

Работа

Сингалевич Дмитрий

01.01.2022

## 0.1 Прецессия спина

Спин электрона в магнитном поле прецессирует согласно уравнению прецессии:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{S}], \quad (0.1)$$

где  $\mathbf{S}$  - спин электрона,  $\mathbf{S} = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ . А угловая скорость прецессии  $\mathbf{\Omega}$  связана с магнитным полем гиромангнитным коэффициентом:

$$\mathbf{\Omega}_k = \gamma \mathbf{B}_k = g \frac{|e| \hbar \mathbf{B}_k}{2m_0 c}, \quad (0.2)$$

где  $g$  - аномальный  $g$ -фактор электрона,  $m_0$  - масса электрона. Это уравнение можно спроецировать по осям:

$$\begin{cases} \dot{S}_x = \Omega_y S_z - \Omega_z S_y \\ \dot{S}_y = \Omega_z S_x - \Omega_x S_z \\ \dot{S}_z = \Omega_x S_y - \Omega_y S_x \end{cases}$$

При решении смешанным численным методом эта система преобразуется:

$$\begin{cases} \frac{S_x(t+dt) - S_x(t)}{dt} = \Omega_y \frac{S_z(t+dt) + S_z(t)}{2} - \Omega_z \frac{S_y(t+dt) + S_y(t)}{2} \\ \frac{S_y(t+dt) - S_y(t)}{dt} = \Omega_z \frac{S_x(t+dt) + S_x(t)}{2} - \Omega_x \frac{S_z(t+dt) + S_z(t)}{2} \\ \frac{S_z(t+dt) - S_z(t)}{dt} = \Omega_x \frac{S_y(t+dt) + S_y(t)}{2} - \Omega_y \frac{S_x(t+dt) + S_x(t)}{2} \end{cases}$$

Перегруппировка слагаемых:

$$\begin{cases} S_x(t+dt) + \frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_y(t+dt) - \frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_z(t+dt) = S_x(t) - \frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_y(t) + \frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_z(t) \\ -\frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_x(t+dt) + S_y(t+dt) + \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_z(t+dt) = \frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_x(t) + S_y(t) - \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_z(t) \\ \frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_x(t+dt) + \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_y(t+dt) + S_z(t+dt) = -\frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_x(t) + \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_y(t) + S_z(t) \end{cases}$$

Для удобства можно переписать эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\Omega_z dt & -\frac{1}{2}\Omega_y dt \\ -\frac{1}{2}\Omega_z dt & 1 & \frac{1}{2}\Omega_x dt \\ \frac{1}{2}\Omega_y dt & -\frac{1}{2}\Omega_x dt & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_x(t+dt) \\ S_y(t+dt) \\ S_z(t+dt) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x(t) - \frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_y(t) + \frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_z(t) \\ \frac{1}{2}\Omega_z dt \cdot S_x(t) + S_y(t) - \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_z(t) \\ -\frac{1}{2}\Omega_y dt \cdot S_x(t) + \frac{1}{2}\Omega_x dt \cdot S_y(t) + S_z(t) \end{pmatrix}$$

## 0.2 Спин-орбитальное взаимодействие

При движении электрона во внешнем электрическом поле проявляется эффект спин-орбитального взаимодействия: спин электрона прецессирует вследствие появления магнитного поля в системе отсчёта электрона.

Для свободного электрона в постоянном электрическом поле можно вычислить получившееся магнитное поле по формуле:

$$\mathbf{B}_k = \frac{1}{c}[\mathbf{E} \times \mathbf{v}]$$

Но при движении электрона в полупроводнике (что означает, что он не свободен) проявляется эффект Рашбы, усиливающий спин-орбитальное взаимодействие. В таком случае принято говорить о спин-орбитальном взаимодействии Рашбы, работающим по закону:

$$\Omega_k \cdot \mathbf{S} = \alpha_R(E) \cdot k, \quad (0.3)$$

где  $\alpha_R(E)$  - коэффициент спин-орбитального взаимодействия, зависящий от электрического поля;  $k$  - волновой вектор электрона, вычисляемый из формулы:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m^*}, \quad (0.4)$$

где  $m^*$  - эффективная масса электрона.

## 0.3 Спин в транзисторе

Частный случай полета электрона в полупроводнике под действием электрического поля - это полет электрона в транзисторе. Для этого случая будем считать, что  $\alpha_R$  прямо пропорционально электрическому полю  $E$  с коэффициентом  $r_R$ :  $\alpha_R = r_R \cdot E$ .

