16.2 Choosing the calibration: Historical versus Implied

- モンテカルロの実装で，キャリブレーション方法の選択は初めに考えることである
- 4.2節では，default probabilityをヒストリカルとインプライドの両方のキャリブレーション方法を示した.
- どちらのキャリブレーション方法がエクスポージャー計算で用いるモンテカルロシミュレーションに適しているのかは議論すべき問題である.

16.2.1 The case for Historical Calibration

1st sentence

- キャリブレーションをすべき項はボラティリティ項とドリフト項に分けられる
- ヒストリカル: 時系列データから得られるボラティリティやドリフトを推計して、考えているプロセスのボラティリティ、ドリフトを決める

2nd sentence
なぜCVA, FVAモデルにヒストリカルキャリブレーションか

- 信用リスクの管理でPFEの計算を行うが、そのモデルではヒストリカルキャリブレーションを行う
- その計算で用いられるモデルと同じモデルでCVAを計算することが多いから
- PFE計算でワンファクターバシチェックなどのシンプルなモデルと比べても、完全にインプライドキャリブレーションをするのは比較的複雑になる

3rd sentence
リスク管理の話

- XVAに、関わる全てのリスクを管理したいと思っている銀行にとって、ヒストリカルキャリブレーションの使用に議論がある
- ヘッジを全くしないのであれば、ヘッジ対象をプライスする必要はない
- CVAはポートフォリオでの、デフォルトリスクを加味した将来の期待損失
- FVAはポートフォリオの将来の資金調達コスト
- これらは無裁定の議論とは無関係である
- 標準的なデリバ理論では市場が価格を設定するので、リスクをヘッジするかどうかは関係ない

4th sentence
キャリブレーションモデルの現状の話

- いくつかのバンクはヒストリカルキャリブレーションモデルをもちいているが、多くはモンテカルロモデルではリスクニュートラルでキャリブレーションしている
- CVAの資本計算に関して、IMM承認を得るためには、リスク中立のデフォルト確率を使いなさいとバーゼルIIIに書かれている
- CCRの資本計算で求めるEADを計算するのに使われるエクスポージャーモデルからエクスポージャーを計算すべき
- エクスポージャーモデルはバックテストが通っていれば良いので、リスク中立かヒストリカルかは実際どうでも良い
- ヒストリカルキャリブレーションでバックテストが通って、当局に承認されるならば、そのモデルのままヒストリカルキャリブレーションでCVAやCCRの資本計算を行うだろう
- でも、一方でXVAのトレーディングデスクは、リスク中立モデルでCVAを計算したり、リスク管理したがる
- ヘッジがあるので

5th sentence

- 理論的には異なるXVAに対して，別のキャリブレーション方法を選択することができる
- 例えば，FVAの計算には，exposureを計算した時と同じ方法で，などのように
- 然し乍ら，XVAのエクスポージャーはモデルがどんな形であれ，共通のものを使うべきであるので，そのようなアプローチはあまり意味がない.
- つまり，同じキャリブレーション方法を用いましょうということ

Histroical Interest Rate Calibration

1st sentence
ハルホワイトモデルのキャリブレーションについて

- credit exposureモデルにおいて，金利の計算に使われる典型的なモデルがHull-Whiteモデルである
- $\theta(t)$:mean-reversion levelで，回帰先の水準，$\alpha(t)$:mean-reversionで回帰の強さ,$\sigma(t)$ がボラティリティ.
- ヒストリカルキャリブレーションの際の
  - 全てのパラメータをヒストリカルデータを用いてキャリブレーションすべきか
  - $\theta(t)$　に関しては初期の期間構造にキャリブレーションすることによって，リスク中立でキャリブレーションされたパラメータを残すかどうか.（リスク中立モデルだと，初期の回帰先 の水準はディスカウントファクターでキャリブレーションできる.）
  - 今回は，後者のスタンスをとって，回帰の水準はリスク中立方法で，初期の金利構造からキャリブレーションを行い，残りの２つをヒストリカルキャリブレーションする.

- 注記：プライシングの観点だと，ボラテリティの期間構造をスワップションのコターミナル(逆対角の部分)からキャリブレーションする.

