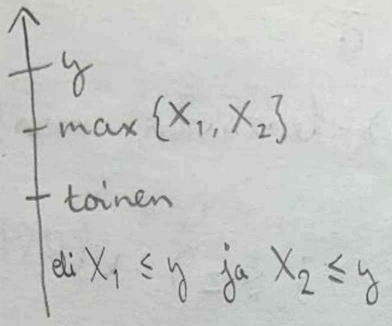
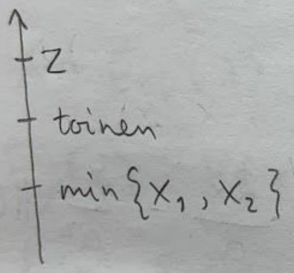
TODARI 1 – VIIKKO 5

1) $Y = \max\{X_1, X_2\}$ $\qquad X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

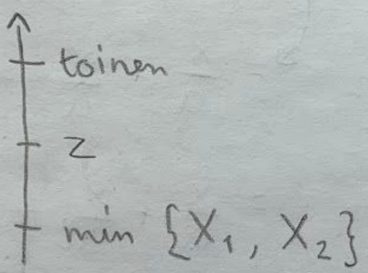


$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(\max\{X_1, X_2\} \leq y) \\
&= P(X_1 \leq y \cap X_2 \leq y) \\
&= P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) \\
&= F_1(y) F_2(y), \quad y \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$Z = \min\{X_1, X_2\}$



TAI



eli $X_1 \leq z$ ja $X_1 \leq z$

eli toinen $\geq z$ ja $\min \leq z$

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = P(Z \leq z) &= P(\min\{X_1, X_2\} \leq z) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, X_2\} > z) \\
&= 1 - P(X_1 > z \cap X_2 > z) \\
&= 1 - [(1 - F_1(z)) \cdot (1 - F_2(z))] \\
&= 1 - [1 - F_2(z) - F_1(z) + F_1(z) \cdot F_2(z)] \\
&= \cancel{1} - \cancel{1} + F_2(z) + F_1(z) - F_1(z) \cdot F_2(z) \\
&= F_1(z) + F_2(z) - F_1(z) \cdot F_2(z)
\end{aligned}$$

(2) Sporat ovat jatkuvasti tasajakautuneet.

$X, Y \sim \text{Tas}(0, a)$

tf: $f(x) = \frac{1}{a}$ ja $f(y) = \frac{1}{a}$

(2a) eli sama tilanne kuin (1)-tehtävän $\min\{\}$.

$Z = \min\{X, Y\}$

$F_Z(Z) = P(Z \leq z) = P(\min\{X, Y\} \leq z)$ KERTYMÄF.

$= 1 - P(\min\{X, Y\} > z)$

tehtävä (1)

$= F_X(Z) + F_Y(Z) - F_X(Z) \cdot F_Y(Z)$

s. 86/5.1.1

$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$

tässä tapauksessa $a=0$, $b=a$

$= \frac{x}{a} + \frac{x}{a} - \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{a}$

$= \frac{x}{a} + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \quad \|(\,)\cdot\frac{a}{a}$

$= \frac{2xa}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{2xa - x^2}{a^2}$

tf = kertymäfunktio derivoituna

$= F_Z'(Z)$

$= F_Z'\left(\frac{2xa - x^2}{a^2}\right) = \frac{2a - 2x}{a^2} = \frac{2(a-x)}{a^2}$ kun $0 < x < a$

(2b) Jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo s. 90/5.15

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} |z|\, f(z)\,dz < \infty$$

$$= \int_0^a z\, f(z)\,dz = \int_0^a z \cdot \frac{2(a-z)}{a^2}\,dz$$

$$= \int_0^a \frac{2az - 2z^2}{a^2}\,dz = \Big/_0^a \frac{az^2 - \frac{2}{3}z^3}{a^2}$$

$$= \frac{a^3 - \frac{2}{3}a^3}{a^2} = \frac{1}{3}a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{3a^2} = \frac{a}{3}$$

