Wiktoria Kaczmarek, Aktywność 03.

Zad.

2. Czas X (w tygodniach) zdatności myszki komputerowej ma rozkład gamma z wartością oczekiwaną 144 i odchyleniem standardowym $\sqrt{864}$.

a) Obliczyć $P(X > 144)$,

b) Obliczyć kwartyle czasu zdatności myszki,

c) Sporządzić krzywą gęstości i wykres dystrybuanty czasu zdatności myszki komputerowej.

d) Jaki procent myszek utraci zdatność w okresie gwarancyjnym trwającym 2 lata?

e) Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba myszek spośród 100 sprzedanych, które utracą zdatność w okresie gwarancyjnym?

Na początku obliczam parametry korzystając z podstawowych wzorów.

$$EX = \alpha\beta \qquad D^2X = \alpha\beta^2$$

$$EX = 144 \qquad DX = \sqrt{864}$$

$$\alpha\beta = 144 \qquad 864 = \alpha\beta^2$$

$$\alpha = \frac{144}{\beta} \qquad 864 = \frac{144}{\beta}\cdot\beta^2$$

$$\alpha = 24 \qquad \beta = \frac{864}{144}$$

$$\beta = 6$$

a)P(X>144)=1-P(X<=144)=”mamy rozkład ciągły”= 1-P(X<144)

```
> #zadanie 1a
> 1-pgamma(144,24,1/6)
[1] 0.4728497
```

WYNIK: 47,3%

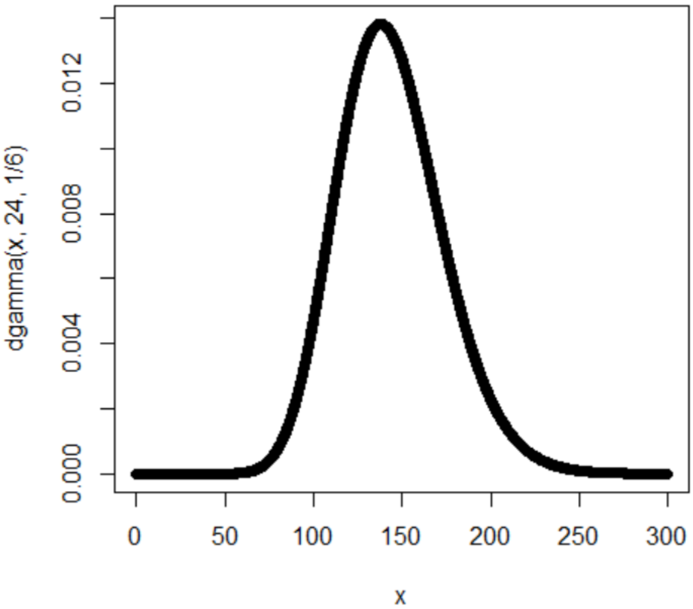
b) Kwartyle obliczone w programie.

```
[1] 0
[1] 0.05
[1] 99.29423
[1] 0.1
[1] 107.8474
[1] 0.15
[1] 113.8943
[1] 0.2
[1] 118.8615
[1] 0.25
[1] 123.2383
[1] 0.3
[1] 127.2604
[1] 0.35
[1] 131.0656
[1] 0.4
[1] 134.7463
[1] 0.45
[1] 138.3728
[1] 0.5
[1] 142.005
[1] 0.55
[1] 145.7003
[1] 0.6
[1] 149.5202
[1] 0.65
[1] 153.5377
[1] 0.7
[1] 157.8483
[1] 0.75
[1] 162.5891
[1] 0.8
[1] 167.9777
[1] 0.85
[1] 174.4056
[1] 0.9
[1] 182.7198
[1] 0.95
[1] 195.5123
[1] 1
[1] Inf
```

