
Problèmes inverses

Angèle Niclas

M2 MMA, 2025 - 2026

Table des matières

1	Introduction aux problèmes inverses	3
1.1	Position du problème	4
1.2	Approche naïve sans bruit de mesure	4
1.3	Moindres carrés	5
1.4	Moindres carrés régularisés	7
1.5	Limites du cadre matriciel	9
2	Problèmes d'optimisation convexes	10
2.1	Cas continue	10
2.2	Cas semi-continue inférieurement	12
2.3	Descente de gradient sans contrainte	15
2.4	Optimisation convexe différentiable avec contrainte	18
3	Méthodes duales pour la minimisation d'énergies convexes non-différentiables	19
3.1	Sous-gradient	19
3.2	Transformée de Fenchel	22
3.3	Variation totale	26
4	Schéma numérique de recherche de point selle primal-dual	29
4.1	Montée et descente de gradient	30
4.2	Algorithme de Chambolle-Pock	33
4.3	Application au débruitage par variation totale	34
4.4	Application à la résolution de problèmes inverses	35

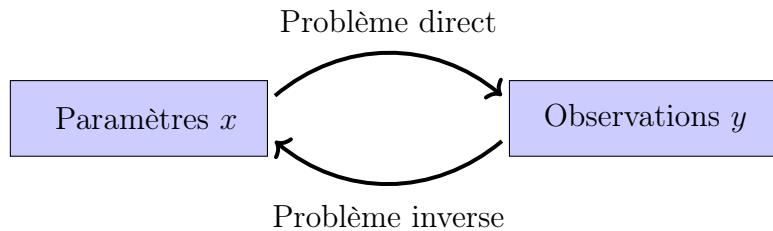
5 Approches bayésiennes	39
5.1 Estimateurs	39
5.2 Algorithme de Metropolis-Hastings	43

Références

- Kac, M. (1966). *Can one hear the shape of a drum ?*. The american mathematical monthly, 73(4P2), 1-23. ↗
- Collaboration, E. H. T., Akiyama, K., Alberdi, A., Alef, W., Asada, K., Azuly, R. (2019). *First M87 event horizon telescope results. I. The shadow of the supermassive black hole.* Astrophys. J. Lett, 875(1), L1. ↗
- Wang, Z. (2012). *Multi-parameter Tikhonov regularization and model function approach to the damped Morozov principle for choosing regularization parameters.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 236(7), 1815-1832. ↗
- Mérigot, Q. (2020). *Algorithmes d'optimisation.* ↗
- Abergel, R. (2016). *Dual methods for the minimization of the total variation.* ↗
- H. H. Bauschke , P. L. Combettes (2017). *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces.* Springer International Publishing. ↗
- A. Chambolle, T. Pock (2011). *A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging.* Journal of Mathematical Imaging and Vision. 40 (1) : 120–145. ↗
- S. Banert, M. Upadhyaya, P. Giselsson (2023). *The Chambolle-Pock method converges weakly with $\theta < 1/2$ and $\tau\sigma \|L\|^2 < 4/(1 + 2\theta)$.* Submitted. ↗
- R. Scheichl, J. Zech, *Numerical Methods for Bayesian Inverse Problems* (2021). ↗

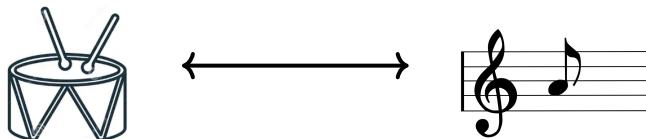
1 Introduction aux problèmes inverses

Les problèmes inverses consistent à déterminer les paramètres d'un modèle à partir d'observations de ses résultats. Par opposition, les problèmes dits "directs" consistent à calculer la solution du modèle en connaissant ses paramètres. Les problèmes inverses sont au cœur de nombreuses applications en sciences et ingénierie, où les observations mesurées sont souvent entachées de bruit ou d'incertitudes, rendant la résolution du problème complexe.

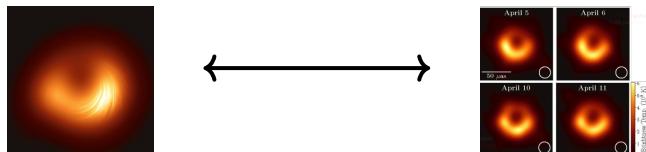


Parmi les exemples célèbres de problèmes inverses, on peut citer :

- **"Can one hear the shape of the drum ?" (1966)** : Ce problème explore la possibilité de déterminer la forme d'un tambour en se basant uniquement sur le son qu'il produit.

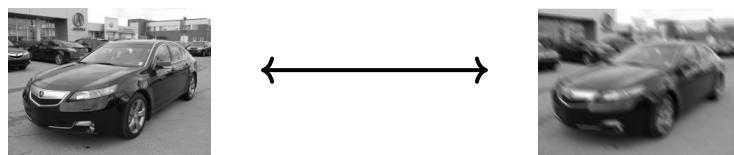


- **Reconstruction d'images astronomiques (trou noir, 2019)** : L'image du trou noir a été obtenue à partir de fragments d'images capturés par plusieurs télescopes.

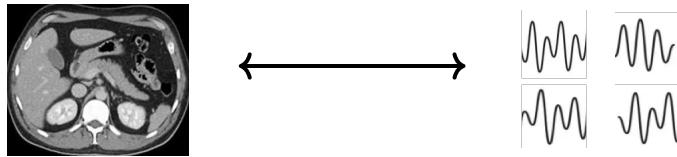


Les problèmes inverses sont omniprésents dans diverses disciplines. Voici quelques applications notables :

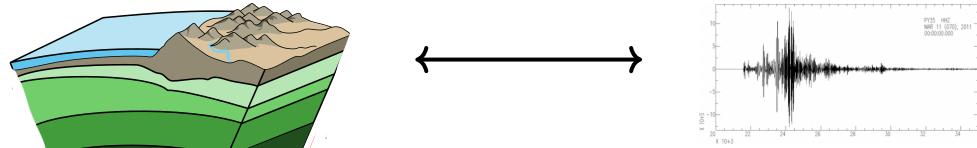
- **Traitemet d'image** : Dans des tâches comme la restauration ou le déflouage d'images, on cherche à retrouver une image claire à partir d'une version endommagée ou bruitée.



- **Tomographie par rayons X** : En médecine, on envoie des rayons X à travers le corps, puis on mesure les ondes qui en ressortent. Le problème inverse consiste à reconstruire une image des tissus internes à partir de ces mesures.



- **Imagerie sismique :** Utilisée en géophysique, cette technique permet de déterminer les propriétés des couches terrestres en analysant les ondes sismiques mesurées à la surface.



1.1 Position du problème

Dans le cadre des problèmes inverses, on suppose que l'on observe un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ vérifiant la relation suivante

$$y = Ax + \varepsilon$$

où

- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des paramètres inconnus que l'on cherche à estimer.
- $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ représente un opérateur linéaire. Dans une base donnée, A peut être représentée par une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$.
- $\varepsilon \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur de perturbations aléatoires, souvent associé au bruit de mesure.

L'objectif est alors de retrouver x à partir de l'observation de y , malgré la présence de ε .

Exemple 1 :

- Pour le traitement d'image, x est un vecteur qui contient les pixels de l'image initiale, et y est un vecteur qui contient les pixels de l'image endommagée.
- Pour la tomographie, x est un vecteur qui contient la vitesse des ondes sur une discrétisation du corps humain, et y est un vecteur qui contient les mesures des ondes qui ressortent du corps.

1.2 Approche naïve sans bruit de mesure

Pour simplifier l'analyse, commençons par supposer l'absence de bruit de mesure, c'est-à-dire que $\varepsilon = 0$. Dans ce cas, le problème se réduit à un problème d'inversion direct où l'on cherche le vecteur x qui satisfait l'équation linéaire $Ax = y$.

Définition 1 : Problème bien posé

Un problème est dit **bien posé** s'il satisfait les trois conditions suivantes (dites critères de Hadamard) :

- **Existence** : Pour toute observation y , il existe une solution x à l'équation $Ax = y$.
- **Unicité** : Cette solution est unique.
- **Stabilité** : La solution x dépend continûment des données, c'est-à-dire que de petites variations dans y induisent de petites variations dans x .

