465 &
\end{array}
$$

Eksempel 2

$83 - 67 = 16$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 67 \\
\hline
3 & 70 \\
13 & 83 \\
\hline
16 &
\end{array}
$$

Eksempel 3

$564 - 478 = 86$

$$\begin{array}{r|l} & 478 \\ \hline 2 & 480 \\ 20 & 500 \\ 64 & 564 \\ \hline 86 & \end{array}$$

Eksempel 4

$206{,}1 - 31{,}7 = 174{,}4$

$$\begin{array}{r|l} & 31{,}7 \\ \hline 0{,}3 & 32 \\ 70 & 102 \\ 104{,}1 & 206{,}1 \\ \hline 174{,}4 & \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

$$789 - 324 = 465$$

$$\begin{array}{r|l} & 324 \\ \hline & \\ & \\ & \\ \hline & \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{r|l} & 324 \\ \hline 6 & 330 \\ & \\ & \\ \hline & \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r|l} & 324 \\ \hline 6 & 330 \\ 70 & 400 \\ & \\ \hline & \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{r|l} & 324 \\ \hline 6 & 330 \\ 70 & 400 \\ 389 & 789 \\ \hline & \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{r|l} & 324 \\ \hline 6 & 330 \\ 70 & 400 \\ 389 & 789 \\ \hline 465 & \end{array}$$

(e)

(a) Vi starter med 324.

(b) Vi legger til 6, og får $324 + 6 = 330$

(c) Vi legger til 70, og får $70 + 330 = 400$

(d) Vi legger til 389, og får $389 + 400 = 789$. Da er vi framme på 789.

(e) Vi summerer tallene vi har lagt til: $6 + 70 + 389 = 465$

6.3 Ganging

Ganging med 10, 100, 1 000 osv.

6.1 Å gange heltall med 10, 100 osv.

- Når man ganger et heltall med 10, får man svaret ved å legge til sifferet 0 bak heltallet.
- Når man ganger et heltall med 100, får man svaret ved å legge til sifrene 00 bak heltallet.
- Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$6 \cdot 10 = 60$$

$$79 \cdot 10 = 790$$

$$802 \cdot 10 = 8020$$

Eksempel 2

$$6 \cdot 100 = 600$$

$$79 \cdot 100 = 7\,900$$

$$802 \cdot 100 = 80\,200$$

Eksempel 3

$$6 \cdot 1\,000 = 6\,000$$

$$79 \cdot 10\,000 = 790\,000$$

$$802 \cdot 100\,000 = 80\,200\,000$$

6.2 Å gange desimaltall med 10, 100 osv.

- Når man ganger et desimaltall med 10, får man svaret ved å flytte komma en plass til høgre.
- Når man ganger et heltall med 100, får man svaret ved å flytte komma to plasser til høgre.
- Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$7{,}9 \cdot 10 = 79{,} = 79$$

$$38{,}02 \cdot 10 = 380{,}2$$

$$0{,}57 \cdot 10 = 05{,}7 = 5{,}7$$

$$0{,}194 \cdot 10 = 01{,}94 = 1{,}94$$

Eksempel 2

$$7{,}9 \cdot 100 = 790{,} = 790$$

$$38{,}02 \cdot 100 = 3802{,} = 3\,802$$

$$0{,}57 \cdot 100 = 057{,} = 57$$

$$0{,}194 \cdot 100 = 019{,}4 = 19{,}4$$

Eksempel 3

$$7{,}9 \cdot 1\,000 = 7900{,} = 7\,900$$

$$38{,}02 \cdot 10\,000 = 380020{,} = 380\,200$$

$$0{,}57 \cdot 100\,000 = 57000{,} = 57\,000$$

Merk

Regel 6.1 er bare et spesialtilfelle av regel 6.2. For eksempel, å bruke regel 6.1 på regnestykket $7 \cdot 10$ gir samme resultat som å bruke regel 6.2 på regnestykket $7{,}0 \cdot 10$.

Å gange tall med 10, 100 osv. (forklaring)

Titallsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (se regel 1.2). Når man ganger et tall med 10, vil alle enere i tallet bli til tiere, alle tiere bli til hundrere osv. Hvert siffer forskyves altså én plass mot venstre. Tilsvarende forskyves hvert siffer to plasser mot venstre når man ganger med 100, tre plasser når man ganger med 1 000 osv.

Utvidet form

Ganging på utvidet form bruker vi for å regne multiplikasjon mellom flersifrede tall. Metoden baserer seg på distributiv lov (regel 3.2).

Eksempel 1

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
2 & 4 & \cdot & 3 & = & 7 & 2 \\
 & & & & & & \\
2 & 0 & \cdot & 3 & = & 6 & 0 \\
 & 4 & \cdot & 3 & = & 1 & 2 \\
\cline{6-7}
 & & & & & 7 & 2
\end{array}
$$

Eksempel 2

$$279 \cdot 34 = 9486$$

$$
\begin{array}{rr}
200 \cdot 30 = & 6000 \\
70 \cdot 30 = & 2100 \\
9 \cdot 30 = & 270 \\
\hline
 & 8370
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
200 \cdot 4 = & 800 \\
70 \cdot 4 = & 280 \\
9 \cdot 4 = & 36 \\
\hline
 & 1116
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
8370 \\
1116 \\
\hline
9486
\end{array}
$$

Eksempel 1 (forklaring)

24 kan skrives som $20 + 4$, altså er

$$24 \cdot 3 = (20 + 4) \cdot 3$$

Av regel 3.2 har vi at

$$
\begin{aligned}
(20 + 4) \cdot 3 &= 20 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \\
&= 60 + 12 \\
&= 72
\end{aligned}
$$

Eksempel 2 (forklaring)

Vi har at

$$279 = 200 + 70 + 9$$
$$34 = 30 + 4$$

Altså er

$$279 \cdot 34 = (200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4)$$

Videre er

$$\begin{aligned}(200 + 70 + 9) \cdot (30 + 4) &= 200 \cdot 30 + 70 \cdot 30 + 9 \cdot 30 + 200 \cdot 4 + 70 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &= 9486\end{aligned}$$

Kompaktmetoden

Kompaktmetoden bygger på de samme prinsippene som ganging på utvidet form, men har en skrivemåte som gjør utregningen korterere.

Eksempel 1

$$279 \cdot 34 = 9486$$

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & \\ & 8 & 8 & 6 \\ {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 2} & & \\ 6 & 1 & 7 & \\ \hline 9 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Eksempel 1 (forklaring)

Vi starter med å gange sifrene i 279 enkeltvis med 4:

- $9 \cdot 6 = 36$, da skriver vi 6 på enerplassen og 3 i mente.
- $7 \cdot 4 = 28$, da skriver vi 8 på tierplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 4 = 8$, da skriver vi 8 på hundrerplassen.

Så ganger vi sifrene i 279 enkeltvis med 30. Dette kan forenkles til å gange med 3, så lenge vi plasserer sifrene én plass forskjøvet til venstre i forhold til da vi ganget med 4:

- $9 \cdot 3 = 27$, da skriver vi 7 på tierplassen og 2 i mente.
- $7 \cdot 3 = 21$, da skriver vi 1 på hundrerplassen og 2 i mente.
- $2 \cdot 3 = 6$, da skriver vi 6 på tusenplassen.

6.4 Divisjon

Deling med 10, 100, 1 000 osv.

6.3 Deling med 10, 100, 1 000 osv.

Når man deler et desimaltall med 10, får man svaret ved å flytte komma én plass til venstre.

Når man deler et desimaltall med 100, får man svaret ved å flytte komma to plasser til venstre.

Det samme mønsteret gjelder for tallene 1 000, 10 000 osv.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 200 : 10 &= 200{,}0 : 10 \\ &= 20{,}00 \\ &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 : 10 &= 45{,}0 : 10 \\ &= 4{,}50 \\ &= 4{,}5 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} 200 : 100 &= 200{,}0 : 100 \\ &= 2{,}000 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45 : 100 &= 45{,}0 : 100 \\ &= 0{,}450 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$143{,}7 : 10 = 14{,}37$$

$$143{,}7 : 100 = 1{,}437$$

$$143{,}7 : 1\,000 = 0{,}1437$$

Eksempel 4

$$93{,}6 : 10 = 9{,}36$$

$$93{,}6 : 100 = 0{,}936$$

$$93{,}6 : 1\,000 = 0{,}0936$$

Deling med 10, 100, 1 000 osv. (forklaring)

Titallsystemet baserer seg på grupper av ti, hundre, tusen osv., og tideler, hundredeler og tusendeler osv (se regel 1.2). Når man deler et tall med 10, vil alle enere i tallet bli til tideler, alle tiere bli til enere osv. Hvert siffer forskyves altså én plass mot høgre. Tilsvarende forskyves hvert siffer to plasser mot høgre når man deler med 100, tre plasser når man deler med 1 000 osv.

Oppstilling

Divisjon med oppstilling baserer seg på divisjon tolket som inndeling av mengder (se side 28)

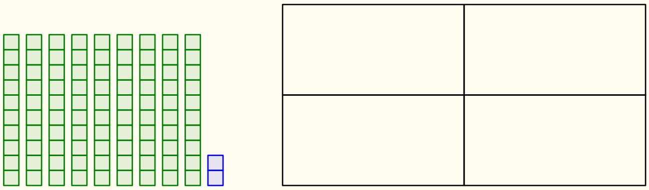
Eksempel 1

9	2	:	4	=	2	3
8						
1	2					
1	2					
	0					

Eksempel 1

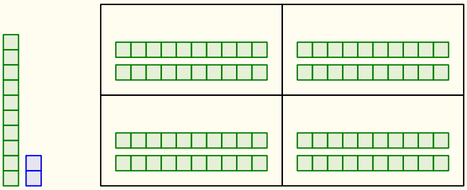
8	9	4	:	3	=	2	9	8
6								
2	9							
2	7							
	2	4						
	2	4						
		0						

Eksempel 1 (forklaring)

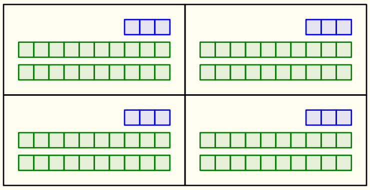


Figuren over illustrerer mengden 92, som vi skal dele inn i 4 like store grupper.

- Vi starter med å fordele så mange av tierne som mulig. Av de 9 tierne, kan hver gruppe få 2. Da har vi totalt fordelt $2 \cdot 4 = 8$ tiere.



- Vi står nå igjen med 1 tier og 2 enere, altså 12 enere. Av de 12 enerne, kan hver gruppe få 3. Da har vi totalt fordelt $3 \cdot 4 = 12$ enere.



- Nå er hele mengden 92 fordelt, og da er vi ferdige med utregningen. I hver gruppe endte vi opp med mengden 23.

Tabellmetoden

Tabellmetoden baserer seg på divisjon som omvendt operasjon av ganging. For eksempel er svaret på spørsmålet ”Hva er $76 : 4$?” det samme som svaret på spørsmålet ”Hvilket tall må jeg gange 4 med for å få 76?”. På samme vis som for tabellmetoden ved subtraksjon er det opp til en selv å velge passende tall for å nå målet.

Eksempel 1

$92 : 4 = 23$

$\cdot 4$		
10	40	40
10	40	80
3	12	92
23		

Eksempel 2

$894 : 3 = 298$

$\cdot 3$		
200	600	600
30	90	690
30	90	780
30	90	870
8	24	894
298		

Eksempel 3

$894 : 3 = 298$

$\cdot 3$		
300	900	900
-2	-6	894
298		

Merk: Samme regnestykke som i *Eksempel 2*, men en annen utregning.

Eksempel 1 (forklaring)

Siden vi skal dele 92 med 4, ganger vi med 4 fram til vi når 92.

$\cdot 4$		
10	40	40

(a)

$\cdot 4$		
10	40	40
10	40	80

(b)

$\cdot 4$		
10	40	40
10	40	80
3	12	92

(c)

$\cdot 4$		
10	40	40
10	40	80
3	12	92
23		

(d)

(a) Vi ganger 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt kommet til 40.

(b) Vi ganger 10 med 4, som er lik 40. Da har vi så langt kommet til $40 + 40 = 80$.

(c) Vi ganger 3 med 4, som er lik 12. Da har vi kommet til $80 + 12 = 92$, som var målet.

(d) Vi legger sammen tallene vi ganget med, og får $10 + 10 + 3 = 23$.

Tips

Det kan være lurt å se tilbake på utregninger gjort med tabellmetoden for å tenke over om man kunne valgt tall på en annen måte. I *Eksempel 1* på side 106 kunne vi startet med å gange med 20. Dette er omtrent like enkelt som å gange med 10, og det ville ha brakt oss nærmere målet.

Divisjon med rest

Det er langt ifra alltid at svaret ved divisjon blir et heltall. En måte å uttrykke slike svar på, er å ved å bruke begrepet **rest**. Begrepet er best forklart ved eksempel:

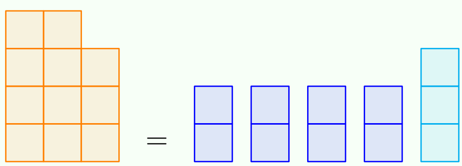
Eksempel 1

Regn ut $11 : 4$ med rest.

Svar

Det største heltallet vi kan gange med 4 uten at produktet blir større enn 11, er 2. $2 \cdot 4 = 8$, så da har vi $11 - 8 = 3$ i rest.

$$11 = 2 \cdot 4 + 3$$



Dette betyr at

$$11 : 4 = 2 \text{ og } 3 \text{ i rest}$$

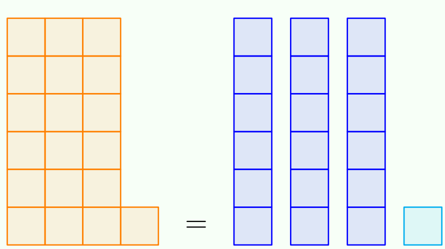
Eksempel 2

Regn ut $19 : 3$ med rest.

Svar

Det største heltallet vi kan gange med 3 uten at produktet blir større enn 19, er 6. $6 \cdot 3 = 18$, så da har vi $19 - 8 = 1$ i rest.

$$19 = 6 \cdot 3 + 1$$



Dette betyr at

$$19 : 3 = 6 \text{ og } 1 \text{ i rest}$$

Eksempel 3

Regn ut $94 : 4$ med rest.

Svar

Med oppstilling

$$94 : 4 = 23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}
9 & 4 & : & 4 & \rightarrow & 2 & 3 \\
8 & & & & & & \\
\hline
1 & 4 & & & & & \\
1 & 2 & & & & & \\
\hline
 & 2 & & & & &
\end{array}$$

Merk: Da det blir feil å bruke $=$ i figuren over, har vi valgt å bruke $\rightarrow$.

Med tabellmetoden

$$94 : 4 = 23 \text{ og } 2 \text{ i rest}$$

$\cdot 4$		
20	80	80
3	12	92
23		

$$94 - 92 = 2$$

Språkboksen

Hvis vi utfører en **modulo-operasjon**, finner vi resten i et delestykke. Dette blir ofte vist ved forkortingen mod. For eksempel er

$$11 \bmod 4 = 3 \qquad , \qquad 19 \bmod 3 = 1$$

I tillegg til `mod`, blir også `%` og `//` brukt som symbol for denne operasjonen i programmeringsspråk.

Divisjon med blanda tall som svar

Eksempel 1

Regn ut $11 : 4$. Skriv svaret som et blandet tall.

Svar

$$11 : 4 = 2 \text{ og } 3 \text{ i rest} = 2 + \frac{3}{4}$$

Eksempel 2

Regn ut $19 : 3$. Skriv svaret som et blandet tall.

Svar

$$19 : 3 = 6 \text{ og } 1 \text{ i rest} = 6 + \frac{1}{3}$$

Eksempel 1 (forklaring)

Vi starter med å legge merke til at $4 = \frac{4}{1}$. Dette betyr at

$$11 : 4 = 11 : \frac{4}{1}$$

Av regel 4.10 har vi at

$$11 : \frac{4}{1} = 11 \cdot \frac{1}{4}$$

Videre er $11 = 2 \cdot 4 + 3$, og da er

$$11 \cdot \frac{1}{4} = (2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4}$$

Av regel 3.2 har vi at

$$\begin{aligned}(2 \cdot 4 + 3) \cdot \frac{1}{4} &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Divisjon med desimaltall som svar

Eksempel 1

Regn ut $11 : 4$. Oppgi svaret som desimaltal.

Svar

Med oppstilling

$$11 : 4 = 2{,}75$$

1	1	:	4	=	2	,7	5
	8						
	3	0					
	2	8					
		2	0				
		2	0				
			0				

Med tabellmetoden

$$11 : 4 = 2{,}75$$

$\cdot\, 4$		
2	8	8
0,5	2	10
0,25	1	11
2,75		

Eksempel 1; oppstilling (forklaring)

Siden vi deler med 4, er det snakk om å fordele 11 likt i 4 grupper.

- 8 av de 11 enerne kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 3 enere. Dette er det samme som 30 tideler.
- 28 av de 30 tidelene kan vi fordele likt i 4 grupper. Da har vi igjen 2 tideler. Dette er det samme som 20 hundredeler.
- 20 av de 20 hundredelene kan vi fordele likt i 4 grupper.
- Hele mengden 11 er nå fordelt, og da er vi ferdige med utegningen.

6.5 Regning med tid

Sekunder, minutter og timer er organisert i grupper på 60:

$$1 \text{ minutt} = 60 \text{ sekund}$$
$$1 \text{ time} = 60 \text{ minutt}$$

Dette betyr at *overganger* oppstår i utregninger når vi når 60.

Eksempel 1

$2\,\text{t}\;25\,\text{min} + 10\,\text{t}\;45\,\text{min} = 13\,\text{t}\;10\,\text{min}$

Utrekningsmetode 1

		10 t 45 min
15 min	15 min	11 t 00 min
10 min	25 min	11 t 10 min
2 t	2 t 25 min	13 t 10 min

Utrekningsmetode 2

		10:45
00:15	00:15	11:00
00:10	00:25	11:10
02:00	02:25	13:10

Eksempel 2

$14\,\text{t}\;18\,\text{min} - 9\,\text{t}\;34\,\text{min} = 4\,\text{t}\;44\,\text{min}$

Utrekningsmetode 1

	9 t 34 min
26 min	10 t 00 min
18 min	10 t 18 min
4 t	14 t 00 min
4 t 44 min	

Utrekningsmetode 2

	09:34
00:26	10:00
00:18	10:18
04:00	14:18
04:44	

6.6 Avrunding og overslagsregning

Avrunding

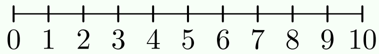
Ved **avrunding** av et tall minker vi antall siffer forskjellige fra 0 i tallet. Videre kan man runde av til *nærmeste ener*, *nærmeste tier* og lignende.

Eksempel 1

Ved avrunding til *nærmeste tier* avrundes

- 1, 2, 3 og 4 *ned* til 0 fordi de er nærmere 0 enn 10.
- 6, 7, 8 og 9 *opp* til 10 fordi de er nærmere 10 enn 0.

5 avrundes også opp til 10.



Eksempel 2

- **63 avrundet til nærmeste tier = 60**

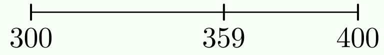
  Dette fordi 63 er nærmere 60 enn 70.

- **78 avrundet til nærmeste tier = 80**

  Dette fordi 78 er nærmere 80 enn 70.

- **359 avrundet til nærmeste hundrer = 400**

  Dette fordi 359 er nærmere 400 enn 300.



- **11,8 avrundet til nærmeste ener = 12**

  Dette fordi 11,8 er nærmere 12 enn 11.

Overslagsregning

Det er ikke alltid vi trenger å vite svaret på regnestykker helt nøyaktig, ofte er det viktigere at vi fort kan avgjøre hva svaret *omtrent* er det samme som, aller helst ved hoderegning. Når vi finner svar som omtrent er riktige, sier vi at vi gjør et **overslag**. Et overslag innebærer at vi avrunder[1] tallene som inngår i et regnestykke slik at utregningen blir enklere.

> **Språkboksen**
>
> At noe er "omtrent det samme som" skriver vi ofte som "cirka" ("ca."). Tegnet for "cirka" er $\approx$.

Overslag ved addisjon og ganging

La oss gjøre et overslag på regnestykket

$$98{,}2 + 24{,}6$$

Vi ser at $98{,}2 \approx 100$. Skriver vi 100 istedenfor 98,2 i regnestykket vårt, får vi noe som er litt mer enn det nøyaktige svaret. Skal vi endre på 24,6 bør vi derfor gjøre det til et tall som er litt mindre. 24,6 er ganske nærme 20, så vi kan skrive

$$98{,}2 + 24{,}6 \approx 100 + 20 = 120$$

Når vi gjør overslag på tall som legges sammen, bør vi altså prøve å gjøre det ene tallet større (runde opp) og et tall mindre (runde ned).

Det samme gjelder også hvis vi har ganging, for eksempel

$$1\,689 \cdot 12$$

Her avrunder vi 12 til 10. For å "veie opp" for at svaret da blir litt mindre enn det egentlige, avrunder vi 1 689 opp til 1 700. Da får vi

$$1\,689 \cdot 12 \approx 1\,700 \cdot 10 = 17\,000$$

[1] *Obs!* Avrunding ved overslag trenger ikke å innebære avrunding til nærmeste tier og lignende.

Overslag ved subtraksjon og deling

Skal et tall trekkes fra et annet, blir det litt annerledes. La oss gjøre et overslag på

$$186{,}4 - 28{,}9$$

Hvis vi runder 186,4 opp til 190 får vi et svar som er større enn det egentlige, derfor bør vi også trekke ifra noe. Det kan vi gjøre ved også å runde 28,9 oppover (til 30):

$$\begin{aligned} 186{,}4 - 28{,}9 &\approx 190 - 30 \\ &= 160 \end{aligned}$$

Samme prinsippet gjelder for deling:

$$145 : 17$$

Vi avrunder 17 opp til 20. Deler vi noe med 20 istedenfor 17, blir svaret mindre. Derfor bør vi også runde 145 oppover (til 150):

$$145 : 17 \approx 150 : 20 = 75$$

Overslagsregning oppsummert

6.4 Overslagsregning

- Ved addisjon eller multiplikasjon mellom to tall, avrund gjerne et tall opp og et tall ned.
- Ved subtraksjon eller deling mellom to tall, avrund gjerne begge tall ned eller begge tall opp.

Eksempel

Rund av og finn omtrentlig svar for regnestykkene.

a) $23{,}1 + 174{,}7$ b) $11{,}8 \cdot 107{,}2$

c) $37{,}4 - 18{,}9$ d) $1054 : 209$

Svar

a) $32{,}1 + 174{,}7 \approx 30 + 170 = 200$

b) $11{,}8 \cdot 107{,}2 \approx 10 \cdot 110 = 1\,100$

c) $37{,}4 - 18{,}9 \approx 40 - 20 = 20$

d) $1\,054 : 209 \approx 1\,000 : 200 = 5$

Kommentar

Det finnes ingen konkrete regler for hva man *kan* eller ikke *kan* tillate seg av forenklinger når man gjør et overslag, det som er kalt regel 6.4 er strengt tatt ikke en regel, men et nyttig tips.

Man kan også spørre seg hvor langt unna det faktiske svaret man kan tillate seg å være ved overslagsregning. Heller ikke dette er det noe fasitsvar på, men en grei føring er at overslaget og det faktiske svaret skal være av samme **størrelsesorden**. Litt enkelt sagt betyr dette at hvis det faktiske svaret har med tusener å gjøre, bør også overslaget ha med tusener å gjøre. Mer nøyaktig sagt betyr det av det faktiske svaret og ditt overslag bør ha samme tierpotens når de er skrevet på standardform[1].

[1]Se seksjon 6.7

6.7 Standardform

Obs! Denne seksjonen tar utgangspunkt i at leseren er kjent med potenser, som vi ser på i seksjon 8.2.

Vi kan utnytte regel 6.2 og regel 6.3, og det vi kan om potenser, til å skrive tall på **standardform**.

La oss se på tallet 6 700. Av regel 6.2 vet vi at

$$6\,700 = 6{,}7 \cdot 1\,000$$

Og siden $1000 = 10^3$, er

$$6\,700 = 6{,}7 \cdot 1\,000 = 6{,}7 \cdot 10^3$$

$6{,}7 \cdot 10^3$ er 6 700 skrevet på standardform fordi

- 6,7 er større eller lik 1 og mindre enn 10.
- 10^3 er en potens med grunntall 10 og eksponent 3, som er et heltall.
- 6,7 og 10^3 er ganget sammen.

La oss også se på tallet 0,093. Av regel 6.3 har vi at

$$0{,}093 = 9{,}3 : 100$$

Men å dele med 100 er det samme som å gange med 10^{-2}, altså er

$$0{,}093 = 9{,}3 : 100 = 9{,}3 \cdot 10^{-2}$$

$9{,}3 \cdot 10^{-2}$ er 0,093 skrevet på standardform fordi

- 9,3 er større eller lik 1 og mindre enn 10.
- 10^{-2} er en potens med grunntall 10 og eksponent -2, som er et heltall.
- 9,3 og 10^{-2} er ganget sammen.

6.5 Standardform

Et tall skrevet som

$$a \cdot 10^n$$

hvor $1 \leq |a| < 10$ og n er et heltall, er et tall skrevet på standardform.

Eksempel 1

Skriv 980 på standardform.

Svar

$$980 = 9{,}8 \cdot 10^2$$

Eksempel 2

Skriv 0,00671 på standardform.

Svar

$$0{,}00671 = 6{,}71 \cdot 10^{-3}$$

Tips

For å skrive om tall på standardform kan du gjøre følgende:

1. Flytt komma slik at du får et tall som ligger mellom 0 og 10.

2. Gang dette tallet med en tierpotens som har eksponent med tallverdi lik antallet plasser du flyttet komma. Flyttet du komma mot venstre/høgre, er eksponenten positiv/negativ.

Eksempel 3

Skriv 9 761 432 på standardform.

Svar

1. Vi flytter komma 6 plasser til venstre, og får 9,761432

2. Vi ganger dette tallet med 10^6, og får at

$$9\,761\,432 = 9{,}761432 \cdot 10^6$$

Eksempel 4

Skriv 0,00039 på standardform.

Svar

1. Vi flytter komma 4 plasser til høgre, og får 3,9.
2. Vi ganger dette tallet med 10^{-4}, og får at

$$0{,}00039 = 3{,}9 \cdot 10^{-4}$$

Oppgaver for kapittel 6

6.1.1
Regn ut.

a) $12 + 84$ b) $36 + 51$ c) $328 + 571$ d) $242 + 56$

6.1.2
Regn ut.

a) $19 + 84$ b) $86 + 57$ c) $529 + 471$ d) $202 + 808$

6.2.1
Regn ut.

a) $84 - 23$ b) $286 - 52$ c) $529 - 401$ d) $782 - 131$

6.2.2
Regn ut.

a) $78 - 19$ b) $824 - 499$ c) $731 - 208$ d) $1078 - 991$

6.3.1
Regn ut.

a) $12 \cdot 3$ b) $28 \cdot 4$ c) $76 \cdot 5$ d) $43 \cdot 6$

e) $109 \cdot 7$ f) $98 \cdot 8$ g) $213 \cdot 9$

6.3.2
Regn ut.

a) $29 \cdot 12$ b) $83 \cdot 31$ c) $91 \cdot 76$ d) $14 \cdot 83$

6.3.3
Regn ut.

a) $531 \cdot 56$ b) $83 \cdot 701$ c) $91 \cdot 673$ d) $731 \cdot 67$

6.3.4

a) Bruk kalkulator til å regne ut $27 \cdot 5$ og $2{,}7 \cdot 5$.

b) Bruk kalkulator til å regne ut $247 \cdot 192$ og $24{,}7 \cdot 19{,}2$.

c) Bruk kalkulator til å regne ut $928 \cdot 74$ og $9{,}28 \cdot 7{,}4$.

d) Bruk kalkulator til å regne ut $134 \cdot 4\,249$ og $1{,}34 \cdot 42{,}49$.

e) Sammenlign parene av svar fra oppgave a) - c), og lag en regel for hvordan du kan regne ut ganging med desimaltall.

6.3.5

Regn ut

a) $82{,}3 \cdot 5$ b) $9{,}51 \cdot 7$ c) $22{,}4 \cdot 1{,}7$

6.4.1

Regn ut.

a) $98 : 2$ b) $87 : 3$ c) $92 : 4$ d) $85 : 5$ e) $72 : 6$

6.4.2

Regn ut.

a) $378 : 2$ b) $224 : 4$ c) $495 : 5$

e) $133 : 7$ f) $208 : 8$ g) $873 : 9$

6.5.1

Skriv tallet på standardform.

a) $98\,000$ b) $167\,000\,000$ c) $4\,819$ d) 21

e) $9\,132{,}27$ f) $893{,}7$ g) $18\,002{,}1$ h) $302{,}4$

6.5.2

Skriv tallet på standardform.

a) 0,027 b) 0,0001901 c) 0,32 d) 0,00000020032

6.5.3

Gitt regnestykket

$$900\,000\,000 \cdot 0{,}00007$$

a) Forklar hvorfor regnestykket kan skrives som

$$9 \cdot 10^8 \cdot 7 \cdot 10^{-5}$$

b) Bruk potensregler (se seksjon 8.2) og finn svaret på regnestykket fra a).

6.5.4 (T1H21D1)

Rekn ut og skriv svaret på standardform

$$\frac{6{,}2 \cdot 107 + 2{,}5 \cdot 108}{0{,}000002}$$

Gruble 6

Et tall kan ganges med 25 ved å

- dele tallet med 4
- gange kvotienten med 100

Metoden virker (selvsagt) best hvis tallet er delelig med 4.

a) Forklar hvorfor denne metoden fungerer.

b) Forklar hvordan metoden kan brukes til å rekne ut 24^2.

Kapittel 7

Geometri

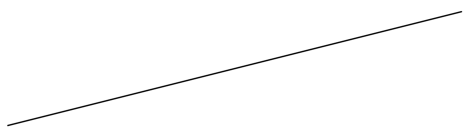
7.1 Begrep

Punkt

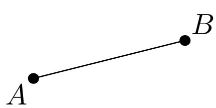
En bestemt plassering kalles et[1] **punkt**. Et punkt markerer vi ved å tegne en prikk, som vi gjerne setter navn på med en bokstav. Under har vi tegnet punktene A og B.

Linje og linjestykke

En rett strek som er uendeleg lang (!) kaller vi en **linje**. At linja er uendelig lang, gjør at vi aldri kan *tegne* en linje, vi kan bare *tenke* oss en linje. Å tenke seg en linje kan man gjøre ved å lage en rett strek, og så forestille seg at endene til streken vandrer ut i hver sin retning.



En rett strek som går mellom to punkt kaller vi et **linjestykke**.



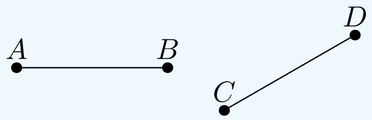
Linjestykket mellom punktene A og B skriver vi som AB. **Lengden** til AB er lengden vi må vandre langs linjestykket for å gå fra A til B.

