

Відповіді та Розв'язання на практичні заняття номер 6

Питання 1:

Швидкість передачі інформації по дискретному каналу визначається як кількість біт інформації, яка передається через канал за одиницю часу. Це можна визначити за формулою:

$$R = B \log_2(1 + S/N)$$

де R - швидкість передачі інформації, B - пропускна здатність каналу, S/N - відношення сигнал/шум.

Питання 2:

Інформаційні втрати при передачі інформації по каналу зв'язку дорівнюють різниці між вхідною ентропією джерела інформації та вихідною ентропією, яка досягається при передачі через канал. Це можна визначити як:

$$\text{Інформаційні втрати} = H(X) - H(X|Y)$$

де $H(X)$ - вхідна ентропія, $H(X|Y)$ - умовна ентропія на виході каналу.

Питання 3:

Пропускна здатність каналу передачі - це максимальна швидкість передачі даних, яку канал може підтримувати. Для дискретних каналів це можна визначити за формулою Шеннона:

$$C = B \log_2(1 + S/N)$$

де C - пропускна здатність, B - пропускна здатність каналу, S/N - відношення сигнал/шум.

Питання 4:

Пропускна здатність каналу при відсутності завад визначається просто як пропускна здатність каналу, оскільки відсутність завад означає, що відношення сигнал/шум є нескінченно великим. Тобто:

$$C = B \log_2(1 + \infty) = B \log_2(\infty) = \infty$$

Отже, теоретично, при відсутності завад, пропускна здатність каналу є нескінченною.

Завдання 5:

Дослідження каналу зв'язку між джерелом А та спостерігачем В виявило такі умовні ймовірності вибору повідомлень $b_j \in B$

$$p(b_j/a_i) = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,02 & 0,01 \\ 0,1 & 0,86 & 0,04 \\ 0,03 & 0,08 & 0,89 \end{pmatrix}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію повідомлень в цьому каналі при рівноймовірному виборі їх джерелом А та при $P_A = \{0,65; 0,3; 0,05\}$.

Часткова ентропія

$$H(B/a_i) = - \sum_{k=1}^N p(b_k/a_i) \cdot \log_2 p(b_k/a_i)$$

Загальна умовна ентропія

$$H(B/A) = \sum_{i=1}^M p(a_i) H(B/a_i)$$

	0,97	0,02	0,01	
p =	0,1	0,86	0,04	
	0,03	0,08	0,89	
	-0,0439	-5,6439	-6,6439	
log p =	-3,3219	-0,2176	-4,6439	
	-5,0589	-3,6439	-0,1681	
				Σ
	-0,0426	-0,1129	-0,0664	-0,2219
p*log =	-0,3322	-0,1871	-0,1858	-0,7051
	-0,1518	-0,2915	-0,1496	-0,5929

Отже, часткові ентропії

$$H(B/a_1) = 0,2219, \quad H(B/a_2) = 0,7051, \quad H(B/a_3) = 0,5929$$

Загальна умовна ентропія при рівномірному виборі джерелом А

$$H(B/A) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^M H(B/a_i) \approx 0,507 \text{ біт}$$

Загальна умовна ентропія при P_A

$$H(B/A) = 0,65 \cdot H(B/a_1) + 0,3 \cdot H(B/a_2) + 0,05 \cdot H(B/a_3) \approx 0,385 \text{ біт}$$

Завдання 8:

Два статистично незалежних джерела визначаються матрицею сумісних ймовірностей

$$p(a_i, b_j) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0,1 \\ 0,15 & 0,3 & 0,1 \\ 0 & 0,05 & 0,05 \end{pmatrix}$$

Визначити часткову та загальну умовну ентропію, ентропію об'єднання, безумовну ентропію цих джерел, а також кількість інформації, що припадає на пару повідомлень a_i, b_j .

Безумовні ймовірності

$$p(a_i) = \begin{pmatrix} 0,25 + 0 + 0,1 \\ 0,15 + 0,3 + 0,1 \\ 0 + 0,05 + 0,05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,55 \\ 0,1 \end{pmatrix}$$

$$p(b_j) = (0,25 + 0,15 + 0; \quad 0 + 0,3 + 0,05; \quad 0,1 + 0,1 + 0,05) = (0,4; \quad 0,35; \quad 0,25)$$

Безумовні ентропії

$$H(A) = - \sum_i p(a_i) \log_2(p(a_i))$$

p(a)	log	p*log
0,35	-1,5146	-0,5301
0,55	-0,8625	-0,4744
0,1	-3,3219	-0,3322
		-1,3367

$$H(A) = 1,337 \text{ біт}$$

$$H(B) = - \sum_j p(b_j) \log_2(p(b_j))$$

p(b)	0,4	0,35	0,25	
log	-1,3219	-1,5146	-2,0000	
p*log	-0,5288	-0,5301	-0,5000	-1,5589

$$H(B) = 1,559 \text{ bit}$$

Сумісна ентропія (ентропія об'єднання)

$$H(A, B) = - \sum_i \sum_j p(a_i, b_j) \log_2(p(a_i, b_j))$$

p =	0,25	0	0,1
	0,15	0,3	0,1
	0	0,05	0,05

log =	-2,0000	0,0000	-3,3219
	-2,7370	-1,7370	-3,3219
	0,0000	-4,3219	-4,3219

p*log=	-0,5000	0,0000	-0,3322
	-0,4105	-0,5211	-0,3322
	0,0000	-0,2161	-0,2161

-2,5282

$$H(A, B) = 2,528 \text{ біт}$$

$$H(A) + H(B) = 1,3367 + 1,5589 = 2,8955 \approx 2,896 \text{ біт} \neq H(A, B)$$

Отже, джерела не є статистично незалежними.

Часткові умовні ентропії

$$H(A|B) = H(A, B) - H(B) = 2,528 - 1,559 = 0,969 \text{ біт}$$

$$H(B|A) = H(A, B) - H(A) = 2,528 - 1,337 = 1,191 \text{ біт}$$

Кількість інформації розраховується як:

$$I(A;B) = H(A) + H(B) - H(A,B)$$

$$I(A, B) = 2,896 - 2,528 = 0,367 \text{ біт}$$