极限-1

- 函数极限
  - 左右极限
    - 如极限存在，则左极限 $==$ 右极限
    - $f(x)$在某点x_0的极限与$f(x)$在x_0是否存在定义无关
- 数列极限

0x01 极限四则运算

若 $limf(x)=A$、$limg(x)=B$,则：

- $lim[f(x) \pm g(x)]=limf(x) \pm limg(x)=A+B$
- $lim[f(x) × g(x)] = limf(x) × limg(x)=A×B$
- $lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{limf(x)}{limg(x)}=\frac{A}{B}$

> 四则运算的前提：极限存在

0x02 极限的计算

极限计算的思路：

1. 定型

- 将极限条件代入函数式，确认什么类型的极限
- 定型时候，将非零因子（乘除关系中）先计算

2. 定法

- 根据类型定方法

如：

$lim_{\infty \to 0}\frac{1+2cos(x)}{3x+1}==\frac{1+2cos(0)}{3*0+1} =3$

极限七类型运算

1. $\frac{\infty}{\infty}$型极限

解法：

1. 抓大头

题型：

1. 幂函数
2. 指数函数
3. 求参数

幂函数

解法：抓次方最大

$eg1：求 lim_{n \to \infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4} 的极限$

思路：

1. 将极限条件$\infin$代入函数式，明显为 $\frac{\infty}{\infty}$;
2. 分解分子分母，将其变成加减法形式;
3. 确认为幂函数题型;
4. 抓大头

$$ \begin{aligned} 解：原式 & = lim_{n \to \infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3+n+4}\ & = lim_{n \to \infty}\frac{2n^3}{n^3}\ & = 2 \end{aligned} $$

$eg2：求 lim_{n \to \infty}\frac{n^2(2n+1)}{n^3+n+4} 的极限$

思路：

1. 将极限条件$\infin$代入函数式，明显为 $\frac{\infty}{\infty}$;
2. 分解分子分母，将其变成加减法形式;
3. 确认为幂函数题型;
4. 抓大头

$$ \begin{aligned} 解：原式 & = lim_{n \to \infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2}}\ & = lim_{n \to \infty}\frac{n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}\ & = lim_{n \to \infty}\frac{n}{2n}\ & =\frac{1}{2}\ \end{aligned} $$

> 关于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限-幂函数的另一种解法：**分子分母同除式子中最高次项 $eg1：求 lim_{x \to +\infty}\frac{2x^3+x^2-1}{4x^3-2x^2+x-4} 的极限$** $$ \begin{aligned} 解：原式 & = lim_{x \to +\infty}\frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}}\ & = \frac{1}{2} \end{aligned} $$

指数函数

解法：抓指数最大，例如：$x \to+\infty,3^x << 5^x$,因为 $3 < 5$

$eg1：lim_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x-5^x}$

$$ \begin{aligned} 解：原式 & = lim_{x\to+\infty}\frac{8^x}{8^x}\ & = 1 \end{aligned} $$

利用$\frac{\infty}{\infty}$型极限存在，反求参数 a,b

解法：

1. $\frac{\infty}{\infty}$极限存在，意味极限应为常熟
2. 看分母最高次，再看分子最高次
3. 结论：
    1. 分母最高次 = 分子最高次，值为非零常数
    2. 分母最高次 > 分子最高次，值为零

$eg1：已知lim_{x\to+\infty}\frac{(a+1)x^3-bx^2+x-1}{2x^2+3}=4,求 a，b 的值。$

解：

因为上题的比是个常数，所以分母最高次应等于分子最高次。所以 $a+1=0,a=-1$。

即 $\lim_{x\to+\infty}\frac{-bx^2+x-1}{2x^2+3}=-\frac{b}{2}=4$

即 b = -8

2. $\frac{0}{0}$型极限

1. 定义：分母趋于0，分子趋于0
2. 解法：利用等价无穷量求解
3. 等价公式：
4. $sinx \approx x$
5. $arcsinx \approx x$
6. $tanx \approx x$
7. $arctanx \approx x$
8. $e^x-1 \approx x$
9. $ln(1+x) \approx x$
10. $1-cosx \approx \frac{1}{2}x^2$
11. $\sqrt[n]{1+x}-1 \approx \frac{x}{n}$
12. $(1+ax)^b-1 \approx abx$
13. $x-sinx \approx \frac{1}{6}x^3$
14. $tanx-x \approx \frac{1}{3}x^3$
15. $tanx-sinx \approx \frac{1}{2}x$
16. $a^x-1 \approx xlna$
17. $ln(1+x)-x \approx -\frac{1}{2}x^2$
18. 使用条件：
    1. 在乘除关系使用，加减法运算慎用
    2. 在趋于零的时候使用