Merk

Et linjestykke er et utklipp (et stykke) av en linje, derfor har en linje og et linjestykke mange felles egenskaper. Når vi skriver om linjer, vil det bli opp til leseren å avgjøre om det samme gjelder for linjestykker, slik sparer vi oss for hele tiden å skrive ”linjer/linjestykker”.

[1] Se også seksjon 1.3.

Linjestykke eller lengde?



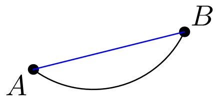
Linjestykkene AB og CD har lik lengde, men de er ikke det samme linjestykket. Likevel kommer vi til å skrive $AB = CD$ for å vise til at linjestykkene har lik lengde. Da bruker vi altså de samme navnene på linjestykkene som på lengdene deres[1]. Dette gjør vi av følgende grunner:

- Til hvilken tid vi snakkar om et linjestykke og hvilken tid vi snakker om en lengde vil komme tydelig fram av sammenhengen begrepet blir brukt i.
- Å hele tiden måtte ha skrevet "lengden til AB" og lignende ville gitt mindre leservennlige setninger.

[1]Det samme gjelder for vinkler og vinkelverdier, se side 128 - 130.

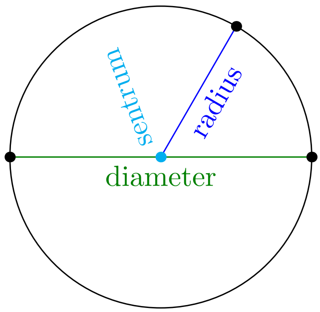
Avstand

Det er uendelig med veier man kan gå fra ett punkt til et annet, og noen veier vil være lengre enn andre. Når vi snakkar om avstand i geometri, mener vi helst den *korteste* avstanden. For geometrier vi skal ha om i denne boka, vil den korteste avstanden mellom to punkt alltid være lengden til linjestykket (blått i figuren under) som går mellom punktene.



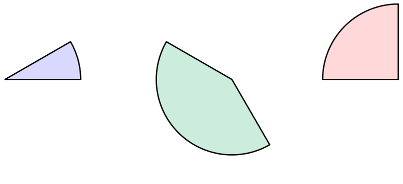
Sirkel; sentrum, radius og diameter

Om vi lager en lukket bue der alle punktene på buen har samme avstand til ett punkt, har vi en **sirkel**. Punktet som alle punktene på buen har lik avstand til er **sentrum** i sirkelen. Et linjestykke mellom sentrum og et punkt på buen kaller vi en **radius**. Et linjestykke mellom to punkt på buen, og som går via sentrum, kaller vi en **diameter**[1].



Sektor

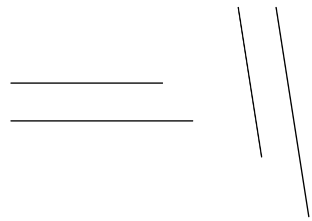
En bit som består av en sirkelbue og to tilhørende radier kalles en **sektor**. Bildet under viser tre forskjellige sektorer.



[1]Som nevnt på side 126 kan *radius* og *diameter* like gjerne bli brukt om lengden til linjestykkene.

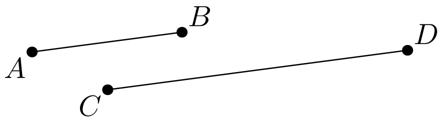
Parallelle linjer

Når linjer går i samme retning, er de **parallelle**. I figuren under vises to par med parallelle linjer.



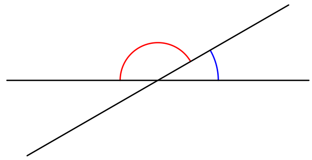
Vi bruker symbolet $\parallel$ for å vise til at to linjer er parallelle.

$$AB \parallel CD$$



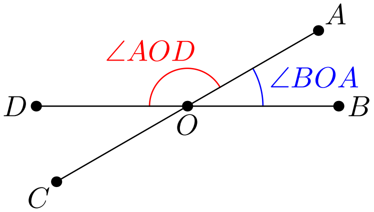
Vinkler

To linjer som ikke er parallelle, vil før eller siden krysse hverandre. Gapet to linjer danner seg imellom kalles en **vinkel**. Vinkler tegner vi som små sirkelbuer:



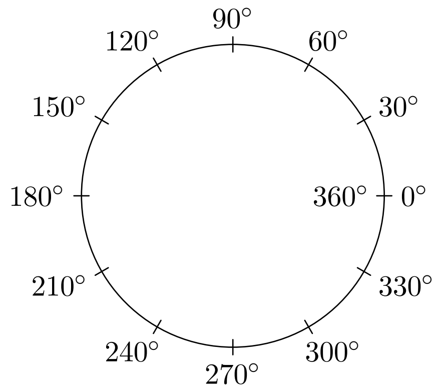
Linjene som danner en vinkel kalles **vinkelbein**. Punktet der linjene møtes kalles **toppunktet** til vinkelen. Ofte bruker vi punktnavn og vinkelsymbolet $\angle$ for å tydeliggjøre hvilken vinkel vi mener. I figuren under er det slik at

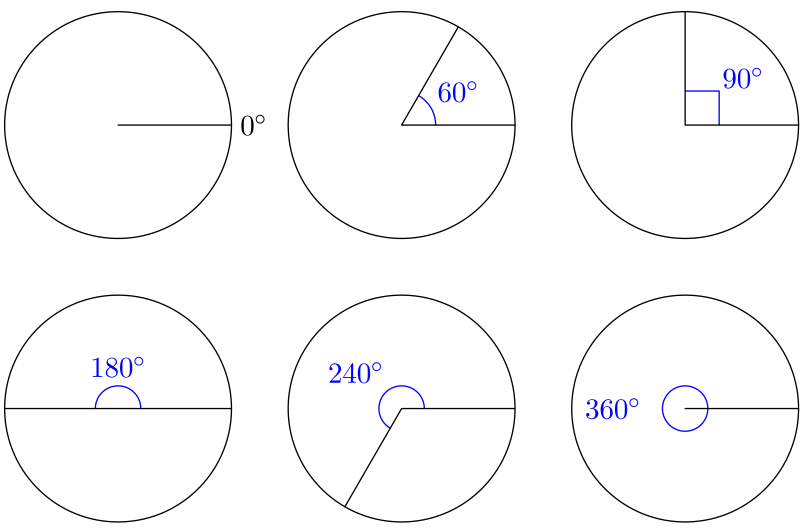
- vinkelen $\angle BOA$ har vinkelbein OB og OA, og toppunkt O.
- vinkelen $\angle AOD$ har vinkelbein OA og OD, og toppunkt O.



Mål av vinkler i grader

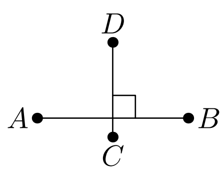
Når vi skal måle en vinkel i grader, tenker vi oss at en sirkelbue er delt inn i 360 like lange biter. Én slik bit kaller vi én **grad**, som vi skriver som tegnet $^\circ$.



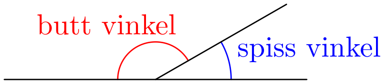


Legg merke til at en 90° vinkel markeres med symbolet $\square$. En vinkel som måler 90° kalles en **rett vinkel**. Linjer som danner rette vinkler sier vi står **vinkelrette** på hverandre. Dette indikerer vi med symbolet $\perp$.

$$AB \perp CD$$

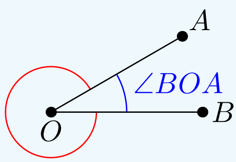


En vinkel som er større enn 90° kalles en **butt/stump vinkel**, og en vinkel som er mindre enn 90° kalles en **spiss vinkel**.

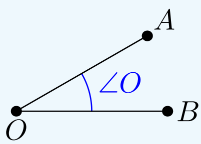


Hvilken vinkel?

Når to linjestykker møtes i et felles punkt, danner de strengt tatt to vinkler; den ene større eller lik 180°, den andre mindre eller lik 180°. I de aller fleste sammenhenger er det den minste vinkelen vi ønsker å studere, og derfor er det vanlig å definere $\angle AOB$ som den *minste* vinkelen dannet av linjestykkene OA og OB.

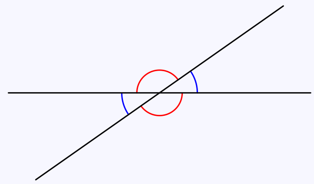


Så lenge det bare er to linjestykker/linjer tilstede, er det også vanlig å bruke bare én bokstav for å vise til vinkelen:

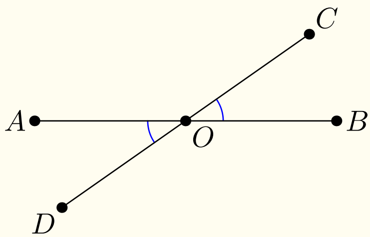


7.1 Toppvinkler

To motstående vinkler med felles toppunkt kalles **toppvinkler**. Toppvinkler er like store.



7.1 Toppvinkler (forklaring)



Vi har at

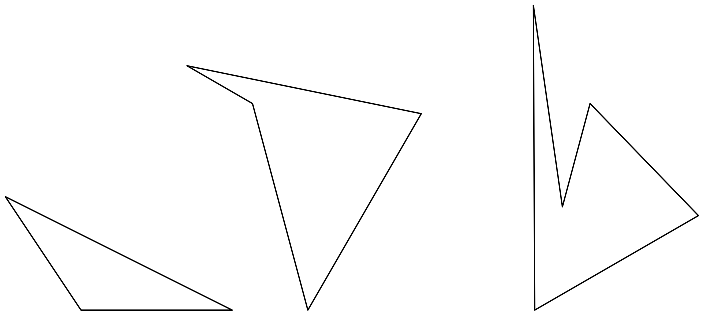
$$\angle BOC + \angle DOB = 180^\circ$$

$$\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$$

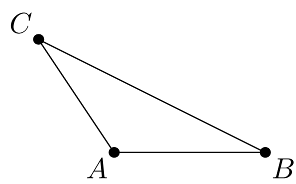
Dette må bety at $\angle BOC = \angle AOD$. Tilsvarende er $\angle COA = \angle DOB$.

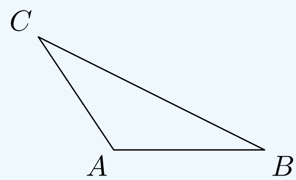
Kanter og hjørner

Når linjestykker danner en lukket form, har vi en **mangekant**. Under ser du (fra venstre mot høyre) en **trekant**, en **firkant** og en **femkant**.



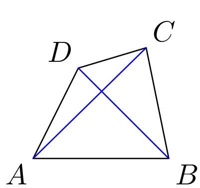
Linjestykkene en mangekant består av kalles **kanter** eller **sider**. Punktene der kantene møtes kaller vi **hjørner**. Trekanten under har altså hjørnene A, B og C, og sidene (kantene) AB, BC og AC.



> **Merk**
>
> Ofte kommer vi til å skrive bare en bokstav for å markere et hjørne i en mangekant.
>
> 
>

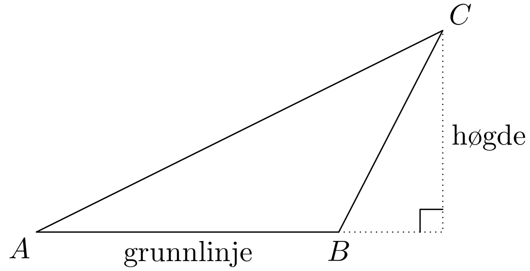
Diagonaler

Et linjestykke som går mellom to hjørner som ikke hører til samme side av en mangekant kalles en **diagonal**. I figuren under ser vi diagonalene AC og BD.

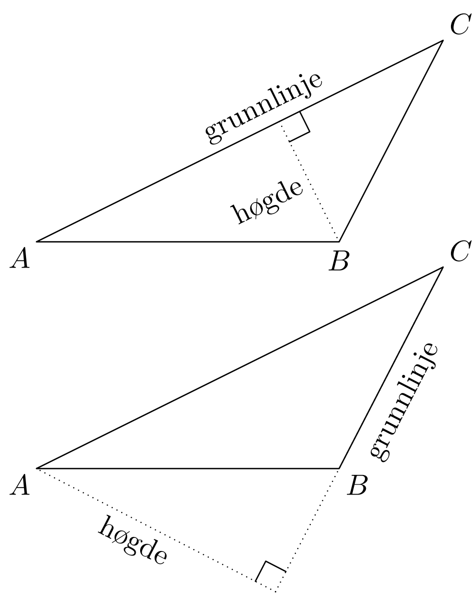


Høgde og grunnlinje

Når vi i seksjon 7.4 skal finne areal, vil begrepene *grunnlinje* og *høgde* være viktige. For å finne en høgde i en trekant, tar vi utgangspunkt i én av sidene. Siden vi velger kaller vi **grunnlinja**. La oss starte med AB i figuren under som grunnlinje. Da er **høgda** linjestykket som går fra AB (eventuelt, som her, forlengelsen av AB) til C, og som står vinkelrett på AB.



Da det er tre sider vi kan velge som grunnlinje, har en trekant tre høgder.



Merk

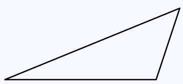
Høgde og grunnlinje kan også på lignende vis bli brukt i forbindelse med andre mangekanter.

7.2 Egenskaper for trekanter og firkanter

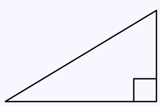
I tillegg til å ha et bestemt antall sider og hjørner, kan mangekanter også ha andre egenskaper, som for eksempel sider eller vinkler av lik størrelse, eller sider som er parallelle. Vi har egne navn på mangekanter med spesielle egenskaper, og disse kan vi sette opp i en oversikt der noen "arver"[1] egenskaper fra andre.

7.2 Trekanter

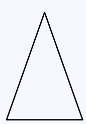
Trekant $\rightarrow$ Rettvinklet trekant
Trekant $\rightarrow$ Likebeint trekant $\longrightarrow$ Likesidet trekant



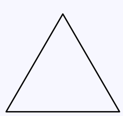
Trekant
Har tre sider og tre hjørner.



Rettvinklet trekant
Har en vinkel som er 90°.



Likebeint trekant
Minst to sider er like lange.
Minst to vinkler er like store.



Likesidet trekant
Sidene er like lange.
Alle vinklene er 60°.

Eksempel

Da en likesidet trekant har tre sider som er like lange og tre vinkler som er 60°, er den også en likebeint trekant.

Språkboksen

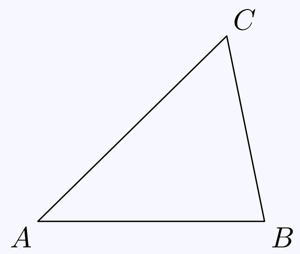
Den lengste siden i en rettvinklet trekant blir gjerne kalt *hypotenus*. De korteste sidene blir gjerne kalt *kateter*.

[1] I regel 7.2 og regel 7.4 er dette indikert med piler.

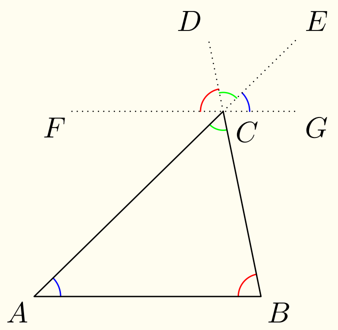
7.3 Vinkelsummen i en trekant

I en trekant er summen av vinkelverdiene 180°.

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$



7.3 Vinkelsummen i en trekant (forklaring)



Vi tegner et linjestykke FG som går gjennom C og som er parallell med AB. Videre setter vi punktet E og D på forlengelsen av henholdsvis AC og BC. Da er $\angle A = \angle GCE$ og $\angle B = \angle DCF$. $\angle ACB = \angle ECD$ fordi de er toppvinkler. Vi har at

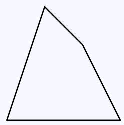
$$\angle DCF + \angle ECD = \angle GCE = 180°$$

Altså er

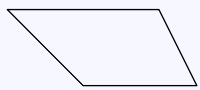
$$\angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180°$$

7.4 Firkanter

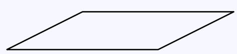
$$\text{Firkant} \longrightarrow \text{Trapes} \longrightarrow \text{Parallellogram} \begin{array}{l} \nearrow \text{Rombe} \searrow \\ \searrow \text{Rektangel} \nearrow \end{array} \text{Kvadrat}$$



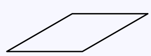
Firkant
Har fire sider og fire hjørner.



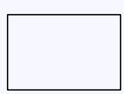
Trapes
Har minst to sider som er parallelle.



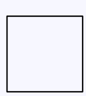
Parallellogram
Har to par med parallelle sider.
Har to par med like vinkler.



Rombe
Sidene er like lange.



Rektangel
Alle vinklene er 90°.



Kvadrat

Eksempel

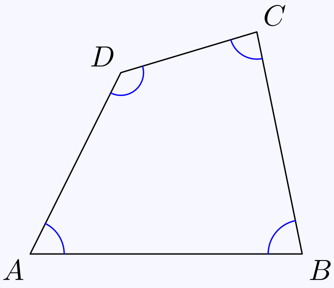
Kvadratet er både en rombe og et rektangel, og "arver" derfor egenskapene til disse. Dette betyr at i et kvadratet er

- alle sidene like lange.
- alle vinklene 90°.

7.5 Vinkelsummen i en firkant

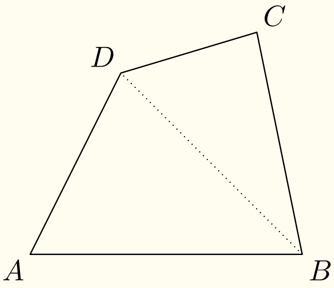
I en firkant er summen av vinkelverdiene 360°.

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$



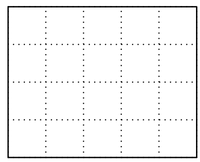
7.5 Vinkelsummen i en firkant (forklaring)

Den samlede vinkelsummen i $\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ utgjør vinkelsummen i $\square ABCD$. Av regel 7.3 vet vi at vinkelsummen i alle trekanter er 180°, altså er vinkelsummen i $\square ABCD$ lik $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$.

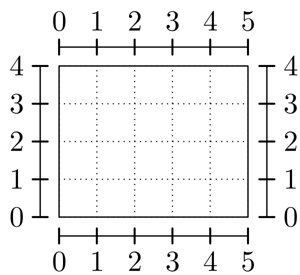


7.3 Omkrets

Når vi måler hvor langt det er rundt en lukket form, finner vi *omkretsen* til figuren. La oss starte med å finne omkretsen til dette rektangelet:



Rektangelet har to sider med lengde 4 og to sider med lengde 5:



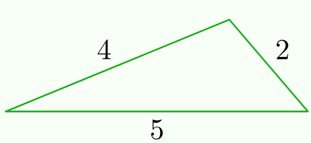
Dette betyr at

$$\begin{aligned}\text{Omkretsen til rektangelet} &= 4 + 4 + 5 + 5 \\ &= 18\end{aligned}$$

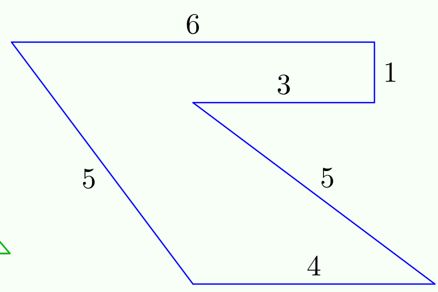
7.6 Omkrets

Omkretsen er lengden rundt en lukket figur.

Eksempel



(a)



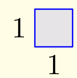
(b)

I figur *(a)* er omkretsen $5 + 2 + 4 = 11$.

I figur *(b)* er omkretsen $4 + 5 + 3 + 1 + 6 + 5 = 24$.

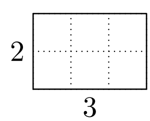
7.4 Areal

Overalt rundt oss kan vi se *overflater*, for eksempel på et gulv eller et ark. Når vi ønsker å si noe om hvor store overflater er, må vi finne *arealet* deres. Idéen bak begrepet areal er denne:

> Vi tenker oss et kvadrat med sidelengder 1. Dette kaller vi *enerkvadradet*.
>
> 
>
>
> Så ser vi på overflaten vi ønsker å finne arealet til, og spør:
>
> ”Hvor mange enerkvadrat er det plass til på denne overflata?”

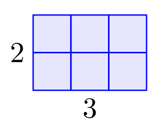
Arealet til et rektangel

La oss finne arealet til et rektangel som har grunnlinje 3 og høgde 2.



Vi kan da telle oss fram til at rektangelet har plass til 6 enerkvadrat:

$$\text{Arealet til rektangelet} = 6$$

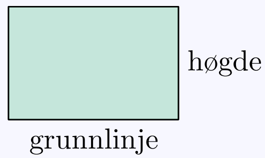


Ser vi tilbake til seksjon 2.3, legger vi merke til at

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= 3 \cdot 2 \\ &= 6\end{aligned}$$

7.7 Arealet til et rektangel

$$\text{areal} = \text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}$$

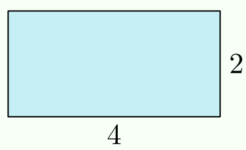


Bredde og lengde

Ofte blir ordene **bredde** og **lengde** brukt om grunnlinja og høgda i et rektangel.

Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet[1].

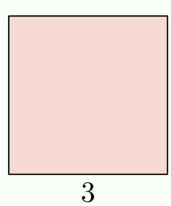


Svar

$$\text{Arealet til rektangelet} = 4 \cdot 2 = 8$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar

$$\text{Arealet til kvadratet} = 3 \cdot 3 = 9$$

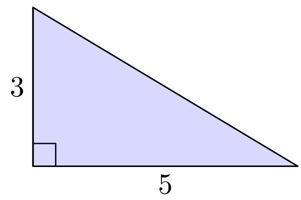
[1] *Merk*: Lengdene vi bruker som eksempel i en figur vil ikke nødvendigvis samsvare med lengdene i en annen figur. En sidelengde lik 1 i én figur kan altså være kortere enn en sidelengde lik 1 i en annen figur.

Arealet til en trekant

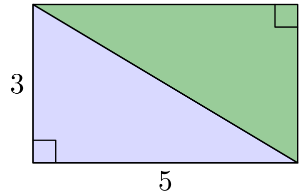
For trekanter er det tre forskjellige tilfeller vi må se på:

1) Tilfellet der grunnlinja og høgda har et felles endepunkt

La oss finne arealet til en rettvinklet trekant med grunnlinje 5 og høgde 3.



Vi kan nå lage et rektangel ved å ta en kopi av trekanten vår, og så legge langsidene til de to trekantene sammen:



Av regel 7.7 vet vi at arealet til rektangelet er $5 \cdot 3$. Arealet til én av trekantane må utgjøre halvparten av arealet til rektangelet, altså er

$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 3}{2}$$

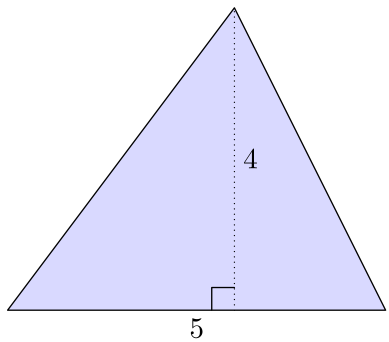
For den blå trekanten[1] er

$$\frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

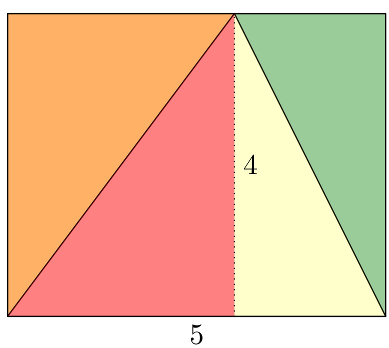
[1] Og selvsagt også den grønne.

2) Tilfellet der høgda ligger inni trekanten, men ikke har felles endepunkt med grunnlinja

Trekanten under har grunnlinje 5 og høgde 4.



Med denne trekanten (og høgda) som utgangspunkt, danner vi denne figuren:



Vi legger nå merke til at

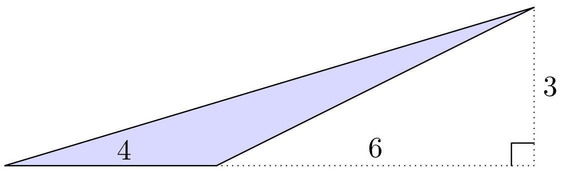
- arealet til den røde trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den røde og den gule trekanten.
- arealet til den gule trekanten utgjør halve arealet til rektangelet som består av den gule og den grønne trekanten.

Summen av arealene til den gule og den røde trekanten utgjør altså halvparten av arealet til rektangelet som består av alle de fire fargede trekantene. Arealet til dette rektangelet er $5 \cdot 4$, og da vår opprinnelige trekant (den blå) består av den røde og den oransje trekanten, har vi at

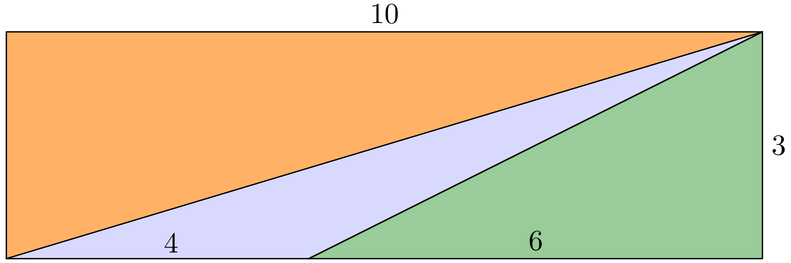
$$\text{Arealet til den blå trekanten} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

3) Tilfellet der høgda ligg utenfor trekanten

Trekanten under har grunnlinje 4 og høgde 3.



Med denne trekanten som utgangspunkt, danner vi et rektangel:



Vi gir nå arealene følgende navn:

$$\begin{aligned}\text{Arealet til rektangelet} &= R\\ \text{Arealet til den blå trekanten} &= B\\ \text{Arealet til den oransje trekanten} &= O\\ \text{Arealet til den grønne trekanten} &= G\end{aligned}$$

Da har vi at

$$R = 3 \cdot 10 = 30$$

$$O = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$$

$$G = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

Videre er

$$\begin{aligned}B &= R - O - G\\ &= 30 - 15 - 9\\ &= 6\end{aligned}$$

Legg nå merke til at vi kan skrive

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{2}$$

I den blå trekanten gjenkjenner vi dette som

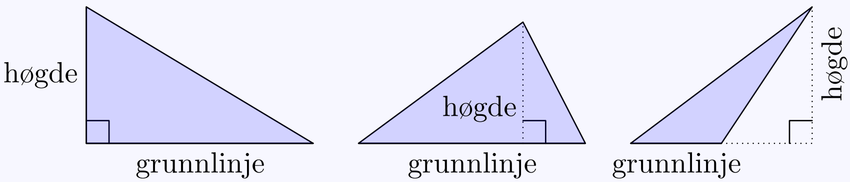
$$\frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$

Alle tilfellene oppsummert

Ett av de tre tilfellene vi har studert vil alltid gjelde for en valgt grunnlinje i en trekant, og alle tilfellene resulterer i det samme uttrykket.

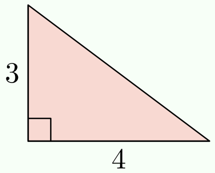
7.8 Arealet til en trekant

$$\text{Areal} = \frac{\text{grunnlinje} \cdot \text{høgde}}{2}$$



Eksempel 1

Finn arealet til trekanten.

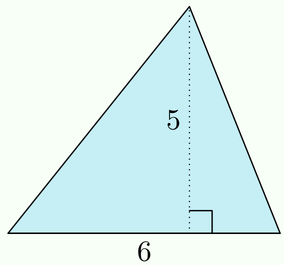


Svar

$$\begin{aligned}\text{Arealet til trekanten} &= \frac{4 \cdot 3}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

Eksempel 2

Finn arealet til trekanten.

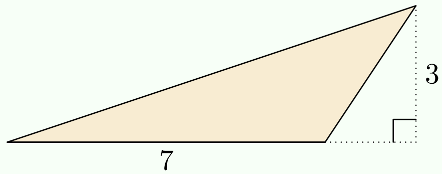


Svar

$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Eksempel 3

Finn arealet til trekanten.

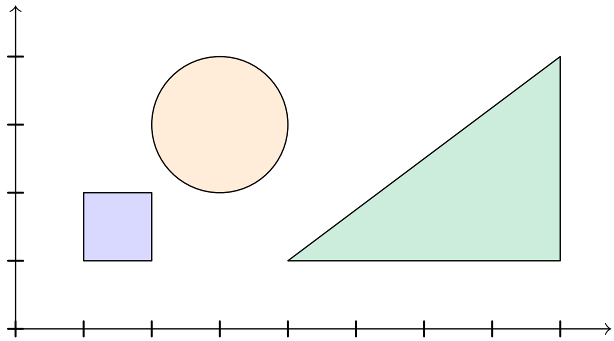


Svar

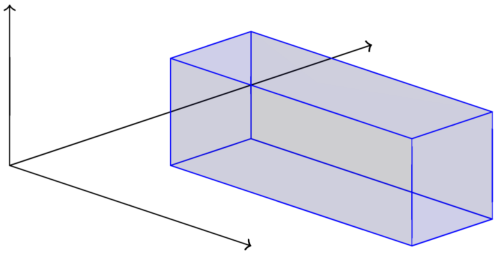
$$\text{Arealet til trekanten} = \frac{7 \cdot 3}{2} = \frac{21}{2}$$

7.5 Tredimensjonal geometri

Så langt har vi sett på **todimensjonale** figurer som trekanter, firkanter, sirkler og lignende. Alle todimensjonale figurer kan tegnes inn i et koordinatsystem med to akser.



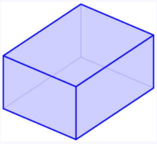
For å tegne **tredimensjonale** figurer trengs derimot tre akser:



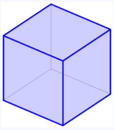
Mens et rektangel sies å ha en bredde og en høgde, kan vi si at boksen over har en bredde, en høgde *og* en lengde (dybde).

Området som "ligger utenpå" en tredimensjonal figur kaller vi **overflaten**. Overflaten til boksen over består av 6 rektangler. Mangekanter som er deler av en overflate kalles **sideflater**.

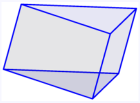
7.9 Tredimensjonale figurer



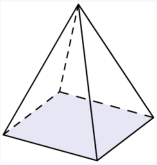
Firkantet prisme
Har to like og fire like rektangler som sideflater. Alle sideflatene som er i kontakt, står vinkelrette på hverandre.



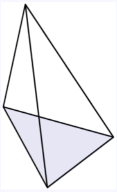
Kube
Firkantet prisme med kvadrater som sideflater.



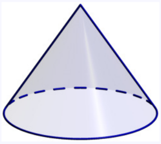
Trekantet prisme
To av sideflatene er like trekanter som er parallelle. Har tre sideflater som er trekanter.



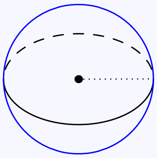
Firkantet pyramide
Har ett rektangel og fire trekanter som sideflater.



Trekantet pyramide
Har fire trekanter som sideflater.



Kjegle
En del av overflaten er en sirkel, den resterende delen er en sammenbrettet sektor.



Kule
Alle punkt på overflaten har lik avstand til sentrum.

