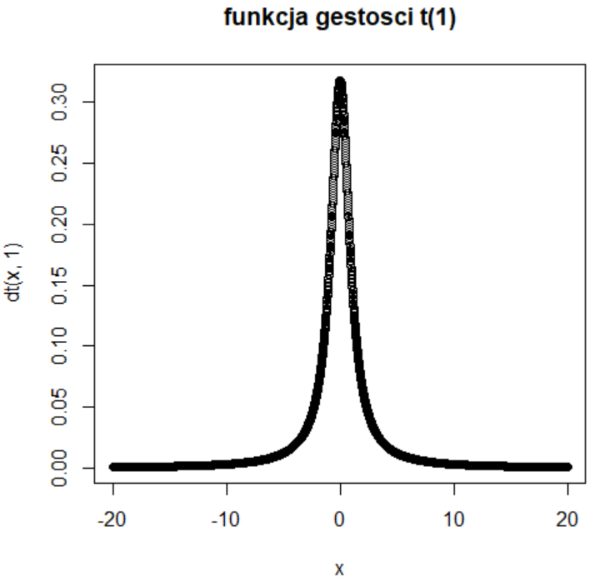
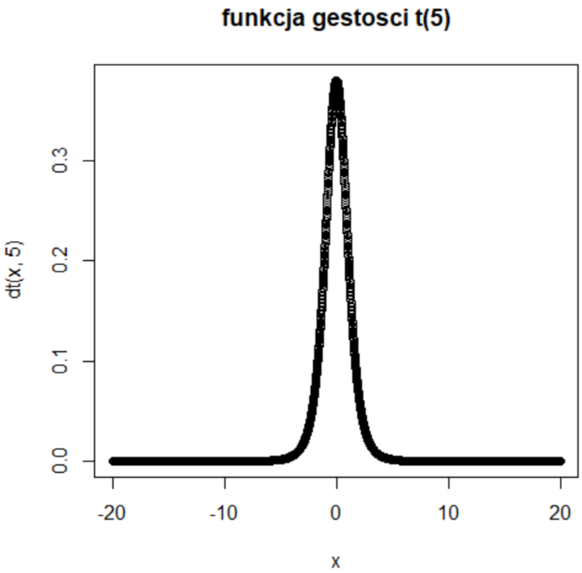
Kaczmarek Wiktoria, aktywność 05.

Zad 3

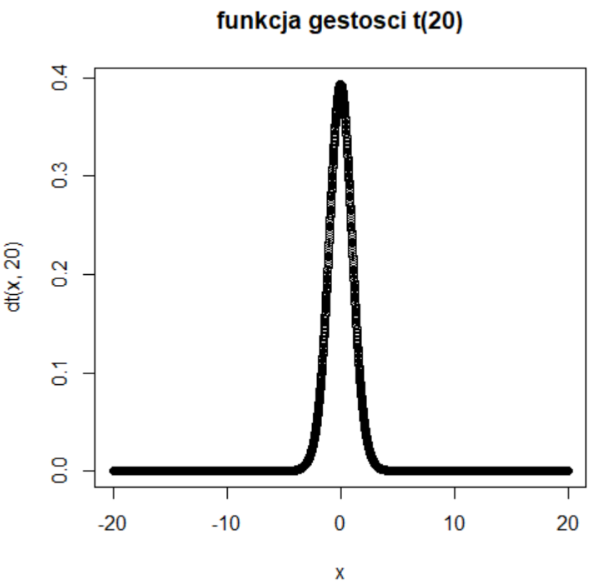
3. (KA 2.33). Sporządzić krzywe gęstości dla rozkładów t-*Studenta* $t(1)$, $t(5)$, $t(20)$. Obliczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $(X < -2)$ i $(-1 < X < 0)$ przyjmując, że zmienna losowa X ma podane rozkłady t-*Studenta*.



Wykres 1.1. Wykres krzywej gęstości t(5).



Wykres 1.2. Wykres krzywej gęstości t(10).



Wykres 1.1. Wykres krzywej gęstości t(25).