$eg1：lim_{x \to 0}\frac{3sinmx}{2x}=\frac{3}{2}，求 m 值。$

$$ \begin{aligned} 解：原式 &= lim_{x \to 0}\frac{3sinmx}{2x}\ &= lim_{x \to 0}\frac{3mx}{2x}\ &= \frac{3}{2}m\ &= \frac{3}{2}\ \end{aligned} $$

所以 $m = 1$

$eg2: lim_{x \to 0}\frac{xln(1+x)}{1-cosx}$

思路：

1. 极限值代入，发现为 $\frac{0}{0}$型
2. 分子为 x 与公式的乘法关系

$$ \begin{aligned}
解：\ & = lim_{x \to 0} \frac{x*x}{\frac{1}{2}x^2}\ & = 2\ \end{aligned} $$

$eg：lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{sin2x+1}-1}{x}$

思路：

1. 极限值代入，发现是 $\frac{0}{0}$型
2. 公式内的加减法

$$ \begin{aligned} 解：\ & = lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}sin2x}{x}\ & = lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}2x}{x}\ & = 1 \end{aligned} $$

$eg：\lim_{x \to 0} \frac{a-2e^x-x}{x^2-x}存在极限，则a值是什么？$

思路：

1. 由于分母的极限为零，且极限存在
2. 则分子极限必须为零

$$ \begin{aligned} 解：\ & a-2e^0-0=0\ & a=2 \end{aligned} $$

$eg：lim_{x \to \infty}(\frac{2sinx}{x}+xsin\frac{1}{x})等于什么？$

$$ \begin{aligned} 解：& = lim_{x \to \infty}\frac{2}{x}sinx+lim_{x \to \infty}x\frac{1}{x}\ & = 0 + 1\ & = 1 \end{aligned} $$

3. $0*有界$

$sin(\infty)、cos(\infty)、arctan(\infty)：优先考虑 0 × 有界 = 0$

$eg1:lim_{x \to 0}x*sin(\frac{1}{x})$

1. 代入极限值，发现为 $0 × sin(\infty)$
2. $0 × 有界 = 0$

$eg2:lim_{x \to \infty}x*sin(\frac{1}{x})$

1. 代入极限值，发现为 $\infty × sin(\infty)$

$$ \begin{aligned} 解：\ & = lim_{x \to \infty}xsin(\frac{1}{x})\ & = lim_{x \to \infty}x(\frac{1}{x})\ & = 1 \end{aligned} $$

$eg3:lim_{x \to \infty}(\frac{2sin(x)}{x}+x*sin(\frac{1}{x}))$

$$ \begin{aligned} 解:\ & = lim_{x \to \infty}\frac{2sin(x)}{x}+lim_{x \to \infty}xsin(\frac{1}{x})\ & = lim_{x \to \infty}\frac{2}{x}sin(x)+lim_{x \to \infty}xsin(\frac{1}{x})\ & = 0 + x\frac{1}{x}\ & = 1 \end{aligned} $$

4. 洛必达法则

1. $\frac{0}{0} 和 \frac{\infty}{\infty} 均可用洛必达法则$
2. 洛必达法则：$lim\frac{f(x)}{g(x)} == lim\frac{f'(x)}{g'(x)} == lim\frac{f''(x)}{g''(x)} == ..... == A$
3. 先等价，再洛必达

$eg：lim_{x \to 1}\frac{x^5-1}{x^4-1} 等于什么？$

思路：

1. 代入极限值，发现 $\frac{0}{0}$
2. 等价公式？没有

3. 直接洛必达

$$ \begin{aligned} 解：& = lim_{x \to 1}\frac{5x^4}{4x^3}\ & = lim_{x \to 1}\frac{5x}{4}\ & = \frac{5}{4}\ \end{aligned} $$

5. $0 * \infty$ 型极限

解法：

1. 下放
    1. 下方原则：简单，易求导函数
    2. 三角函数类型，先化简为基本三角函数形式
2. 洛必达

$0*\infty：$

1. 对0取倒数，下放做分母： $$ \begin{aligned} 0*\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty} \end{aligned} $$
2. 对∞取倒数： $$ \begin{aligned} 0*\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0} \end{aligned} $$

