

16.2 Choosing the calibration: Historical versus Implied

- モンテカルロの実装で、キャリブレーション方法の選択は初めに考えることである
- 4.2節では、default probabilityをヒストリカルとインプライドの両方のキャリブレーション方法を示した。
- どちらのキャリブレーション方法がエクスポージャー計算で用いるモンテカルロシミュレーションに適しているのかは議論すべき問題である。

16.2.1 The case for Historical Calibration

1st sentence

- キャリブレーションをすべき項はボラティリティ項とドリフト項に分けられる
- ヒストリカル: 時系列データから得られるボラティリティ、ドリフトから推計する

2nd sentence

- 信用リスクの管理でPFEの計算時にヒストリカルキャリブレーションを使っているから、その名残でCVA計算のモデルにも使っている。
- フルのインプライドモデルは比較的複雑

3rd sentence

- ヘッジを全くしないのであれば、ヘッジ対象に
- CVAはポートフォリオでの、デフォルトリスクを加味した将来の期待損失
- FVAはポートフォリオの将来の資金調達コスト

4th sentence

- いくつかのバンクはヒストリカルキャリブレーションモデルをもちいているが、多くはモンテカルロモデルではリスクニュートラルでキャリブレーションしている
- IMM承認を得るためには、Unilateral modelではリスク中立のデフォルト確率を使うべきである
- エクスポージャー自体は、CCRのEADを計算するのに使われるエクスポージャーモデルから計算されるべきである。
- エクスポージャーモデル自体は、バックテストが通っていて、リスク中立やヒストリカルキャリブレーションの選好性がないことが求められる
- 承認のプロセスの本質(何をクリアすれば承認されるか)が与えられれば、多くの銀行は資本規制に関わるCCRやCVAの計算をするのに、ヒストリカルキャリブレーションを用いる。

- 一方で、XVAのトレーディング部隊はリスク中立のモンテカルロモデルを用いて、プライスを出したり、リスク管理したり、CVAを計算したりする。

5th sentence

- 理論的には...

Historical Interest Rate Calibration

1st sentence

- credit exposureモデルにおいて、金利の計算に使われる典型的なモデルがHull-Whiteモデルである
- $\theta(t)$: mean-reversion levelで、回帰先の水準, $\alpha(t)$: mean-reversionで回帰の強さ, $\sigma(t)$ がボラティリティ.
- ヒストリカルキャリブをする際の疑問点
 - ヒストリカルデータに全てのパラメータをキャリブレーションすべきか
 - $\theta(t)$ に関しては初期の期間構造にキャリブレーションすることによって、リスク中立でキャリブレーションされたパラメータを残すかどうか. (リスク中立モデルだと、初期の回帰先の水準はディスカウントファクターでキャリブレーションできる.)

2nd sentence

- リスク中立のドリフトの形は、16.2式ようになる
- その時点の初期の金利の期間構造にフィッティングしている
- $\theta(t)$ を得るためには瞬間的なforward rateが微分可能な滑らかな関数であることが必要である. (Hull-Whiteに特有??)

3rd sentence

- volatilityパラメータは時系列データからキャリブレーションする
- 方法の一つとして, James and Webber(2000)に書かれている, general method of moments(GMM)がある
- キャリブレーションをするために、少しモデルを変形していく必要がある

流れ - 変数変換 - $x(t) = r(t) - \phi(t)$ は $dx(t)$ がOU過程になるように選ばれている - OU過程は $dx(t) = -\alpha(t)x(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ なので - $(\theta(t) - \alpha(t)\phi(t))dt - d\phi(t) = 0$ を満たすように $\phi(t)$ が決まっている

- $\theta(t)$ がリスク中立の初期の金利構造でキャリブレーションされれば $r(t)$ の形は16.8式ようになる.

