极限-1

- 函数极限
  - 左右极限
    - 如极限存在，则左极限 $==$ 右极限
    - $f(x)$在某点x_0的极限与$f(x)$在x_0是否存在定义无关
- 数列极限

0x01 极限四则运算

若 $limf(x) = A$、$limg(x) = B$,则:

- $lim[f(x) \pm g(x)] = limf(x) \pm limg(x) = A + B$
- $lim[f(x) \times g(x)] = limf(x) \times limg(x) = A \times B$
- $lim\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{limf(x)}{limg(x)} = \frac{A}{B}$

> 四则运算的前提：极限存在

0x02 极限的计算

极限计算的思路:

1. 定型

- 将极限条件代入函数式，确认什么类型的极限
- 定型时候，将非零因子（乘除关系中）先计算

2. 定法

- 根据类型定方法

如:

$lim_{\infty \to 0}\frac{1+2cos(x)}{3x+1} == \frac{1+2cos(0)}{3*0+1} = 3$

极限七类型运算

1. $\frac{\infty}{\infty}$型极限

解法：

1. 抓大头

题型：

1. 幂函数
2. 指数函数
3. 求参数

幂函数

解法：抓次方最大

$eg1$：求$lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}$的极限

思路：

1. 将极限条件∞代入函数式，明显为 $\frac{\infty}{\infty}$;
2. 分解分子分母，将其变成加减法形式;
3. 确认为幂函数题型;
4. 抓大头

$$
\begin{aligned}
\text{解：原式} &= lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3+n+4} \\
&= lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{n^3} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$eg2$：求$lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4}$的极限

思路：

1. 将极限条件∞代入函数式，明显为 $\frac{\infty}{\infty}$;
2. 分解分子分母，将其变成加减法形式;
3. 确认为幂函数题型;
4. 抓大头

$$\text{解：原式} = lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}$$
$$= lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}$$

> 关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限-幂函数的另一种解法：**分子分母同除式子中最高次项**
> $eg1$：求$lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2-1}{4x^3-2x^2+x-4}$的极限
> $$\text{解：原式} = lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}$$
> $$= \frac{1}{2}$$

指数函数

解法：抓指数最大，例如：$x\to+\infty, 3^x << 5^x$,因为 $3<5$

$eg1$：$lim_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x-5^x}$

$$\text{解：原式} = lim_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x}$$
$$= 1$$

利用$\frac{\infty}{\infty}$型极限存在，反求参数 a,b

解法：

1. $\frac{\infty}{\infty}$极限存在，意味极限应为常熟
2. 看分母最高次，再看分子最高次
3. 结论：
   i. 分母最高次 = 分子最高次，值为非零常数
   ii. 分母最高次 > 分子最高次，值为零

$eg1$：已知$lim_{x\to+\infty}\frac{(a+1)x^3-bx^2+x-1}{2x^2+3}=4$,求$a$，$b$的值。

解：

因为上题的比是个常数，所以分母最高次应等于分子最高次。所以 $a+1=0, a=-1$。

即 $lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{-bx^2+x-1}{2x^2+3}=-\frac{b}{2}=4$

即 b = -8

2. $\frac{0}{0}$型极限

1. 定义：分母趋于0，分子趋于0
2. 解法：利用等价无穷量求解
3. 等价公式：
4. $sinx\approx x$
5. $arcsinx\approx x$
6. $tanx\approx x$
7. $arctanx\approx x$
8. $e^x-1\approx x$
9. $ln(1+x)\approx x$
10. $1-cosx\approx\frac{1}{2}x^2$
11. $\sqrt[n]{1+x}-1\approx\frac{x}{n}$
12. $(1+ax)^b-1\approx abx$
13. $x-sinx\approx\frac{1}{6}x^3$
14. $tanx-x\approx\frac{1}{3}x^3$
15. $tanx-sinx\approx\frac{1}{2}x$
16. $a^x-1\approx xlna$
17. $ln(1+x)-x\approx-\frac{1}{2}x^2$
18. 使用条件：
    1. 在乘除关系使用，加减法运算慎用
    2. 在趋于零的时候使用