Dans le cas où $\varepsilon = 0$, une solution unique existe si et seulement si la matrice A est inversible, c'est-à-dire que A est une matrice carrée ($n = m$) de rang maximal. De plus, pour que la solution soit stable, il faut que l'opérateur inverse A^{-1} soit continu, c'est-à-dire que A soit bien conditionnée. Cependant, en pratique, plusieurs difficultés peuvent survenir :

- Matrice non carrée : Si $n \neq m$, A n'est pas inversible dans le sens classique, car elle ne possède pas de matrice inverse au sens strict. Cela mène à des problèmes de sous-détermination ou de surdétermination.
- Mauvais conditionnement : Même si A est inversible, il est possible que l'inverse A^{-1} ne soit pas continue, ce qui signifie que des petites perturbations dans y peuvent provoquer de grandes variations dans la solution x . Cela rend la résolution du problème extrêmement sensible aux erreurs numériques ou aux petites imprécisions dans les données.

Ainsi, l'approche naïve sans bruit de mesure est souvent insuffisante pour traiter les problèmes rencontrés dans la réalité, où les matrices A sont souvent non carrées ou mal conditionnées.

Exemple 2 :

Dans l'exemple du trou noir, une dizaine de télescopes avaient une image du trou noir, donc $m = 10n$ et A n'est pas carrée. De même, dans l'approche tomographique, on doit souvent reconstruire la vitesse sur une image d'environ $n = 10^6$ pixels avec seulement une dizaine de mesures ($m = 10$).

1.3 Moindres carrés

Lorsque $\varepsilon \neq 0$ et que la matrice A n'est pas inversible, il devient nécessaire d'adopter une approche alternative pour obtenir un problème bien posé. Plutôt que de chercher une solution exacte x telle que $Ax = y$, on cherche une solution $x \in \mathbb{R}^n$ telle que Ax soit aussi proche que possible de y . La méthode des moindres carrés consiste alors à minimiser l'écart entre Ax et y en résolvant le problème suivant :

$$x \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) \quad \text{où} \quad J(x) = \|Ax - y\|_2^2$$

Dans ce contexte, la "proximité" entre Ax et y est mesurée par la distance en norme ℓ_2 . Cette formulation permet d'obtenir une solution même si A n'est pas inversible ou si le système est surdéterminé (plus d'équations que d'inconnues, $m > n$). Pour analyser si ce problème est bien posé, il est utile de faire appel aux notions de différentiabilité et de gradient, qui jouent un rôle clé dans la résolution du problème d'optimisation.

Définition 2 : Différentiabilité

Une fonction $J : X \rightarrow Y$ est dite différentiable en un point $x \in X$ si et seulement s'il existe une application linéaire continue $DJ_x : X \rightarrow Y$ telle que

$$\forall h \in X \quad J(x + h) = J(x) + DJ_x(h) + o(\|h\|)$$

Lorsque l'espace X est un espace de Hilbert et que $Y = \mathbb{R}$ (c'est-à-dire que J prend des valeurs réelles), le théorème de représentation de Riesz garantit l'existence d'un gradient.

Définition 3 : Gradient

Si X est un espace de Hilbert et si Y est de dimension 1, alors pour tout $x \in X$, DJ_x est une forme linéaire continue et d'après le théorème de représentation de Riez, il existe un unique élément de X , noté $\nabla J(x)$ et appelé gradient de J en x , tel que

$$\forall h \in X \quad DJ_x(h) = \langle \nabla J(x), h \rangle$$

En pratique, pour calculer le gradient d'une fonctionnelle J , on exploite l'unicité mentionnée ci-dessus. On commence par développer $J(x + h)$:

$$J(x + h) = \dots = J(x) + \langle \text{qq chose}, h \rangle + o(\|h\|)$$

puis par unicité, on sait alors que le "quelque chose" est en fait $\nabla J(x)$.

Exercice 1 :

Dans le cas des moindres carrés, $J(x) = \|Ax - y\|_2^2$. Calculer alors $\nabla J(x)$.

Solution : Pour tout $x, h \in \mathbb{R}^n$, on a

$$J(x + h) = \|A(x + h) - y\|_2^2 = \|Ax - y + Ah\|_2^2 = \|Ax - y\|_2^2 + 2\langle Ax - y, Ah \rangle + \|Ah\|_2^2$$

On constate de plus que

$$\frac{\|Ah\|_2^2}{\|h\|_2} \leq \frac{\|A\|^2 \|h\|_2^2}{\|h\|_2} = \|A\|^2 \|h\|_2 \xrightarrow{\|h\|_2 \rightarrow 0} 0$$

Donc $\|Ah\|_2^2 = o(\|h\|)$ et ainsi,

$$J(x + h) = J(x) + 2\langle Ax - y, Ah \rangle + o(\|h\|)^2 = J(x) + \langle 2A^*(Ax - y), h \rangle + o(\|h\|_2)$$

On conclut par unicité du gradient que $\nabla J(x) = 2A^*(Ax - y)$.

On peut maintenant exprimer la solution du problème de moindres carrés. Si l'on note x_{LS} la solution (LS pour "Least Squares"), celle-ci est donnée par :

$$x_{LS} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} J(x) \quad \text{où} \quad \|Ax - y\|_2^2$$

Ainsi, la solution x_{LS} est caractérisée par l'annulation du gradient de $J(x)$:

$$\begin{aligned} x_{LS} \text{ est solution} &\Leftrightarrow \nabla J(x_{LS}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2A^*(Ax_{LS} - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow A^*Ax_{LS} = A^*y \end{aligned}$$

où A^* désigne l'adjoint (ou la transposée conjuguée) de la matrice A . Le problème est bien posé s'il admet une unique solution. Cela est garanti lorsque la matrice A^*A est inversible. Contrairement à A , qui peut ne pas être carrée (si $n \neq m$), A^*A est toujours une matrice carrée de taille $n \times n$. Si A^*A est inversible, la solution du problème de moindres carrés s'écrit alors :

$$x_{LS} = (A^*A)^{-1}A^*y$$

Cependant, pour garantir que le problème est bien posé, il reste à vérifier que la solution x_{LS} dépend continûment des données y . Pour cela, nous faisons appel à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice A .

Proposition 1 : Rappel - SVD

Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe des matrices unitaires $U \in \mathcal{M}_{m,m}(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que $UU^* = U^*U = I_{m,m}$ et $VV^* = V^*V = I_{n,n}$) et une matrice diagonale $\Sigma = \text{diag}(\sigma_i) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ où $\sigma_i \geq 0$ et telles que

$$A = U\Sigma V^*$$

En utilisant cette décomposition, on peut réécrire A et A^* sous les formes $A = U\Sigma V^*$ et $A^* = V\Sigma^*U^*$. La solution des moindres carrés devient alors :

$$\begin{aligned} x_{LS} &= (A^*A)^{-1}A^*y = (A^*A)^{-1}A^*(Ax + \varepsilon) \\ &= (A^*A)^{-1}A^*Ax + (A^*A)^{-1}A^*\varepsilon \\ &= x + (V\Sigma^*U^*U\Sigma V^*)^{-1}V\Sigma^*U^*\varepsilon \\ &= x + (V\Sigma^*\Sigma V^*)^{-1}V\Sigma^*U^*\varepsilon \\ &= x + (V^*)^{-1}(\Sigma^*\Sigma)^{-1}V^{-1}V\Sigma^*U^*\varepsilon \\ &= x + V(\Sigma^*\Sigma)^{-1}\Sigma^*U^*\varepsilon \\ &= x + V\text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)U^*\varepsilon \end{aligned}$$

On constate que si certaines valeurs singulières σ_i sont très petites, la division par ces valeurs σ_i amplifie fortement le bruit ε , ce qui rend la solution x_{LS} instable. En d'autres termes, même de petites perturbations dans les observations y peuvent provoquer de grandes variations dans la solution x_{LS} . Ainsi, lorsque certaines valeurs singulières sont proches de zéro, le problème n'est plus bien conditionné et la solution des moindres carrés peut devenir très sensible au bruit.

1.4 Moindres carrés régularisés

Pour éviter que la solution du problème "explose" en raison des termes $1/\sigma_i$, on modifie légèrement le problème pour aboutir à un problème de moindres carrés régularisés. L'idée est de chercher une solution $x \in \mathbb{R}^n$ qui minimise non seulement la distance entre Ax et y , mais aussi une certaine fonction de régularisation $R(x)$. Le problème devient alors :

$$x \in \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{argmin}} \|Ax - y\|_2^2 + \lambda R(x)$$

où

- $R : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de régularisation qui pénalise les solutions "irrégulières" (par exemple, des solutions oscillantes ou des niveaux de gris qui "explosent").
- $\lambda \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre qui contrôle l'importance de la régularisation par rapport à l'ajustement aux données.

