

## Відповіді на питання з Практичного Заняття 4

### Питання 1

**Умовна ентропія** - це міра невизначеності одного випадкового величини, умовно відносно значення іншої випадкової величини. Вона вимірює середню кількість інформації, що міститься в одній величині, коли значення іншої величини відоме.

### Питання 2

Різновиди умовної ентропії включають часткову умовну ентропію та загальну умовну ентропію.

**Часткова умовна ентропія** характеризує середню невизначеність одного символу джерела, умовно відносно іншого символу.

**Загальна умовна ентропія** характеризує середню невизначеність всього джерела, умовно відносно іншого джерела.

### Питання 3

Основні властивості умовної ентропії включають невід'ємність, адитивність та симетрію.

Умовна ентропія завжди невід'ємна, адитивна відносно незалежних величин та симетрична, тобто  $H(X|Y) = H(Y|X)$  для незалежних  $X$  та  $Y$ .

### Питання 4

**Часткова умовна ентропія** визначається як середня невизначеність одного символу джерела, умовно відносно іншого символу.

Для двох дискретних немарківських джерел інформації з алфавітами  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_M\}$  та  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ , якщо вони є статистично залежними, поява символу  $a_1$  на виході першого джерела дає розподіл умовних ймовірностей  $p(b_k/a_1)$ , який відрізняється від розподілу  $p(b_k/a_2)$  і т.д. Ентропія другого джерела в залежності від символу на виході першого джерела задається наступним виразом

$$H(B/a_i) = - \sum_{k=1}^N p(b_k/a_i) \cdot \log_2 p(b_k/a_i)$$

### Питання 5

**Загальна умовна ентропія** визначається як середня невизначеність всього джерела, умовно відносно іншого джерела.

Якщо  $H(B/a_i)$  усереднити по всіх  $a_i$ , то отримаємо загальну умовну ентропію

$$\begin{aligned} H(B/A) &= \sum_{i=1}^M p(a_i) H(B/a_i) = - \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N p(a_i) p(b_k/a_i) \log_2 p(b_k/a_i) = \\ &= - \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N p(a_i, b_k) \log_2 p(b_k/a_i) \end{aligned}$$

де  $p(a_i, b_k) = p(a_i)p(b_k/a_i)$  – ймовірність сумісної появи символів  $b_k$  та  $a_i$  на виходах другого та першого джерела.

### Питання 6

**Ентропія об'єднання двох джерел** визначається як  $H(A, B) = H(A) + H(B|A) = H(B) + H(A|B)$ , де  $H(A)$  та  $H(B)$  - ентропії джерел A та B відповідно,  $H(B|A)$  - умовна ентропія B при умові A, та  $H(A|B)$  - умовна ентропія A при умові B.

### Завдання 7

Ентропія монітора персонального комп'ютера при виведенні тексту в 28 рядків по 60 рівноймовірних символів у кожному, використовуючи стандартний міжнародний код (128 символів) з двома градаціями яскравості, може бути знайдена за формулою:

$$H = \log_2(128 \cdot 2)^{28 \cdot 60} = 28 \cdot 60 \log_2 2^8 = 1680 \cdot 8 = 13440 \text{ біт}$$

### Завдання 8

Ансамбль повідомлень джерела А визначено, як  $A = \{0; 1\}$  та  $P_A = \{0,75; 0,25\}$ . Статистична залежність повідомлень  $a_i \in A$  характеризується умовними ймовірностями  $p(0/1) = 0,12$  і  $p(1/0) = 0,08$ . Визначити часткову та загальну умовну ентропію цього джерела.

Матриця умовних ймовірностей

$$\begin{pmatrix} p(0/0) & p(0/1) \\ p(1/0) & p(1/1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75 - 0,12 & 0,12 \\ 0,08 & 0,25 - 0,08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,63 & 0,12 \\ 0,08 & 0,17 \end{pmatrix}$$

	(0/0)	(0/1)	(1/0)	(1/1)	$\Sigma$
$p(b_k/a_i)$	0,63	0,12	0,08	0,17	1
$\log_2(b_k/a_i)$	-0,6666	-3,0589	-3,6439	-2,5564	
$p \cdot \log$	-0,4199	-0,3671	-0,2915	-0,4346	

$$H(B/a_i) = - \sum_{k=1}^N p(b_k/a_i) \cdot \log_2 p(b_k/a_i)$$

$$\begin{aligned} H(B/0) &= - (p(0/0) \cdot \log_2 p(0/0) + p(1/0) \cdot \log_2 p(1/0)) = \\ &= 0,4199 + 0,2915 \approx 0,712 \text{ бим} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(B/1) &= - (p(0/1) \cdot \log_2 p(0/1) + p(1/1) \cdot \log_2 p(1/1)) = \\ &= 0,3671 + 0,4346 \approx 0,802 \text{ бим} \end{aligned}$$

Загальна умовна ентропія

$$H(B/A) = \sum_{i=1}^M p(a_i) H(B/a_i)$$

$$\begin{aligned} H(B/A) &= 0,75 \cdot H(B/0) + 0,25 \cdot H(B/1) \approx \\ &\approx 0,75 \cdot 0,712 + 0,25 \cdot 0,802 \approx 1,085 \end{aligned}$$