Ciències del Mar

Pràctica 1

Novembre 2017

Preliminars

Càrrega de llibreries

Per poder fer aquesta pràctica cal assegurar que estan instal.lades les llibreries necessaries. Abans de començar-la instal.larem, si és necessari, i carregarem les llibreries a la sessió de R:

- llibreria `Deriv` per el càlcul de funcions derivades
- llibreria `rootSolve`per el càlcul d'arrels de funcions

```
#install.packages('Deriv')
#install.packages('rootSolve')

library(Deriv)
library(rootSolve)
```

Comandes bàsiques a emprar en la pràctica

Treball amb vectors

Els vectors en R es defineixen com `vecName=c(5,4,3)` que crearia un vector de tres components de valor 5, 4 i 3 i on `c(...)` és la manera com en R es defineixen els vectors.

Per poder accedir a un component d'un vector cal emprar la comanda `vecName[2]` que ens donaria el valor del component 2 del vector `vecName`, és a dir 4.

```
vecName = c(5,4,3)
vecName[2]
```

```
## [1] 4
```

Definició de funcions

Aquesta pràctica requereix la definició de funcions. Per definir una funció en R s'utilitza la comanda `function()` on dins els parèntesis s'afegeixen les variables i paràmetres que la funció utilitza.

Si volem representar la funció

$$f(x) = e^x sin(ax + b)$$

on $a = \pi$ i $b = 2\pi$ en l'interval 0 a 4, primer caldrà especificar-la:

```
f = function(x,a=pi,b=2*pi) {
  exp(x)*sin(a*x+b)
}
```

Un cop especificada, recorda d'afegir-hi els corxets!, ja es pot utilitzar per calcular-ne els seus valors, com per exemple $f(1/2)$.

```r
f(0.5)
```

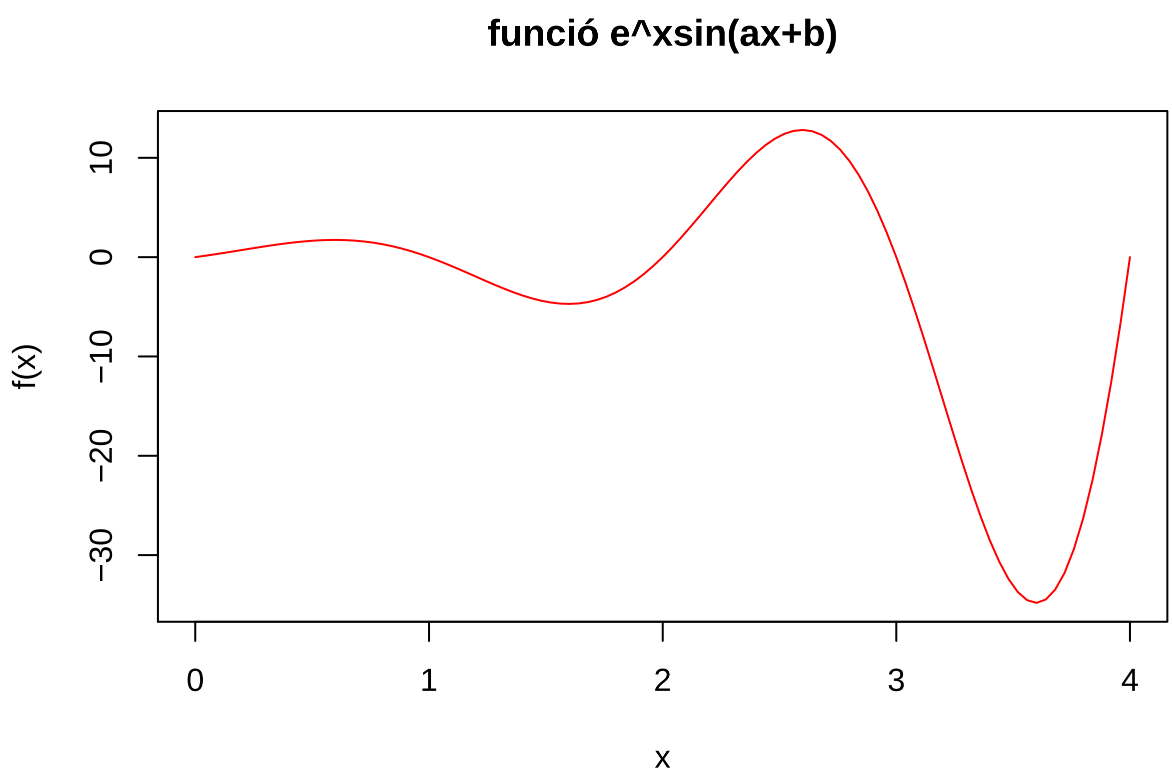
```
## [1] 1.648721
```

Dibuix de funcions

Es pot dibuixar emprant la funció `curve(expr,from,to,col,main)`, on:

- `expr` es refereix a la funció a representar
- `from, to` defineix l'interval en el que volem representar la funció
- `col` indica el color amb que volem dibuixar la funció, per exemple red
- `main` indica el títol que volem posar a la funció

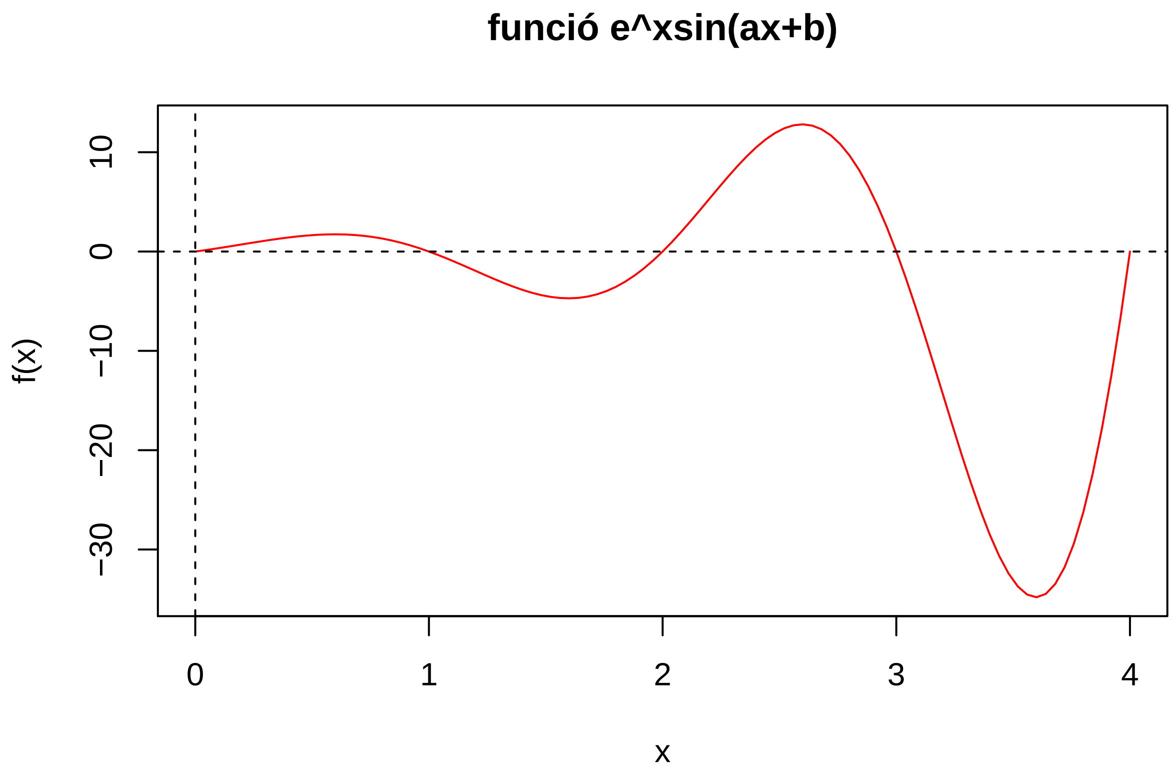
```r
curve(f,from=0,to=4,col='red',main='funció e^xsin(ax+b)')
```



si volem afegir al gràfic algunes línees horitzontals o verticals, com per exemple els eixos de coordenades, podem fer-ho amb la funció `abline(h,v,lty)`, on:

- `h` són el valor o valors (en forma de vector) on volem que es dibuixin les línees horitzontals,
- `v` són el valor o valors (en forma de vector) on volem que es dibuixin les línees verticals,
- `lty` indica el tipus de línea que volem pintar, `lty=1` línea sólida, `lty=2` línea discontínua.

```r
curve(f,from=0,to=4,col='red',main='funció e^xsin(ax+b)')
abline(h=0,v=0,lty=2)
```



Càlcul de la funció derivada d'una funció

Podem calcular i dibuixar la funció derivada d'una funció emprant la funció `Deriv()` de la llibreria `Deriv`. Els paràmetres que espera la funció `Deriv` són:

- `f` la funció a diferenciar
- `x` el nom de la variable a diferenciar. Si la funció té més d'una variable o té paràmetres cal indicar a la comanda de R contra quines variables ha de derivar.

