Projekt B

Sebastian O. Jensen, GJX 653

15. december 2014

1 Opgave 1

(a) Fra den reducerede rækkeechelonform for A har vi at x_1 og x_2 er ledende variabler. Vi kan derfor vælge $x_3 = s$ og $x_4 = t$ hvilket giver følgende

$x_1 = -s - t$

$x_2 = -s + t$

$x_3 = s$

$x_4 = t$

Dette kan skrives som følgende.

$s(-1, -1, 1, 0)$ og $t(-1, 1, 0, 1)$

En bassis for nulrummet null A er hermed givet ved følgende vektorer

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) En basis for søjlerummet for col A er givet ved søjlerne i den oprindelige matrix svarende til søjlerne med pivot 1 taller i den reducerede matrix. Søjlerne med pivot 1 taller i A* er søjle 1 og 2. En basis for søjlerummet col A er derfor følgende

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c) Da den reducerede matrice har 2 pivot rækker er rank A = r = 3 og dermed er dimensionen af underummet ker T

$T = 3$

Dimmensionen af underummet ran T for en matrix med n søjler er givet ved

$$ranT = n - r$$
$$ranT = 4 - 2 = 2$$

(d) At finde en vektor x som opfylder at $T(x) = v$ gøres ved at løse ligningen

$$T(x) = Ax = v$$

Da jeg ved at en basis for col A er givet ved søjle 1 og 2 må en mulig løsning være på formen $x = (x_1, x_2, 0, 0)$ Jeg opstiler følgende matrice og reducere vha. gauss jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En mulig vektor x er derfor givet ved

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

For at finde en anden vektor y som opfyldder $T(y) = v$ betragter jeg ligningen

$$T(x) = Ax = v$$

Da v svare til den tredje søjle i A vil en mulig matrix for y være

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da

$$Ay = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = v$$

2 Opgave 2

(a) For at finde basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ opstiles total matrrix T ud fra de givne vektore

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 4 & 10 \\ 3 & 2 & 8 & 21 \end{array}\right)$$

Ved at benyter gauss jordan fremkomer følgende reducerede matrix.

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ er derfor følgende

$$\mathbf{P}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Jeg benytter samme methode til at finde basisskift-matricen $\mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 8 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 0 \\ 8 & 21 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Hvilket giver følgende basisskift matrix

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Da x kan skrives som lignaer kombinationen $x = 3u_1 + u_2$ gælder det at

$$[x]c = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi benytter den tidligere beregnet basiskift matrix $\mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ og får følgende

$$[x]b = \mathbf{P}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \cdot [x]c = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektoren w udtrykt som en lignaer kombination af v_1 og v_2 er derfor følgende

$$w = 4v_1 - v_2$$

3 Opgave 3

(a) Når rumskibet rynker en plads frem vil rumskibets centrum C rykke til rumskibets spids S da S netop ligger et ryk frem for C. Samtidig får vi oplyst at punktet C^F er rumskibets centrum efter et ryk frem, hvilket jo netop var hvad punktet S er derfor gælder det

$$C^F = S$$

punktet S^F er rumskibets spids efter et ryk frem. Dette svare til rumskibets spids forskudt et ryk i rumskibets længederetning. Dette kan udtrykes som følgende

$$S^F = S + (S - C)$$

$$S^F = 2S - C)$$

Hvilket også kan skrives på vektor form

$$\begin{pmatrix} s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s_1 - c_1 \\ 2s_2 - c_2 \end{pmatrix}$$

(b) Fra opgave a har vi følgende.

$$c_1^F = s_1$$

$$c_2^F = s_2$$

$$s_1^F = 2s_1 - c_1$$

$$s_2^F = 2s_2 - c_2$$

Her ud fra kan nu opstiles følgende

$$\begin{pmatrix} c_1^F \\ c_2^F \\ s_1^F \\ s_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

F er derfor gevet ved følgende matrix

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$cos(20) = 0,94$$

$$sin(20) = 0,34$$

(d) Hvilket giver følgende matricer

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,34 & 0,94 & -0,34 \\ -0,34 & 0,6 & 0,34 & 0,94 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,6 & -0,34 & 0,94 & 0,34 \\ 0,34 & 0,6 & -0,34 & 0,94 \end{pmatrix}$$

hvor θ er vinklen på 20 grader

Jeg benytter mul fra den udleveret java klasse og ganger matricerne sammen fra højre mod venstre.

$$RFLFFR \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \approx= \begin{pmatrix} 1,05 \\ 3,89 \\ 2,64 \\ 7,77 \end{pmatrix}$$

Efter tastekombinationen er udført vil rumskiber have følgende position Rumskibets centrum vil være i

$$(1, 05.3, 89)$$

Og rumskibets spids vil være i

$$(2, 64.7, 77)$$

4 Opgave 4

(a) Følgende kode er implementeret i klassen Matrix. Se kildekoden for mere overskugelig indentering.

```
/**
* Create a new matrix which is the matrix product of this with B.
*
* @param B a matrix with same number of rows as this has columns
* @return a new matrix of size rows() x B.cols()
* @throws IllegalArgumentException if cols() is different from B.r
**/
public Matrix mul(Matrix B)
Matrix M = new Matrix(rows(), B.cols());
if(cols() != B.rows())
System.out.print("number of colums in A has to equal number of
else
for(int i = 1; i <= M.rows(); i++)
for(int j = 1; j <= M.cols(); j++)
double v = 0;
for(int k = 1; k <= cols(); k++)
v = v + get(i, k)*B.get(k, j);
M.set(i, j, v);
return M;
```

(b) Til at definerer Matricerne A og B samt udregne AB og BA er lavet en java fil med navnet ProjectB.java som giver følgende udskrift ved kørsel

Java ProjectB

Matrix A =

[1.0 2.0 3.0]

[4.0 5.0 6.0]

Matrix B =

[-7.0 8.0]

[9.0 -10.0]

[-11.0 12.0]

A * B =

[-22.0 24.0]

[-49.0 54.0]

B * A =

[25.0 26.0 27.0]

[-31.0 -32.0 -33.0]

[37.0 38.0 39.0]