

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta *za matematiko in fiziko*



# Superprevodni kvantni spomin

Seminar v 3. letniku prve bolonjske stopnje  
študijskega programa Fizika

Avtor: Vid Eržen  
Mentor: prof. dr. Dragan Mihailović

Ljubljana, 21. april 2021

# 1 Povzetek

Seminar opisuje superprevodne kvantne bite. Začnemo z dokazom “no-cloning” teorema in njegovimi posledicami, nato pa pozornost preusmerimo konstrukciji superprevodnih vezij. Najprej opišemo delovanje Josephsonovega spoja in pojasnimo, zakaj nam sploh omogoča izdelavo kvantnih bitov. Nato naredimo pregled nabojnega in pretočnega kubita, ki sta danes najbolj uporabljana tipa superprevodnih kubitov. Končamo z opisom manipulacijskih tehnik takih sistemov, ki so glavni razlog za veliko popularnost superprevodnih kvantnih računalnikov.

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Povzetek</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>“No-cloning” teorem</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Kubit</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Superprevodni kubi</b>	<b>5</b>
5.1	Kvantizacija LC resonatorja . . . . .	5
5.2	Josephsonov spoj . . . . .	6
5.3	Nabojni kubit . . . . .	10
5.4	Pretočni kubit . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Manipulacija, sklapljanje in branje superprevodnih kubitov</b>	<b>12</b>
6.1	Manipulacija kubitov . . . . .	12
6.2	Sklapljanje kubitov . . . . .	14
6.3	Branje Kubitov . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Zaključek</b>	<b>16</b>

## 2 Uvod

Zmožnost nadziranja kvantnih sistemov in interakcij med njimi odpira svet kvantnega računalništva. Vendar zakaj bi se sploh ukvarjali s tem, če imamo (super)računalnike, s katerimi smo uspeli narediti že marsikatero pomembno stvar? Na kratko: ker verjamemo, da bomo s kvantnimi računalniki uspeli narediti še precej več. Najbolj zanimiv primer bi bil zagotovo simulacija velikih prepletenih kvantnih sistemov. Tega se očitno ne da učinkovito narediti v klasičnem svetu, kjer bi že samo za shranjevanje stanja prepletenega sistema z nekaj 100 kubiti potrebovali praktično neomejeno količino spomina, kaj šele, da bi računali njegov časovni razvoj.

V tem seminarju se zato posvetimo osnovnim gradnikom kvantnih računalnikov, dvonivojskim sistemom, ki jih imenujemo kvantni biti oziroma kubiti in jih uporabljamo za shranjevanje stanj. Možnih implementacij kvantnih bitov je na prvi pogled veliko. Naša izbira se skrči, ko od sistema zahtevamo, da je kar se da dobro izoliran od okolice, da imamo nad njim dober nadzor, da smo sposobni pripraviti kubit v nekem poljubnem začetnem stanju, ter da na njem lahko izvajamo dovolj natančne meritve.

Zelo težko je zadostiti vsem pogojem hkrati: primer so sistemi, ki so zelo dobro izolirani od okolice in imajo zato zelo dolg koherentni čas, vendar jih zaradi te šibke sklopitve z okoljem zelo težko manipuliramo. Njihovo nasprotje so superprevodna vezja, ki trenutno predstavljajo najobetavnejšo implementacijo kvantnih bitov. To so namreč makroskopski sistemi in jih že zaradi same velikosti ne moremo popolnoma izolirati od okolice. Da bi se čim bolj izognili dekoherenci take procesorje ohladimo na  $T \approx 10$  mK, v električnih vezjih uporabljamo vse mogoče filtre signalov, vse skupaj pa še zapremo v posebno škatlo, da preprečimo vdor elektromagnetnega valovanja iz okolice.

Toda tudi to ni dovolj, zato se bomo morali prej ali slej začeti posluževati tehnik popravljanja napak (ang. “error correction”). Za pričakovati je, da bomo z njimi nekoč sposobni narediti krhke kvantne bite uspeli odporne na zunanje motnje. Glavna ideja teh tehnik je, da povežemo več fizičnih kvantnih bitov v prepletene skupine, ki so potem manj občutljive na dražljaje iz okolice. Ta tema je zelo obširna in bi si zaslužila poseben seminar.

Začnimo pa s t.i. “no-cloning” teoremom. To je sicer tema, ki igra pomembnejšo vlogo na področju kvantnih omrežij, vendar ni zapletena, zato jo brez težav obdelamo tudi tu. Pa še zabavna je!

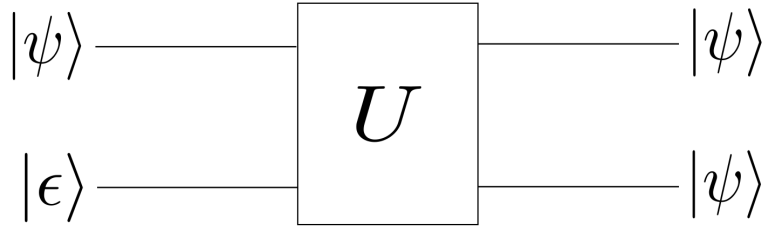
## 3 “No-cloning” teorem

Ena najbolj osnovnih stvari, kar jih lahko počnemo s klasičnim spominom je kopiranje stanj. Pa pogledjmo, če se da kaj podobnega narediti tudi v kvantnem svetu. Zamislimo si dva sistema:  $A$  in  $B$ . Prvi sistem naj bo v neznanem stanju  $|\psi\rangle_A$ , drugi pa v stanju  $|\epsilon\rangle_B$ . Stanji naj bosta tudi normirani. S kloniranjem hočemo priti do končnega stanja  $|\psi\rangle_A |\psi\rangle_B$ . Zamislimo si tudi, da imamo zmožnost nadziranja Hamiltonijana sistema  $H$ , ki določa časovni razvoj, ki je podan z unitarnim operatorjem  $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ . Zanima nas torej, ali obstaja tak  $U$ , da bo veljalo

$$U(|\psi\rangle_A |\epsilon\rangle_B) = e^{i\delta(\psi, \epsilon)} |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B. \quad (1)$$

Ker v naprej nimamo nobene informacije o stanju, ki ga želimo klonirati, bi moral tak operator  $U$  narediti kopijo poljubnega stanja: poleg stanja  $|\psi\rangle_A$ , bi morali biti sposobni narediti kopijo stanja  $|\varphi\rangle_A$ . Poleg enačbe (1) bi moralo torej veljati tudi

$$U(|\varphi\rangle_A |\epsilon\rangle_B) = e^{i\delta(\varphi, \epsilon)} |\varphi\rangle_A |\varphi\rangle_B. \quad (2)$$



Slika 1: Proces kloniranja splošnega stanja  $|\psi\rangle$ , če bi bilo to dovoljeno.

Sedaj lahko hermitsko adjungiramo enačbo (2) in jo pomnožimo z enačbo (1)

$$\begin{aligned} (\langle\varphi|_A \langle\epsilon|_B) U^\dagger U (|\psi\rangle_A |\epsilon\rangle_B) &= \langle\varphi|_A \langle\varphi|_B e^{-i\delta(\varphi,\epsilon)} e^{i\delta(\psi,\epsilon)} |\psi\rangle_A |\psi\rangle_B \\ \langle\varphi|\psi\rangle \langle\epsilon|\epsilon\rangle &= e^{i(\delta(\psi,\epsilon)-\delta(\varphi,\epsilon))} \langle\varphi|\psi\rangle^2. \end{aligned}$$

Predpostavili smo, da so začetna stanja normalizirana, torej  $\langle\epsilon|\epsilon\rangle = 1$ . Dobili smo enačbo

$$|\langle\varphi|\psi\rangle| = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2,$$

ki ima dve rešitvi:  $|\langle\varphi|\psi\rangle| = 1$ , iz česar sledi  $|\varphi\rangle = e^{i\alpha} |\psi\rangle$ , oziroma  $|\psi\rangle$  in  $|\phi\rangle$  sta isti stanji (do nepomembne globalne faze natanačno) in  $|\langle\varphi|\psi\rangle| = 0$ , kar pomeni da sta stanji ortogonalni. Uspeli smo torej skonstruirati napravo, ki lahko kopira le ortogonalna stanja. Vzemimo za primer dvonivojski sistem, na primer spin delca. Teorija nam v tem primeru dopušča, da naredimo napravo, ki bo lahko delala kopije le dveh stanj, na primer  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ , ali  $(|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ , itd., ne da pa se skonstruirati naprave, ki bo delala kopije stanj  $|0\rangle$  in  $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ . To je enakovredno izjavi, da v kvantni mehaniki ne moremo zanesljivo ločiti neortogonalnih stanj. Ne da se torej narediti univerzalne klonirne naprave, ki bi delala kopije poljubnega stanja, od tod tudi ime “no-cloning” teorem.

