

Diseño y Análisis de Algoritmos

Tarea 2 - Demostraciones BFS y DFS

Santiago Sinisterra Sierra

22 de noviembre de 2020

Teorema 1 Sea T el árbol BFS del grafo $G = (V, E)$ y sea (x, y) una arista en T , entonces el nivel de x y y difiere en 1. Demostrar.

De acuerdo al algoritmo BFS, un nodo sólo puede agregarse a una capa L_i si no pertenece a alguna capa previa L_k donde $k \in [0, i - 1]$.

T es un árbol, por lo cual no puede contener ciclos y debe existir un camino único para llegar a cada nodo.

Intentando demostrar por contradicción, se supone que hay dos nodos x y y que están conectados por la arista (x, y) pero que pertenecen a capas diferentes L_x y L_y donde x y y son índices y $y - x \neq 1$ (el nivel no difiere en 1). Al pertenecer a capas diferentes y T siendo un árbol, hay un único camino para cada nodo que lleva de L_0 a L_x y otro desde L_0 hasta L_y , así como la arista (x, y) que los conecta directamente.

Esto implica que existirían dos caminos diferentes para llegar a (x, y) , uno que va del nodo raíz y llega a x sin pasar por (x, y) . El segundo camino inicia en el nodo raíz, pasa por y y llega a x por (x, y) .

Se entra a una contradicción ya que T no sería un árbol porque existen 2 caminos diferentes para llegar a un mismo nodo x . Esto viola la proposición inicial de que T es un árbol y que el nivel no difiere en 1.

El nivel necesariamente debe diferir en 1 porque es la diferencia entre los dos caminos hipotéticos del caso de contradicción que hace que T siga siendo un árbol.

Teorema 2 Sea T un árbol DFS, sean u y v nodos en T y sea (u, v) una arista en el grafo G que no está en T . Entonces u es ancestro de v o v es ancestro de u . Demostrar

Si la arista (u, v) no está en T entonces deben estar u y v conectados de otra forma, ya que al T ser un árbol DFS, existe un camino entre cualquier par de nodos al ser un grafo conectado.

Al ser un grafo conectado, se cumple la proposición de que u es un ancestro de v o v es un ancestro de u ya que siempre es posible llegar a v desde u y viceversa.