# Projekt C

Sebastian O. Jensen, GJX 653

5. januar 2015

# 1 Opgave

(a) For at to vektore er ortogonal skal deres prik produkt være nul

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 13 \cdot \cdot -2 = 0$$

For at vektorene skal være en basis for U kræver det at de er lignært uafhængige. De er lignært uafhængige hvis rank er lig antalet af vektore. Vi bringer de 2 vektore på echelon form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Det ses her af at vektore er lignært uafhængige samtidig har vi oplyst at vektorene udspænder U. Derfor er de en basis for for U. Samtidig er prikproduktet 0 or dermed er de også ortogonale.

(b) Fra bogen har vi følgende

$$proj_{\mu}(v) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \dots \\ u_k^T \end{pmatrix} v$$

Der gælder derfor følgende

$$Pv = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \dots \\ u_k^T \end{pmatrix} v$$

$$P = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \dots \\ u_k^T \end{pmatrix}$$

Som kan udtrykes som

$$P = A(A^T \cdot A)^{-1} A^T$$

Hvor A er en matrice hvor søjlerne er basis for underrumet U

Dette giver følgende

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \\ 13 & -2 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \\ 2 & 2 \\ 13 & -2 \end{pmatrix} \right)^1 \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{225} \begin{pmatrix} 45 & 60 & 30 & 60 \\ 60 & 160 & 80 & -20 \\ 30 & 80 & 40 & -10 \\ 60 & -20 & -10 & 205 \end{pmatrix}.$$

Hermed er det vist at projektionsmatricen er givet ved P

(c) Ved at benytte projektionsmatricen fra opgave b bestemes den ortogonale projektion af vektoren v på underrummet U

$$\mathbf{Pv} = \frac{1}{225} \begin{pmatrix} 45 & 60 & 30 & 60 \\ 60 & 160 & 80 & -20 \\ 30 & 80 & 40 & -10 \\ 60 & -20 & -10 & 205 \end{pmatrix} . \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(d) Vi benyter os af Matrice A fra opgave b hvor søjlene er basis for underrummet U og finder den reducerede rækkeechelon form for $A^T$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 13 \\ 1 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -25/20 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -25/20 \end{pmatrix} =$$

Her af aflæses en basis for $U^{\perp}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1/2 & 25/20 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 2 Opgave

(a) i følge Gram-Schmit proceduren er $q_1$ og $q_2$ givet ved følgene udtryk

$$q_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

$$q_2 = \frac{v_2 - (q_1 \cdot u_2)\, q1}{||v_2 - (q_1 \cdot u_2)\, q1||}$$

Hvor $q_1$ og $q_2$ er en otonormal basis for V

Hvilket giver følgende

$$q_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$q_1 \cdot v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3$$

$$v_2 - (q_1 \cdot v_2)\, q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$||v_2 - (q_1 \cdot v_2)\, q_1|| = 3$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) I følge Hardys bog kan koordinatvektoren $[w]_\beta$ bestemes med følgende udtryk

$$[w]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w \cdot u_1}{||u_1||^2} \\ \frac{w \cdot u_2}{||u_2||^2} \\ \frac{w \cdot u_3}{||u_3||^2} \end{pmatrix}$$

Hvilket giver følgende koordinatvektor

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{1} \\ \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $Q^{-1}$ bestemes vha. identitets matricen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der udføres række operationer og vi for følgende

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{array}\right)$$

$Q^{-1}$ er her med givet ved følgende matrice.