Glede na to, da je klasična mehanika le poseben primer kvantne mehanike, moramo biti sposobni, vsaj v kakšni limiti, reproducirati rezultate klasične mehanike v okviru kvantne. Na to, da je dovoljeno klonirati ortogonalna stanja smo torej po tihem upali, ker s tem zajamemo klasični svet, kjer smo sposobni narediti poljubno število kopij stanj  $|0\rangle$  in  $|1\rangle$ .

So pa v 90. letih odkrili, da se da delati nepopolne kopije poljubnega stanja na dva načina. Lahko naredimo kopijo, ki je originalnemu stanju po nekem kriteriju dovolj blizu. V primeru kubitov, bi to pomenilo, da sta si vektorja stanj dovolj blizu na Blochovi sferi. Druga možnost pa je, da poskusimo narediti popolno kopijo, vendar tak postopek ne uspe vedno. Tej temi se v seminarju ne bomo konkretnjeje posvetili, pregled področja je narejen v [5].

Omenimo za konec še splošeno različico teorema: “no-broadcasting” teorem. V našem dokazu smo predpostavili, da je stanje, ki ga kloniramo čisto (tako, kjer gostotno matriko lahko zapišemo kot  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ ). Dokaz “No-broadcasting” teorema sploši prepoved kloniranja tudi na mešana stanja (tista, za katera zapišemo gostotno matriko kot  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ ), vendar je z dokazom tega teorema nekaj več dela in ne pripomore veliko k boljšemu razumevanju.

## 4 Kubit

Za implementacijo kubitov lahko uporabimo kakršenkoli kvanten sistem, ki ga opišemo z valovno funkcijo

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle. \quad (3)$$

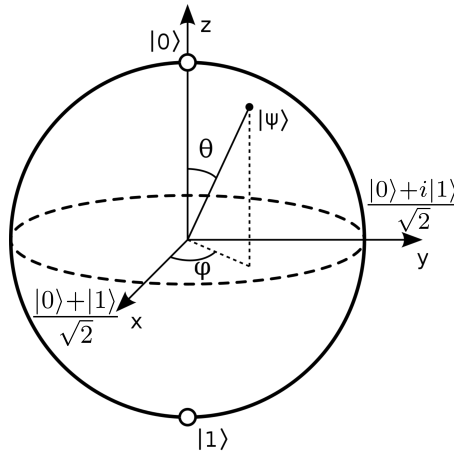
Najbolj naravna izbira so seveda dvonivojski kvantni sistemi. Ob tem takoj pomislimo na delec s spinom  $1/2$ , in mnogi kvantni računalniki dejansko delujejo (vsaj v teoriji) na tem principu. Za lastni stanji kubita takega sistema si izberemo obe projekciji spina ( $|\uparrow\rangle$  in  $|\downarrow\rangle$ ), ki se v prisotnosti magnetnega polja energijsko razcepita in ju na ta način lahko ločimo.

Ni pa nujno, da je sistem, ki si ga izberemo za implementacijo kubitov, že po naravi dvonivojski. Lahko ima neskočno lastnih stanj, vendar moramo biti v tem primeru sposobni izolirati le dve stanji. Najenostavnejši zgled je delec v neskončni potencialni jami. Če bi na nek način znali preprečiti prehode delca v višja energijska stanja, bi si lahko za stanja kubita izbrali najnižja nivoja. V tem primeru pozabimo na vsa višja energijska stanja in zapišemo stanje sistema z enačbo

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} (a|1\rangle + e^{-i\omega t}b|2\rangle) \propto e^{-i\omega t/2} (ae^{i\omega t/2}|1\rangle + be^{-i\omega t/2}|2\rangle) \propto e^{i\omega\sigma_z t/2} |\psi(0)\rangle. \quad (4)$$

Tu  $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$  označuje energijsko razliko med stanjema,  $\sigma_z$  pa Paulijevo matriko  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Sproti smo izpuščali nepomembne globalne faze in zato zapisali znak za sorazmernost namesto enačaja.

Če hočemo naš sistem uporabljati kot kubit, moramo imeti nad njim popoln nadzor. S tem mislimo predvsem na to, da smo sposobni preiti iz poljubnega začetnega v poljubno končno stanje. Spomnimo se sedaj na to, da lahko stanje vsakega dvonivojskega sistema predstavimo z vektorjem na Blochovi sferi (slika 2).



Slika 2: Blochova sfera, na kateri lahko predstavimo poljubno stanje dvonivojskega kvantnega sistema [13].

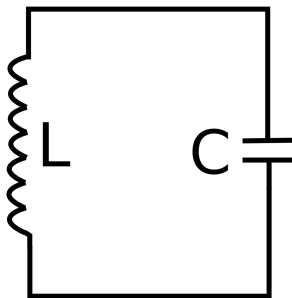
Imeti popoln nadzor nad kubitom torej pomeni, da moramo biti zmožni opraviti poljubno rotacijo vektorja stanja na Blochovi sferi. Za rotacijo vektorja  $|\psi\rangle$  okoli osi  $\hat{n}$  za kot  $\vartheta$  iz ur kvantne mehanike vemo, da jo lahko zapišemo kot  $e^{-i\frac{\vartheta}{2}\hat{n}\cdot\sigma} |\psi\rangle$ , kjer je  $\sigma$  vektor Paulijevih matrik. Kot primer vzemimo rotacijo okrog osi  $z$ , ki jo zapišemo kot  $e^{-i\frac{\vartheta}{2}\sigma_z} |\psi\rangle$ . Če to primerjamo z enačbo (4), vidimo, da za rotacijo okrog osi  $z$  za kot  $\vartheta = \omega t$  poskrbi že energijska razlika med nivojema.

Po drugi strani sledi direktno iz Schrödingerjeve enačbe  $|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} |\psi(0)\rangle$ , iz česar spet iz primerjave z enačbo (4) vidimo, da je delec na najnižjih energijskih nivojih podvržen hamiltonianu  $H = -\hbar\omega\sigma_z/2$ . Ugotovili smo, da hamiltonian, ki je sorazmeren  $\sigma_z$ , generira rotacije okrog osi  $z$ . To seveda posplošimo na ostale osi. Če bi znali skonstruirati še rotacije okrog osi  $x$  ali  $y$  bi lahko to že uporabljali kot kubit.

Neskončna potencialna jama je sicer zelo enostavna za obravnavo, ima pa eno težavo: idealne potencialne jame v naravi ni, in zato tak sistem ni najbolj primeren za implementacijo kubita. Je pa zato narava polna harmonskih oscilatorjev, kar bomo v tem seminarju s pridom izkoristili.

## 5 Superprevodni kubiti

### 5.1 Kvantizacija LC resonatorja



Slika 3: Shema LC resonatorja [4].