Następnie obliczam prawdopodobieństwa:

P(X<-2)=F(-2)

```
> pt(-2,1)
[1] 0.1475836
> pt(-2,5)
[1] 0.05096974
> pt(-2,20)
[1] 0.02963277
```

x	P(X < -2)
t(1)	0,1476
t(5)	0,0510
T(20)	0,0296

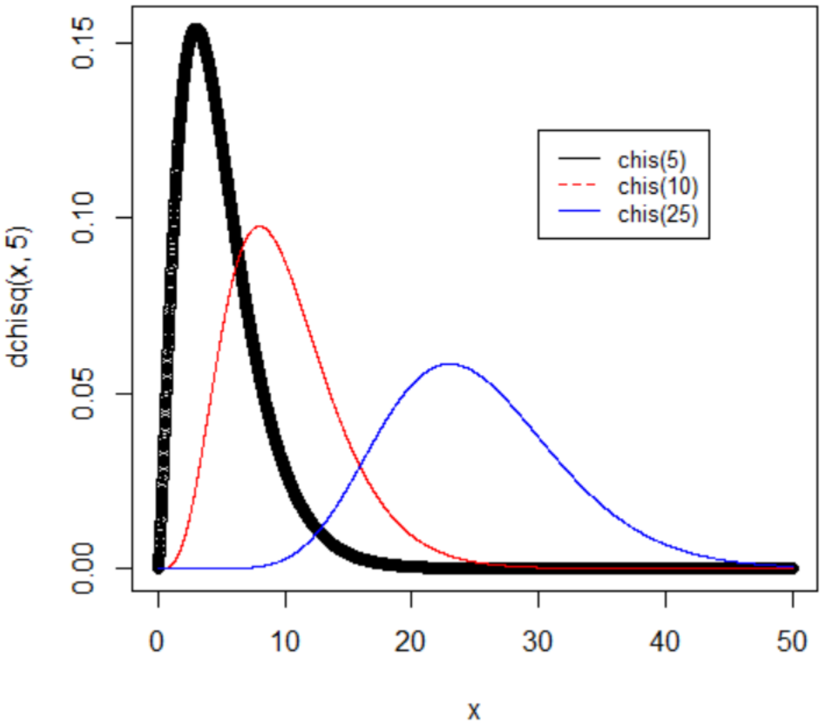
P(-1<X<0)=F(0)-F(-1)

```
> pt(0,1)-pt(-1,1)
[1] 0.25
> pt(0,5)-pt(-1,5)
[1] 0.3183913
> pt(0,20)-pt(-1,20)
[1] 0.3353717
```

x	P(-1<X <0)
t(1)	0,25
t(5)	0,3184
T(20)	0,3354

4. (KA 2.34). Sporządzić krzywe gęstości i wykresy dystrybuant zmiennych losowych o rozkładach *chi-kwadrat* z 5, 10 i 25 stopniami swobody. Czy można zauważyć jakąś prawidłowość, analizując kolejne wykresy? Wiedząc, że

$X \sim \mathrm{CHIS}(25)$, wyznaczyć prawdopodobieństwa zdarzeń $(X < 15)$, $(X > 25)$, $(20 < X < 30)$.



Wykres. Wykres krzywej gęstości dla rozkładów chis(5), chis(10), chis(25).

Możemy zauważyć, że zwiększając liczbę swobodny wykres zbliża się do wykresu krzywej gęstości rozkładu normalnego

$$X \sim chis(25)$$

P(X < 15) = 0,05862

P(X > 25) = 0,46237

P(20 < X < 30) = 0,52254

```
> pchisq(15,25)
[1] 0.05861743
> 1-pchisq(25,25)
[1] 0.4623737
> pchisq(30,25)-pchisq(20,25)
[1] 0.5225363
```

Zad 5

5. (KA 2.35). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $X > 1.8027$, wiedząc, że $X \sim F(5, 10)$.

P(X>1.8027)=1-P(X<1.8027)

```
> 1-pf(1.8027,5,10)
[1] 0.2000048
```

Zad

7. Korzystając z twierdzenia o odwracaniu dystrybuanty, wygenerować realizację 5-elementowej próby według rozkładu BT(2, 1).

Twierdzenie o odwracaniu dystrybuanty:

Jeżeli X jest zmienną losową typu ciągłego o dystrybuancie F_X to $Z = F_X(X) \sim U(0,1)$.

Najpierw generuje pięć liczb z rozkładu jednostajnego U(0,1), kolejno sprawdzam ich wartość dla funkcji odwrotnej do dystrybuanty, czyli funkcji kwantylowej.

```
> x<- runif(5,0,1)
> x
[1] 0.54243849 0.57162902 0.48566476 0.06419488 0.70636475
> qbeta(x,2,1)
[1] 0.7365042 0.7560615 0.6968965 0.2533671 0.8404551
```

Zad

6. Rozważmy eksperyment symulacyjny, w którym rozkład populacji istotnie różni się od rozkładu normalnego.

a) Czas zdatności pewnego typu elektronicznego sterownika ma rozkład wykładniczy z wartością oczekiwaną 5000 dni.

b) Czas oczekiwania na autobus ma rozkład jednostajny na przedziale (0, 15) minut.