Рассмотрим беспрепятственный полет электрона. Тогда  $k = const$  из чего по формуле 0.3 следует, что скорость прецессии постоянна. При этом прецессия происходит в одной плоскости и это можно изобразить на схеме (рис. 1).

Можно задать такие значения электрического поля  $E$  и длины транзистора  $L$ , что прецессия произойдет на нужный угол  $\beta$ . Связь этих величин задается уравнениями 0.3 и 0.4, а также уравнениями движения

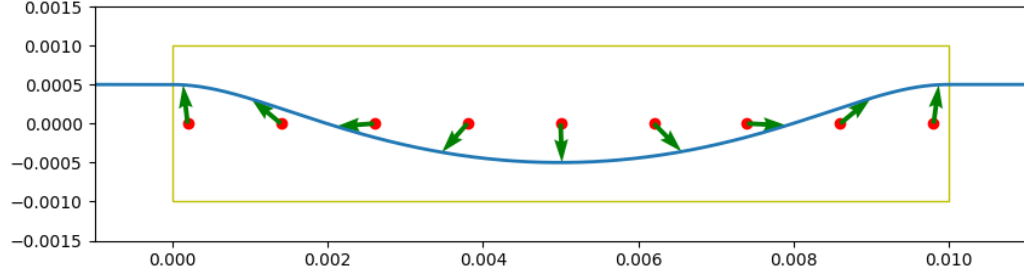


Рис. 1: Прецессия спина в транзисторе. Желтая рамка - границы транзистора.

электрона и угловой скорости спина:

$$\begin{cases} \Omega_k = \frac{r_R \cdot E \cdot k_F}{S} \\ v = \frac{\hbar k}{m^*} \\ \tau = \frac{L}{v} \\ \beta = \Omega_k \cdot \tau \end{cases}$$

Из этой системы уравнений можно получить, что:

$$\beta = \frac{r_R \cdot E \cdot k_F}{S} \cdot \frac{L m^*}{\hbar k} = \frac{2 r_R m E L}{\hbar^2} \quad (0.5)$$

Для прецессии спина на  $\pi$  произведение  $E \cdot L$  должно равняться:

$$E \cdot L = \frac{\pi \hbar^2}{2 r_R m^*} \quad (0.6)$$

Оценим значения величин в уравнении для квантовой ямы в GaAs:

$$r_R \approx 5 \cdot 10^{-16} \text{ e} \cdot \text{см}^2 \approx 2.4 \cdot 10^{-25} \text{ СГС} \cdot \text{см}^2$$

$$m^* \approx 0.1 \cdot m_0 \approx 9.1 \cdot 10^{-29} \text{ г}$$

$$\hbar \approx 1.1 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{с}$$

$$\text{Тогда: } E \cdot L \approx 9 \cdot 10^{-2} \text{ СГС/см}$$

$$\text{При длине транзистора } L = 0.01 \text{ см} :$$

$$E \approx 9 \text{ СГС/см}^2 \approx 2.7 \cdot 10^5 \text{ В/м}$$

## 0.4 Релаксация спина

Спиновой релаксацией называется прецессия спина на достаточно большой угол. Будем брать этот угол равным 1 радиану.

В модели беспрепятственного полета электрона релаксация происходит за время  $1rad/\Omega$ . Однако в реальном полупроводнике, вследствие теплового движения ячеек кристаллической решетки, электрон постоянно сталкивается с ними и меняет направление своей скорости (а значит и плоскость вращения). Вследствие этого время релаксации становится больше, чем в модели без столкновений (но если столкновения происходят настолько редко, что за время между изменениями вектора скорости спин успеет спрецессиовать на 1 радиан, то время релаксации не изменится).

Для визуализации прецессии спина используется сфера Блоха - трехмерная диаграмма в виде линии, характеризующей перемещения вершины вектора спина, считая что основание вектора - в центре сферы (рис. 2).

В определенном приближении можно считать, что столкновения происходят через равные промежутки времени, а скорость после каждого столкновения меняет только свое направление на случайное. Заметим, что для любого распределения плотности вероятности по времени между столкновениями можно выбрать такое время  $\tau$ , что среднее время релаксации в модели равного времени между столкновениями будет таким же, как и в реальности. Также будет рассматриваться исключительно тот случай, когда при входе в полупроводник спин перпендикулярен случайному магнитному полю (то есть первый угловой "шаг" по сфере будет равен  $\Omega\tau$ ).

