Mål for opplæringen er at eleven skal kunne

- derivere sentrale funksjoner og bruke førstederiverte og andrederiverte til å drøfte slike funksjoner

0.1 Derivasjonsregler

I tidligere matematikkkurs lærte du å derivere grunnleggende funksjoner og sammensatte funksjoner. Vi skal ta med oss en liten repetisjon av derivasjonsreglene og i tillegg presentere den deriverte av $\sin x$, $\cos x$ og $\tan x$. Men først må vi ha en liten redegjøring for føringen av funksjoner og deres deriverte:

For en funksjon $f(x)$ vil $f'(x)$ betegne f *derivert med hensyn på* x. Hvis det på forhånd er etablert at f er en funksjon av x, vil vi skrive $f'(x)$ bare som f'.

Definisjon av den deriverte

For en deriverbar funksjon $f(x)$ er den deriverte med hensyn på x definert som

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{0.1}$$

Den deriverte av utvalgte funksjoner av x

For en konstant k har vi at

$$(x^k)' = kx^{k-1} \tag{0.2}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{0.3}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{0.4}$$

$$(\sin x)' = \cos x \tag{0.5}$$

$$(\cos x)' = -\sin x \tag{0.6}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \tag{0.7}$$

$$(kf(x))' = kf'(x) \tag{0.8}$$

Kjerneregelen

For en funksjon $f(x) = g(u(x))$ har vi at

$$f' = g'(u)u' \tag{0.9}$$

Eksempel

Finn f' når $f(x) = (x^2 + x)^2$

Svar:

Vi setter $u(x) = x^2 + x$, og får at

$$\begin{aligned} g(u) &= u^2 \\ g'(u) &= 2u \\ u' &= 2x + 1 \end{aligned}$$

Altså blir

$$\begin{aligned} f' &= g'(u)u' \\ &= 2u(2x + 1) \\ &= 2(x^2 + x)(2x + 1) \end{aligned}$$

Produktregelen ved derivasjon

For funksjonen $f(x) = u(x)v(x)$ har vi at

$$f' = u'v + uv' \tag{0.10}$$

Eksempel

Gitt funksjonen $f(t) = t^2 e^t$. Finn f'.

Svar:

Vi setter $u(t) = t^2$ og $v(t) = e^t$, og får at

$$\begin{aligned} u' &= 2t \\ v' &= e^t \end{aligned}$$

Videre er da

$$\begin{aligned} f' &= (uv)' \\ &= u'v + uv' \\ &= 2te^t + t^2 e^t \\ &= te^t(2 + t) \end{aligned}$$

Divisjonsregelen ved derivasjon

For funksjonen $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ har vi at

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \tag{0.11}$$

Eksempel

Gitt funskjonen $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$. Finn f'.

Svar:

Vi setter $u(x) = x^2$ og $v(x) = \sin x$, og får da at

$$\begin{aligned} u' &= 2x \\ v' &= \cos x \end{aligned}$$

Videre er da

$$\begin{aligned} f' &= \left(\frac{u}{v}\right)' \\ &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{(x^2)'\sin x - x^2(\sin x)'}{\sin^2 x} \\ &= \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} \\ &= x\sin^{-2}(2\sin x - x\cos x) \end{aligned}$$

Merk: (0.11) er bare en utvidelse av (0.10) kombinert med potensregelen $\frac{1}{a} = a^{-1}$. Uten å bruke (0.11) kunne vi derfor løst oppgaven slik[1]:

Vi observerer at

$$f(x) = x^2\sin^{-1} x$$

Av (0.10) er da

$$\begin{aligned} f' &= \left(x^2\right)'\sin^{-1} x + x^2\left(\sin^{-1} x\right)' \\ &= 2x\sin^{-1} x - x^2\sin^{-2}\cos x \end{aligned}$$

$$= x\sin^{-1}x(2x - x\sin^{-1}\cos x)$$

I derivasjonen av $\sin^{-1}x$ har vi brukt kjerneregelen. Med litt omskriving vil du finne at det endelige svaret er ekvivalent med det vi fikk da vi brukte divisjonsregelen.

[1] Minner igjen om at $\sin^{-1}x$ i denne boka er det samme som $\frac{1}{\sin x}$, mens uttrykket i andre tekster kan være samsvarende med $\operatorname{asin} x$.

0.2 Andrederiverttesten

Trolig er du også kjent med å finne maksimum[1] og minimum[2] til en funksjon f ved å studere f' via et fortegnsskjema, men ofte er *andrederiverttesten* mindre tidkrevende:

Andrederiverttesten

Gitt en funksjom $f(x)$ som er kontinuerlig omkring[1] c. Da har vi at

- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) < 0$, er $f(c)$ et lokalt maksimum.
- Hvis $f'(c) = 0$ og $f''(c) > 0$, er $f(c)$ et lokalt minimum.
- Hvis $f'(c) = f''(c) = 0$, kan man ikke ut ifra denne informasjonen alene si om $f(c)$ er et lokalt maksimum eller minimum.

Om én av de to første punktene er oppfylt, er c et lokalt ekstremalpunkt.

[1] *Kontinuerlig omkring* c betyr at det for en funksjon $f(x)$ finnes et åpent intervall I hvor f er kontinuerlig og der $c \in I$.

[1] Vi minner igjen om at en utfyllende liste over punkt på en graf er å finne i *vedlegg* **??**.