S konstrukcijo superprevodnega kvantnega bita začnimo pri enostavnem električnem krogu, ki vsebuje kondenzator s kapaciteto  $C$  in tuljavo z induktivnostjo  $L$  - LC resonatorjem, ki je prikazan na sliki 3. Energija v takem krogu je shranjena v električnem in magnetnem polju in jo lahko zapišemo kot

$$H = \frac{Q^2}{2C} + \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Opazimo, da ta hamiltonian izgleda zelo podobno tistemu za harmonski oscilator, z nekaj spremembami:

$$\begin{aligned} p &\longrightarrow Q, \\ x &\longrightarrow \Phi, \\ m &\longrightarrow C. \end{aligned}$$

Lastna frekvenca take nihajnega kroga je  $\omega = 1/\sqrt{LC}$ .

Dinamiko takega kroga lahko brez težav obravnavamo tudi v kvantnem režimu. Lahko se vprašamo, ali je to sploh smiselno, če smo takih oscilatorjev vajeni že od prvih ur fizike in še nikoli nismo niti pomislili, da bi lahko imeli diskretne energijske nivoje. Odgovor je v tem, da so energijski nivoji običajno tako blizu skupaj, da jih zaradi termičnih fluktuacij ne opazimo. Če pa sestavimo resonator z dovolj visoko lastno frekvenco (običajno reda velikosti nekaj gigahertzev), tako da so energijske razlike med nivoji dovolj velike in ga močno ohladimo (na  $< 100$  mK), pa kvantna narava sistema pride do izraza, saj so energijske razlike  $\hbar\omega$  so v takem režimu primerljive s termično energijo  $k_B T$ . Kapacitivnost in induktivnost sta odvisna le od geometrijskih lastnosti elementov vezja, kar pomeni da moramo, če hočemo narediti energijske razlike čim večje, resonator narediti čim manjši.

Samo ohladitev in izdelava zelo majhnih oscilatorjev pa še ni dovolj. Iz našega sistema moramo izločiti tudi kakršnokoli disipacijo energije, sicer se bo oscilator vedno relaksiral v osnovno stanje in potem ne bomo mogli izkoriščati moči kvantne mehanike (superpozicije stanj). Za to

poskrbimo na precej enostaven način: vse elemente vezja izdelamo iz superprevodnih elementov, za katere vemo, da električni tok po njih teče brez upora in tako preprečimo kakršnekoli energijske izgube.

Če primerjamo LC resonator z mehanskim nihalom ugotovimo, da magnetni pretok ustreza poziciji delca, naboj pa gibalni količini. Zaradi te podobnosti naj prevzameta magnetni pretok in naboj tudi komutatorsko relacijo  $[\Phi, Q] = i\hbar$ , ki jo poznamo iz osnov kvantne mehanike. Tako kot smo navajeni pri obravnavi harmonskega oscilatorja, tudi tu vpeljemo kreacijski in anihilacijski operator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z}} (\Phi + iZQ),$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar Z}} (\Phi - iZQ).$$

$Z = \sqrt{L/C}$  označuje impedanco resonatorja. S pomočjo kreacijskega in anihilacijskega operatorja ter komutacijske zveze lahko hamiltonian pretvorimo v znano zvezo

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right).$$

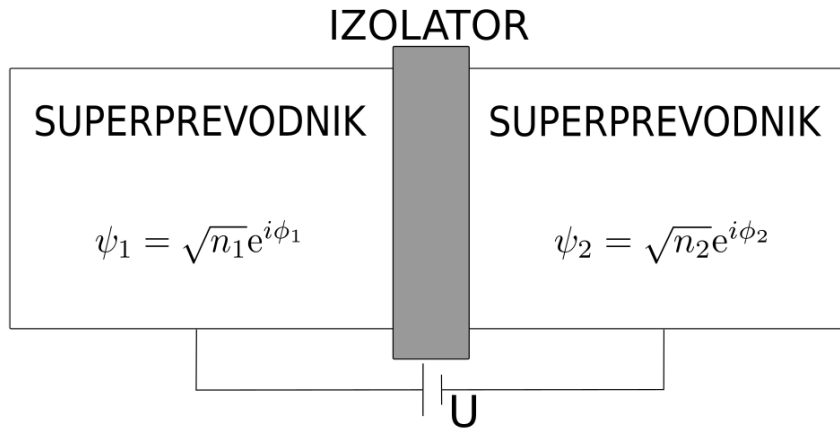
Za harmonski oscilator že poznamo rešitve: energijski nivoji so ekvidistantni z energijskimi razlikami  $\Delta E = \hbar\omega$ . Toda takega sistema ne moremo uporabiti kot kubita, ker ne moremo izolirati le dveh energijskih nivojev, ker so energijske razlike med njimi enake. Zakaj to predstavlja problem? Pomagajmo si z analogijo z atomi. Če se elektron v atomu relaksira iz stanja  $n = 2$  v stanje  $n = 1$  pri tem izseva foton, ki ustreza energijski razliki med obema nivojema. Enak proces poteka tudi v obratno smer. Prehod  $1 \rightarrow 2$  lahko vzbudimo le s fotoni določene valovne dolžine. Podobno bomo počeli tudi s superprevodnimi vezji: njihovo stanje bomo upravljali z mikrovalovi z valovno dolžino, ki ustreza energijski razliki med stanji. Tu pa naletimo na glavno težavo harmonskega oscilatorja: ne moremo preprečiti prehodov v višja lastna stanja sistema, ker so vse energijske razlike enako velike.

Lepo bi bilo torej, če bi lahko v naš sistem vnesli nekaj anharmonskosti: na ta način energijski nivoji ne bi bili več enakomerno razporejeni, in tako bi lahko uporabili na primer najnižji stanji za implementacijo kubita. Tak sistem bi lahko manipulirali z mikrovalovi s frekvenco  $\omega_{01} = (E_1 - E_0)/\hbar$ . Če bi uspeli narediti sistem, kjer bi se frekvenca  $\omega_{10}$  dovolj razlikovala od  $\omega_{12}, \omega_{23}, \dots$ , bi bili lahko prepričani, da sistem ne bo zašel v neželjena stanja. To bomo poskusili narediti v naslednjem poglavju o Josephsonovem spoju.

## 5.2 Josephsonov spoj

Josephsonov spoj je naprava, sestavljena iz dveh superprevodnikov, ki sta med sabo povezana z izolatorjem. Superprevodna otoka nato lahko sklenemo in na ta način ustvarimo električni krog, ki ga vidimo na sliki 4. Po taki napravi teče tok tudi, kadar nanj ne priključimo nobene napetosti. Pojav je prvi odkril 22-letni Brian Josephson leta 1962, za kar je prejel tudi Nobelovo nagrado. Poglejmo si zakaj do tega pride.

V superprevodnikih je pri dovolj nizkih temperaturah za elektrone energijsko ugodneje, če se povežejo v t.i. imenovane Cooperjeve pare. S tem, zakaj in kako se to zgodi, se v tem seminarju ne bomo ukvarjali, zato privzemimo, da se to pač zgodi. Vsak elektron zase je fermion, na nastali par pa lahko gledamo kot na nov delec z nabojem  $q = -2e$  in spinom 0, torej ga



Slika 4: Shema Josephsonovega spoja

obravnavamo kot bozon. Za pare torej vemo, da so lahko ob dovolj nizki temperaturi vsi v najnižjem energijskem stanju sistema, ki ga opišemo z nastavkom za valovno funkcijo

$$\psi = \sqrt{n(\mathbf{r})}e^{i\phi(\mathbf{r})}. \quad (5)$$

Z  $n(\mathbf{r})$  je označena številska gostota Cooperjevih parov, s  $\phi(\mathbf{r})$  pa neka faza. Z nekaj računanja lahko pridobimo nekaj intuicije, kaj predstavlja faza  $\phi$ . Velja namreč, da po superprevodniku s tako valovno funkcijo teče gostota električnega toka

$$\mathbf{j} = \frac{q\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{q\hbar n}{m} \nabla \phi.$$

Rezultat velja, če v okolici superprevodnika ni magnetnega polja (sicer pa naredimo standardno zamenjavo  $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla + q\mathbf{A}$  in računamo še nekoliko dlje). Vidimo, da torej nekonstantna funkcija  $\phi(\mathbf{r})$  povzroča tok parov. S kratkim klasičnim računom vidimo, da imajo taki gibajoči se pari gibalno količino  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m\mathbf{j}}{nq} = \hbar\nabla\phi$ . Najnižje energijsko stanje sistema je tisto, kjer so delci brez kinetične energije, torej  $\mathbf{p} = 0$ , iz česar sledi  $\mathbf{j} = 0$ , kar pomeni, da ima sistem najnižjo energijo, ko velja  $\nabla\phi = 0$ . Z nekaj mahanja z rokami smo torej prišli do sklepa, da je v ravnovesju faza valovne funkcije po celotnem kosu superprevodnika konstantna.