С помощью программы снимем зависимость времени релаксации  $\tau_s$  от времени между столкновениями  $\tau$  и построим её график, используя по обеим осям размерность  $\frac{1}{\Omega}$  (рис. 3). Из графика видно, что при времени между столкновениями большем, чем  $\frac{1}{\Omega}$ , время релаксации становится константой. Это объясняется тем, что когда величина  $\Omega\tau$  превышает 1, за время до первого столкновения спин успевает спрецессировать на угол более 1 радиан, а значит релаксация происходит за одно и то же время. При этом это время равно  $1rad/\Omega$ , то есть 1 в данных осях. Построим этот график в двойном логарифмическом масштабе (4). Заметим, что при небольших значениях  $\Omega\tau$  этот график представляет из

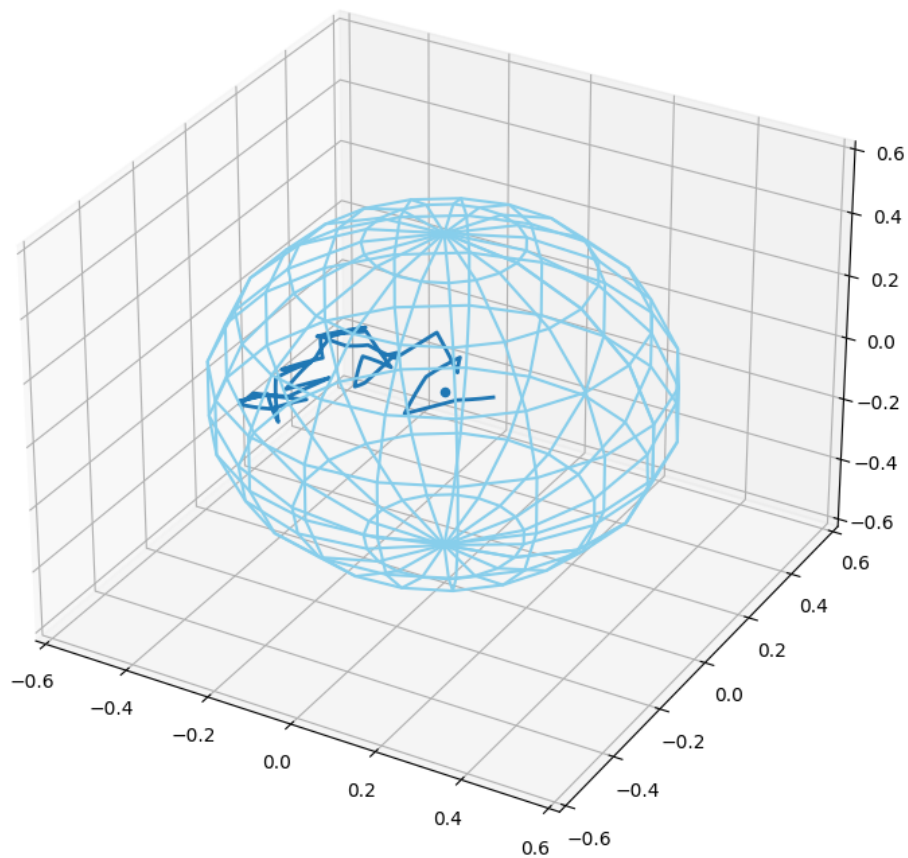


Рис. 2: Сфера Блоха

себя прямую, а значит что зависимость  $\tau_s(\tau)$  - степенная. Коэффициент наклона этой прямой равен 0.91, откуда  $\tau_s \propto \tau^{0.91}$ . Но при приближении  $\Omega\tau$  к 1 угол наклона уменьшается и становится равен  $\approx 0.7$ .

