极限-2

0x01 左右极限

考点

1. 分段函数-分段点
2. 含绝对值的函数
3. e^{∞}、$\frac{c}{0}$、$arctan(\infty)$

$eg1:已知f(x)=\begin{cases} 1+3x-e^{2x} & ,x\le 0 \\ \frac{ln(1-2x^2)}{sin(x)} & ,x>0 \end{cases}$ 求$lim_{x\to 0}f(x)$

解:

$$
\begin{aligned}
& lim_{x\to 0^-}1+3x-e^{2x} && ,x\le 0 \\
& =lim_{x\to 0^-}1+3*0-e^{2*0} \\
& =0 \\
& lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1-2x^2)}{sin(x)} && ,x>0 \\
& =lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{4x}{1-2x^2}}{cos(x)} \\
& =-4x \\
& =0 \\
& lim_{x\to 0^-}f(x)=lim_{x\to 0^+}f(x)=0
\end{aligned}
$$

综上所述:

$$lim_{x\to 0}f(x)=0$$

$eg2:已知f(x)=\begin{cases} \frac{tan(k\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & ,x>0 \\ sin(x)+3 & ,x\le 0 \end{cases}$ 若极限存在，则k值是?

解:

$$lim_{x\to 0^-} sin(x)+3 \qquad ,x\leq 0$$
$$=lim_{x\to 0^-} 0+3$$
$$=3$$

根据条件得: $$lim_{x\to 0^+}\frac{tan(k\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=3 \qquad ,x>0$$
$$=lim_{x\to 0^+}\frac{sin(k\sqrt{x})}{cos(k\sqrt{x})\sqrt{x}}$$
$$=lim_{x\to 0^+}\frac{sin(k\sqrt{x})}{1*\sqrt{x}}$$
$$=lim_{x\to 0^+}\frac{k\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=k$$

所以:

$$k=3$$

$eg3:$ 已知$f(x)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$，证明$lim_{x\to 0}f(x)$不存在

解:

$$lim_{x\to 0^-}f(x)$$
$$=lim_{x\to 0^-}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$
$$=-1$$

$$lim_{x\to 0^+}f(x)$$
$$=lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$
$$=1$$

$\because$

$$lim_{x\to 0^-}f(x)\neq lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$\therefore$

$lim_{x\to 0}f(x)$不存在

0x02 夹逼定理

定义

若函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$，在 x_0 的领域范围内有: $f(x) \le g(c) \le f(x)$ 。
当 $lim_{x \to x_0} f(x) = lim_{x \to x_0} h(x) = A$，则 $lim_{x \to x_0} g(x) = A$

适用条件

无穷项求和型极限

使用步骤

1. 确定极限项数
2. 确定最小项，确定最大项
3. 取极限

$eg1:$ 求 $lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n^2+n-1} + \frac{1}{n^2+n-2} + ... + \frac{1}{n^2+n-n})$

解:

$$(\frac{1}{n^2+n-1}).n \le (\frac{1}{n^2+n-1} + \frac{1}{n^2+n-2} + ... + \frac{1}{n^2+n-n}) \le (\frac{1}{n^2+n-n}).n$$

$$lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n^2+n-1}).n \\ = \frac{1}{n} \\ = 0$$

$$lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n^2+n-n}).n \\ = \frac{1}{n} \\ = 0$$

$$由夹逼定理得 lim_{n \to \infty}(\frac{1}{n^2+n-1} + \frac{1}{n^2+n-2} + ... + \frac{1}{n^2+n-n}) = 0$$

$eg2:$ 证明极限 $lim_{n \to \infty} n.(\frac{1}{n^2+\pi} + \frac{1}{n^2+2\pi} + ... + \frac{1}{n^2+n\pi}) = 1$

解:

$$n.(\frac{1}{n^2+n\pi}) \le n.(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi}) \le n.(\frac{1}{n^2+\pi})$$

$$lim_{n\to\infty}n^2.(\frac{1}{n^2+n\pi})$$
$$=1$$

$$lim_{n\to\infty}n^2(\frac{1}{n^2+\pi})$$
$$=1$$

由夹逼定理得$lim_{n\to\infty}n.(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+...+\frac{1}{n^2+n\pi})=1$

0x03 连续

$eg1:$ 设 $f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\ge 0 \\ x-2 & ,x<0 \end{cases}$ $,x=0$ 处是否连续?

