熟悉 Eigen 矩阵运算

设线性方程 Ax = b,在 A 为方阵的前提下,请回答以下问题:

1. 在什么条件下,x 有解且唯一?
   矩阵A满秩且秩等于增广矩阵，$det|A| \not ={0}$
2. 高斯消元法的原理是什么? 通过用初等行变换将增广矩阵化为行阶梯阵，然后通过回带求解线性方程组的解
3. QR 分解的原理是什么? QR 分解是把矩阵分解成一个正交矩阵与一个上三角矩阵的积，常见的算法有Gram–Schmid正交化、Household变换，以及Givens变换。QR 分解经常用来解线性最小二乘法问题。
4. Cholesky 分解的原理是什么? Cholesky 分解是把一个实对称正定的矩阵表示成一个下三角矩阵L和其转置的积。求解方程的过程变为： 1)求解A的Cholesky分解，得到$A=LL^{T}$
   2)求解$LY=B$,得到Y 3)求解$L^{T}X=Y$,得到X
5. 编程实现 A 为 100 × 100 随机矩阵时,用 QR 和 Cholesky 分解求 x 的程序
   ```
   time use in Qr decomposition is 0.425ms
   time use in LLT decomposition is 0.026ms
   ```
   可以看出，LLT计算速度明显快于QR

几何运算练习

求该向量在小萝卜二号坐标系下的坐标 小萝卜1在地图下的坐标为T_{W}^{c1}, 小萝卜2在地图下的坐标为T_{W}^{c2}, 小萝卜1下的p1为T_{p}^{c1} 则在小萝卜2下的p1为$T_{p}^{c2} = T_{W}^{c2}* T_{p}^{W}=T_{W}^{c2} * (T_{c1}^{W})^{-1}* T_{p}^{c1}$

```
第二题：
 1.08228 0.663509 0.686957
```

旋转的表达

1. 设有旋转矩阵 R,证明$R^{T}R=I$且$detR = ±1$

由 $$R = \left[\begin{matrix} e_{1}^{T} \ e_{2}^{T} \ e_{3}^{T} \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} e_{1}^{'} & e_{2}^{'} & e_{3}^{'} \end{matrix} \right]$$

$$R^{T} = \left[\begin{matrix} e_{1}^{'T} \ e_{2}^{'T} \ e_{3}^{'T} \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} e_{1} & e_{2} & e_{3} \end{matrix} \right]$$ 则 $$R^{T}R = \left[\begin{matrix} e_{1}^{'T} \ e_{2}^{'T} \ e_{3}^{'T} \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} e_{1} & e_{2} & e_{3} \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} e_{1}^{T} \ e_{2}^{T} \ e_{3}^{T} \end{matrix} \right]\left[\begin{matrix} e_{1}^{'} & e_{2}^{'} & e_{3}^{'} \end{matrix} \right]=I$$ $|I|=|RR^{T}|=|R||R^{T}|=|R|^{2},则det(R)=±1$

2. 设有四元数 q，我们把虚部记为 ε，实部记为 η，那么 q=(ε,η)。请说明 ε 和 η 的维度 四元数 q 有三个虚部和一个实部,ε 维度为3，η维度为1
3. 请证明对任意单位四元数 q 1 , q 2 ,四元数乘法可写成矩阵乘法。