[2] Maksimum og minimum blir også kalt *maksimumsverdier* og *minimumsverdier*.

Eksempel 1

Gitt funksjonen

$$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad , \quad x \in [-2, 3]$$

a) Finn alle lokale maksimum og minimum for f.

b) Finn maksimal- og minimalverdien til f.

Svar:

a) Vi starter med å finne punktene hvor $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x &= 0 \\ 3x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$f'(x)$ er altså 0 for $x = 0$ eller $x = 2$. Videre finner vi at

$$f''(x) = 6x - 6$$

og at

$$\begin{aligned} f''(0) &= -6 \\ f''(2) &= 6 \end{aligned}$$

Av andrederiverttesten er da $x = 0$ et lokalt maksimum og $x = 2$ et lokalt minimum for f.

b) f-verdiene for de to lokale ekstremalpunktene vi fant i a) er

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(2) &= -4 \end{aligned}$$

Men vi må ikke glemme å sjekke endepunktene til f:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -20 \\ f(3) &= 0 \end{aligned}$$

Altså er -20 minimumsverdien til f, mens 0 er maksimumsverdien.

Eksempel 2

Gitt funksjonen

$$f(x) = \cos x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Finn lokale maksimum og minimum for f.

Svar:

Vi har at

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

Dette betyr at $f' = 0$ for $x \in \{0, \pi\}$ og at $f''(\pi) = -f''(0) = 1$. Men siden $x = 0$ og $x = \pi$ er endepunkter for f, er ikke f' kontinuerlig *omkring* disse verdiene, dermed har f ingen lokale maksumim eller miniumum. Istedenfor er $f(0) = 1$ absolutt maksimum og $f(\pi) = -1$ absolutt minimum.

0.3 Den antideriverte

Vi skal nå se på en definisjon som kan virke veldig triviell, men som viser seg å være en viktig brikke når vi i neste kapittel skal studere *integrasjon*.

La oss starte med å se på funksjonen $f(x) = x^2$. Å derivere f mhp. x byr på få problemer:

$$f' = 2x$$

Hva nå med den deriverte av $g(x) = x^2 + 1$? Svaret blir det samme som for f':

$$g' = 2x$$

Allerede nå innser vi at det finnes en haug av funksjoner, rett og slett uendelig mange, som har $2x$ som sin deriverte. Tiden er derfor inne for å lage en samlebetegnelse for alle funksjoner med samme deriverte:

Den antideriverte

Hvis $F(x)$ er en deriverbar funksjon og $F'(x) = f(x)$, da er F en antiderivert av f.

Eksempel

Undersøk om følgende funksjoner er en antiderivert til $f(x) = 2x + e^x$:

$$g(x) = x^2 + e^x$$

$$h(x) = x^2 + e^{2x}$$

$$k(x) = x^2 + e^x + 4$$

Svar:

Vi finner de deriverte av g, h og k:

$$g'(x) = 2x + e^x$$

$$h'(x) = 2x + 2e^{2x}$$

$$k(x) = 2x + e^x$$

Siden $g'(x) = k'(x) = f(x)$, mens $h'(x) \neq f(x)$, er bare $g(x)$ og $k(x)$ en antiderivert til f.

Forklaringer

Derivasjonsregler

Vi skal nøye oss med å finne uttrykket for den deriverte av de tre uttrykkene som ikke ble gitt i R1, nemlig $\cos x, \sin x$ og $\tan x$.

$(\cos x)' = -\sin x$

Vi skal her anvende de to ligningene (se *vedlegg* **??**)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \tag{I}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \tag{II}$$

Per definisjon (se (0.1)) er $(\cos x)'$ gitt som

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

Ved (**??**) kan vi skrive

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \sin x \sin(\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos(\Delta x) - 1) \cos x - \sin x \sin(\Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} \cos x - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \sin x \\
&= 0 - 1 \cdot \sin x \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

Mellom tredje og fjerde linje i likningen over brukte vi (I) og (II).

$(\sin x)' = \cos x$

Av (**??**), (**??**) og (**??**) har vi at

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Bruker vi det faktum at $(\cos x)' = -\sin x$, i kombinasjon med kjerneregelen, får vi at

$$(\sin x)' = \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)'$$

$$\begin{aligned}
&= -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

$\mathbf{(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$
Av kjerneregelen og produktregelen ved derivasjon (se (0.9 og (0.10)) er

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\sin x \cos^{-1} x\right)' \\
&= \cos x \cos^{-1} x + \sin x \left(\cos^{-1}\right)' \\
&= 1 + \sin x(-\cos^{-2} x)(-\sin x) \\
&= 1 + \tan^2 x \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} && (\cos^2 x + \sin^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Andrederiverttesten

Av definisjonen for den deriverte har vi at

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x) - f'(c)}{\Delta x}$$

Når $f'(c) = 0$, er

$$f''(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x}$$

Når $f''(c) < 0$, betyr dette at

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(c + \Delta x)}{\Delta x} < 0$$

Altså må $f'(c + \Delta x)$ være positiv når Δx nærmer seg 0 fra negativ side av tallinjen og negativ når Δx nærmer seg 0 fra positiv side. Dermed skifter f' fortegn i c, som da må være et maksimalpunkt for f. Tilsvarende må c være et minimumspunkt for f hvis $f(c) = 0$ og $f''(c) < 0$.