

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №3
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Потоки в сети

Студент гр.8382

Синельников М.Р

Преподаватель

Фирсов М.А

Санкт-Петербург

2020

Цель работы.

Научиться реализовывать алгоритм нахождения максимального потока в сети.

Задание.

Найти максимальный поток в сети, а также фактическую величину потока, протекающего через каждое ребро, используя алгоритм Форда-Фалкерсона.

Сеть (ориентированный взвешенный граф) представляется в виде триплета из имён вершин и целого неотрицательного числа - пропускной способности (веса).

Входные данные:

N — количество ориентированных рёбер графа

v_0 — исток

v_n — сток

$v_i v_j w_{ij}$ — ребро графа

$v_i v_j w_{ij}$ — ребро графа

...

Выходные данные:

P_{\max} — величина максимального потока

$v_i v_j w_{ij}$ — ребро графа с фактической величиной протекающего потока

$v_i v_j w_{ij}$ — ребро графа с фактической величиной протекающего потока

...

В ответе выходные рёбра отсортируйте в лексикографическом порядке по первой вершине, потом по второй (в ответе должны присутствовать все указанные входные рёбра, даже если поток в них равен 0).

Sample Input:

7

a

f

a b 7

a c 6

```
b d 6
c f 9
d e 3
d f 4
e c 2
```

Sample Output:

```
12
a b 6
a c 6
b d 6
c f 8
d e 2
d f 4
e c 2
```

вариант 1 - поиск в ширину. Поочерёдная обработка вершин текущего фронта, перебор вершин в алфавитном порядке.

Описание алгоритма.

Ввод данных происходит в функции *input*. Считав данные, запускается функция *FordFulkerson*, реализующая основную идею алгоритма. Изначально поток для всех ребёр равен нулю, а для противоположных рёбер равняется пропускной способности исходного ребра. В цикле *while* ищутся все возможные пути, по которым можно пустить поток. Нахождение пути происходит с помощью обхода в ширину с обработкой вершин в алфавитном порядке, поэтому в данном случае применяется не обычная очередь, а очередь с приоритетом, где приоритет определяется номером символа вершины. Найдя путь, функция *computeMinCapacity* вычисляет значение минимальной пропускной способности на найденном пути, а в функции *changeFlow* значение потока для каждого ребра на найденном пути увеличивается на минимальную пропускную способность, в то время как для противоположного ему ребра уменьшается. Если поток по ребру становится равным пропускной способности этого ребра, то ребро помечается как посещённое, что означает, что в нахождении очередного пути данное ребро принимать участия не будет. Также увеличивается значение переменной *max_flow* на величину минимальной

пропускной способности. Цикл заканчивает работу, когда очередной путь от истока к стоку найти нельзя. После завершения цикла на экран печатается величина максимального потока по сети, а функция *formOutput* печатает найденный поток через каждое ребро.

Граф представлен в виде *vector<map<int, vector<Edge>>>*, где размер первого вектора равняется количеству вершин в графе, словарь хранит характеристики рёбер между вершиной *i* и всеми смежными с ней вершинами, а второй вектор необходим для случая, если между двумя вершинами более одного ребра. Характеристики ребра представлены структурой *Edge*. В данном алгоритме используются два графа — исходный и граф из обратных рёбер.

Так как для поиска пути используется поиск в ширину, то в данном случае мы имеем дело с алгоритмом Эдмондса-Карпа, который является частным случаем алгоритмом Форда-Фалкерсона. Сложность этого алгоритма по времени $O(|V| * |E|^2)$. С учётом того, что в данном задании используется очередь с приоритетом, реализованная в виде двоичной кучи, для формирования вершин в алфовитном порядке, итоговая сложность алгоритма по времени равняется $O(|V| * \log|V| * |E|^2)$. Сложность алгоритма по памяти — $O(|V| * |E|)$.