(3) $X \sim Exp(\lambda) \quad Y = \sqrt{X} \quad tf = ? \quad E(X) = ?$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sqrt{X} \le y) = P(X \le y^2)$$

$$f_Y(y) = f_X(y^2) \cdot 2y$$

s. 86/5.9 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$$= 2y\lambda e^{-\lambda y^2}$$

HUOM: Pitää olla aidosti monotoninen & derivoituva.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot 2y\lambda e^{-\lambda y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} 2y^2 \lambda e^{-\lambda y^2}\,dy =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$$ wolfram alpha

(4) $E(X, Y, Z) = \mu \qquad \sigma^2$

(4a) $E(2X+3) = 2E(X) + E(3)$ $\qquad$ $Var(2X+3) = 2^2 \, Var(X)$

$= 2\mu + 3$ $\qquad$ $= 4\sigma^2$

(4b) $E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \mu - \mu = 0$

$Var(X-Y) = Var(X) - Var(Y) = \sigma^2 - \sigma^2 = 0$

(4c) $E(X - \frac{1}{2}Y) = E(X) - \frac{1}{2}E(Y) = \mu - \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2}\mu$

$Var(X - \frac{1}{2}Y) = Var(X) - \left(\frac{1}{2}\right)^2 Var(Y) = \sigma^2 - \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{3}{4}\sigma^2$

(4d) $E(X + 2Y + 3Z) = E(X) + 2E(Y) + 3E(Z)$

$= \mu + 2\mu + 3\mu = 6\mu$

$Var(X + 2Y + 3Z) = Var(X) + 2^2 Var(Y) + 3^2 Var(Z)$

$= \sigma^2 + 4\sigma^2 + 9\sigma^2 = 14\sigma^2$

(4e) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \mu^2$

$Var(XY) = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2$

$= E(X^2)E(Y^2) - \mu^4$

$= (\sigma^2 + \mu^2) \cdot (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^4$

$= \sigma^4 + \mu^2\sigma^2 + \mu^2\sigma^2 + \cancel{\mu^4} - \cancel{\mu^4}$

$= \sigma^4 + 2\mu^2\sigma^2$

$$\boxed{\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - E(X) \\ \sigma^2 &= E(X^2) - \mu^2 \\ E(X^2) &= \sigma^2 + \mu^2 \end{aligned}}$$

(4f) $E(XYZ) = E(X) \cdot E(Y) \cdot E(Z) = \mu^3$

$Var(XYZ) = E(X^2Y^2Z^2) - (E(XYZ))^2$

$= E(X^2)E(Y^2)E(Z^2) - [E(X)]^2 [E(Y)]^2 [E(Z)]^2$

$= (\sigma^2 + \mu^2)(\sigma^2 + \mu^2)(\sigma^2 + \mu^2) - \mu^6$

$= \sigma^6 + 3\sigma^2\mu^4 + 3\sigma^4\mu^2 + \cancel{\mu^6} - \cancel{\mu^6} = \sigma^6 + 3\sigma^2\mu^4 + 3\sigma^4\mu^2$

5) $X \sim \text{Tas}(0,a) \quad Y \sim \text{Tas}(0,b) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$

$Z = \dfrac{X \cdot Y}{2}$ = kolmion pinta-ala

$$E(Z) = \frac{1}{2}E(X) \cdot \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{2}E(X)E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{ab}{8}$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}\left(\frac{X \cdot Y}{2}\right) = \frac{1}{4}\text{Var}(XY) = \frac{1}{4}\left[(E(X^2Y^2)) - (E(XY))^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\text{Var}(X)\text{Var}(Y) + \text{Var}(X)(E(Y))^2 + \text{Var}(Y)(E(X))^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{a^2}{12} \cdot \frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{12} \cdot \frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{12} \cdot \frac{a^2}{4}\right]$$

$$= \frac{a^2}{48} \cdot \frac{b^2}{48} + \frac{a^2}{48} \cdot \frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{48} \cdot \frac{a^2}{16}$$