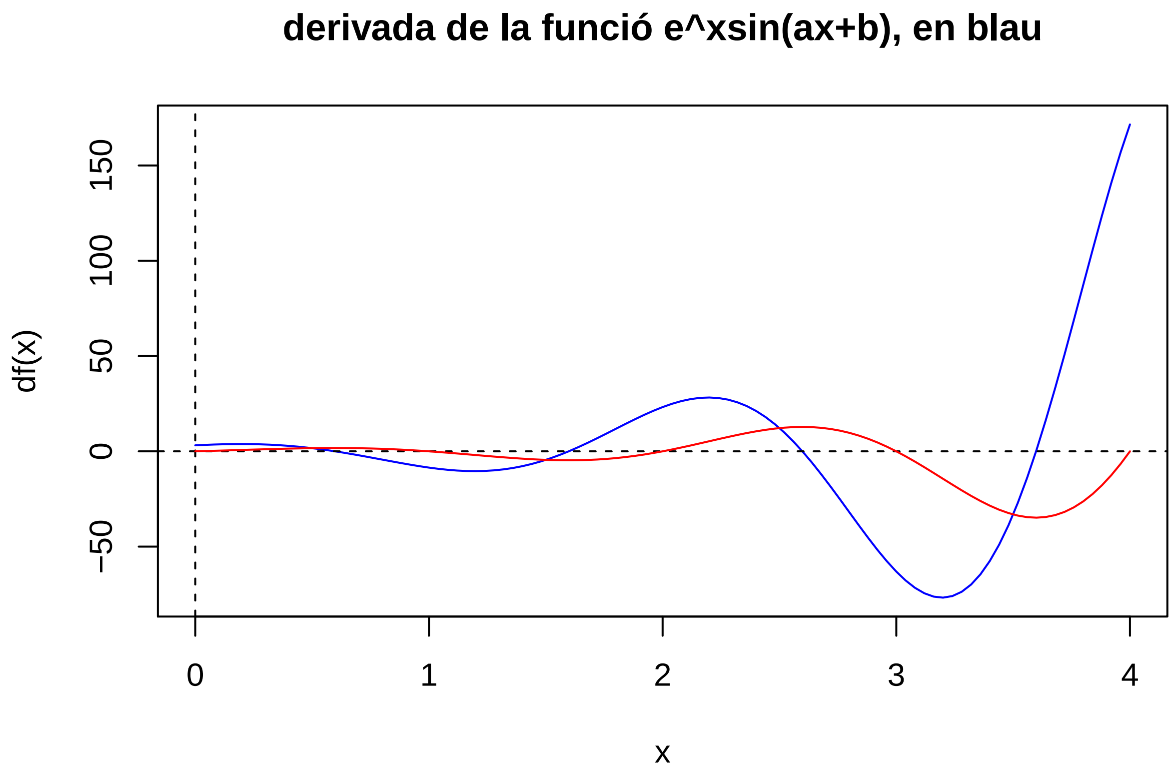
```
library(Deriv)

Deriv(f,x='x')
```

```
## function (x, a = pi, b = 2 * pi)
## {
##     .e2 <- a * x + b
##     (a * cos(.e2) + sin(.e2)) * exp(x)
## }
```

```
df=Deriv(f,x='x')
df(2)
```

```
## [1] 23.2134
```

```
curve(df,from=0,to=4,col='blue',main='derivada de la funció e^xsin(ax+b), en blau')
abline(h=0,v=0,lty=2)
curve(f,col='red',add=T)
```



Càlcul d'arrels d'una funció

Podem calcular les punts on la funció talla l'eix de les x's utilitzant la función `uniroot.all(f,lower,upper)` on:

- `f` indica l'equació de la que volem trobar les arrels,
- `lower` i `upper` els valors inicials i finals de l'interval on volem trobar les sol.lucions.