Ko povežemo dva kosa superprevodnika s tanko plastjo izolatorja, s tem damo delcem možnost, da tunelirajo skozi potencialno plast. Označimo s  $\psi_1$  verjetnostno amplitudo, da najdemo delec na levi, s  $\psi_2$  pa verjetnostno amplitudo, da najdemo delec na desni strani. Dinamiko takega sistema, Josephsonovega spoja, opisujeta sklopljeni Schrödingerjevi enačbi

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= V_1 \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= V_2 \psi_2 + K \psi_1, \end{aligned}$$

kjer smo vpeljali sklopitveno konstanto  $K$ . Če med obe strani priključimo neko zunanjo napetost  $U$  (slika 4), in postavimo ničlo napetosti na sredino, da je problem lepo simetričen, velja  $V_1 = -V_2 = -qU/2 = eU$  in lahko enačbi zapišemo kot

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= eU \psi_1 + K \psi_2 \\ i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= -eU \psi_2 + K \psi_1. \end{aligned}$$



Ta sistem rešujemo z nastavkom za valovno funkcijo osnovnega stanja v superprevodniku (5), vendar upoštevajmo, da se lahko gostota elektronov in faza na obeh straneh razlikujeta. Zapišimo torej nastavka kot

$$\psi_1 = \sqrt{n_1}e^{i\phi_1}, \quad \psi_2 = \sqrt{n_2}e^{i\phi_2}$$

in ju vstavimo v zgornji sistem enačb. Z nekaj truda dobimo 4 diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= \frac{2K\sqrt{n_1n_2}}{\hbar} \sin \delta, \\ \dot{n}_2 &= -\frac{2K\sqrt{n_1n_2}}{\hbar} \sin \delta, \\ \hbar\dot{\phi}_1 &= -eU - K\sqrt{\frac{n_2}{n_1}} \cos \delta, \\ \hbar\dot{\phi}_2 &= eU - K\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \cos \delta. \end{aligned}$$

Z  $\delta = \phi_2 - \phi_1$  je označena razlika med fazama na spoju. Prvi dve enačbi nam očitno govorita o toku delcev prek spoja: toliko, za kolikor se na eni strani spoja zmanjša številska gostota parov, se na drugi strani poveča. Vidimo torej, da je tok delcev prek spoja sorazmeren s sinusom fazne razlike, tako da lahko zapišemo

$$I(\delta) = I_0 \sin \delta. \quad (6)$$

V zadnjih dveh enačbah ni takoj očitno, kaj bi lahko naredili, vendar se spomnimo, da do sedaj še nismo upoštevali, da sta superprevodna otoka povezana z žico, in zato presežek naboja, ki priteče na otok prek spoja, lahko takoj odteče po žici. V praksi sta tako gostoti elektronov na obeh otokih približno konstantni, in kar enaki neki normalni gostoti elektronov v superprevodniku  $n_1 = n_2 = n_0$ . Ta argument se mogoče zdi nekoliko privlečen za lase. Če je gostota elektronov na obeh otokih enaka in konstantna, zakaj potem ni  $\dot{n}_1 = \dot{n}_2 = 0$ ? Odgovor je v tem, da nam ti dve enačbi ne kažeta celotne slike. Predstavljajmo si, da sta na začetku oba superprevodna otoka navzven nevtralna. Naj nato en Cooperjev par tunelira skozi spoj (to je tok, ki ga opisujeta zgornji enačbi) zaradi fazne razlike. Na ta način dobimo na enem otoku višek dveh elektronov, na drugem pa višek dveh pozitivnih ionov, zato se med njima pojavi napetost. Ker sta otoka povezana z žico, bo po njej stekel tok, tako da bomo imeli kmalu spet dva nevtralna otoka. Naši enačbi torej ne upoštevata tega, da sta otoka povezana z žico, in smo morali zato ta korak narediti z nekaj razmisleka namesto z računom.

Odštejmo sedaj zadnji dve enačbi, iz česar dobimo časovno odvisno fazne razlike

$$\dot{\delta} = \dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1 = 2eU/\hbar. \quad (7)$$

To ima celo vrsto zanimivih posledic. Najbolj očitna je, ko priključimo na spoj konstantno napetost  $U \neq U(t)$ , kar pomeni da bo za fazno razliko na spoju veljalo  $\delta(t) = \delta_0 + 2eUt/\hbar$ . Če priključimo konstantno napetostna spoj, bo torej čez tokokorg tekel izmenični tok

$$I(t) = I_0 \sin \left( \delta_0 + \frac{2eUt}{\hbar} \right).$$

Josephsonov spoj torej deluje kot pretvornik med frekvenco in napetostjo. Ta zveza velja tako natančno, da je preko nje, s pomočjo razmerja  $\Phi_0 = h/2e$  in definicije sekunde, definiran kar volt napetosti.

Enačba (7) močno spominja na Faradayev zakon. Kljub izredni podobnosti, pa napetosti izhajata iz zelo različnih fizikalnih ozadij. V Faradayevem zakonu se potencialna razlika (napetost) ustvari zaradi energije magnetnega polja v prostoru. Drugače je v Josephsonovem spoju, kjer ni prisotnega nobenega magnetnega polja. Tu pride do napetosti zaradi gibanja Cooperjevih parov prek spoja, zato se tak pojav včasih imenuje tudi kinetična indukcija. Ker pride do indukcije, poskusimo pripisati spoju še nekakšno induktivnost, zato “Faradayev” zakon še nekoliko preoblikujemo:

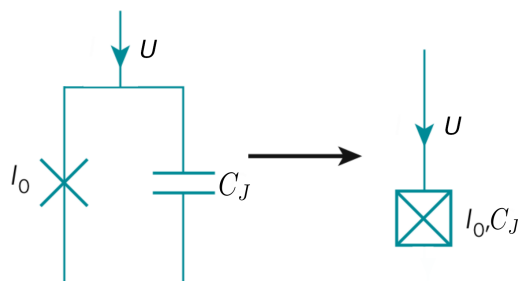
$$U = L_J \dot{I} = L_J I_0 \cos(\delta) \dot{\delta} = L_J I_0 \cos(\delta) \underbrace{\frac{2e}{\hbar}}_{1/L_J} U. \quad (8)$$

Definirali smo induktivnost spoja (Josephsonovo induktivnost)  $L_J = \frac{\hbar}{2eI_0 \cos \delta} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_0 \cos \delta}$  in vpeljali kvant magnetnega pretoka  $\Phi_0 = h/2e$ .

Izračunajmo sedaj še energijo, ki je shranjena v takem spoju (pri tem zaenkrat pozabimo na energijo zaradi kapacitivnosti, ker vemo kakšna je). Med dvema trenutkoma se na spoju nabere toliko energije, kolikor dela opravimo na njem:

$$\Delta E = \int_1^2 IU dt = \int_1^2 I d\left(\frac{\Phi_0 \delta}{2\pi}\right) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \int_1^2 I_0 \sin(\delta) d\delta = -E_J \Delta \cos \delta.$$

Vidimo, da torej lahko definiramo energijo, ki je naložena na spoju kot  $E = E_J (1 - \cos \delta)$ , pri čemer smo konstanten člen dodali, ker si ničlo energije lahko izberemo poljubno. Že zaradi same oblike (podoben je kondenzatorju, slika 4) ima spoj tudi neko kapacitivnost  $C$ . Spoj je torej precej podoben harmonskemu oscilatorju: ima kapacitivni in induktivni element. Edina razlika je, da induktivnost spoja ni odvisna le od geometrijskih lastnosti elementa, pač pa tudi toka, ki teče skozenj. Rečemo, da je spoj nelinearen induktivni element. To razliko na shemi označimo tako, da vijačnico, ki predstavlja tuljavo zamenjamo z znakom X (slika 5).

