

# Vedlegg A: Tangeringslinja til en graf

## Introduksjon

Innen geometri er en *tangeringslinje til en sirkel* definert som en linje som skjærer en sirkel i bare ett punkt (Moise, 1974). Av denne definisjonen kan det vises at

- en tangeringslinje står normalt på vektoren dannet av sentrum i sirkelen og skjæringspunktet
- enhver linje som har et skjæringspunkt med en sirkel, og hvor skjæringspunktet og sentrum i sirkelen danner en normalvektor til linja, er en tangeringslinje til sirkelen.

(Se figur 1a.)

Gitt en deriverbar funksjon  $f(x)$ . Innen reell analyse defineres *tangeringslinja til  $f$  i punktet  $(a, f(a))$*  som linja som går gjennom  $(a, f(a))$  og har stigningstall  $f'(a)$  (Spivak, 1994). (Se Figur 1b.)

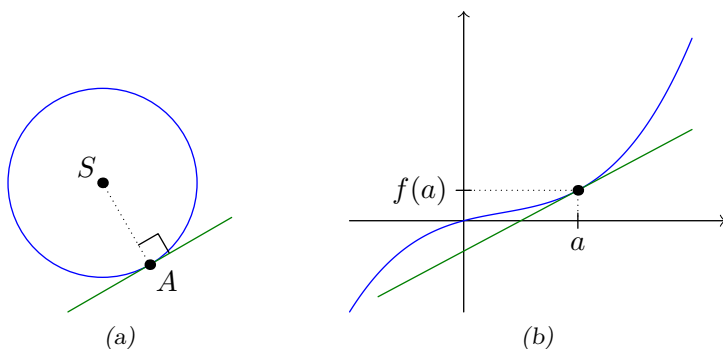


Figure 1

Det er for mange ganske intuitivt at tangeringslinjer til sirkler og tangeringslinjer til grafer er nært beslektet, men formålet med denne teksten er å formalisere dette.

## Senteret til krumningen

Gitt en funksjon  $\vec{r}(t)$  som er kontinuerlig og to ganger deriverbar for alle  $t \in \mathbb{R}$ , og hvor  $f''(t), g''(t) \neq 0$ . Vi innfører punktene

$$A = \vec{r}(a) \quad , \quad B = \vec{r}(b) \quad , \quad C = \vec{r}(c)$$

Videre lar vi  $S = (S_x, S_y)$  være sentrum i den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$ . På samme måte som vi finner den *deriverte* i et punkt ved

å la avstanden mellom to punkt på en graf gå mot 0, kan man finne **krumningen** i et punkt ved å la avstanden mellom tre punkt gå mot 0. I vårt tilfelle er krumningen beskrevet av den omskrevne sirkelen til  $\triangle ABC$  når  $h$  går mot 0.

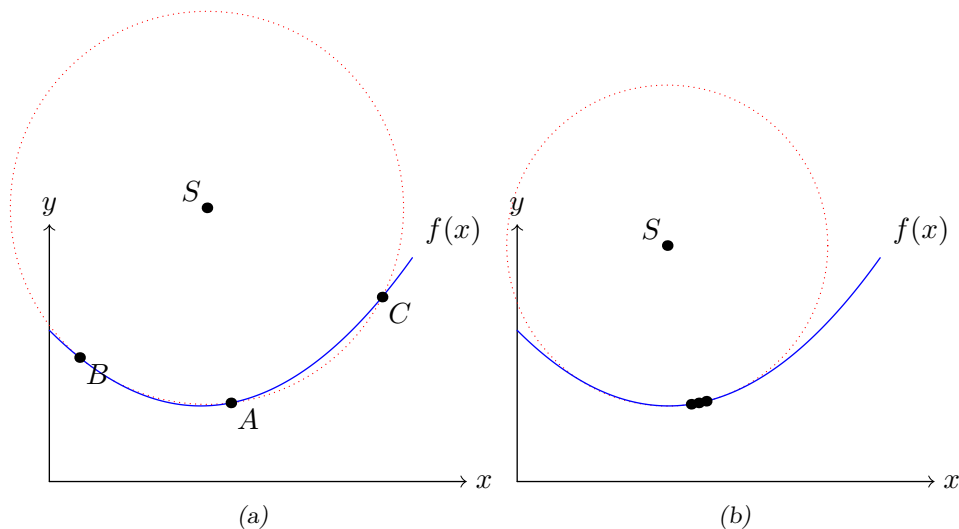


Figure 2

## Et likningssett for $S$

Vi har at

$$\overrightarrow{BA} = [f_t - f_b, g_t - g_b]$$

$$\overrightarrow{AC} = [f_c - f_t, g_c - g_t]$$

La  $B_m$  og  $C_m$  være midtpunktene til henholdsvis (sekantene)  $AB$  og  $AC$ . Da er

$$B_m = \frac{1}{2}(A + B) \quad , \quad C_m = \frac{1}{2}(A + C)$$

$[g_t - g_b, f_b - f_t]$  er en normalvektor for  $\overrightarrow{BA}$ , dette betyr at midtnormalen  $l_1$  til sekanten  $AB$  kan parameterisere som