Описание функций и структур данных.

```
void foldFurkenson(vector<map<int,vector<Edge>>>
&nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes, map<int,string>
&convert_to_string,map<string,int> &convert_to_int,int source,int sink) —
```

основная функция алгоритма. В ней реализован цикл, в котором ищутся все возможные пути.

```
void changeFlow(vector<map<int,vector<Edge>>>
&nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes,
vector<pair<pair<int,int>,int>> &prev,int sink,int min) — функция, в которой
```

происходит изменение потока для каждой вершины на найденном пути.

int computeMinCapacity(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes,vector<pair<pair<int,int>,int>> &prev,int sink, unsigned int max_possible_flow) — функция для вычисления минимальной пропускной способности на найденном пути.

void emptyQueue(priority_queue<string,vector<string>,greater<string>> &neighbours) — функция для освобождения кучи.

void zeroInitialization(vector<bool> &visited) — функция для инициализации каждой вершины как ещё непосещённой.

void input(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes,map<int,string> &convert_to_string,map<string,int> &convert_to_int,int number_of_edges) — функция для ввода входных данных.

unsigned int computeMaxFlow(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes) — функция для вычисления максимального возможного потока через какую-либо вершину.

void formAdjacencList(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes,map<string,int> &convert_to_int,vector<inputElement> &input_sequence) — функция для формирования списка смежности вершин по полученной входной последовательности.

void printCurrentWay(map<int,string> &convert_to_char,vector<pair<pair<int,int>,int>> &prev,int curr_vertex,bool flag,int source) - функция для вывода промежуточного построенного пути.

bool sortByalf(const inputElement &a, const inputElement &b) — функция для сортировки рёбер при выводе результата.

void formOutput(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,map<int,string> &convert_to_string) — функция для вывода потока через каждое ребро.

vector<map<int,vector<Edge>>> nodes — структура данных для хранения графа.

vector<map<int,vector<Edge> >> reversed_nodes — структура данных для хранения графа с обратными рёбрами.

map<char,int> &convert_to_int — словарь для перевода буквенного обозначения вершины в её номер.

map<int,char> &convert_to_char — словарь, переводящий номер вершины в её буквенное обозначение.

vector<pair<pair<int,int>, int>> &prev — вектор, хранящий в *prev[i].first.first* номер предыдущей вершины для вершины с номером *i*, через которую проходит путь, в поле *prev[i].first.second* индекс ребра, по которому был проложен путь, а в поле *prev[i].second* 1 или 0, в зависимости от того, принадлежит ребро исходному графу или графу с обратными рёбрами.

priority_queue<string,vector<string>, greater<string>> neighbours — очередь с приоритетом для обработки вершин в алфавитном порядке.

vector<inputElement> &input_sequence — вектор для хранения последовательности входных рёбер.

```
struct inputElement{  
    string vertex1;  
    string vertex2;  
    int weight;
```

}; - структура для хранения элемента входной последовательности: *string vertex1*, *string vertex2* — обозначения вершин, *int weight* — поток через ребро между этими вершинами.

```
struct Edge{  
    int capacity;  
    int flow = 0;  
    bool visited = false;
```

}; - структура для хранения показателей ребра: *int capacity* — текущая проводимость ребра, *int flow* — текущий поток через ребро, *bool visited* — состояние о том, можно ли пройти по этому ребру или нет.

Тестирование.

Программа была протестирована на следующих исходных данных:

Входные данные	Результат
7 a f a b 7 a c 6 b d 6 c f 9 d e 3 d f 4 e c 2	12 a b 6 a c 6 b d 6 c f 8 d e 2 d f 4 e c 2
7 1 5 1 2 2 2 5 5 1 3 6 3 4 2 4 5 1 3 2 3 2 4 1	6 1 2 2 1 3 4 2 4 0 2 5 5 3 2 3 3 4 1 4 5 1
5 one five one five 2 one two 2 two three 3 three four 2 four five 2	4 four five 2 one five 2 one two 2 three four 2 two three 2
5 1 4 1 2 10000 1 3 10000 2 3 1 3 4 10000 2 4 10000	20000 1 2 10000 1 3 10000 2 3 0 2 4 10000 3 4 10000

Выводы.

Были получены навыки работы с алгоритмами поиска максимального потока в графу. В частности, был реализован модифицированный алгоритм Эдмонда-Карпа с приоритетом обработки вершин .в лексиграфическом порядке,

который, в свою очередь, является частным случаем алгоритма Форда-Фалкерсона.