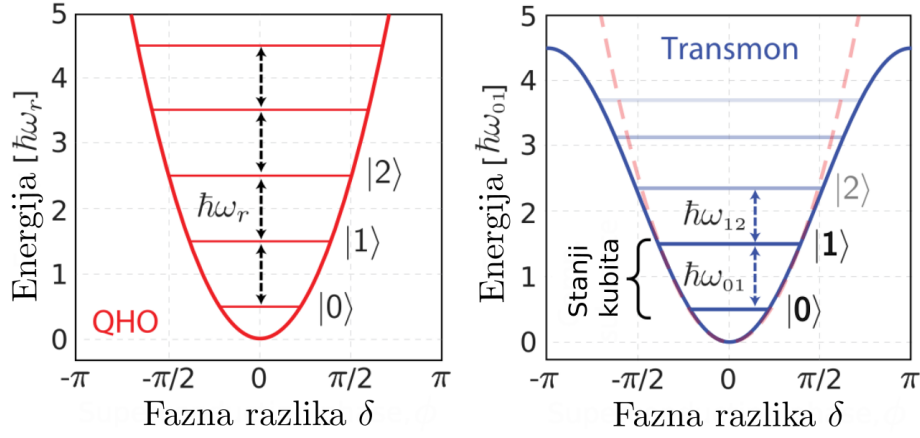


Slika 5: Josephsonov tunelski spoj predstavljen kot element z vzporedno vezanima nelinearnih induktorjem in kondenzatorjem [8].

Hamiltonian takega sistema lahko torej zapišemo kot

$$H = \frac{Q^2}{2C} + E_J (1 - \cos \delta) = E_C n^2 + E_J (1 - \cos \delta) \approx E_C n^2 + \frac{E_J}{2} \delta^2 - \frac{E_J}{24} \delta^4, \quad (9)$$

kar ni nič drugega kot hamiltonian anharmonskega oscilatorja.  $n$  označuje višek elektronskih parov na superprevodnem otoku,  $E_C = 2e^2/C$  pa energijo, ki je potrebna, da na otok spravimo dodaten par. Ko bomo hoteli manipulirati stanje kubita, ga bomo resonančno vzbujali z električnimi pulzi s frekvenco  $\omega_{01}$ , ki ustreza energijski razliki za prehod med osnovnim in prvim vzbujenem stanjem. Sistem hočemo torej iz tega stališča narediti čim bolj anharmonski, da bo verjetnost, da ga vzbudimo v kakšno višje stanje praktično nič.



Slika 6: Energijski nivoji harmonskega in anharmonskega oscilatorja (nabojnega transmon kubita) [6].

### 5.3 Nabojni kubit

Prvo superprevodno vezje, v katerem so opazili kratko koherentno stanje (nekaj nanosekund) je bil nabojni kubit, včasih imenovan tudi otok Cooperjevih parov (ang. “Cooper-pair box”). Otok je prek Josephsonovega spoja povezan na superprevodni rezervoar. Običajno se v taka superprevodna vezja prek kondenzatorja priključi še napetost, kar vidimo na sliki 7. Zaradi tega se nekoliko premakne ravnovesno število Cooperjevih parov na otoku in hamiltonian napišemo v obliki

$$H = E_C (n - n_g)^2 + E_J (1 - \cos \delta), \quad (10)$$

kjer  $n_g = CU/2e$  označuje ravnovesno količino naboja v enotah Cooperjevih parov na superprevodnem otoku in lahko zavzame zvezne vrednosti, ker je odvisna od napetosti na katero priključimo kondenzator. Običajno priključimo napetost  $U = e/C$ , tako da je  $n_g = 1/2$ , ker je takrat energijska razlika med osnovnim in prvim vzbujenim stanjem najmanjša in tako verjetnost za relaksacijo sistema v osnovno stanje najmanjša. Za implementacijo kubita vzamemo stanja  $|n = 0\rangle$  in  $|n = 1\rangle$ , ki ustrezata odsotnosti in prisotnosti enega Cooperjevega para na otoku (slika 7). Sedaj, ko smo uspeli skonstruirati sistem, za katerega verjamemo, da ne bo nikoli zašel v neželena stanja, lahko na ta stanja pozabimo in hamiltonian sistema zapišemo preprosto kot

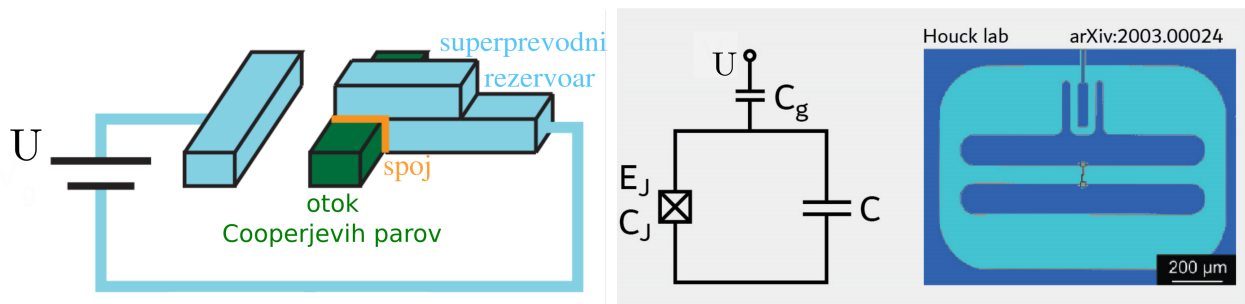
$$H = -\frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_z,$$

kjer je  $\hbar\omega$  energijska razlika med najnižjima stanjema,  $\sigma_z$  pa Paulijeva matrika  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Tak kubit je zelo občutljiv na motnje iz okolice, predvsem na naključno gibanje naboja v vezju in ima zato zelo kratek koherentni čas (slika 9). Da bi odpravili te težave, v tokokrog dodamo še en dodaten kondenzator in s tem res podaljšamo koherentni čas kubita do približno  $100\mu s$ . Se pa zaradi tega pojavi nova težava, in sicer zmanjšanja anharmonskosti, zaradi česar postane kubit občutljivejši na vzbuditve v višja, neželena stanja. Kljub tej težavi, pa je tak sistem, ki se imenuje transmon, trenutno najpogostejše uporabljen v kvantnih računalnikih.

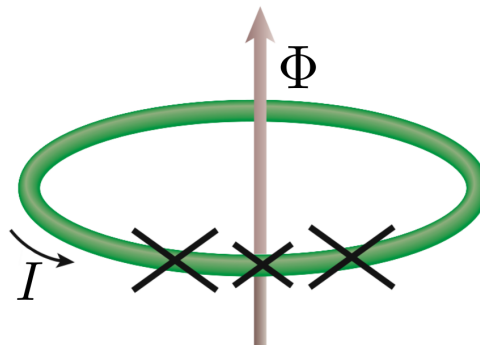
### 5.4 Pretočni kubit

Druga možnost za izdelavo superprevodnega kubita je obroč, ki ga prekinemo z Josephsonovim spojem. Tako napravo imenujemo pretočni kubit (ang. “flux qubit”). Vemo, da je magnetni



Slika 7: Zgoraj: shema otoka Cooperjevih parov [4]; Spodaj: shema in dejanska slika transmonskega kubita, ki je danes najpogostejše uporabljan tip superprevodnega kubita. Veliki plošči predstavljata kondenzator za podaljšanje življenske dobe, črtica na sredini pa Josephsonov spoj.

