

ESTUDIO DE PROPIEDADES METAMÓRFICAS PARA TESTING DE PROGRAMAS CUÁNTICOS

SINHUÉ GARCÍA GIL

GRADO EN MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID



Trabajo Fin Grado en Matemática Computacional

Fecha

Director:

Luis Fernando Llana Díaz

Resumen

Breve resumen del trabajo.

Palabras clave

- Computación cuántica
- Qiskit
- Algoritmo cuántico
- Propiedades metamórficas
- Deutsch-Jozsa
- Bernstein-Vazirani
- Algoritmo de Simon
- Transformada cuántica de Fourier (QFT)
- Estimación cuántica de la fase (QEP)
- Algoritmo de búsqueda de Grover

Abstract

English version of the abstract

Keywords

- Quantum computing
- Qiskit
- Quantum algorithm
- Metamorphic properties
- Deutsch-Jozsa
- Bernstein-Vazirani
- Simon's algorithm
- Quantum Fourier transform (QFT)
- Phase estimation (QEP)
- Grover's algorithm

Índice general

Índice	I
Introducción	I
1. Antecedentes	1
1.1. Introducción matemática	1
1.2. Introducción cuántica	2
1.3. Programación cuántica, Qiskit	3
1.3.1. Puertas cuánticas	3
1.3.2. Ruido	3
1.4. Propiedades Metamórficas / Testing metamórfico	3
2. Cuerpo	4
2.1. Algoritmos cuánticos	4
2.1.1. Suma	4
2.1.2. DJ	4
2.1.3. BV	4
2.1.4. Simon	4
2.1.5. QFT	4
2.1.6. QEP	4
2.1.7. Grover	4
2.2. Propiedades metamórficas	5
2.2.1. DJ	5
2.2.2. BV	5
2.2.3. Simon	5
3. Conclusiones y trabajo futuro	6
3.1. Conclusiones	6
3.2. Trabajo futuro	6
Bibliography	6

Introducción

metodología

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Introducción matemática

Para poder desarrollar y entender la mecánica cuántica, que presentaré a continuación, la programación cuántica y en particular, sus algoritmos, vamos a necesitar cierta base matemática y de notación. Quizás, las definiciones, que siguen este párrafo, pueden parecer aleatorias, aunque todo cobrará sentido conforme vayamos profundizando en la mecánica y programación cuántica.

Definimos un espacio de Hilbert, \mathcal{H} , como un \mathbb{C} -espacio vectorial dotado de un producto interno que es completo. En particular, como vamos a tratar solo \mathbb{C} -espacios vectoriales con producto interno finitos, va a ser completo directamente por ser finito.

Por el Teorema de representación de Riesz, tenemos que \mathcal{H} es anti-isomorfo a \mathcal{H}^* , por ser \mathbb{C} nuestro cuerpo base.

Denotaremos como ket, $|v\rangle$, a un vector v de \mathcal{H} . Análogamente, a toda transformación w de \mathcal{H}^* , la denotaremos como bra, $\langle w|$.

Veamos ahora distintas definiciones para operadores:

- Sea $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ continuo, se denomina adjunto del operador lineal \mathcal{A} al único operador $\mathcal{A}^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ talque $\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \langle v, \mathcal{A}^*w \rangle$.
- Se dice que $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador autoadjunto si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Por lo cual los autovalores de \mathcal{A} son reales.
- Llamaremos matriz hermitiana a la matriz A que determina el operador autoadjunto \mathcal{A} . De aquí obtenemos que A^* es la traspuesta conjugada de A .
- Se dice que $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ continuo, es unitario si $\langle v, w \rangle = \langle \mathcal{U}v, \mathcal{U}w \rangle$, que en particular es invertible.

Para finalizar con esta sección vamos a ver una manera de combinar dos espacios vectoriales, en particular, la forma de combinar dos espacios de Hilbert, que nos combine dos sistemas cuánticos en uno, hablamos del producto tensorial.

Sean \mathcal{H} y \mathcal{H}' dos espacios de Hilbert, llamaremos producto tensorial de \mathcal{H} y \mathcal{H}' , $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$, al espacio generado por

1.2. Introducción cuántica

La base principal para el comienzo de la computación cuántica fue el desarrollo de la física cuántica. Para poder entender mejor que variaciones, implicaciones y que herramientas matemáticas vamos a necesitar, vamos a ver los postulados de la mecánica cuántica y sus diferencias con la mecánica Newtoniana.

Para empezar, en mecánica clásica, un sistema de N partículas queda definido por un vector en un espacio $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ donde el primero define la posición y el segundo la velocidad. La evolución de este sistema se rige por la segunda Ley de Newton que relaciona la fuerza con la aceleración y la masa.

