Diseño y Análisis de Algoritmos
Tarea 1 - Demostraciones de las propiedades de los órdenes asintóticos

Santiago Sinisterra Sierra

28 de octubre de 2020

1. Transitividad

Propiedad 1.1 *Si $f(n)$ es $O(g(n))$ y $g(n)$ es $O(h(n)) \Rightarrow f(n)$ es $O(h(n))$*

$f(n)$ es $O(g(n))$ es verdadero si hay dos constantes n_f y c_f tal que para toda $n \geq n_f$, $c_f g(n) \geq f(n)$.

La segunda, la afirmación de $g(n)$ es $O(h(n))$ es verdadera si hay dos constantes n_g y c_g tal que para toda $n \geq n_g$, $c_g h(n) \geq g(n)$.

Ambas afirmaciones se realizan a partir de la definición de O.

El consecuente indica que $f(n)$ es $O(h(n))$ si hay hay dos constantes n_h y c_h tal que para toda $n \geq n_h$, $c_h h(n) \geq f(n)$. c_h debe ser igual a $c_f c_g$ y n_h debe ser igual al valor mayor entre n_f y n_g, o sea $\max\{n_f, n_g\}$.

Propiedad 1.2 *Si $f(n)$ es $\Omega(g(n))$ y $g(n)$ es $\Omega(h(n)) \Rightarrow f(n)$ es $\Omega(h(n))$*

$f(n)$ es $\Omega(g(n))$ es verdadero si hay dos constantes n_f y c_f tal que para toda $n \geq n_f$, $c_f g(n) \leq f(n)$.

La segunda, la afirmación de $g(n)$ es $\Omega(h(n))$ es verdadera si hay dos constantes n_g y c_g tal que para toda $n \geq n_g$, $c_g h(n) \leq g(n)$.

Ambas afirmaciones se realizan a partir de la definición de Ω.

El consecuente indica que $f(n)$ es $\Omega(h(n))$ si hay hay dos constantes n_h y c_h tal que para toda $n \geq n_h$, $c_h h(n) \leq f(n)$. c_h debe ser igual a $c_f c_g$ y n_h debe ser igual al valor mayor entre n_f y n_g, o sea $\max\{n_f, n_g\}$.

Propiedad 1.3 *Si $f(n)$ es $\Theta(g(n))$ y $g(n)$ es $\Theta(h(n)) \Rightarrow f(n)$ es $\Theta(h(n))$*

$f(n)$ es $\Theta(g(n))$ si hay dos constantes c_{1f} y c_{2f} tales que $c_{1f} g(n) \geq f(n)$ (pertenencia a O) y $c_{2f} g(n) \leq f(n)$ (pertenencia a Ω); así como un valor n_f para el cual, para toda $n \geq n_f$, $c_{1f} g(n) \leq f(n)$ y $c_{2f} g(n) \geq f(n)$.

$g(n)$ es $\Theta(h(n))$ si hay dos constantes c_{1g} y c_{2g} tales que $c_{1g}h(n) \geq g(n)$ (pertenencia a O) y $c_{2g}h(n) \leq g(n)$ (pertenencia a Ω); así como un valor n_g para el cual, para toda $n \geq n_g$, $c_{1g}h(n) \geq g(n)$ y $c_{2g}h(n) \leq g(n)$.

$f(n)$ es $\Theta(h(n))$ si hay dos constantes c_{1h} y c_{2h}, así como un valor n_h para el cual $c_{1h}h(n) \geq f(n)$ (pertenencia a O) y $c_{2h}h(n) \leq f(n)$ (pertenencia a Ω).

c_{1h} tiene que ser igual a $c_{1f} \cdot c_{1g}$ para garantizar que $f(n)$ esté debajo de $g(n)$ y $h(n)$; mientras que c_{1h} tiene que ser igual a $c_{2f} \cdot c_{2g}$ para garantizar que $f(n)$ esté encima de $g(n)$ y $h(n)$. n_h es el valor mayor entre n_f y n_g, ya que si a partir de n_f la función siempre es mayor, cuando llegue n_g, que es el valor que cumple la condición, hará que ambas condiciones se cumplan.

2. Reflexividad

Propiedad 2.1 $f(n)$ *es* $O(f(n))$

Esta propiedad se cumple porque para pertenecer a O, hay un c_f tal que $c_f f(n)) \geq f(n)$ para todo valor de n a partir de cierto valor n_f. Al ser igual, se satisface la condición de "mayor o igual qué"; es decir, que existe un $c_f f(n) \geq f(n)$, el cual es igual a 1. n_f puede ser cualquier valor de n, ya que siempre se cumplirá que $n_f \geq n$.

Propiedad 2.2 $f(n)$ *es* $\Omega(f(n))$

Esta propiedad se cumple porque para pertenecer a Ω, hay un c_f tal que $c_f f(n)) \leq f(n)$ para todo valor de n a partir de cierto valor n_f. Al ser igual, se satisface la condición de "menor o igual qué"; es decir, que existe un $c_f f(n) \leq f(n)$, el cual es igual a 1. n_f puede ser cualquier valor de n, ya que siempre se cumplirá que $n_f \geq n$.