$$= \frac{a^2 \cdot b^2}{2304} + {}^{3)}\frac{a^2b^2}{768} + {}^{3)}\frac{a^2b^2}{768} = \frac{a^2b^2}{2304} + \frac{3a^2b^2}{2304} + \frac{3a^2b^2}{2304}$$

$$= \frac{7a^2b^2}{2304}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^a \frac{x^2}{a-0}dx = \frac{1}{3a} \Big/_0^a x^3 = \frac{a^3}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2}{3} - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = {}^{4)}\frac{a^2}{3} - {}^{3)}\frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{12} - \frac{3a^2}{12} = \frac{a^2}{12}$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^b \frac{x^2}{b-0}dx = \frac{b^2}{3}$$ (sama tapa kuin $E(x^2)$)

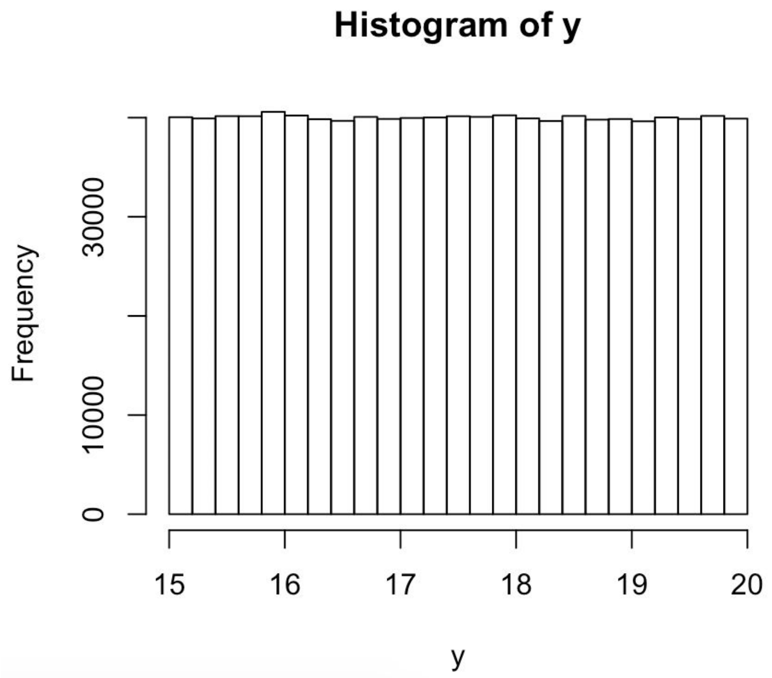
$$\text{Var}(Y) = \frac{b^2}{12}$$

Tiedän, ettei Var(Z) vastauksen “alakerta” ole oikein. Mutta olen laskenut tämän nyt viisi kertaa enkä ihan oikeasti vain pysty tähän enää.

Tehtävä 6a

Koodi:

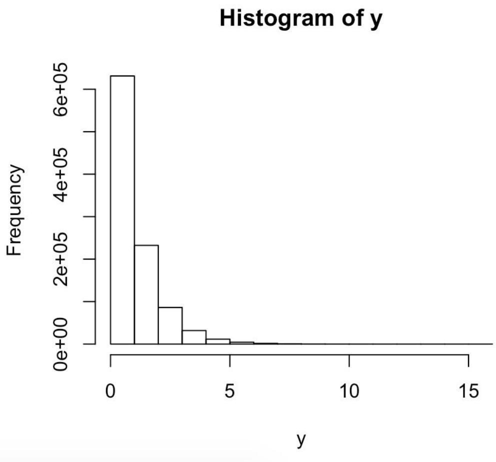
```
n = 10^6
a = 15
b = 20
x = runif(n)
y = (b-a)*x + a
hist(y)
```