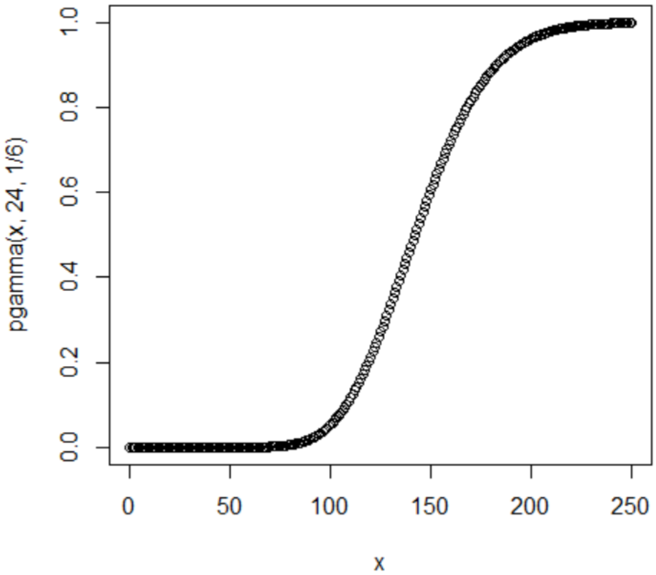
```
x<-seq(0,1,by=0.05)
for(i in x){
print(i)
print(qgamma(i,24,1/6))
}
```

Kwartyl pierwszy: 123,24. Kwartyl drugi: 142,005. Kwartyl trzeci:162,59.

c)



Wykres 1. Krzywa gęstości zdatności myszki komputerowej.



Wykres 2. Dystrybuanta czasu zdatności myszki komputerowej.

d) Obliczam najpierw, że dwa lata to 104 tygodnie i następnie wyliczam prawdopodobieństwo.

```
> 2*52
[1] 104
```

```
> pgamma(104,24,1/6)
[1] 0.07459003
```

WYNIK: 7.5%

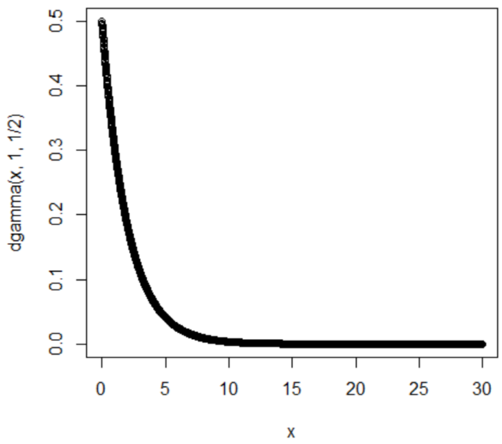
e) Mnożę obliczone prawdopodobieństwo z d). Zakładając, że myszki możemy mieć tylko w całości.

```
> 100*pgamma(104,24,1/6)
[1] 7.459003
```

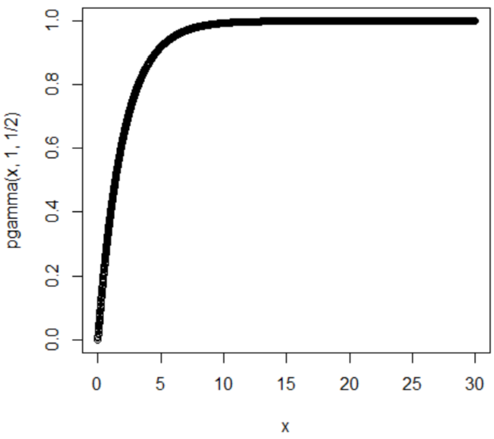
WYNIK: 7

Zad

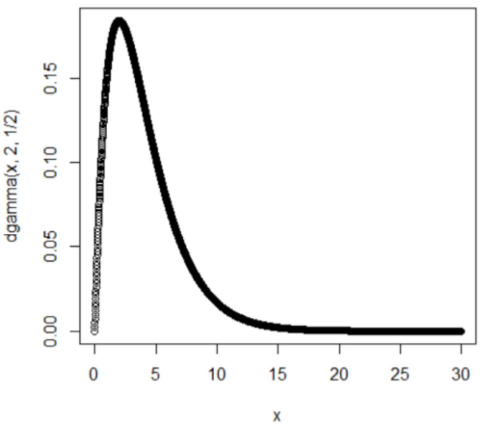
6. **Przykład 2.24** (K.A).



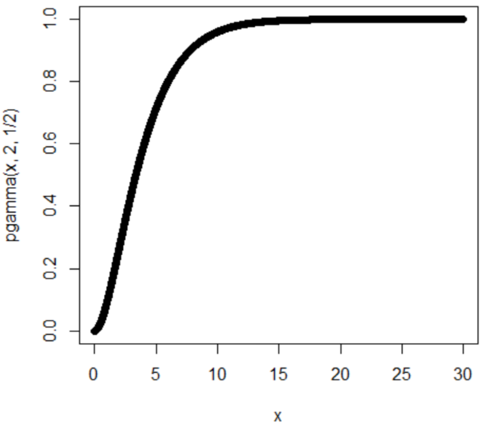
Wykres 3. Wykres gęstości rozkładu Gamma(1,2).



