

Projekt A

Sebastian Ostfeldt Jensen GJX 653 hold 3

15. februar 2015

1 Opgave 1

(a) Jeg opskriver totalmatricen for ligningsystemet

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

Jeg fortager nu de nævnte rækkeoperationer.

$$r_1 \leftrightarrow r_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$r_2 - 2 \cdot r_1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

$$r_3 - 4 \cdot r_1$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & a - 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 + 5 \cdot r_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & a - 19 & 0 \end{pmatrix}$$

Den omformede matrice er på rækkeechelonform da den første pivot i vær række ligger til højre for pivoten i rækken oven for, samtidig skal evt. nul rækker ligge under alle ikke nul rækker. Den omformede matrice er ikke på reduceret echelonform da ikke alle pivot'er 1 samt at der over pivot'erne ikke står 0.

(b) Jeg lader nu $a = 19$ og opskriver matricen med den kendte værdi for

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 19 & -19 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jeg bringer nu matricen på reduceret rækkeechelonform vha. backward reduction

$$r_1 - r_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Løsningen til ligningssystemet er hermed givet

$$(x_1, x_2, x_3) = (1 - 4t, +3t, t)$$

(c) Jeg lader nu $a = 20$ og bestemmer den inverse matrix til koefficientmatricen.

$$\mathbf{A} \cdot I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$r_1 - r_2$$

$$\mathbf{A} \cdot I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$r_1 - 4r_3$$

$$\mathbf{A} \cdot I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$r_2 + 3r_3$$

$$\mathbf{A} \cdot I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Den inverse matrix \mathbf{X} er her med bestemt til følgende

$$\mathbf{X} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

2 Opgave 2

(a) Jeg bestemmer de elementære matricer ud fra de givne ero.

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Jeg betsemer nu F ved at gange de elementære matricer sammen

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5 \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4/5 & 1/5 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

F er hermed bestemt.

Jeg finder nu de inverse matricer til de elementære matricer ved at benytte de inverse ERO og benytte dem på I_2

$$r_2 + 4 \cdot r_1$$

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 \leftrightarrow r_3$$

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_3 \cdot 5$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$r_1 - r_3$$

$$E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeg bestemmer nu G ved at gange matricerne sammen fra venstre og får følgende

$$G = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Fra bogen har jeg at den inverse matrix A^{-1} kan udtrykkes ved produktet af de elementære matricer som svare til de ero som omformer A til enhedsmatricen. Det er lige netop hvad F er udtryk for i opgave b. Også fra bogen har jeg at den “ikke” inverse matrice af F kan udtrykkes som følgende

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1}$$

Hvilket svare til matricen G. Derfor er A givet ved følgende matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Opgave 3

- a Jeg bestemmer nabomatricen

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da jeg har oplyst N^6 benytter jeg denne til at aflæse antalet af veje fra knude 2 til knude 2 af længden 6. Denne værdi er angivet på plads N^6_{22} og har værdien 12. Der er derfor 12 veje fra kude 2 til kunde 2.

- b Lad N_j være antalet af links der udgår fra knude j. Så har jeg følgende

$$N_1 = 3, N_2 = 2, N_3 = 2, N_4 = 1, N_5 = 1$$

Jeg kan nu besteme ligningerne for x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ,

$$x_1 = x_5 + 1/2x_2$$

$$x_2 = 1/2x_3 + 1/3x_1$$

$$x_3 = 1/3x_1 + x_4$$

$$x_4 = 1/2x_3$$

$$x_5 = 1/3x_1 + 1/2x_2$$

Jeg kan nu bestemme linkmatricen A Til følgende

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c Linkmatricen kan skrives på formen $Ax = x$ hvor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Dette kan omformes til følgende total matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Jeg benytter mig af Gaussian Elimination og får følgende matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Jeg kan nu bestemme vektoren x til følgende

$$x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sider kan nu rangeres. x_1 har højest rang x_2, x_3 og x_5 har samme rang og kommer lige efter x_1 . x_5 har laveste rang.

4 Opgave 4

Opgave a, b og c er at finde i programmet ProjektA.java. Dette program benytter den udleveret Klasse Matrix.java Det findes kommentarer i source filen, men for overskuelighedens skyld udskriver programmet også under vejs hvilken opgave der regnes og hvad der regnes. Her følger en udskrift af output fra programmet ProjektA.java

a Matrix A =

[1.0 4.0 7.0]

[2.0 5.0 8.0]

[3.0 6.0 9.0]

Matrix B =

[-9.0 6.0 -3.0]

[8.0 -5.0 2.0]

[-7.0 4.0 -1.0]

b Ændre a13 til -4

New Matrix A =

[1.0 4.0 -4.0]

[2.0 5.0 8.0]

[3.0 6.0 9.0]

c Jeg benytter den modificerede matrice og udregner $2A + B$

d $2A + B =$

[-7.0 14.0 -11.0]

[12.0 5.0 18.0]

[-1.0 16.0 17.0]