

Відповіді на питання з Практичного Заняття 5

Питання 1

Основні властивості ентропії об'єднання двох джерел включають:

- 1) Адитивність: $H(A, B) = H(A) + H(B|A) = H(B) + H(A|B)$.
- 2) Невід'ємність: Ентропія об'єднання завжди невід'ємна.
- 3) Симетрія: $H(A, B) = H(B, A)$.
- 4) Максимальна для незалежних джерел: Якщо джерела A та B незалежні, то $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Питання 2

Кількість інформації на одне повідомлення двох статистично взаємозв'язаних джерел визначається як середня кількість інформації, що міститься в повідомленнях обох джерел. Математично це виражено як $H(A, B)$, де $H(A, B)$ - ентропія об'єднання джерел A та B.

$$H(A, B) = - \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N p(a_i, b_k) \log_2 p(a_i, b_k)$$

Питання 3

Ентропія двох джерел стає максимальною, коли повідомлення з цих джерел є статистично незалежними. У цьому випадку максимальна ентропія об'єднання рівна сумі ентропій кожного джерела, тобто $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Питання 4

Продуктивність дискретного джерела визначається як середня кількість інформації, яку джерело виробляє за одиницю часу. Математично це виражено як $R = H(A)/T$, де $H(A)$ - ентропія джерела, а T - середній інтервал часу між послідовними повідомленнями.

Питання 5

Для визначення продуктивності дискретного джерела з різною тривалістю вибору повідомлень, необхідно врахувати середню тривалість вибору кожного повідомлення. Продуктивність можна визначити як $R = H(A)/T_{avg}$, де $H(A)$ - ентропія джерела, а T_{avg} - середня тривалість вибору повідомлення.

Питання 6

При передачі банківської інформації реченнями по 16 рядків на кожні 100 речень цифра 5 зустрічається 90 разів, а цифра 9 - 70 разів. Числа 59 і 95 зустрічаються 12 разів. Визначити умовну ентропію появи в реченні цифри 9, якщо в ньому є цифра 5, та умовну ентропію цифри 5, якщо в ньому з'явилась цифра 9.

$$\text{Ймовірність сумісної появи 5 і 9: } p(5,9) = \frac{12}{100 \cdot 16} = \frac{3}{400}$$

$$\text{Ймовірність появи в реченні цифри 5: } p(5) = \frac{90}{100 \cdot 16} = \frac{9}{160}$$

$$\text{Ймовірність появи в реченні цифри 9: } p(9) = \frac{70}{100 \cdot 16} = \frac{7}{160}$$

Умовна ймовірність появи 9, якщо є 5

$$P(9/5) = \frac{p(5,9)}{p(5)} = \frac{3}{400} : \frac{9}{160} = \frac{3}{400} \cdot \frac{160}{9} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

Умовна ймовірність появи 5, якщо є 9

$$P(5/9) = \frac{p(5,9)}{p(9)} = \frac{3}{400} : \frac{7}{160} = \frac{3}{400} \cdot \frac{160}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{35}$$

Умовна ентропія появи 9, якщо є 5

$$H(9/5) = -p(9/5) \cdot \log_2 p(9/5) = -\frac{2}{15} \cdot \log_2 \frac{2}{15} \approx 0,388 \text{ bit}$$

Умовна ентропія появи 5, якщо є 9

$$H(5/9) = -p(5/9) \cdot \log_2 p(5/9) = -\frac{6}{35} \cdot \log_2 \frac{6}{35} \approx 0,436 \text{ bit}$$