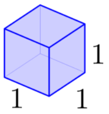
Tips

Det er ikke så lett å se for seg hva en *sammenbrettet sektor* er, men prøv dette:

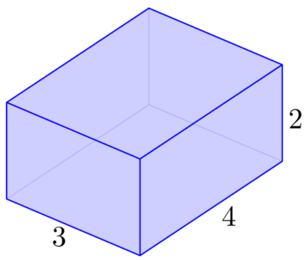
Tegn en sektor på et ark. Klipp ut sektoren, og føy sammen de to kantene på sektoren. Da har du en kjegle uten bunn.

7.6 Volum

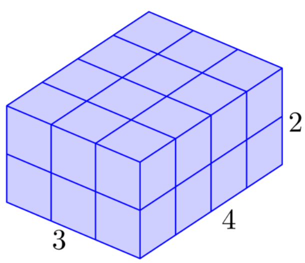
Når vi ønsker å si noe om hvor mye det er plass til inni en gjenstand, snakker vi om **volumet** til den. Som et mål på volum tenker vi oss en kube med sidelengde 1.



Ei slik kube kan vi kalle "enerkuben". Si vi har en firkantet prisme med bredde 3, lengde 4 og høgde 2.



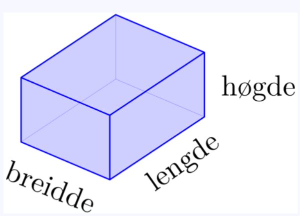
I denne er det plass til akkurat 24 enerkuber.



Dette kunne vi ha regnet slik:

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

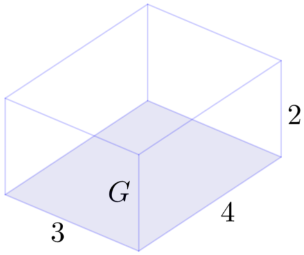
7.10 Volumet til en firkantet prisme I



$$\text{volum} = \text{bredde} \cdot \text{lengde} \cdot \text{høgde}$$

Grunnflate

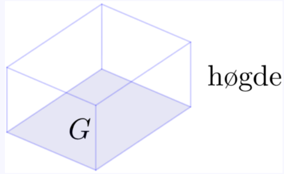
For å regne ut volumet til de mest elementære formene vi har, er det lurt å bruke omgrepet **grunnflate**. Slik som for en grunnlinje[1], er det vårt valg av grunnflate som avgjør hva som er høgda. For prismen fra forrige side er det naturlig å velge den flaten som ligger horisontalt til å være grunnflata. For å indikere dette skriver man ofte bokstaven G:



Grunnflaten har arealet $3 \cdot 4 = 12$, mens høgda er 2. Volumet til hele prismen er grunnflaten sitt areal ganget med høgda:

$$\begin{aligned} V &= 3 \cdot 4 \cdot 2 \\ &= G \cdot 2 \\ &= 24 \end{aligned}$$

7.11 Volumet til en firkantet prisme II



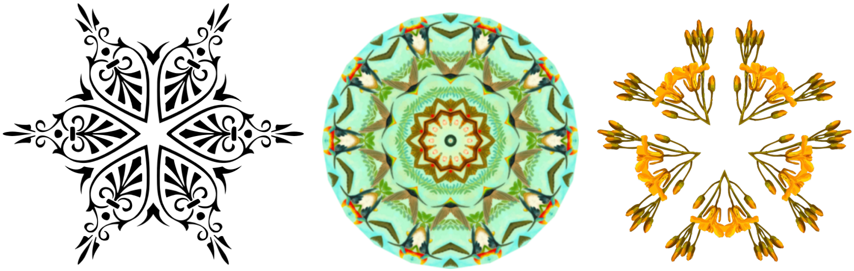
$$\text{volum} = G \cdot \text{høgde}$$

Grunnflaten eller grunnflatearealet?

I teksten over har vi først kalt selve grunnflaten for G, og så brukt G for *grunnflatearealet*. I denne boka er begrepet *grunnflate* så sterkt knyttet til *grunnflatearealet* at vi ikke skiller mellom disse to.

[1]Se side 133.

7.7 Symmetri



Bilder hentet fra freesvg.org.

Mange figurer kan deles inn i minst to deler hvor den éne delen bare er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av den andre. Dette kalles **symmetri**. De tre kommende regelboksene definerer de tre variantene for symmetri, men merk dette: Symmetri blir som regel intuitivt forstått ved å studere figurer, men er omstendelig å beskrive med ord. Her vil det derfor, for mange, være en fordel å hoppe rett til eksemplene.

7.12 Translasjonssymmetri (parallellforskyvning)

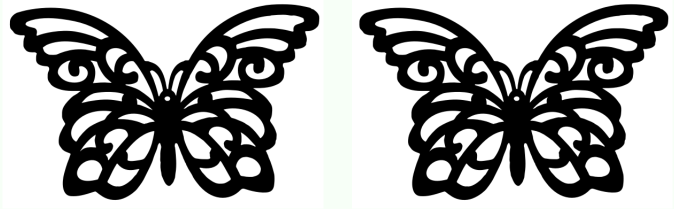
En symmetri hvor minst to deler er forskjøvne utgaver av hverandre kalles en **translasjonssymmetri**.

Når en form forskyves, blir hvert punkt på formen flyttet langs den samme vektoren[1].

[1]En vektor er et linjestykke med retning.

Eksempel 1

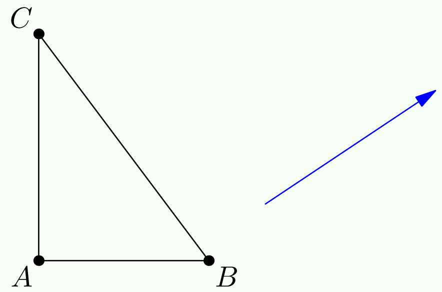
Figuren under viser en translasjonssymmetri som består av to sommerfugler.



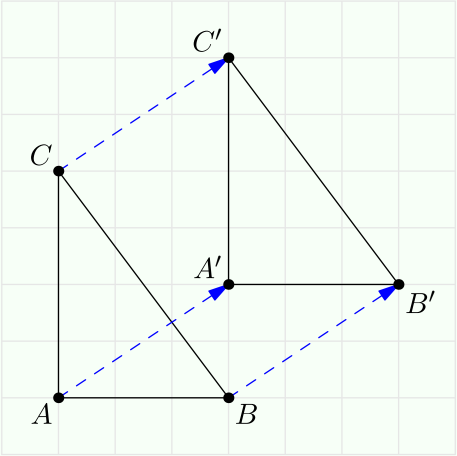
Bilde hentet fra freesvg.org.

Eksempel 2

Under vises $\triangle ABC$ og en blå vektor.



Under vises $\triangle ABC$ forskjøvet med den blå vektoren.



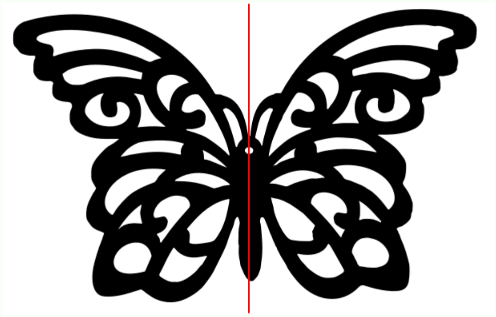
7.13 Speiling

En symmetri hvor minst to deler er vendte utgaver av hverandre kalles en **speilingssymmetri** og har minst én **symmetrilinje** (**symmetriakse**).

Når et punkt speiles, blir det forskjøvet vinkelrett på symmetrilinja, fram til det nye og det opprinnelige punktet har samme avstand til symmetrilinja.

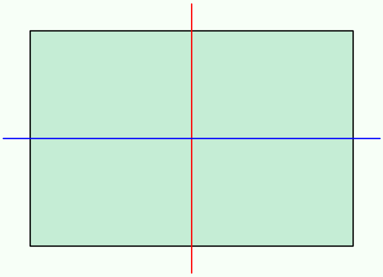
Eksempel 1

Sommerfuglen er en speilsymmetri, med den røde linja som symmetrilinje.



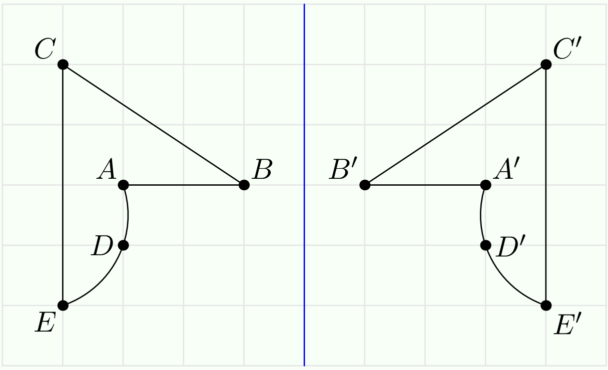
Eksempel 2

Den røde linja og den blå linja er begge symmetrilinjer til det grønne rektangelet.



Eksempel 3

Under vises en form laget av punktene A, B, C, D, E og F, og denne formen speilet om den blå linja.



7.14 Rotasjonssymmetri

En symmetri hvor minst to deler er en rotert utgave av hverandre kalles en **rotasjonssymmetri** og har alltid et tilhørende **rotasjonspunkt** og en **rotasjonsvinkel**.

Når et punkt roteres vil det nye og det opprinnelige punktet

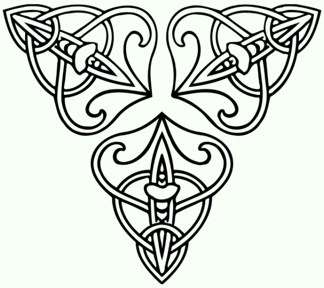
- ligge langs den samme sirkelbuen, som har sentrum i rotasjonspunktet.

- med rotasjonspunktet som toppunkt danne rotasjonsvinkelen.

Hvis rotasjonsvinkelen er et positivt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *mot* klokka. Hvis rotasjonsvinkelen er et negativt tall, vil det nye punktet forflyttes langs sirkelbuen *med* klokka.

Eksempel 1

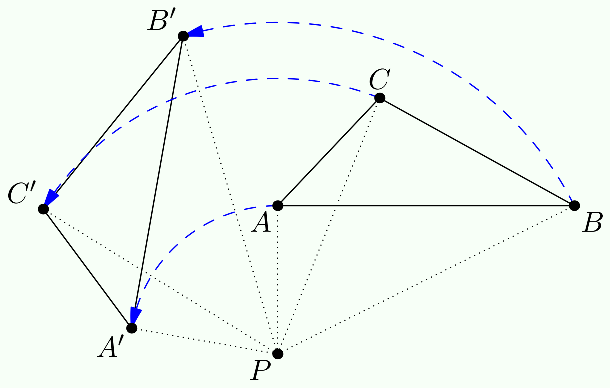
Mønsteret under er rotasjonssymmetrisk. Rotasjonssenteret er i midten av figuren og rotasjonsvinkelen er $120°$



Bilde hentet fra freesvg.org.

Eksempel 2

Figuren under viser $\triangle ABC$ rotert 80° om rotasjonspunktet P.



Da er

$$PA =' PA \quad , \quad PB = PB' \quad , \quad PC = PC'$$

og

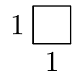
$$\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC' = 80^\circ$$

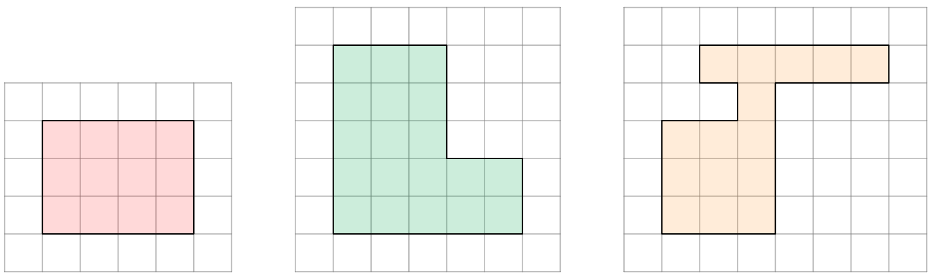
Språkboksen

En form som er en forskjøvet, speilvendt eller rotert utgave av en annen form, kalles en **kongruensavbilding**.

Oppgaver for kapittel 7

7.1.1

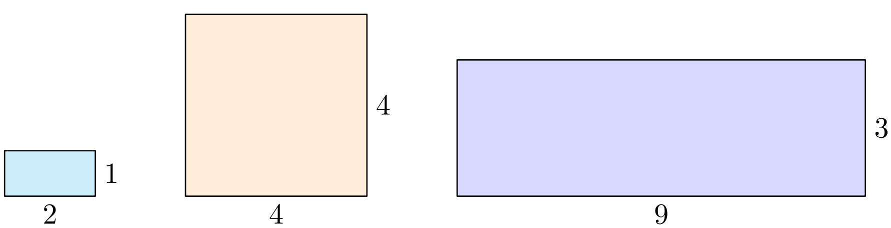
Finn omkretsen til figurene. 



(a) (b) (c)

7.1.2

Finn omkretsen til rektanglene.



(a) (b) (c)

7.1.3

Finn arealet til figurene fra oppgave 7.1.1

7.1.4

Finn arealet til firkantene fra oppgave 7.1.2

7.1.5

Finn bredden og høgden til rektangelet ut ifra opplysningene.

a) Arealet er 16 og omkretsen er 20.

b) Arealet er 12 og omkretsen er 14.

c) Arealet er 18 og omkretsen er 18

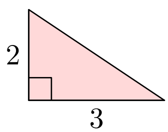
7.1.6

a) Finn arealet til et kvadrat med omkrets 36.

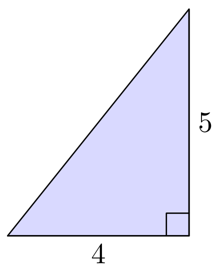
b) Gi tre eksempler på rektangler som har omkrets 36. Oppgi svaret ved bredden, høgden og arealet til rektanglene.

7.1.7

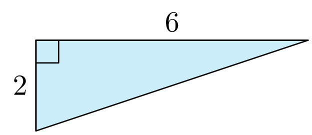
Regn ut arealet til trekanten.



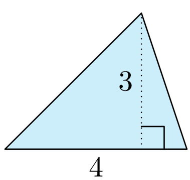
(a)



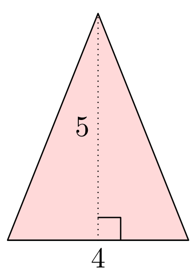
(b)



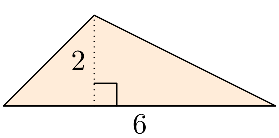
(c)



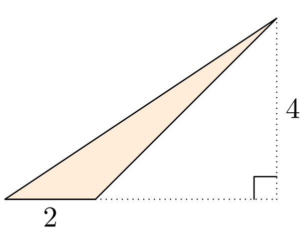
(d)



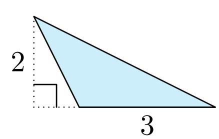
(e)



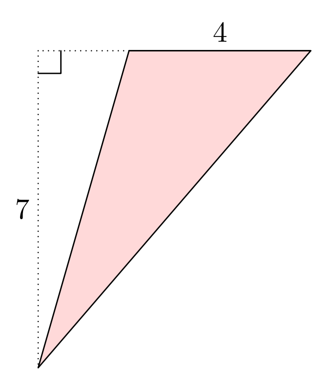
(f)



(g)



(h)



(i)

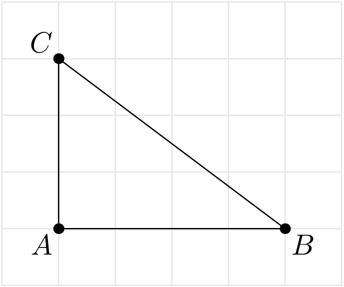
7.1.8

En prisme har lengde 9, bredde 10 og høgde 8.

a) Finn grunnflaten til prismen.

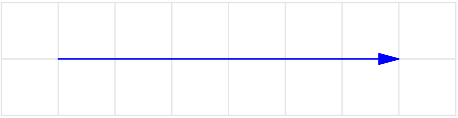
b) Finn volumet til prismen.

7.2.1

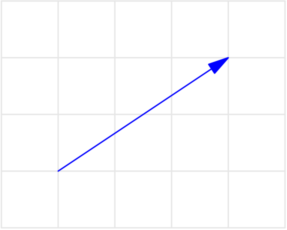


Forskyv trekanten med vektorene vist under

a)



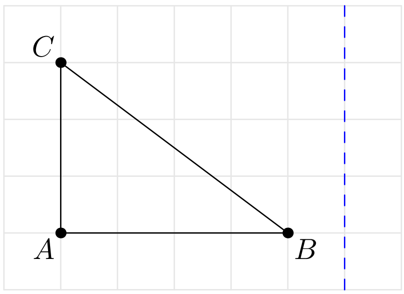
b)



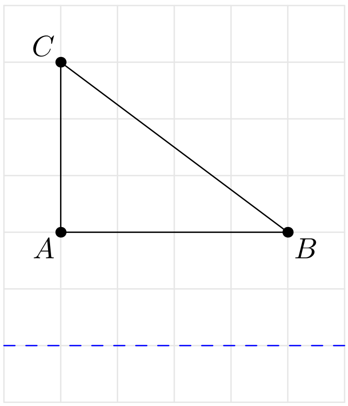
7.2.2

Speil trekanten om symmetrilinja.

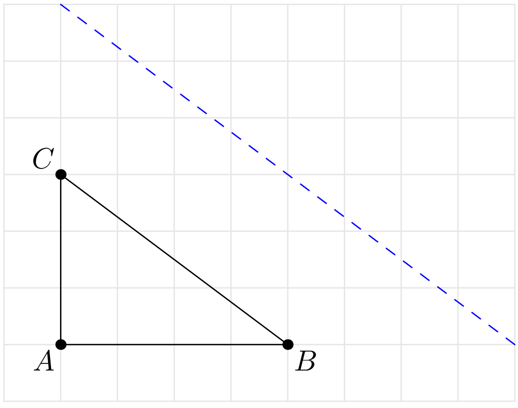
a)



b)



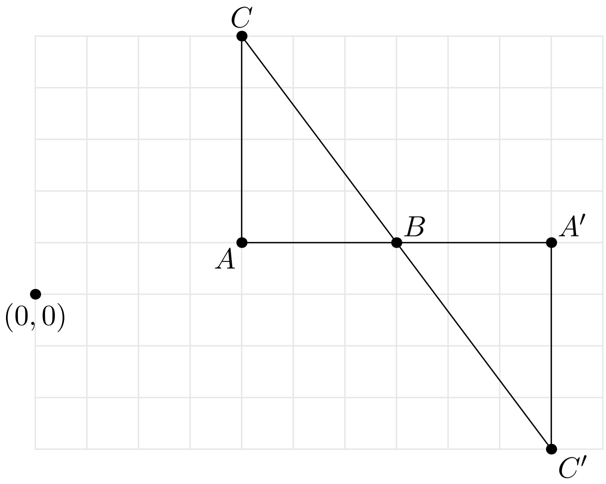
c)



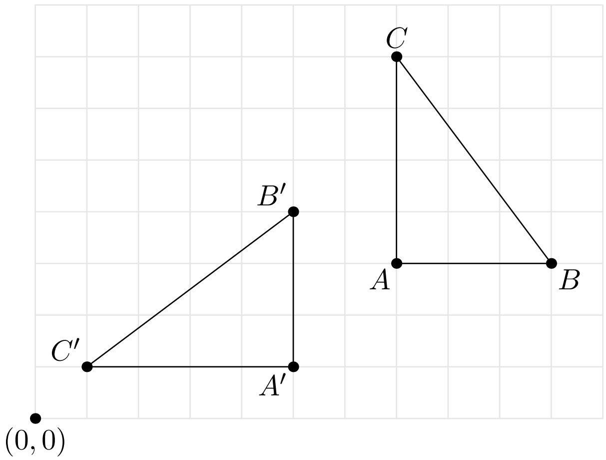
7.2.3

Finn rotasjonsvinkelen og rotasjonspunktet.

a)



b)



Gruble 7

a) Forklar hvorfor omkretsen til et rektangel alltid er et partall.

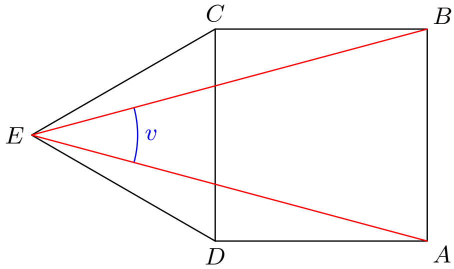
b) ”Hvis både bredden og høgden i et rektangel er oddetall, er det umulig at arealet og omkretsen til rektangelet har samme verdi.”

   Forklar hvorfor påstanden er riktig/ikke riktig.

c) Hva er sidelengden til det eneste kvadratet hvor areal og omkrets har samme verdi?

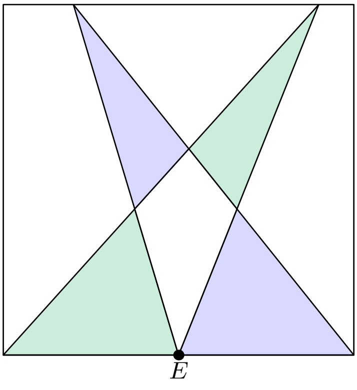
Gruble 8

$\square ABCD$ er et kvadrat og $\triangle DEC$ er likesidet. Finn verdien til v.



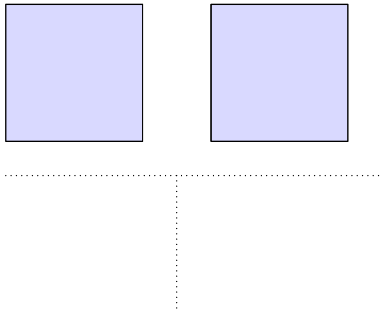
Gruble 9

E er midtpunktet på den ene siden til kvadratet. Forklar hvorfor det blå området og det grønne området har likt areal.



Gruble 10

De stiplede linjene skiller tre områder; øvre område, nedre venstre område, og nedre høgre område. De to like store kvadratene ligger i det øvre området. Forklar hvordan kvadratene kan flyttes slik at de tre områdene inneholder like stort areal.



Del II

Algebra og geometri

Kapittel 8

Algebra

8.1 Introduksjon

Algebra er matematikk der bokstaver representerer tall. Dette gjør at vi lettere kan jobbe med *generelle* tilfeller. For eksempel er $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$ og $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$, men disse er bare to av de uendelig mange eksemplene på at multiplikasjon er kommutativ! En av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi *ett* eksempel som forklarer *alle* tilfeller, og siden sifrene våre (0-9) er uløselig knyttet til bestemte tall, bruker vi bokstaver for å nå dette målet.

Verdien til tallene som er representert ved bokstaver vil ofte variere ut ifra en sammenheng, og da kaller vi disse bokstavtallene for **variabler**. Hvis bokstavtallene derimot har en bestemt verdi, kaller vi dem for **konstanter**.

I *Del I* av boka har vi sett på regning med konkrete tal, likevel er de fleste reglene vi har utledet *generelle*; de gjelder for alle tall. På side 165 - 168 har vi gjengitt mange av disse reglene på en mer generell form. En fin introduksjon til algebra er å sammenligne reglene du finner her med slik du finner dem[1] i *Del I*.

8.1 Addisjon er kommutativ (2.1)

$$a + b = b + a$$

Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

8.2 Multiplikasjon er kommutativ (2.2)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Eksempel 1

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

Eksempel 2

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

[1] Reglene sine nummer i *Del I* står i parentes.

Ganging med bokstavuttrykk

Når man ganger sammen bokstaver, er det vanlig å utelate gangetegnet. Og om man ganger sammen en bokstav og et konkret tal, skriver man det konkrete tallet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriver vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanlig å utelate gangetegn der parentesuttrykk er en faktor:

$$3 \cdot (a + b) = 3(a + b)$$

8.3 Brøk som omskriving av delestykke (4.1)

$$a : b = \frac{a}{b}$$

Eksempel

$$a : 2 = \frac{a}{2}$$

8.4 Brøk ganget med brøk (4.8)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

Eksempel 2

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

8.5 Deling med brøk (4.10)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{a}{13} : \frac{b}{3} &= \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b} \\ &= \frac{3a}{13b} \end{aligned}$$

8.6 Ganging med parentes (distributiv lov) (3.2)

$$(a+b)c = ac + bc$$

Eksempel 1

$$(2+a)b = 2b + ab$$

Eksempel 2

$$a(5b-3) = 5ab - 3a$$

8.7 Ganging med negative tall I (5.6)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-4) &= -(3 \cdot 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}(-a)\cdot 7 &= -(a\cdot 7)\\ &= -7a\end{aligned}$$

8.8 Ganging med negative tall II (5.7)

$$(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(-2)\cdot(-8) &= 2\cdot 8\\ &= 16\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(-a)\cdot(-15) = 15a$$

Språkboksen

Hvis vi i et uttrykk har én variabel isolert på den ene siden av likhetstegnet, og konstanter og variabler på den andre siden, sier vi at den isolerte variabelen er **uttrykt ved** de andre tallene. For eksempel, om vi har uttrykket $a = 2b - 4$, sier vi at "a er uttrykt ved b". Har vi uttrykket $q = 9y - x$, sier vi at "q er uttrykt ved x og y".

Utvidelser av reglene

Noe av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte regler som det er lett å utvide også til andre tilfeller. La oss som et eksempel finne et annet uttrykk for

$$(a+b+c)d$$

Regel 8.6 forteller oss ikke direkte hvordan vi kan regne mellom parentesuttrykket og d, men det er ingenting som hindrer oss i å omdøpe $a+b$ til k:

$$a+b=k$$

Da er

$$(a+b+c)d=(k+c)d$$

Av regel 8.6 har vi nå at

$$(k+c)d=kd+cd$$

Om vi setter inn igjen uttrykket for k, får vi

$$kd+cd=(a+b)d+cd$$

Ved å utnytte regel 8.6 enda en gang kan vi skrive

$$(a+b)d+cd=ad+bc+cd$$

Altså er

$$(a+b+c)d=ad+bc+cd$$

Obs! Dette eksempelet er ikke ment for å vise hvordan man skal gå fram når man har uttrykk som ikke direkte er omfattet av regel 8.1 - 8.8, men for å vise hvorfor det alltid er nok å skrive regler med færrest mulige ledd, faktorer og lignende. Oftest vil man bruke utvidelser av reglene uten engang å tenke over det, og i alle fall langt ifra så pertentlig som det vi gjorde her.

8.2 Potenser

$$\text{grunntal} \longrightarrow 2^{3 \longleftarrow \text{eksponent}}$$

En potens består av et **grunntall** og en **eksponent**. For eksempel er 2^3 en potens med grunntall 2 og eksponent 3. En positiv, heltalls eksponent sier hvor mange eksemplar av grunntallet som skal ganges sammen, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

8.9 Potenstall

a^n er et potenstall med grunntall a og eksponent n.

Hvis n er et naturlig tall, vil a^n svare til n eksemplar av a multiplisert med hverandre.

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

Eksempel 4

$$a^1 = a$$

Språkboksen

Vanlige måter å si 2^3 på er

- "2 i tredje"
- "2 opphøyd i 3"

I programmeringsspråk brukes gjerne symbolet `^` eller symbolene `**` mellom grunntall og eksponent.

Å opphøye et tall i 2 kalles "å kvadrere" tallet.

Merk

De kommende sidene vil inneholde regler for potenser med tilhørende forklaringer. Selv om det er ønskelig at de har en så generell form som mulig, har vi i forklaringene valgt å bruke eksempel der eksponentene ikke er variabler. Å bruke variabler som eksponenter ville gitt mye mindre leservennlige uttrykk, og vi vil påstå at de generelle tilfellene kommer godt til synes også ved å studere konkrete tilfeller.

8.10 Ganging med potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{8.1}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

Eksempel 3

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5+(-7)} \\ &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

(Se regel 8.13 for hvordan en potens med negativ eksponent kan tolkes.)

8.10 Ganging med potenser (forklaring)

La oss se på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = 2 \cdot 2$$

$$a^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

Med andre ord kan vi skrive

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= \overbrace{a \cdot a}^{a^2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

8.11 Divisjon med potenser

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Eksempel 1

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned} \frac{2^4 \cdot a^7}{a^6 \cdot 2^2} &= 2^{4-2} \cdot a^{7-6} \\ &= 2^2 a \\ &= 4a \end{aligned}$$

8.11 Divisjon med potenser (forklaring)

La oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriver ut potensene i teller og nevner:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= \frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{a\cdot a}\\ &= \frac{\cancel{a}\cdot \cancel{a}\cdot a\cdot a\cdot a}{\cancel{a}\cdot \cancel{a}}\\ &= a\cdot a\cdot a\\ &= a^3\end{aligned}$$

Dette kunne vi ha skrevet som

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2}\\ &= a^3\end{aligned}$$

8.12 Spesialtilfellet a^0

$$a^0 = 1$$

Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

Eksempel 2

$$(-b)^0 = 1$$

8.12 Spesialtilfellet a^0 (forklaring)

Et tall delt på seg selv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og regel 8.11, har vi at

$$\begin{aligned}1 &= \frac{a^n}{a^n}\\ &= a^{n-n}\\ &= a^0\end{aligned}$$

8.13 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 1

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

Eksempel 2

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

8.13 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av regel 8.12 har vi at $a^0 = 1$. Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av regel 8.11 er

$$\begin{aligned}\frac{a^0}{a^n} &= a^{0-n} \\ &= a^{-n}\end{aligned}$$

8.14 Brøk som grunntall

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \tag{8.2}$$

Eksempel 1

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Eksempel 2

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

8.14 Brøk som grunntall (forklaring)

La oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\\ &= \frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}\\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

8.15 Faktorer som grunntall

$$(ab)^m = a^m b^m \tag{8.3}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}(3a)^5 &= 3^5 a^5\\ &= 243a^5\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$(ab)^4 = a^4 b^4$$

8.15 Faktorer som grunntall (forklaring)

La oss bruke $(a\cdot b)^3$ som eksempel. Vi har at

$$\begin{aligned}(a\cdot b)^3 &= (a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\\ &= a\cdot a\cdot a\cdot b\cdot b\cdot b\\ &= a^3b^3\end{aligned}$$

8.16 Potens som grunntall

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n} \tag{8.4}$$

Eksempel 1

$$\begin{aligned}\left(c^4\right)^5 &= c^{4\cdot 5}\\ &= c^{20}\end{aligned}$$

Eksempel 2

$$\begin{aligned}\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 &= 3^{\frac{5}{4}\cdot 8}\\ &= 3^{10}\end{aligned}$$

8.16 Potens som grunntall (forklaring)

La oss bruke $(a^3)^4$ som eksempel. Vi har at

$$\left(a^3\right)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

Av regel 8.10 er

$$\begin{aligned}a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 &= a^{3+3+3+3}\\ &= a^{3\cdot 4}\\ &= a^{12}\end{aligned}$$

8.17 *n*-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet $\sqrt{}$ kalles et **rottegn**. For eksponenten $\frac{1}{2}$ er det vanlig å utelate 2 i rottegnet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Eksempel

Av regel 8.16 har vi at

$$\begin{aligned}\left(a^b\right)^{\frac{1}{b}} &= a^{b\cdot\frac{1}{b}} \\ &= a\end{aligned}$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \text{ siden } 3^2 = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ siden } 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ siden } 2^4 = 16$$

Språkboksen

$\sqrt{9}$ kalles "kvadratrota til 9"

$\sqrt[5]{9}$ kalles "femterota til 9".

