計算天文物理筆記——第三講

Sod 震波管（Sod shock tube）  
「Sod 震波管問題」以Gary A. Sod的姓氏命名，常用於測試計算流體力學程式碼（例如**黎曼解算子**）的準確性，此問題由Sod在1978年做出徹底的研究。

此測試是個搭配以下理想氣體參數的一維**黎曼問題**：

其中下標L、R分別代表左、右的狀態，*ρ*是密度、*P*是壓力、*u*是速度。

此問題的時間演化可以用**歐拉（守恆）方程組**的解來表示，此方程組會導致三個特徵線(characteristic)，這些解描述了系統中不同區域的行進速度——也就是稀釋波(rarefaction wave)、接觸不連續面(contact discontinuity)、震波不連續面(shock discontinuity)。如果這個問題可用數值解，我們就可以測試它跟解析解之間的差異，然後得知程式碼是否有良好呈現震波、接觸不連續面，還有稀釋波剖面等等性質。

**解析解的推導**

由於資訊傳遞的速率有限，系統會隨時間演化出三個特徵線，分隔出許多（五個）不同狀態的解。其中兩個特徵線的速度就等於左邊狀態和右邊狀態的聲速

其中γ 是絕熱常數。上式中，前者是稀釋起始處的速度，後者是震波傳遞的速度。

定義：

對於震波後面的狀態而言，有一個「Rankine Hugoniot震波不連續條件」作為關係式

但要計算區域4的密度，我們需要知道那裡的壓力。在接觸不連續面的壓力相等：

可惜區域3的壓力只能用迭代的方式算出來，當時，才會得到正確的解：

# Eleuterio F. Toro (1999). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics -- A Practical Introduction* (2nd Edition) Springer

# 歐拉守恆方程組

時變歐拉方程組是一種非線性雙曲守恆定律的系統，支配可壓縮物質的動力學，例如高壓下的氣體和液體，但是徹體力(body force)、黏性應變(viscous stresses)和熱流等作用仍忽略。

對於考慮上述條件的流體，我們還是有某些自由度來選取一組變數描述它。其中一種可能的選擇叫做初始變數（primitive variables）或物理變數（physical variables），也就是密度或質量密度，壓力， 速度的分量， 速度的分量， 速度的分量。速度向量是。另一種選擇是所謂的守恆變數（conserved variables）。它們是質量密度、動量的方向分量、動量的方向分量、動量的方向分量，以及每單位質量（體積？）的總能量。物理上，這些守恆量都是牛頓第二定律和能量守恆定律很自然的結果。計算上，使用守恆變數來表達著支配方程式會有一些優點。這造就出一大類叫做守恆法（conserved methods）的數值方法。

1.1.1 守恆定律形式

\*在這裡下標表示偏微分

五個守恆定律是[[1]](#footnote-1)

此處的是單位體積的總能量

其中  
是比動能（specific kinetic energy），是比內能（specific internal energy）。(1)-(5)式常常叫做歐拉方程組，雖然嚴格來說歐拉方程組只有(2)-(4)。

(1.1)-(1.5)式這些守恆定律可以用更簡潔的記號表示。定義**為**守恆變數的行向量，且、、分別為、、方向的通量向量（flux vectors）。則方程組變成

其中

請注意通量向量要視為守恆變數向量的函數。任何形如(7)式的偏微分方程組都稱為守恆定律系統（system of conservation laws）。因為(7)式包含偏導數，所以我們稱之為微分形式守恆定律的系統（system of conservation laws in differential form）。我們假設解是光滑的，也就是說，假設偏導數都存在。當光滑性假設的限制被解除、不連續的解也納入考慮時，守恆定律有其他種表示方式。

1.1.2 其他簡潔形式

(1)-(5)式也有更簡潔的表達方式，這包含了張量。[[2]](#footnote-2)

其中

2.3 線性雙曲系統

上一節我們仔細研究了最簡單的雙曲型偏微分方程式及其行為與通解，像是傳播速率固定的線性平流(advection)方程。這裡我們把分析拓展到一組個的雙曲偏微分方程組(PDEs)，其形式如

其中係數矩陣是常數。基於雙曲性(hyperbolicity)假設，有個實數固有值和個線性獨立的固有向量，。

2.3.1 對角化和特徵變數

我們說一個矩陣可對角化(diagonisable)，如果可以用一個對角矩陣和一個矩陣表示成

或 。

的對角線元素就是的固有值，的各行就是的右固有向量，對應到，也就是

如果係數矩陣可對角化，我們就說方程組也可對角化。

反矩陣的存在使得我們能透過變換

或

定義新的一組定獨立變數叫做特徵變數(characteristic variables)，這樣子的話，用表示線性方程組，就得到

因為是常數，所以也是常數，所以

將此式左乘以，得

。

方程組完全解耦(completely decoupled)了，這稱為方程組的正則形式(canonical form)，把它完整寫出來，就是，

此方程組的第個方程式很明顯就是

1. 比較(9)-(11)式。 [↑](#footnote-ref-1)
2. [↑](#footnote-ref-2)