Por otra parte, en física cuántica, el estado y evolución de un sistema viene determinado por sus postulados (referencia a [martín](#), [wikipediaEN](#), [Nielsen](#)):

- **Primer postulado:** El estado en un sistema aislado, en un instante t , se corresponde con $|\varphi(t)\rangle$, en un espacio de Hilbert, \mathcal{H} .
- **Segundo postulado:**
 - Primer apartado: Cada medida \mathcal{A} esta descrita por un operador hermitiano A que actúa sobre \mathcal{H} , decimos que este operador es observable, debido a que sus autovectores forman una base de \mathcal{H} . El resultado de medir una cantidad \mathcal{A} debe ser uno de los autovalores correspondientes al observable A .
 - Segundo apartado: $Prob(\lambda_i) = \frac{||P_{|v_i\rangle}|\varphi(t)\rangle||^2}{|||\varphi(t)\rangle||^2} = \frac{|\langle v_i|\varphi(t)\rangle|^2}{|||\varphi(t)\rangle||^2}$
 - Tercer apartado: Si tras realizar una medición \mathcal{A} del estado $|\varphi(t)\rangle$ da como resultado a_n , entonces el estado del sistema colapsa a la proyección normal de $|\varphi(t)\rangle$ en el subespacio de autovectores asociado a a_n $P_{|v_n\rangle}|\varphi(t)\rangle$
- **Tercer postulado:**
 - La evolución de un vector $|\varphi(t)\rangle$ está determinado por la ecuación de Schrödinger, $i\hbar \frac{d|\varphi\rangle}{dt} = H|\varphi\rangle$. Donde H es el Hamiltoniano del sistema, que es un operador hermitiano fijo. Además se entiende $H(t)$ como un observable asociado a la energía total del sistema.
 - La evolución de un sistema aislado se describe por una transformación unitaria del estado inicial. $|\varphi(t)\rangle = U(t; t_0)|\varphi(t_0)\rangle$
- **Cuarto Postulado:** El espacio que representa un sistema compuesto es el producto tensorial del los espacios de cada componente del sistema. Es decir, si tuviéramos n componentes, el espacio total sería $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_n\rangle = |\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\rangle$, de forma notacional.

Directamente desde el primer postulado vamos a tomar el que consideraremos el sistema cuántico más simple, el qubit, que va a ser nuestra base en la programación cuántica. Un qubit es un espacio bidimensional, donde suponemos que tenemos la base ortonormal $|0\rangle$ y $|1\rangle$. De aquí podemos obtener la combinación lineal de cualquier vector de estado del qubit, aunque los vectores de estado deben de cumplir la condición de normalización, es decir, si $|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ con $a, b \in \mathbb{C}$, entonces $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

De igual manera, partiendo del tercer postulado, se podría ver que existe una correspondencia 1 a 1 entre el Hamiltoniano H , por ser hermitiano, y un operador unitario U . Estos operadores unitarios serán los que posteriormente usaremos en nuestros programas junto a los qubits.(Nielsen)

1.3. Programación cuántica, Qiskit

La programación cuántica se basa en la creación de un circuito, normalmente representado geoméricamente, donde se realizan operaciones (operadores unitarios) sobre los distintos qubits, así como sus mediciones.

Para realizar nuestros programas cuánticos y simulaciones nos vamos a apoyar en Qiskit, es un paquete de desarrollo libre creado por IBM para crear y manipular programas cuánticos así como realizara simulaciones. Ya sean teóricas o conectando nuestros programas con los ordenadores cuánticos de IBM. Esto nos dará unos resultados más realistas donde podremos apreciar el ruido"que hay actualmente en estos ordenadores.

La programación en Qiskit se basa en el lenguaje Python, por lo cual usaremos este a la hora de programar. Al igual que usaremos jupyter notebook, para una mejor visualización directa de lo que representa el código. Existiría otra opción, que sería generar los circuitos directamente en la página de IBM de forma geométrica.(qiskit)

1.3.1. Puertas cuánticas

Single quantum gates

1.3.2. Ruido

Probabilidades de simulación

1.4. Propiedades Metamórficas / Testing metamórfico

Paper

Capítulo 2

Cuerpo

2.1. Algoritmos cuánticos

Hilbert

2.1.1. Suma

Algoritmo de la suma

2.1.2. DJ

Algoritmo de Deutsch-Jozsa

2.1.3. BV

Algoritmo de Berstein- Vazirani

2.1.4. Simon

Algoritmo de Simon

2.1.5. QFT

Algoritmo de la transformada cuántica de Fourier

2.1.6. QEP

Algoritmo cuántico de estimación de fase

2.1.7. Grover

Algoritmo cuántico de búsqueda de Grover

2.2. Propiedades metamórficas

2.2.1. DJ

2.2.2. BV

2.2.3. Simon

Quiskit

Capítulo 3

Conclusiones y trabajo futuro

3.1. Conclusiones

Hilbert

3.2. Trabajo futuro

Postulados