

8.6.2 OIS and CSA Discounting

CSA契約の元でのデリバティブの取引のディスカウント

- 担保に関わる金利を考慮すべき
- Piterbarg(2010; 2012)の方法を紹介
- FVAの議論もほぼ同じような計算でなされる。Burgard and Kjaerによる複製ポートフォリオモデルがある。

担保付きデリバのプライシング

1. 価値が $V(t, S)$ であるデリバティブ取引を考える。 $S(t)$ はunderlyingの資産。
2. 取引資産 $S(t)$ の動きが幾何ブラウン運動に従う。(8.19)式
3. 担保の価格を $X(t)$ とし、担保金利を $r_X(t)$ とする。
 - 担保を差し出されることによりかかる金利のこと
4. funding spreadを $s_{\{F\}}(t) = r_{\{F\}}(t) - r_{\{X\}}(t)$ と定義する
 - 仮定もろもろ
 - $r_{\{F\}}(t)$ は無担保金利。つまり、担保をもらっている分を差し引いた金利分を調達コストと考えましようというモデル。
 - credit riskは無いと仮定
 - asset $S(t)$ は配当 $y(t)$ でレポレート $q(t)$ で調達できる
5. 複製ポートフォリオを考える。複製ポートフォリオは、資産 $S(t)$ をデルタだけ保有すると考え、微小時間の複製ポートフォリオの変化をモデリング。
6. リバランスする前のキャッシュフローは主に3つの要因からなる。
 - 担保自体の差し出し(or 差し入れ)に伴うキャッシュフロー(8.22)
 - 担保を差し出すための調達に伴うキャッシュフロー(8.23)
 - 資産のポジションのリターン（配当やレポ）のキャッシュフロー(8.24)
 - 符号はプラス？
7. 複製ポートフォリオは、デリバのヘッジポートフォリオであるべき。デリバ価値の逆符号が複製ポートフォリオと同じとすると
 - デルタの定義が導出
 - 担保付き取引の微分方程式が得られる
8. 式変形で左辺をブラックショールズ、右辺を担保を加味したことによるおつりの項と解釈できる。
9. ファインマンカットの定理を使うと、デリバ価値 $V(t)$ を導出できる。
 - $X(t) = 0$ とするとblackの式に帰着
 - リスクフリーの金利でディスカウントされる
10. リスクフリー金利(r_F)と担保金利(r_X)の差を、担保付き取引の調達金利とみなし、 r_F を式から消すと、式の意味が解釈しやすくなる。

完全担保の場合

- デリバティブの価値は担保金利を用いてディスカウントすべき，という式が導かれる。
(担保を差し出された時に払う金利を用いるということ)
- 通常，この担保金利はOIS金利を用いる
- そのため，担保付き取引のディスカウントには，OIS金利を参照するべし，という結論が得られる。

8.6.3 Multi-currency Collateral and the Collateral Option

複数通貨の担保、どの担保を選ぶか問題

担保の選択権についての背景

- single currency swapについては通過
- 新しいStandard CSAは、従来の単一通貨(ドル?)ではなく、複数通貨での清算を提案。
- しかし、レガシーCSAはそもそも、複数の通貨での担保の差し出しを認めていた。

担保の通貨選択について

- CSA契約が、3種類の通貨、ドル、ユーロ、ポンドの現金、又はアメリカ、イギリスドイツで発行されたヘアカットされた債券のどれかでの担保の差し出しを認めている。

これだけ複数の担保が許されているとなにが起こるか

- 最もコストの低い通貨で担保を差し出そうとする。Cheapest-to-Deliver
- 意味するところは担保の通貨に関して選択権があり、CDA契約に選択権が実質組み込まれているということ。

現金担保の場合の担保選択権

- 実際はもう少し複雑だがここでは現金担保だけ考え問題を簡潔化。
- 以下のように考えると，ディスカウントとして何を用いるべきかが直感的に理解できる。
- 2通貨の適格担保を考える
- d:国内、f:外国
- 担保金利は c_d , c_f で定義
- CTDelのカーブを構築したい
- 基軸を国内に選んだとき、クロスカレンシーマーケットを考慮して外国のディスカウント