2nd sentence

- リスク中立のドリフトの形は，16.2式のようになる

- $f(0,t)$は現時点で決まるt時点のフォワードレート
- その時点の初期の金利の期間構造にフィッティングしている
- $\theta(t)$ を得るためには瞬間的なforward rateが微分可能な滑らかな関数であることが必要である.(Hull-Whiteに特有？？)

3rd sentence　　ボラテリティのヒストリカルキャリブレーションについて

- volatilityパラメータは時系列データからキャリブレーションする
- 方法の一つとして,James and Webber(2000)に書かれている，general method of moments(GMM)がある
- キャリブレーションをするために，　変数変換して少しモデルをいじる,
- OU過程にしたいから？？変数変換行う？？

流れ

- 変数変換
  - $x(t) = r(t) - \phi(t)$
  - $\phi(t)$ は$dx(t)$ がOU過程になるように選ばれている

$$
\begin{aligned}
dx &= dr - d\phi \\
&= (\theta(t) - \alpha(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t) - d\phi(t) \\
&= (\theta(t) - \alpha(t)(r(t) - \phi(t)) - \alpha(t)\phi(t))dt + \sigma(t)dW(t) - d\phi(t)
\end{aligned}
$$

  - なので，$d\phi(t) = (\theta(t) - \alpha(t)\phi(t))dt$
  - OU過程は　$dx(t) = -\alpha(t)x(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ なので
  - $(\theta(t) - \alpha(t)\phi(t))dt - d\phi(t) = 0$　を満たすように$\phi(t)$が決まっている
  - $\theta(t)$ がリスク中立の初期の金利構造でキャリブレーションされれば$r(t)$　の形は16.8式のようになる.

- GMMアプローチ
  基本的な概念は，母集団のモーメントを標本空間のモーメントを用いて推定するもの
  なので，ここでは，推定したいパラメータよりも多い標本空間のモーメントを 準備して，その関数を最小化するようにパラメータを推定する，という方針でパラメータ推定する.
  - 16.7式と16.8式を離散化する.
  - 今回の伊藤積分の部分は確定的な被積分関数であり，平均0，分散

$$
\int_0^t e^{-2\alpha t} dt
$$

    の正規分布に従うことに注意
  - 16.9と16.10の式より，金利の時系列データが与えられたら，x_iを通じてαとσを求めることができる.
  - 4つのモーメントを基底ベクトルとして選び，それらを2乗した関数を標本空間で和をとって，最小化する

last sentence
金利の初期構造にフィットさせることが重要

- $\theta(t)$ が定数のときは，今の足元の金利でプライシングを行うということであり，モデル自体は将来の金利変動をモデル化していることにはなっていない
- mean reversion levelはキャリブレーション期間の選択によって値が変わりやすい.
- 二つのボラももちろん期間の長さの選択に敏感であるが，もし初めの金利構造にマッチしているのであれば，そこまで影響はない??
- なのでキャリブレーションの期間の長さの選択は重要である.
- windowはおそらく，キャリブレーションの期間の長さのこと
- 長い期間のキャリブレーションはボラティリティの局所的な変化を弱らせる
  - まぶされてトレンドがでてこない

- 一方で，短い期間のキャリブレーションはそれらを強く反映させる.
  - トレンドが大きく反映される

Historical FX Calibration

本節で扱うモデル: 対数正規モデル

$X(t)$ を為替レート，$\sigma_X(t)$ をボラティリティ，$W(t)$ をウィーナー過程とすると，対数正規モデルは次のように表される.

$$dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma_X(t)X(t)dW(t)$$

1st sentence
ボラティリティ項のキャリブレーション

- ボラティリティのキャリブレーションをどうするかが初めに挙がる疑問である.
- もっとも単純な仮定はボラテリティを時間依存ではなく，定数とすること
  - キャリブレーション期間を決めて，スポット為替レートから得られるログリターンの分散を取ることヒストリカルキャリブレーションできる
  - ログリターンを離散化すると，微小時間では，ドリフト項が無視できる.
  - ヒストリカルデータより，ログリターンの分布がわかり，それは平均0, 分散1の正規分布(× $\sigma\sqrt{\Delta t}$)に従う.
  - 年率ボラティリティに直すためにN_{trading} をかける
  - キャリブレーションの期間の選択によって，現在から近い期間の値を反映させるか，遠くの期間の値を反映させるかがことなってくる.
  - マーケットのヒストリカルを用いているので，ボラティリティの振る舞いは反映している
  - 一方でヒストリカルキャリブレーションではボラのボラは反映されていない

