Projekt C

Sebastian O. Jensen, GJX 653

7. januar 2015

1 Opgave

(a) Det karakteristiske polynomie $p(\lambda)$ for A er givet ved

$$p(\lambda) = det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ -6 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1) + (1 \cdot 0 \cdot 0) + (0 \cdot (-6) \cdot 0) -$$
$$(0 \cdot (\lambda - 2) \cdot 0) - (0 \cdot 0 \cdot (\lambda - 3)) - ((\lambda + 1)(-6)(-1)) =$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1) - ((\lambda + 1) \cdot (-6) \cdot (-1)) =$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda + 1) - (6\lambda + 6) =$$
$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)(\lambda + 1) - (6\lambda + 6) =$$
$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda^2 - 5\lambda + 6\lambda + 6 - 6\lambda - 6 =$$
$$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 5\lambda = (\lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

Hermed har vi fundet det karakteristiske poynomie

(b) Fra faktoriseringen i opgave a kan jeg aflæsse røderne til det karakteristiske polynomie til at være 0 -1 og 5, hvilket derfor er eigenværdierne for A

(c) For vær eigenværdi findes den reducerede matrice af $A - \lambda I_3$ hvoraf eigenvektorene aflæsses

$$A + 1I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E\_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 0I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E\_1 = t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 0I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E\_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -(\lambda-3) & 1 & 0 \\ 6 & -(\lambda-2) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) \end{pmatrix} \Rightarrow E\_1 = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hermed er de 3 eigenvektore fundet.

2 Opgave

(a) Determinanten af koefficientmatricen findes ved følgende udtryk

$a11a22a33 + a12a23a31 + a13a21a32 - a11a23a32 - a12a22a33 - a13a22a31 =$

$1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-2) = 10$

(b) Lad koeficientmatricen være givet ved A

$$det(A_{31}) = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot -5 = -5$$

Da $adjA = C^T$ hvor C er kofactor matricen til A vil

$$adjA_{13} = C_{31} = -5$$

Af adjoint formlen følger

$$A^{-1} = \frac{adjA}{det(A)}$$

Elementet i den inverse matrix til koeficientmatricen i række 1 søjle 3 er derfor givet ved følgende

$$A^{-1}_{13} = \frac{1}{10} \cdot -5 = -1/2$$

(c) vha. Cramers formel løses ligningssystemet. Først findes determinanten til A_1, A_2 ogA_3

$$detA_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$detA_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-5}{10} = -1/2$$

$$x_2 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{5}{10} = 1/2$$

$$x_3 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-10}{10} = -1$$

ligningsystemet er hermed løst.

(d) Der gælder følgende

$$det(EA) = det(E)det(A =)$$

$$det(A^T) = det(A)$$

$$det(A_)) = -det(A)$$

Hvor A_1 er A hvor to rækker er ombyttet Determinanten af matrixproduktet er derfor givet ved følgende

$$10 \cdot (-10) \cdot 10 = 1000$$

3 Opgave

(a) (i)

$$HB1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ 4 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 17 & 27 & 12 \\ 13 & 23 & 4 \end{pmatrix}$$

$$HB2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 & 2 \\ 4 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ 17 & 27 & 12 \\ 13 & 23 & 4 \end{pmatrix}$$