Nous discuterons plus tard du choix de $R(x)$ et de son impact sur la nature du problème. Pour l'instant, prenons l'exemple classique de régularisation de Tikhonov où $R(x) = \|x\|_2^2$. Le problème se reformule alors comme suit :

$$x_\lambda \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} (J_1(x) + J_2(x)) \quad \text{où} \quad J_1(x) = \|Ax - y\|_2^2 \quad \text{et} \quad J_2(x) = \lambda\|x\|_2^2$$

Exercice 2 :

Dans le cas des moindres carrés régularisé par Tikhonov, donner une expression de x_λ .

Solution : On sait que x_λ annule le gradient de $J_1 + J_2$ en tant que minimum, donc

$$\begin{aligned} x_\lambda \text{ est solution} &\Leftrightarrow \nabla J_1(x_\lambda) + \nabla J_2(x_\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2A^*(Ax_\lambda - y) + 2\lambda x_\lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow (A^*A + \lambda I_n)x_\lambda = A^*y \\ &\Leftrightarrow (A^*A + \lambda I_n)x_\lambda = A^*Ax + A^*\varepsilon \end{aligned}$$

On peut alors analyser l'existence de x_λ et sa stabilité en suivant la même méthode que dans le cas non régularisé.

Exercice 3 :

En décomposant A en valeurs singulières, étudier l'existence de x_λ et sa stabilité.

Solution : En décomposant A en valeurs singulières avec $A = U\Sigma V^*$, on a :

$$\begin{aligned} A^*A &= V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V\Sigma^*\Sigma V^* = V\operatorname{diag}(\sigma_i^2) V^* \\ A^*A + \lambda I_n &= V\Sigma^*\Sigma V^* + \lambda V^*V = V\operatorname{diag}(\sigma_i^2 + \lambda) V^* \end{aligned}$$

La matrice $A^*A + \lambda I_n$ est donc inversible si $\lambda > 0$. La solution x_λ s'écrit alors :

$$(A^*A + \lambda I_n)^{-1} = V\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i^2 + \lambda}\right)V^*$$

Ainsi, la solution x_λ s'écrit

$$\begin{aligned} x_\lambda &= (A^*A + \lambda I_n)^{-1}(A^*Ax + A^*\varepsilon) \\ &= V\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i^2 + \lambda}\right)V^* (V\operatorname{diag}(\sigma_i^2)V^*x + V\operatorname{diag}(\sigma_i)U^*\varepsilon) \\ &= V\operatorname{diag}\left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda}\right)V^*x + V\operatorname{diag}\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda}\right)U^*\varepsilon \end{aligned}$$

En conclusion, x_λ existe toujours si $\lambda > 0$. En comparant avec la solution des moindres carrés sans régularisation,

$$x_{LS} = x + \underbrace{V\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sigma_i}\right)U^*\varepsilon}_{\text{instable si } \sigma_i \text{ petit}}$$

on remarque à présent que la régularisation introduit un facteur correctif qui atténue les petites valeurs singulières σ_i :

$$x_\lambda = \underbrace{V \text{diag} \left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \right) V^* x}_{\neq I_n} + \underbrace{V \text{diag} \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda} \right) U^* \varepsilon}_{\text{stable}}$$

On observe que, même lorsque $\varepsilon = 0$, la solution régularisée x_λ ne correspond pas exactement à la solution x . Cependant, il a l'avantage de rester bien posé si A^*A n'est pas inversible (donc si on a un σ_i nul), et il est stable pour les petites valeurs de σ_i .

Enfin, on peut observer que lorsque $\lambda \rightarrow 0$, la solution régularisée tend vers la solution des moindres carrés :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} x_\lambda = x_{LS}$$

Lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, la solution régularisée tend vers zéro :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} x_\lambda = 0$$

Le paramètre λ régule le compromis entre la fidélité aux données (pour un λ faible) et la stabilité de la solution (pour un λ élevé). Le choix optimal de λ peut être effectué à l'aide de différentes techniques, parmi lesquelles le principe de Morozov constitue une approche courante.

1.5 Limites du cadre matriciel

Les calculs matriciels effectués précédemment permettent de comprendre comment l'ajout d'une régularisation améliore la robustesse au bruit et rend le problème bien posé. Ces méthodes sont pertinentes lorsque le nombre de paramètres à retrouver est relativement faible.

Cependant, ces calculs deviennent impraticables lorsque x est de grande dimension. En effet, les matrices associées à de tels problèmes sont souvent trop volumineuses pour être stockées ou manipulées directement en machine. Prenons l'exemple d'une image de taille 1000×1000 , où x correspond à un vecteur de $n = 10^6$ pixels. Si l'on suppose que $m = n$, alors la matrice A aurait une dimension $10^6 \times 10^6$. Comme chaque nombre flottant occupe environ 8 octets, la simple mémoire nécessaire pour stocker A serait de l'ordre de 8 To, ce qui est inenvisageable pour des calculs standards.

En pratique, pour des problèmes de grande taille, on privilégie des algorithmes itératifs tels que la descente de gradient, le gradient projeté, ou des méthodes basées sur l'algorithme proximal. Ces méthodes permettent de résoudre le problème sans avoir à manipuler explicitement les matrices, ce qui les rend plus adaptées à des dimensions élevées.

Dans ces approches, on abandonne la représentation matricielle explicite. Par exemple, dans le cas d'images, celles-ci sont représentées comme des signaux discrets en deux dimensions. Une image u est ainsi décrite par une fonction :

$$u : \begin{cases} \Omega = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto u(x, y) \end{cases}$$

2 Problèmes d'optimisation convexes

Nous nous intéressons à présent au problème général suivant :

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in E} J(x), \quad (\text{P})$$

où :

- E est un espace de Hilbert de dimension finie (souvent \mathbb{R}^n),
- $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est une fonctionnelle à valeurs étendues.

Dans cette section, nous nous concentrerons sur le cas où J est convexe, une hypothèse fréquemment vérifiée pour les fonctionnelles J discutées précédemment, sous des choix appropriés de matrice A et de terme de régularisation R . Nous établirons des critères assurant l'existence et l'unicité d'une solution au problème (P), puis nous proposerons des méthodes numériques pour en calculer une approximation.

2.1 Cas continue

Commençons par le cas où J est une fonction continue. Pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution du problème (P), il est nécessaire d'imposer certaines hypothèses supplémentaires sur J :

Définition 4 : Fonction propre

Une fonctionnelle J est dite propre si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$ et n'est pas identiquement égale à $+\infty$.

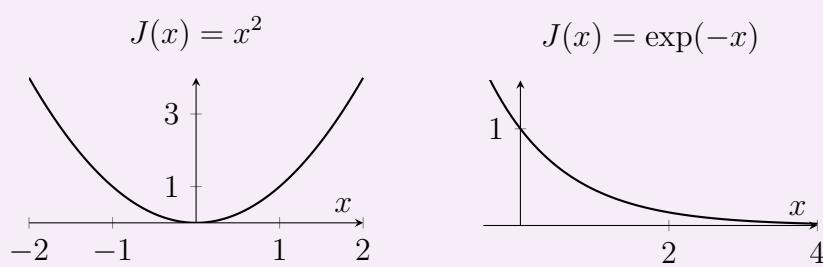
Définition 5 : Coercivité

Une fonctionnelle J est dite coercive si elle satisfait la condition suivante :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$$

Exemple 3 :

La fonction $x \mapsto x^2$ est propre, convexe et coercive. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est propre, convexe mais non coercive.



Proposition 2 : Existence, formulation forte

Si la fonctionnelle $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre, continue et coercive, alors le problème (P) admet au moins une solution.

Preuve :

- Soit $d = \inf_{x \in E} J(x)$. Puisque J est propre, il existe $\tilde{u} \in E$ tel que $J(\tilde{u}) < +\infty$, ce qui implique $d \leq J(\tilde{u}) < +\infty$.
- Considérons une suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(u_n) = d$$

Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Supposons le contraire : il existerait alors une sous-suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n\| = +\infty$$

Cependant, par coercivité de J , on aurait alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J(v_n) = +\infty$$

ce qui contredit le fait que $d \neq +\infty$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nécessairement bornée.

- Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. Notons w sa limite. Par continuité de J ,

$$d = \lim_{n \rightarrow +\infty} J(w_n) = J(w) = \min_{x \in E} J(x)$$

Ainsi, w est une solution du problème (P). ■

Proposition 3 : Unicité

Si la fonctionnelle $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est strictement convexe et propre, alors le problème (P) admet au plus une solution.

Preuve : Supposons que (P) admette deux solutions distinctes x_1 et x_2 , alors $J(x_1) = J(x_2) = \min J$. Par stricte convexité de J , on a

$$J\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{J(x_1) + J(x_2)}{2} = \min(J)$$

ce qui est contradictoire. Ainsi, $x_1 = x_2$. ■

Plusieurs exemples mentionnés dans la section 1 satisfont ces hypothèses. Rappelons notamment que :

- Les normes sont des fonctions convexes ;
- Si J est convexe et A est linéaire, alors $J \circ A$ est convexe ;
- Si J est strictement convexe et A est linéaire, alors $J \circ A$ est strictement convexe si et seulement si A est injective.

Exercice 4 :

Étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (P) lorsque J est une régularisation de Tikhonov, avec A linéaire, $\lambda > 0$, et

$$J(x) = \|Ax - y\|_2^2 + \lambda\|x\|_2^2$$

Que se passe-t-il si on ajoute l'hypothèse $x \in [0, 1]^m$?

Solution : La fonctionnelle J est

- **propre** : en effet $J(0) = \|y\|_2^2 < +\infty$ et, pour tout $x \in E$, on a $J(x) \geq 0 > -\infty$;
- **continue** : les normes sont continues et l'application $x \mapsto Ax - y$ est continue car A est linéaire ;
- **coercive** : puisque $\lambda > 0$, on a $\lambda\|x\|_2^2 \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Comme $J(x) \geq \lambda\|x\|_2^2$, il en est de même pour J .

On en déduit que J admet au moins un minimum. De plus, J est

- **strictement convexe** : les normes sont convexes, A est linéaire, donc $x \mapsto \|Ax - y\|_2^2$ est convexe. Enfin, comme $\lambda > 0$, le terme $x \mapsto \lambda\|x\|_2^2$ est strictement convexe, d'où la stricte convexité de J .

Ainsi, J admet un unique minimiseur. Toutefois, si l'on impose la contrainte $x \in [0, 1]^m$, on sort du cadre classique, et les résultats précédents ne s'appliquent plus directement.

Dans l'exercice précédent, l'hypothèse $x \in [0, 1]^m$ introduit un cadre de minimisation sous contrainte, situation fréquente en pratique. Pour traiter ce type de problème, considérons un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset E$ et définissons la fonction caractéristique $\delta_{\mathcal{C}}(x)$ par

$$\delta_{\mathcal{C}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{C}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le problème de minimisation sous contrainte $\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{C}} J(x)$ peut alors être reformulé :

$$\bar{x} \in \operatorname{argmin}_{x \in E} (J(x) + \delta_{\mathcal{C}}(x)).$$

On peut montrer que \mathcal{C} est convexe si et seulement si $\delta_{\mathcal{C}}$ est convexe. Ainsi, dans le cas où $\mathcal{C} = [0, 1]^m$, la nouvelle fonction $J + \delta_{\mathcal{C}}$ reste convexe. Cependant, comme $\delta_{\mathcal{C}}$ n'est pas continue, les résultats d'existence précédents ne s'appliquent plus, ce qui motive un affaiblissement des hypothèses de continuité.

2.2 Cas semi-continue inférieurement

Nous allons maintenant travailler avec une notion plus générale que la continuité, appelée semi-continuité inférieure.

Définition 6 : Semi-continuité inférieure

Une fonctionnelle $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est dite semi-continue inférieurement (SCI) si et seulement si, pour tout $x \in E$, on a :

$$\liminf_{\tilde{x} \rightarrow x} J(\tilde{x}) \geq J(x).$$

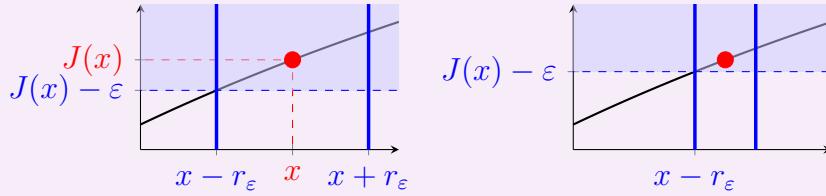
Cela revient à dire que, pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rayon $r_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \tilde{x} \in B(x, r_\varepsilon), \quad J(\tilde{x}) \geq J(x) - \varepsilon,$$

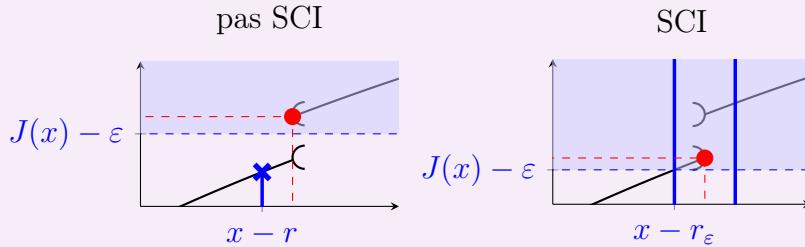
où $B(x, r_\varepsilon)$ désigne la boule de centre x et de rayon r_ε .

Exemple 4 :

- Une fonction continue en x est toujours SCI en x .



- Lorsqu'il n'y a pas continuité, deux situations peuvent se présenter :



- La fonction indicatrice d'un ensemble fermé \mathcal{C} est SCI.

On peut montrer que, pour que J soit semi-continue inférieurement (SCI), il est nécessaire que son épigraphe soit fermé dans $E \times \mathbb{R}$, où l'épigraphe de J est défini par

$$\text{epi}(J) = \{(u, \lambda) \in E \times \mathbb{R} \mid J(u) \leq \lambda\}.$$

De manière similaire, on peut définir la notion de semi-continuité supérieure, et une fonction est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement. Grâce à la notation de semi-continuité, on obtient une version plus faible de l'existence de solutions :

Proposition 4 : Existence, formulation faible

Si $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est propre, SCI, et si elle satisfait au moins l'une des conditions suivantes :

- L'ensemble $\text{dom}(J) := \{u \in E \mid J(u) < +\infty\}$ est borné ;
- J est coercive,

alors le problème (P) admet au moins une solution.

Preuve :

- Soit $d = \inf_{x \in E} J(x)$. Comme la fonction J est propre, $d < +\infty$.
- Si J est coercive, la preuve de la Proposition 2 montre que toute suite minimisante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $J(u_n) \rightarrow d$ quand $n \rightarrow +\infty$, est bornée. Sinon, en tronquant la suite (u_n) pour ne garder que des éléments tels que $J(u_n) < +\infty$, on a $u_n \in \text{dom}(J)$, qui est borné. Par conséquent, la suite (u_n) est bornée.
- Puisque toute suite minimisante (u_n) est bornée, on peut en extraire une sous-suite (w_n) qui converge vers une limite w . Par semi-continuité inférieure de J , on obtient

$$J(w) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} J(w_n) = d = \inf_{x \in E} J(x) \leq J(w)$$

Ainsi, $J(w) = d$ ce qui prouve que w est une solution du problème (P). ■

Grâce à cette proposition, il est possible d'ajouter des contraintes raisonnables aux problèmes mentionnés dans la Section 1.

Proposition 5 :

Supposons que J est une fonction propre, SCI, coercive et strictement convexe. Si \mathcal{C} est un ensemble fermé et convexe, et que $\text{dom}(J) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, alors le problème de minimisation

$$\bar{x} = \underset{x \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} J(x)$$

admet une unique solution.

Preuve : Nous avons déjà montré que ce problème peut être reformulé comme

$$\bar{x} = \underset{x \in E}{\operatorname{argmin}} J(x) + \delta_{\mathcal{C}}(x)$$

Puisque \mathcal{C} est fermé, $\delta_{\mathcal{C}}$ est SCI, et comme \mathcal{C} est convexe, $\delta_{\mathcal{C}}$ est également convexe. La fonctionnelle résultante, $J(x) + \delta_{\mathcal{C}}(x)$, est donc :

- propre, car $\text{dom}(J) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ garantit qu'elle est définie sur au moins un point ;
- SCI, comme somme de deux fonctions SCI ;
- strictement convexe, comme somme d'une fonction convexe et strictement convexe ;
- coercive, comme somme d'une fonction coercive (J) et d'une fonction positive ($\delta_{\mathcal{C}}$).