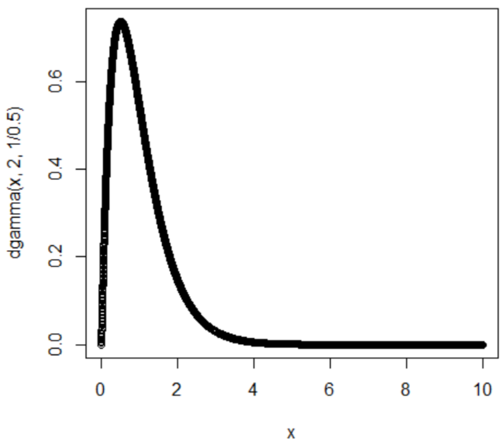
Wykres 4. Wykres dystrybuanty Gamma(1,2).



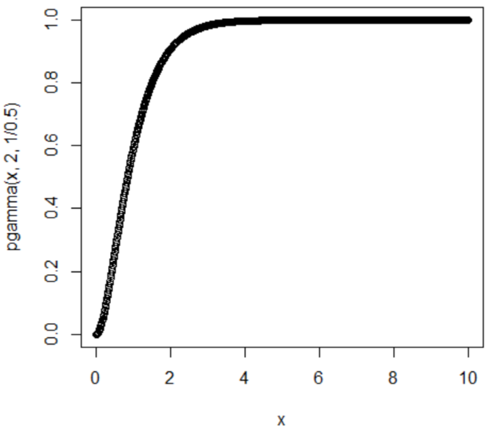
Wykres 5. Wykres gęstości rozkładu Gamma(2,2).



Wykres 6. Wykres dystrybuanty Gamma(2,2).



Wykres 7. Wykres gęstości rozkładu Gamma(2,0.5).



Wykres 8. Wykres dystrybuanty Gamma(2,0.5).

Zad

10. Przykład projektu zaliczeniowego cz. 1

Długość X (w [mm]) detalu produkowanego na pewnym automacie jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2 + 40x - 400}{0{,}08}\right), x \in \mathbb{R}$$

1. Rozpoznać rozkład długości detalu i jego parametry, wyznaczyć drugi moment zwykły długości detalu, sporządzić krzywą gęstości i dystrybuantę.
2. Obliczyć prawd. zdarzeń: $|X - 19{,}98| \geq 0{,}02$, $|X - \mathbb{E}X| < \mathbb{D}X$.
3. Dla jakiej wartości stałej b zachodzi równość $\mathrm{P}\left(x_{0,05} < X < b\right) = 0{,}90$?
4. Wyznaczyć kwartyle długości detalu oraz obliczyć gęstości dla nich.
5. Wyznaczyć przedział, w którym mieści się 95% produkowanych detali po złomowaniu 5% detali o największej odchyłce długości od wymiaru przeciętnego.
6. Co wynika z faktu, że łączna długość 180 wyprodukowanych detali będzie mniejsza od 358[cm]?
7. Detal spełnia normę długości, jeśli jego długość mieści się w dopuszczalnym przedziale (19,6; 20,4) [mm]. W celu sprawdzenia dokładności produkcji zmierzona zostanie długość 180 losowo wybranych detali.

a) Wprowadzić zmienną losową opisującą wynik sprawdzania normy długości badanej partii detali. Podać jej rozkład i sporządzić wykresy PMF i CDF.

b) Obliczyć prawd. zdarzenia, że w badanej partii detali, co najmniej 175 z nich spełni normę długości.

c) Wyznaczyć wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe oraz modę liczby detali, które spełnią normę długości i prawdopodobieństwo dla mody.

Odpowiedzi:

1. Mamy doczynienia z rozkładem normalnym.

$$\text{PDF: } f_{\mathcal{N}}(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}$$

Korzystając z powyższego wzoru możemy wyznaczyć parametry.