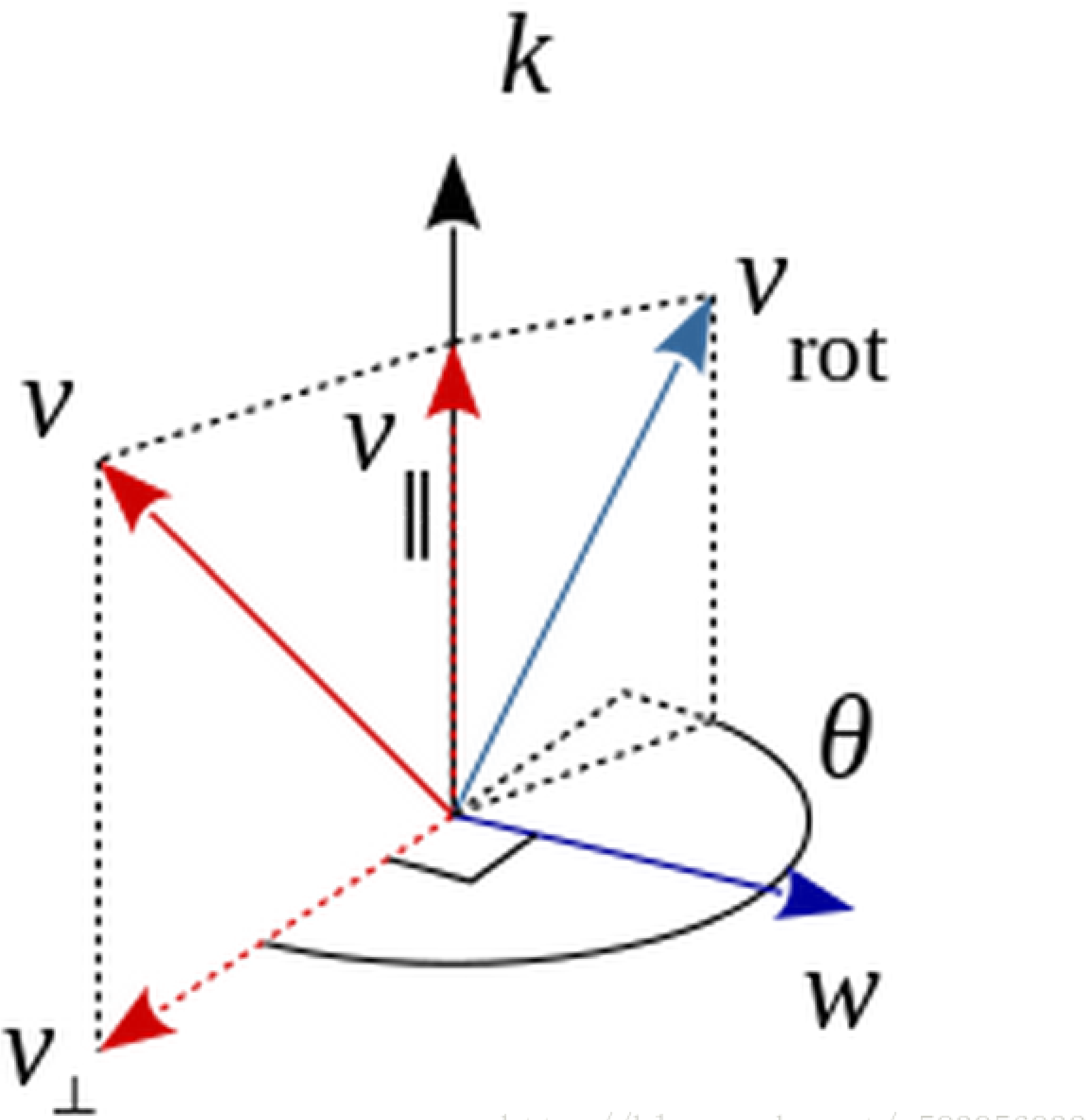
$$q_{1} = \left[\begin{matrix}\eta_{1} \ \epsilon_{1} \end{matrix}\right]$$ $$q_{2} = \left[\begin{matrix}\eta_{2} \ \epsilon_{2} \end{matrix}\right]$$ $$q_{1}q_{2} = \left[\begin{matrix}\eta_{1}\eta_{2} -\epsilon_{1}^{T} \epsilon_{2} \\eta_{1}\epsilon_{2}+ \eta_{2}\epsilon_{1} +\epsilon_{1}\times\epsilon_{2}\end{matrix}\right]$$

$$q_{1}^{+}q_{2} = \left[\begin{matrix} \eta_{1} &-\epsilon_{1}^{T}\\epsilon_{1} & \eta_{1}1+\epsilon_{1}^{\times} \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}\eta_{2} \ \epsilon_{2} \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} \eta_{1}\eta_{2} -\epsilon_{1}^{T}\epsilon_{2}\ (\eta_{1}1+\epsilon_{1}^{\times})\epsilon_{2} + \epsilon_{1}\eta_{2} \end{matrix}\right]=q_{1}q_{2}$$

同理可证$q_{1}q_{2}=q_{2}^{(+)}q_{1}$

罗德里格斯公式的证明

在三维空间中，旋转矩阵R RR可以对坐标系（基向量组）进行刚性的旋转变换，基向量组中的向量是相互正交的且都为单位向量，那么R就是一个标准正交矩阵。 假设原坐标系基向量矩阵为B，旋转后的坐标系基向量矩阵为C $$B= \left[\begin{matrix}b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right]$$ $$C=RB=\left[\begin{matrix}r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \r_{yx} & r_{yy} & r_{yz}\r_{zx} & r_{zy} & r_{zz }\end{matrix} \right]\left[\begin{matrix}b_x & b_y & b_z \end{matrix} \right]$$ 旋转矩阵R就是从基向量矩阵B到基向量矩阵C的过渡矩阵。由于旋转矩阵R是标准3阶正交矩阵，故旋转矩阵R的自由度为3,这说明最少可以用三个变量来表示旋转矩阵R. 罗德里格斯公式首先要确定一个三维的单位向量$k=\left[\begin{matrix}k_x & k_y & k_z \end{matrix} \right]$,和一个标量$\theta$,共三个自由度



