

# ESTUDIO DE PROPIEDADES METAMÓRFICAS PARA TESTING DE PROGRAMAS CUÁNTICOS

SINHUÉ GARCÍA GIL

GRADO EN MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

---



Trabajo Fin Grado en Matemática Computacional

Fecha

Director:

Luis Fernando Llana Díaz

# Resumen

Breve resumen del trabajo.

**Palabras clave:** Computación cuántica, qiskit, propiedades metamórficas

# Abstract

English version of the abstract

**Keywords:** Quantum computing, qiskit, metamorphic properties.

# Índice general

<b>Índice</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Metodología . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	2
<b>2. Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción matemática . . . . .	3
2.2. Introducción cuántica . . . . .	4
2.3. Programación cuántica, Qiskit . . . . .	6
2.3.1. Puertas cuánticas . . . . .	6
2.3.2. Simulaciones . . . . .	6
2.3.3. Ruido . . . . .	6
2.4. Propiedades Metamórficas / Testing metamórfico . . . . .	6
<b>3. Algoritmos cuánticos</b>	<b>7</b>
3.1. Suma . . . . .	7
3.2. DJ . . . . .	7
3.3. BV . . . . .	7
3.4. Simon . . . . .	7
3.5. QFT . . . . .	7
3.6. QEP . . . . .	7
3.7. Grover . . . . .	7
<b>4. Propiedades metamórficas</b>	<b>8</b>
4.1. DJ . . . . .	8
4.2. BV . . . . .	8
4.3. Simon . . . . .	8
<b>5. Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>9</b>
5.1. Conclusiones . . . . .	9
5.2. Trabajo futuro . . . . .	9
<b>Bibliography</b>	<b>9</b>

# Capítulo 1

## Introducción

1.1. Metodología

1.2. Objetivos

# Capítulo 2

## Preliminares

Voy a intentar exponer brevemente las bases para poder entender y trabajar con el objetivo final del trabajo como son las propiedades metamórficas y en particular su aplicación a la computación cuántica.

Esta sección, que podría ser una simple continuación de la introducción, va a ser más extensa de lo que se podría esperar. Ya que para trabajar de forma cómoda sobre el tema a tratar, necesitamos un salto en conocimientos que se ha tenido que adquirir.

### 2.1. Introducción matemática

Para poder desarrollar y entender la mecánica cuántica, que presentaré a continuación, la programación cuántica y en particular, sus algoritmos, vamos a necesitar cierta base matemática y de notación. Quizás, las definiciones que siguen este párrafo pueden parecer aleatorias, aunque todo cobrará sentido conforme vayamos profundizando en la mecánica y programación cuántica.

Definimos un espacio de Hilbert,  $\mathcal{H}$ , como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial dotado de un producto interno que es completo. En particular, como vamos a tratar solo  $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales con producto interno finitos, va a ser completo directamente por ser finito.

Por el Teorema de representación de Riesz, tenemos que  $\mathcal{H}$  es anti-isomorfo a  $\mathcal{H}^*$ , por ser  $\mathbb{C}$  nuestro cuerpo base.

Denotaremos como ket,  $|v\rangle$ , a un vector  $v$  de  $\mathcal{H}$ . Análogamente, a toda transformación  $w$  de  $\mathcal{H}^*$ , la denotaremos como bra,  $\langle w|$ .

Veamos ahora distintas definiciones para operadores:

- Sea  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  continuo, se denomina adjunto del operador lineal  $\mathcal{A}$  al único operador  $\mathcal{A}^* : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  talque  $\langle \mathcal{A}v, w \rangle = \langle v, \mathcal{A}^*w \rangle$ .
- Se dice que  $\mathcal{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  es un operador autoadjunto si  $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ . Por lo cual los autovalores de  $\mathcal{A}$  son reales.
- Llamaremos matriz hermitiana a la matriz  $A$  que determina el operador autoadjunto  $\mathcal{A}$ . De aquí obtenemos que  $A^*$  es la traspuesta conjugada de  $A$ .
- Se dice que  $\mathcal{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  continuo, es unitario si  $\langle v, w \rangle = \langle \mathcal{U}v, \mathcal{U}w \rangle$ , que en particular es invertible.