カーブを決める必要がある($r_{d,f}$)

- この簡単な場合のcheapest-to-deliverは、国内の担保金利とクロスカレンシーマーケットの分のスプレッドを乗せて大きい方
- それを選べば、ディスカウントが大きく効く
- それらの金利が確定的とし、それらをファンディングレートとみなすと、ディスカウントは(8.36)で与えられる。

今の議論をもう少し理論的にまとめる. by Piterberg

登場人物

- 上記の2通貨
- $fx\ rate(\$X(t))$: 外国通貨を1としての国内通貨の額
- 4種類のゼロクーポンボンド

$t+dt$ 後のキャッシュフローをモデリングすることでドリフトを決めていく.

国内ゼロクーポンボンド, 国内現金担保の場合

時刻 t で

会社A: ゼロクーポンボンド $P_{d,d}(t, T)$ を買う

会社B: ゼロクーポンボンド $P_{d,d}(t, T)$ を売る

このやりとりのキャッシュフローを考える.

時刻 t のキャッシュフロー

1. AからBに $P_{d,d}(t, T)$ 払う
2. Bは勝ちポジションになるので, 完全担保の場合Aに $P_{d,d}(t, T)$ 払う.

$t+dt$ 後のキャッシュフロー

1. Aは $t+dt$ 後には $P_{d,d}(t, T)$ 分が勝ちポジションになっているので, 担保額をそのままBに払う.
2. Aは担保をもらったのでBに担保金利分 $c_d(t) P_{d,d}(t, T)dt$ も同時に払う.
3. $t+dt$ 後にゼロクーポンボンドの価格は, $P_{d,d}(t+dt, T)$ となっているので, BはAに $P_{d,d}(t+dt, T)$ の担保を払う.

完全担保の場合netのキャッシュフローはゼロになっているはずなので, Aからみたときのキャッシュフローは

$\$$

- $$P_{\{d, d\}}(t, T) - c_d(t) P_{\{d, d\}}(t, T)dt + P_{\{d, d\}}(t+dt, T) \setminus$$

$$= dP_{\{d, d\}}(t, T) - c_d(t) P_{\{d, d\}}(t, T)dt = 0$$

$$$$$$$

外国ゼロクーポンボンド，国内現金担保の場合

米国債を日本の現金で担保するみたいなイメージ.
 $X(t)$ を為替レートとする.

時刻 t のキャッシュフロー

1. AからBに $P_{\{f, d\}}(t, T)$ 払う
2. Bは勝ちポジションになるので，完全担保の場合Aに $P_{\{f, d\}}(t, T) X(t)$ 払う.

$t+dt$ 後のキャッシュフロー

1. Aは $t+dt$ 後には $P_{\{f, d\}}(t, T) X(t)$ が勝ちポジションになっているので，その額をBに払う.
2. かつAは担保をもらったのでBに担保金利分 $c_d(t) P_{\{f, d\}}(t, T) X(t) dt$ も同時に払う.
3. dt 後にゼロクーポンボンドの価格は， $P_{\{f, d\}}(t+dt, T)$ となっているので，BはAに $P_{\{f, d\}}(t+dt, T) X(t+dt)$ の担保を払う.

瞬間的なFXスワップ

上記と同様のキャッシュフローになる. 意味合いとしては，国内現金担保の外国為替ローンと同じ.

為替レートを $X(t)$ ，国内基軸の外国金利を $r_{\{d, f\}}$ とすると， $t+dt$ 後のキャッシュフローは

\$\$\$

$$dX(t) - r_{\{d, f\}} X(t) dt$$

\$\$\$

となる.

以上よりドリフトが決まるので，確率過程を考える場合，ウィーナー過程を加えれば良い. 国内通貨をニューメレールとする場合のSDEは， Q^d 測度の下で(8.40)-(8.42)のように書かれる.

Sticky Collateral and the general collateral option

担保の種類

- CSAの下では満期に応じてヘアカットがかかった現金以外の担保も認められている
- その場合，どれがもっとも調達コストが小さくなる担保であるかを選択することが複雑に

なる