Приложения А. Исходный код программы

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <map>
#include <algorithm>
#include <queue>
#include <stack>
#include <string>

using std::cin;
using std::cout;
using std::vector;
using std::map;
using std::sort;
using std::queue;
using std::pair;
using std::make_pair;
using std::priority_queue;
using std::stack;
using std::string;
using std::greater;

struct inputElement{
    string vertex1;
    string vertex2;
    int weight;
};

struct Edge{
    int capacity;
    int flow = 0;
    bool visited = false;
};

bool sortbyalf(const inputElement &a, const inputElement &b){//сортировка вершин для вывода в алфавитном
порядке
    if(a.vertex1 != b.vertex1)
        return (a.vertex1 < b.vertex1);
    return (a.vertex2 < b.vertex2);
```

```

}

void formAdjacencList(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>>
&reversed_nodes,map<string,int> &convert_to_int,vector<inputElement> &input_sequence){//формируем список
смежности
    int vertex,dest;
    int cap;
    Edge edge;
    for(int i = 0;i < input_sequence.size();i++){//проходим по всем заданным рёбрам
        vertex = convert_to_int[input_sequence[i].vertex1];//вершину1 перевод из буквенного обозначения в числовое
        dest = convert_to_int[input_sequence[i].vertex2];//вершину2 перевод из буквенного обозначения в числовое
        cap = input_sequence[i].weight;
        edge.capacity = cap;
        edge.visited = false;
        edge.flow = 0;
        //добавляе вершину2 в список вершины1
        nodes[vertex][dest].push_back(edge);
        edge.flow = edge.capacity;
        edge.capacity = 0;
        edge.visited = true;
        reversed_nodes[dest][vertex].push_back(edge);
    }
}

```

```

void printCurrentWay(map<int,string> &convert_to_char,vector<pair<pair<int,int>,int>> &prev,int curr_vertex,bool
flag,int source){//выводим текущий маршрут
    stack<int> way;
    int stack_size;
    int i = curr_vertex;
    if(flag)
        cout << "Найденный путь: \n";
    else
        cout << "Один из текущих маршрутов: \n";
    while (prev[i].first.first != -1){
        way.push(i);
        i = prev[i].first.first;
    }
    way.push(source);
    stack_size = way.size();
    for(int i = 0;i < stack_size;i++){//печатаем найденный путь
        cout << convert_to_char[way.top()] << " ";
        way.pop();
    }
}

```

```

    }
    cout << "\n";
}

void formOutput(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,map<int,string> &convert_to_string){
    cout << "Потоки по всем рёбрам: \n";
    vector<inputElement> output;
    inputElement element;
    for(int i = 0;i < nodes.size();i++){
        for (auto it = nodes[i].begin(); it != nodes[i].end(); ++it){//каждое ребро формируем как элемент структуры
            for(int j = 0;j < nodes[i][it->first].size();j++) {
                element.vertex1 = convert_to_string[i];
                element.vertex2 = convert_to_string[it->first];
                element.weight = nodes[i][it->first][j].flow;
                output.push_back(element);
            }
        }
    }
    sort(output.begin(),output.end(),sortbyalf);
    for(int i = 0;i < output.size();i++)//выводим поток через каждое ребро
        cout << output[i].vertex1 << " " << output[i].vertex2 << " " << output[i].weight << "\n";
}

unsigned int computeMaxFlow(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes){//вычисление значения максимального
потока через какое-либо ребро
    unsigned int max = 0;
    for (int i = 0; i < nodes.size() ; ++i) {
        for (auto it = nodes[i].begin(); it != nodes[i].end(); ++it) {
            for(int j = 0;j < nodes[i][it->first].size();j++)
                if (nodes[i][it->first][j].capacity > max)
                    max = nodes[i][it->first][j].capacity;
        }
    }
    return max;
}

void input(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>>
&reversed_nodes,map<int,string> &convert_to_string,map<string,int> &convert_to_int,int number_of_edges){//ввод
входных данных
    vector<inputElement> input_sequece;//вектор рёбер графа
    inputElement elem;
    string vertex1,vertex2;

```

