2020 APMOC test

[Problem (https://sinewu.github.io/math/2020APMOC%E8%80%83%E8%A9%A6.pdf)](https://sinewu.github.io/math/2020APMOC%E8%80%83%E8%A9%A6.pdf)

sol

1.

> $1+x=(n-1)\frac{1}{n-1}+x\geq n\sqrt[n]{\frac{x}{(n-1)^{n-1}}}$
> 故左式$\geq \prod_{k=1}^{n}(n\sqrt[n]{\frac{xk}{(n-1)^{n-1}}})\times n\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}xk}}=n^2\times(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\geq 2n^2$
>
> - '=': $n=2,x_1=x_2=1$

2. 不懂交比的...我也沒辦法(?

> $(P,E;C,D)=-1$又$\angle PFE=90^\circ$
> $\therefore\ \angle CFE=\angle EFD$

3.

> $(0)\ (0,0,0):f(0)=0$
> $(0)\ b=c=0:f$為偶函數
> $(0)\ (\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}),a+b+c=0:f(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+f(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+f(\frac{1}{c}-\frac{1}{a})=2f(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$
> 設$g_n(x)=x^{2n}$,
> $h_n(a,b)=g_n(\frac{1}{a}-\frac{1}{b})+g_n(\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b})+g_n(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a})-2g_n(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b})\equiv 0\ \Leftrightarrow\ n=1$
> 設$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)\ \Rightarrow\ H(a,b)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i h_i(a,b)\equiv 0$
> 由於h_n為$-2n$次齊次式，考慮$H(2^q a,2^q b)$可得$\lambda_i=0\text{ or }h_i(a,b)\equiv 0$
> 故$f(x)=kx^2$對於某常數$k\in\mathbb{R}$

4.

> 不失一般性設$a_p=b_p=p$ (否則就有兩項對p同餘0)
> $\prod_{i=1}^{p-1}a_ib_i\equiv(p-1)!\equiv -1\mod p$
> $\prod_{i=1}^{p-1}a_i\prod_{i=1}^{p-1}b_i\equiv(-1)^2\equiv 1\mod p$
> $\therefore\ p=2$

5.

首先證明對於任一個數列$\{a_i\}_{i=1}^n$都存在一個m使$\sum_{i=0}^p a_{m+i} > 0 \,\forall\, p \in \mathbb{N}$
考慮$f(p)$定義為第一個r使$\sum_{k=p}^{r-1} a_k \leq 0$，其中$a_{n+r} = a_r$
考慮數列$1, f(1), f(f(1)), \cdots f^{(m-1)}(1)$其中$f^{(m)}(1) > n$
設從$a_{f^{(m-1)}(1)+k-1}$開始加，由於$f^{(m)}(1) > n$，故從該項開始加至a_n仍然為正數
如果加到某個下標為$f^{(k)}(1) - 1$時為負，由於後面可以拆成很多個負項的和，所以總和為負，矛盾

- 據說從前綴和最小的地方開始就好了(by LTF)

故從該項開始繞一圈為好數列，即至少$(n-1)!$個好數列
考慮構造$\{-1, -2, \cdots, -2^{n-2}, 2^{n-1}\}$，由於$2^{n-1}$必須排最前面，故此時恰好有$(n-1)!$個好數列