- GMMアプローチ - 基本的な概念は、母集団のモーメントを標本空間のモーメントを用いて推定する方法である.
 - 16.7式と16.8式を離散化する.
 - 確定的な被積分関数の伊藤積分は平均0, 分散

$$\int_0^t e^{-2\alpha t} dt$$

の正規分布に従うことに注意

- 16.9と16.10の式より，金利の時系列データが与えられたら， x_i を通じて α と σ を求めることができる.
- 4つのモーメントを基底ベクトルとして選び，それらを2乗した関数を標本空間で和をとって，最小化する

last sentence

- $\theta(t)$ が定数のときは，今の足元の金利でプライシングを行うということであり，モデル自体は将来の金利変動をモデル化していることにはなっていない
- mean reversion levelはキャリブレーション期間の選択によって値が変わりやすい.
- 二つのボラももちろん期間の長さの選択に敏感であるが，もし初めの金利構造にマッチしているのであれば，そこまで影響はない??
- なのでキャリブレーションの期間の長さの選択は重要である.
- windowはおそらく，キャリブレーションの期間の長さのこと
- 長い期間のキャリブレーションはボラティリティの局所的な変化を弱らせる
 - まぶされてトレンドがでてこない
- 一方で，短い期間のキャリブレーションはそれらを強く反映させる.
 - トレンドが大きく反映される

Historical FX Calibration

本節で扱うモデル: 対数正規モデル

$X(t)$ を為替レート， $\sigma_X(t)$ をボラティリティ， $W(t)$ をウィーナー過程とすると，対数正規モデルは次のように表される.

$$dX(t) = \mu(t)X(t)dt + \sigma_X(t)X(t)dW(t)$$

1st sentence

- ボラティリティのキャリブレーションをどうするかが初めに挙がる疑問である.
- もっとも単純な仮定はボラティリティを定数とすること
 - キャリブレーション期間を決めて，スポット為替レートから得られるログリターンの分散を取ることヒストリカルキャリブレーションできる.
 - 年率ボラティリティに直すために N_{trading} をかける
 - キャリブレーションの期間の選択によって，現在から近い期間の値を反映させるか，遠くの期間の値を反映させるかがことになってくる.
 - マーケットのヒストリカルを用いているので，ボラティリティの振る舞いは反映している
 - 一方でヒストリカルキャリブレーションではボラのボラは反映されていない

2nd sentence

タームストラクチャーを区分する場合 - t_0 t_1 は σ_0 、 t_1 t_2 は σ_1 など - FXのログリターンはそれぞれの区分の値を使う - 利点は、キャリブレーションした近くの期間のボラを反映したボラティリティになっていること

3rd sentence

- ドリフト項は長期のFXレートの振る舞いに関わってくるので、長期のFXレートを見る場合ドリフト項の選択は重要である.
- ドリフト項が定数であるとした場合
 - ログリータンの平均で得られる.

このアプローチの問題点？

- クレジットリスクのシミュレーションの時にみられるように(リスクファクターの観測が市場のリスクファクターよりも長期間), 極端なFXの動きを反映することである
- 15年がなにかわからないが. . .
- キャリブレーション期間は1-3年に設定することが多く、中央銀行などが貨幣の価値を下げた結果として現れる、強いドリフト効果を見ることは不可能ではない。(あまりまぶされずに、直近のドリフト効果がみれる)
- ただ、あまりうまく行かない場合がほとんどである
 - 急なジャンプとかには対応できない
 - ドリフトが30年のキャリブレーションで\$0.0001と推計されたとする
 - シミュレーション時のスポットは\$1.57であるが
 - 1.98to1.37の変化は表現できない
 - \$1.57を中心にモンテカルロでシミュレーションされてしまうので、極端なケースを表現することができない.
 - なので、ヒストリカル期間構造をいければ、期中の動きをある程度コントロールすることができる.

対数正規以外のモデル

- ドリフトの値を現在のFX forward rateにキャリブレーションする方法
- 為替は金利差で表されるので、将来の為替レートを $F(t)$ 、現在のレート $X(0)$ とすると

$$F(t) = X(0) \exp\left(\int_0^t (r_d(s) - r_f(s))ds\right)$$

であらわされる

- FXレートは2つの金利とは独立にモデル化されるか、2つの金利と関連してモデル化されるかのどちらかである.
- 前者の場合ドリフトが確定的...
- 後者の場合ドリフト自体が金利差で表され、それぞれの金利が確率的

- さらに別のモデルの可能性を考えるのであれば、FX rateの回帰モデル

Historical Equity calibration

1st sentence

- 株のモデルのキャリブレーションはFX rateの場合と同じ方法で行われる
- 具体的には(16.21)式や、期間構造を持たせる方法である
- もう一度確認だが、ドリフトは長期の振る舞いに影響を与えるので、ドリフトの選び方は重要である。
- FX rateの時と同様に別の方法も考えられて、
 - 先渡し株(先渡しは相対取引で信用リスクあり、先物(futures)は取引所)の値からドリフトを確定的な値として決める方法
 - ボラはヒストリカルで決めて、ドリフトは確率的なものとして扱いリスク中立で決める方法
- FX rateの場合と異なる部分は後者の確率的に扱う方法で、金利差の部分が変更され、国内金利 - 配当利回り(レポレートで調節済み??)で表される。