Ainsi, cette fonctionnelle satisfait toutes les hypothèses pour garantir l'existence et l'unicité d'un minimum. ■

Exercice 5 :

Supposons que $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est propre, SCI, coercive et strictement convexe. Quelles sont les contraintes admissibles pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution ?

- Images en noir et blanc : $x \in [0, 1]^m$
- Vitesses de propagation : $x \in \mathbb{R}_+^m$
- Placement d'arbres : $|x_j - x_i| \geq 1$
- Puissance de chauffage : $x > 0$

Solution : Les ensembles $[0, 1]^m$ et \mathbb{R}_+^m sont convexes et fermés, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution. En revanche, dans le troisième exemple, l'ensemble n'est pas convexe : les points $(1, 0, \dots, 0)$ et $(-1, 0, \dots, 0)$ sont dans l'ensemble mais pas leur barycentre, donc l'unicité n'est pas assurée. Mais l'ensemble est fermé (on peut le montrer par image réciproque ou par caractérisation séquentielle) donc il y a existence. Dans le quatrième exemple, l'ensemble n'est pas fermé, ce qui implique que la fonction n'est pas SCI, et l'existence d'une solution n'est donc pas garantie.

Nous allons maintenant chercher à résoudre numériquement les problèmes pour lesquels l'existence et l'unicité ont été établies.

2.3 Descente de gradient sans contrainte

Nous considérons le cas où $E = \mathbb{R}^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, et nous cherchons à résoudre le problème (P). Nous supposons également que J est convexe, continue et différentiable. Dans ce cadre, plusieurs algorithmes permettent de trouver numériquement des solutions de (P), le plus connu étant l'algorithme de descente de gradient.

L'objectif est de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la séquence des valeurs $(J(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante. Cette suite est définie par la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - \underbrace{\alpha_n}_{\in \mathbb{R}_+} \underbrace{d_n}_{\in E}$$

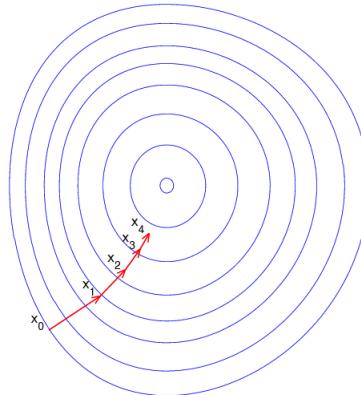
où α_n est un pas de descente positif, et d_n est une direction de descente. En effectuant un développement limité de J à l'ordre 1, on obtient

$$J(x_{n+1}) = J(x_n) + \langle \nabla J(x_n), -\alpha_n d_n \rangle + o(\alpha_n \|d_n\|)$$

Ainsi, en choisissant $d_n = \nabla J(x_n)$ (la direction du gradient), nous avons

$$J(x_{n+1}) = J(x_n) - \underbrace{\alpha_n \|\nabla J(x_n)\|_2^2}_{\leq 0} + o(\alpha_n \|\nabla J(x_n)\|)$$

Cela montre que $J(x_{n+1}) \leq J(x_n)$ si α_n est choisi suffisamment petit.



L'algorithme de descente de gradient se déroule comme suit :

- **Initialisation :** Choisir un point initial $x_0 \in \mathbb{R}^m$ et un pas initial $\alpha_0 > 0$.
- **Itération n :** À chaque étape n , calculer le gradient $\nabla J(x_n)$, déterminer le pas α_n , puis mettre à jour la solution selon la règle :

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla J(x_n).$$

- **Critère d'arrêt :** Arrêter les itérations lorsque l'un des critères suivants est satisfait :
 - Un nombre fixe d'itérations $n = N$ est atteint.
 - La variation relative entre deux itérations successives est inférieure à un seuil fixé ϵ , c'est-à-dire

$$\left\| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} \right\|_2 \leq \epsilon.$$

Proposition 6 : Convergence de la descente de gradient

Soit $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, différentiable, coercive, strictement convexe, et à gradient L -lipschitzien, c'est-à-dire que

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \quad \|\nabla J(x_1) - \nabla J(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|.$$

Si, à chaque étape de l'algorithme, le pas α_n est choisi dans l'intervalle $]0, 1/L[$, alors :

- La suite des valeurs $(J(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante ;
- La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution unique \bar{x} de (P) ;
- La vitesse de convergence est de l'ordre de $O(1/n)$.

Preuve : • En utilisant l'inégalité de convexité et la Lipschitzianité du gradient, on a

$$J(x_{n+1}) \leq J(x_n) + \langle \nabla J(x_n), x_{n+1} - x_n \rangle + \frac{L}{2}\|x_{n+1} - x_n\|_2^2$$

Sachant que $x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla J(x_n)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} J(x_{n+1}) &\leq J(x_n) - \alpha_n \|\nabla J(x_n)\|_2^2 + \frac{L\alpha_n^2}{2} \|\nabla J(x_n)\|_2^2 \\ &= J(x_n) - \left(\alpha_n - \frac{L\alpha_n^2}{2}\right) \|\nabla J(x_n)\|_2^2 \end{aligned}$$

Comme $\alpha_n < 1/L$, il existe μ avec $0 < \mu < \frac{1}{2L}$ et tel que

$$J(x_{n+1}) \leq J(x_n) - \mu \|\nabla J(x_n)\|_2^2 \tag{I_1}$$

Ainsi, $J(x_{n+1}) \leq J(x_n)$, ce qui implique que la suite $(J(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• La suite $(J(x_n))$ est également bornée inférieurement par $J(\bar{x})$. Ainsi, elle converge vers une limite L . Puisque $\alpha_n > 0$, il s'ensuit que

$$\|\nabla J(x_n)\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Ainsi, x_n converge vers l'unique minimiseur \bar{x} de J .

- Par inégalité de convexité, on obtient aussi que

$$J(x_n) + \langle \nabla J(x_n), \bar{x} - x_n \rangle \leq J(\bar{x}) \tag{I_2}$$

donc

$$J(x_n) - J(\bar{x}) \leq \|\nabla J(x_n)\|_2 \|\bar{x} - x_n\|_2 \tag{I_3}$$

Montrons que $(\|x_n - \bar{x}\|_2)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Grâce aux inégalités (I_2) et (I_1),

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \bar{x}\|_2^2 &= \|x_n - \bar{x}\|_2^2 + 2\langle x_{n+1} - x_n, x_n - \bar{x} \rangle + \|x_{n+1} - x_n\|_2^2 \\ &= \|x_n - \bar{x}\|_2^2 + 2\alpha_n \langle \nabla J(x_n), \bar{x} - x_n \rangle + \alpha_n^2 \|\nabla J(x_n)\|_2^2 \\ &\leq \|x_n - \bar{x}\|_2^2 - 2\alpha_n (J(x_n) - J(\bar{x})) + \frac{\alpha_n^2}{\mu} (J(x_n) - J(\bar{x})) \\ &= \|x_n - \bar{x}\|_2^2 - \underbrace{\alpha_n \left(2 - \frac{\alpha_n}{\mu}\right)}_{\geq 0} \underbrace{(J(x_n) - J(\bar{x}))}_{\geq 0} \\ &\leq \|x_n - \bar{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

On conclut donc que $\|x_n - \bar{x}\|_2 \leq \|x_0 - \bar{x}\|_2$. En combinant cela avec l'inégalité (I_3) ,

$$\|\nabla J(x_n)\|_2 \geq \frac{J(x_n) - J(\bar{x})}{\|x_n - \bar{x}\|_2} \geq \frac{J(x_n) - J(\bar{x})}{\|x_0 - \bar{x}\|_2}$$

On a alors, en combinant avec (I_1) ,

$$J(x_{n+1}) - J(\bar{x}) \leq J(x_n) - J(\bar{x}) - \mu \frac{(J(x_n) - J(\bar{x}))^2}{\|x_0 - \bar{x}\|_2^2}$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{J(x_{n+1}) - J(\bar{x})} &\geq \frac{1}{J(x_n) - J(\bar{x})} \left(1 + \mu \frac{J(x_n) - J(\bar{x})}{\|x_0 - \bar{x}\|_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{J(x_n) - J(\bar{x})} + \mu \frac{1}{\|x_0 - \bar{x}\|_2^2} \end{aligned}$$

Par récurrence, on a alors

$$\frac{1}{J(x_n) - J(\bar{x})} \geq \mu \frac{n}{\|x_0 - \bar{x}\|_2^2} \quad \text{d'où} \quad J(x_n) - J(\bar{x}) \leq \frac{2L\|x_0 - \bar{x}\|_2^2}{n}$$

ce qui prouve que $J(x_n) - J(\bar{x}) = O(1/n)$. ■

Plutôt que de choisir un pas fixe, il est également possible d'opter pour un pas dit « optimal », défini par

$$\alpha_n = \operatorname{argmin}_{\alpha > 0} J(x_n - \alpha \nabla J(x_n)).$$

Ce minimum unidimensionnel peut être trouvé numériquement, ou bien une expression analytique peut être obtenue dans certains cas simples.