Para finalizar con esta sección vamos a ver una manera de combinar dos espacios vectoriales, en particular, dos espacios de Hilbert que nos permite unir dos sistemas cuánticos, esta operación es el producto tensorial.

Sean  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  dos espacios de Hilbert, llamaremos producto tensorial de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$ ,  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ , al espacio que tiene como base a los  $|i\rangle \otimes |j\rangle$  donde  $|i\rangle$  y  $|j\rangle$  pertenecen a una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  respectivamente. (Nielsen)

Por definición el producto tensorial tiene la linealidad y asociatividad por la izquierda y por la derecha. Además los productos internos de  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{H}'$  inducen naturalmente un producto interno en  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  por lo que hereda la estructura y con ellos las nociones de adjunto, unitario, normalidad y hermitianidad.

Para entender mejor este producto, ya que tiene gran importancia en la mecánica cuántica, veamos su representación matricial como el producto de Kronecker, donde si  $A$  y  $B$  son 2 matrices, entonces:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix}$$

Así se puede observar la dimensión de la matriz con la que se trabaja al realizar la operación sobre sucesivas matrices o, como veremos a continuación, la unión de distintos sistemas cuánticos.

## 2.2. Introducción cuántica

La base principal para el comienzo de la computación cuántica fue el desarrollo de la física cuántica. Para poder entender mejor que variaciones e implicaciones tiene, vamos a ver los postulados de la mecánica cuántica y sus diferencias con la mecánica Newtoniana. Aquí encontrará sentido la base matemática presentada en 2.1. (referencia?)

Para empezar, en mecánica clásica, un sistema de  $N$  partículas queda definido por un vector en un espacio  $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$  donde las primeras coordenadas definen la posición y las últimas la velocidad. La evolución de este sistema se rige por la segunda Ley de Newton que relaciona la fuerza con la aceleración y la masa.

Por otra parte, en física cuántica, el estado y evolución de un sistema viene determinado por sus postulados que veremos a continuación (referencia a martín, wikipediaEN, Nielsen), así como una de las posibles interpretaciones que cada uno podría tener. Estos postulados nos ayudaran posteriormente a fijar la base de nuestros programas cuánticos.

### Postulados cinemáticos o de representación:

- **Primer postulado:** El estado en un sistema aislado, en un instante  $t$ , se corresponde con  $|\varphi(t)\rangle$ , en un espacio de Hilbert,  $\mathcal{H}$ .
- **Segundo Postulado:** El espacio que representa un sistema compuesto es el producto tensorial de los espacios de cada componente del sistema. Es decir, si tuviéramos  $n$  componentes, el espacio total sería  $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_n\rangle = |\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n\rangle$ , de forma notacional.

### Postulados dinámicos:

- **Tercer postulado:** Evolución probabilística, tenemos observador.
  - Primer apartado: Cada medida  $\mathcal{A}$  esta descrita por un operador hermitiano  $A$  que actúa sobre  $\mathcal{H}$ , decimos que este operador es observable, debido a que sus autovectores forman una base de  $\mathcal{H}$ . El resultado de medir una cantidad  $\mathcal{A}$  debe ser uno de los autovalores correspondientes al observable  $A$ .
  - Segundo apartado:  $Prob(\lambda_i) = \frac{||P_{|v_i\rangle}|\varphi(t)\rangle||^2}{||\varphi(t)\rangle||^2} = \frac{|\langle v_i|\varphi(t)\rangle|^2}{||\varphi(t)\rangle||^2}$
  - Tercer apartado: Si tras realizar una medición  $\mathcal{A}$  del estado  $|\varphi(t)\rangle$  da como resultado  $a_n$ , entonces el estado del sistema colapsa a la proyección normal de  $|\varphi(t)\rangle$  en el subespacio de autovectores asociado a  $a_n$ ,  $P_{|v_n\rangle}|\varphi(t)\rangle$ .
- **Cuarto postulado:** Evolución determinista.
  - Primer apartado: La evolución de un vector  $|\varphi(t)\rangle$  está determinado por la ecuación de Schrödinger,  $i\hbar\frac{d|\varphi\rangle}{dt} = H|\varphi\rangle$ . Donde  $H$  es el Hamiltoniano del sistema, que es un operador hermitiano. Además se entiende  $H(t)$  como un observable asociado a la energía total del sistema.
  - Segundo apartado: La evolución de un sistema aislado se describe por una transformación unitaria del estado inicial.  $|\varphi(t)\rangle = U(t;t_0)|\varphi(t_0)\rangle$ .