$2\sigma^2 = 0{,}08$ $\quad (x-\mu)^2 = x^2 - 40x + 400$

$\sigma^2 = 0{,}04$ $\quad (x-\mu)^2 = (x-20)^2$

$D^2X = 0{,}04$ $\quad \mu = 20$

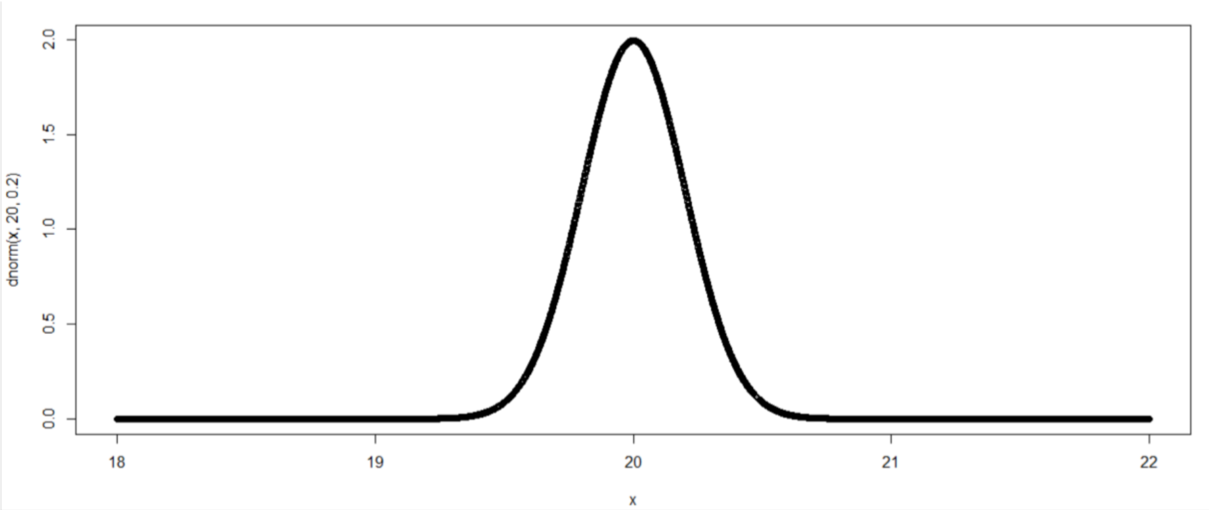
$DX = \sigma$ $\quad EX = \mu = 20$

$DX = 0{,}2$ $\quad X \sim N(20,\ 0.2)$

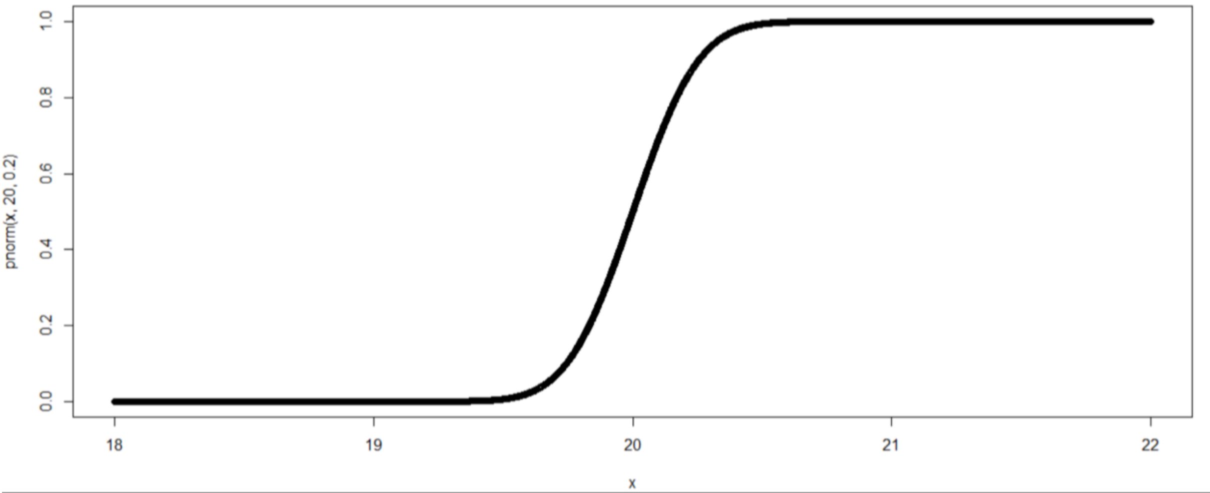
$D^2X = E(X^2) - E(X)^2$

$0{,}04 = E(X^2) - 400$

$E(X^2) = 400{,}04$ $\quad m_2 = 400{,}04$



Wykres 9. Wykres gęstości rozkładu N(20,0.2)



Wykres 10. Wykres dystrybuanty N(20,0.2).