8.3 Irrasjonale tall

8.18 Irrasjonale tall

Et tall som *ikke* er et rasjonalt tall, er et irrasjonalt tall[1].

Verdien til et irrasjonalt tall har uendelig mange desimaler med et ikke-repeterende mønster.

Eksempel 1

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373...$$

[1]Strengt tatt er irrasjonale tall alle *reelle* tall som ikke er rasjonale tall. Men for å forklare hva *reelle* tall er, må vi forklare hva *imaginære* tall er, og det har vi valgt å ikke gjøre i denne boka.

Oppgaver for kapittel 8

8.1.1

Utnytt koblingen mellom gjentatt addisjon og multiplikasjon (se regel 2.3 og regel 5.5) til å skrive uttrykkene mer kompakt.

a) $a+a+a$ b) $a+a+a+a$ c) $a+a+a+a+a+a+a$

d) $-b-b$ e) $-b-b-b-b-b$ f) $-k-k-k$

8.1.2

Skriv uttrykkene så kompakt som mulig

a) $2a+b-a$ b) $-4a+2b+3a$ c) $7b-3a+2b$

8.1.3

Skriv uttrykkene så kompakt som mulig

a) $4c+2b-5a-3c$ b) $-9a-3c+3b+3c$ c) $9b-3a+2b$

8.1.4

Bruk regel 3.2 til å skrive om uttrykket til et uttrykk uten paranteser.

a) $7(a+2)$ b) $9(b+3)$ c) $8(b-3c)$ d) $(-2)(3a+5b)$

e) $(9a+2)$ f) $(3b+8)a$ g) $(b-3c)(-a)$

h) $2(a+3b+4c)$ i) $9(3b-c+7a)$ j) $(3b-c+7a)(-2)$

8.1.5

Bruk regel 3.2 til å faktorisere uttrykket.

a) $2a+2b$ b) $4ab+5b$ c) $9bc-c$ d) $4ac-2a$

8.1.6
Vis at

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Merk: De tre likningene over kalles henholdsvis for **1. kvadratsetning**, **2. kvadratsetning** og **3. kvadratsetning** (3. kvadratsetning kalles også **konjugatsetingen**)

8.1.7
Bruk 3. kvadratsetning til å regne ut $26^2 - 24^2$ uten å kvadrere 26 og 24.

8.1.8 (GV21D1)

a) Skriv så enkelt som mulig.

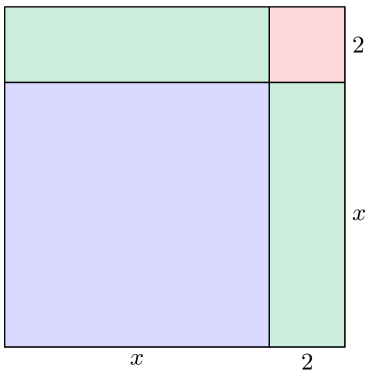
$$\frac{a+a+a+a}{4a}$$

b) Hvilken verdi har uttrykket $\dfrac{y^2 - 2y}{y^2}$ dersom $x = 4$ og $y = -2$?

8.1.9 (EG22D1)
Gitt uttrykket $(a+b)^2 = 16$. Vurder om alternativene nedenfor gjør at uttrykket stemmer.

- $a = 2$ og $b = 2$
- $a = 8$ og $b = 4$
- $a = 8$ og $b = -4$

8.1.10 (GV23D1)



Erlend og Oline arbeider med areal av figurer. Oline mener at arealet av kvadrat $ABCD$ med sider $(x+2)$. kan uttrykkes slik:

$$x^2 + 4x + 4$$

Vis hvordan Oline kan forklare Erlend at det stemmer.

8.2.1

Skriv som potenstall

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ b) $5 \cdot 5$ c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

d) $a \cdot a \cdot a$ e) $b \cdot b$ f) $(-c)(-c)(-c)(-c)$

8.2.2

Finn verdien til potenstallet.

a) 8^2 b) 2^5 c) 4^3 d) $(-2)^3$ e) $(-3)^5$ f) $(-4)^4$

8.2.3

Skriv om uttrykket til et potenstall.

a) $2^7 \cdot 2^9$ b) $3^4 \cdot 3^7$ c) $9 \cdot 9^5$ d) $6^8 \cdot 6^{-3}$ e) $5^3 \cdot 5^{-7}$

f) $10^8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6$ g) $a^9 \cdot a^7$ h) $k^5 \cdot k^2$ i) $x^5 \cdot x^{-2}$

k) $x^{-4} \cdot x^5$ l) $a^{-5} \cdot a \cdot a^4$ m) $a^3 \cdot b^5 \cdot a^2 \cdot b^{-8}$

8.2.4

Regn ut.

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt{100}$ c) $\sqrt{144}$

d) $\sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt[3]{729}$ f) $\sqrt[5]{100000}$

Gruble 11

(1TH21D1)
Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{9^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1} + 9^0}{8^{\frac{3}{4}}}$$

Gruble 12

Ved å addere sifrene i et tall, finner vi **tverrsummen** til tallet. For eksempel er tverrsummen til 14 lik $1+4=5$, og tverrsummen til 918 er lik $9+1+8=18$. Vis at hvis tverrsummen i et tresifret heltall er delelig med 3, så er også tallet delelig med 3.

Merk: Det er ganske lett å generalisere dette tilfellet, og slik vise at det gjelder for et heltall med et hvilket som helst antall siffer.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

Matematikk er såkalt **aksiomatisk** oppbygd. Dette betyr at vi erklærer noen[1] påstander for å vere sanne, og disse kaller vi for **aksiom** eller **postulat**. I regning har man omtrent 12 aksiom[2], men i denne boka har vi holdt oss til å nevne disse 6:

Aksiom

For tallene a, b og c har vi at

$$a + (b + c) = (a + b) + c \tag{A1}$$

$$a + b = b + a \tag{A2}$$

$$a(bc) = (ab)c \tag{A3}$$

$$ab = ba \tag{A4}$$

$$a(b + c) = ab + ac \tag{A5}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1 \qquad (a \neq 0) \tag{A6}$$

(A1) Assosiativ lov ved addisjon
(A2) Kommutativ lov ved addisjon
(A3) Assosiativ lov ved multiplikasjon
(A4) Kommutativ lov ved multiplikasjon
(A5) Distributiv lov
(A6) Eksistens av multiplikativ identitet

Aksiomene legger selve fundamentet i et matematisk system. Ved hjelp av dem finner vi flere og mer komplekse sannheter som vi kaller **teorem**. I denne boka har vi valgt å kalle både aksiom, definisjoner og teorem for *regler*. Dette fordi aksiom, definisjoner og teorem alle i praksis gir føringer (regler) for handlingsrommet vi har innenfor det matematiske systemet vi opererer i.

[1] Helst så få som mulig.

[2] Tallet avhenger litt av hvordan man formulerer påstandene.

I *Del I* har vi forsøkt å presentere *motivasjonen* bak aksiomene, for de er selvsagt ikke tilfeldig utvalgte. Tankerekken som leder oss fram til de nevnte aksiomene kan da oppsummeres slik:

1. Vi definerer positive tall som representasjoner av enten en mengde eller en plassering på en tallinje.

2. Vi definerer hva addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon innebærer for positive heltall (og 0).

3. Ut ifra punktene over tilsier all fornuft at (A1) - (A6) må gjelde for alle positive heltall.

4. Vi definerer også brøker som representasjoner av en mengde eller som en plassering på en tallinje. Hva de fire regneartene innebærer for brøker bygger vi på det som gjelder for positive heltall.

5. Ut ifra punktene over finner vi at (A1) - (A6) gjelder for alle positive, rasjonale tall.

6. Vi innfører negative heltall, og utvider tolkningen av addisjon og subtraksjon. Dette gir så en tolkning av multiplikasjon og divisjon med negative heltall.

7. (A1) - (A6) gjelder også etter innføringen av negative heltall. Å vise at de også gjelder for negative, rasjonale tall er da en ren formalitet.

8. Vi kan aldri skrive verdien til et irrasjonalt tall helt eksakt, men verdien kan tilnærmes ved et rasjonalt tall[1]. Alle utregninger som innebærer irrasjonale tall er derfor *i praksis* utregninger som inneberærer rasjonale tall, og slik kan vi si at[2] (A1) - (A6) gjelder også for irrasjonale tall.

En lignende tankerekke kan brukes for å argumentere for potensreglene vi fant i seksjon 8.2.

[1]For eksempel kan man skrive $\sqrt{2} = 1.414213562373... \approx \frac{1414213562373}{1000000000000}$

[2] *Obs!* Denne forklaringen er god nok for boka sitt formål, men er en ekstrem forenkling. Irrasjonale tall er et komplisert tema som mange bøker for avansert matematikk bruker opptil flere kapitler på å forklare i full dybde.

Kapittel 9

Likninger

9.1 Introduksjon

Ethvert matematisk uttrykk som inneholder $=$ er en **likning**, likevel er ordet *likning* tradisjonelt knyttet til at vi har et *ukjent* tall.

Si at vi ønsker å finne et tall som er slik at hvis vi legger til 4, så får vi 7. Dette tallet kan vi kalle for hva som helst, men det vanligste er å kalle det for x, som altså er det ukjente tallet vårt. Likningen vår kan nå skrives slik:

$$x + 4 = 7$$

x-verdien[1] som gjør at det blir samme verdi på begge sider av likhetstegnet kalles **løsningen** av likningen. Det er alltids lov til å se eller prøve seg fram for å finne verdien til x. Kanskje har du allerede merket at $x = 3$ er løsningen av likningen, siden

$$3 + 4 = 7$$

Men de fleste likninger er det vanskelig å se eller gjette seg fram til svaret på, og da må vi ty til mer generelle løsningsmetoder. Egentlig er det bare ett prinsipp vi følger:

> Vi kan alltid utføre en matematisk operasjon på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi utfører den også på den andre siden.

De matematiske operasjonene vi har presentert i denne boka er de fire rekneartene. Med disse lyder prinsippet slik:

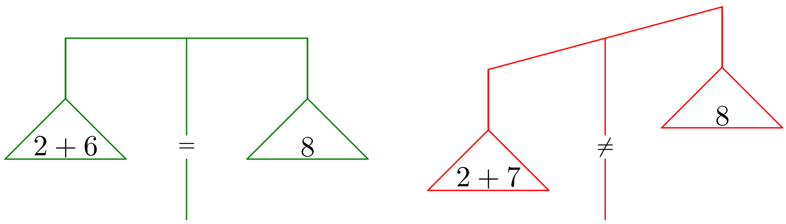
> Vi kan alltid legge til, trekke ifra, gange eller dele med et tall på den ene siden av likhetstegnet, så lenge vi gjør det også på den andre siden.

Prinsippet følger av betydningen til $=$. Når to uttrykk har samme verdi, må de nødvendigvis fortsette å ha lik verdi, så lenge vi utfører de samme matematiske operasjonane på dem. I kommende seksjon skal vi likevel konkretisere dette prinsippet for hver enkelt rekneoperasjon, men hvis du føler dette allerede gir god mening kan du hoppe til seksjon 9.3.

[1] I andre tilfeller kan det være flere verdier.

9.2 Løsing ved de fire regneartene

I figurene til denne seksjonen skal vi forstå likninger ut ifra et vektprinsipp. $=$ *vil da indikere*[1] *at det er like mye vekt (lik verdi) på venstre side som på høyre side.*

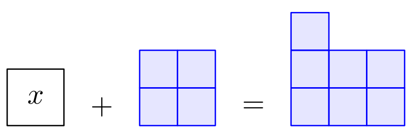


Addisjon og subtraksjon; tall som skifter side

Første eksempel

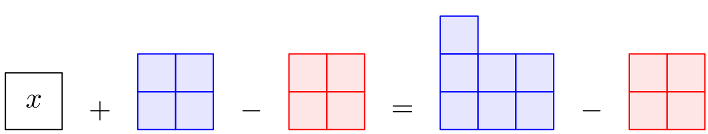
Vi har allerede funnet løsningen på denne likningen, men la oss løse den på en annen måte[2]:

$$x + 4 = 7$$



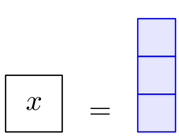
Det blir tydelig hva verdien til x er hvis x står alene på en av sidene, og x blir isolert på venstresiden hvis vi tar bort 4. Men skal vi ta bort 4 fra venstresiden, må vi ta bort 4 fra høyresiden også, skal begge sidene ha samme verdi.

$$x + 4 - {\color{red}4} = 7 - {\color{red}4}$$



Siden $4 - {\color{red}4} = 0$ og $7 - {\color{red}4} = 3$, får vi at

$$x = 3$$



---

[1] $\neq$ er symbolet for "er *ikke* lik".

[2] *Merk:* I tidligere figurer har det vært samsvar mellom størrelsen på rutene og tallverdien til tallet de symboliserer. Dette gjelder ikke rutene som representerer x.

Dette kunne vi ha skrevet noe mer kortfattet slik:

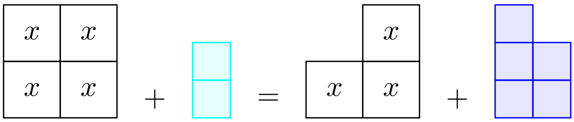
$$
\begin{aligned}
x + 4 &= 7 \\
x &= 7 - 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Mellom første og andre linje er det vanlig å si at *4 har skiftet side, og derfor også fortegn (fra + til −).*

Andre eksempel

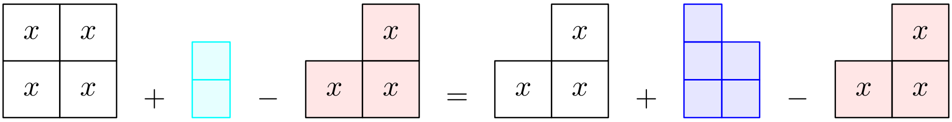
La oss gå videre til å se på en litt vanskeligere likning[1]:

$$4x - 2 = 3x + 5$$



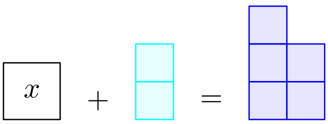
For å skaffe et uttrykk med x bare på én side, tar vi vekk $3x$ på begge sider:

$$4x - 2 - {\color{red}3x} = 3x + 5 - {\color{red}3x}$$



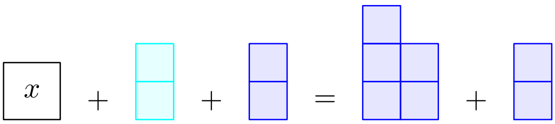
Da får vi at

$$x - 2 = 5$$



For å isolere x, legger vi til 2 på venstre side. Da må vi også legge til 2 på høyre side:

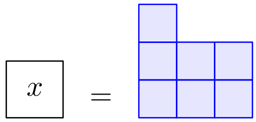
$$x - 2 + {\color{blue}2} = 5 + {\color{blue}2}$$



[1]Legg merke til at figuren illustrerer $4x + (-2)$ (se seksjon 5.3) på venstre side. Men $4x + (-2)$ er det samme som $4x - 2$ (se seksjon 5.2).

Da får vi at

$$x = 7$$



Stegene vi har tatt kan oppsummeres slik:

$$\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 && \text{1. figur} \\
4x - {\color{red}3x} - 2 &= 3x - {\color{red}3x} + 5 && \text{2. figur} \\
x - 2 &= 5 && \text{3. figur} \\
x - 2 + {\color{blue}2} &= 5 + {\color{blue}2} && \text{4. figur} \\
x &= 7 && \text{5. figur}
\end{aligned}$$

Dette kan vi på en forenklet måte skrive slik:

$$\begin{aligned}
4x - 2 &= 3x + 5 \\
4x - {\color{red}3x} &= 5 + {\color{blue}2} \\
x &= 7
\end{aligned}$$

9.1 Flytting av tall over likhetstegnet

I en likning ønsker vi å samle alle x-ledd og alle kjente ledd på hver sin side av likhetstegnet. Skifter et ledd side, skifter det fortegn.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x + 5 = 2x + 9$$

Svar

$$\begin{aligned}
3x - 2x &= 9 - 5 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$-4x - 3 = -5x + 12$$

Svar

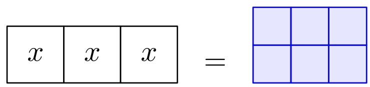
$$\begin{aligned}
-4x + 5x &= 12 + 3 \\
x &= 15
\end{aligned}$$

Ganging og deling

Deling

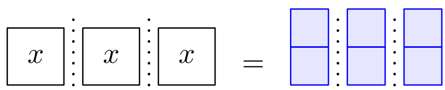
Hittil har vi sett på likninger der vi endte opp med én x på den ene siden av likhetstegnet. Ofte har vi flere x-er, som for eksempel i likningen

$$3x = 6$$



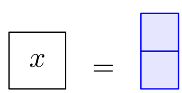
Deler vi venstresiden vår i tre like grupper, får vi én x i hver gruppe. Deler vi også høyresiden inn i tre like grupper, må alle gruppene ha den samme verdien

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$



Altså er

$$x = 2$$



La oss oppsummere utregningen vår:

$$\begin{aligned} 3x &= 6 && \text{1. figur} \\ \frac{3x}{3} &= \frac{6}{3} && \text{2. figur} \\ x &= 2 && \text{3. figur} \end{aligned}$$

Du husker kanskje at vi gjerne skriver

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}}$$

9.2 Deling på begge sider av en likning

Vi kan dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$4x = 20$$

Svar

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{20}{4}$$
$$x = 5$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$2x + 6 = 3x - 2$$

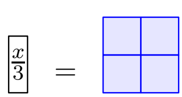
Svar

$$2x - 3x = -2 - 6$$
$$-x = -8$$
$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{-8}{-1} \qquad (-x = -1x)$$
$$x = 8$$

Ganging

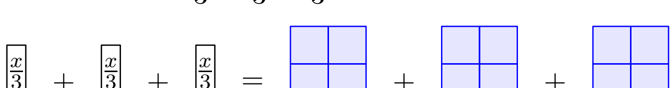
Det siste tilfellet vi skal se på er når likninger inneholder brøkdeler av den ukjente, som for eksempel i likningen

$$\frac{x}{3} = 4$$



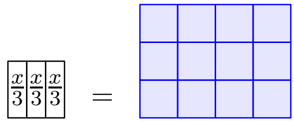
Vi kan få én x på venstresiden hvis vi legger til to eksemplar av $\frac{x}{3}$. Likningen forteller oss at $\frac{x}{3}$ har samme verdi som 4. Dette betyr at for hver $\frac{x}{3}$ vi legger til på venstresiden, må vi legge til 4 på høyresiden, skal sidene ha samme verdi.

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = 4 + 4 + 4$$



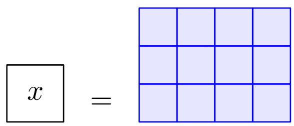
Vi legger nå merke til at $\frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x}{3} \cdot 3$ og at $4 + 4 + 4 = 4 \cdot 3$:

$$\frac{x}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3$$



Og da $\frac{x}{3} \cdot 3 = x$ og $4 \cdot 3 = 12$, har vi at

$$x = 12$$



En oppsummering av stegene våre kan vi skrive slik:

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 4 && \text{1. figur} \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} &= 4 + 4 + 4 && \text{2. figur} \\ \frac{x}{3} \cdot 3 &= 4 \cdot 3 && \text{3. figur} \\ x &= 12 && \text{4. figur} \end{aligned}$$

Dette kan vi kortere skrive som

$$\frac{x}{3} = 4$$

$$\frac{x}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} = 4 \cdot 3$$

$$x = 12$$

9.3 Ganging på begge sider av en likning

Vi kan gange begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$\frac{x}{5} = 2$$

Svar

$$\frac{x}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} = 2 \cdot 5$$

$$x = 10$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$\frac{7x}{10} - 5 = 13 + \frac{x}{10}$$

Svar

$$\frac{7x}{10} - \frac{x}{10} = 13 + 5$$

$$\frac{6x}{10} = 18$$

$$\frac{6x}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} = 18 \cdot 10$$

$$6x = 180$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{180}{6}$$

$$x = 30$$

9.3 Løsingsmetodene oppsummert

9.4 Løsningsmetoder for likninger

For å løse en likning, er det ønskelig å isolere den ukjente på én side av likhetstegnet. For å få til dette kan vi alltid

- addere eller subtrahere begge sider av en likning med det samme tallet. Dette er ekvivalent til å flytte et ledd fra den ene siden av likningen til den andre, så lenge vi også skifter fortegn på leddet.
- gange eller dele begge sider av en likning med det samme tallet.

Eksempel 1

Løs likningen

$$3x - 4 = 6 + 2x$$

Svar

$$3x - 2x = 6 + 4$$
$$x = 10$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$9 - 7x = -8x + 3$$

Svar

$$8x - 7x = 3 - 9$$
$$x = -6$$

Eksempel 3

Løs likningen

$$10x - 20 = 7x - 5$$

Svar

$$10x - 7x = 20 - 5$$
$$3x = 15$$
$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

Eksempel 4

Løs likningen

$$15 - 4x = x + 5$$

Svar

$$15 - 5 = x + 4x$$
$$10 = 5x$$
$$\frac{10}{5} = \frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}$$
$$2 = x$$

Merk: I de andre eksemplene har vi valgt å samle x-ene på venstre side av likningen, men vi kan likså gjerne samle dem på høgre side. Ved å gjøre det her har vi unngått utregninger med negative tall.

Eksempel 5

Løs likningen

$$\frac{4x}{9} - 20 = 8 - \frac{3x}{9}$$

Svar

$$\frac{4x}{9} + \frac{3x}{9} = 20 + 8$$
$$\frac{\cancel{7}x}{9 \cdot \cancel{7}} = \frac{28}{7}$$
$$\frac{x}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9} = 4 \cdot 9$$
$$x = 36$$

Eksempel 6

Løs likningen

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}x + 2$$

Svar

For å unngå brøker, ganger vi begge sider med fellesnevneren 12:

$$\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)12 = \left(\frac{5}{12}x + 2\right)12 \tag{9.1}$$

$$\frac{1}{3}x \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 12 = \frac{5}{12}x \cdot 12 + 2 \cdot 12 \tag{$*$}$$

$$4x + 2 = 5x + 24 \tag{9.2}$$

$$4x - 5x = 24 - 2 \tag{9.3}$$

$$-x = 22 \tag{9.4}$$

$$\frac{\cancel{-1}x}{\cancel{-1}} = \frac{22}{-1} \tag{9.5}$$

$$x = -22 \tag{9.6}$$

Tips

Mange liker å lage seg en regel om at ”vi kan gange eller dele alle ledd med det samme tallet”. I eksempelet over kunne vi da hoppet direkte til andre linje i utrekningen.

Eksempel 7

Løs likningen

$$3 - \frac{6}{x} = 2 + \frac{5}{2x}$$

Svar

Vi ganger begge sider med fellesnevneren $2x$:

$$2x\left(3 - \frac{6}{x}\right) = 2x\left(2 + \frac{5}{2x}\right)$$

$$6x - 12 = 4x + 5$$

$$6x - 4x = 5 + 12$$

$$2x = 17$$

$$x = \frac{17}{2}$$

9.4 Potenslikninger

La oss løse likningen

$$x^2 = 9$$

Dette kalles en *potenslikning*. Potenslikninger er vanligvis vanskelige å løse bare ved hjelp av de fire regneartane, så her må vi også nytte oss av potensregler. Vi opphøyer begge sidene av likningen med den omvendte brøken[1] til 2:

$$\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$

Av regel 8.16 er

$$x^{2\cdot\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}}$$
$$x = 9^{\frac{1}{2}}$$

Siden $3^2 = 9$, er $9^{\frac{1}{2}} = 3$. Altså er $x = 3$ en løsning. For ordens skyld kan vi bekrefte dette med utregningen

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

Men vi har også at

$$(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$$

Altså er -3 også en løsning av likningen vi startet med!

Nå legger vi merke til dette: *Prinsippet erklært på side 187 sier at vi kan, som vi nå gjorde, utføre en matematisk operasjon på begge sider av likningen. Men, å følge dette prinsippet garanterer ikke at alle løsninger er funnet.*

9.5 Potenslikninger

En likning som kan bli skrevet som

$$x^a = b$$

der a og b er konstanter, er en **potenslikning**.

Likningen har a forskjellige løsninger.

[1] Husk at $2 = \frac{2}{1}$.

Eksempel 1

Løs likningen

$$x^2 + 5 = 21$$

Svar

$$\begin{aligned} x^2 + 5 &= 21 \\ x^2 &= 21 - 5 \\ x^2 &= 16 \end{aligned}$$

Siden $4 \cdot 4 = 16$ og $(-4) \cdot (-4) = 16$, har vi at

$$x = 4 \qquad \vee \qquad x = -4$$

Eksempel 2

Løs likningen

$$3x^2 + 1 = 7$$

Svar

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 7 - 1 \\ 3x^2 &= 6 \\ \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} &= \frac{6}{3} \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad x = -\sqrt{2}$$

Merk

Selv om likningen

$$x^a = b$$

har a løsninger, er ikke alle nødvendigvis *reelle*[1]. I denne boka nøyer vi oss med å finne alle rasjonale eller irrasjonale tall som løser likningen. For eksempel har likningen

$$x^3 = 8$$

3 løsninger, men vi nøyer oss med å finne at $x = 2$ er en løsning.

[1]Som nevnt, *reelle* og *imaginære* tall er noe vi ikke går nærmere inn på i denne boka

9.5 Ulikheter

9.5.1 Introduksjon

Mens en likning viser to uttrykk som er like, vil en **ulikhet** vise to uttrykk som er ulike. For å skrive ulikheter har vi disse symbolene:

$<$	”er mindre enn”
$>$	”er større enn”
$\leq$	”er mindre enn eller lik”
$\geq$	”er større enn eller lik”

En ulikhet mellom to tall er avgjort av verdien og fortegnet til tallene:

9.6 Ulikheter

Et positivt tall er større enn et negativt tal.

For tall med same fortegn, er det tallet med størst absoluttverdi som er størst.

0 er større enn ethvert negativt tal og mindre enn ethvert positivt tal.

Eksempel 1

$$9 > 8$$

Eksempel 2

$$-9 < -8$$

Eksempel 3

$$-7 < 1$$

Eksempel 4

$$a - 3 \geq 1$$

Undersøk om ulikheten er sann hvis

a) $a = 5$

b) $a = 4$

c) $a = 3$

Svar

a) Når $a = 5$, har vi at

$$a - 3 = 5 - 3 = 2$$

Siden $2 > 1$, er ulikheten sann.

b) Når $a = 4$, har vi at

$$a - 3 = 4 - 3 = 1$$

Siden $1 = 1$, er ulikheten sann.

c) Når $a = 3$, har vi at

$$a - 3 = 3 - 3 = 0$$

Siden $0 < 1$, er ulikheten usann.

9.5.2 Løsing av ulikheter

Vi kan løse ulikheter ved å bruke metodene fra regel 9.4, men med ett unntak; *om vi ganger eller deler med negative tall, skifter ulikheten symbol*. For å forklare kva som skjer, la oss bruke den enkle ulikheten

$$9 > 8$$

Om vi ganger begge sider av ulikheten med -1, får vi -9 på venstre side og -8 på høgre side. Men $-9 < -8$. Symbolet fra vår opprinnelege ulikhet har altså endret seg fra $>$ til $<$.

9.7 Løsing av ulikheter

Ulikheter kan løses på same måte som likninger, men med ett unntak: Hvis man ganger eller deler begge sider av en ulikhet med et negativt tal, vil $>$ endre seg til $<$, og omvendt.

Eksempel 1

Løs ulikheten

$$5x - 3 \geq 2x + 6$$

Svar

$$\begin{aligned} 5x - 3 &\geq 2x + 6 \\ 3x &\geq 9 \\ x &\geq 3 \end{aligned}$$

Eksempel 2

Løs ulikheten

$$4x - 8 \leq 6x + 12$$

Svar

$$\begin{aligned} 4x - 8 &\leq 6x + 12 \\ -2x &\leq 20 \\ \frac{\cancel{-2}x}{\cancel{-2}} &\geq \frac{20}{-2} \\ x &\geq -10 \end{aligned}$$

Merk: Her kan vi selvsagt unngå å dele med -2 ved å isolere x-ene på høgre side av ulikheten i steden for venstre.

9.6 Likninger med flere ukjente; likningssett

Språkboksen

Hvis vi har en likning med flere ukjente, bruker vi uttrykket "å løse med hensyn på" for å vise til hvilke av de ukjente vi isolerer på én side av likhetstegnet.

Eksempel

Gitt likningen

$$4x + 5y = 3x + 7y + 10$$

a) Løs likningen med hensyn på x.

b) Løs likningen med hensyn på y.

Svar

a) Vi bruker metodene beskrevet i regel 9.4 for å løse likningen med hensyn på x:

$$\begin{aligned} 4x - 3x &= 7y - 5y + 10 \\ x &= 2y + 10 \end{aligned}$$

b) Vi bruker metodene beskrevet i regel 9.4 for å løse likningen med hensyn på y:

$$\begin{aligned} 4x - 3x - 10 &= 7y - 5y \\ x - 10 &= 2y \\ \frac{x-10}{2} &= \frac{2y}{2} \\ \frac{x}{2} - 5 &= y \end{aligned}$$

Likningssett

Hvis vi har to eller flere tall ukjente tall er det som regel slik at

- er det to ukjente, trengs minst to likninger for å finne løsninger med bestemt verdi.
- er det tre ukjente, trengs minst tre likninger for å finne løsninger med bestemt verdi.

Og slik fortsetter det. Likningene som gir oss den nødvendige informasjonen om de ukjente, kalles et **likningssett**. I denne boka skal vi konsentrere oss om *lineære likninger med to ukjente*, som betyr at likningssettet består av uttrykk for lineære funksjoner[1]. For å løse likningssettene skal vi anvende følgende to metoder:

9.8 Innsettingsmetoden

Et lineært likningssett bestående av to likninger med to ukjente, x og y, kan løses ved å

1. bruke den éne likningen til å finne et uttrykk for x.
2. sette uttrykket fra punkt 1 inn i den andre likningen, og løse denne med hensyn på y.
3. sette løsningen for y inn i uttrykket for x.

Merk: I punktene over kan selvsagt x og y bytte roller.

9.9 Eliminasjonsmetoden

Et lineært likningssett bestående av to likninger med to ukjente, x og y, kan løses ved å (eventuelt) omskrive den éne likningen slik at den kan brukes til å eliminere x eller y i den andre likningen.

[1] Se kapittel 10.

Eksempel 1

Løs likningssettet.

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

Svar

Innsettingsmetoden

Av (I) har vi at

$$\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x &= 5 + y \end{aligned}$$

Vi setter dette uttrykket for x inn i (II):

$$\begin{aligned} 5 + y + y &= 9 \\ 2y &= 9 - 5 \\ 2y &= 4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$\begin{aligned} x &= 5 + y \\ &= 5 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$.