Propiedad 2.3 $f(n)$ *es* $\Theta(f(n))$

Esta propiedad se cumple porque para pertenecer a Θ, hay dos constantes c_{1f} y c_{2f} tal que $c_{1f}f(n)) \geq f(n)$ y $c_{2f}f(n)) \leq f(n)$ para todo valor de n a partir de cierto valor n_f.

Al ser igual, se satisface la condición de "mayor o igual qué"para el caso de c_{1f}, es decir, que existe un $c_{1f}f(n) \geq f(n)$, el cual es igual a 1. También se satisface la condición de "menor o igual qué"para el caso de c_{1f}, es decir, que existe un $c_f f(n) \leq f(n)$, el cual es igual a 1. n_f puede ser cualquier valor de n, ya que siempre se cumplirá que $n_f \geq n$.

3. Simetría

Propiedad 3.1 $f(n)$ *es* $\Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n)$ *es* $\Theta(f(n))$

Para que $f(n)$ esté en $\Theta(g(n))$ se cumpla, tienen que existir 2 constantes c_{1f} y c_{2f} tales que $c_{1f}g(n) \geq f(n)$ y $c_{2f}g(n) \leq f(n)$ a partir de cierto valor de n llamado n_f.

Después, para que $g(n)$ esté en $\Theta(f(n))$, tienen que existir 2 constantes c_{1g} y c_{2g} tales que $c_{1g}f(n) \geq g(n)$ y $c_{2g}f(n) \leq g(n)$ a partir de cierto valor de n llamado n_g.

La elección de constantes que haría que se cumpla esta propiedad sería $c_{1f} = c_{2g}$ y $c_{2f} = c_{1g}$ y que $n_f = n_g$; es decir, la constante que dicta el límite superior para $\Theta(g(n))$ debe ser igual a la que define límite inferior para $\Theta(f(n))$, ya que las constantes desplazan a la función verticalmente, pero nunca la mueven de forma horizontal.

4. Simetría Transpuesta

Propiedad 4.1 *$f(n)$ es $O(g(n)) \Leftrightarrow g(n)$ es $\Omega(f(n))$*

$f(n)$ es $O(g(n))$ si hay una constante c_f tal que $c_f g(n) \geq f(n)$ para toda $n \geq n_f$.

Para que $g(n)$ sea $\Omega(f(n))$ tiene que haber una constante c_g tal que $c_g f(n) \leq g(n)$ para toda $n \geq n_g$.

En este caso, las constantes que harían que se cumpla esta propiedad es que c_f sea igual a c_g, ya que al pertenecer $f(n)$ a $O(g(n))$, siempre está debajo de $g(n)$, lo que desde la perspectiva de $f(n)$ indica que $g(n)$ siempre está encima de $f(n)$, confirmando la propiedad.

5. Aditividad

Propiedad 5.1 *$f(n)$ es $O(f(n))$ y $g(n)$ es $O(h(n))$ entonces $f(n) + g(n)$ es $O(h(n))$*

En este caso $f(n)$ siempre está por debajo o es igual a $g(n)$ al pertenecer a O. Si $g(n)$ está debajo de $h(n)$ también, se puede recurrir a la propiedad de transitividad para indicar que $f(n)$ también está en $O(h(n))$. Al sumar $f(n)$ con $g(n)$, $f(n)$ individualmente a lo mucho puede adquirir el valor de $g(n)$, trasladando hacia arriba $g(n)$, pero sin pasar $h(n)$, ya que de lo contrario $g(n)$ ya no pertenecería a $O(h(n))$, entrando en una contradicción.

Propiedad 5.2 *$f(n)$ es $\Omega(g(n))$ y $g(n)$ es $\Omega(h(n))$ entonces $f(n) + g(n)$ es $\Omega(h(n))$*

En este caso $f(n)$ siempre está encima o es igual a $g(n)$ al pertenecer a Ω. Si $g(n)$ está encima de $h(n)$ también, se puede recurrir a la propiedad de transitividad para indicar que $f(n)$ también está en $\Omega(h(n))$. Al sumar $f(n)$ con $g(n)$, $f(n)$ individualmente a lo mucho puede adquirir el valor de $g(n)$, trasladando hacia abajo $g(n)$, pero sin pasar $h(n)$, ya que de lo contrario $g(n)$ ya no pertenecería a $\Omega(h(n))$, entrando en una contradicción.

Propiedad 5.3 *$f(n)$ es $\Theta(g(n))$ y $g(n)$ es $\Theta(h(n))$ entonces $f(n) + g(n)$ es $\Theta(h(n))$*

$f(n)$ siempre está entre el producto de $g(n)$, una que hace que esté debajo de $g(n)$ y otra que hace que esté encima de $g(n)$, esto por pertenecer a Θ. Si $g(n)$ está entre $h(n)$ también, se puede recurrir a la propiedad de transitividad para indicar que $f(n)$ también está en $\Theta(h(n))$. Al sumar $f(n)$ con $g(n)$, $f(n)$ individualmente a lo mucho puede adquirir el valor de $g(n)$, trasladando verticalmente $g(n)$, pero sin pasar $h(n)$, ya que de lo contrario $g(n)$ ya no pertenecería a $\Theta(h(n))$, entrando en una contradicción.