

## 0.1 Introduksjon

**Algebra** er matematikk der bokstaver representerer tall. Dette gjør at vi lettere kan jobbe med *generelle* tilfeller. For eksempel er  $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$  og  $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6$ , men disse er bare to av de uendelig mange eksemplene på at multiplikasjon er kommutativ! En av hensiktene med algebra er at vi ønsker å gi *ett* eksempel som forklarer *alle* tilfeller, og siden sifrene våre (0-9) er uløselig knyttet til bestemte tall, bruker vi bokstaver for å nå dette målet.

Verdien til tallene som er representert ved bokstaver vil ofte variere ut ifra en sammenheng, og da kaller vi disse bokstavtallene for **variabler**. Hvis bokstavtallene derimot har en bestemt verdi, kaller vi dem for **konstanter**.

I *Del I* av boka har vi sett på regning med konkrete tal, likevel er de fleste reglene vi har utledet *generelle*; de gjelder for alle tall. På side 1-6 har vi gjengitt mange av disse reglene på en mer generell form. En fin introduksjon til algebra er å sammenligne reglene du finner her med slik du finner dem<sup>1</sup> i *Del I*.

### 0.1 Addisjon er kommutativ (??)

$$a + b = b + a$$

#### Eksempel

$$7 + 5 = 5 + 7$$

### 0.2 Multiplikasjon er kommutativ (??)

$$a \cdot b = b \cdot a$$

---

<sup>1</sup>Reglene sine nummer i *Del I* står i parentes.

**Eksempel 1**

$$9 \cdot 8 = 8 \cdot 9$$

**Eksempel 2**

$$8 \cdot a = a \cdot 8$$

## Ganging med bokstavuttrykk

Når man ganger sammen bokstaver, er det vanlig å utelate gangetegnet. Og om man ganger sammen en bokstav og et konkret tal, skriver man det konkrete tallet først. Dette betyr for eksempel at

$$a \cdot b = ab$$

og at

$$a \cdot 8 = 8a$$

I tillegg skriver vi også

$$1 \cdot a = a$$

Det er også vanlig å utelate gangetegn der parentesuttrykk er en faktor:

$$3 \cdot (a + b) = 3(a + b)$$

## 0.3 Brøk som omskriving av delestykke (??)

$$a : b = \frac{a}{b}$$

### Eksempel

$$a : 2 = \frac{a}{2}$$

## 0.4 Brøk ganget med brøk (??)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

### Eksempel 1

$$\frac{2}{11} \cdot \frac{13}{21} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 21} = \frac{26}{231}$$

**Eksempel 2**

$$\frac{3}{b} \cdot \frac{a}{7} = \frac{3a}{7b}$$

### 0.5 Deling med brøk (??)

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

#### Eksempel 1

$$\frac{1}{2} : \frac{5}{7} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5}$$

#### Eksempel 2

$$\begin{aligned}\frac{a}{13} : \frac{b}{3} &= \frac{a}{13} \cdot \frac{3}{b} \\ &= \frac{3a}{13b}\end{aligned}$$

### 0.6 Gangning med parentes (distributiv lov) (??)

$$(a + b)c = ac + bc$$

#### Eksempel 1

$$(2 + a)b = 2b + ab$$

#### Eksempel 2

$$a(5b - 3) = 5ab - 3a$$

### 0.7 Gangning med negative tall I (??)

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

#### Eksempel 1

$$\begin{aligned}3 \cdot (-4) &= -(3 \cdot 4) \\ &= -12\end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$\begin{aligned}(-a) \cdot 7 &= -(a \cdot 7) \\ &= -7a\end{aligned}$$

**0.8 Gangning med negative tall II (??)**

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

**Eksempel 1**

$$\begin{aligned}(-2) \cdot (-8) &= 2 \cdot 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$(-a) \cdot (-15) = 15a$$

**Språkboksen**

Hvis vi i et uttrykk har én variabel isolert på den ene siden av likhetstegnet, og konstanter og variabler på den andre siden, sier vi at den isolerte variabelen er **uttrykt ved** de andre tallene. For eksempel, om vi har uttrykket  $a = 2b - 4$ , sier vi at "a er uttrykt ved b". Har vi uttrykket  $q = 9y - x$ , sier vi at "q er uttrykt ved x og y".