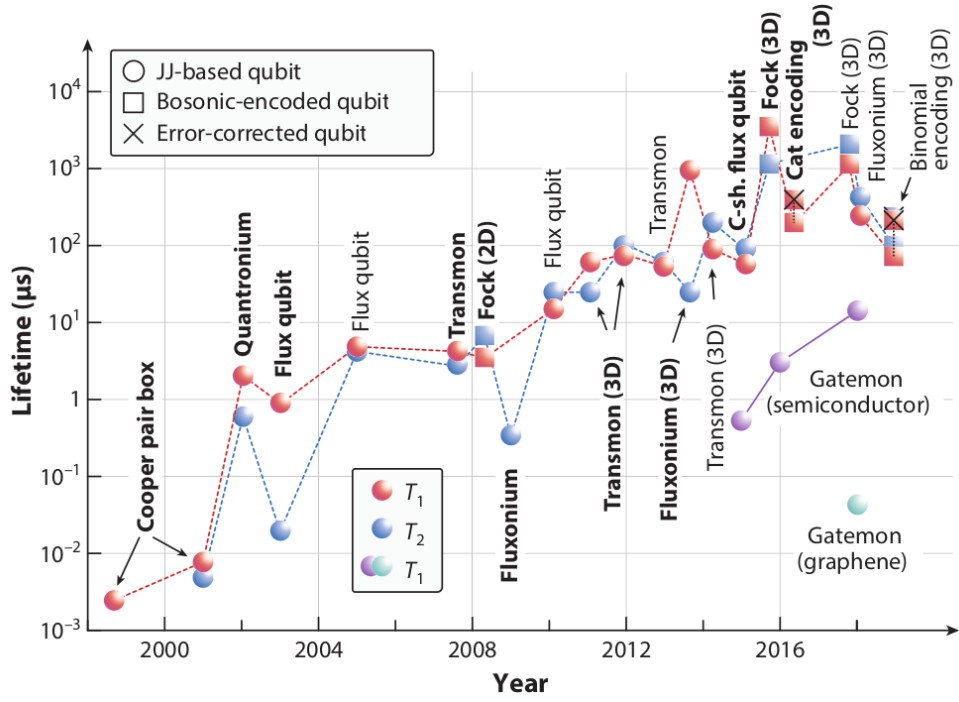
pretok, ki ga obdaja supertok kvantiziran v enotah  $\Phi_0 = h/2e$ . Ker tok po obroču teče brez upora, ni odvisen od časa, tudi magnetni pretok skozi tak obroč, ki ga ustvarja tok, ni odvisen od časa. Tak sistem torej ne bi bil primeren za implementacijo kubita, ker se z njim ne dogaja nič zanimivega. Če pa obroč prekinemo z Josephsonovim spojem pa omogočimo, da kakšen kvant pretoka uide, ali pa pride v obroč. Za osnovni stanji kubita potem uporabimo stanji, ko je v obroču odsoten ali pa je prisoten en kvant magnetnega pretoka. Splošno stanje takega sistema potem opišemo z valovno funkcijo  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ .



Slika 8: Shema pretočnega kubita

Tudi pretočni kubiti so se še razvili v primerjavi s tistimi začetnimi. Danes namesto enega običajno najdemo 3 ali pa celo 4 Josephsonove spoje (slika 8), ki so tu spet z namenom podaljšanja koherentnega časa (danes  $\geq 100\mu s$ ). Pretočni kubiti se večinoma uporabljajo v sistemih, ki temeljijo na kvantnem ohlajanju (ang. "quantum annealing"), na primer v D-Wave sistemih, kjer imajo procesorji danes že po več tisoč takih kubitov. Tako veliko število kubitov imajo lahko zato, ker v teh sistemih nimamo nadzora nad njimi, pač pa na kubitih zastavimo začetni problem in potem pustimo, da se sistem razvije v čim nižje energijsko stanje, ki predstavlja rešitev problema. Običajno na ta način rešujemo optimizacijske problem, lahko pa se ga uporablja tudi za simulacije večjih kvantnih sistemov. Za simulacije ga uporabljajo tudi na inštitutu Jožef Stefan, na primer za raziskave makroskopskega kvantnega tuneliranja [10].

Zdaj, ko smo spoznali delovanje superprevodnih kubitov se lahko posvetimo delu, ko bomo z njimi dejansko počeli kaj zanimivega.



Slika 9: Koherenčni časi superprevodnih kubitov skozi leta [8].

## 6 Manipulacija, sklapljanje in branje superprevodnih kubitov

V tem razdelku bomo predstavili le glavne ideje tega, kako v praksi dejansko izvedemo eksperimente s superprevodnimi kubitom, ne bomo pa se spuščali v podrobnosti. En razlog za to je dolžina seminarja, drug pa, da presega nivo našega znanja. Za več podrobnosti zato priporočamo [6], [8] in [9].

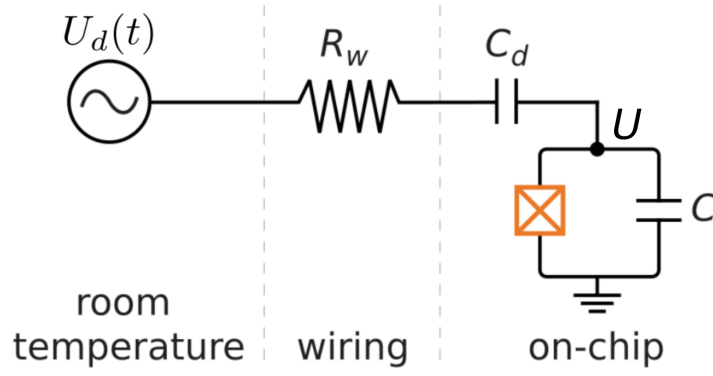
### 6.1 Manipulacija kubitov

Začnimo z manipulacijo posameznih kubitov. Imamo dvonivojski sistem, ki ga lahko predstavimo z vektorjem na Blochovi sferi. Kot smo ugotovili v poglavju, kjer smo definirali kubit, lahko v poljubno drugo stanje kubit spravimo z rotacijo okoli dveh osi, na primer okrog  $x$  in  $z$  ali  $x$  in  $y$ . Če bomo sposobni implementirati okoli dveh izmed osi, bomo lahko torej opravili poljubno operacijo na enem kubitom.

Posvetimo se sedaj nabojnemu kubitom, ki jih vzbujamo z elektromagnetnim valovanjem. Shemo vezave vidimo na sliki 10: kubit prek kondenzatorja s kapaciteto  $C_d$  sklopimo z zunanjo napetostjo  $U_d$ . Hamiltonian takega sistema modeliramo kot

$$H = H_0 + H_{\text{int}} = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + C_d U_d(t) U = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z + C_d U_d(t) \frac{Q}{C}. \quad (11)$$

Posvetimo se sedaj le interakcijskemu delu hamiltoniana (prvega člena se tako ali tako lahko znebimo, če se premaknemo v vrteči se koordinatni sistem). Najprej se spomnimo, da se operator naboja lahko zapiše s kreacijskim in anihilacijskim operatorjem  $Q = -iQ_0 (a - a^\dagger)$ . Pri tem smo uvedli konstanto  $Q_0 = \sqrt{\hbar/2Z}$ . Tako kot vsak drug operator v kvantni mehaniki,



Slika 10: Shema manipulacije kubita z elektromagnetnim valovanjem s pomočjo sklopitve prek kondenzatorja [6].

se da tudi lestvena operatorja zapisati v matrični obliki kot

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \quad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

To velja za povsem splošno dimenzionalen sistem, kubit pa smo skonstruirali tako, da ne bo nikoli zašel v višja vzbujena stanja in zato lahko nanje pozabimo. V približku dvonivojskega sistema lahko operator naboja poenostavimo v

$$Q = -iQ_0 \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = Q_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = Q_0 \sigma_y.$$

Uvedimo spet novo konstanto  $\Omega = \frac{Q_0 C_d}{C}$  in vse skupaj vstavimo v enačbo (11). Tako dobimo izraz za interakcijski hamiltonian  $H_{\text{int}} = \Omega U_d(t) \sigma_y$ . Konstanta  $\Omega$  vsebuje vse inženirske parametre sistema, kot sta na primer kapacitivnost in induktivnost kroga.

