ESTUDIO DE PROPIEDADES METAMÓRFICAS PARA TESTING DE PROGRAMAS CUÁNTICOS

SINHUÉ GARCÍA GIL

GRADO EN MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Trabajo Fin Grado en Matemática Computacional

Fecha

Director:

Luis Fernando Llana Díaz

Resumen

Breve resumen del trabajo.

Palabras clave

- Computación cuántica
- Qiskit
- Algoritmo cuántico
- Propiedades metamórficas
- Deutsch-Jozsa
- Bernstein-Vazirani
- Algoritmo de Simon
- Transformada cuántica de Fourier (QFT)
- Estimación cuántica de la fase (QEP)
- Algoritmo de busqueda de Grover

Abstract

English version of the abstract

Keywords

- Quantum computing
- Qiskit
- Quantum algorithm
- Metamorphic properties
- Deutsch-Jozsa
- Bernstein-Vazirani
- Simon's algorithm
- Quantum Fourier transform (QFT)
- Phase estimation (QEP)
- Grover's algorithm

Índice general

Introducción

metodologia

Capítulo 1

Antecedentes

1.1. Introducción matemática

Para poder desarrollar y entender la mecánica cuántica, que presentaré a continuación, la programación cuántica y en particular, sus algoritmos, vamos a necesitar cierta base matemática y de notación. Quizás, las definiciones, que siguen este párrafo, pueden parecer aleatorias, aunque todo cobrará sentido conforme vayamos profundizando en la mecánica y programación cuántica.

Definimos un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$, como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial dotado de un producto interno que es completo. En particular, como vamos a tratar solo $\mathbb{C}$-espacios vectoriales con producto interno finitos, va a ser completo directamente por ser finito.

Por el Teorema de representación de Riesz, tenemos que $\mathcal{H}$ es anti-isomorfo a $\mathcal{H}^*$, por ser $\mathbb{C}$ nuestro cuerpo base.

Denotaremos como ket, $|v\rangle$, a un vector v de $\mathcal{H}$. Análogamente, a toda transformación w de $\mathcal{H}^*$, la denotaremos como bra, $\langle w|$.

Veamos ahora distintas definiciones para operadores:

- Sea $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ continuo, se denomina adjunto del operador lineal $\mathcal{A}$ al único operador $\mathcal{A}^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ talque $< \mathcal{A}v, w > = < v, \mathcal{A}^* w >$.

- Se dice que $\mathcal{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador autoadjunto si $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Por lo cual los autovalores de $\mathcal{A}$ son reales.

- Llamaremos matriz hermitiana a la matriz A que determina el operador autoadjunto $\mathcal{A}$. De aquí obtenemos que $\mathcal{A}^*$ es la traspuesta conjugada de $\mathcal{A}$.

- Se dice que $\mathcal{U} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ continuo, es unitario si $< v, w > = < \mathcal{U}v, \mathcal{U}w >$, que en particular es invertible.

Para finalizar con esta sección vamos a ver una manera de combinar dos espacios vectoriales, en particular, la forma de combinar dos espacios de Hilbert, que nos combine dos sistemas cuánticos en uno, hablamos del producto tensorial.

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$ dos espacios de Hilbert, llamaremos producto tensorial de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$, al espacio generado por

1.2. Introducción cuántica

La base principal para el comienzo de la computación cuántica fue el desarrollo de la física cuántica. Para poder entender mejor que variaciones, implicaciones y que herramientas matemáticas vamos a necesitar, vamos a ver los postulados de la mecánica cuántica y sus diferencias con la mecánica Newtoniana.

Para empezar, en mecánica clásica, un sistema de N partículas queda definido por un vector en un espacio $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N}$ donde el primero define la posición y el segundo la velocidad. La evolución de este sistema se rige por la segunda Ley de Newton que relaciona la fuerza con la aceleración y la masa.

Por otra parte, en física cuántica, el estado de un sistema de partículas lo definimos como un vector en un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$. La evolución del sistema de partículas ahora viene determinada por la ecuación de Schrödinger, $i\hbar\frac{d}{dt}\varphi(t) = H(t)\varphi(t)$. Donde conoceremos a $H(t)$ como el hamiltoniano, que es un endomorfismo en $\mathcal{H}$, estos serán los operadores que usaremos posteriormente.

Los postulados son:

- **Primer postulado:** El estado en un sistema aislado, en un instante t, se corresponde con $|\varphi(t)\rangle$, en un espacio de Hilbert, $\mathcal{H}$.

- **Segundo postulado:**

  - Primer apartado: Cada medida $\mathcal{A}$ esta descrita por un operador hermitiano A que actúa sobre $\mathcal{H}$, decimos que este operador es observable, debido a que sus autovectores forman una base de $\mathcal{H}$. El resultado de medir una cantidad $\mathcal{A}$ debe ser uno de los autovalores correspondientes al observable A.

  - Segundo apartado: $Prob(\lambda_i) = \dfrac{||P_{|v_i\rangle}|\varphi(t)\rangle||^2}{|||\varphi(t)\rangle||^2} = \dfrac{|\langle v_i|\varphi(t)\rangle|^2}{|||\varphi(t)\rangle||^2}$

  - Tercer apartado: Si tras realizar una medición $\mathcal{A}$ del estado $|\varphi(t)\rangle$ da como resultado a_n, entonces el estado del sistema colapsa a la proyección normal de $|\varphi(t)\rangle$ en el subespacio de autovectores asociado a a_n $P_{|v_n\rangle}|\varphi(t)\rangle$

- **Tercer postulado:**

  - La evolución de un vector $|\varphi(t)\rangle$ está determinado por la ecuación de Schrödinger, que definimos anteoriomente. Donde el Hamiltoniano, H(t), es un observable asociado a la energía total del sistema.

  - La evolución de un sistema aislado se destribe por una transformación unitaria del estado inicial. $|\varphi(t)\rangle = U(t; t_0)|\varphi(t_0)\rangle$

1.3. Programación cuántica, Quiskit

Quiskit

1.3.1. Puertas cuánticas

Single quantum gates

1.3.2. Ruido

Prbabilidades de simulación

1.4. Propiedades Metamórficas / Testing metamórfico

Paper

Capítulo 2

Cuerpo

2.1. Algoritmos cuánticos

Hilbert

2.1.1. Suma

Algoritmo de la suma

2.1.2. DJ

Algoritmo de Deutsch-Jozsa

2.1.3. BV

Algoritmo de Berstein- Vazirani

2.1.4. Simon

Algoritmo de Simon

2.1.5. QFT

Algoritmo de la transformada cuántica de Fourier

2.1.6. QEP

Algoritmo cuántico de estimación de fase

2.1.7. Grover

Algoritmo cuántico de busqueda de Grover

2.2. Propiedades metamórficas

2.2.1. DJ

2.2.2. BV

2.2.3. Simon

Quiskit

Capítulo 3

Conclusiones y trabajo futuro

3.1. Conclusiones

Hilbert

3.2. Trabajo futuro

Postulados