$eg1：lim_{x \to 0+}x.ln(x)$

思路：

1. 代入极限值得：$0*ln(0)*$。*即：*$0*\infty$
2. 下放简单的函数 x，得： $$ \begin{aligned} lim_{x \to 0+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} \end{aligned} $$
3. $lim_{x \to 0+}ln(x)\Longrightarrow \infty$，$lim_{x \to 0+}\frac{1}{x}\Longrightarrow \infty$
4. 变成 $\frac{\infty}{\infty}$
5. 洛必达法则

$$ \begin{aligned} 解：\ &=lim_{x \to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\ & = lim_{x \to 0+}\frac{1}{x}*-x^2\ & = lim_{x \to 0+}-x\ & = 0 \end{aligned} $$

$eg2：lim_{x \to 0+}ln(1+x).ln(x)$

$$ \begin{aligned} 解:\ & = lim_{x \to 0+}x.ln(x)\ & = lim_{x \to 0+}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}\ &=lim_{x \to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\ & = lim_{x \to 0+}\frac{1}{x}*-x^2\ & = lim_{x \to 0+}-x\ & = 0 \end{aligned} $$

$eg3：lim_{x \to 1}(x-1)*tan(\frac{\pi}{2})x$

思路：

1. 化简得：$lim_{x \to 1}\frac{(x-1)*sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$
2. 定性时，非零因子（在乘除中的非零因子或非零函数）先行计算得：$lim_{x \to 1}\frac{(x-1)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}$。（为什么 $(x-1)sin(\frac{\pi}{2}x)$ 不是 $0×有界$？ 因为极限是趋于 1 ，而非 ∞,趋于 1 的话，$sin(\frac{\pi}{2}x)=1$，属于非零函数）
3. 代入极限值，发现为：$\frac{0}{0}$。
4. 洛必达定理：$lim_{x \to 1}\frac{1}{-sin(\frac{\pi x}{2})\frac{\pi x}{2}}$

5. 得$-\frac{2}{\pi}$

$$ \begin{aligned} 解：\ & = lim_{x \to 1}(x-1)*\frac{sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}\ & = lim_{x \to 1}\frac{(x-1)sin(\frac{\pi}{2}x)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}\ & = lim_{x \to 1}\frac{(x-1)}{cos(\frac{\pi}{2}x)}\ & = lim_{x \to 1}\frac{1}{-sin(\frac{\pi}{2}x)\frac{\pi}{2}x}\ & = -\frac{2}{\pi} \end{aligned} $$

6.$\infty - \infty$ 型极限

题型：

1. 分式
    1. 通分
2. 根式
    1. 有理化，利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$eg1:lim_{x \to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{sin(x)}{x^3})$

思路：

1. 代入极限值得：$lim_{x \to 0}(\frac{1}{0^2}-\frac{sin(0)}{0^3})$，为 $\infty - \infty$ 型
2. 分式，通分得：$lim_{x \to 0}\frac{x-sin(x)}{x^3}$，变成 $\frac{0}{0}$ 型
3. 替换公式得：$\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$
4. 得：$\frac{1}{6}$

$$ \begin{aligned} 解：\ & = lim_{x \to 0}\frac{x-sin(x)}{x^3}\ & = \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}\ & = \frac{1}{6} \end{aligned} $$

$eg2:lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-x)$

思路：

1. 代入极限值得：$lim_{x \to +\infty}(\sqrt{\infty^2+4\infty+1}-\infty)$, 为 $\infty - \infty$ 型
2. 根式，有理化得：$lim_{x \to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+1}-x)(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}$
3. 化简得：$lim_{x \to +\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = lim_{x \to +\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}$,变成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型
4. 抓大头得：$lim_{x \to +\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}+x}=lim_{x \to +\infty}\frac{4x}{x+x} = 2$

$$ \begin{aligned} 解：\ & = lim_{x \to +\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x+1}-x)(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}{(\sqrt{x^2+4x+1}+x)}\ & = im_{x \to +\infty}\frac{x^2+4x+1-x^2}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}\ & = lim_{x \to +\infty}\frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x}\ & = lim_{x \to +\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2}+x}\ & = 2 \end{aligned} $$

$eg3:lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{sin(2x)+1}-1}{x}$

思路1：

1. 四则运算得：$lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{sin(2x+1)}}{x}-\frac{1}{x}$
2. 代入极限值得：$lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{sin(0+1)}}{0}-\frac{1}{0}$，为 $\infty - \infty$
3. 根式，有理化得：$lim_{x \to 0}\frac{(\sqrt{sin(2x)+1}-1)(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}$
4. 化简得：$\frac{sin(2x)+1-1}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}=\frac{sin(2x)}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}$，变成 $\frac{0}{0}$ 型。