Zapišimo zdaj še vzbujevalni pulz napetosti v splošni obliki  $U_d(t) = U_0 s(t) \sin(\omega t + \phi)$ .  $U_0$  predstavlja amplitudo valovanja,  $s(t)$  pa ovojnico pulza. Upoštevali smo le, da bomo sistem vzbujali resonančno, torej z lastno frekvenco kubita  $\omega$ . Če se prestavimo v vrteči se koordinatni sistem in nekaj časa računamo (tu bomo to preskočili, ker nič ne pripomore k razumevanju), dobimo, da lahko interakcijski hamiltonian približno zapišemo v obliki

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{2} \Omega U_0 s(t) (\sigma_x \cos \phi + \sigma_y \sin \phi).$$

Iz tega izraza je očitno, da z nadziranjem faze pulza lahko določimo okoli katere osi na Blochovi sferi bomo vrteli kubit, medtem ko amplituda, oblika ovojnice pulza in konstanta  $\Omega$  določajo kot rotacije. Kot primer si pogledjmo kaj s stanjem naredi sinusni pulz ( $\phi = 0$ ). Iz gonilnega hamiltoniana vidimo, da bomo stanje vrteli okoli osi  $x$ . Tak hamiltonian očitno generira rotacijo za kot

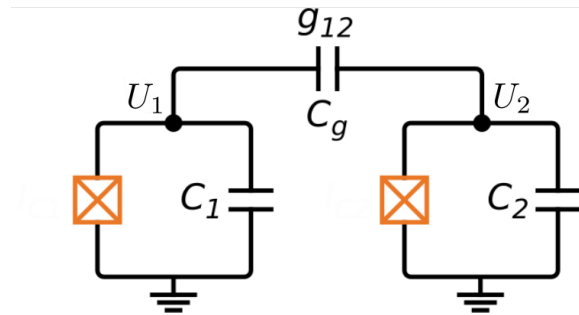
$$\Theta(t) = \Omega U_0 \int_0^t s(t') dt'$$

okoli osi  $x$ . Ta oblika ne predstavlja nič drugega kot Rabijevo oscilacijo kubita, ki interagira z elektromagnetnim valovanjem. Pogosta operacija v kvantnem računalništvu je rotacija za

kot  $\pi/2$ . Z njimi lahko na primer iz stanja  $|0\rangle$  tvorimo stanji  $(|0\rangle + |1\rangle)/2$  ali  $(|0\rangle + i|1\rangle)/2$ , odvisno okoli katere osi rotiramo.

Ta izraz je eden izmed glavnih razlogov, zakaj so superprevodni kubitovi tako dobri kandidati za skaliranje kvantnih računalnikov: nadziranje posameznih kubitov poteka na precej enostaven način v primerjavi z drugimi implementacijami kubitov. Potrebujemo le nekaj vodnikov ter generator električnih sunkov. Največja težava takega sistema je, da je praktično nemogoče povsem natančno odmeriti energijo elektromagnetnega valovanja, s katerim manipuliramo kubite in zato se po nekaj operacijah lahko stanje teh kubitov že precej razlikujejo od pričakovanega (pri vsaki operaciji zarotiramo stanje nekoliko preveč ali premalo).

## 6.2 Sklapanje kubitov



Slika 11: Kapacitivna sklopitev dveh nabojnih kubitov [6].

Glavni razlog, zakaj se zdi kvantno računalništvo močnejše od klasičnega, je kvantna prepletenost. Poglejmo si, kako to izkoriščamo s superprevodnimi kubitovi. Podobno kot prej se tudi tu posvetimo nabojnim kubitom, ki jih sklapljamo prek kondenzatorja s kapaciteto  $C_g$  (slika 11). Interakcijski hamiltonian tako sklopljenih sistemov je  $H = C_g U_1 U_2$ . Zakaj tak hamiltonian generira prepletenost stanj presega ta seminar, lahko pa si pogledamo na primeru, kaj se zgodi, ko vklopimo sklopitev. Splošno stanje dveh dvonivojskih sistemov skupaj je

$$|\psi\rangle = (a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle)(b_0 |0\rangle + b_1 |1\rangle) = a |00\rangle + b |01\rangle + c |10\rangle + d |11\rangle.$$

Recimo, da tak sklopljen sistem izmerimo in izvemo, da je ob  $t = 0$  v stanju  $|\psi(0)\rangle = |01\rangle$ . Izkaže se, da je stanje ob poznejšem času enako

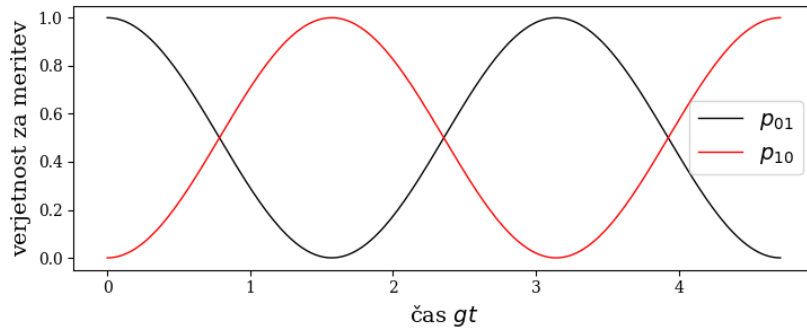
$$|\psi(t)\rangle = \cos(gt) |01\rangle - i \sin(gt) |10\rangle.$$

Vidimo torej, da če hočemo tvoriti prepletena stanja, moramo znati vklopiti sklopitev med dvema kubitom ravno za pravi čas, kar znajo v laboratorijih dejansko narediti.

Zdaj znamo manipulirati posamezne kubite, vemo kako jih sklapljamo, ostane nam le še branje kubitov, čemur se posvetimo v naslednjem poglavju.

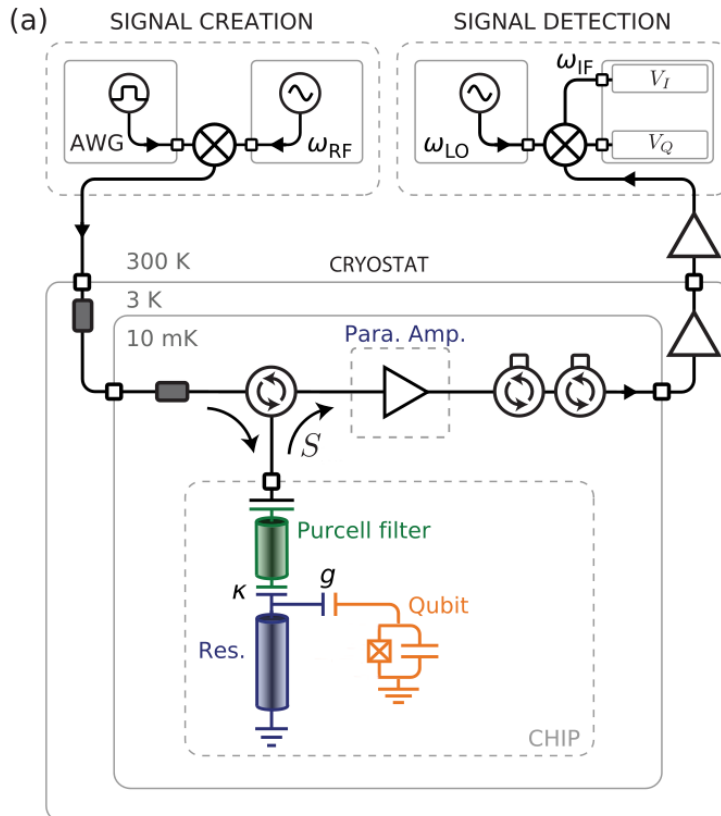
## 6.3 Branje Kubitov

Če ne znamo na koncu prebrati, kaj je računalnik izračunal, je vseeno, če se računanja sploh ne lotimo. Zato je zmožnost hitre in zanesljive meritve kubitov ključna komponenta vsakega procesorja. V superprevodnih sistemih poteka meritve kubitov prek šibke sklopitve z oscilatorjem.