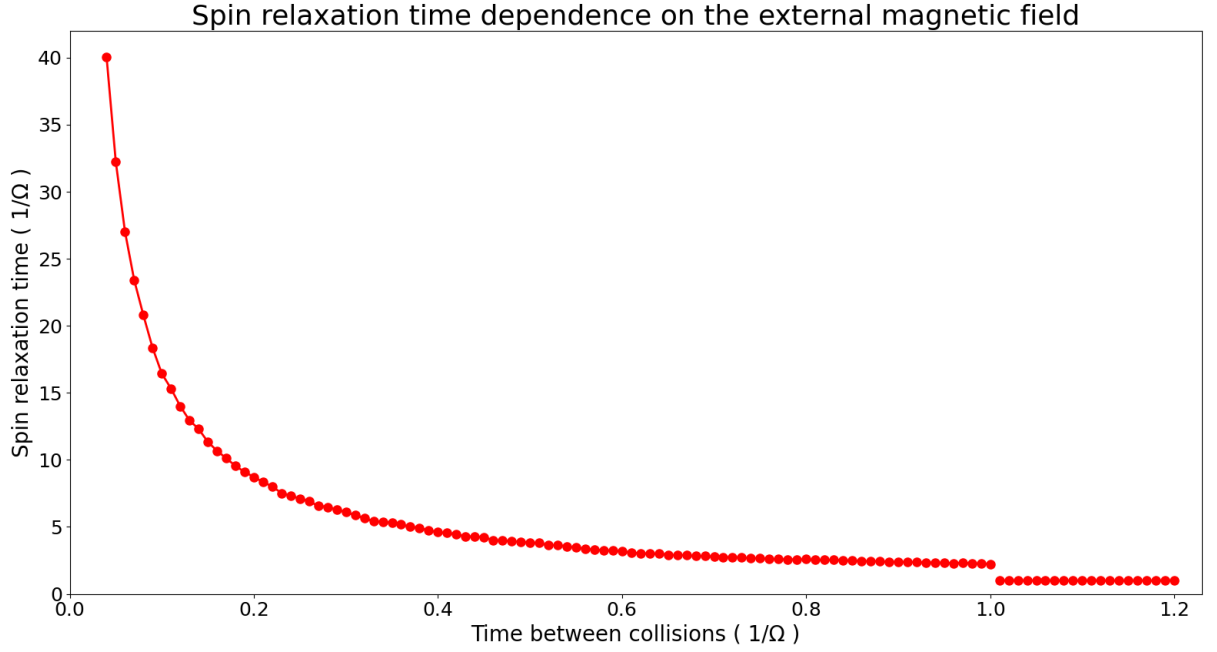


Рис. 3: Зависимость времени релаксации от времени между столкновениями

## 0.5 Релаксация спина во внешнем магнитном поле

Рассмотрим воздействие внешнего магнитного поля на релаксацию спина. Тогда суммарное значение  $\Omega = \omega + \Omega_{outside}$  (где  $\omega$  - случайное магнитное поле от спин-орбитального взаимодействия). При достаточно большом внешнем поле  $\Omega \approx \Omega_{outside}$ , и тогда прецессия происходит вокруг оси внешнего поля. Рассмотрим случай, когда  $\Omega_{outside}$  сонаправлена со спином в момент входа в полупроводник. Тогда при увеличении внешнего поля увеличится и время релаксации (т.к. спин вращается вокруг текущего  $\Omega$ , а большое  $\Omega_{outside}$  делает  $\Omega$  сонаправленным с начальным положением спина).

В качестве иллюстрации этого процесса можно использовать сферу Блоха при разных внешних полях (5) - чем больше внешнее поле, тем больше время релаксации (тем больше количество витков). С помощью программы снимем зависимость времени релаксации от отношения величин

