

二〇二〇數學奧林匹亞競賽 APMO 競賽研習營

APMO 競賽實作

2020 年二月五日

時間限制: 計四小時 (8:30 – 12:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫

答案不得以修正液 (帶) 修正

不得使用電子計算器

每題七分

1. 設 x_1, x_2, \dots, x_n 為正實數, 其中 n 是正整數且 $n \geq 2$. 證明:

$$\left(\prod_{i=1}^n (1 + x_i) \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) \geq 2n^2.$$

2. 令 P 為圓 O 外一點, PA, PB 是圓 O 的兩條切線, 切點分別為 A, B . 圓 O 的割線 PCD 交弦 AB 於點 E , $EF \perp PA$, 垂足為 F .
試證: EF 平分 $\angle CFD$.

3. 求所有的實係數多項式 $f(x)$, 使得對滿足 $ab + bc + ca = 0$ 的實數 a, b, c , 有

$$f(a - b) + f(b - c) + f(c - a) = 2f(a + b + c).$$

4. 試求具有如下性質的質數 p 之最大值:

存在 $1, 2, \dots, p$ 的兩個排列 (可以相同) a_1, a_2, \dots, a_p 與 b_1, b_2, \dots, b_p , 使 $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p$ 被 p 除所得的餘數互不相同。

5. 設 n 為正整數且 $n \geq 3$, (a_1, a_2, \dots, a_n) 是任意的和為正數的 n 個不同的實數, (b_1, b_2, \dots, b_n) 是這 n 個數的一個排列。若對於任意的 k ($k = 1, 2, \dots, n$), 有 $\sum_{i=1}^k b_i > 0$, 則稱 (b_1, b_2, \dots, b_n) 是一個“好排列”。試求好排列個數的最小值。