2. $|X - 19.98| \geq 0.02$

   $1 - P(19.96 < X < 20) = 1 - [F(20) - F(19.96)]$

```
> 1-pnorm(20,20,0.2)+pnorm(19.96,20,0.2)
[1] 0.9207403
```

WYNIK:92.07%

   $|X - 20| < 0.02$

   $P(19{,}8 < X < 20{,}2) = F(20{,}2) - F(19{,}8)$

```
> pnorm(20.2,20,0.2)-pnorm(19.8,20,0.2)
[1] 0.6826895
```

WYNIK: 68.27%

3. Najpierw obliczam $x_{0,5}$ następnie obliczam dystrybuantę dla tej wartości by móc skorzystać z wzoru: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Następnie szukam argumentu x, dla znanej wartości dystrybuanty.

```
> z<-qnorm(0.05,20,0.2)
> k<-pnorm(z,20,0.2)
> s<-0.9+k
> print(z)
[1] 19.67103
>
> x<-0
> while(s>=pnorm(x,20,0.2)){
+ x=x+0.0001
+ }
> print(x)
[1] 20.329
```

WYNIK: b=20.329

4. Za pomocą funkcji w R obliczam kwartyle oraz ich gęstości.

```
> x=0.25
> k=qnorm(x,20,0.2)
> print("kwartyl pierwszy")
[1] "kwartyl pierwszy"
> qnorm(x,20,0.2)
[1] 19.8651
> print("gęstość")
[1] "gęstość"
> dnorm(k,20,0.2)
[1] 1.588883
> x=0.5
> k=qnorm(x,20,0.2)
> print("kwartyl drugi")
[1] "kwartyl drugi"
> qnorm(x,20,0.2)
[1] 20
> print("gęstość")
[1] "gęstość"
> dnorm(k,20,0.2)
[1] 1.994711
> x=0.75
> k=qnorm(x,20,0.2)
> print("kwartyl trzeci")
[1] "kwartyl trzeci"
> qnorm(x,20,0.2)
[1] 20.1349
> print("gęstość")
[1] "gęstość"
> dnorm(k,20,0.2)
[1] 1.588883
```

5. Rozkład normalny jest symetryczny. Z tej właściości możemy wynioskować, że chcą uzyskać 95% musimy usunąć z lewgo i prawego końca po 2.5%. czyli szukamy wartości w których uzyskamy prawdopobieństwo 0.975 oraz 0.025.

```
> l  <- 0.025
> p  <- 0.975
> x1 <- 0
> x2 <- 0
>
> while(p>=pnorm(x1,20,0.2)){
+ x1=x1+0.00001
+ }
> #Prawy koniec
> print(x1)
[1] 20.392
>
> while(l>=pnorm(x2,20,0.2)){
+ x2=x2+0.00001
+ }
> #Lewy koniec
> print(x2)
[1] 19.60801
```

WYNIK: (19.60801; 20.392)

6. Na początek sprawdzę średnią tych elementów.

```
> 3580/180
[1] 19.88889
```

Według naszego rozkładu normą jest przedział (19.8; 20.2). Więc średnia tych elementów należy do tego przedziału. Możemy wywnioskować, że jeżeli długość będzie mniejsza niż 3564mm to nie będzie się zgadzało z naszym rozkładem, bądź po prostu bardzo pechowo wybraliśmy elementy, które miały większe odchylenie niż podaje rozkład.

7. (19.6; 20.4)

a)