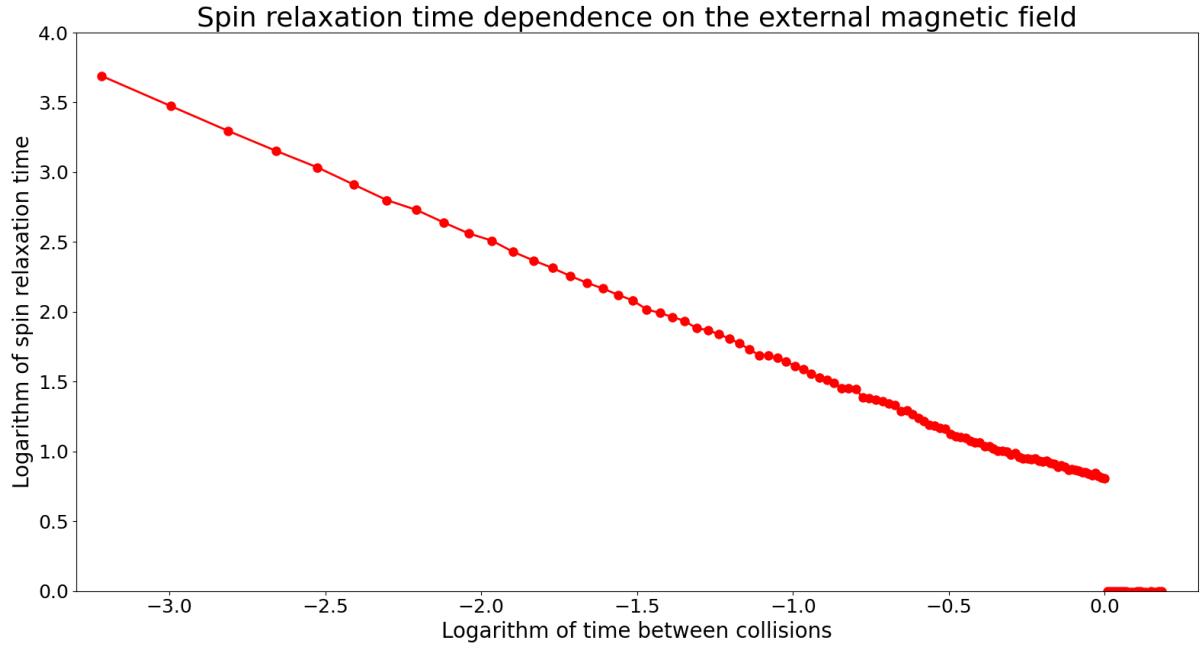


Рис. 4: Зависимость времени релаксации от времени между столкновениями в двойном логарифмическом масштабе

ны внешнего поля к случайному, опять используя размерность  $\frac{1}{\omega}$  по оси времени (рис. 6). При малом внешнем поле, как видно из графика без внешнего поля, чем больше  $\omega\tau$ , тем меньше время релаксации, но скорость его увеличения больше при увеличении внешнего поля. В теории эта зависимость описывается формулой:  $\tau_s^2 = \tau_{s0}^2 \cdot (1 + (\Omega_{outside}\tau)^2)$ , где  $\tau_{s0}$  - время релаксации при отсутствии внешнего поля. Но, построив график  $\tau_s^2/\tau_{s0}^2$  от  $(\Omega_{outside}\tau)^2$  (рис. 7), видно, что он не линеен (а в теории  $\tau_s^2/\tau_{s0}^2 = (1 + (\Omega_{outside}\tau)^2)$ ). Можно построить график  $\ln(\tau_s)$  от  $(\Omega_{outside}\tau)^2$  (рис. 8). Этот график линеен, откуда можно сделать вывод, что  $\tau_s \propto e^{(\Omega_{outside}\tau)^2}$ .



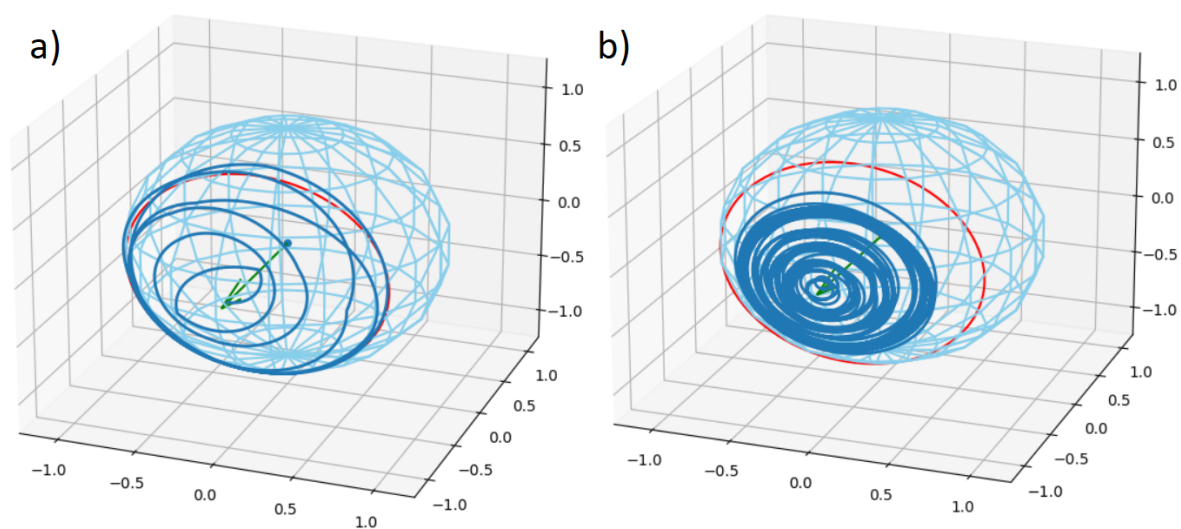


Рис. 5: Сфера Блоха,  $\omega\tau = 0.4$ . Красная окружность - зона, при выходе из которой спин отрелаксировал. Внешнее поле больше случайного в а) 5 раз b) в 20 раз.