Directamente desde el primer postulado vamos a tomar el que consideraremos el sistema cuántico más simple, el qubit, que va a ser nuestra base en la programación cuántica. Un qubit es un espacio bidimensional, donde suponemos que tenemos la base ortonormal  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$ . De aquí podemos obtener la combinación lineal de cualquier vector de estado del qubit, aunque los vectores de estado deben de cumplir la condición de normalización, es decir, si  $|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  con  $a, b \in \mathbb{C}$ , entonces  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

De igual manera, partiendo del cuarto postulado, apartado 2, se podría ver que existe una correspondencia 1 a 1 entre el Hamiltoniano  $H$ , por ser hermitiano, y un operador unitario  $U$ . Estos operadores unitarios serán los que posteriormente usaremos en nuestros programas junto a los qubits.(Nielsen)



## 2.3. Programación cuántica, Qiskit

La programación cuántica se basa en la creación de un circuito, normalmente representado geoméricamente, donde se realizan operaciones (operadores unitarios) sobre los distintos qubits, así como sus mediciones. (quantum for inf)

Para realizar nuestros programas cuánticos y simulaciones nos vamos a apoyar en Qiskit, es un paquete de desarrollo libre creado por IBM para crear y manipular programas cuánticos así como realizara simulaciones(qiskit). Ya sean teóricas o conectando nuestros programas con los ordenadores cuánticos de IBM. Esto nos dará unos resultados más realistas donde podremos apreciar el ruido que hay actualmente en estos ordenadores.

La programación en Qiskit se basa en el lenguaje Python, por lo cual usaremos este a la hora de programar. Además, para una mejor visualización directa de lo que representa el código utilizaré jupyter notebook. Existiría otra opción, que sería generar los circuitos directamente en la página de IBM de forma geométrica.(qiskit)

Como se explicó en la sección 2.2, la base para nuestra programación va a ser el qubit, como unidad cuántica. A partir de esta base vamos a poder aplicar distintos operadores unitarios, si bien es cierto que podemos crear un operador unitario directamente con una matriz, habitualmente utilizaremos puertas cuánticas específicas que se estudian en la sección 2.3.1, ya que estas son las que se utilizan en los ordenadores cuánticos reales.

### 2.3.1. Puertas cuánticas

Pagine 173 (nielsen)

Con estas operaciones nos ayuda a poner los qubits en los distintos estados queridos que nos permitirá realizar nuestros programas cuánticos. Al fin y al cabo, un programa cuántico es una sucesión de operaciones (o puertas) aplicadas sobre los qubits del sistema.

### 2.3.2. Simulaciones

### 2.3.3. Ruido

Probabilidades de simulación

## 2.4. Propiedades Metamórficas / Testing metamórfico

Paper

# Capítulo 3

## Algoritmos cuánticos

### 3.1. Suma

Algoritmo de la suma

### 3.2. DJ

Algoritmo de Deutsch-Jozsa

### 3.3. BV

Algoritmo de Bernstein- Vazirani

### 3.4. Simon

Algoritmo de Simon

### 3.5. QFT

Algoritmo de la transformada cuántica de Fourier

### 3.6. QEP

Algoritmo cuántico de estimación de fase

### 3.7. Grover

Algoritmo cuántico de búsqueda de Grover

# Capítulo 4

## Propiedades metamórficas

4.1. DJ

4.2. BV

4.3. Simon

# Capítulo 5

## Conclusiones y trabajo futuro

### 5.1. Conclusiones

Hilbert

### 5.2. Trabajo futuro

Postulados