```

vertex1 = '';
int capacity;
int counter = 0;
int i = 0;
while (i < number_of_edges){//цикл для ввода рёбер графа
    cin >> vertex1;
    cin >> vertex2;
    cin >> capacity;
    elem.vertex1 = vertex1;
    elem.vertex2 = vertex2;
    elem.weight = capacity;
    input_sequece.push_back(elem);
    if(convert_to_int.find(vertex1) == convert_to_int.end()){//если вершина ещё не встречалась, записываем её в
map convert_to_int.find
        convert_to_int[vertex1] = counter;
        convert_to_string[counter] = vertex1;
        counter++;
    }
    if(convert_to_int.find(vertex2) == convert_to_int.end()) {
        convert_to_int[vertex2] = counter;
        convert_to_string[counter] = vertex2;
        counter++;
    }
    i++;
}
nodes.resize(counter);//задаём размер вектора
reversed_nodes.resize(counter);//задаём размер вектора
formAdjacencList(nodes,reversed_nodes,convert_to_int,input_sequece);//вызываем функцию для формирования
списка смежности
}

void zeroInitialization(vector<bool> &visited){//инициализируем вершины как ещё не посещённые
    for(int i = 0;i < visited.size();i++)
        visited[i] = false;
}

void emptyQueue(priority_queue<string,vector<string>,greater<string>> &neighbours){//опустошаем кучу
    while (!neighbours.empty())
        neighbours.pop();
}

```

```

int      computeMinCapacity(vector<map<int,vector<Edge>>>      &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>>
&reversed_nodes,vector<pair<pair<int,int>,int>>  &prev,int sink, unsigned int max_possible_flow){//вычисляем
минималбную пропускную способность
    int min,i;
    min = max_possible_flow;
    i = sink;
    while (1){//проходим найденный путь от стока к истоку
        if(prev[i].first.first == -1)//выходим, когда дошли до стока
            break;
        if((prev[i].second && nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity < min) || (!prev[i].second &&
reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity < min))
            if(prev[i].second)
                min = nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity;
            else
                min = reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity;
        i = prev[i].first.first;//переходим к следующей вершине на пути
    }
    return min;//возвращаем мин пропускную способность
}

```

```

void  changeFlow(vector<map<int,vector<Edge>>>  &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>>  &reversed_nodes,
vector<pair<pair<int,int>,int>> &prev,int sink,int min){//меняем поток для рёбер на найденном пути
    int i;
    i = sink;
    while (1){
        if(prev[i].first.first == -1)//выходим, когда дошли до стока
            break;
        if(prev[i].second) {// обрабатываем случай, когда прошли по обычному ребру
            nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].flow += min;
            nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity -= min;
            reversed_nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].flow -= min;
            reversed_nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].capacity += min;
            if(!nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity)
                nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].visited = true;
            if(reversed_nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].capacity)
                reversed_nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].visited = false;
        } else{//обрабатываем случай, когда по обратному ребру
            reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].flow += min;
            reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity -= min;
            nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].flow -= min;
            nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].capacity += min;
            if(!reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].capacity)

```

```

        reversed_nodes[prev[i].first.first][i][prev[i].first.second].visited = true;
        if(nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].capacity)
            nodes[i][prev[i].first.first][prev[i].first.second].visited = false;
    }
    i = prev[i].first.first;//переходим к следующей вершине на пути
}
}