Exercice 6 :

Trouver le pas optimal dans le cas où J est une minimisation des moindres carrés, c'est-à-dire lorsque A est linéaire et

$$J(x) = \|Ax - y\|_2^2.$$

Solution : Dans ce cas, le gradient de J est donné par $\nabla J(x) = 2A^*Ax - 2A^*y$. Nous cherchons à minimiser la fonction $g(\alpha)$ définie par

$$g(\alpha) = \|Ax_n - 2\alpha AA^*Ax_n + 2\alpha AA^*y - y\|_2^2 = \|t - \alpha s\|_2^2,$$

où $t = Ax_n - y$ et $s = 2AA^*Ax_n - 2AA^*y$. En dérivant par rapport à α , on obtient :

$$g'(\alpha) = 2\alpha\|s\|_2^2 - 2\langle t, s \rangle.$$

Le pas optimal α_n est donc :

$$\alpha_n = \frac{\langle t, s \rangle}{\|s\|_2^2} = \frac{\langle Ax_n - y, 2AA^*Ax_n - 2AA^*y \rangle}{\|2AA^*Ax_n - 2AA^*y\|_2^2} = \frac{\|A^*Ax_n - A^*y\|_2^2}{2\|AA^*Ax_n - AA^*y\|_2^2}.$$

2.4 Optimisation convexe différentiable avec contrainte

Nous nous intéressons à présent au problème d'optimisation sous contrainte convexe. Considérons un ensemble convexe $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ et cherchons à résoudre le problème (P) avec la contrainte $u \in \mathcal{C}$ au lieu de $u \in \mathbb{R}^m$. Dans ce cas, la condition d'optimalité $\nabla J(\tilde{u}) = 0$ n'est plus suffisante pour garantir que \tilde{u} est solution de (P).

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans ce cadre sont données par le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Celui-ci fournit des critères qui généralisent les conditions sans contrainte en prenant en compte les contraintes convexes. En pratique, on peut adapter simplement l'algorithme de descente de gradient pour traiter les contraintes convexes. Au lieu de mettre à jour x avec

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla J(x_n)$$

où x_{n+1} ne tombe pas forcément dans le convexe \mathcal{C} , on remplace l'étape en projetant sur le convexe \mathcal{C} :

$$x_{n+1} = \Pi_{\mathcal{C}}(x_n - \alpha_n \nabla J(x_n))$$

On obtient alors l'algorithme du gradient projeté. On a alors une proposition assez similaire à la Proposition 6, qui garantit la convergence vers l'unique point minimum dans \mathcal{C} . On renvoi au cours de Q. Mérigot pour plus de détails sur la proposition exacte et la preuve, faite par méthode de point fixe.

3 Méthodes duales pour la minimisation d'énergies convexes non-différentiables

Nous nous intéressons à présent au problème d'optimisation

$$\tilde{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u) \quad (\text{P})$$

où :

- $E = \mathbb{R}^\Omega$, avec $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, représentant les pixels (x, y) d'une image ;
- $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une fonctionnelle à valeurs étendues.

Si la fonctionnelle J est convexe et différentiable, on sait déjà que

$$\tilde{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u) \Leftrightarrow \nabla J(\tilde{u}) = 0$$

et le minimum peut être trouvé par une méthode de descente de gradient, en utilisant les tangentes τ_u à J en tout point u . Mais que se passe-t-il lorsque J n'est pas différentiable ? C'est souvent le cas, par exemple, pour certaines régularisations R qui ne sont pas différentiables. Dans ce cas, comment caractériser le minimum de J et comment remplacer la notion de gradient ?

3.1 Sous-gradient

Rappelons que lorsque J est convexe et différentiable en u , l'unicité et l'existence de la tangente au point u sont garanties :

Définition 7 : Tangente

Si J est convexe et différentiable, la tangente à J en u , notée τ_u , existe et est unique. Sa pente est donnée par le gradient $\nabla J(u)$.

Proposition 7 : Caractérisation de la tangente

Si J est convexe et différentiable, la tangente τ_u est la seule fonction qui satisfait les conditions suivantes :

- τ_u est affine et continue ;
- τ_u est minorante de J (pour tout $v \in E$, $\tau_u(v) \leq J(v)$) ;
- τ_u est exacte en u , c'est-à-dire $\tau_u(u) = J(u)$.

Si J est convexe mais non différentiable en u , il peut exister plusieurs fonctions τ_u vérifiant les propriétés ci-dessus (affinité, continuité, exactitude, minorante), sans que l'unicité soit garantie. Les pentes de ces fonctions sont alors appelées des sous-gradients de J au point u . Pour expliciter la notion de sous-gradient, il est nécessaire de comprendre en détail ce que signifie qu'une fonction est minorante, affine, exacte et continue.

- On cherche une fonction affine continue, qui s'écrit donc sous la forme

$$g(x) = a + \langle b, x \rangle$$

- La fonction est exacte en u , c'est-à-dire que

$$g(u) = J(u) \Leftrightarrow a + \langle b, u \rangle = J(u) \Leftrightarrow a = -\langle b, u \rangle + J(u)$$

Ainsi, on en déduit que

$$g(x) = J(u) + \langle b, x - u \rangle$$

- La fonction g est une minorante de J , donc

$$\langle b, x - u \rangle + J(u) \leq J(x)$$

Ainsi, cette relation introduit la notion de sous-gradient :

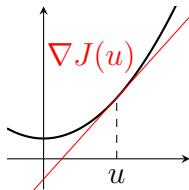
Définition 8 : Sous-gradient

On dit qu'un vecteur ϕ est un sous-gradient de J au point $u \in E$ si

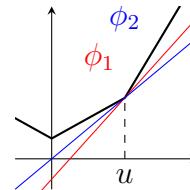
$$\forall v \in E \quad \langle \phi, v - u \rangle + J(u) \leq J(v)$$

On note $\partial J(u)$ l'ensemble des sous-gradients de J au point u . Si $\partial J(u) \neq \emptyset$, alors J est dite sous-différentiable en u .

$$\partial J(u) = \{\nabla J(u)\}$$



$$\partial J(u) = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$$



Exercice 7 :

Déterminer $\partial J(u)$ dans le cas où $J(u) = |u|$.

Solution : Soit $u \in E$. Pour tout $\phi \in E$ et tout $v \in E$, on a l'expression

$$J(v) - J(u) - \langle \phi, v - u \rangle = |v| - |u| - \phi(v - u)$$

- Si $u > 0$, ϕ est un sous-gradient si et seulement si

$$\forall v \in E \quad |v| - u - \phi(v - u) \geq 0$$

En prenant $v = u - \varepsilon$ avec $v > 0$, on obtient $-\varepsilon(1 - \phi) \geq 0$, et en prenant $v = u + \varepsilon$, on obtient $\varepsilon(1 - \phi) \geq 0$. Il en découle que nécessairement $\phi = 1$.

- Si $u < 0$, par un raisonnement similaire, on obtient que $\phi = -1$.
- Si $u = 0$, ϕ doit satisfaire

$$\forall v \in E, \quad |v| - \langle \phi, v \rangle \geq 0.$$

En prenant $v > 0$, on a $\phi \leq 1$, et en prenant $v < 0$, on a $\phi \geq -1$. Réciproquement, si $\phi \in [-1, 1]$, l'inégalité est vérifiée.