配当利回り：株価に対する配当金額の割合のこと。現在の株価水準に対して、1株あたりの年間配当金額がどの程度の割合なのかを表す。例えば、1000円の株価に対して年間10円の配当を出す銘柄の場合、配当利回りは1%ということになる。

- レポレートはボラティリティの情報が市場にないので、リスク中立モデルで確率的として扱うことはできない(キャリブレーションできないので)。
- ヒストリカルキャリブレーションの文脈であれば、レポレートのボラティリティは利用可能である。
- 配当はこの場合連続的な利回りとしてあつかうが、16.6.2には別の場合も考えている

2nd sentence

- 単一の株式のみが取引された持分証券ではなく、株のインデックスを参照するデリバティブは株のデリバティブで構成されたポートフォリオの大部分占めている場合が多い。
- 疑問点として、これらのインデックスと単一銘柄の両方をどのようにモデル化するのかということが考えられる。
- 詳しくは16.6章で説明されるが、主に3つの方法が考えられる
 1. インデックスを直接モデル化する
 2. 構成要素をモデル化する(インデックスそれぞれの株式を??)
 3. インデックスと個別株の共通部分に着目してモデル化する方法
- 実際には、多くの個別銘柄をモデル化するのは、計算量の観点から困難になるので、インデックスは個別銘柄の時と同じような方法で直接モデル化される。

Historical Commodity Calibration

コモディティは3つのカテゴリーに分類される。表16.2にまとめられている 1. スポットコモディティ 1. (先渡し)フォワードコモディティ(保存可能なものと、保存に制限がかかっているもの) 1. スペシャルコモディティ(容易に保管できないもの)

Spot commodities

- スポットコモディティは、イメージとしては株やスポットFXと同じように、スポットの資産として取引される。
- 株やFXのモデルと同じように対数正規モデルを用いてモデル化され、キャリブレーションも同じようになされる。

Foward commodities

1st sentence

- 先渡しコモディティは先渡しと先物取引からなるマーケットを通じて取引される
- これらのコモディティは強い回帰性、あるいは季節性を有している
 - 季節性は、コモディティが保管できなくなった時に現れる
 - 農業関連のコモディティは明らかに季節性を有している
 - 一方でエネルギー関連のコモディティ(天然ガスとか)は、寒い時期である北半球の冬により需要があるという季節的な期間構造を有している。

2nd sentence

- forward コモディティを表現するのに、多くのモデルがあるが、一般的には、金利デリバで使われているモデルが使用される
 - 一例として、OUモデルとか
 - フォワードレートモデル化しているLIBORマーケットモデルとか
- コモディティのモデル化にもっとも使われるモデルはClewlow-Stricklandモデルである
 - フォワードカーブを対数正規でモデル化するモデル、(nファクターモデル)
 - 16.27式がフォワードカーブの式で、16.28式が、 $T \rightarrow t$ に近づけた場合のスポットレートを表す式
- 疑問点：ボラティリティ関数を何を採用すべきか。
 - 一例として、1ファクターモデルで考えて、ボラティリティを16.29式で選んだ時は、スポットレートのSDEが16.30式になる
- convenience yield

商品先物価格を形成する要因のうち、現物を保有することによって得られるメリット。

- コモディティマーケットでは比較的スタンダードな方法である
- Schwarts and Smithらは、スポットプライスを2つの確率変数でモデル化した

- 短期間のずれを表す $\chi(t)$
 - 平衡(均衡)状態を表す $\xi(t)$
-
- このモデルは後に, Brigo and Bakkarらによって, CCRの文脈で応用された
 - Schwarts and Smithモデルはコンビニエンスイールドを表現しているわけではない
 - 然しながら, オイル先物の文脈でGabillonによって使われたGibson and Schwatzのモデルと等しく, そのモデルは, stochastic コンビニエンスイールドモデルである.
 - Schwartz and Smithモデルのパラメータを選び直せば, Gibson and Shwartzのモデルと等しいと解釈できる.