$eg1$：$lim_{x\rightarrow0}\frac{3sinmx}{2x}=\frac{3}{2}$，求$m$值。

$$\begin{aligned}\text{解：原式}&=lim_{x\rightarrow0}\frac{3sinmx}{2x}\\&=lim_{x\rightarrow0}\frac{3mx}{2x}\\&=\frac{3}{2}m\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

所以 $m=1$

$eg2:lim_{x\rightarrow0}\frac{xln(1+x)}{1-cosx}$

思路:

1. 极限值代入，发现为 $\frac{0}{0}$型
2. 分子为 x 与公式的乘法关系

$$
\text{解:} \\
= lim_{x\to0}\frac{x*x}{\frac{1}{2}x^2} \\
= 2
$$

eg：$lim_{x\to0}\frac{\sqrt{sin2x+1}-1}{x}$

思路:

1. 极限值代入，发现是 $\frac{0}{0}$型
2. 公式内的加减法

$$
\text{解:} \\
= lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}sin2x}{x} \\
= lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}2x}{x} \\
= 1
$$

eg：$\lim_{x\to0}\frac{a-2e^x-x}{x^2-x}$存在极限，则$a$值是什么?

思路:

1. 由于分母的极限为零，且极限存在
2. 则分子极限必须为零

$$
\text{解:} \\
a-2e^0-0=0 \\
a=2
$$

eg：$lim_{x\to\infty}(\frac{2sinx}{x}+xsin\frac{1}{x})$等于什么?

$$
\text{解:} \quad = lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}sinx+lim_{x\to\infty}x\frac{1}{x} \\
= 0+1 \\
= 1
$$

3. $0 * 有界$

$sin(\infty)$、$cos(\infty)$、$arctan(\infty)$：优先考虑$0 \times 有界 = 0$

$eg1: lim_{x \to 0} x * sin(\frac{1}{x})$

1. 代入极限值，发现为 $0 \times sin(\infty)$
2. $0 \times 有界 = 0$

$eg2: lim_{x \to \infty} x * sin(\frac{1}{x})$

1. 代入极限值，发现为 $\infty \times sin(\infty)$

$$
\begin{aligned}
解: \\
&= lim_{x \to \infty} x * sin(\frac{1}{x}) \\
&= lim_{x \to \infty} x * (\frac{1}{x}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$eg3: lim_{x \to \infty}(\frac{2sin(x)}{x} + x * sin(\frac{1}{x}))$

$$
\begin{aligned}
解: \\
&= lim_{x \to \infty} \frac{2sin(x)}{x} + lim_{x \to \infty} x * sin(\frac{1}{x}) \\
&= lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} * sin(x) + lim_{x \to \infty} x * sin(\frac{1}{x}) \\
&= 0 + x * \frac{1}{x} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

4. 洛必达法则

1. $\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$均可用洛必达法则
2. 洛必达法则：$lim\frac{f(x)}{g(x)} == lim\frac{f'(x)}{g'(x)} == lim\frac{f''(x)}{g''(x)} == ..... == A$
3. 先等价，再洛必达

eg：$lim_{x \to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1}$等于什么?

思路：

1. 代入极限值，发现 $\frac{0}{0}$
2. 等价公式？没有

3. 直接洛必达

$$
\begin{aligned}
\text{解：}\quad &= lim_{x\to1}\frac{5x^4}{4x^3} \\
&= lim_{x\to1}\frac{5x}{4} \\
&= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