解:

$$lim_{x\to 0^+}x+2 \qquad ,x\ge 0$$
$$=2$$

$$f(0)=2$$

$$lim_{x\to 0^-}x-2 \qquad ,x<0$$
$$=-2$$

$$lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\ne lim_{x\to 0^-}f(x)$$

所以:

该函数在 $x=0$ 处不连续

$eg2:$ 设 $f(x)=\begin{cases} (1-x)^{\frac{1}{x}} & ,x\ne 0 \\ a & ,x=0 \end{cases}$ $,x=0$ 处连续，则a值是?

解:

$$lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}} \qquad ,x\neq 0$$
$$=e^{lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-x-1)}$$
$$=e^{lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(-x)}$$
$$=e^{-1}$$
$$\because$$
$$f(x)=lim_{x\to 0}f(x)$$
$$\therefore$$
$$a=e^{-1}$$

$eg3:$ 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ,x\geq 2 \\ x+a & ,x<0 \end{cases}$ $,x=2$ 处连续，则a值是?

解:

$$\because$$
$$f(2)=lim_{x\to 0^-}f(x)=3$$
$$\therefore$$
$$a=1$$

$eg4:$ 设 $f(x)=\begin{cases} x+a & ,x\leq 0 \\ ln(x+e) & ,x>0 \end{cases}$ $,(-\infty,+\infty)$ 处连续，则a值是?

解:

$$lim_{x\to 0}ln(x+e)$$
$$=1$$
$$\because$$
$$f(0)=lim_{x\to 0^+}ln(x+e)=1$$
$$\therefore$$
$$a=1$$

0x04 间断

定义

函数在定义区间不再连续

间断点

指函数不再连续的点

间断点分类

分类标准：间断点左右极限是否存在作为划分依据

1. 第一类间断点：左右极限存在
   i. 跳跃间断点（左极限 $\neq$ 右极限）
   ii. 可去间断点（左极限 $=$ 右极限）
2. 第二类间断点：左右极限不存在
   i. 无穷间断点（左右极限为 ∞）
   ii. 振荡间断点（指 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 剧烈波动，无定值）
   iii. 例如：$x = 0$ 是 $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$ 的振荡间断点
   iv.

考点

1. 间断点的识别
   i. 分母 = 0 :$\Longrightarrow$ 必间断
   ii. 分段函数的分段点: $\Longrightarrow$ 可能间断
   iii. 函数的无定义点：$\Longrightarrow$ 必间断
2. 题型：
   i. 判断间断点个数

$eg1$: 函数$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-1)(x-2)}$的间断点个数为：$\underline{?}$

$$
\begin{aligned}
&\text{解:} \\
&\text{令:} \\
&\qquad (x+1)(x-1)(x-2) = 0 \\
&\text{得:} \\
&\qquad \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\
\text{综上所述:}& \\
&\qquad f(x)\text{的间断点个数为：}\underline{3}
\end{aligned}
$$

$eg2$: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x-1)(x-2)}$的间断点个数为：$\underline{?}$

解:

令:

$$(x+1)(x-1)(x-2)=0$$

得:

$$\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

又:

$$x \geq 0$$

综上所述:

$f(x)$的间断点个数为：$\underline{2}$

$$eg3:\text{讨论} f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & ,x<0 \\ 0 & ,x=0 \\ arctan(\frac{1}{x}) & ,x>0 \end{cases} \text{的间断点}$$

$$
\begin{aligned}
解：\
& lim_{x \to 0^-}f(x) = lim_{x \to 0^-}e\frac{1}{x} \
& = 0 \
\
& lim_{x \to 0^+}f(x) = lim_{x \to 0^+}arctan(\frac{1}{x}) \
& = \frac{\pi}{2} \
\because \
& lim_{x \to 0^-}f(x) \not = lim_{x \to 0^+}f(x) \
\therefore \
& x = 0 是f(x) 的跳跃间断点

\end{aligned}
$$

$eg4:\text{设} f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则$x=0$是$f(x)$的$\underline{???}$间断点

$$
\begin{aligned}
解：\
& lim_{x \to 0^-}f(x) = lim_{x \to 0^-}\frac{e{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} \

& = -1 \

\

& lim_{x \to 0^+}f(x) = lim_{x \to 0^+}\frac{e{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1} \