D'aquesta manera podem trobar els punts de tall de la funció original amb l'eix d'abcises:

```
uniroot.all(f,lower=0,upper=4)
```

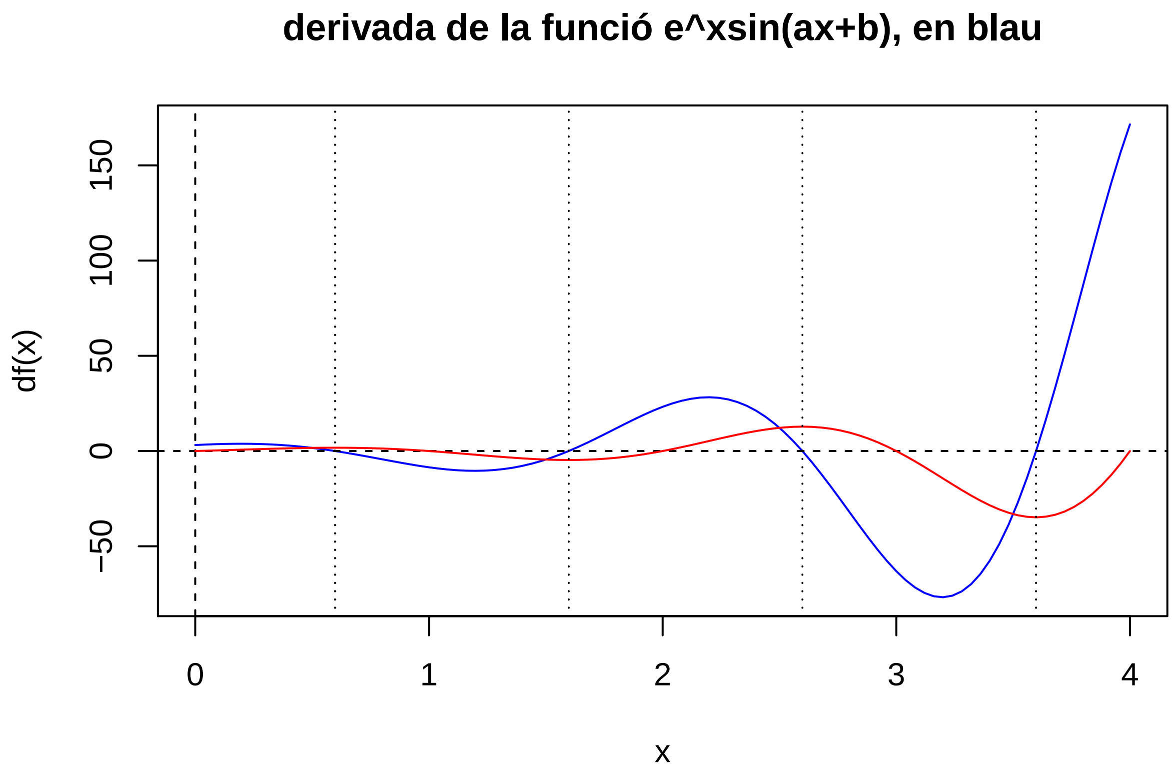
```
## [1] 0 1 2 3
```

o els màxims i mínims de la funció trobant on la funció derivada es fa zero:

```
uniroot.all(df,lower=0,upper=4)
```

```
## [1] 0.5980931 1.5980931 2.5980931 3.5980931
```

```
singVal = uniroot.all(df,lower=0,upper=4)

curve(df,from=0,to=4,col='blue',main='derivada de la funció e^xsin(ax+b), en blau')
abline(h=0,v=0,lty=2)
curve(f,col='red',add=T)
abline(v=singVal,lty=3)
```



Càlcul de la integral d'una funció

Per integrar una funció entre dos valors cal emprar la comanda `integrate(f,lower,upper)` on:

- `f` indica la funció que volem integrar,
- `lower` i `upper` indica els valors inferiors i superiors de l'interval d'integració.

Per integrar la funció anterior entre la segona i la tercera arrel:

```
singVal[2]
```

```
## [1] 1.598093
```

```
singVal[3]
```

```
## [1] 2.598093
```

```
integrate(f,lower=singVal[2],singVal[3])
```

```
## 3.222881 with absolute error < 6.4e-14
```

Exercici Pràctic

El model de creixement logístic

El model de creixement logístic intenta representar l'evolució d'una població que creix proporcionalment al número d'individus existents en un moment donat, però on aquest creixement està limitat per la capacitat de l'ecosistema de "sostenir" un número màxim d'individus de l'espècie.

L'equació que modela aquest creixement és:

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_o - 1)e^{-rt}}$$

on:

- $N(t)$ indica el número d'individus de l'espècie en el temps t,
- K és la capacitat de càrrega de l'ecosistema, el número màxim d'individus que pot sostenir de manera continuada,
- N_0 és el valor inicial de la població,
- r és la taxa de crexiement.

Pregunta 1.

Representa l'evolucio d'una població, en l'interval de temps que va de [0,60] mesos, que segueix un creixement logístic amb una parella d'individus inicial $N_0 = 2$, una taxa de creixement de $r = 0.3$ individus nous per mes i grandària de la població i una capacitat de càrrega de $K = 5000$ individus.