5. $0*\infty$ 型极限

解法：

1. 下放
   i. 下方原则：简单，易求导函数
   ii. 三角函数类型，先化简为基本三角函数形式
2. 洛必达

$0*\infty$：

1. 对0取倒数，下放做分母：

$$0*\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}$$

2. 对∞取倒数：

$$0*\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$$

$eg1$：$lim_{x\to0+}x.ln(x)$

思路：

1. 代入极限值得：$0*ln(0)$。即：$0*\infty$
2. 下放简单的函数 x，得：

$$lim_{x\to0+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

3. $lim_{x\to0+}ln(x)\Longrightarrow\infty$，$lim_{x\to0+}\frac{1}{x}\Longrightarrow\infty$
4. 变成 $\frac{\infty}{\infty}$
5. 洛必达法则

解：

$$
\begin{aligned}
&= lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} * -x^2 \\
&= lim_{x \to 0+} - x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$eg2$：$lim_{x \to 0+} ln(1+x).ln(x)$

解：

$$
\begin{aligned}
&= lim_{x \to 0+} x.ln(x) \\
&= lim_{x \to 0+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} \\
&= lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} * -x^2 \\
&= lim_{x \to 0+} - x \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$eg3$：$lim_{x \to 1}(x-1) * tan(\frac{\pi}{2})x$

思路：

1. 化简得：$lim_{x \to 1} \frac{(x-1) * sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$
2. 定性时，非零因子（在乘除中的非零因子或非零函数）先行计算得：$lim_{x \to 1} \frac{(x-1)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$。（为什么 $(x-1)sin(\frac{\pi}{2}x)$ 不是 $0 \times$ 有界？因为极限是趋于 1，而非 ∞,趋于 1 的话，$sin(\frac{\pi}{2}x) = 1$，属于非零函数）
3. 代入极限值，发现为：$\frac{0}{0}$。
4. 洛必达定理：$lim_{x \to 1} \frac{1}{-sin(\frac{\pi x}{2})\frac{\pi x}{2}}$
5. 得$-\frac{2}{\pi}$

解:

$$= lim_{x\to1}(x-1)*\frac{sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$$
$$= lim_{x\to1}\frac{(x-1)*sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$$
$$= lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$$
$$= lim_{x\to1}\frac{1}{-sin(\frac{\pi}{2}x)*\frac{\pi}{2}x}$$
$$= -\frac{2}{\pi}$$

6.$\infty - \infty$ 型极限

题型:

1. 分式
   i. 通分
2. 根式
   i. 有理化，利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$eg1: lim_{x\to0}(\frac{1}{x^2}-\frac{sin(x)}{x^3})$

思路:

1. 代入极限值得：$lim_{x\to0}(\frac{1}{0^2}-\frac{sin(0)}{0^3})$，为 $\infty-\infty$ 型
2. 分式，通分得：$lim_{x\to0}\frac{x-sin(x)}{x^3}$，变成 $\frac{0}{0}$ 型
3. 替换公式得：$\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$
4. 得：$\frac{1}{6}$

解:

$$= lim_{x\to0}\frac{x-sin(x)}{x^3}$$
$$= \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$$
$$= \frac{1}{6}$$

$eg2: lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)$

思路:

1. 代入极限值得：$lim_{x\to+\infty}(\sqrt{\infty^2+4\infty+1}-\infty)$, 为 $\infty-\infty$ 型
2. 根式，有理化得：$lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+1}-x)(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}$
3. 化简得：$lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}=lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$,变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型
4. 抓大头得：$lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}+x}=lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{x+x}=2$

解：

$$
\begin{aligned}
&=lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+1}-x)(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}\\
&=im_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}\\
&=lim_{x\to+\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}\\
&=lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}+x}\\
&=2
\end{aligned}
$$