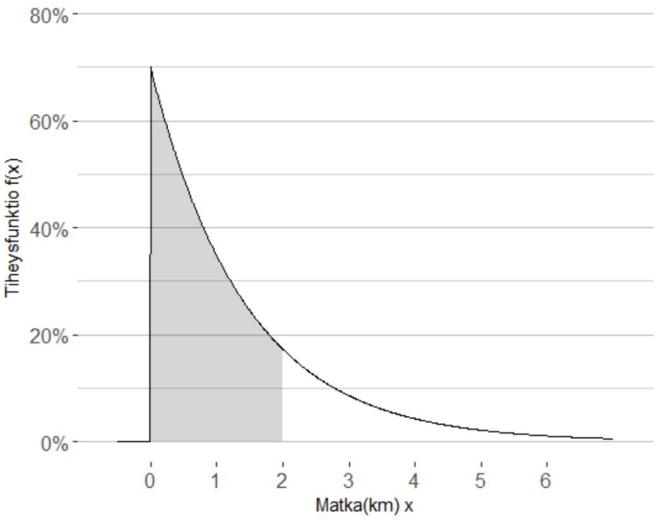


Huomataan, että näyttää likimain tasajakautuneelta histogrammilta, jossa luvut ovat jakautuneet arvon 4000 ympärille. Lukujen varianssi on noin 2.08 (vaihtelee, sillä koodi arpoo lukuja) eli väli on tällöin 4000 ± 2.08.

Tehtävä 6b

Koodi:
(n = 10^6
a = 15
b = 20
x = runif(n)
y = -log(x)
hist(y)



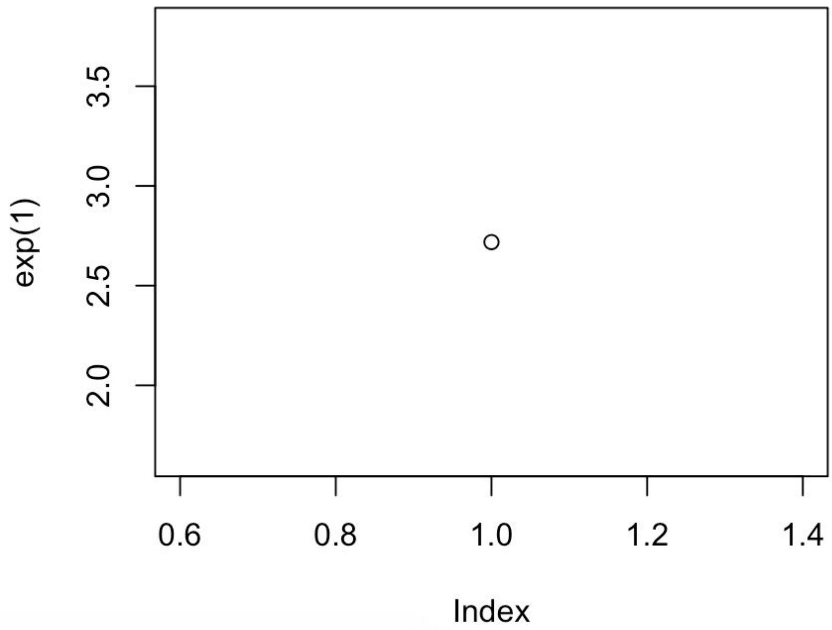


Kuva 5.2: Eksponenttijakautuneen satunnaismuuttujan Y tiheysfunktion kuvaaja.

Materiaalista eksponenttijakauman tiheysfunktio omaa samanlaisen muodon kuin tehtävässä annettu Exp(1), jos nyt ymmärsin tehtävänannon oikein ja Exp(1) on tiheysfunktio yhden ainoan arvon kaaviossa sijaan.

Huomataan, että muodot muistuttavat toisiaan, mutta viivan “kaarevuus” vaihtelee riippuen funktion arvoista.

En ole nyt ihan varma tästä tehtävänannon vikasta kohdasta.
Jos käyttää koodia
dexp(x, rate = 1, log = FALSE)
tulee seuraavanlainen kaavio:



Jolloin tehtävänannossa tarkasteltaisiin Y-akselilla arvoja Y<=2 eli siinä ei olisi mitään eli tiheysfunktio = 0.