

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА 4

ЛІНІЙНІ ЦИКЛІЧНІ КОДИ

Мета роботи: дослідити побудову та можливості корегування лінійних систематичних циклічних кодів.

Вхідні дані

Солтисюк Дмитро Андрійович

1 листопада 1997 року

10 номер в групі

$j_1 = 25$ - сума кількості букв, $k = 25 \bmod 10 = 5$ - кількість інформаційних символів

$j_2 = 10$

Завдання 1

Необхідно побудувати утворюючу матрицю циклічного коду, що виявляє всі одиничні помилки ($s=1$) при передачі 5-розрядного інформаційного слова.

Кількість перевірних розрядів

$$k = 5, \quad d = 2s + 1 = 3$$
$$m = \left\lceil \log_2 \left\{ (k + 1) + \left\lceil \log_2(k + 1) \right\rceil \right\} \right\rceil = \left\lceil \log_2 \left\{ 6 + \left\lceil \log_2 6 \right\rceil \right\} \right\rceil = 4$$
$$n = k + m = 5 + 4 = 9$$

Отримуємо код (9;5)

Це – усічений код, в якому число синдромів перевищує необхідне.

При 4 перевірних розрядах число синдромів $2^4 = 16$, тоді як необхідно 10.

Всі можливі 4-розрядні комбінації з $d - 1 = 2$ і більше одиниць

0011; 0101; 0110; 0111; 1001; 1010; 1011; 1100; 1101; 1110; 1111

Утворююча підматриця 5×4

$$R(9; 5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Утворююча матриця

$$G(9;5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Із матриці $G(9;5)$ можна скласти всі дозволені кодові комбінації.

Для коду $(9;5)$ їх буде $2^5 = 32$. П'ять із них є рядками утворюючої матриці, а інші 27 знаходяться сумуванням за модулем 2 цих рядків.

Наприклад, для інформаційного коду $A = 11011$ отримуємо наступний код для передачі

$$U = AG = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Отже, перевірний код $(1 \ 0 \ 0 \ 0)$.

Завдання 2

Необхідно закодувати інформаційне слово циклічним кодом, що виправляє однократні помилки. Показати процес виправлення помилки.

Для інформаційного коду $A = 11011$ будуємо інформаційний поліном

$$G(x) = x^4 + x^3 + x + 1$$

Здійснюємо зсув вліво на $m = n - k = 4$ розряди

$$G(x) \cdot x^m = (x^4 + x^3 + x + 1)x^4 = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 = 11011 \ 0000$$

Утворюючий поліном: степінь $\geq m = 4$, ненульові члени $\geq d = 3$

$$P(x) = x^4 + x^3 + 1 = 11001$$

Залишок від ділення

$$R(x) = \frac{G(x) \cdot x^m}{P(x)} = x^3 + x + 1 = 1011$$

$$\begin{array}{r}
 11011\ 0000 \mid \underline{11001} \\
 \underline{11001} \mid \underline{1001} \\
 10000 \\
 \underline{11001} \\
 10010 \\
 \underline{11001} \\
 1011
 \end{array}$$

Кодовий поліном

$$F(x) = G(x) \cdot x^m + R(x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 11011\ 1011$$

Нехай повідомлення отримано з помилкою у 4-му розряді

$$F'(x) = F(x) + E(x) = 11001\ 1011$$

Ділимо $F'(x)$ на утворюючий поліном $P(x)$

$$\begin{array}{r}
 11001\ 1011 \mid \underline{11001} \\
 \underline{11001} \mid \underline{1000} \\
 1011
 \end{array}$$

Залишок 1011 має $W = 3$ одиниць, $W > S = 1$ - кількість помилок

Здійснюємо циклічний зсув та повторюємо ділення, поки не виконана умова $W \leq S$

| | |
|---|-------------|
| $ \begin{array}{r} 100110111 \mid \underline{11001} \\ \underline{11001} \mid \underline{1110} \\ 10100 \\ \underline{11001} \\ 11011 \\ \underline{11001} \\ 1011 \end{array} $ | $W = 3 > S$ |
| $ \begin{array}{r} 001101111 \mid \underline{11001} \\ \underline{11001} \mid \underline{10} \\ 1011 \end{array} $ | $W = 3 > S$ |
| $ \begin{array}{r} 011011110 \mid \underline{11001} \\ \underline{11001} \mid \underline{101} \\ 10110 \\ \underline{11001} \\ 1111 \end{array} $ | $W = 4 > S$ |

| | |
|---|-------------|
| $ \begin{array}{r} 110111101 \mid \underline{11001} \\ \underline{11001} \mid 10011 \\ 10100 \\ \underline{11001} \\ 11011 \\ \underline{11001} \\ 10 \end{array} $ | $W = 1 = S$ |
|---|-------------|

В 4-му розряді помилка, додаємо 10 та здійснюємо зсув
Отримуємо $F(x) = 11011\ 1011$ - правильне повідомлення.

Висновки

Було досліджено засоби побудови циклічних кодів, що виправляють помилки, які виникають при передачі. Розглянуто процеси кодування і декодування, показано, як виправляється помилка.