$eg3:lim_{x\to0}\frac{\sqrt{sin(2x)+1}-1}{x}$

思路1：

1. 四则运算得：$lim_{x\to0}\frac{\sqrt{sin(2x+1)}}{x}-\frac{1}{x}$
2. 代入极限值得：$lim_{x\to0}\frac{\sqrt{sin(0+1)}}{0}-\frac{1}{0}$，为 $\infty-\infty$
3. 根式，有理化得：$lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{sin(2x)+1}-1)(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}$
4. 化简得：$\frac{sin(2x)+1-1}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}=\frac{sin(2x)}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}$，变成 $\frac{0}{0}$ 型。
5. 根据定型时先计算非零因子的原则，$(\sqrt{sin(2x)+1}+1)$ 在 $lim_{x\to0}$ 时，趋向 2。所以有 $\frac{sin(2x)+1-1}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}=\frac{sin(2x)}{2x}$。为什么 $\frac{sin(2x)}{2x}$ 中 $sin(2x)\neq0$？因为是接近 0 ，而非直接等于 0。
6. 等价公式：$\frac{sin(2x)}{2x}=\frac{2x}{2x}=1$

思路2：

1. 由于当 $x\to0$ 时，分子 $\sqrt{sin(2x+1)}-1$ 和 x 均趋于 0，因此可以使用洛必达法则
2. 分子求导得：$\frac{d}{dx}(\sqrt{sin(2x+1)}-1)=\frac{d}{dx}(\sqrt{sin(2x+1)}=\frac{1}{2\sqrt{sin(2x)+1}}.cos(2x).2=\frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)+1}}$
3. 分母求导得：1
4. $lim_{x\to0}\frac{\sqrt{sin(2x)+1}-1}{x}=lim_{x\to0}\frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)+1}}=\frac{1}{1}=1$

7. u^v 型

题型:

1. 1^{∞}
   i. $e^{lim(u-1).v}$
   ii. e^{vlnu}(幂函数对数化)
2. 0^0、∞^0
   i. e^{vlnu}

$eg1: lim_{x\to 0}cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$
\begin{aligned}
&解: \\
&= e^{lim_{x\to 0}(con(x)-1)\frac{1}{x^2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x^2}} \\
&= e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$eg2: lim_{x\to\infty}(\frac{3+2x}{2+2x})^x$

$$
\begin{aligned}
&解: \\
&= e^{lim_{x\to\infty}((\frac{3+2x}{2+2x})-1)x} \\
&= e^{llim_{x\to\infty}(\frac{1}{2+2x})x} \\
&= e^{llim_{x\to\infty}(\frac{x}{2x})} \\
&= e^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$eg3: lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = lim_{x\to 0}\frac{sin(sin(kx))}{x}$,求$k$值

$$
\begin{aligned}
&解: \\
&= e^{lim_{x\to 0}((1+2x)-1).\frac{1}{x}} \\
&= e^{lim_{x\to 0}(2x).\frac{1}{x}} \\
&= e^2 \\
&即有lim_{x\to 0}\frac{sin(sin(kx))}{x} = e^2 \\
&= \frac{sin(kx)}{x} = e^2 \\
&= \frac{kx}{x} = e^2 \\
&= k = e^2
\end{aligned}
$$

$eg4: lim_{x \to 0} x^{sin(x)}$

$$
\begin{aligned}
\text{解:} \\
&= e^{lim_{x \to 0} sin(x) ln(x)} \\
&= e^{lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{\frac{1}{ln(x)}}} \\
&= e^{lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{\frac{1}{ln(x)}}} \\
&= e^{lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{1}{ln(x)}}} \\
&= e^{lim_{x \to 0} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}} \\
&= e^{lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}} \\
&= e^0 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

0x03 极限计算小结

1. $\frac{\infty}{\infty}$
   i. 抓大头
   ii. 洛必达
2. $\frac{0}{0}$
   i. 等价替换
   ii. 洛必达
3. $0.\infty$
   i. 下放（简单，易求导部分）
   ii. 转换为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$
4. $\infty - \infty$
   i. 分式：通分
   ii. 根式：有理化
5. u^v
   i. 1^∞
      a. $u^v = e^{lim(u-1)v}$
   ii. ∞^0 和 ∞^0
      a. $u^v = e^{vlnu}$

注意事项

1. 非零因子常数项先求，然后化简
2. 等价替换的条件
    i. $\square \to 0$
    ii. 乘除关系中
3. $0 * \text{有界} = 0$