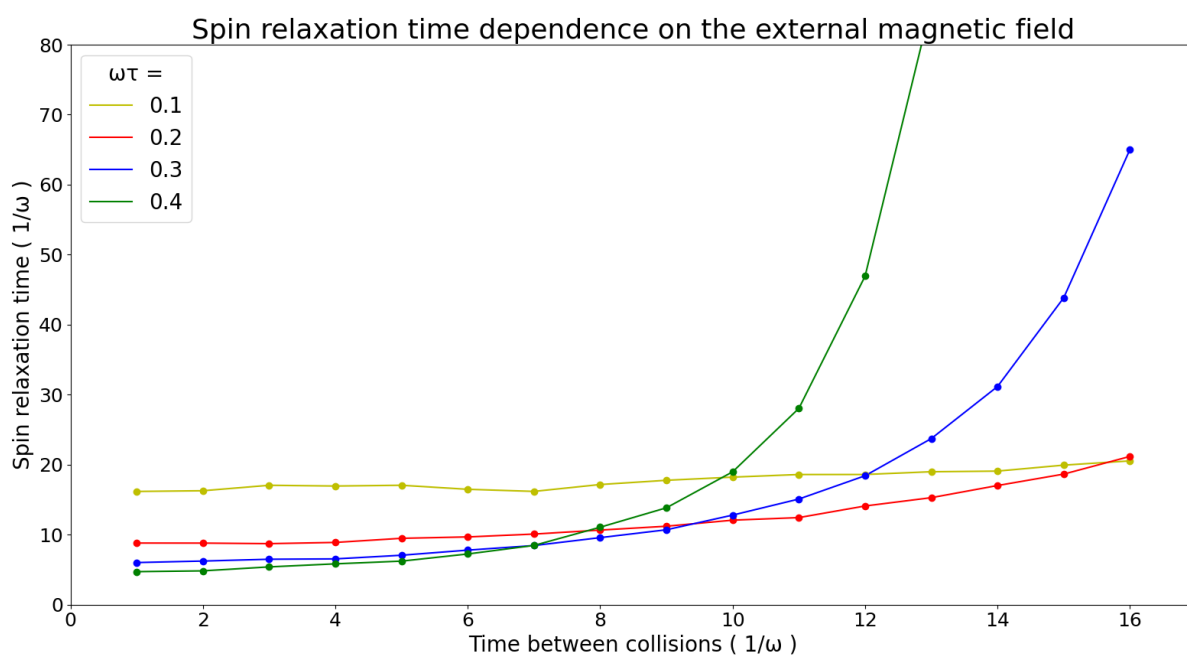


Рис. 6: Зависимость времени релаксации от отношения величины внешнего магнитного поля к случайному