$$l_1(t) = B_m + [g_t - g_b, f_b - f_t]t$$

Tilsvarende er midtnormalen  $l_2$  til sekanten  $AC$  parameterisert ved

$$l_2(q) = C_m + [g_t - g_c, f_c - f_t]q$$

$S$  sammenfaller med skjæringspunktet til  $l_1$  og  $l_2$ . Ved å kreve at  $l_1 = l_2$ , får vi et lineært likningssett med to ukjente som gir

$$t = \frac{(f_a - f_c)(f_b - f_c) + 2h^2}{2h(f_b + f_c - 2f_a)}$$

### $S$ når $h$ går mot 0

Vi definerer funksjonene  $\dot{f}_b$ ,  $\dot{f}_c$ ,  $\ddot{f}_b$  og  $\ddot{f}_c$  ut ifra de (respektive) deriverte og andrederiverte av  $f_b$  og  $f_c$  med hensyn på  $h$ :

$$-\dot{f}_b = (f_b)' = -f'(a - h)$$

$$\dot{f}_c = (f_c)' = f'(a + h)$$

$$\ddot{f}_b = (f_b)'' = f''(a - h)$$

$$\ddot{f}_c = (f_c)'' = f''(a + h)$$

Vi skal nå bruke disse funksjonene til å studere koordinatene til  $S$  når  $h$  går mot 0. Vi tar da med oss at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{h^2, h\} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f_b, f_c\} = f_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\dot{f}_c, \dot{f}_b\} = f'_a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{\ddot{f}_b, \ddot{f}_c\} = f''_a$$

hvor<sup>1</sup>  $f'_a = f'(a)$  og  $f''_a = f''(a)$ .

For  $t$  uttrykt ved (A) er (se (A))

$$S_y = \frac{f_a + f_b + 2ht}{2} = \frac{f_a + f_b}{2} + ht$$

Vi har at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_a + f_b}{2} = f_a$$

Videre er

$$\begin{aligned} ht &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c) + 2h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} \\ &= \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{2(f_b + f_c - 2f_a)} + \frac{h^2}{f_b + f_c - 2f_a} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Legg merke til at det her er snakk om  $f$  derivert med hensyn på  $x$ , og evaluert i  $a$ .

Når  $h$  går mot 0, er begge leddene i (1) «0 over 0» uttrykk. Vi bruker L'Hopitals regel på det siste leddet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2(f_b + f_c - 2f_a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h^2)'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} \quad (1)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \quad \text{«0 over 0»} \quad (2)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \quad (3)$$

$$= \frac{1}{f_a''} \quad (4)$$

Ved å bruke L'Hopitals regel på det første leddet i (1) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(f_b - f_c)}{f_b + f_c - 2f_a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_c - f_a)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'}$$

Av produktregelen ved derivasjon er

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{((f_a - f_c)(f_b - f_c))'}{(f_b + f_c - 2f_a)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} \right]$$

Begge leddene over er «0 over 0» uttrykk. Vi undersøker dem hver for seg ved å anvende L'Hopitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\dot{f}_c(f_b - f_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\ddot{f}_c(f_b - f_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \\ &= 0 + \frac{(f_a')^2}{2f_a''} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f_c - f_a)(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{-\dot{f}_b + \dot{f}_c} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\dot{f}_c(\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} + \frac{(f_c - f_a)(-\dot{f}_b + \dot{f}_c)}{\ddot{f}_b + \ddot{f}_c} \right] \quad (5)$$

$$= \frac{(f_a')^2}{2f_a''} + 0 \quad (6)$$

Av (1), (4), (5) og (6) har vi at

$$\lim_{h \rightarrow 0} ht = \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Dermed er

$$S_y = f_a + \frac{1 + (f_a')^2}{f_a''}$$

Videre er (med  $t$  gitt av (A))

$$S_x = (f_b - f_a)t + a - \frac{1}{2}h$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} (f_b - f_a)t &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot ht \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_b - f_a}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} ht \\ &= -f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}\end{aligned}$$

Altså er

$$S_x = a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}$$

## Avslutning

Linja som har stigningstall  $f'(a)$ , og som går gjennom  $(a, f(a))$ , er gitt ved funksjonen

$$g(x) = f'_a(x - a) + f_a$$

$\vec{r} = [1, f_a]$  er en retningsvektoren til denne linja. Av uttrykkene vi har funnet for  $S_x$  og  $S_y$  har vi at

$$S = \left( a - f'_a \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a}, f_a + \frac{1 + (f'_a)^2}{f''_a} \right)$$

Dermed er

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{f''_a} \left[ -f_a(1 + (f'_a)^2), 1 + (f'_a)^2 \right]$$

Siden  $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AS} = 0$  og  $g(a) = f(a)$ , er grafen til  $g$  tangeringslinja til sirkelen med sentrum  $S$  når  $h$  går mot 0. Altså er  $g$  tangeringslinja til sirkelen som beskriver krumningen til  $f$  når  $x = a$ .