void foldFurkenson(vector<map<int,vector<Edge>>> &nodes,vector<map<int,vector<Edge>>> &reversed_nodes,
map<int,string> &convert_to_string,map<string,int> &convert_to_int,int source,int sink){
    unsigned int max_possible_flow = computeMaxFlow(nodes);
    unsigned int max_flow = 0;
    int min_capacity;
    bool check;
    priority_queue<string,vector<string>, greater<string>> neighbours;
    vector<pair<pair<int,int>,int>> prev(nodes.size());
    vector<bool> visited(nodes.size());
    unsigned long size;
    int curr_vertex;
    prev[source] = make_pair(make_pair(-1,0),0);
    while (1) {//пока можно найти путь
        cout << "Ищем очередной путь: \n";
        neighbours.push(convert_to_string[source]);
        cout << "Положили в очередь вершину " << convert_to_string[source] << " - источник\n";
        check = false;
        zeroInitialization(visited);
        visited[source] = true;
        while (!neighbours.empty()) {
            size = neighbours.size();
            for (int i = 0; i < size; ++i) {
                curr_vertex = convert_to_int[neighbours.top()];
                cout << "Достали из очереди вершину " << convert_to_string[curr_vertex] << "\n";
                neighbours.pop();
                for (auto it = nodes[curr_vertex].begin(); it != nodes[curr_vertex].end(); ++it){//обрабатываем смежные
                    //вершины с текущей по исходному графу
                    for(int j = 0;j < nodes[curr_vertex][it->first].size();j++) {
                        if (!visited[it->first] && !nodes[curr_vertex][it->first][j].visited) {//проверка на то, можно ли пройти
                            //по ребру и посещена ли уже вершина
                            neighbours.push(convert_to_string[it->first]);
                            cout << "Положили в очередь вершину " << convert_to_string[it->first] << "\n";
                            prev[it->first] = make_pair(make_pair(curr_vertex,j), 1);
                            visited[it->first] = true;
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        if (it->first == sink) { //если сток, заканчиваем поиск пути
            cout << "Дошли до стока\n";
            printCurrentWay(convert_to_string, prev, sink, true, source);
            check = true;
            break;
        } else
            printCurrentWay(convert_to_string, prev, it->first, false, source);
    }
}
}
if (check)
    break;

    for (auto it = reversed_nodes[curr_vertex].begin(); it != reversed_nodes[curr_vertex].end(); ++it)
{ //обрабатываем смежные вершины с текущей по обратному графу
    for(int j = 0; j < reversed_nodes[curr_vertex][it->first].size(); j++) {
        if (!visited[it->first] && !reversed_nodes[curr_vertex][it->first][j].visited) { //проверка на то, можно ли
пройти по ребру и посещена ли уже вершина
            neighbours.push(convert_to_string[it->first]);
            cout << "Положили в очередь вершину " << convert_to_string[it->first] << "\n";
            prev[it->first] = make_pair(make_pair(curr_vertex, j), 0);
            visited[it->first] = true;
            if (it->first == sink) { //если сток, заканчиваем поиск пути
                cout << "Дошли до стока\n";
                printCurrentWay(convert_to_string, prev, sink, true, source);
                check = true;
                break;
            } else
                printCurrentWay(convert_to_string, prev, it->first, false, source);
        }
    }
}
}
if (check)
    break;
}
if (check)
    break;
}
if(neighbours.empty())
    break;

    min_capacity = computeMinCapacity(nodes, reversed_nodes, prev, sink, max_possible_flow); //вычисляем
минимальную пропускную способность
    changeFlow(nodes, reversed_nodes, prev, sink, min_capacity); //меняем потоки по рёбрам в найденном пути

```

```

        max_flow += min_capacity;//увеличиваем максимальный поток
        cout << "Текущий возможный поток через сеть; " << max_flow << "\n";
        emptyQueue(neighbours);
    }
    cout << "Больше путей не найти\n";
    cout << "Максимальный поток: " << max_flow << "\n";
    formOutput(nodes,convert_to_string);//формируем выход
}

int main() {
    string v1,v2;
    int number_of_edges;
    int source,sink;
    vector<map<int,vector<Edge>>> nodes;
    vector<map<int,vector<Edge>>> reversed_nodes;
    map<int,string> convert_to_string;
    map<string,int> convert_to_int;
    cout << "Введите количество рёбер: ";
    cin >> number_of_edges;
    cout << "Введите исток и сток: ";
    cin >> v1 >> v2;
    if(!number_of_edges)
        cout << "Максимальный поток: " << 0;
    else {
        cout << "Вводите рёбра: ";
        input(nodes, reversed_nodes, convert_to_string, convert_to_int, number_of_edges);
        source = convert_to_int[v1];
        sink = convert_to_int[v2];
        foldFurkenson(nodes, reversed_nodes, convert_to_string, convert_to_int, source, sink);
    }
    return 0;
}

```