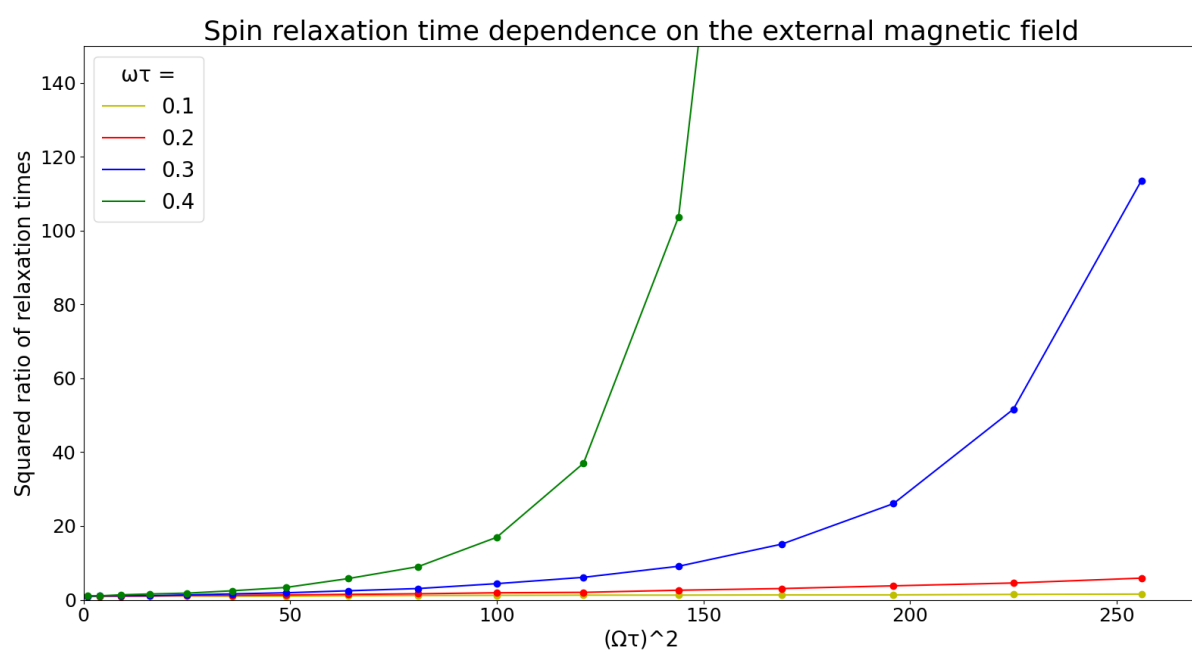


Рис. 7: Зависимость  $\tau_s^2/\tau_{s0}^2$  от  $(\Omega_{outside}\tau)^2$  растёт быстрее прямой

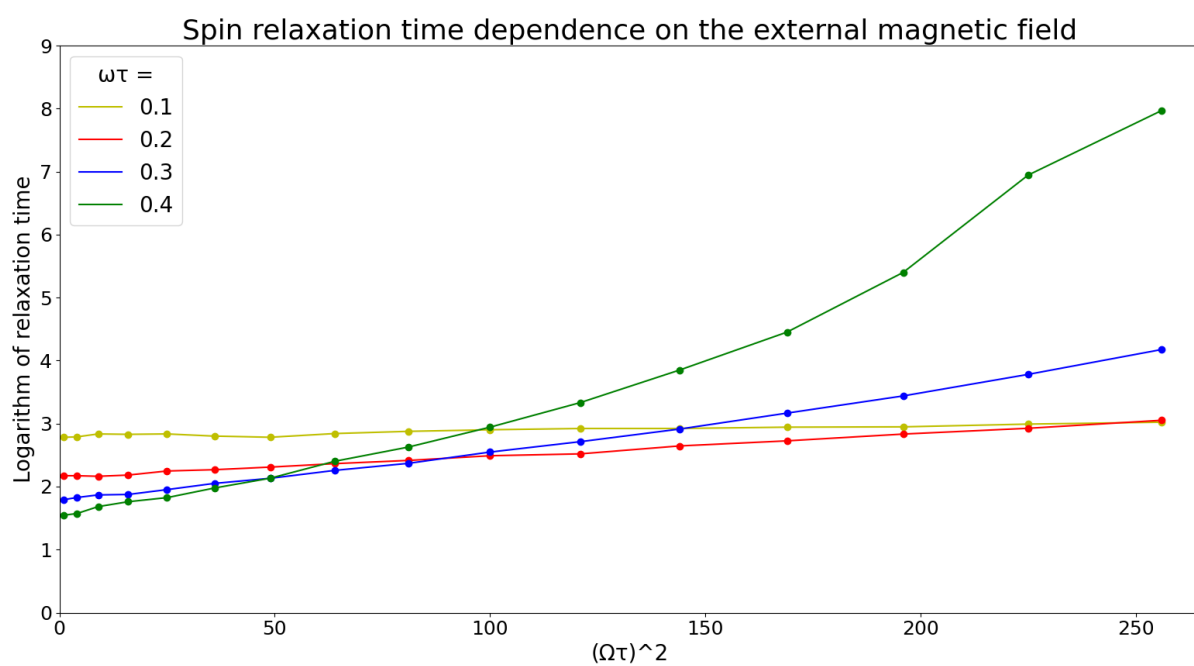


Рис. 8: График  $\ln(\tau_s)$  от  $(\Omega_{outside}\tau)^2$  линейен