& = 1 \

\because \

& lim_{x \to 0^-}f(x) \not = lim_{x \to 0^+}f(x) \

\therefore \

& x = 0 是f(x) 的跳跃间断点

\end{aligned}

$$

$eg5 : x = 0$是$f(x) = \frac{ln(1+x)}{x}$，的$\underline{???}$间断点

$$

\begin{aligned}

解：\

& lim_{x \to 0^-}f(x) = lim_{x \to 0^-}\frac{ln(1+x)}{x} \

& = lim_{x \to 0^-}\frac{x}{x} \

& = 1 \

\

& lim_{x \to 0^+}f(x) = lim_{x \to 0^+}\frac{ln(1+x)}{x} \

& = lim_{x \to 0^+}\frac{x}{x} \

& = 1 \

\because \

& lim_{x \to 0^-}f(x) = lim_{x \to 0^+}f(x) \

\therefore \

& x = 0 是f(x) 的可去间断点

\end{aligned}

$$

$eg6 :$ 设 $x = 0$ 是 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+cos(x)} & ,x < 0 \\ 1 & ,x = 0 \\ \frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x} & ,x > 0 \end{cases}$,的可去间断点，求a值

解：

$$lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+cos(x)}$$
$$=\frac{1}{2}$$
$$lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$$
$$=lim_{x\to0^+}\frac{-\sqrt{a-x}}{x}$$
$$=lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{a-x}}$$
$$=lim_{x\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$\because$

$$lim_{x\to0^-}f(x)=lim_{x\to0^+}f(x)=\frac{1}{2}$$

$\therefore$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$$
$$a=1$$

0x05 无穷小量及其比较

无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量：若 $limf(x)=0$，称此时的$f(x)$为无穷小量
   i. $f(x)=0$ 也是无穷小量
2. 无穷大量：若 $limf(x)=\infty$，称此时的$f(x)$为无穷大量
3.

无穷小量与无穷大量的关系

1. $\frac{1}{无穷大}=无穷小$
2. $\frac{1}{无穷小}=无穷大$，($无穷小\neq0$)
3.

无穷小量的加法运算

取次方最低：$x^2+x^4=x^2$，因为 $(0.1)^2>(0.1)^4$

无穷小量的比较

1. 无穷小量的阶数越高，越趋于 0 （阶数指 x 的次方）
2. $lim\dfrac{b}{a}=\begin{cases} c & ,同阶 \\ 1 & ,等价（a=b) \\ \infty & ,b比a低阶 \\ 0 & ,a比b高阶 \end{cases}$
3. 题型
   i. 判断两无穷小的关系
   ii. 指出某无穷小的阶
   iii. 已知某无穷小的阶，反求参数
4. 解法
   i. 取$\lim\frac{b}{a}$，根据结论得结果
   ii. 优先使用等价

$eg1$：下列是无穷小量的是（A）？
$A.lim_{x\to0}x.sin(\frac{1}{x})$
$B.lim_{x\to\infty}x.sin(x)$
$C.lim_{x\to0}\frac{1}{x}.sin(x)$
$D.lim_{x\to\infty}x.sin(\frac{1}{x})$

$$A.\ lim_{x\to 0}x.sin(\frac{1}{x})$$
$$=lim_{x\to 0}0.sin(\frac{1}{0})$$
$$=0*\text{有界}$$
$$=0$$

$$B.\ lim_{x\to \infty}x.sin(x)$$
$$=lim_{x\to \infty}\infty.sin(\infty)$$
$$=\infty$$

$$C.\ lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.sin(x)$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{1}{0}.sin(0)$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{sin(0)}{0}$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{1}{x}.x$$
$$=1$$

$$D.\ lim_{x\to \infty}x.sin(\frac{1}{x})$$
$$=lim_{x\to \infty}\infty.sin(\frac{1}{\infty})$$
$$=0*\infty$$
$$=lim_{x\to \infty}\frac{sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$
$$=lim_{x\to \infty}\frac{0}{0}$$
$$=lim_{x\to \infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$
$$=1$$

$eg2:$ 已知$f(x)$是一个无穷小量，则$\frac{1}{f(x)}$是一个无穷大量（❌）

解释：

0也是无穷小量，分母不能为0

$eg3:$无穷小量是一个很小很小的数（❌）

解释：

无穷销量是一个动态接近0的数，而非是一个确定的很小很小的数

$eg3:$当$x\to 0$时，$2x^3+x^2$与x的阶数

$$\because$$

$$lim_{x\to 0}\frac{2x^3+x^2}{x}$$

$$=lim_{x\to 0}6x^2+2x$$

$$=0$$

$$\therefore$$

$2x^3+x^2$比x高阶

$eg4:$当$x\to 0$时。与x^2等价的是（C）

$A.1-e^{x^2}$

$B.1-con(2x)$

$C.ln(1+x^2)$

$D.\sqrt{1+x^2}-1$

$$A.\ lim_{x\to 0}\frac{1-e^{x^2}}{x^2}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$=\frac{-x^2}{x^2}$$
$$=-1$$
$$B.\ lim_{x\to 0}\frac{1-con(2x)}{x^2}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$=\frac{2x^2}{x}$$
$$=2$$
$$C.\ lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{x^2}$$
$$=\frac{0}{0}$$
$$=\frac{x^2}{x^2}$$
$$=1$$

$$D.\ lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$$
$$=\frac{0}{0}$$

$$=\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$eg5: x\to 0$时，$ln(1+x^3)$和$x.sin(x^n)$是同阶无穷小，则$n=\underline{?}$