先考虑对一个向量作旋转，其中 v是原向量，三维的单位向量 $k=\left[\begin{matrix}k_x & k_y & k_z

\end{matrix} \right]$是旋转轴，$\theta$是旋转角度，$v_{rot}$是旋转后的向量。 先通过点积得到v在k方向的平行分量 $$v_{||}=(vk)k$$ 通过叉积得到v在k方向的正交分量 $$v_{⊥}=v-v_{||} = v-(vk)k=-k\times(k\times v)$$ $$\omega = k\times v$$ 根据图可以看出 $$v_{rot}=v_{||}+cos(\theta)v_{⊥}+sin(\theta)\omega$$ K的反对称矩阵为 $$K=\left[\begin{matrix} 0 & -k_z & k_y \ k_{z} & 0 & -k_{x} \ -k_{y} & k_{x} & 0\end{matrix} \right]$$ $$k\times v = Kv$$ 得到 $$v_{rot}=cos(\theta)v+k \times (k\times v) - cos(\theta)k \times (k\times v) + sin(\theta)(k\times v) $$ 根据叉积的性质，得到 $$v_{rot}=cos(\theta)v+(1- cos(\theta))K^{2}v + sin(\theta)(Kv) $$ $$v_{rot}=(cos(\theta)I+(1- cos(\theta))K^{2}v + sin(\theta)K)v $$ 将v替换为B和C,R，得到罗德里格斯公式 $$R = cos(\theta)I+(1- cos(\theta))K^{2}+ sin(\theta)K$$

四元数运算性质的验证

课程中介绍了单位四元数可以表达旋转。其中,在谈论用四元数 q 旋转点 p 时,结果为 $$p^{'}=qpq^{-1}$$ 此时 p ′ 必定为虚四元数(实部为零)。请你验证上述说法.上式亦可写成矩阵运算:p ′ = Qp。请根据你的推导,给出矩阵 Q。 可以使用第4题结果， $$p^{'}=q^{+}q^{-1(+)}p$$ 证明： 设 $$q = \left[\begin{matrix}\epsilon \ \eta \end{matrix}\right],q^{-1} = \left[\begin{matrix}-\epsilon \ \eta \end{matrix}\right]$$ 令 $$p = \left[\begin{matrix}r_{b} \ 0 \end{matrix}\right],p^{-1} = \left[\begin{matrix}r_{b}^{'} \ 0 \end{matrix}\right]$$ 则 $$p^{'}=q^{+}q^{-1(+)}p= \left[\begin{matrix}\eta I +\epsilon^{\times} & \epsilon \ -\epsilon^{T} & \eta \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\eta I -\epsilon^{\times} & \epsilon \ -\epsilon^{T} & \eta \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}r_{b} \ 0 \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}-(\eta I -\epsilon^{\times})^{2} & 0 \ 0 & -1 \end{matrix}\right] \left[\begin{matrix}r_{b} \ 0 \end{matrix}\right] $$ 可得 $$r_{b}^{'}=(-(\eta I-\epsilon^{\times})^{2}-\epsilon\epsilon^{T})r_{b}$$ $$R=-(\eta I-\epsilon^{\times})^{2}-\epsilon\epsilon^{T}$$

熟悉 C++11

设有类 A,并有 A 类的一组对象,组成了一个 vector。现在希望对这个 vector 进行排序,但排序的方式由 A.index 成员大小定义。那么,在 C++11 的语法下,程序写成

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <algorithm>

using namespace std;

class A {
public:
A(const int& i ) : index(i) {}
int index = 0;
};

int main() {
A a1(3), a2(5), a3(9);
vector<A> avec{a1, a2, a3};
std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return
a1.index<a2.index;});
for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
cout<<endl;
return 0;
}
```

1. for循环中使用auto遍历，作为vector里面成员的引用
2. 使用了lambda表达式
3. 在类定义中初始化非静态成员
4. vector初始化向量{a1,a2,a3}