

Herhangi bir iki boyutlu enterpolasyon yöntemini

- Matematiksel alt yapısı,
- Örnek bir matris üzerinde işlem adımları,
- Tasarımı serbest olan MATLAB GUI uygulamasıyla açıklayınız.

Bilineer Enterpolasyon

Bilineer enterpolasyon, lineer enterpolasyonun iki değişkenli fonksiyonların (ör. x ve y) rectilineer iki-boyutlu grid üzerinde enterpolasyonu için olan uzantısıdır.

Metot, lineer enterpolasyonun önce bir yönde sonra diğer yönde sırasıyla uygulanmasına dayanır. Bu iki adım kendi içinde lineerse de, metot, bir bütün olarak lineer değil; quadraticdir.

Bilinmeyen bir fonksiyon f'in (x, y) noktasındaki değerinin bulunacağı varsayalım. Ayrıca, f'in dört noktadaki değeri bilinsin: $Q_{11} = (x_1, y_1)$, $Q_{12} = (x_1, y_2)$, $Q_{21} = (x_2, y_1)$ ve $Q_{22} = (x_2, y_2)$.

İlk olarak, x-doğrultusunda lineer enterpolasyon aşağıdaki gibi yapılır:

$$f(x, y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})$$

$$f(x, y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})$$

İkinci olarak, yukarıdaki denklem, y-doğrultusunda lineer enterpolasyonu uygulanırsa, aşağıdaki denklem bulunur:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2) \\ &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}) \right) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}) \right) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (f(Q_{11})(x_2 - x)(y_2 - y) + f(Q_{21})(x - x_1)(y_2 - y) + f(Q_{12})(x_2 - x)(y - y_1) + f(Q_{22})(x - x_1)(y - y_1)) \\ &= \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} x_2 - x & x - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(Q_{11}) & f(Q_{12}) \\ f(Q_{21}) & f(Q_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y \\ y - y_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Son denklem, hangi doğrultu ile başlanırsa başlansın, aynıdır. Örneğin, önce y- sonra x-doğrultusunda yapılan iki ardışık lineer enterpolasyon yukarıdaki aynı terimi verir.

Sadeleştirilmiş Algoritma

Eğer f'in bilindiği dört noktanın koordinatları (0, 0), (0, 1), (1, 0) ve (1, 1), ise; enterpolasyon denklemi aşağıdakince sadeleşir:

$$f(x, y) \approx f(0, 0)(1 - x)(1 - y) + f(1, 0)x(1 - y) + f(0, 1)(1 - x)y + f(1, 1)xy.$$

Eşdeğer matris formatında ise denklem:

$$f(x, y) \approx \begin{bmatrix} 1-x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-y \\ y \end{bmatrix}.$$

Bir Örnek

x koordinatları:

x=[0.5,0.6]

y koordinatları :

y=[0.2,0.3]

z değerleri:

z=[0.49,0.64,0.64,0.81]

Bu değerler, z(x,y) değerlerini bir 2x2 grid üzerinde sırasıyla temsil eder:

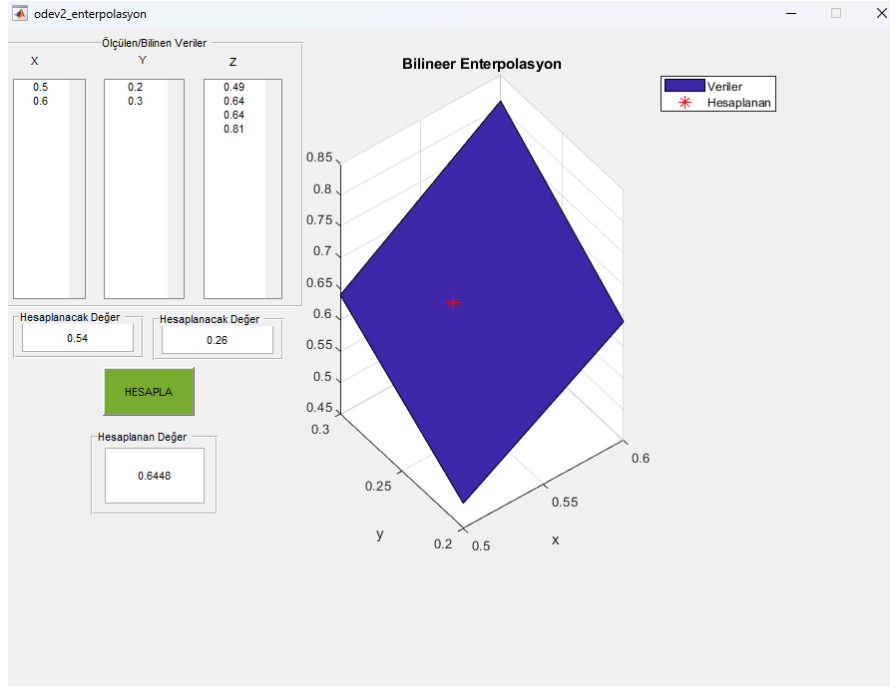
$$\begin{bmatrix} z(0.5, 0.2) & z(0.6, 0.2) \\ z(0.5, 0.3) & z(0.6, 0.3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.64 \\ 0.64 & 0.81 \end{bmatrix}$$

Hedef x ve y koordinatları:

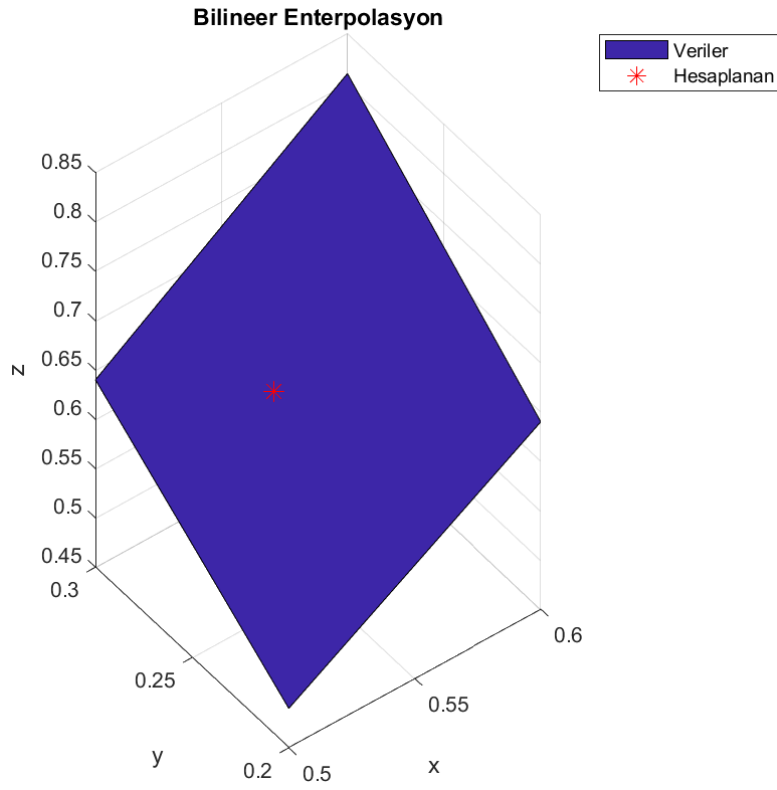
xt=0.54, yt=0.26

Sonuç

Hedef noktada (xt=0.54,yt=0.26) enterpolasyon sonucu GUI'de Hesaplanan Değer kutusunda görüntülenir ve grafik üzerinde kırmızı bir yıldız olarak işaretlenir.



Şekil 2. MATLAB GUI Uygulaması



Şekil 3. Bilinear Enterpolasyon Grafiği