5. 根据定型时先计算非零因子的原则，$(\sqrt{sin(2x)+1}+1)$ 在 $lim_{x \to 0}$ 时，趋向 2。所以有 $\frac{sin(2x)+1-1}{x(\sqrt{sin(2x)+1}+1)}=\frac{sin(2x)}{2x}$。为什么$\frac{sin(2x)}{2x}$ 中 $sin(2x) \not = 0$？因为是接近 0，而非直接等于 0。
6. 等价公式：$\frac{sin(2x)}{2x}=\frac{2x}{2x}=1$

思路2：

1. 由于当 $x \to 0$ 时，分子 $\sqrt{sin(2x+1)}-1$ 和 x 均趋于 0，因此可以使用洛必达法则
2. 分子求导得：$\frac{d}{dx}(\sqrt{sin(2x+1)}-1)=\frac{d}{dx}(\sqrt{sin(2x+1)}=\frac{1}{2\sqrt{sin(2x)+1}}.cos(2x).2=\frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)+1}}$
3. 分母求导得：1
4. $lim_{x \to 0}\frac{\sqrt{sin(2x)+1}-1}{x}=lim_{x \to 0}\frac{cos(2x)}{\sqrt{sin(2x)+1}}=\frac{1}{1}=1$

7. u^v 型

题型：

1. 1^∞
   1. $e^{lim(u-1).v}$
   2. e^{vlnu}(幂函数对数化)
2. $0^0、\infty^0$
   1. e^{vlnu}

$eg1:lim_{x \to 0}cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$ \begin{aligned} 解：\ & = e^{lim_{x \to 0}{(con(x)-1)\frac{1}{x^2}}}\ & = e^{-\frac{1}{2}x^2.\frac{1}{x^2}}\ & = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} $$

$eg2:lim_{x \to \infty}(\frac{3+2x}{2+2x})^x$ $$ \begin{aligned} 解：\ & = e^{lim_{x \to \infty}((\frac{3+2x}{2+2x})-1)x}\ & = e^{llim_{x \to \infty}(\frac{1}{2+2x})x}\ & = e^{llim_{x \to \infty}(\frac{x}{2x})}\ & = e^{\frac{1}{2}} \end{aligned} $$

$eg3:lim_{x \to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=lim_{x \to 0}\frac{sin(sin(kx))}{x},求 k 值$ $$ \begin{aligned} 解：\ & = e^{lim_{x \to 0}((1+2x)-1).\frac{1}{x}}\ & = e^{lim_{x \to 0}(2x).\frac{1}{x}}\ & = e^2\ & 即有 lim_{x \to 0}\frac{sin(sin(kx))}{x} = e^2\ & = \frac{sin(kx)}{x} = e^2\ & = \frac{kx}{x} = e^2\ & = k = e^2 \end{aligned} $$

$eg4:lim_{x \to 0}x^{sin(x)}$ $$ \begin{aligned} 解：\ & = e^{lim_{x \to 0}sin(x)ln(x)}\ & = e^{lim_{x \to 0}\frac{sin(x)}{\frac{1}{ln(x)}}}\ & = e^{lim_{x \to 0}\frac{sin(x)}{\frac{1}{ln(x)}}}\ & = e^{lim_{x \to 0}\frac{x}{\frac{1}{ln(x)}}}\ & = e^{lim_{x \to 0}\frac{ln(x)}{\frac{1}{x}}}\ & = e^{lim_{x \to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}}\ & = e^0\ & = 1 \end{aligned} $$

0x03 极限计算小结

1. $\frac{\infty}{\infty}$
   1. 抓大头
   2. 洛必达
2. $\frac{0}{0}$
   1. 等价替换
   2. 洛必达
3. $0.\infty$

        1. 下放（简单，易求导部分）
        2. 转换为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$
4. $\infty - \infty$
    1. 分式：通分
    2. 根式：有理化
5. u^v
    1. 1^∞
        1. $u^v = e^{lim(u-1)v}$
    2. ∞^0 和 ∞^0
        1. $u^v=e^{vlnu}$

注意事项

1. 非零因子常数项先求，然后化简
2. 等价替换的条件
    1. $\square \to 0$
    2. 乘除关系中
3. $0*有界=0$