2nd sentence
__*ボラテリティの期間構造をいれる場合*_

- σ_i の決めかた
  - $t_1 < t < t_0$ でヒストリカルキャリブレーションしたものをσ_0 とする
  - 続けて，$t_2 < t < t_1$ でヒストリカルキャリブレーションしたものをσ_1 とする

- t0 t1はsigma0、t1 t2はsigma1など
- FXのログリターンはそれぞれの区分の値を使う
- 利点は、未来短期間のボラは過去短期間のボラを反映させているし，長期間のボラも同じ

3rd sentence
ドリフト項について

- ドリフト項は長期のFXレートの振る舞いに関わってくるので，長期のFXレートを見る場合ドリフト項の選択は重要である.
- ドリフト項が定数であるとした場合，ドリフト項はログリータンの平均で得られる.

  このアプローチの問題点?

- クレジットリスクのシミュレーションの時にみられるように(リスクファクターの観測が市場のリスクファクターよりも長期間)，極端なFXの動きを反映することである

- 50年がなにかわからないが．．．

- キャリブレーション期間は1-3年に設定することが多く，中央銀行などが貨幣の価値を下げた結果として現れる，強いドリフト効果を見ることは不可能ではない．(あまりまぶされずに，直近のドリフト効果がみれる)

- ただ，あまりうまく行かない場合がほとんどである
  - 急なジャンプとかには対応できない
  - ドリフトが30年のキャリブレーションで$0.0001と推計されたとする
  - シミュレーション時のスポットは$1.57であるが
  - $1.98 to$1.37の変化は表現できない
  - $1.57を中心にモンテカルロでシミュレーションされてしまうので，極端なケースを表現することができない.
  - なので，ヒストリカルの期間構造をいれれば，期中の動きをある程度コントロールすることができる.

4th sentence
対数正規以外のモデル

- ドリフトの値を現在のFX foward rateにキャリブレーションする方法
- 為替は金利差で表されるので，将来の為替レートを$F(t)$，現在のレート$X(0)$ とすると

$$F(t) = X(0)\exp\left(\int_0^t (r_d(s) - r_f(s))ds\right)$$

であらわされる

- FXレートは2つの金利とは独立にモデル化されるか，2つの金利と関連してモデル化されるかのどちらかである.

- 前者の場合ドリフトが確定的...

- 後者の場合ドリフト自体が金利差で表され，それぞれの金利が確率的

- さらに別のモデルの可能性を考えるのであれば，FX rateの回帰モデル

Historical Equity calibration

1st sentence

- 株のモデルのキャリブレーションはFX rateの場合と同じ方法で行われる
- 具体的には(16.21)式を用いる方法であるとか，先ほど述べたような期間構造を持たせる方法である
- もう一度強調していること：ドリフトは長期の振る舞いに影響を与えるので，ドリフトの選び方は重要である.
- 一つは定数で決めてしまう
- 別の方法として
    - 先渡しの株(先渡しは相対取引で信用リスクあり，先物(futures)は取引所)の値からドリフトを確定的な値として決める方法
        - fowardの受け渡し価格Kは$K = B(t, T)/S(t)$ できまる.
        - Kは観測されている値で，$S(t)$が対数正規分布に従うとすれば，2つのKの値でボラとドリフトが決まる

    - ボラはヒストリカルで決めて，ドリフトはリスク中立なもととしてシミュレーションする方法

- 後者の確率的に扱う方法では，金利差の部分がFXとは異なり，国内金利 - 配当利回り(レポレートで調節済み？？)で表される. (配当落の概念のやつ？？)

> 配当利回り： 株価に対する配当金額の割合のこと. 現在の株価水準に対して、１株あたりの年間配当金額がどの程度の割合なのかを表す. 例えば、1000円の株価に対して年間10円の配当を出す銘柄の場合、配当利回りは１％ということになる。

- レポレートはボラティリティの情報が市場にないので，リスク中立モデルで確率的として扱うことはない(キャリブレーションできないので).