Si empres a la definició de la funció de creixement logístic algun nom diferent de x, per exemple t com a `function(t,...)`, tingues en compte que quan cridis la comanda `curve` per dibuixar el gràfic caldrà que l'indiquis quin nom té la variable independent, emprant el paràmetre `xname='t'`. Per defecte, la comanda `curve` cerca la variable independent x en la funció que se li passa.

Dibuixa la funció a l'interval [0,60] mesos i calcula els valors de la població per *t=10,20,30,40*

Pregunta 2

Estudia l'evolució de la població per diferents valors del paràmetre del model r. Analitza i interpreta de manera qualitativa la forma de la funció i el seu valor per diferents valors de r.

Com afecta el paràmetre r a la forma de la funció?

Quins valors pren la funció en els instants de temps *t = 10, 30 i 50* pels valors de *r={0.15,0.3,0.6}*

Pregunta 3

Estudia l'evolució de la població per diferents valors del paràmetre del model K. Analitza i interpreta de manera qualitativa la forma de la funció i el seu valor per diferents valors de K.

Com afecta el paràmetre K a la forma de la funció?

Quins valors té la població en els instants *t=10, 30 i 50* mesos per valors de *K={1000,5000,10000}*?

Pregunta 4

Estudia l'evolució de la població per diferents valors del paràmetre del model N_0. Analitza i interpreta de manera qualitativa la forma de la funció i el seu valor per diferents valors de N_0.

Com afecta el paràmetre N_0 a la forma de la funció?

Quins valors té la població en els instants *t=10, 30 i 50* mesos per valors de *N_0={20,200,2000}*?

Pregunta 5

Segons el model de creixement logístic per poblacions, les espècies es poden caracteritzar en dos tipus: les espècies d'estratègia r i les d'estratègia K.

Les espècies d'estratègia r s'especialitzen en elevades tasses de creixement per explotar nínxols ecològicament poc ocupats, Són espècies amb massa corporal petita i on les parelles tenen molts fills, molts dels que no arriben a adults. Els descendents assoleixen la madureç sexual ràpidament i tenen una gran capacitat de dispersar-se en el medi.

Les espècies d'estratègia K viuen en ecosistemes molt saturats i són molt bons competidors en aquests ambients. Tenen poca descendència però inverteixen molt temps i esforços en la mateixa. Tenen masses corporals més grosses, esperança de vida prolongada i els fills requereixen atenció durant força temps assolint la madureç sexual força més tard.

Podries dir un exemple d'espècie d'estratègia *r* i *K*?

Analitza dos espècies amb estratègies diferents: una d'estratègia r on la tassa de creixement sigui *r=0.5* i la capacitat d'ocupació del nínxol de *K=2,000*, l'altre d'estratègia K on la tassa de creixement sigui *r=0.1* i la capacitat d'ocupació del nínxol de *K=5,000*.

Calcula el número d'individus per les dues especies als temps 10, 30, 50 i 100 mesos. Quina espècie és més eficient a curt termini? I a llarg?

Pregunta 6

La funció $N(t)$ ens dona els individus en funció del temps i dels paràmetres del model, que recorda que són $N_0 = 2$, $r = 0.3$ i $K = 5000$. $N(t)$ és una funció monòtona creixent. Si volem estudiar la velocitat de creixement $N(t)/t$ caldrà trobar-ne la seva derivada.

Troba la derivada de la funció $N(t)$ i dibuixa-la.

En quin moment de la funció original coincideix l'instant de temps on la derivada (i.e. la velocitat de creixeiment) es màxim?

Si volem trobar el punt exacte on la velocitat de creixement té el màxim, caldrà trobar la derivada de la funció derivada (o la segona derivada de la funció original) i veure en quin punt es fa zero.

Calcula la funció segona derivada i dibuixa-la

En quin instant de temps la població té la màxima velocitat de creixement?

Quina és la velocitat de creixement en aquell moment?

Quina grandària té la població en aquell moment?

Des del punt de vista de la curvatura de la funció original *N(t)*, quina curvatura té abans i després del valor trobat abans? Perquè?

Pregunta 7

Volem calcular el número total d'individus que hi ha hagut en l'ecosistema en l'interval que va dels 20 als 30 mesos. Una manera seria trobant el valor mig d'individus en l'interval [20,30] i multiplicant-lo per la longitut de l'interval. **Quin valor obtens?**

Se t'ocorre una manera millor? Quin valor obtens? Quin error hi ha entre les dues mesures?