En conclusion, on a

$$\partial \phi(u) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si } u < 0 \\ \{1\} & \text{si } u > 0 \\ [-1, 1] & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

On constate que, dans le cas où J est dérivable, l'ensemble des sous-gradients $\partial J(u)$ coïncide avec la dérivée classique. Plus généralement, les propriétés suivantes sont vérifiées :

Proposition 8 :

- $0 \in \partial J(u) \Leftrightarrow u \in \operatorname{argmin}_{v \in E} J(v)$.
- Si J est convexe et différentiable en u , alors $\partial J(u) = \nabla J(u)$.
- Si J est convexe et semi-continue inférieurement (SCI), elle est sous-différentiable à l'intérieur de
$$\operatorname{dom}(J) = \{u \in E \mid J(u) < +\infty\}$$
- Si $\lambda > 0$, alors $\partial(\lambda J)(u) = \lambda \partial J(u)$.
- $\partial(J_1 + J_2)(u) \supset \partial J_1(u) + \partial J_2(u)$, avec égalité si J_1 et J_2 sont convexes et SCI.
- Si A est linéaire et $b \in \mathbb{R}^n$, et si on pose $K(u) = J(Au + b)$ alors on a $\partial K(u) \supset A^* \partial J(Au + b)$ avec égalité si J est convexe et SCI.

Preuve :

- On a

$$\begin{aligned} 0 \in \partial J(u) &\Leftrightarrow \forall v \in E \quad \langle 0, v - u \rangle + J(u) \leq J(v) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in E \quad J(u) \leq J(v) \\ &\Leftrightarrow u \in \operatorname{argmin}_{v \in E} J(v) \end{aligned}$$

- La deuxième propriété découle directement de la définition de la sous-différentiabilité et de la Proposition 7.
- Si J est convexe et SCI, son épigraphe est fermé et convexe. En vertu du théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan tangent en tout point $u \in \operatorname{dom}(J)$, dont la pente est un sous-gradient de J .
- Le résultat pour λJ est obtenu directement en multipliant l'inégalité dans la définition du sous-gradient par $\lambda > 0$.
- En additionnant les inégalités vérifiées pour les sous-gradients de J_1 et J_2 , on obtient immédiatement l'inclusion. L'égalité dans le cas convexe et SCI est plus complexe et démontrée par exemple dans le livre de H. Bauschke. ■
- Si $\psi \in A^* \partial J(Au + b)$ alors $\psi = A^* \phi$ où $\phi \in \partial J(Au + b)$. Pour tout $v \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle \psi, u - v \rangle + K(u) &= \langle \phi, Au - Av \rangle + J(Au + b) \\ &= \langle \phi, Au + b - (Av + b) \rangle + J(Au + b) \\ &\leq J(Av + b) = K(v) \end{aligned}$$

donc $\psi \in \partial K(u)$. L'égalité est également plus complexe et démontrée dans le même ouvrage que précédemment.

Exercice 8 :

Déterminer $\partial J(u)$ dans le cas où $J(u) = \|u\|_1$.

Solution : On remarque que $J(u) = |u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|$. Notons $A_i = (0, \dots, 1, \dots, 1)$ la matrice de projection sur la coordonnée i d'un vecteur, et posons $J_i(u) = |A_i u|$. Tous les J_i sont convexes et SCI car les A_i sont linéaires, d'où

$$\partial J(u) = \partial J_1(u) + \partial J_2(u) + \cdots + \partial J_n(u)$$

Et on a déjà calculé dans l'exercice 7 les sous-gradients de $|\cdot|$. Comme $|\cdot|$ est convexe et SCI,

$$\begin{aligned}\partial J_i(u) &= A_i^\top \partial |\cdot|(A_i u) \\ &= A_i^\top \{\phi \in \mathbb{R} \mid \phi \in [-1, 1] \text{ si } u_i = 0, \phi = u_i/|u_i| \text{ sinon}\} \\ &= \{(0, \dots, \phi, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n \mid \phi \in [-1, 1] \text{ si } u_i = 0, \phi = u_i/|u_i| \text{ sinon}\}\end{aligned}$$

On conclut que

$$\partial J(u) = \{\phi \in \mathbb{R}^n \mid \phi_i \in [-1, 1] \text{ si } u_i = 0, \phi_i = u_i/|u_i| \text{ sinon}\}$$

Exercice 9 :

Soit R une fonction convexe, semi-continue inférieurement (SCI) et non différentiable. Pour un $\lambda > 0$, on définit la fonction

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2 + \lambda R(u)$$

Exprimer $\partial J(u)$ en fonction de ∂R .

Solution : Posons $J_1(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2$. Comme les deux fonctions J_1 et R sont convexes et SCI, on peut appliquer le résultat d'égalité pour la somme des sous-gradients. Ainsi, on obtient

$$\partial(J_1 + \lambda R)(u) = \partial J_1(u) + \lambda \partial R(u)$$

Or, comme J_1 est différentiable, son sous-gradient est simplement son gradient, soit :

$$\partial J(u) = \{\nabla J_1(u)\} + \lambda \partial R(u) = \{u - u_0\} + \lambda \partial R(u)$$

3.2 Transformée de Fenchel

Il n'est pas toujours simple de calculer directement les sous-gradients dans un problème de minimisation. Cependant, lorsque J est convexe et semi-continue inférieurement (SCI), la transformée de Fenchel peut être utilisée pour reformuler le problème de minimisation de manière duale.

Définition 9 : Transformée de Fenchel

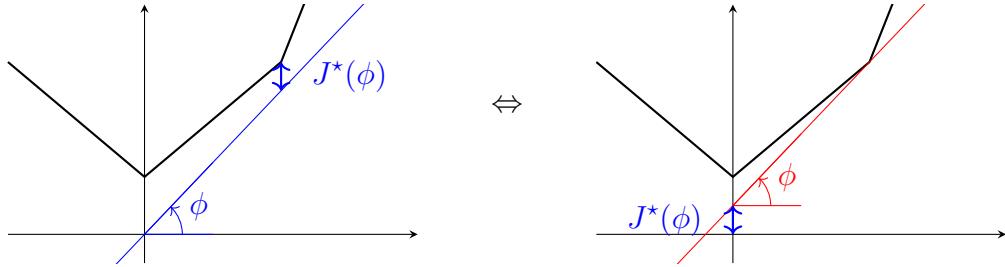
Soit E un espace de Hilbert de dimension finie et $J : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. La transformée de Fenchel de J , notée $J^* : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, est définie par

$$J^* : \phi \mapsto \sup_{u \in E} [\langle \phi, u \rangle - J(u)]$$

Géométriquement, on remarque qu'on peut réécrire le problème comme

$$J^*(\phi) = \inf_{u \in E} [J(u) - \langle \phi, u \rangle]$$

Ainsi, $J^*(\phi)$ représente la plus grande ordonnée à l'origine d'une fonction affine, de pente ϕ , qui est une minorante de la fonction J .

**Exercice 10 :**

Soit $J(u) = |u|$. Donner l'expression de la transformée de Fenchel J^* .

Solution : Nous observons que si $\phi \in [-1, 1]$, alors $|u| \geq \langle \phi, u \rangle$ avec égalité lorsque $u = 0$. Par conséquent, nous avons $J^*(\phi) = 0$. En revanche, si $\phi \notin [-1, 1]$, la fonction $\langle \phi, u \rangle - J(u)$ diverge vers $\pm\infty$, ce qui implique que $J^*(\phi) = +\infty$. Cela confirme l'interprétation géométrique précédemment mentionnée : si la pente d'une droite se situe entre -1 et 1 , il est possible de la placer sous la courbe de J à l'origine. Dans le cas contraire, aucune ordonnée à l'origine ne permet d'assurer que la droite reste en dessous de J .

Introduisons deux propriétés très utiles de la transformée de Fenchel d'une fonction convexe et SCI :

Proposition 9 :

Si J est convexe et SCI alors J^* est également convexe et SCI.

Preuve : Soit $\phi_1, \phi_2 \in E$ et $t \in [0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} J^*(t\phi_1 + (1-t)\phi_2) &= \sup_{u \in E} [\langle y, t\phi_1 + (1-t)\phi_2 \rangle - J(u)] \\ &\leq t \sup_{u \in E} [\langle u, \phi_1 \rangle - J(u)] + (1-t) \sup_{u \in E} [\langle u, \phi_2 \rangle - J(u)] \\ &\leq tJ^*(\phi_1) + (1-t)J^*(\phi_2) \end{aligned}$$

Donc J^* est convexe. Considérons maintenant une suite $\phi_m \rightarrow \phi$. On a alors pour tout $u \in E$ que

$$J^*(\phi_m) \geq \langle \phi_m, u \rangle - J(u)$$

d'où

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} J^*(\phi_m) \geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} [\langle \phi_m, u \rangle - J(u)] = \langle \phi, u \rangle - J(u)$$

En prenant le supremum sur $u \in E$, on conclut que

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} J^*(\phi_m) \geq J^*(\phi)$$

et donc que J^* est SCI. ■

Proposition 10 :

Si J est convexe et SCI alors $J^{**} = J$.