    - repo rateのセンシティビティはあまり重要と考えられていない (???)

- ヒストリカルキャリブレーションの文脈であれば，レポレートのボラティリティは推計できる(それが必要かどうかは別として).

- 配当はこの場合連続的な利回りとしてあつかうが，16.6.2にでは別の場合も考えている

2nd sentence

- 単一の株式のみが取引されるわけではなく，持分証券や株のインデックを参照するデリバティブは株のデリバティブで構成されたポートフォリオの大部分占めている場合が多い.

> 持分証券：相手の会社を保有していることをいう．なので単に株を保有していると思えばよい？

- 疑問点: これらのインデックスと単一銘柄の両方をどのようにモデル化するのかということが考えられる.
- 詳しくは16.6章で説明されるが，主に3つの方法が考えられる
  1. インデックス(の動き)を直接モデル化する
  2. 構成要素をモデル化する(インデックスそれぞれの株式を？？)
  3. インデックスと個別株の共通部分に着目してモデル化する方法
- 実際には，多くの個別銘柄をモデル化するのは，計算量の観点から困難になるので，インデックスは個別銘柄の時と同じような方法で直接モデル化される.

Historical Commodity Calibration

コモディティは3つのカテゴリーに分類される．表16.2にまとめられている

1. スポットコモディティ
2. (先渡し)フォワードコモディティ(保存可能なものと，保存に制限がかかっているもの)
3. スペシャルコモディティ(容易に保管できないもの)

これらを分ける基準として，保存が容易かどうか，保存が可能かどうかが判断基準っぽい.

Spot commodities

- スポットコモディティは，イメージとしては(またもや)株やスポットFXと同じように，スポットの資産として取引される.
- 株やFXのモデルと同じように対数正規モデルを用いてモデル化され，キャリブレーションも同じようになされる.
- 強い回帰性を持たないらしいが，どういうこと？？金とかプラチナに回帰性がないということ？安全資産ということが関連している？

Foward commodities

1st sentence

- 先渡しコモディティは先渡しと先物取引からなるマーケットを通じて取引される
- これらのコモディティhあ強い回帰性，あるいは季節性を有している
  - 季節性は，コモディティが保管できなくなった時に現れる
  - 農業関連のコモディティは明らかに季節性を有している

    - 一方でエネルギー関連のコモディティ(天然ガスとか)は，寒い時期である北半球の冬により需要があるという季節的な期間構造を有している.

2nd sentence

- forward コモディティを表現するのに，多くのモデルがあるが，一般的には，金利デリバで使われているモデルが使用される
    - 一例として，OUモデルとか
    - フォワードレートをモデル化しているLIBORマーケットモデルとか
- コモディティのモデル化にもっとも使われるモデルはClewlow-Stricklandモデルである
    - フォワードカーブを対数正規でモデル化するモデル.（nファクターモデル)
    - 16.27式がフォワードカーブの式で，16.28式が，T->tに近づけた場合のスポットレートを表す式
- 疑問点：ボラティリティ関数を何を採用すべきか.
    - 一例として，1ファクターモデルで考えて，ボラティリティを16.29式で選んだ時は，スポットレートのSDEが16.30式になる
- convenience yield

  > 商品先物価格を形成する要因のうち、現物を保有することによって得られるメリット。

    - コモディティマーケットでは比較的スタンダードな方法である
    - Schwarts and Smithらは，スポットプライスを2つの確率変数でモデル化した
        - 短期間のずれを表す$\chi(t)$
        - 平衡(均衡)状態を表す$\xi(t)$
    - このモデルは後に，Brigo and Bakkarらによって，CCRの文脈で応用された
    - Schwarts and Smithモデルはコンビニエンスイールドを表現しているわけではない
    - 然しながら，オイル先物の文脈でGabillonによって使われたGibson and Schwatzのモデルと等しく，そのモデルは，stochastic コンビニエンスイールドモデルである.
    - Schwartz and Smithモデルのパラメータを選び直せば，Gibson and Shwartzのモデルと等しいと解釈できる.