## Utvidelser av reglene

Noe av styrken til algebra er at vi kan lage oss kompakte regler som det er lett å utvide også til andre tilfeller. La oss som et eksempel finne et annet uttrykk for

$$(a + b + c)d$$

Regel 0.6 forteller oss ikke direkte hvordan vi kan regne mellom parentesuttrykket og  $d$ , men det er ingenting som hindrer oss i å omdøpe  $a + b$  til  $k$ :

$$a + b = k$$

Da er

$$(a + b + c)d = (k + c)d$$

Av regel 0.6 har vi nå at

$$(k + c)d = kd + cd$$

Om vi setter inn igjen uttrykket for  $k$ , får vi

$$kd + cd = (a + b)d + cd$$

Ved å utnytte regel 0.6 enda en gang kan vi skrive

$$(a + b)d + cd = ad + bc + cd$$

Altså er

$$(a + b + c)d = ad + bc + cd$$

*Obs! Dette eksempelet er ikke ment for å vise hvordan man skal gå fram når man har uttrykk som ikke direkte er omfattet av regel 0.1 - 0.8, men for å vise hvorfor det alltid er nok å skrive regler med færrest mulige ledd, faktorer og lignende. Oftest vil man bruke utvidelser av reglene uten engang å tenke over det, og i alle fall langt ifra så pertentlig som det vi gjorde her.*

## 0.2 Potenser

grunntal  $\longrightarrow 2^3 \longleftarrow$  eksponent

En potens består av et **grunntall** og en **eksponent**. For eksempel er  $2^3$  en potens med grunntall 2 og eksponent 3. En positiv, heltalls eksponent sier hvor mange eksemplar av grunntallet som skal ganges sammen, altså er

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

### 0.9 Potenstall

$a^n$  er et potenstall med grunntall  $a$  og eksponent  $n$ .

Hvis  $n$  er et naturlig tall, vil  $a^n$  svare til  $n$  eksemplar av  $a$  multiplisert med hverandre.

#### Eksempel 1

$$\begin{aligned} 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 125 \end{aligned}$$

#### Eksempel 2

$$c^4 = c \cdot c \cdot c \cdot c$$

#### Eksempel 3

$$\begin{aligned} (-7)^2 &= (-7) \cdot (-7) \\ &= 49 \end{aligned}$$

#### Eksempel 4

$$a^1 = a$$

### Språkboksen

Vanlige måter å si  $2^3$  på er

- ”2 i tredje”
- ”2 opphøyd i 3”



I programmeringsspråk brukes gjerne symbolet `^` eller symbolene `**` mellom grunntall og eksponent.

Å opphøye et tall i 2 kalles "å kvadrere" tallet.

## Merk

De kommende sidene vil inneholde regler for potenser med tilhørende forklaringer. Selv om det er ønskelig at de har en så generell form som mulig, har vi i forklaringene valgt å bruke eksempel der eksponentene ikke er variabler. Å bruke variabler som eksponenter ville gitt mye mindre leservennlige uttrykk, og vi vil påstå at de generelle tilfellene kommer godt til synes også ved å studere konkrete tilfeller.

## 0.10 Ganging med potenser

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (1)$$

### Eksempel 1

$$\begin{aligned} 3^5 \cdot 3^2 &= 3^{5+2} \\ &= 3^7 \end{aligned}$$

### Eksempel 2

$$\begin{aligned} b^4 \cdot b^{11} &= b^{3+11} \\ &= b^{14} \end{aligned}$$

### Eksempel 3

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^{-7} &= a^{5+(-7)} \\ &= a^{5-7} \\ &= a^{-2} \end{aligned}$$

(Se [regel 0.13](#) for hvordan en potens med negativ eksponent kan tolkes.)

## 0.10 Ganging med potenser (forklaring)

La oss se på tilfellet

$$a^2 \cdot a^3$$

Vi har at

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Med andre ord kan vi skrive

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= \overbrace{a \cdot a}^{a^2} \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a}^{a^3} \\ &= a^5 \end{aligned}$$

## 0.11 Divisjon med potenser

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

**Eksempel 1**

$$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$$

**Eksempel 2**

$$\begin{aligned} \frac{2^4 \cdot a^7}{a^6 \cdot 2^2} &= 2^{4-2} \cdot a^{7-6} \\ &= 2^2 a \\ &= 4a \end{aligned}$$

## 0.11 Divisjon med potenser (forklaring)

La oss undersøke brøken

$$\frac{a^5}{a^2}$$

Vi skriver ut potensene i teller og nevner:

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} \\ &= \frac{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot a \cdot a \cdot a}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} \\ &= a \cdot a \cdot a \\ &= a^3\end{aligned}$$

Dette kunne vi ha skrevet som

$$\begin{aligned}\frac{a^5}{a^2} &= a^{5-2} \\ &= a^3\end{aligned}$$

## 0.12 Spesialtilfellet $a^0$

$$a^0 = 1$$

Eksempel 1

$$1000^0 = 1$$

Eksempel 2

$$(-b)^0 = 1$$

## 0.12 Spesialtilfellet $a^0$ (forklaring)

Et tall delt på seg selv er alltid lik 1, derfor er

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Av dette, og [regel 0.11](#), har vi at

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{a^n}{a^n} \\ &= a^{n-n} \\ &= a^0 \end{aligned}$$

### 0.13 Potens med negativ eksponent

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

#### Eksempel 1

$$a^{-8} = \frac{1}{a^8}$$

#### Eksempel 2

$$(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$$

### 0.13 Potens med negativ eksponent (forklaring)

Av [regel 0.12](#) har vi at  $a^0 = 1$ . Altså er

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n}$$

Av [regel 0.11](#) er

$$\begin{aligned} \frac{a^0}{a^n} &= a^{0-n} \\ &= a^{-n} \end{aligned}$$

### 0.14 Brøk som grunntall

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (2)$$

#### Eksempel 1

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

#### Eksempel 2

$$\left(\frac{a}{7}\right)^3 = \frac{a^3}{7^3} = \frac{a^3}{343}$$

### 0.14 Brøk som grunntall (forklaring)

La oss studere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3$$

Vi har at

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^3 &= \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \\ &= \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} \\ &= \frac{a^3}{b^3}\end{aligned}$$

### 0.15 Faktorer som grunntall

$$(ab)^m = a^m b^m \quad (3)$$

**Eksempel 1**

$$\begin{aligned}(3a)^5 &= 3^5 a^5 \\ &= 243a^5\end{aligned}$$

**Eksempel 2**

$$(ab)^4 = a^4 b^4$$

### **0.15 Faktorer som grunntall (forklaring)**

La oss bruke  $(a \cdot b)^3$  som eksempel. Vi har at

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^3 &= (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \\ &= a^3 b^3\end{aligned}$$

## 0.16 Potens som grunntall

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (4)$$

### Eksempel 1

$$\begin{aligned} (c^4)^5 &= c^{4 \cdot 5} \\ &= c^{20} \end{aligned}$$

### Eksempel 2

$$\begin{aligned} \left(3^{\frac{5}{4}}\right)^8 &= 3^{\frac{5}{4} \cdot 8} \\ &= 3^{10} \end{aligned}$$

## 0.16 Potens som grunntall (forklaring)

La oss bruke  $(a^3)^4$  som eksempel. Vi har at

$$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3$$

Av [regel 0.10](#) er

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 &= a^{3+3+3+3} \\ &= a^{3 \cdot 4} \\ &= a^{12} \end{aligned}$$



### 0.17 *n*-rot

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Symbolet  $\sqrt{\phantom{x}}$  kalles et **rottegn**. For eksponenten  $\frac{1}{2}$  er det vanlig å utelate 2 i rottegnet:

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

### Eksempel

Av [regel 0.16](#) har vi at

$$\begin{aligned}\left(a^b\right)^{\frac{1}{b}} &= a^{b \cdot \frac{1}{b}} \\ &= a\end{aligned}$$

For eksempel er

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3, \text{ siden } 3^2 = 9$$

$$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5, \text{ siden } 5^3 = 125$$

$$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2, \text{ siden } 2^4 = 16$$

### Språkboksen

$\sqrt{9}$  kalles "kvadratrota til 9"

$\sqrt[5]{9}$  kalles "femterota til 9".

## 0.3 Irrasjonale tall

### 0.18 Irrasjonale tall

Et tall som *ikke* er et rasjonalt tall, er et irrasjonalt tall<sup>1</sup>.

Verdien til et irrasjonalt tall har uendelig mange desimaler med et ikke-repeterende mønster.

### Eksempel 1

$\sqrt{2}$  er et irrasjonalt tall.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\dots$$

---

<sup>1</sup>Strengt tatt er irrasjonale tall alle *reelle* tall som ikke er rasjonale tall. Men for å forklare hva *reelle* tall er, må vi forklare hva *imaginære* tall er, og det har vi valgt å ikke gjøre i denne boka.