Відповіді на завдання та питання з Практичних Занять 8

Питання 1

Продуктивність дискретного джерела визначається як середня кількість інформації, яка виробляється джерелом за одиницю часу. Математично це може бути виражено як $V = H(X) \cdot R$, де $H(X)$ - ентропія джерела, а R - швидкість видачі символів джерелом.

Питання 2

Теорема Шеннона про кодування дискретного джерела формулюється наступним чином: для будь-якого дискретного джерела з ентропією H, існує код з середньою довжиною слова, яка відрізняється від H менше ніж на довільно задану величину $\epsilon > 0$, за умови, що довжина блоку достатньо велика.

Питання 3

Зміст теореми Шеннона про кодування дискретного джерела полягає в тому, що існує можливість стиснення даних дискретного джерела до його ентропії з довільно високою точністю. Тобто, ентропія джерела визначає нижню межу середньої довжини кодового слова, і існують коди, які можуть досягти цього ліміту з довільно великою точністю.

Завдання 4

Повідомлення передаються взаємонезалежними рівноймовірними символами тривалістю $5 \bullet 10^{-4}$ сек. Визначити швидкість передачі кожного символу та всієї інформації, якщо обсяг алфавіту дорівнює 16, 32, 64.

Швидкість передачі – це відношення ентропії одного символу до часу його передачі

$$V = \frac{H_i(X)}{\tau}$$

Ентропія одного символу для алфавіту із N символів $H_i(X) = \log_2 N$

При $N = 16$

$$V_{16} = \frac{\log_2 16}{5 \bullet 10^{-4}} = \frac{4}{5} \bullet 10^4 = 8000\ біт/с$$

При $N = 32$

$$V_{16} = \frac{\log_2 32}{5 \bullet 10^{-4}} = \frac{5}{5} \bullet 10^4 = 10\,000\ біт/с$$

При $N = 64$

$$V_{16} = \frac{\log_2 64}{5 \bullet 10^{-4}} = \frac{6}{5} \bullet 10^4 = 12\,000\ біт/с$$

Завдання 5

Час передачі повідомлення 0 дорівнює 0,1 с., а повідомлення 1 – 0,6 с. Знайти розподіл ймовірностей p_0 та p_1 , за яких досягається максимальна швидкість передачі інформації.

Швидкість передачі інформації для двох повідомлень

$$V = V_1 + V_2 = p_0\frac{\log p_0}{t_0} + p_1\frac{\log p_1}{t_1} = \frac{p_0 \log p_0}{0{,}1} + \frac{(1-p_0)\log(1-p_0)}{0{,}6} =$$

$$= \frac{6p_0\log p_0 + (1-p_0)\log(1-p_0)}{0{,}6} \to max$$

$$(x\log x)' = \log x + \frac{x}{x\ln 2} = \log x + \frac{1}{\ln 2}$$

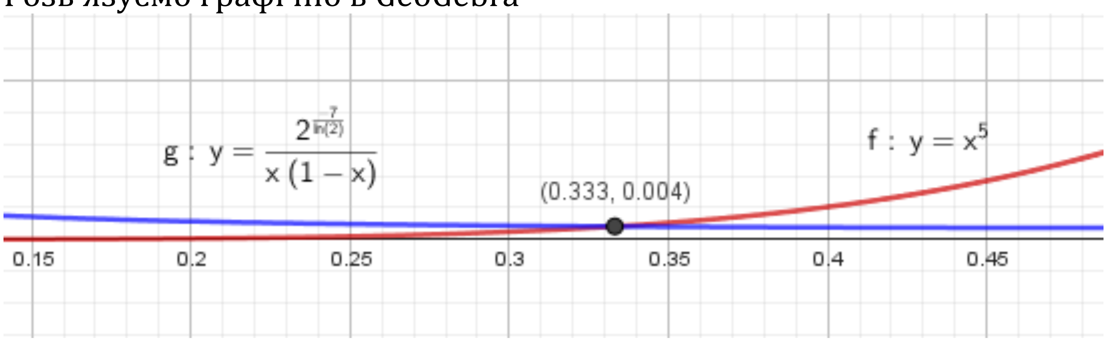
$$V' = \frac{1}{0{,}6}\left(6\log p_0 + \frac{6}{\ln 2} + \log(1-p_0) + \frac{1}{\ln 2}\right) = 0$$

$$\log p_0^6(1-p_0) = -\frac{7}{\ln 2}$$

$$p_0^6(1-p_0) = 2^{-\frac{7}{\ln 2}}$$

$$y_1 = p_0^5, \;\; y_2 = \frac{2^{-\frac{7}{\ln 2}}}{p_0(1-p_0)}$$

Розв’язуємо графічно в GeoGebra



$$p_0 \approx 0{,}333$$

signal	0	1	
p	0,333	0,667	
log	-1,5864	-0,5842	
-p*log	0,5283	0,3897	0,9180
/t	5,2827	0,6495	5,9322

Розподіл

$$p_0 \approx 0{,}333, \;\; p_1 \approx 0{,}667$$

Максимальна швидкість

$$V = \frac{p_0 \log p_0}{0,1} + \frac{(1 - p_0)\log(1 - p_0)}{0,6} \approx 5,93\ біт/с$$

Завдання 6:

Визначити пропускну здатність каналу, матриця ймовірностей якого при $\tau = 10^{-2}$ с. має вигляд

$$p(a_i, b_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,15 \\ 0 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

	0	0,2	0,15	
p(a,b) =	0	0,2	0	
	0,3	0	0,15	
	0	-2,32193	-2,73697	
log	0	-2,32193	0	
	-1,73697	0	-2,73697	
	0	-0,46439	-0,41054	
p*log	0	-0,46439	0	
	-0,52109	0	-0,41054	
				-2,2710

$$H(A, B) = 2,2710\ біт$$

p(a)	log	p*log
0,35	-1,5146	-0,5301
0,2	-2,3219	-0,4644
0,45	-1,1520	-0,5184
		-1,5129

$$H(A) = 1,5129\ біт$$

p(b)	0,3	0,4	0,3	
log	-1,7370	-1,3219	-1,7370	
p*log	-0,5211	-0,5288	-0,5211	-1,5710

$$H(B) = 1{,}5710\ біт$$

$$H(B|A) = H(A,B) - H(A) = 2{,}2710 - 1{,}5129 = 0{,}7581\ біт$$

Пропускна здатність каналу

$$C = H(B) - H(B|A)$$

$C = 1{,}5710 - 0{,}7581 = 0{,}8129\ біт/символ$

Швидкість передачі інформації по каналу

$$V = \frac{C}{\tau}, \quad V = \frac{0{,}8129}{10^{-2}} = 81{,}29\ біт/с$$

Завдання 7:

Чи можлива безпомилкова передача інформації по каналу, параметри якого задані в попередній задачі, якщо продуктивність джерела $V_{дж}$ = 9,6 Кбіт/с?

За теоремою Шеннона для каналу з перешкодами завжди можна знайти таку систему кодування, при якій повідомлення будуть передані з будь-яким великим ступенем вірності, якщо тільки продуктивність джерела не перевищує пропускну здатність каналу.

В даному випадку продуктивність джерела 9600 біт/с більша за швидкість передачі інформації по каналу 81 біт/с.

Отже, безпомилкова передача інформації неможлива.