Slika 12: Verjetnost za meritev stanja  $|01\rangle$  ali  $|10\rangle$  po sklopitvi dveh kubitov s kondenzatorjem.

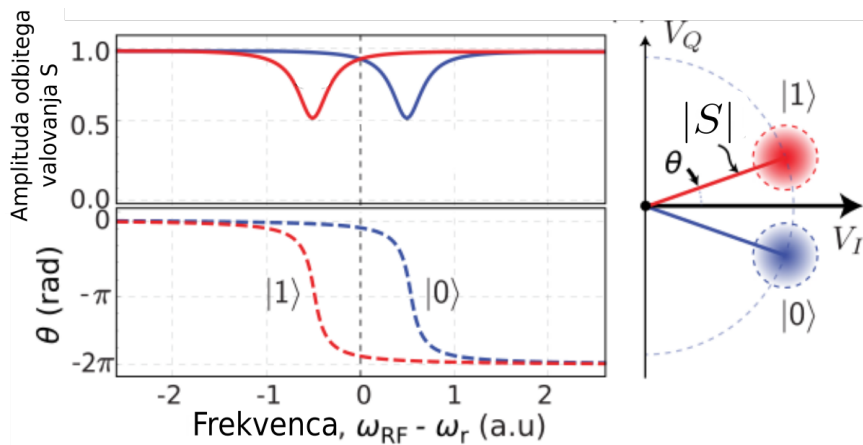
Za šibko sklopitev poskrbimo enostavno: kubit in resonator povežemo z majhnim kondenzatorjem. Ko to storimo, se lastna frekvenca resonatorja nekoliko spremeni, glede na to v katerem stanju je kubit: če je kubit v osnovnem stanju  $|0\rangle$ , se lastna frekvenca nekoliko zviša, če pa je v vzbujenem stanju  $|1\rangle$ , se lastna frekvenca nekoliko zniža. Celotno meritveno shemo vidimo na sliki 13. Če meritve zelo poenostavimo: proti resonatorju pošljemo električni impulz, potem pa iz amplitude odbitega signala ugotovimo v katerem stanju je kubit. Na sliki 14 vidimo, da se v resonančnem območju resonatorja amplituda odbitega valovanja zmanjša, ker se delež fotonov porabi za vzbuditev resonatorja v višja lastna energijska stanja. Glede na to, ali je resonanca pod ali nad lastno frekvenco resonatorja, lahko določimo v katerem stanju je bil kubit.



Slika 13: Shema branja kubita [6].

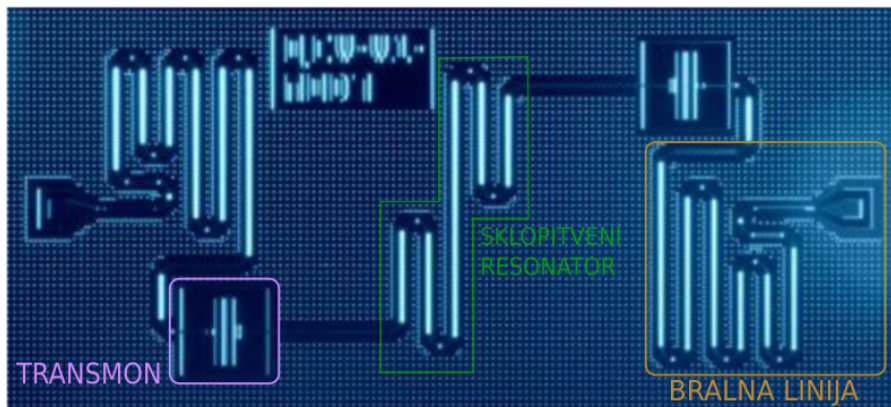
Vse operacije, ki smo jih našli vključujejo le pošiljanje električnih pulzov po vodnikih, zato to lahko opravimo zelo hitro (v območju  $1 \text{ ns} - 1 \text{ } \mu\text{s}$ ), kar je še ena velika prednost superprevodnih





Slika 14: Rezultati meritve stanja kubita prek resonatorja. Poleg spremembe amplitude odbitega valovanja, se spremeni tudi faza odbitega valovanja, kar lahko prikažemo s t.i kazalčnimi stanji (desno) [6].

sistemov. Primer takega sistem vidimo na sliki 15.



Slika 15: Superprevodni procesor z dvema nabojnima transmon kubitoma, sklopljena z resonatorjem. Vsak kubit ima svojo bralno linijo [7].

## 7 Zaključek

Področje kvantnega računalništva obljublja veliko, zato je v zadnjem desetletju pritegnilo veliko pozornosti. Za matematike in informatike je verjetno področje zanimivo bolj iz teoretičnega stališča v smislu kvantne teorije informacij in raznih zanimivih postopkov, kot so razbijanje enkripcijskih algoritmov, ki jih kvantni računalniki ponujajo. Za fizike, po drugi strani, je zanimiva že sama gradnja modelov, ki omogočajo kvantno računalništvo. Če prištejemo še obljube o zmožnosti simulacije več-delčnih kvantnih sistemov, ki bi reformirala fiziko atomov in molekul, lahko razumemo zakaj področje v zadnjem času dobiva toliko pozornosti. Potrebno pa bo še veliko časa in truda, preden bo tehnologija postala zares uporabna.

# Literatura

- [1] John Preskill, Quantum computation in NISQ era and beyond (2018), <https://doi.org/10.22331/q-2018-08-06-79>, arXiv:1801.00862v3.
- [2] Wikipedia, No-cloning theorem: [https://en.wikipedia.org/wiki/No-cloning\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/No-cloning_theorem)
- [3] Michael A. Nielsen, Isaac C. Chuang, Quantum computation and quantum information, 10th Edition (2010)
- [4] David Schuster, Circuit quantum electrodynamics, Yale University, 2007
- [5] Heng Fan, Yi-Nan Wang, Li Jing, Jie-Dong Yue, Han-Duo Shi, Yon-Liang Zhang, Liang-Zhu Mu, Quantum cloning machines and applications (2014), <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.06.004>
- [6] Krantz, P., Kjaergaard, M., Yan, F. et al (2019) A quantum engineer's guide to superconducting qubits, Applied Physics Reviews 6(2), <http://dx.doi.org/10.1063/1.5089550>
- [7] Jay M. Gambetta, Jerry M. Chowland, Matthias Steffen, Building logical qubits in a superconducting quantum computing system, npj Quantum Information (2017) 3:2; doi:10.1038/s41534-016-0004-0
- [8] Morten Kjaergaard, Mollie E. Schwartz, Jochen Braumüller, Philip Krantz, Joel I.-J. Wang, Simon Gustavsson, and William D. Oliver, Superconducting Qubits: Current State of Play, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2020. 11:369-95
- [9] Clarke J., Wilhelm F., Superconducting quantum bits, Nature 2008 Jun 19;453(7198):1031-42. doi: 10.1038/nature07128
- [10] Jaka Vodeb, Michele Diego, Yevhenii Vaskivskyi, Yaroslav Gerasimenko, Viktor Kabanov, Dragan Mihailovic, Observation of quantum domain melting and its simulation with a quantum computer 2021, arXiv:2103.07343
- [11] Chow JM, Gambetta JM, Magesan E, Abraham DW, Cross AW, et al. 2014. Nat. Commun. 5:4015
- [12] Bultink CC, O'Brien TE, Vollmer R, Muthusubramanian N, Beekman MW, et al. 2019, arXiv:1905.12731
- [13] Wikipedia: Bloch sphere, [https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch\\_sphere](https://en.wikipedia.org/wiki/Bloch_sphere)
- [14] Wikipedia: Superconducting quantum computing, [https://en.wikipedia.org/wiki/Superconducting\\_quantum\\_computing](https://en.wikipedia.org/wiki/Superconducting_quantum_computing)