Eliminasjonsmetoden

Vi legger sammen (I) og (II), og får at

$$\begin{aligned} x - y + (x + y) &= 5 + 9 \\ 2x &= 14 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for x inn i én av likningene, i dette tilfellet (II):

$$\begin{aligned} 7 + y &= 9 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Altså er $x = 7$ og $y = 2$

Eksempel 2

Løs likningssettet

$$7x - 5y = -8 \tag{I}$$

$$5x - 2y = 4x - 5 \tag{II}$$

Svar

Innsettingsmetoden

Ved innsettingsmetoden kan man ofte spare seg for en del utregning ved å velge likningen og den ukjente som gir det fineste uttrykket innledningsvis. Vi observerer at (II) gir et fint uttrykk for x:

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -6 \\ x &= 2y - 5 \end{aligned}$$

Vi setter uttrykket for x inn i (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= -8 \\ 7(2y - 5) - 5y &= -8 \\ 14y - 35 - 5y &= -8 \\ 9y &= 27 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Vi setter løsningen for y inn i uttrykket for x:

$$x = 2y - 5 = 2 \cdot 3 - = 1$$

Altså er $x = 1$ og $y = 3$.

Eliminasjonssmetoden

Vi starter med å omskrive (II):

$$\begin{aligned} 5x - 4x - 2y &= -5 \\ x - 2y &= -5 \\ 7x - 14y &= -35 \qquad \text{(II*)} \end{aligned}$$

Vi trekker (II*) fra (I):

$$\begin{aligned} 7x - 5y - (7x - 14y) &= -8 - (-35) \\ 9y &= 27 \end{aligned}$$

Herfra er utregningene identiske med de vi så på for innsettingsmetoden.

Oppgaver for kapittel 9

9.2.1

Løs likningene.

a) $x + 8 = 18$ b) $x - 3 = 2$ c) $x - 8 = 1$

d) $x + 12 = 14$ e) $x - 1 = 2$ f) $x - 3 = 1$

g) $21 = x + 11$ h) $24 = x + 16$ i) $4 = x - 6$

9.2.2

Løs ligningene.

a) $16x - 20 = 15x + 17$ b) $18x - 11 = 17x + 18$

c) $17x - 15 = 16x + 8$ d) $4x - 9 = 6 + 3x$

e) $12x - 6 = 11x + 2$ f) $2x + 10 = 3x - 1$

g) $5 + 8x = 9x - 18$ h) $15 + 2x = 3x - 4$

i) $9x + 8 = 10x - 2$ j) $17x + 9 = 18x - 19$

9.2.3

Løs ligningene.

a) $3x = 12$ b) $10x = 50$ c) $7x = 63$ d) $2x = 30$

9.2.4

Løs ligningene.

a) $\frac{x}{4} = 2$ b) $\frac{x}{9} = 8$ c) $\frac{x}{7} = 7$ d) $\frac{x}{15} = 10$

9.2.5

Løs ligningene.

a) $18x - 27 = 9x + 36$ b) $7x - 27 = 4x + 3$

c) $15x - 16 = 7x + 32$ d) $13x - 42 = 7x + 12$

e) $4 + 9x = 13x - 32$ f) $7x + 8 = 11x - 24$

g) $5x + 4 = 8x - 11$ h) $7 + 10x = 14x - 9$

9.2.6

Gitt en rettvinklet trekant $\triangle ABC$, hvor $\angle C = 90°$. Vis at

$$\angle A = 90° - \angle B$$

9.2.7 (E22)

Løs ligningen

$$3 \cdot 24 \cdot 9 = 4 \cdot 9 \cdot x$$

9.5.1 (1TV21D1)

Løs ligningssystemet

$$2x - y = 4$$

$$x - 2y = 5$$

Gruble 13

a) Vis at

$$0{,}2626... = \frac{26}{99}$$

Gitt

$$a = b\left(\frac{1}{10^c} + \frac{1}{10^{2c}} + \frac{1}{10^{3c}} + ...\right)$$

hvor b er et tall med c siffer.

b) Vis at hvis $b = 26$, er $a = 0{,}2626...$.

c) Vis at

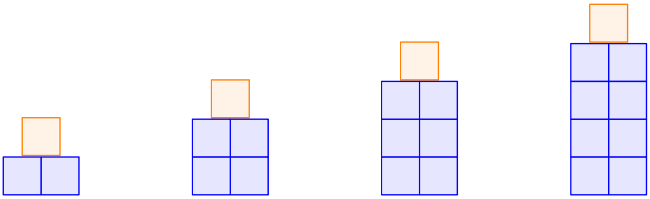
$$a = \frac{b}{10^c - 1}$$

Kapittel 10

Funksjoner

10.1 Introduksjon

Variabler er verdier som forandrer seg. En verdi som forandrer seg i takt med at en variabel forandrer seg, kaller vi en **funksjon**.



Figur 1 *Figur 2* *Figur 3* *Figur 4*

I figurene over forandrer antallet ruter seg etter et bestemt mønster. Matematisk kan vi skildre dette mønsteret slik:

$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur 1} = 2\cdot 1 + 1 = 3$$
$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur 2} = 2\cdot 2 + 1 = 5$$
$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur 3} = 2\cdot 3 + 1 = 7$$
$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur 4} = 2\cdot 4 + 1 = 9$$

For en figur med et vilkårlig nummer x har vi at

$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur } x = 2x + 1$$

Antall ruter forandrer seg altså i takt med at x forandrer seg, og da sier vi at

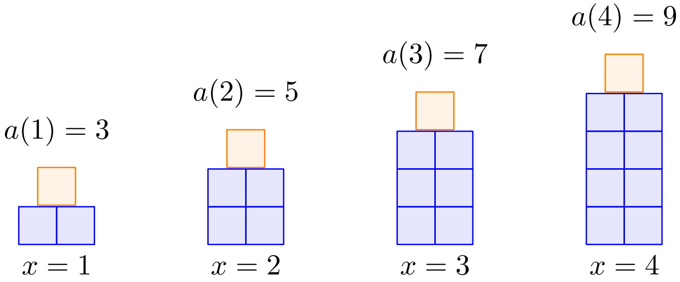
> "Antall ruter i *Figur* x" er en funksjon av x
>
> $2x + 1$ er **funksjonsuttrykket** til funksjonen "Antall ruter i *Figur* x".

Generelle uttrykk
Skulle vi jobbet videre med funskjonen vi akkurat har sett på, ville det blitt tungvint å hele tiden måtte skrive ”Antall ruter i *Figur* x”. Det er vanlig å kalle også funksjoner bare for en bokstav, og i tillegg skrive variabelen funskjonen er avhengig av i parentes. La oss nå omdøpe funksjonen ”Antall ruter i *Figur* x” til $a(x)$. Da har vi at

$$\text{Antall ruter i } \textit{Figur } x = a(x) = 2x + 1$$

Hvis vi skriver $a(x)$, men erstatter x med et bestemt tall, betyr det at vi skal erstatte x med dette tallet i funksjonsuttrykket vårt:

$$\begin{aligned} a(1) &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 \\ a(2) &= 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ a(3) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ a(4) &= 2 \cdot 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$



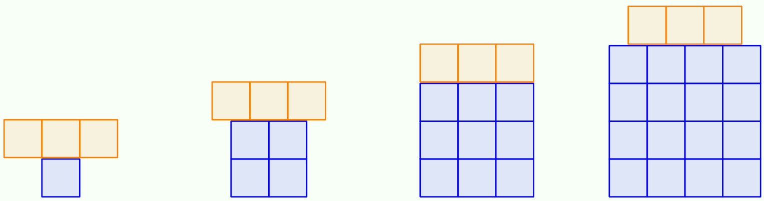
Språkboksen

Som leseren kanskje har lagt merke til, er en funksjon med et tilhørende funksjonsuttrykk strengt tatt bare en likning med to ukjente. Men ordet *funksjon* brukes istendefor *likning* for å tydeliggjøre at vi har å gjøre med en likning hvor én variabel er isolert på den éne siden av likhetstegnet, og at vi har et uttrykk av en annen variabel[1] på den andre siden. Et annet synonym for *likning* og *funksjon* er **formel**.

[1]En funksjon kan også være uttrykt ved flere variabler.

Eksempel

La antall ruter i mønsteret under være gitt av funksjonen $a(x)$.



a) Finn uttrykket for $a(x)$.

b) Hvor mange ruter er der når $x = 10$?

c) Hva er verdien til x når $a(x) = 628$?

Svar

a) Vi legger merke til at

- når $x = 1$, er det $1 \cdot 1 + 3 = 4$ ruter.
- når $x = 2$, er det $2 \cdot 2 + 3 = 7$ ruter.
- når $x = 3$, er det $3 \cdot 3 + 3 = 12$ ruter.
- når $x = 4$, er det $4 \cdot 4 + 3 = 17$ ruter.

Altså er

$$a(x) = x \cdot x + 3 = x^2 + 3$$

b)

$$a(10) = 10^2 + 3 = 100 + 3 = 103$$

Når $x = 10$, er det 103 ruter.

c) Vi har likningen

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 628 \\ x^2 &= 625 \end{aligned}$$

Altså er

$$x = 15 \qquad \lor \qquad x = -15$$

Siden vi søker en positiv verdi for x, er $x = 15$.

10.2 Lineære funksjoner og grafer

Når vi har en variabel x og en funksjon $f(x)$, har vi hele tiden to verdier; verdien til x og den tilhørende verdien til $f(x)$. Disse parene av verdier kan vi sette inn i et koordinatsystem[1] for å lage **grafen** til $f(x)$.

La oss bruke funksjonen

$$f(x) = 2x - 1$$

som eksempel. Vi har at

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$$

Disse parene av verdier kan vi sette opp i en tabell:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	3	5

Tabellen over gir punktene

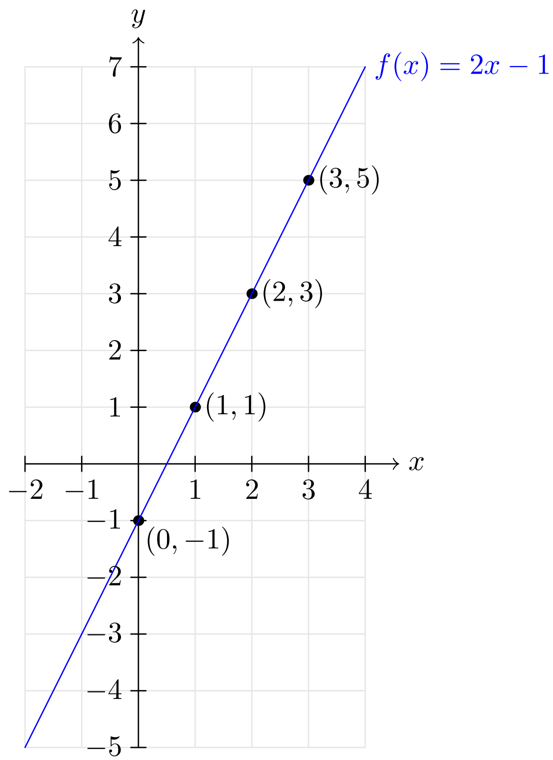
$$(0, -1) \qquad (1, 1) \qquad (2, 3) \qquad (3, 5)$$

Vi plasserer nå punktene i et koordinatsystem (se figur på side 215). I samband med funksjoner er det vanlig å kalle horisontalaksen og vertikalaksen for henholdsvis **x-aksen** og **y-aksen**. Grafen til $f(x)$ er nå en tenkt strek som går gjennom alle de uendelig mange punktene vi kan lage av x-verdier og de tilhørende $f(x)$-verdiene. Vår funksjon er en *lineær* funksjon, noe som betyr at grafen er en rett linje. Altså kan grafen tegnes ved å tegne linja som går gjennom punktene vi har funnet.

Som vi har vært inne på før, kan vi aldri tegne en hel linje, bare et utklipp av den. Dette gjelder som regel også for grafer. I figuren på side 215 har vi tegnet grafen til $f(x)$ for x-verdier mellom -2 og 4. At x er i dette **intervallet** kan vi skrive som[2] $-2 \leq x \leq 4$ eller $x \in [-2, 4]$.

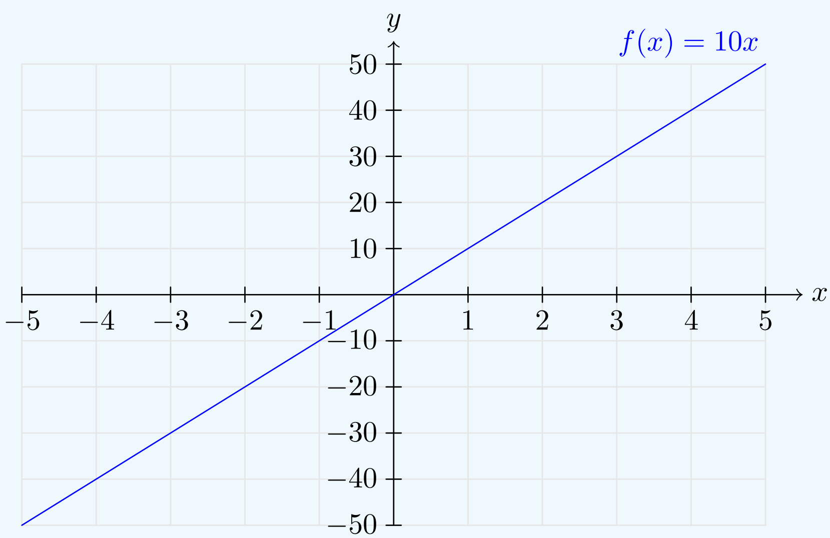
[1]Se seksjon 1.3.

[2]Se symbolforklaringer på side 4.



Merk

En lengde på x-aksen trenger ikke å svar til samme verdi som en lengde på y-aksen.



10.1 Lineære funksjoner

En funksjon på formen

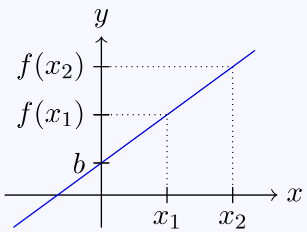
$$f(x) = ax + b$$

er en **lineær** funksjon med **stigningstall** a og **konstantledd** b.

Grafen til en lineær funksjon er en rett linje som går gjennom punktet $(0, b)$.

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, er

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



Eksempel 1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = -3 + \frac{7}{2}$$

$$h(x) = \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}$$

$$j(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

Svar

- $f(x)$ har stigningstall 2 og konstantledd 1.
- $g(x)$ har stigningstall -3 og konstantledd $\frac{7}{2}$.
- $h(x)$ har stigningstall $\frac{1}{4}$ og konstantledd $-\frac{5}{6}$.
- $j(x)$ har stigningstall $-\frac{1}{2}$ og konstantledd 4.

Eksempel 2

Tegn grafen til

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 2$$

for $x \in [-5, 6]$.

Svar

For å tegne grafen til en lineær funksjon trenger vi bare å finne to punkt som ligger på grafen. Hvilke to punkt dette er, er det fritt å velge, så for enklest mulig utregning starter vi med å finne punktet der $x = 0$:

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 - 2 = -2$$

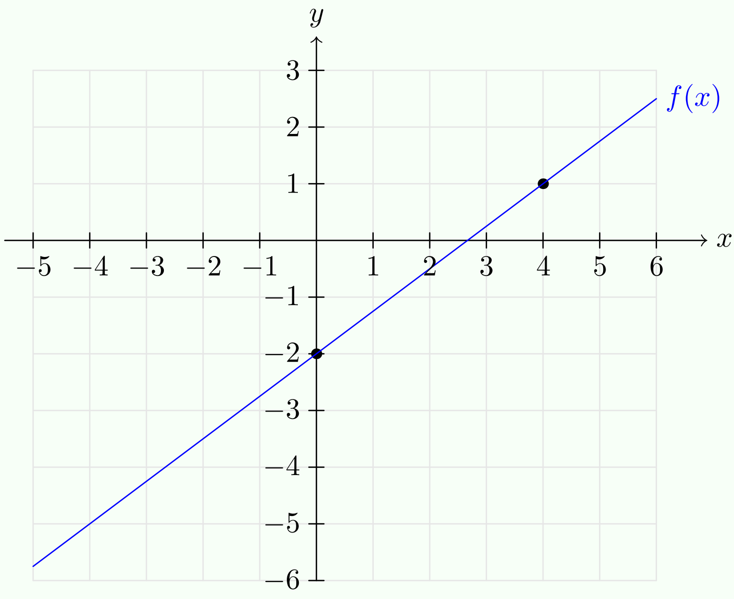
Videre velger vi $x = 4$, siden dette også gir oss en enkel utregning:

$$f(4) = \frac{3}{4} \cdot 4 - 2 = 1$$

Nå har vi informasjonen vi trenger, og for ordens skyld setter vi den inn i en tabell:

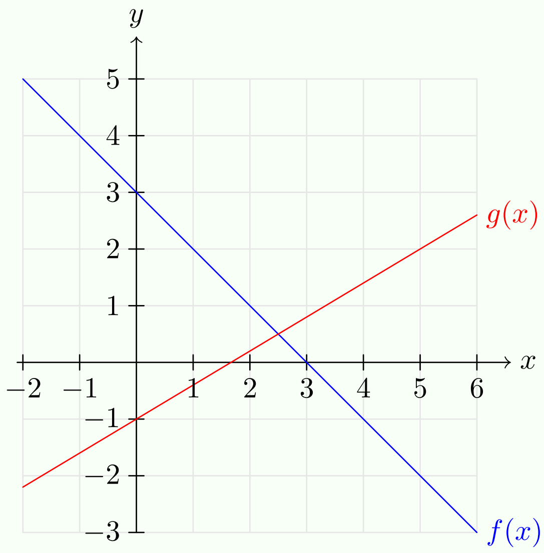
x	0	4
$f(x)$	-2	1

Vi tegner punktene og trekker en linje gjennom dem:



Eksempel 3

Finn funksjonsuttrykkene til $f(x)$ og $g(x)$.



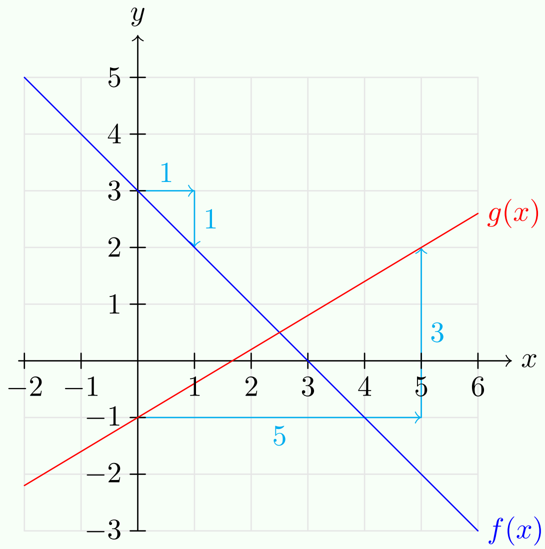
Svar

Vi starter med å finne funksjonsuttrykket til $f(x)$. Punktet $(0, 3)$ ligger på grafen til $f(x)$ (se også figur på neste side). Da vet vi at $f(0) = 3$, og dette må bety at 3 er konstantleddet til $f(x)$. Videre ser vi at punktet $(1, 2)$ også ligger på grafen til $f(x)$. Stigningstallet til $f(x)$ er da gitt ved brøken

$$\frac{2-3}{1-0} = -1$$

Altså er

$$f(x) = -x + 3$$



Vi går så over til å finne uttrykket til $g(x)$. Punktet $(0, -1)$ ligger på grafen til $g(x)$. Da vet vi at $f(0) = -1$, og dette må bety at -1 er konstantleddet til $g(x)$. Videre ser vi at punktet $(5, 2)$ også ligger på grafen til $g(x)$. Stigningstallet til $g(x)$ er da gitt ved brøken

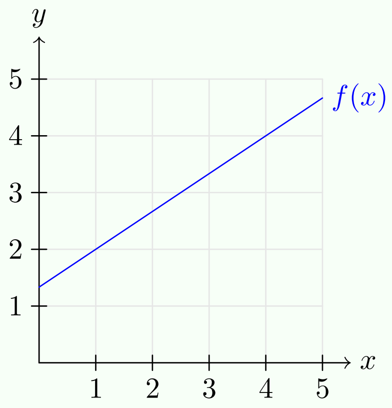
$$\frac{2-(-1)}{5-0} = \frac{3}{5}$$

Altså er

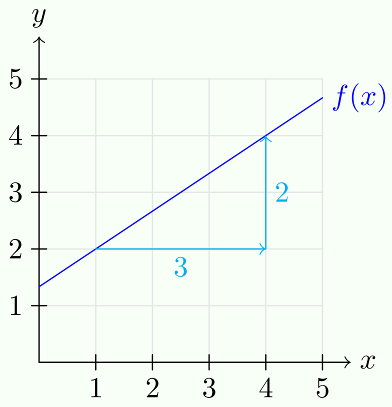
$$g(x) = \frac{3}{5}x + 1$$

Eksempel 4

Finn stigningstallet til $f(x)$.



Svar



Vi legger merke til at punktene $(1, 2)$ og $(4, 4)$ ligger på grafen til $f(x)$. Altså er stigningstalelt til $f(x)$ gitt ved brøken

$$\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$$

10.1 Lineære funksjoner (forklaring)

Uttrykk for a

Gitt en lineær funksjon

$$f(x) = ax + b$$

For to forskjellige x-verdier, x_1 og x_2, har vi at

$$f(x_1) = ax_1 + b \tag{10.1}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b \tag{10.2}$$

Vi trekker (10.1) fra (10.2), og får at

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$

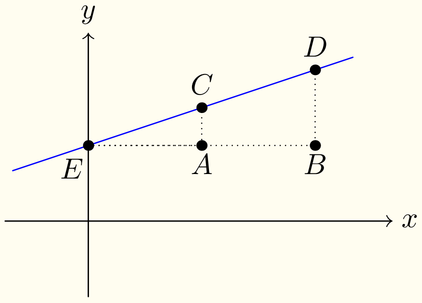
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a \tag{10.3}$$

Grafen til en lineær funksjon er ei rett linje

Gitt en lineær funksjon $f(x) = ax + b$ og to forskjellige x-verdier x_1 og x_2. Vi setter $A = (x_1, b)$, $B = (x_2, b)$, $C = (b, f(x_1))$, $D = (0, f(x_2))$ og $E = (0, b)$.



Av (10.3) har vi at

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = a$$

$$\frac{ax_1 + b - b}{x_1} = a$$

$$\frac{ax_1}{x_1} = a \tag{10.4}$$

Tilsvarende er

$$\frac{ax_2}{x_2} = a \tag{10.5}$$

Videre har vi at

$$AC = f(x_1) - b = ax_1$$

$$BD = f(x_2) - b = ax_2$$

$$EA = x_1$$

$$EB = x_2$$

Av (10.4) og (10.5) har vi at

$$\frac{ax_1}{x_1} = \frac{ax_2}{x_2}$$

Dette betyr at

$$\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{EB}$$

I tillegg er $\angle A = \angle B$, altså oppfyller $\triangle EAC$ og $\triangle EBD$ vilkår (iii) fra regel 11.17, og dermed er trekantane formlike. Dette betyr at C og D ligger på linje, og denne linja må vere grafen til $f(x)$.

10.3 Viktige punkt på grafer

10.2 Skjæringspunkt til grafer

Et punkt hvor to funksjoner har samme verdi kalles et **skjæringspunkt** til funksjonene.

Eksempel 1

Gitt de to funksjonene

$$f(x) = 2x + 1$$

$$g(x) = x + 4$$

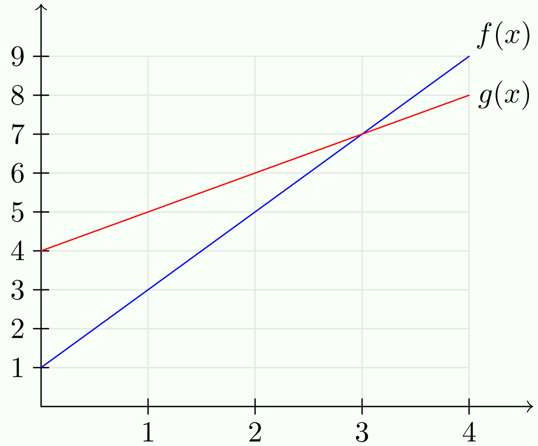
Finn skjæringspunktet til $f(x)$ og $g(x)$.

Svar

Vi kan finne skjæringspunktet både ved en *grafisk* og en *algebraisk* metode.

Grafisk metode

Vi tegner grafene til funksjonene inn i det samme koordinatsystemet:



Vi leser av at funksjonene har samme verdi når $x = 3$, og da har begge funksjonene verdien 7. Altså er skjæringspunktet $(3, 7)$.

Algebraisk metode

At $f(x)$ og $g(x)$ har samme verdi gir likningen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
2x + 1 &= x + 4 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

Videre har vi at

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$g(3) = 3 + 4 = 7$$

Altså er $(3, 7)$ skjæringspunktet til grafene.

Merk: Det hadde selvsagt holdt å bare finne én av $f(3)$ og $g(3)$.

10.3 Null-, bunn- og toppunkt

Nullpunkt
En x-verdi som gir funksjonsverdi 0.

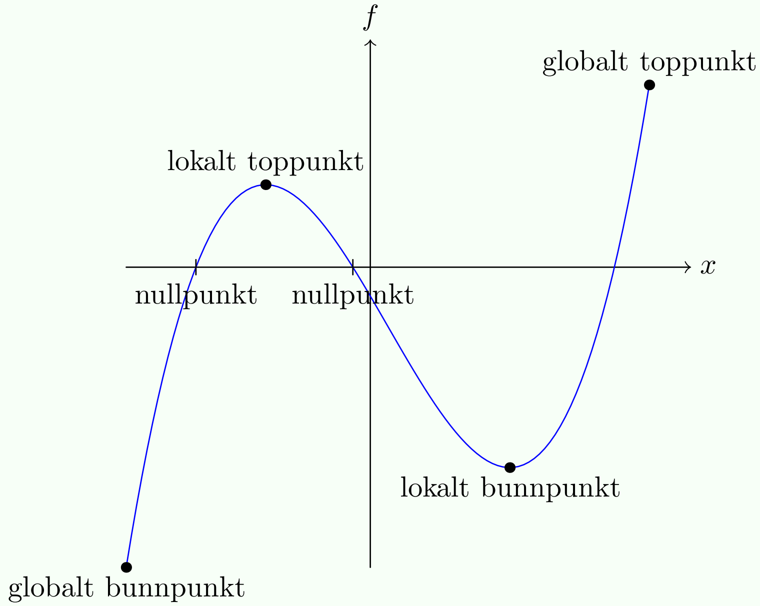
Lokalt bunnpunkt
Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å synke i verdi til å stige i verdi.

Lokalt toppunkt
Punkt der funksjonen (fra venstre) går fra å stige i verdi til å synke i verdi

Globalt bunnpunkt
Punkt der funksjonen har sin laveste verdi.

Globalt toppunkt
Punkt der funksjonen har sin høyeste verdi.

Eksempel



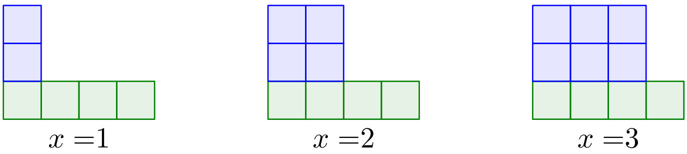
Hvorfor er nullpunkt en verdi?

Det kan kanskje virke litt rart at vi kaller x-verdier for nullpunkt, punkt har jo både en x-verdi og en y-verdi. Men når det er snakk om nullpunkt, er det underforstått at $y = 0$, og da er det tilstrekkelig å vite x-verdien for å avgjøre hvilket punkt det er snakk om.

Oppgaver for kapittel 10

10.1.1

La antall ruter i figuren under være gitt ved $f(x)$.



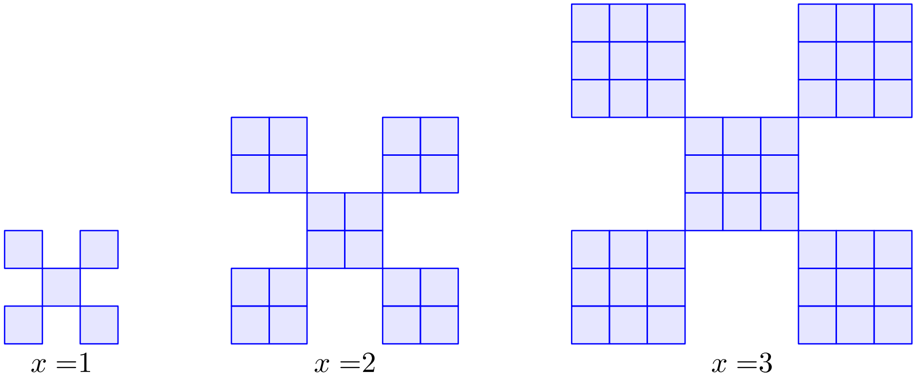
a) Finn et uttrykk for $f(x)$.

b) Hvor mange ruter er der når $x = 100$?

c) Hva er x når $f(x) = 24$.

10.1.2

La antall ruter i figuren under være gitt ved $a(x)$.



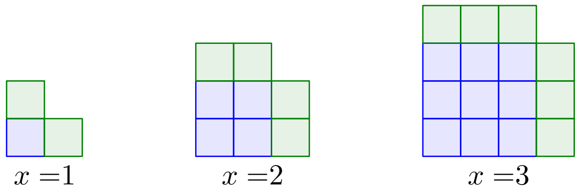
a) Finn et uttrykk for $a(x)$.

b) Hvor mange ruter er der når $x = 20$?

c) Hva er x når $a(x) = 405$?

10.1.3

La antall ruter i figuren under være gitt ved $b(x)$.



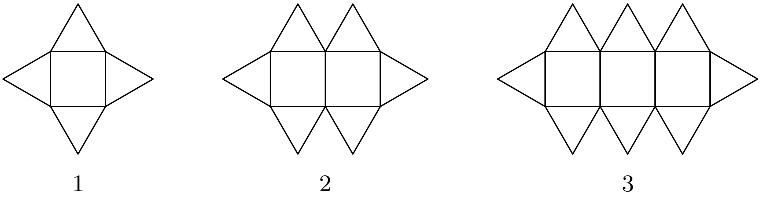
a) Finn et uttrykk for $b(x)$.

b) Hvor mange ruter er der når $x = 20$?

c) Hva er x når $b(x) = 80$?

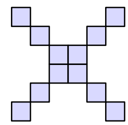
10.1.4 (EGV22D1)

Under vises de tre første figurene i et mønster. Figurene er satt sammen av trekanter og kvadrater.



Hvor mange trekanter og hvor mange firkanter vil det være i figur nummer 10?

10.1.5 (GV23D1)

FIGURNUMMER	FIGUR 1	FIGUR 2	FIGUR 3
TEGNING AV FIGUREN			
ANTALL BRIKKER I FIGUREN	5	12	21

a) Tegn Figur 1 og Figur 3 inn i tabellen.

b) Lag en formel for antall brikker i Figur n, og forklar hvordan du kom fram til formelen.

10.1.6

La x være et positivt heltall.

a) Lag en funskjon $p(x)$ som gir verdien til positivt partall nr. x.

b) Lag en funksjon $o(x)$ som gir verdien til positivt oddetall nr. x.