解:

$$lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x^3)}{x.sin(x^n)}$$

$$lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^{1+n}}$$

$\because$

$ln(1+x^3)$和$x.sin(x^n)$是同阶无穷小

$\therefore$

$1+n=3$

$n=2$

$eg6: x\to 0$，$x-sin(x)$比$\sqrt{1+x^n}-1$高阶，但$\sqrt{1+x^n}-1$比e^x-1高阶，则正整数$n=\underline{2}$

$$lim_{x\to 0}\frac{x-sin(x)}{\sqrt{1+x^n}-1}$$

$$=lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{\frac{x^n}{2}}$$

$$=lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^n}$$

$\because$

$x-sin(x)$比$\sqrt{1+x^n}-1$高阶

$\therefore$

$n<3$

$$lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^n}-1}{e^x-1}$$

$$=lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^n}{2}}{x}$$

$\because$

$x-sin(x)$比$\sqrt{1+x^n}-1$高阶

$\therefore$

$n>1$

$n=2$

$eg7: x\to 0, (1+ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$cos(x)-1$是等价的，则$a=\underline{?}$

解:

$$lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{cos(x)-1}$$
$$=lim_{x\to 0}\frac{\frac{ax^2}{4}}{-\frac{x^2}{2}}$$
$$=lim_{x\to 0}-\frac{2ax^2}{4x^2}$$

$\because$

$1+ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$与$cos(x)-1$是等价

$\therefore$

$$-\frac{2ax^2}{4x^2}=1$$
$$a=-2$$

0x06 利用极限求曲线渐近线

定义

函数 $f(x)$ 在变化过程中，无限接近一条直线

分类

1. 水平渐近线
    i. 当$lim_{x\to\infty}f(x)=A$(常数)，称 $y=A$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线,例如：$f(x)=arctan(x)$
2. 垂直渐近线
    i. 当$lim_{x\to 0}f(x)=\infty$，称 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线,例如：$f(x)=\frac{1}{x}$
    ii. x_0 通常为分母为 0 及其他函数无定义的点
3. 斜渐近线
    i. 当$lim_{x\to 0}f(x)=ax+b$，称 $ax+b$ 为 $f(x)$ 的写斜渐近线
    ii. $a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$
    iii. $b=lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]$
    iv. 如果一个函数同时拥有水平渐近线和垂直渐近线，则不可能有斜渐近线

$eg1:$求$y=\frac{2x+1}{(x-1)^2}$渐近线条数：$\underline{?}$

解:

求水平渐近线

$\because$

$$lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{(x-1)^2}$$
$$=lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{(x-1)^2}$$
$$=lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2}$$
$$=lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$$
$$=0$$

$\therefore$

$y=0$是$f(x)$的水平渐近线

求垂直渐近线

$\because$

$$lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(x-1)^2}$$
$$=lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{(x-1)^2}$$
$$=lim_{x\to 1}\frac{3}{(x-1)^2}$$
$$=\infty$$

$\therefore$

$x=1$是$f(x)$的垂直渐近线

$eg2:$求$f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$的斜渐近线

解:

求斜渐近线

$$a = limx \to \infty \frac{x^2-2x-3}{(x+1)x}$$

$$= limx \to \infty \frac{x^2}{x^2}$$

$$= 1$$

$$b = limx \to \infty \frac{x^2-2x-3}{(x+1)} - x$$

$$= limx \to \infty \frac{(x^2-2x-3)-(x+1)x}{(x+1)}$$

$$= limx \to \infty \frac{(x^2-2x-3)-(x+1)x}{(x+1)}$$

$$= limx \to \infty \frac{-3(x+1)}{(x+1)}$$

$$= -3$$

$f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x+1}$的斜渐近线为$: y = x-3$

$eg3:$ 求$y = xe^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线

解:

求斜渐近线

$$a = lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

$$b = lim_{x\to\infty} xe^{\frac{1}{x}} - x$$

$$= lim_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$= lim_{x\to\infty} x.\frac{1}{x}$$

$$= 1$$

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$的斜渐近线为$: y = x+1$