Preuve : Pour prouver cela, nous allons montrer que J^{**} est le supremum de toutes les fonctions affines minorant J . Comme J est convexe et SCI, cela prouvera alors que $J = J^{**}$ (cette propriété est démontrée dans le livre de H. Bauschke). Considérons

donc l'ensemble Σ contenant tous les couples $(\phi, \alpha) \in E \times \mathbb{R}$ tels que la fonction affine $x \mapsto \langle \phi, x \rangle - \alpha$ est majorée par J . Nous avons alors

$$\forall u \in E, \quad J(u) \geq \langle \phi, u \rangle - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq \sup_{u \in E} [\langle \phi, u \rangle - J(u)] = J^*(\phi)$$

Nous constatons donc que

$$\begin{aligned} \sup_{(\phi, \alpha) \in \Sigma} [\langle \phi, x \rangle - \alpha] &= \sup_{\phi \in \text{dom}(J^*), \alpha \geq J^*(\phi)} [\langle \phi, x \rangle - \alpha] \\ &= \sup_{\phi \in \text{dom}(J^*)} [\langle \phi, x \rangle - J^*(\phi)] = J^{**}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $u \in E$, nous avons $J(u) \geq J^{**}(u)$. De plus, le supremum de toutes les fonctions affines minorant J est J^{**} . Comme J est convexe et SCI, nous concluons que $J = J^{**}$. \blacksquare

Utilisons maintenant ces propriétés pour exprimer les sous-gradients d'une fonction de façon un peu différente :

Proposition 11 : Dualité

Si J est convexe et de type SCI, alors pour tout $\phi \in E$ et tout $u \in E$,

$$\phi \in \partial J(u) \Leftrightarrow u \in \partial J^*(\phi).$$

Nous désignons alors un problème (P) et sa forme duale (P*).

Preuve : Par définition de J^* , nous remarquons que

$$\forall (u, \phi) \in E \times E, \quad \phi \in \partial J(u) \Leftrightarrow J^*(\phi) + J(u) = \langle \phi, u \rangle$$

Comme $J^{**} = J$, nous en déduisons que

$$u \in \partial J^*(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad J^{**}(u) + J^*(\phi) = \langle \phi, u \rangle \quad \Leftrightarrow \quad J(u) + J^*(\phi) = \langle \phi, u \rangle$$

ce qui conclut la preuve. \blacksquare

Nous parlons ici de dualité en raison d'une analogie avec la dualité classique : si $\phi \in E^*$ est une forme linéaire, le théorème de Riesz nous garantit l'existence d'un unique élément $x_\phi \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \phi(x) = \langle x_\phi, x \rangle$$

Par abus de notation, nous remplaçons donc ϕ par son représentant x_ϕ . Ici, nous adoptons une approche similaire : $\phi \in E$ peut être interprété comme une forme linéaire, où $x \mapsto \langle \phi, x \rangle$, et nous identifions ϕ à un élément $u \in E$.

Exercice 11 :

Soit R une fonction convexe, semi-continue inférieurement (SCI) et non différentiable. Pour un $\lambda > 0$, on définit la fonction

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2 + \lambda R(u)$$

Le problème (P) est donné par $\tilde{u} = \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u)$. Quel est le problème (P^*) ?

Solution : Posons $J_1(u) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2$. Nous avons alors vu que

$$\partial(J_1 + \lambda R)(\tilde{u}) = \{\tilde{u} - u_0\} + \lambda \partial R(\tilde{u})$$

Nous en déduisons que

$$\tilde{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u) \Leftrightarrow \frac{u_0 - \tilde{u}}{\lambda} \in \partial R(\tilde{u}) \Leftrightarrow \tilde{u} \in \partial R^* \left(\frac{u_0 - \tilde{u}}{\lambda} \right)$$

En posant $\tilde{w} = \frac{u_0 - \tilde{u}}{\lambda}$, nous avons alors

$$\tilde{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u) \Leftrightarrow u_0 - \lambda \tilde{w} \in \partial R^*(\tilde{w}) \Leftrightarrow 0 \in \left\{ \tilde{w} - \frac{u_0}{\lambda} \right\} + \frac{1}{\lambda} \partial R^*(\tilde{w})$$

En posant $J_2(w) = \frac{1}{2} \left\| w - \frac{u_0}{\lambda} \right\|_2^2$, nous avons aussi

$$\tilde{u} \in \operatorname{argmin}_{u \in E} J(u) \Leftrightarrow 0 \in \{\nabla J_2(\tilde{w})\} + \partial \left(\frac{1}{\lambda} R^* \right) (\tilde{w}) \Leftrightarrow 0 \in \partial \left(J_2 + \frac{1}{\lambda} R^* \right) (\tilde{w})$$

Finalement, le problème (P) est équivalent au problème (P^*) où

$$\tilde{w} \in \operatorname{argmin}_{w \in E} \left[\frac{1}{2} \left\| w - \frac{u_0}{\lambda} \right\|^2 + \frac{1}{\lambda} R^*(w) \right] \quad (P^*)$$

À travers cet exercice, nous constatons qu'à travers le lien

$$\tilde{w} = \frac{u_0 - \tilde{u}}{\lambda} \Leftrightarrow \tilde{u} = u_0 - \lambda \tilde{w}$$

nous pouvons facilement reconstruire la solution de (P) connaissant la solution de (P^*) et inversement. Le résultat que nous venons de démontrer est appelé identité de Moreau.

Proposition 12 : Identité de Moreau

Soit R une fonction convexe et SCI, et $\lambda > 0$. Le dual du problème

$$\tilde{u} = \operatorname{argmin}_{u \in E} \left[\frac{1}{2} \|u - u_0\|_2^2 + \lambda R(u) \right] \quad (P)$$

est le problème

$$\tilde{w} \in \operatorname{argmin}_{w \in E} \left[\frac{1}{2} \left\| w - \frac{u_0}{\lambda} \right\|^2 + \frac{1}{\lambda} R^*(w) \right] \quad (P^*)$$

où $\tilde{u} = u_0 - \lambda \tilde{w}$.

3.3 Variation totale

Un des exemples classiques d'application se présente lorsque

$$R(u) := TV(u) = \sum_{(x,y) \in \Omega} \|\nabla u(x, y)\|_2$$

Dans ce cas, la fonction R n'est pas différentiable, ce qui rend impossible l'application directe de la méthode de descente de gradient sur J . Cependant, nous allons démontrer que TV^* a une expression simplifiée, permettant d'appliquer une méthode de gradient projeté.

Pour calculer TV^* , nous avons besoin du résultat suivant :

Proposition 13 : Transformée de Fenchel d'une norme

Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ une norme sur E et N_* sa norme duale définie par

$$\forall v \in E, \quad N_*(v) = \sup_{u \in E, N(u) \leq 1} \langle u, v \rangle$$

La transformée de Fenchel de N est

$$\forall v \in E, \quad N^*(v) = \delta_{B_*}(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } N_*(v) \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve : On observe que

$$\delta_{B_*}^*(u) = \sup_{v \in E} [\langle u, v \rangle - \delta_{B_*}(v)] = \sup_{v \in B_*} \langle u, v \rangle = \sup_{v \in E, N_*(v) \leq 1} \langle u, v \rangle = N_{**}(u)$$

Étant donné que E est réflexif, nous avons $N_{**} = N$ et finalement, $N = \delta_{B_*}^*$. D'où $N^* = \delta_{B_*}^{**} = \delta_{B_*}$ car δ_{B_*} est convexe et de type SCI. ■

Exercice 12 :

Si $J(u) = |u|$, donner l'expression de J^* .

Solution : On remarque que $J(u) = N(u)$ où N est la norme 1. Donc $J^*(v) = \delta_{B_*}(v)$ avec B_* la boule unité pour la norme N_* . Et

$$N_*(v) = \sup_{|u| \leq 1} \langle u, v \rangle \leq \sup_{|u| \leq 1} |u||v| \leq |v|$$

De plus, en prenant $v = u$, on a le cas d'égalité dans l'inégalité précédente, d'où $N_* = N$ et $B_* = [-1, 1]$. Finalement, $J^* = \delta_{[-1,1]}$.