10.2.1

Finn stigningstallet og konstantleddet til funksjonene.

a) $f(x) = 5x + 10$ b) $g(x) = 3x - 12$

c) $h(x) = -\frac{1}{7}x - 9$ d) $i(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

10.2.2

Tegn grafen til disse funksjonene på intervallet $x \in [-5, 5]$:

a) $f(x) = 2x - 1$ b) $g(x) = -3x + 5$

10.3.1

Gitt likningsettet

$$x - y = 5 \tag{I}$$

$$x + y = 9 \tag{II}$$

a) Forklar hvorfor løsningen av likningssettet er skjæringspunktet til funksjonene

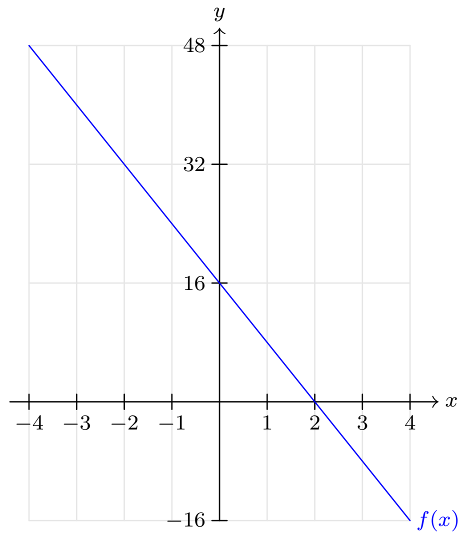
$$f(x) = x - 5$$

$$g(x) = 9 - x$$

b) Løs liknigssettet.

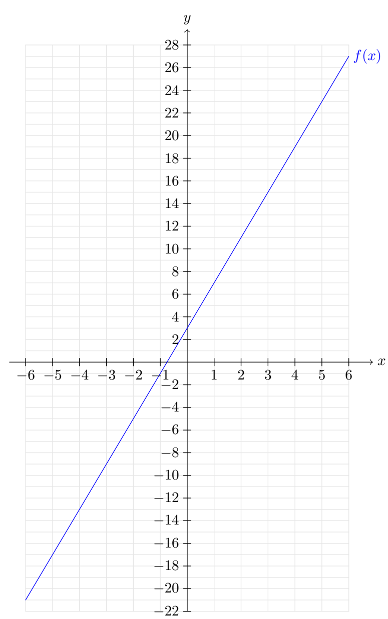
10.3.2

Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$



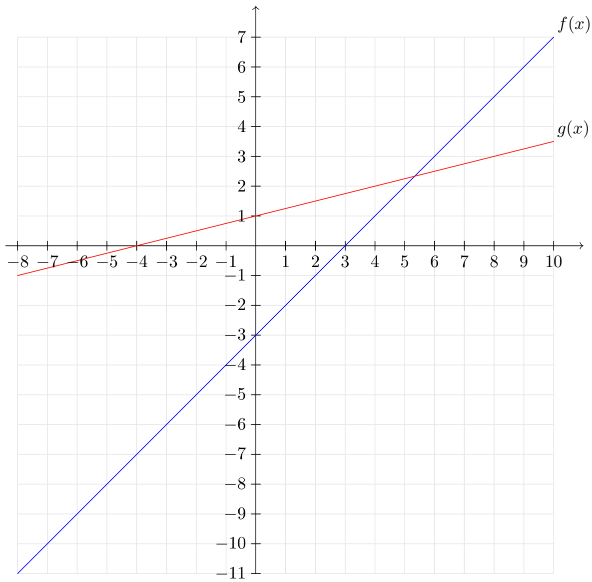
10.3.3

Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$



10.3.4

Finn funksjonsuttrykkene til $f(x)$ og $g(x)$.



Gruble 14

Bruk formlene fra oppgave 10.1.6 til å vise at

a) summen/differansen mellom to partall er et partall.

b) summen/differansen mellom to oddetall er et partall.

c) summen/differansen mellom et partall og et oddetall er et oddetall.

Gruble 15

Funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$ går gjennom punktene $(-3, 49)$, $(0, 4)$ og $(10, 149)$. Finn verdiene til a, b og c.

Gruble 16

a) Gitt at en lineær funksjon $f(x)$ har stigningstall 3, og at punktet $(2, 1)$ ligger på grafen til $f(x)$. Finn funksjonsuttrykket til $f(x)$.

b) Gitt en lineær funksjon $f(x)$ med stigningstall a, og punktet (x_1, y_1), som ligger på grafen til $f(x)$. Vis at[1]

$$f(x) = a(x - x_1) + y_1$$

(Denne formelen kalles **ettpunktsformelen** .)

Gruble 17

Gitt funksjonene $f(x)$ og $g(x)$, hvor grafen til g er linja som går gjennom $A = (a,f(a))$ og $B = (b, f(b))$. Vis at

$$f - g = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

[1] Denne formelen kalles *ettpunktsformelen*.

Kapittel 11

Geometri

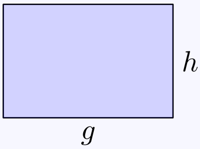
11.1 Formler for areal og omkrets

I seksjon 7.4 har vi allerede sett på formler for arealet til rektangel og trekanter, men der brukte vi ord i steden for symboler. Her skal vi gjengi disse to formlene i en mer algebraisk form, etterfulgt av andre klassiske formler for areal, omkrets og volum.

11.1 Arealet til et rektangel (7.4)

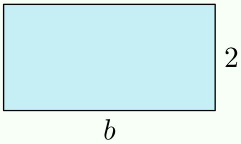
Arealet A til et rektangel med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel 1

Finn arealet til rektangelet.



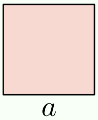
Svar

Arealet A til rektangelet er

$$A = b \cdot 2 = 2b$$

Eksempel 2

Finn arealet til kvadratet.



Svar

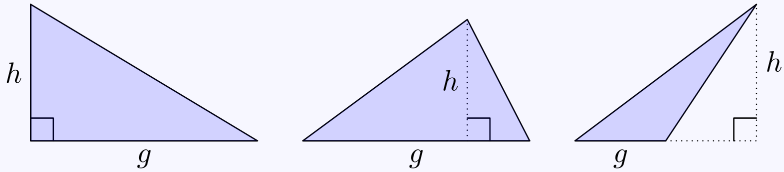
Arealet A til kvadratet er

$$A = a \cdot a = a^2$$

11.2 Arealet til en trekant (7.4)

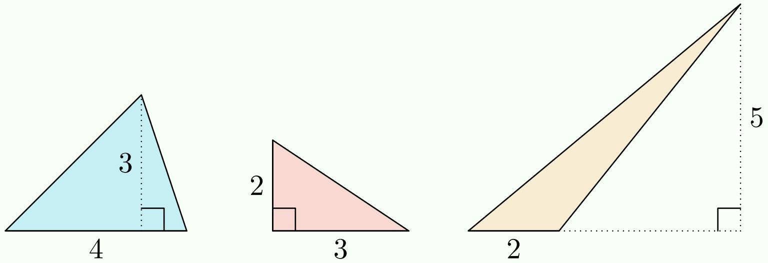
Arealet A til en trekant med grunnlinje g og høyde h er

$$A = \frac{gh}{2}$$



Eksempel

Hvilken av trekantene har størst areal?



Svar

Vi lar A_1, A_2 og A_3 være arealene til henholdsvis trekanten til venstre, i midten og til høgre. Da har vi at

$$A_1 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

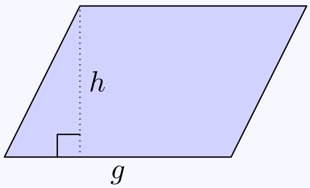
$$A_3 = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$$

Altså er det trekanten til venstre som har størst areal.

11.3 Arealet til et parallellogram

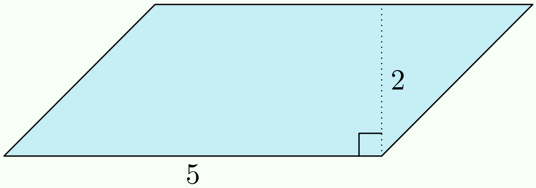
Arealet A til et parallellogram med grunnlinje g og høgde h er

$$A = gh$$



Eksempel

Finn arealet til parallellogrammet



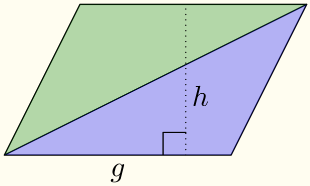
Svar

Arealet A til parallellogrammet er

$$A = 5 \cdot 2 = 10$$

11.3 Arealet til et parallellogram (forklaring)

Av et parallellogram kan vi alltid lage oss to trekanter ved å tegne inn én av diagonalene:



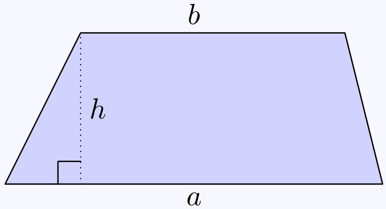
De fargede trekantene på figuren over har begge grunnlinje g og høgde h. Da vet vi at begge har areal lik $\frac{gh}{2}$. Arealet A til parallelogrammet blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} + \frac{gh}{2} \\ &= g \cdot h \end{aligned}$$

11.4 Arealet til et trapes

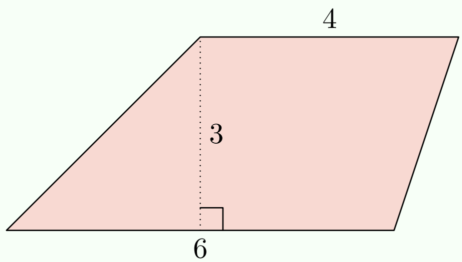
Arealet A til et trapes med parallelle sider a og b og høgde h er

$$A = \frac{h(a+b)}{2}$$



Eksempel

Finn arealet til trapeset.



Svar

Arealet A til trapeset er

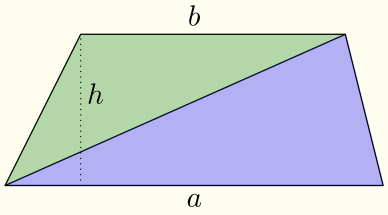
$$\begin{aligned} A &= \frac{3(6+4)}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 10}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$

Merk

Når man tar utgangspunkt i en grunnlinje og en høgde, er arealformlene for et parallellogram og et rektangel identiske. Å anvende regel 11.4 på et parallellogram vil også resultere i et uttrykk tilsvarende gh. Dette er fordi et parallellogram bare er et spesialtilfelle av et trapes (og et rektangel er bare et spesialtilfelle av et parallellogram).

11.4 Arealet til et trapes (forklaring)

Også for et trapes får vi to trekanter hvis vi tegner én av diagonalene:



I figuren over er

$$\text{Arealet til den blå trekantet} = \frac{ah}{2}$$

$$\text{Arealet til den grønne trekanten} = \frac{bh}{2}$$

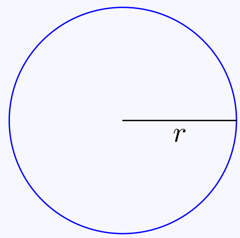
Arealet A til trapeset blir dermed

$$\begin{aligned} A &= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} \\ &= \frac{h(a+b)}{2} \end{aligned}$$

11.5 Omkretsen til en sirkel (og verdien til π)

Omkretsen O til en sirkel med radius r er

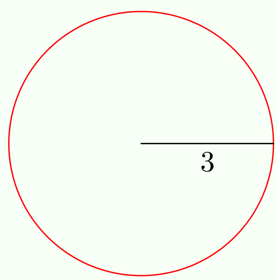
$$O = 2\pi r$$



hvor $\pi = 3.141592653589793....$

Eksempel 1

Finn omkretsen til sirkelen.



Svar

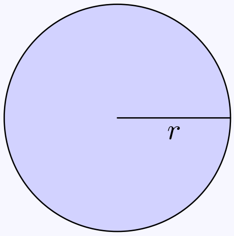
Omkretsen O er

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \cdot 3 \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

11.6 Arealet til en sirkel

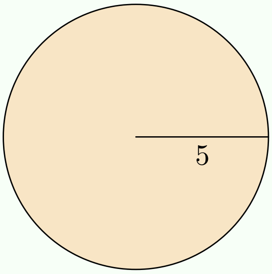
Arealet A til en sirkel med radius r er

$$A = \pi r^2$$



Eksempel

Finn arealet til sirkelen.



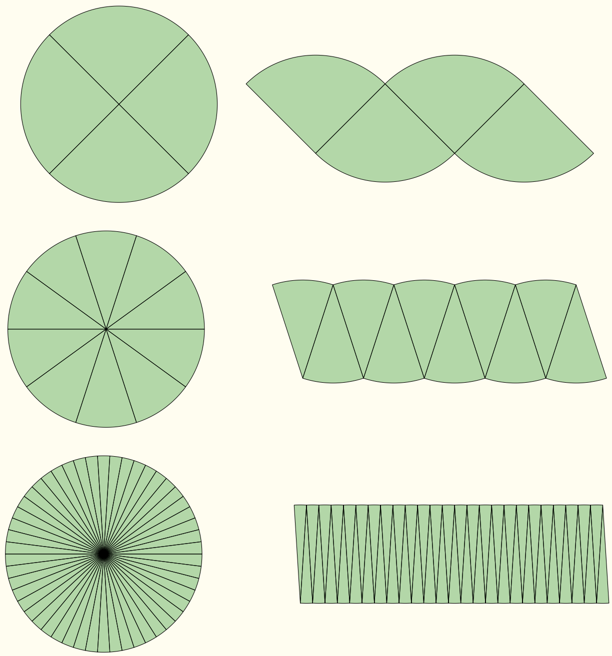
Svar

Arealet A til sirkelen er

$$A = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

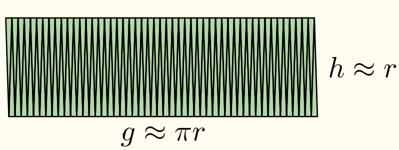
11.6 Arealet til en sirkel (forklaring)

I figuren under har vi delt opp en sirkel i 4, 10 og 50 (like store) sektorer, og lagt disse bitene etter hverandre.



I hvert tilfelle må de små sirkelbuene til sammen utgjøre hele buen, altså omkretsen, til sirkelen. Hvis sirkelen har radius r, betyr dette at summen av buene er $2\pi r$. Og når vi har like mange sektorer med buen vendt opp som sektorer med buen vendt ned, må totallengden av buene være πr både oppe og nede.

Men jo flere sektorer vi deler sirkelen inn i, jo mer ligner sammensetningen av dem på et rektangel (i figuren under har vi 100 sektorer). Grunnlinja g til dette "rektangelet" vil være tilnærmet lik πr, mens høgda vil være tilnærmet lik r.



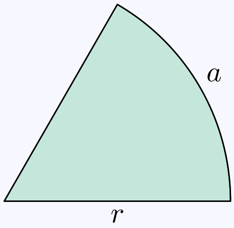
Arealet A til "rektangelet", altså sirkelen, blir da

$$A \approx gh \approx \pi r \cdot r = \pi r^2$$

11.7 Arealet til en sektor I

Arealet A til en sektor med radius r og buelengde a er

$$A = \frac{1}{2}ar$$



11.7 Arealet til en sektor I (forklaring)

På samme måte som vi på side 242 delte en sirkel inn i et "rektangel" med sidelengder tilnærmet lik r og πr, kan vi dele en sirkel inn i et "rektangel" med sidelengder tilnærmet lik r og $\frac{1}{2}a$. Arealet A til "rektangelet", altså sektoren, blir da

$$A = \frac{1}{2}ar$$

11.8 Arealet til en sektor II

Arealet A til en sektor med radius r og vinkel v (målt i grader) er

$$A = \pi r^2 \frac{v}{360^\circ}$$

11.8 Arealet til en sektor II (forklaring)

Av regel 11.7 har vi at

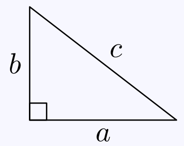
$$A = \frac{1}{2}ar = \pi r^2 \frac{a}{2\pi r}$$

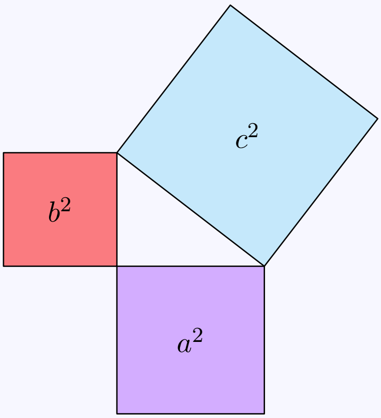
hvor $\frac{a}{2\pi r}$ uttrykker forholdet mellom buelengden til sektoren og omkretsen til en sirkel med radius r. Dette forholdet er også uttrykkt ved $\frac{v}{360^\circ}$, og dermed er $A = \pi r^2 \frac{v}{360^\circ}$

11.9 Pytagoras' setning

I en rettvinklet trekant er arealet til kvadratet dannet av hypotenusen lik summen av arealene til kvadratene dannet av katetene.

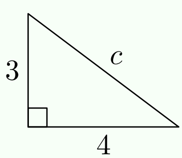
$$a^2 + b^2 = c^2$$





Eksempel 1

Finn verdien til c.



Svar

Vi vet at

$$c^2 = a^2 + b^2$$

der a og b er lengdene til de korteste sidene i trekanten. Dermed er

$$\begin{aligned} c^2 &= 4^2 + 3^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

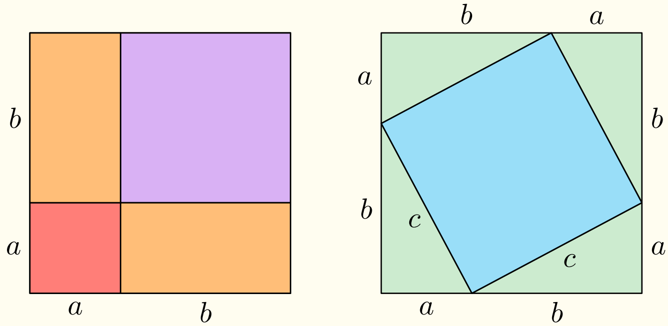
Altså har vi at

$$c = 5 \qquad \vee \qquad c = -5$$

Da c er en lengde, er $c = 5$.

11.9 Pytagoras' setning (forklaring)

Under har vi tegnet to kvadrat som er like store, men som er inndelt i forskjellige former.

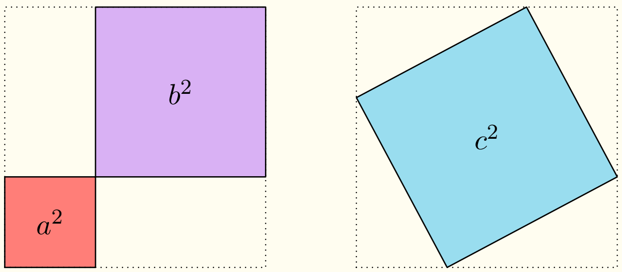


Vi observerer nå følgende:

1. Arealet til det røde kvadratet er a^2, arealet til det lilla kvadratet er b^2 og arealet til det blå kvadratet er c^2.

2. Arealet til et oransje rektangel er ab og arealet til en grønn trekant er $\frac{ab}{2}$.

3. Om vi tar bort de to oransje rektanglene og de fire grønne trekantane, er det igjen (av pkt. 2) et like stort areal til venstre som til høyre.



Dette betyr at

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{11.1}$$

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste sidelengden. Så lenge trekanten er rettvinklet, kan vi alltid lage to kvadrat med sidelengder $a + b$, slik som i første figur. (11.1) gjelder dermed for alle rettvinklede trekanter.

11.10 Pytagoras' setning (omvendt versjon)

Gitt en trekant med sidelengder a, b og c, der c er den lengste siden. Da er trekanten rettvinklet bare hvis $a^2 + b^2 = c^2$.

Eksempel

Undersøk om en trekant er rettvinklet når den har

a) sidelengder 2, 4 og 9.

b) sidelengder 6, 8 og 10.

Svar

a)
$$2^2 + 4^2 = 20 \neq 9^2 = 81$$

Altså er ikke trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

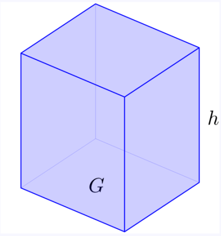
b)
$$6^2 + 8^2 = 100 = 10^2$$

Altså er trekanten rettvinklet i dette tilfellet.

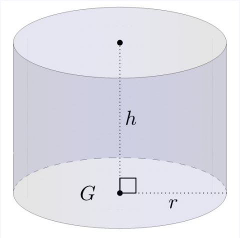
11.11 Volumet til tredimensjonale former

Volumet V til en firkantet prisme eller en sylinder med grunnflate G og høgde h er

$$V = G \cdot h$$



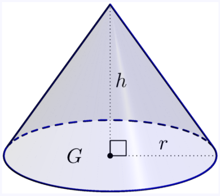
Firkantet prisme



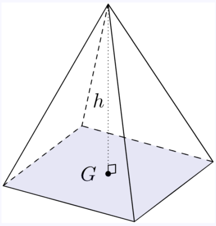
Sylinder

Volumet V til en kjegle eller en pyramide med grunnflate G og høgde h er

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$



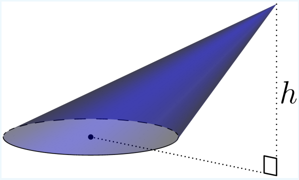
Kjegle



Firkantet pyramide

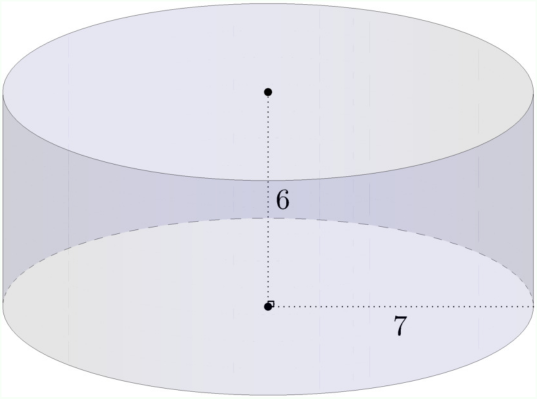
Merk

Formlene fra regel 11.11 gjelder også for prismer, sylindre, kjegler og pyramider som heller (er skeive). Hvis grunnflaten er plassert horisontalt, er høgden den vertikale avstanden mellom grunnflaten og toppen til figuren.



(For spisse gjenstander som kjegler og pyramider finnes det selvsagt bare ett valg av grunnflate.)

Eksempel 1



En sylinder har radius 7 og høgde 5.

a) Finn grunnflaten til sylinderen.

b) Finn volumet til sylinderen.

Svar

a) Av regel 11.1 har vi at

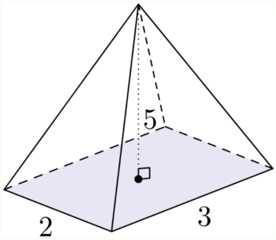
$$\begin{aligned} \text{grunnflate} &= \pi \cdot 7^2 \\ &= 49\pi \end{aligned}$$

b) Dermed er

$$\begin{aligned} \text{volumet til sylinderen} &= 49\pi \cdot 6 \\ &= 294\pi \end{aligned}$$

Eksempel 2

En firkantet pyramide har lengde 2, bredde 3 og høgde 5.



a) Finn grunnflaten til pyramiden.

b) Finn volumet til pyramiden.

Svar

a) Av regel 11.1 har vi at

$$\begin{aligned}\text{grunnflate} &= 2 \cdot 3 \\ &= 6\end{aligned}$$

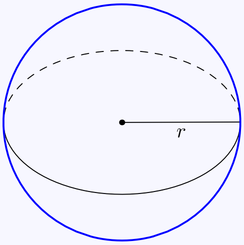
b) Dermed er

$$\begin{aligned}\text{volumet til pyramiden} &= 6 \cdot 5 \\ &= 30\end{aligned}$$

11.12 Volumet til en kule

Volumet V til en kule med radius r er

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



11.2 Kongruente og formlike trekanter

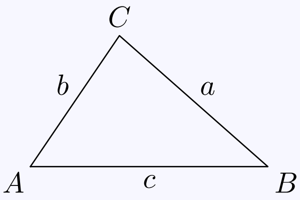
11.13 Konstruksjon av trekanter

En trekant $\triangle ABC$, som vist i figuren under, kan bli unikt konstruert hvis ett av følgende vilkår er oppfylt:

i) c, $\angle A$ og $\angle B$ er kjente.

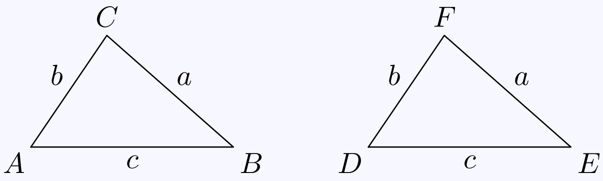
ii) a, b og c er kjente.

iii) b, c og $\angle A$ er kjente.



11.14 Kongruente trekanter

To trekanter som har samme form og størrelse er kongruente.

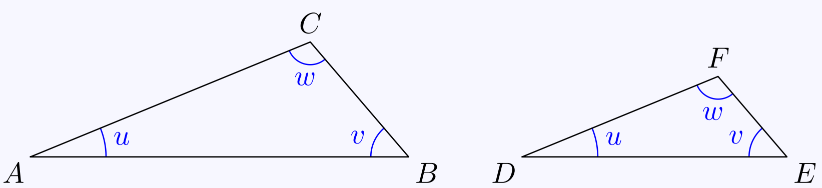


At trekantane i figuren over er kongruente skrives

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

11.15 Formlike trekanter

Formlike trekanter har tre vinkler som er parvis like store.

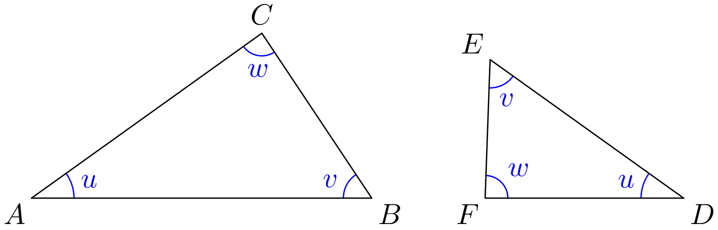


At trekantane i figuren over er formlike skrives

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Samsvarende sider

Når vi studerer formlike trekanter er **samsvarende sider** et viktig begrep. Samsvarende sider er sider som i formlike trekanter står **motstående** den samme vinkelen.



For de formlike trekantane $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ har vi at

I $\triangle ABC$ er

- BC motstående til u.
- AC motstående til v
- AB motstående til w.

I $\triangle DEF$ er

- FE motstående til u.
- FD motstående til v
- ED motstående til w.

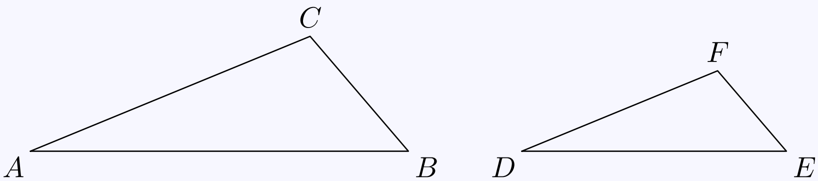
Dette betyr at disse er samsvarende sider:

- BC og FE
- AC og FD
- AB og ED

11.16 Forhold i formlike trekanter

Når to trekanter er formlike, er forholdet mellom samsvarende[1] sider det samme.

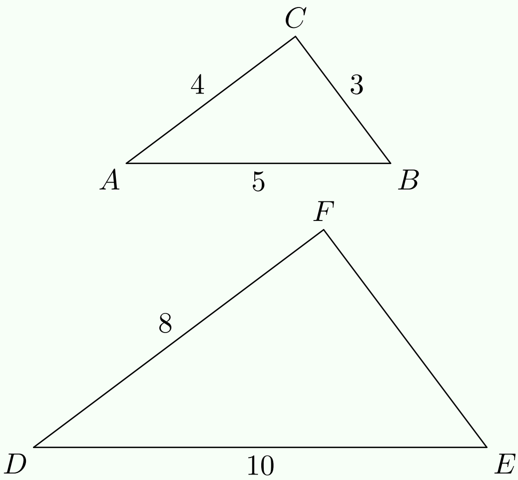
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



[1] Vi tar det her for gitt at hvilke sider som er samsvarende kommer fram av figuren.

Eksempel

Trekantene i figuren under er formlike. Finn lengden til EF.



Svar

Vi observerer at AB samsvarer med DE, BC med EF og AC med DF. Det betyr at

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$$

$$\frac{10}{5} = \frac{EF}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{EF}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$$

$$6 = EF$$

Merk

Av regel 11.16 har vi at for to formlike trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \quad , \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad , \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

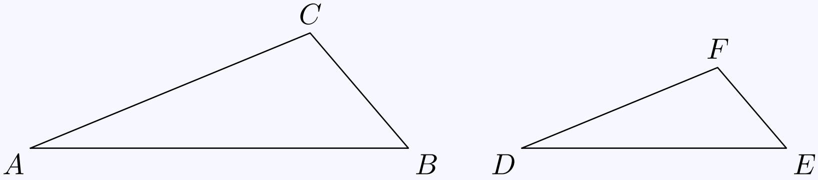
11.17 Vilkår for formlike trekanter

To trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike hvis ett av følgende vilkår er oppfylt:

(i) To vinkler i trekantene er parvis like store.

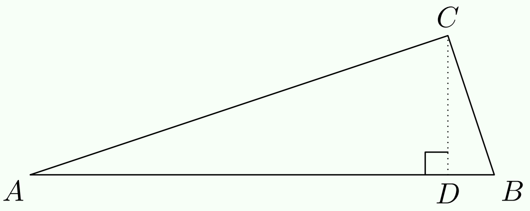
(ii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

(iii) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ og $\angle A = \angle D$.



Eksempel 1

$\angle ACB = 90°$. Vis at $\triangle ABC \sim ACD$.



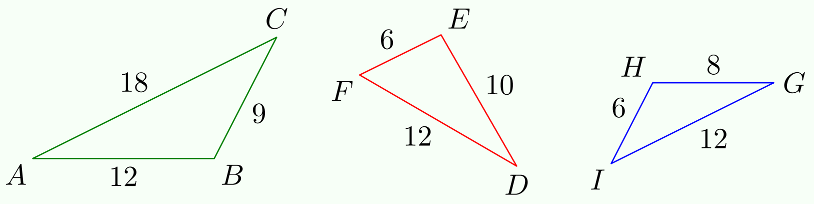
Svar

$\triangle ABC$ og $\triangle ACD$ er begge rettvinklede, og de har $\angle DAC$ felles. Dermed er vilkår (i) fra regel 11.17 oppfylt, og trekantene er da formlike.

Merk: På en tilsvarende måte kan det vises at $\triangle ABC \sim CBD$.

Eksempel 2

Undersøk om trekantene er formlike.