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

# 3 Opgave

(a) Vi benytter mindste kvadraters methode til at finde forskriften for ln y som y = mx + c Først opstiles matrix systemet ud fra de opgivne data og vi får følgende

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2004 \\ 1 & 2005 \\ 1 & 2007 \\ 1 & 2008 \\ 1 & 2009 \\ 1 & 2010 \\ 1 & 2011 \\ 1 & 2012 \\ 1 & 2013 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 31,890 \\ 32,550 \\ 33,801 \\ 34,564 \\ 35,104 \\ 35,481 \\ 36,891 \\ 37,331 \\ 38,061 \end{pmatrix}$$

Da rank A = 2 har vi følgende

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \bar{m} \end{pmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

Der benyttes en matrix beregner hvilket giver følgende

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1343,01 \\ 0,6860 \end{pmatrix}$$

forskriften for ln y er derfor givet ved følgende rette linje

$$lny = 0,6860t - 1343,01$$

(b) Fra opgave b har vi

$$lny = 0,6860t - 1343,01$$

Dette kan omskrives til

$$y = e^{0,6860t-1343,01}$$
$$y = e^{0,6860\cdot 2004-1343,01} \cdot e^{0,6860(t-2004)}$$
$$y = 6,112854146 \cdot 10^{13} \cdot e^{0,6860(t-2004)}$$

Hvilket stemmer overens med den i opgaven nævnte funktion. Funktionerne stemmer ikke helt overens da de udregnede værdier i opgave a ikke er præcis de samme som opgavens.

(c) Ved at benytte tilnærmelsen fra opgaven fåes følgende resultat for antal flops i 1996

$$6.44 \cdot 10^{13} \cdot e^{0.639(1996-2004)} = 387,94 \cdot 10^9$$

Hvilket er en del mere end det faktiske antal flops i 1996. Hvis parameterne som blev fundet i opgave a blev benyttet vil udregningen give $266,3 \cdot 10^9$ hvilket er nærmere det faktiske niveu i 1996.

# 4 Opgave

ProjectC.java er main programmet der benyter sig den udleveret klasse Matrix.java. I Matrix. java er udover den udfyldte methode gramschmith også tilføjet en methode sub som er en modification af add. Følgende kode er implementeret i bunden af den udleveret Matrix klasse. Se java fil for mere overskugelig indentering - /** * Create a new matrix where the column vectors form an orthonormal subspace spanning the same as this, and calculated by the Gram-Schmidt process. * * @return a new matrixs **/ public Matrix GramSchmidt() int m = rows(); int n = cols(); Matrix r = new Matrix(m,n); Matrix q = new Matrix(m,n); for(int j = 1; j <= n; j++) q = q.replaceCol(j, subMatrix(1, j, m, j)); for(int i = 1; i <= j-1; i++) Matrix qi = q.subMatrix(1, i, m, i); Matrix uj = subMatrix(1, j, m, j); Matrix qj = q.subMatrix(1, j, m, j); r.set(i, j, qi.transpose().mul(uj).get(1, 1)); q = q.replaceCol(j, qj.sub(qi.mul(r.get(i,j)))); double qjLength = 0; for(int i = 1; i <= m; i++) qjLength += Math.pow(q.get(i, j), 2); qjLength = Math.sqrt(qjLength); r.set(j, j, qjLength); q = q.replaceCol(j, q.subMatrix(1, j, m, j).mul(1/(r.get(j,j)))); return q; /** * Create a new matrix, which is the element-wise subtraction of this with another matrix B. The two matrices must be of the same size. * * @param B a matrix * @return a new matrix * @throws IllegalArgumentException if number of rows and columns differs in this and B **/ public Matrix sub(Matrix B) if((rows()!=B.rows()) || (cols()!=B.cols())) throw new IllegalArgumentException("Number of rows and columns differ"); Matrix M = new Matrix(rows(), cols()); double v; for(int i = 1; i <= rows(); i++) for(int j = 1; j <= cols(); j++) v = get(i, j); M.set(i, j, v-B.get(i, j)); return M; Udskriften fra kørsel af ProjecC er følgende OPGAVE 4 b Matrix A = [4.0 0.0 -1.0] [-8.0 -2.0 4.0] [-1.0 1.0 3.0]

[12.0 0.0 2.0] Matrix Q [0.26666666666666666 -0.13333333333333333 -0.2] [-0.5333333333333333 -0.7333333333333334 0.4] [-0.06666666666666667 0.5333333333333333 0.8] [0.8 -0.4 0.39999999999999997]