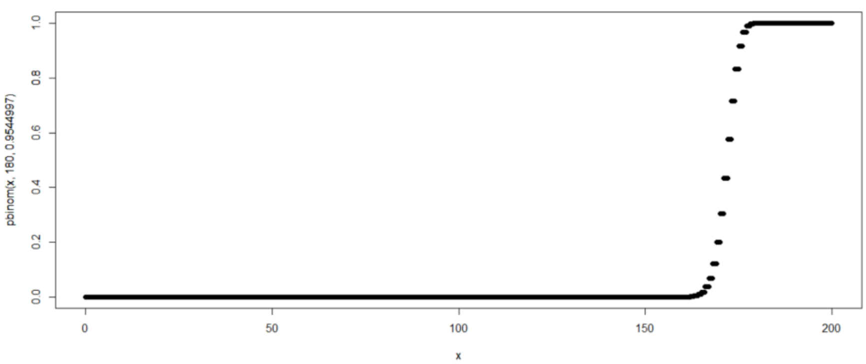
n=180

p=

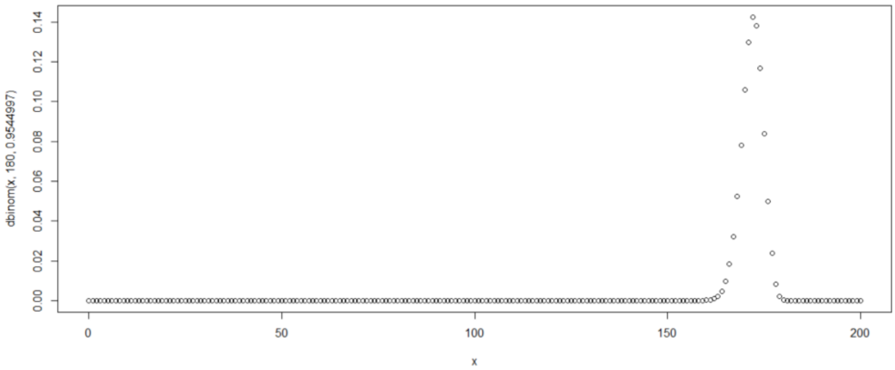
```
> pnorm(20.4,20,0.2)-pnorm(19.6,20,0.2)
[1] 0.9544997
```

Zakładamy, że jeżeli długość przedziału mieści się w przedziale jako sukces o prawdopodobieństwie p=0.9544997

Mając ilość n oraz parametr p to możemy wywnioskować, że mamy rozkład dwumianowy.



Wykres 11. Wykres dystrybuanty B(180; 0.9544997)



Wykres 12. Wykres gęstości B(180; 0.9544997).

b) $P(X \geq 175) = 1 - P(X < 175) = 1 - F(175)$

```
> 1-pbinom(175,180,0.9544997)
[1] 0.08426515
```

WYNIK: 8,4%

c) $X \sim B(180{,}0.9544997)$

```
> #wartość oczekiwana
> n<-180
> p<-0.9544997
> EX<-n*p
> EX
[1] 171.8099
```

```
> #odchylenie standardowe
> DX<- sqrt(n*p*(1-p))
> DX
[1] 2.795962
```

```
> #moda
> floor(p*(n+1))
[1] 172
```

Zad

14. Waga netto X [tony] towarów wysyłanych w kontenerach określonych wymiarów jest normalną zm. l. o nieznanych parametrach. Wiadomo, że 65% kontenerów wykazuje wagę netto ponad 4,9 ton, a 25% kontenerów wagę netto mniejszą niż 4,2 tony.

a) Wyznacz nieznane parametry rozkładu wagi netto towarów wysyłanych w tych kontenerach.

b) Oblicz procent kontenerów, które mają wagę w przedziale od 4 do 5 ton?

Odpowiedzi:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

a) P(X>4.9)=0.65
P(X<4.2)=0.25

Dokonujemy standaryzacji do N(0,1)

$$\begin{cases} 1 - P\left(X < \dfrac{4.9-\mu}{\sigma}\right) = 0.65 \\ P\left(X < \dfrac{4.2-\mu}{\sigma}\right) = 0.25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\dfrac{4.9-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 = \Phi(-0.38) \\ \Phi\left(\dfrac{4.2-\mu}{\sigma}\right) = 0.25 = \Phi(-0.67) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{4.9-\mu}{\sigma} = -0.38 \\ \dfrac{4.2-\mu}{\sigma} = -0.67 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1687}{290}, \qquad \sigma = \frac{70}{29}$$

```
x<- seq(-1,1,0.01)
for( i in x){
print(i)
print(pnorm(i,0,1))
}
```

```
[1] 0.2482522
[1] -0.67
[1] 0.2514289
[1] -0.66
```

```
[1] 0.3482683
[1] -0.38
[1] 0.3519727
[1] -0.37
```

```
> 1687/290
[1] 5.817241
> 70/29
[1] 2.413793
```

$$X \sim N(5.82, 2.41)$$

b) P (4<X<5) =?

P(4<X<5)=F(5)-F(4)

```
> pnorm(5,5.82,2.41)-pnorm(4,5.82,2.41)
[1] 0.141766
```

WYNIK: 14,18%