Svar

Vi har at

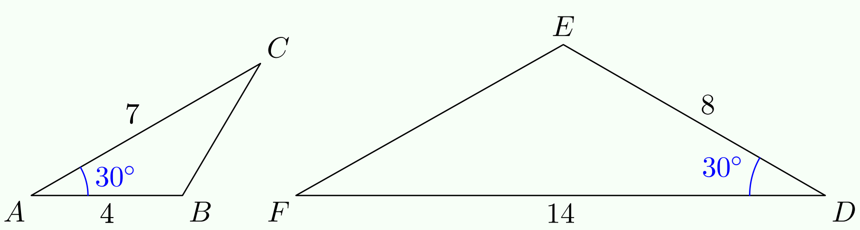
$$\frac{AC}{FD} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{FE} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{AB}{DE} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{BC}{IH} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{AC}{IG} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

Dermed oppfyller $\triangle ABC$ og $\triangle GHI$ vilkår (ii) fra regel 11.17, og trekantene er da formlike.

Eksempel 3

Undersøk om trekantene er formlike.



Svar

Vi har at $\angle BAC = \angle EDF$ og at

$$\frac{ED}{AB} = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \frac{FD}{AC} = \frac{14}{7} = 2$$

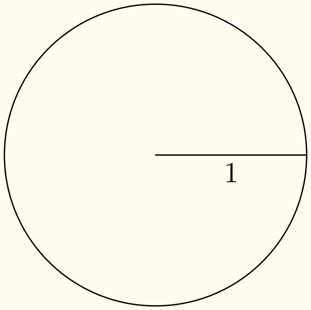
Altså er vilkår (iii) fra regel 11.17 oppfylt, og da er trekantene formlike.

11.3 Forklaringar

11.5 Omkretsen til en sirkel (og verdien til π) (forklaring)

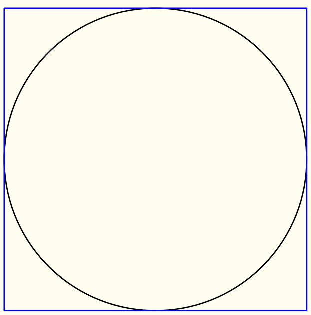
Vi skal her bruke regulære mangekanter langs veien til ønsket resultat. I regulære mangekanter har alle sidene lik lengde. Da det er utelukkande regulære mangekanter vi kommer til å bruke, vil de bli omtalt bare som mangekanter.

Vi skal starte med se på tilnærminger for å finne omkretsen O_1 av en sirkel med radius 1.



Øvre og nedre grense

En god vane når man skal prøve å finne en størrelse, er å spørre seg om man kan vite noe om hvor stor eller liten man *forventer* at den er. Vi starter derfor med å omslutte sirkelen med et kvadrat med sidelengde 2:

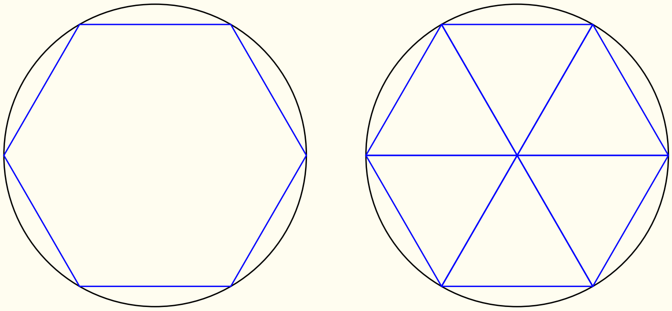


Omkretsen til sirkelen må vere mindre enn omkretsen til kvadratet, derfor vet vi at

$$\begin{aligned} O_1 &< 2 \cdot 4 \\ &< 8 \end{aligned}$$

Videre innskriver vi en sekskant. Sekskanten kan deles inn i 6 likesidede trekanter som alle må ha sidelengde 1. Omkretsen til sirkelen må være større enn omkretsen til sekskanten, noe som gir at

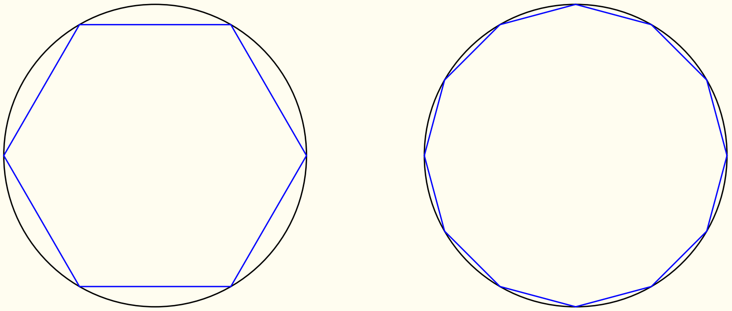
$$\begin{aligned} O_1 &> 6 \cdot 1 \\ &> 6 \end{aligned}$$



Når vi nå skal gå over til en mye mer nøyaktig jakt etter omkretsen, vet vi altså at vi søker en verdi mellom 6 og 8.

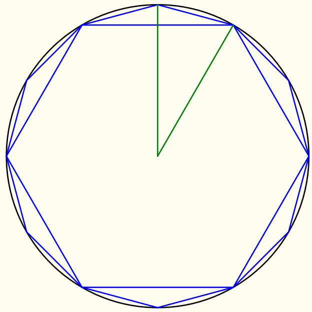
Stadig bedre tilnærminger

Vi fortsetter med tanken om å innskrive en mangekant.
Av figurene under lar vi oss overbevise om at dess flere sider mangekanten har, dess bedre estimat vil omkretsen til mangekanten være for omkretsen til sirkelen.

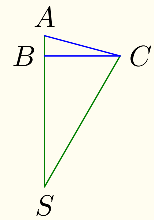


(a) 6-kant *(b)* 12-kant

Da vi vet at sidelengden til en 6-kant er 1, er det fristende å undersøke om vi kan bruke denne kunnskapen til å finne sidelengden til andre mangekanter. Om vi innskriver også en 12-kant i sirkelen vår (og i tillegg tegner en trekant) får vi en figur som denne:



(a) En 6-kant og en 12-kant i lag med en trekant dannet av sentrum i sirkelen og en av sidene i 12-kanten.



(b) Trekanten fra figur *(a)*.

La oss kalle sidelengden til 12-kanten for s_{12} og sidelengden til 6-kanten for s_6. Videre legger vi merke til at punktene A og C ligger på sirkelbuen og at både $\triangle ABC$ og $\triangle BSC$ er rettvinklede trekanter (forklar for deg selv hvorfor!). Vi har at

$$
\begin{aligned}
SC &= 1 \\
BC &= \frac{s_6}{2} \\
SB &= \sqrt{SC^2 - BC^2} \\
BA &= 1 - SB \\
AC &= s_{12} \\
s_{12}^2 &= BA^2 + BC^2
\end{aligned}
$$

For å finne s_{12} må vi finne BA, og for å finne BA må vi finne SB. Vi starter derfor med å finne SB. Da $SC = 1$ og $BC = \frac{s_6}{2}$, er

$$
\begin{aligned}
SB &= \sqrt{1 - \left(\frac{s_6}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}}
\end{aligned}
$$

Vi går så videre til å finne s_{12}:

$$
\begin{aligned}
s_{12}^2 &= (1 - SB)^2 + \left(\frac{s_6}{2}\right)^2 \\
&= 1^2 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4}
\end{aligned}
$$

Ved første øyekast ser det ut som vi ikke kan komme særlig lengre i å forenkle uttrykket på høyre side, men en liten operasjon vil endre på dette. Hadde vi hatt -1 som et ledd, kunne vi slått sammen -1 og $\frac{s_6^2}{4}$ til å bli $-SB^2$. Derfor "skaffer" vi oss -1 ved å både addere og subtrahere 1 på høgresiden:

$$\begin{aligned}
s_{12}^2 &= 1 - 2SB + SB^2 + \frac{s_6^2}{4} - 1 + 1 \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - \left(1 - \frac{s_6^2}{4}\right) \\
&= 2 - 2SB + SB^2 - SB^2 \\
&= 2 - 2SB \\
&= 2 - 2\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4}\sqrt{1 - \frac{s_6^2}{4}} \\
&= 2 - \sqrt{4 - s_6^2}
\end{aligned}$$

Altså er

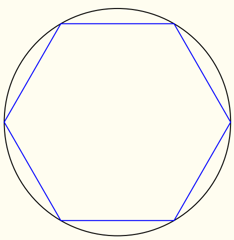
$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$$

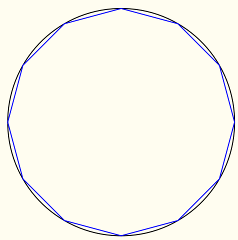
Selv om vi her har utledet relasjonen mellom sidelengdene s_{12} og s_6, er dette en relasjon vi kunne vist for alle par av sidelengder der den ene er sidelengden til en mangekant med dobbelt så mange sider som den andre. La s_n være sidelengden til en mangekant med n sider. Da er

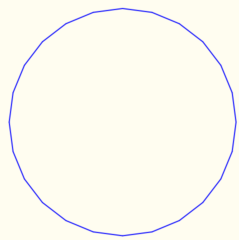
$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}} \tag{11.2}$$

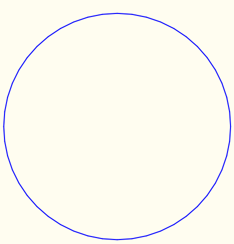
Når vi kjenner sidelengden til en innskrevet mangekant, vil tilnærmingen til omkretsen til sirkelen være denne sidelengden ganget med antall sidelengder i mangekanten. Ved hjelp av (11.2) kan vi stadig finne sidelengden til en mangekant med dobbelt så mange sider som den forrige, og i tabellen under har vi funnet sidelengden og tilnærmingen for omkretsen til sirkelen opp til en 96-kant:

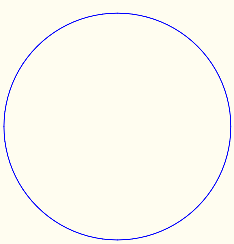
Formel for sidelengde	*Sidelengde*	*Tilnærming for omkrets*
	$s_6 = 1$	$6 \cdot s_6 \ = 6$
$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_6^2}}$	$s_{12} = 0.517...$	$12 \cdot s_{12} = 6.211...$
$s_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{12}^2}}$	$s_{24} = 0.261...$	$24 \cdot s_{24} = 6.265...$
$s_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{24}^2}}$	$s_{48} = 0.130...$	$48 \cdot s_{48} = 6.278...$
$s_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{48}^2}}$	$s_{96} = 0.065...$	$96 \cdot s_{96} = 6.282...$


(a) 6-kant


(b) 12-kant


(c) 24-kant


(d) 48-kant


(e) 96-kant

Utregningene over er faktisk like langt som matematikeren Arkimedes kom allerede ca 250 f. kr!

Med en datamaskin er det lett å regne ut[1] dette for en mangekant med ekstremt mange sider. Regner vi oss fram til en 201 326 592-kant finner vi at

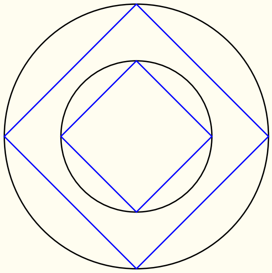
$$\text{omkretsen til sirkel med radius } 1 = 6.283185307179586...$$

(Ved hjelp av mer avansert matematikk kan det vises at omkretsen til en sirkel med radius 1 er et irrasjonalt tal, men at alle desimalene vist over er korrekte, derav likhetstegnet.)

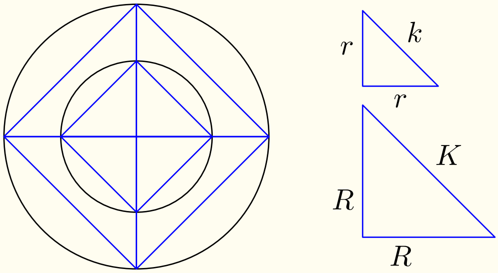
Den endelige formelen og π

Vi skal nå komme fram til den kjente formelen for omkretsen til en sirkel. Også her skal vi ta for gitt at summen av sidelengdene til en innskrevet mangekant er en tilnærming til omkrinsen som blir bedre og bedre dess flere sidelengder det er.

For enkelhets skyld skal vi bruke innskrevne firkanter for å få fram poenget vårt. Vi tegner to sirkler som er vilkårlig store, men der den ene er større enn den andre, og innskriver en firkant (et kvadrat) i begge. Vi lar R og r være radiene til henholdsvis den største og den minste sirkelen, og K og k vere sidelengdene til henholdsvis den største og den minste firkanten.



Begge firkantene kan deles inn i fire likebeinte trekanter:



Da trekantene er formlike, har vi at

$$\frac{K}{R} = \frac{k}{r} \tag{11.3}$$

Vi lar $\tilde{O} = 4K$ og $\tilde{o} = 4k$ være tilnærmingen av omkretsen til henholdsvis den største og den minste sirkelen. Ved å gange med 4 på begge sider av (11.3) får vi at

$$\frac{4A}{R} = \frac{4a}{r} \tag{11.4}$$

$$\frac{\tilde{O}}{R} = \frac{\tilde{o}}{r} \tag{11.5}$$

Og nå merker vi oss dette:

Selv om vi i hver av de to sirklene innskriver en mangekant med 4, 100 eller hvor mange sider det skulle vere, vil mangekantene alltid kunne deles inn i trekanter som oppfyller (11.3)*. Og på samme måte som vi har gjort i eksempelet over kan vi omskrive* (11.3) *til* (11.5) *i stedet.*

La oss derfor tenke oss mangekanter med så mange sider at vi godtar omkretsene deres som lik omkretsene til sirklene. Om vi da skriver omkretsen til den største og den minste sirkelen henholdsvis som O og o, får vi at

$$\frac{O}{R} = \frac{o}{r}$$

Da de to sirklene våre er helt vilkårlig valgt, har vi nå kommet fram til at *alle sirkler har det samme forholdet mellom omkretsen og radien*. En enda vanligere formulering er at *alle sirkler har det samme forholdet mellom omkretsen og diameteren*. Vi lar D og d være diameteren til henholdsvis sirkelen med radius R og r. Da har vi at

$$\frac{O}{2R} = \frac{o}{2r}$$

$$\frac{O}{D} = \frac{o}{d}$$

Forholdstalet mellom omkretsen og diameteren i en sirkel blir kalt π (uttales "pi"):

$$\frac{O}{D} = \pi$$

Likningen over fører oss til formelen for omkretsen til en sirkel:

$$\begin{aligned} O &= \pi D \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

Tidligere fant vi at omkretsen til en sirkel med radius 1 (og diameter 2) er 6.283185307179586... . Dette betyr at

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{6.283185307179586...}{2} \\ &= 3.141592653589793... \end{aligned}$$

[1]For den datainteresserte skal det sies at iterasjonsalgoritmen må skrives om for å unngå instabiliteter i utregningene når antall sider blir mange.

11.10 Pytagoras' setning (omvendt versjon) (forklaring)

Samme hva verdien til a og b måtte være, kan man åpenbart alltid lage en rettvinklet trekant med kateter a og b. Av Pytagoras' setning er hypotenusen da $\sqrt{a^2+b^2}$. Av vilkår (ii) i regel 11.13 er dette en unik trekant, og det betyr at alle trekanter med sidelengder a, b og $\sqrt{a^2+b^2}$ er rettvinklet.

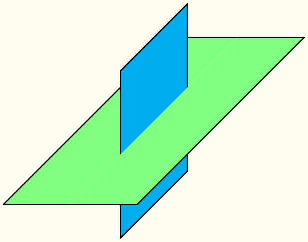
11.11 Volumet til tredimensjonale former (forklaring)

Se boka *Elementary geometry from an advanced standpoint* av E. E. Moise.

11.12 Volumet til en kule (forklaring)

Førkunnskapar

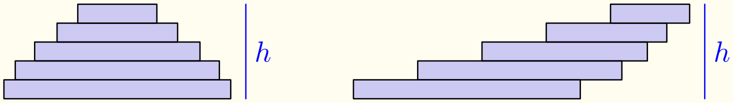
For å finne formelen for volumet til en kule, introduserer vi tre begrep: **vertikalt tverrsnitt**, **horisontalt tverrsnitt** og **Cavalieris prinsipp**. Et tverrsnitt er en tenkt overflate som kommer til syne når man skjærer i en tredimensjonal form. Et vertikalt/horisontalt tverrsnitt er en tenkt overflate som kommer til syne hvis vi skjærer en tredimensjonal form enten rett vertikalt eller rett horisontalt.



Cavalieris prinsipp lyder slik:

Hvis tverrsnittsarealene til to tredimensjonale former er de samme langs den samme høgda, har formene samme volum.

Dette prinsippet er illustrert i figuren under, som viser et vertikalt tverrsnitt av to former bygd av fem prismer. Prismene i de to formene er parvis like.

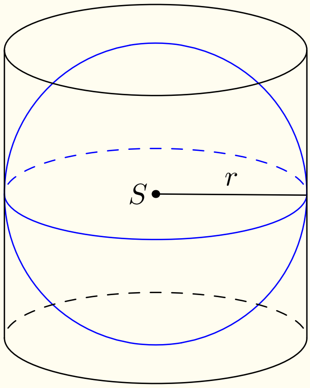


(a) *(b)*

Det er opplagt at hvis man startar med formen vist i *(a)*, så vil ikke volumet endre seg om man forskyver prismene mot høgre, slik som i *(b)*.

Volumet til en kule

Vi starter med å se for oss en kule eksakt omsluttet av en sylinder. La radiusen til kula og sylinderen vere r, da er høgda til sylinderen $2r$.



Figur 11.1

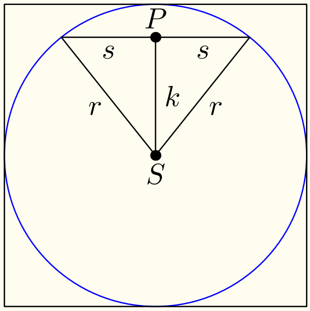
Vi innfører følgende størrelser:

$$\begin{aligned} V_s &= \text{volumet til sylinderen} \\ V_k &= \text{volumet til kula} \\ V_i &= \text{volumet til formen inneklemt mellom sylinderen og kula} \end{aligned}$$

Da har vi at

$$V_k = V_s - V - i \tag{11.6}$$

Tenk nå at vi skjærer formen fra figur 11.1 fra toppen og rett ned gjennom sentrum av kula. Da får vi et vertikalt tverrsnitt. Ser vi på dette tverrsnittet rett horisontalt, vil sylinderen se ut som en firkant, og kula som en sirkel.

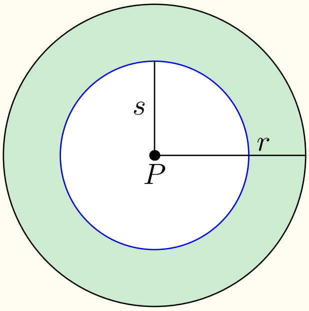


Figur 11.2

På dette tverrsnittet vandrer vi en lengde k rett opp fra sentrum til et punkt P. Den halve bredden til kula i dette punktet kaller vi s. Av Pytagoras' setning har vi at

$$s^2 = r^2 - k^2 \tag{11.7}$$

Videre forestiller vi oss at vi igjen skjærer formen i figur 11.1, men denne gangen rett fra siden og gjennom punktet P. Da får vi et horisontalt tverrsnitt. Studerer vi dette tverrsnittet rett ovenfra, får vi en figur som dette:



Figur 11.3: Horisontalt tverrsnitt. Den svarte sirkelen er buen til sylinderen og den blå er buen til kula.

Vi definerer følgende:

$$\begin{aligned}
A_s &= \text{arealet til tverrsnittsoverflaten til sylinderen} \\
A_k &= \text{arealet til tverrsnittsoverflaten til kula} \\
A_i &= \text{arealet til tverrsnittsoverflaten mellom} \\
&\quad \text{sylinderen og kula (grønn i figuren over)}
\end{aligned}$$

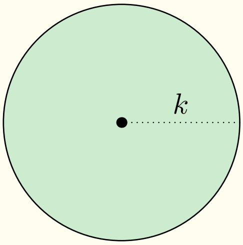
Da er

$$A_i = A_s - A_k \tag{11.8}$$

Av regel 11.6 har vi at $A_s = \pi r^2$ og $A_k = \pi s^2$. Av (11.7) og (11.8) er

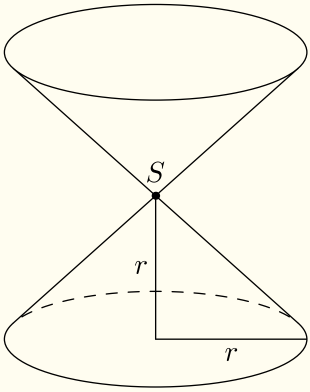
$$\begin{aligned}
A_i &= \pi r^2 - \pi s^2 \\
&= \pi r^2 - \pi(r^2 - k^2) \\
&= \pi r^2 - \pi r^2 + \pi k^2 \\
&= \pi k^2
\end{aligned}$$

A_i tilsvarer altså arealet til en sirkel med radius k.



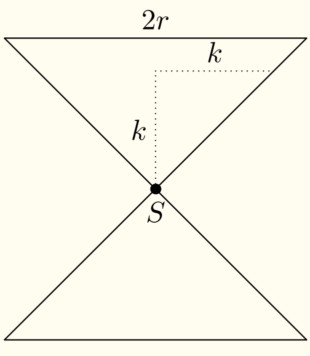
Figur 11.4: Overflate med same areal som den grøne overflata i figur 11.3.

Vi tenker oss nå to kjegler, begge med høyde og radius lik r, satt med spissene mot hverandre. Denne formen vil være like høg som formen fra figur 11.1, og kan plasseres slik at punktet hvor spissene møtes sammenfaller med S.



Figur 11.5

Det vertikale tverrsnittet gjennom S av denne formen ser slik ut:



Figur 11.6

Om vi vandret k rett opp eller ned fra S, så er den horisontale avstanden ut til siden også k (dette er overlatt til leseren å vise). Dette betyr at det horisontale tverrsnittsarealet til kjeglene er $\pi k^2 = A_i$. Altså har den inneklemte formen fra figur 11.1 og formen fra figur 11.6 samme tverrsnittsareal langs den samme høgden (begge har høgde $2r$). Av Cavalieris prinsipp og regel 11.11 har vi da at

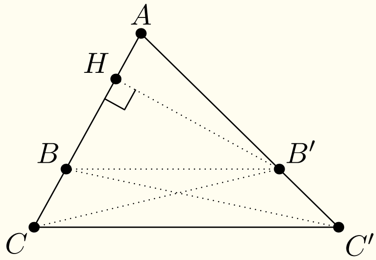
$$\begin{aligned} V_i &= \frac{2(\pi r^2 \cdot r)}{3} \\ &= \frac{2\pi r^3}{3} \end{aligned} \tag{11.9}$$

Av (11.6), (11.9) og regel 11.11 har vi nå at

$$\begin{aligned} V_k &= 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^2}{3} \\ &= \frac{6\pi r^3}{3} - \frac{2\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

11.16 Forhold i formlike trekanter (forklaring)

I figuren under er $BB'||CC'$. Arealet til en trekant $\triangle ABC$ skriver vi her som ABC.



Med BB' som grunnlinje har både $\triangle CBB'$ og $\triangle CBB'$ HB' som høyde, derfor er

$$CBB' = C'BB' \tag{11.10}$$

Videre har vi at

$$ABB' = AB \cdot HB'$$

$$CBB' = BC \cdot HB'$$

Altså er

$$\frac{ABB'}{CBB'} = \frac{AB}{BC} \tag{11.11}$$

På lignende vis er

$$\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{11.12}$$

Av (11.10), (11.11) og (11.12) følger det at

$$\frac{AB}{BC} = \frac{ABB'}{CBB'}\frac{ABB'}{C'BB'} = \frac{AB'}{B'C'} \tag{11.13}$$

For de formlike trekantene $\triangle ACC'$ og $\triangle ABB'$ er

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB + BC}{AB} = 1 + \frac{BC}{AB}$$

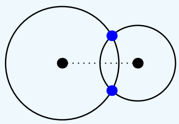
$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{AB' + B'C'}{AB'} = 1 + \frac{B'C'}{AB'}$$

Av (11.13) er dermed forholdet mellom de samsvarande sidene like.

Merk

I de kommnde forklaringene av vilkårene *ii* og *iii* fra regel 11.13 tar man utgangspunkt i følgende:

- To sirkler skjærer kvarandre i maksimalt to punkt.
- Gitt at et koordinatsystem blir plassert med origo i senteret til den ene sirkelen, og slik at horisontalaksen går gjennom begge sirkelsentrene. Hvis (a, b) er det éne skjæringspunktet, er $(a, -b)$ det andre skjæringspunktet.

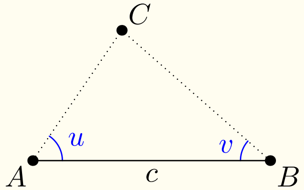


Punktene over kan enkelt vises, men er såpass intuitivt sanne at vi tar dem for gitt. Punktene forteller oss at trekanten som består av de to sentrene og det éne skjæringspunktet er kongruent med trekanten som består av de to sentrene og det andre skjæringspunktet. Med dette kan vi studere egenskaper til trekanter ved hjelp av halvsirkler.

11.13 Konstruksjon av trekanter (forklaring)

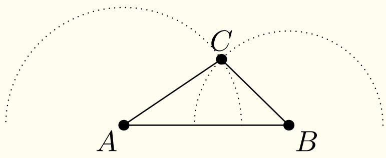
Vilkår (i)

Gitt en lengde c og to vinkler u og v. Vi lager et linjestykke AB med lengde c. Så stipler vi to vinkelbein slik at $\angle A = u$ og $B = v$. Så lenge disse vinkelbeina ikke er parallelle, må de nødvendigvis skjære hverandre i ett, og bare ett, punkt (C i figuren). I lag med A og B vil dette punktet danne en trekant som er unikt gitt av c, u og v.



Vilkår (ii)

Gitt tre lengder a, b og c. Vi lager et linjestykket AB med lengde c. Så lager vi to halvsirkler med henholdsvis radius a og b og sentrum B og A. Skal nå en trekant $\triangle ABC$ ha sidelengder a, b og c, må C ligge på begge sirkelbuene. Da buene bare kan møtes i ett punkt, er formen og størrelsen til $\triangle ABC$ unikt gitt av a, b og c.

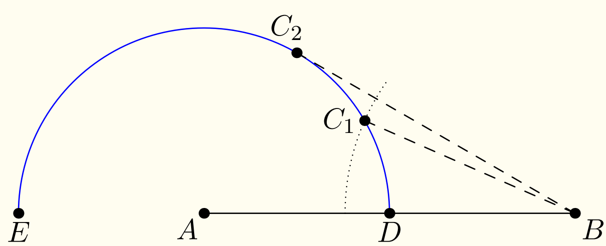


Vilkår (iii)

Gitt to lengder b og c og en vinkel u. Vi starter med følgende:

1. Vi lager et linjestykke AB med lengde c.
2. I A tegner vi en halvsirkel med radius b.

Ved å la C vere plassert hvor som helst på denne sirkelbuen, har vi alle mulige varianter av en trekant $\triangle ABC$ med sidelengdene $AB = c$ og $AC = b$. Å plassere C langs buen til halvsirkelen er det samme som å gi $\angle A$ en bestemt verdi. Det gjenstår nå å vise at hver plassering av C gir en unik lengde av BC.



Vi lar C_1 og C_2 være to potensielle plasseringer av C, der C_2, langs halvsirkelen, ligger nærmere E enn C_1. Videre stipler vi en sirkelbue med radius BC_1 og sentrum B. Da den stiplede sirkelbuen og halvsirkelen bare kan skjære hverandre i C_1, vil alle andre punkt på halvsirkelen ligge enten innenfor eller utenfor den stiplede sirkelbuen. Slik vi har definert C_2, må dette punktet ligge utenfor den stiplede sirkelbuen, og dermed er BC_2 lengre enn BC_1. Av dette kan vi konkludere med at BC blir lengre dess nærmere C beveger seg mot E langs halvsirkelen. Å sette $\angle A = u$ vil altså gi en unik verdi for BC, og da en unik trekant $\triangle ABC$ der $AC = b$, $c = AB$ og $\angle BAC = u$.

11.17 Vilkår for formlike trekanter (forklaring)

Vilkår (i)

Gitt to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$. Av regel 7.3 har vi at

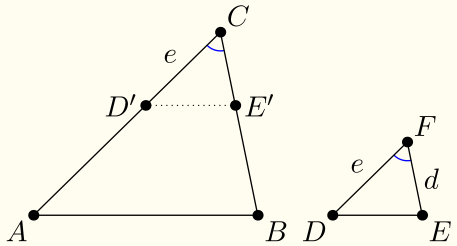
$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

Hvis $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, følger det at $\angle C = \angle E$.

Vilkår (ii)

Vi tar utgangspunkt i trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \quad , \quad \angle C = \angle F \tag{11.14}$$



Vi setter $a = BC$, $b = AC$, $d = EF$ og $e = DF$. Vi plasserer D' og E' på henholdsvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $AB \parallel D'E'$. Da er $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$, altså har vi at

$$\frac{E'C}{BC} = \frac{D'C}{AC}$$

$$E'C = \frac{ae}{b}$$

Av (11.14) har vi at

$$EF = \frac{ae}{b}$$

Altså er $E'C = EF$. Nå har vi av vilkår (ii) fra regel 11.14 at $\triangle D'E'C \cong \triangle DEF$. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Vilkår iii

Vi tar utgangspunkt i to trekanter $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ der

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} \tag{11.15}$$

Vi plasserer D' og E' på henholdsvis AC og BC, slik at $D'C = e$ og $E'C = d$. Av vilkår (i) fra regel 11.17 har vi da at $\triangle ABC \sim \triangle D'E'C$. Altså er

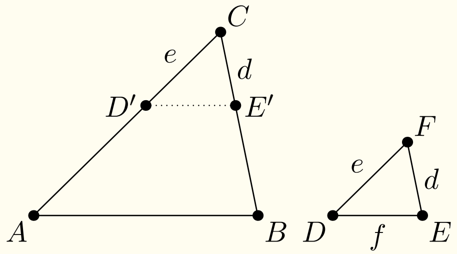
$$\frac{D'E'}{AB} = \frac{D'C}{AC}$$

$$D'E' = \frac{ae}{c}$$

Av (11.15) har vi at

$$f = \frac{ae}{c}$$

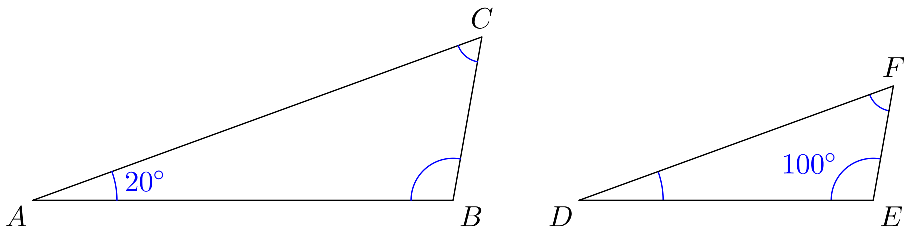
Altså har $\triangle D'E'C$ og $\triangle DEF$ parvis like sidelengder, og av vilkår (i) fra regel 11.14 er de da kongruente. Dette betyr at $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.



Oppgaver for kapittel 11

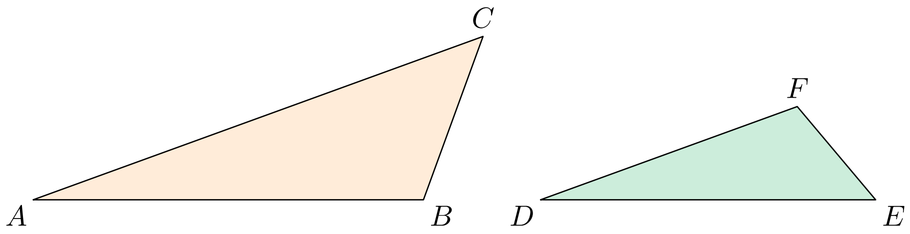
11.1.1

Trekantene er formlike. Bestem verdien til $\angle ACB$.



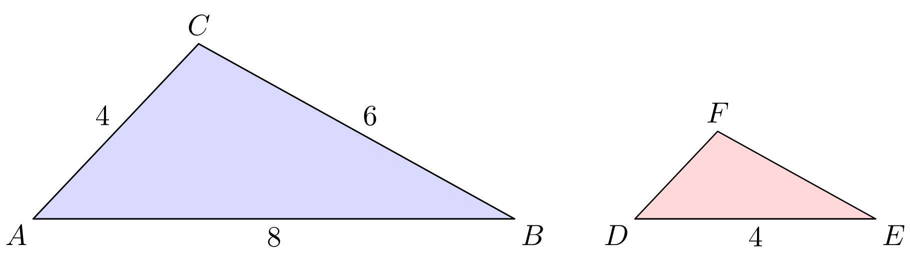
11.1.2

Trekantene er formlike. Finn de tre parene med samsvarende sider.



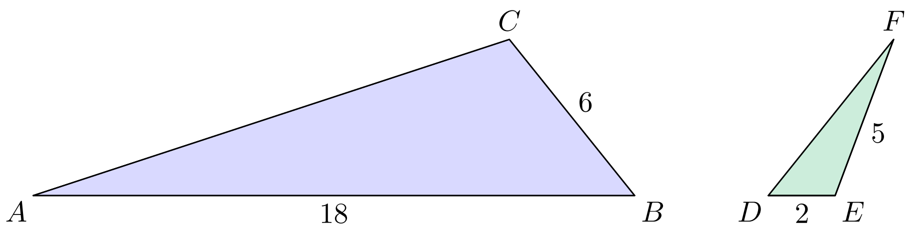
11.1.3

Trekantene er formlike. Finn lengden til EF og lengden til DF.



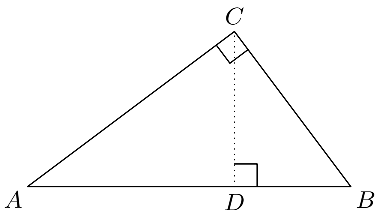
11.1.4

Trekantene er formlike. Finn lengden til AC og lengden til DF.



11.1.5

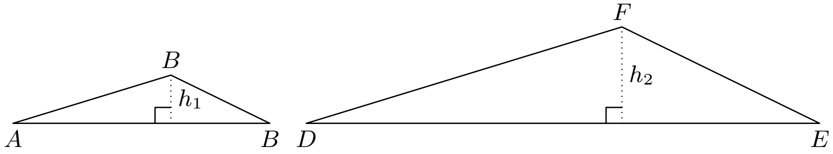
Finn alle formlike trekanter definert av A, B, C og D.



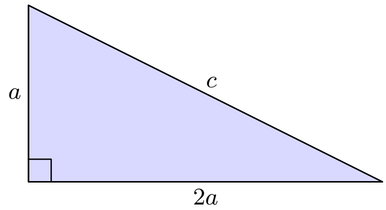
11.1.6

$\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike. Hva er forholdet mellom arealet til $\triangle DEF$ og arealet til $\triangle ABC$ hvis $h_1 = 2$ og $h_2 = 6$?

(Se også **Gruble 20**)



11.1.7
Finn lengden til c uttrykt ved a.



11.1.8
En kjegle har radius 10 og høgde 4.

a) Finn grunnflaten til kjeglen.

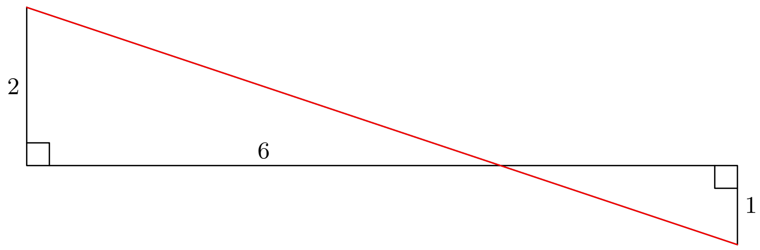
b) Finn volumet til kjeglen.

11.1.9
a) En kule har radius 2 og en annen kule har radius 6. Hva er forholdet mellom volumet til den største kula og volumet til den minste kula?

b) En kule har radius r og en annen kule har radius ar, hvor $a > 1$. Hva er forholdet mellom volumet til den største kula og volumet til den minste kula?

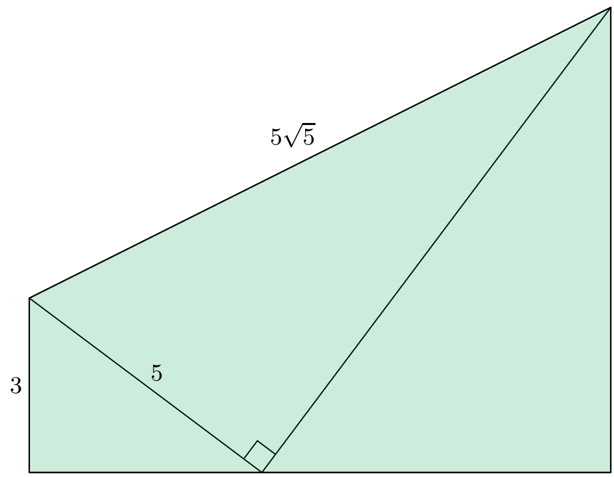
Gruble 18

Finn lengden til den røde linja.



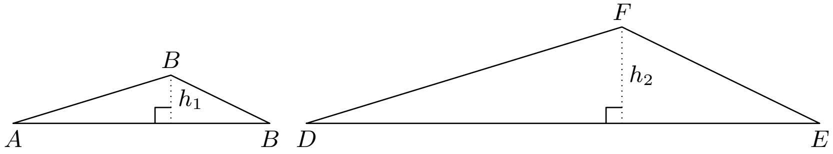
Gruble 19

Finn arealet til det grønne området.



Gruble 20

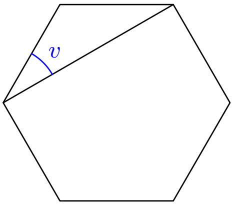
$\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er formlike. Gitt et tall a, og at $h_2 = ah_1$. Finn $\frac{A_{\triangle DEF}}{A_{\triangle ABC}}$ uttrykt ved a.



Gruble 21

(GV21D1)

Figuren under viser en regulær[1] sekskant. Bestem hvor mange grader v er.

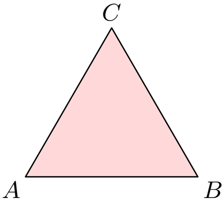


Gruble 22

Gitt en likebeint trekant $\triangle ABC$ hvor $AC = BC$. Vis at halveringslinja[2] til $\angle ACB$ er midtnormalen til AB.

Gruble 23

$\triangle ABC$ er likesidet og har sidelengde s.



a) Vis at i en trekant med vinklene $30°$, $60°$, $90°$, så er hypotenusen dobbelt så lang som den korteste kateten.

b) Vis at høgda i $\triangle ABC$ er $\frac{\sqrt{3}}{2}s$.

[1] I regulære mangekanter har alle sidene lik lengde.

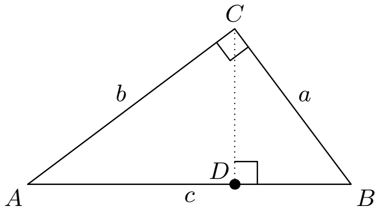
[2] Definisjonen av halveringslinja til en vinkel og midtnormalen til ei linje finner du i TM1.

Gruble 24

a) Finn AD uttrykt ved a, b og c.

b) Finn DB uttrykt ved a, b og c.

c) Bruk uttrykkene du fant til å bevise Pytagoras' setning.



Gruble 25

Gitt en mangekant med n sider. Finn en formel for vinkelsummen til mangekanten uttrykt ved n.

Gruble 26

En rettvinklet trekant har omkrets 40. Den ene siden i trekanten har lengde 8. Finn de to andre sidelengdene til trekanten.

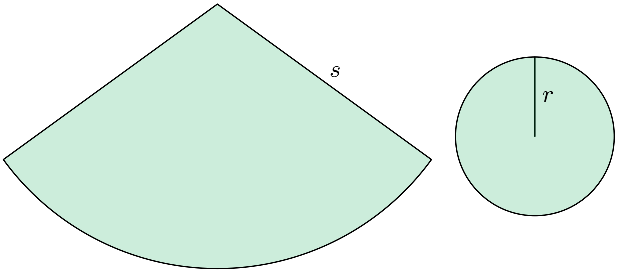
Gruble 27

Overflaten til en (vilkårlig) kjegle består av en sektor med radius s og en sirkel med radius r.

a) Skriv s som et uttrykk av r og høyden h til kjeglen.

b) Vis at overflatearealet A_O til kjeglen er gitt ved formelen

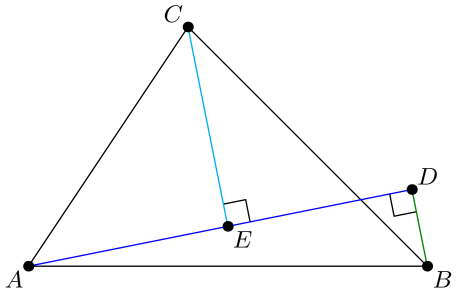
$$A_O = \pi r(r + s)$$



Gruble 28

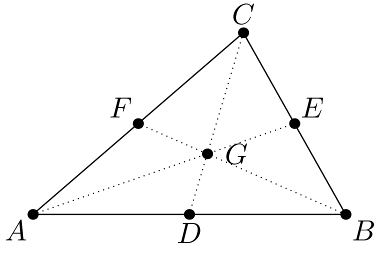
Vis at det doble arealet til $\triangle ABC$ er gitt som

$$AE \cdot BD + CE \cdot AD$$



Gruble 29

En **median** i en trekant er et linjestykke som går fra et hjørne til midten av den motstående siden.



Gitt en vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med medianer AE, BF og CD.

a) Vis at AE, BF og CD skjærer hverandre i samme punkt (G på figuren).

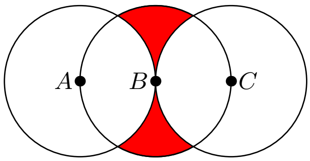
b) Vis at

$$\frac{GC}{DG} = \frac{GB}{FG} = \frac{GA}{EG} = 2$$

Merk: Oppgave b) er nok lettere enn oppgave a).

Gruble 30

De tre sirklene har radius 2, og A, B og C ligger på linje. Finn arealet til det røde området.

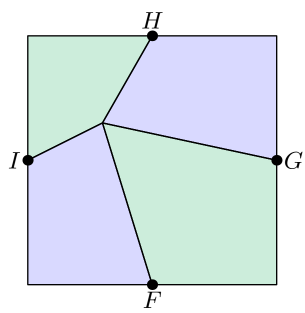


Hint: Her kan du nok få bruk for at arealet til en sektor med vinkel v utgjør $\frac{a}{360^\circ}$ av arealet til sirkelen med samme radius.

Gruble 31

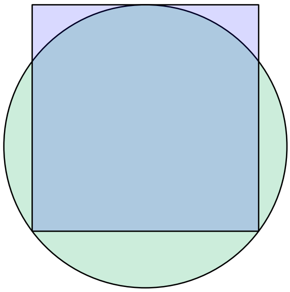
De fargede områdene utgjør et kvadrat, og F, G, H og I er de respektive midpunktene på sidene til dette kvadratet.

Vi at arealet til det blåfargede området er det samme som arealet til det grønnfargede området.



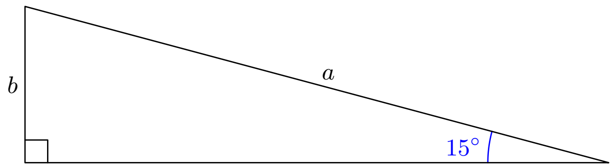
Gruble 32

Kvadratet har sidelengde 4. Finn radien til sirkelen.



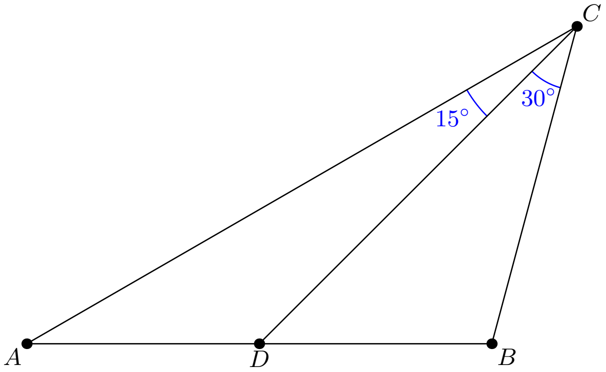
Gruble 33

a) Vis at $\frac{a}{b} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.



Merk: For å løse denne oppgaven er det mulig (men ikke nødvendigvis) du vil få bruk for *abc*-formelen, som du finner i TM1.

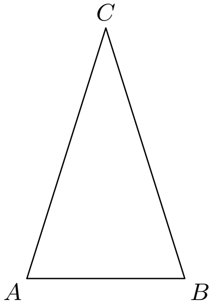
b) $AD = BC$. Bestem verdien til $\angle A$.



Gruble 34

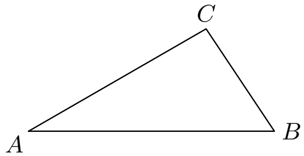
Merk: Denne oppgaven tar for seg resultater som intuitivt virker helt opplagte, men som kan være krevende å bevise.

a) Vis at hvis $AC = BC$, er $\angle A = \angle B$.



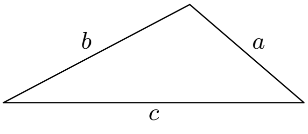
Merk: Vi har tidligere erklært at en likebeint trekant har to vinkler som er like store, men strengt tatt kan vi ikke bare gå ut ifra at det er slik.

b) Vis at hvis $AC > BC$, er $\angle B > \angle C$.



c) Gitt $\triangle ABC$, hvor AB er den lengste siden. Vis at når AB er grunnlinje, ligger høgden inni trekanten.

d) I figuren under er c den lengste siden i trekanten.



Bevis at

$$c > a + b \qquad , \qquad b + c > a \qquad , \qquad a + c > b$$

Merk: Disse tre ulikhetene samlet kalles gjerne **trekantulikheten**.

Kommentar (for den spesielt interesserte)

Også i geometri har vi aksiom (se kommentar på side 184) som legger grunnlaget for det matematiske systemet vi skaper, men den aksiomatiske oppbyggingen av geometri er mye mer omstendelig og uoversiktlig enn den vi har innenfor regning. I tillegg er noen teorem i geometri så intuitivt sanne, at det i ei bok som dette ville blitt mer forvirrende enn oppklarende å skulle forklart alt i detalj.

Det som likevel bør nevnes, er at vi i regel 11.13 opplyser om tre vilkår for å unikt konstruere en trekant, og i regel 11.14 gir et vilkår for kongruens. I mer avanserte geometritekster vil man helst finne igjen innholdet i disse to reglene som aksiom og teorem for kongruens:

Kongruens

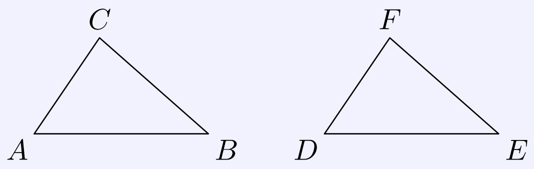
To trekanterr $\triangle ABC$ og $\triangle DEF$ er kongruente hvis ett av følgende vilkår er oppfylt:

i) $AB = DE$, $BC = EF$ og $\angle A = \angle D$.

ii) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ og $AB = DE$.

iii) $AB = DE$, $BC = EF$ og $AC = FD$.

iv) $\angle A = \angle D$ og $\angle B = \angle E$, i tillegg er $AB = DE$ eller $BC = EF$ eller $AC = FD$.



---

i) Side-vinkel-side (SAS) aksiomet
ii) Vinkel-side-vinkel (ASA) teoremet
iii) Side-side-side (SSS) teoremet
iv) Side-vinkel-vinkel (SAA) teoremet

Språkboksen

Forkortelsene SAS, ASA, SSS og SAA kommer av de engelske navnene for henholdsvis side og vinkel; *side* og *angle*.

I tekstboksen på forrige side gir også vilkår (i) - (iii) tilstrekkeleg informasjon om når en trekant kan bli unikt konstruert, men i denne boka har vi valgt å skille unik konstruksjon og kongruens fra hverandre. Dette er gjort i den tru om at de fleste vil ha en intuitiv tanke om hvilke trekantar som er kongruente eller ikke, men ha større problem med å svare på hva som må til for å unikt konstruere en trekant − og det er ikke nødvendigvis så lett å se dette direkte ut ifra kongruensvilkårene.

Legg også merke til at vilkår (iv) bare er en mer generell form av vilkår (ii), men altså ikke kan brukes som et vilkår for unik konstruksjon. Dette vilkåret finner man derfor ikke igjen i hverken regel 11.13 eller regel 11.14.

Fasit

Kapittel1

1.1.1 a) 22 b) 13 c) 36

1.1.2 a) 17 b) 29 c) 11

1.1.3 a) 1,7 b) 2,3

1.1.4 a) 13,9 b) 32,8 c) 0,7 d) 2,4

1.1.5 a)

1.1.6 c)

1.1.7 b)

1.1.8 a)

1.1.7 c)

Kapittel2

2.1.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $4 = 1 + 3$ b) $5 = 2 + 3$ c) $6 = 2 + 4$
d) $7 = 1 + 6$ e) $8 = 3 + 5$ f) $9 = 2 + 7$

2.1.2 a) $5 = 2{+}2{+}1$ b) $6 = 1{+}3{+}2$ c) $7 = 3{+}2{+}2$ d) $8 = 1{+}1{+}6$
e) $9 = 3 + 3 + 3$ f) $2 + 5 + 3$

2.1.3

1) a) 8 b) 7 c) 6 d) 5
2) Fordi de er svarene i oppgave 1a), 1b) og 1c).

2.1.4 a) 1) b) 1) c) 2)

2.2.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $2 = 7 - 5$ b) $3 = 10 - 7$ c) $4 = 5 - 1$
d) $5 = 10 - 5$ e) $6 = 9 - 3$ f) $7 = 9 - 2$ g) $8 = 10 - 2$

2.2.2 a) 1) b) 1) c) 2)

2.3.1

a) $2 + 2 + 2 = 2 \cdot 4 = 4 + 4$
b) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 6 = 6 + 6 + 6$
c) $4 + 4 = \cdot 4 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + 2$
d) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 5 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$
e) $6 + 6 + 6 + 6 = 6 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$
f) $7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

2.3.2 a) 20 b) 24 c) 18 d) 30 e) 56

2.3.3 a) partall b) partall, 0 c) oddetall, 5

Kapittel3

3.2.1 *Merk:* Flere mulige svar. a) $5 \cdot 20$ b) $3 \cdot 10$ c) $2 \cdot 20$ d) $2 \cdot 35$ e) $7 \cdot 6$ f) $8 \cdot 4$ g) $42 \cdot 2$ h) $3 \cdot 30$

3.2.2 a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ b) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ c) $2 \cdot 5$

3.2.4 28

Gruble 1

Gruble 2 Se løsnigsforslag.

3.1.1 a) 34 b) 177 c) 100 d) 664 e) 2943

Kapittel4

4.1.1 a) 6 b) 5 c) 2 d) 7 e) 9 f) 4

4.1.2 a) 0,5 b) 0,25 c) 0,2 d) 0,75 e) 0,4 f) 0,6 g) 0,8 h) 1,5 i) 0,33... j) 2,5 k) 0,833... l) 1,4 m) 2,75 n) 0,7

4.1.3 a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{2}{5}$

4.1.4 a) $\frac{14}{3}$ b) $\frac{13}{2}$ c) $\frac{11}{5}$

4.2.1 a) $\frac{20}{6}$ b) $\frac{9}{12}$ c) $\frac{12}{28}$ d) $\frac{45}{40}$ e) $\frac{54}{30}$ f) $\frac{77}{28}$

4.2.2 a) $\frac{9}{4}$ b) $\frac{9}{5}$ c) $\frac{2}{7}$

4.3.1 a) $\frac{10}{3}$ b) $\frac{14}{4}$ c) $\frac{11}{6}$ d) $\frac{10}{7}$ e) 1

Merk: Éin av brøkane kan forkortast.

4.3.2 a) $\frac{22}{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{17}{7}$

4.3.3 a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{9}{6}$ d) 1 e) 0

Merk: To av brøkane kan forkortast.

4.3.4 a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) 4

4.3.5 a) $\frac{9}{10}$ b) $\frac{73}{63}$ c) $\frac{101}{24}$ d) $\frac{73}{20}$ e) $\frac{5}{6}$

4.3.6 a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{29}{36}$ c) $\frac{71}{72}$ d) $\frac{11}{20}$ e) $\frac{5}{6}$

4.3.7 a) $\frac{5}{12}$ b) $\frac{157}{30}$ c) $\frac{229}{56}$

4.4.1 a) $\frac{20}{3}$ b) $\frac{40}{7}$ c) $\frac{54}{10}$ d) $\frac{80}{7}$ e) $\frac{21}{2}$ f) $\frac{28}{3}$ g) $\frac{35}{3}$ h) $\frac{30}{7}$ i) $\frac{5}{11}$ j) $\frac{72}{17}$

4.5.1 a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{5}{56}$ c) $\frac{9}{60}$ d) $\frac{8}{70}$ e) $\frac{3}{14}$ f) $\frac{9}{110}$ g) $\frac{1}{60}$ h) $\frac{9}{290}$ i) $\frac{8}{459}$ j) $\frac{4}{158}$

4.6.1 a) $\frac{20}{27}$ b) $\frac{7}{32}$ c) $\frac{18}{21}$ d) $\frac{60}{5}$ e) $\frac{21}{10}$ f) $\frac{10}{21}$ g) $\frac{16}{21}$ h) $\frac{80}{9}$ i) $\frac{36}{35}$ j) $\frac{35}{12}$

4.7.1 a) $\frac{15}{40}$ b) $\frac{153}{32}$ c) $\frac{46}{32}$ d) $\frac{21}{648}$ e) $\frac{203}{328}$

4.8.1 a) $\frac{4}{11}$ b) $\frac{35}{8}$ c) $\frac{1}{9}$ d) 4

4.8.2 a) $\frac{7}{4}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{7}{2}$

4.8.3 a) 49 b) 54 c) 70 d) 16 e) 30 f) 12 g) 25
h) 14 i) 7 j) 63

4.9.3 a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{24}{45}$ c) $\frac{30}{21}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{66}{15}$

4.9.4 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{15}{4}$ c) $\frac{14}{5}$

Gruble 3 a) 2 b) 4 c) 5 d) 2 e) 4 f) 5 g) 3, 4
h) 2, 5 i) 3, 5 j) 4, 5

Gruble 4 a) 2 b) 4 c) 5 d) 4, 3 e) 5, 2 f) 5, 3
g) 5, 4

Gruble 5 a) $\frac{403}{6732}$ b) $\frac{269}{3150}$

Kapittel5

5.1.1

a) 9 har retning mot høgre og lengde 9.

b) 4 har retning mot høgre og lengde 4

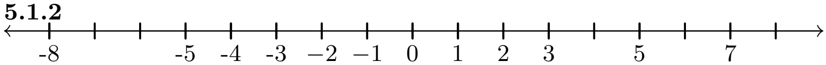
c) -3 har retning mot venstre og lengde 3

d) 12 har retning mot høgre og lengde 12

e) -11 har retning mot venstre og lengde 11

f) -25 har retning mot venstre og lengde 25

5.1.2



5.1.3 a) 9, 4 og 12. b) -3, -11 og -25.

5.2.1 a) 1 b) 8 c) 6 d) 0

e) 3 f) 1 g) 10 h) 5

5.2.2 a) -16 b) -8 c) -23 d) 0

e) -23 f) -17 g) -3 h) 0

5.2.3 a) 15 b) 17 c) 12 d) 14

e) -12 f) -19 g) -12 h) -13

5.2.4 a) 22 b) 22 c) -17 d) 14 e) 15 f) 13 g) -13
h) -12

5.2.5 a) -12 b) -50 c) -63 d) -24 e) -56 f) -27
g) -12 h) -40 i) 21 j) 25 k) 12 l) 72

5.2.6 a) -4 b) -6 c) -5 d) -4 e) -8 f) -9 g) -5
h) -5 i) 8 j) 9 k) 5

Kapittel7

7.1.1 a) 14 b) 20 c) 24

7.1.4 a) 2 b) 16 c) 27

7.1.5 a) 2 og 8 b) 3 og 4 c) 3 og 6

7.1.6 a) 81 b) 1) Et åpenbart eksempel er kvadratet fra oppgave a), som har bredde og høgde 9, og areal 81. 2) Bredde 15 og høgde 3, areal 45. 3) Bredde 12 og høgde 6, areal 72. *Merk:* Flere mulige svar.

7.1.7 a) 3 b) 10 c) 6 d) 6 e) 10 f) 6 g) 4 h) 3 i) 28

7.1.8 a) 90. *Merk*: Grunnflaten kan også være 72 eller 80, avhengig av hvilken side man velger ut som grunnflate.

7.2.1 Se løsnigsforslag.

7.2.2 Se løsnigsforslag.

Gruble 7 Se løsnigsforslag.

Gruble 8 Se løsnigsforslag.

Gruble 31 Se løsnigsforslag.

Kapittel8

8.1.1 a) $3a$ b) $4a$ c) $7a$ d) $-2b$ e) $-5b$ f) $-3k$

8.1.2 a) $a + b$ b) $a + 2b$ c) $9b - 3a$

8.1.3 a) $2b - 5a + c$ b) $3b - 9a$ c) $11b - 3a$

8.1.4 a) $7a+14$ b) $9b+27$ c) $8b-24c$ d) $-6a-10b$ e) $(9a+2)$ f) $(3b + 8)a$ g) $3ac - ab$ h) $2a + 6b + 8c$ i) $27b - 9c + 63a$ j) $2c - 6b - 14a$

8.1.5 Bruk regel 3.2 til å faktorisere uttrykket.

a) $2(a + b)$ b) $b(4a + 5)$ c) $c(9b - 1)$ d) $2a(2c - 1)$

8.1.6

8.1.8 a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ når $x = 4$ og 2 når $x = -2$.

8.1.9 Uttrykkene gitt av a) og c) stemmer.

8.2.1 a) 3^4 b) 5^2 c) 7^6 d) a^3 e) b^2 f) $(-c)^4$ *Merk*: $(-c)^4 = c^4$

8.2.2 a) 64 b) 32 c) 64 d) -8 e) -243 f) 256

8.2.3 a) 2^{16} b) 3^{11} c) 9^6 d) 6^5 e) 5^{-4} f) 10^{11} g) a^{16} h) k^7 i) x^3 j) x k) 1 l) $a^5 \cdot b^{-3}$

8.2.4 a) 5 b) 10 c) 12 d) 3 e) 9 f) 10

Gruble 11 $2^{-\frac{5}{4}}$

Kapittel9

9.2.1 a) $x = 10$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 2$ e) $x = 3$ f) $x = 4$ g) $x = 10$ h) $x = 8$ i) $x = 10$

9.2.2 a) $x = 37$ b) $x = 29$ c) $x = 23$ d) $x = 15$ e) $x = 8$ f) $x = 11$ g) $x = 23$ h) $x = 19$ i) $x = 10$ j) $x = 28$

9.2.3

a) $x = 4$ b) $x = 5$ c) $x = 9$ d) $x = 15$

9.2.4 a) $x = 8$ b) $x = 72$ c) $x = 49$ d) $x = 150$

9.2.5 a) $x = 7$ b) $x = 10$ c) $x = 6$ d) $x = 9$ e) $x = 9$ f) $x = 8$ g) $x = 5$ h) $x = 2$

9.2.6 Se løsnigsforslag.

9.2.7 $x = 18$

9.5.1 $x = 1, y = -2$

Gruble 13 Se løsnigsforslag.

Kapittel10

10.1.1 a) $f(x) = 2x + 4.$ b) 204 c) $x = 24.$

10.1.2 a) $a(x) = 5x^2.$ b) $x = 2000?$ c) $x = 9?$

10.1.3 a) $b(x) = x^2 + 2x$ b) 440? c) $x = 8?$

10.1.4 22 trekanter og 10 firkanter.

10.1.6 La x være et positivt heltall. a) $p(x) = 2n$ b) $o(x) = 2n - 1$

10.2.1
a) Stigningstall 5 og konstantledd 10. b) Stigningstall 3 og konstantledd -12. c) Stigningstall $-\frac{1}{7}$ og konstantledd -9. d) Stigningstall $\frac{3}{2}$ og konstantledd $-\frac{1}{4}$.

10.2.2 Se løsnigsforslag.

10.3.1 a) (I) og (II) gir hver for seg en ligning som beksriver en rett linje. Disse linjene kan også representeres ved f og g slik som de er definert. b) $x = 7$ og $y = 2$.

10.3.2 $f(x) = -8x + 16$

10.3.3 $f(x) = 4x + 3$

10.3.4 $f(x) = x - 3$ og $g(x) = \frac{1}{4}x + 1$

Gruble 14 Se løsnigsforslag.

Kapittel11

11.1.1 $80°$

11.1.2 AC og DE, BC og EF, AB og DF.

11.1.3 $EF = 3$ og $DF = 2$.

11.1.4 $AC = 15$ og $DF = 6$.

11.1.6 a) 9 b) a^2

11.1.8 a) 100π b) 400π

11.1.9 a) 27 b) a^3

Gruble 22 Se side ?? i TM1.

Gruble ?? Se løsnigsforslag.

Gruble ?? Se løsnigsforslag.

Gruble 28 Se løsnigsforslag.

Gruble 29 Se løsnigsforslag.

Gruble 30 Se løsnigsforslag.

Gruble 21 Se løsnigsforslag.

Litteratur

Kiselev, A. (2006). *Kiselev's Geometry: Book 1. Planimetry* (A. Givental, Overs.). Sumizdat. (Opprinnelig utgitt 1892).

Lindstrøm, T. (2006). *Kalkulus* (2. utg). Oslo, Universitetsforlaget AS.

Moise, E. E. (1974). *Elementary geometry from an advanced standpoint*. Reading, Addison-Wesley Publishing Company.

Spivak, M. (1994). *Calculus* (3. utg). Cambridge, Cambridge University Press

Notis: Teksten, i alle fall en veldig lignende en, om Pytagoras' setning på side 245 stod første gang på trykk i Skage Hansens bok Tempelgeometri (2020).

Indeks

Om forfattaren

Sindre Sogge Heggen har en mastergrad i anvendt matematikk fra Universitetet i Oslo og en årsenhet i praktisk-pedagogisk utdanning fra NTNU. I tillegg har han flere års erfaring med undervisning i både grunnskole og videregående skole.