Wyznaczyć rozkład średniej arytmetycznej dla $n = 2, 10, 30$. Przeprowadzić eksperymenty symulacyjne i porównać wyniki.

a) EX=1000

W rozkładzie wykładniczym wartość oczekiwaną określamy wzorem $EX = \frac{1}{\lambda}$ stąd

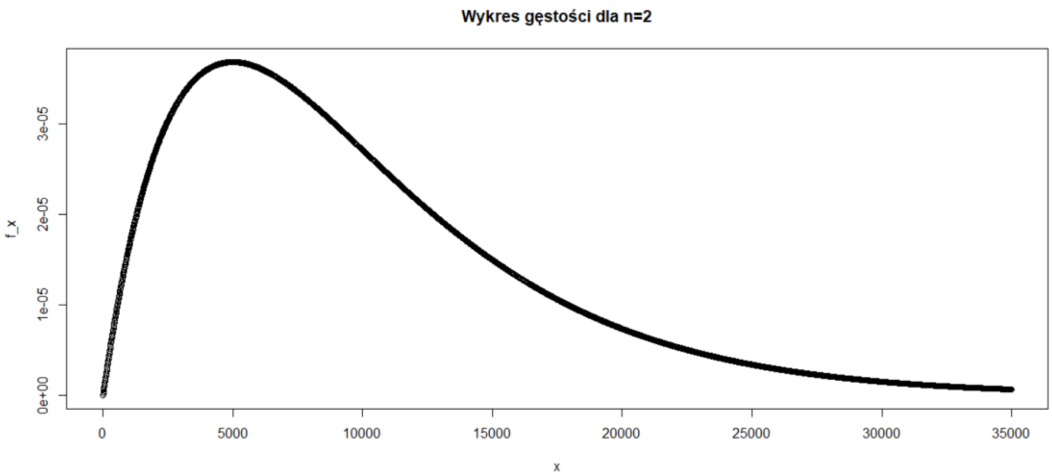
$$\lambda = \frac{1}{5000}$$

Korzystając z Twierdzenia:

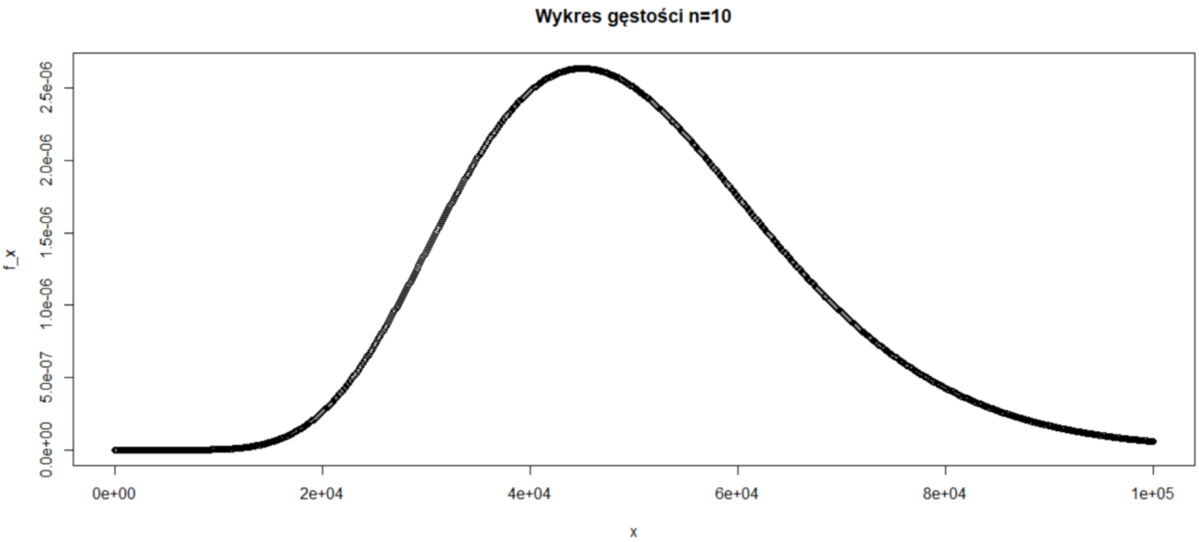
Rozkład gamma jest dwuparametrowym ciągłym rozkładem określonym dla liczb nieujemnych. Pojawia się on jako suma niezależnych zmiennych losowych o rozkładach Exp$\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Suma n niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\Gamma(1, \lambda)$ ma rozkład $\Gamma(n, \lambda)$, zwany rozkładem Erlanga.

Aby uzyskać średnią arytmetyczną uzyskaną sumę dzielimy przez n.

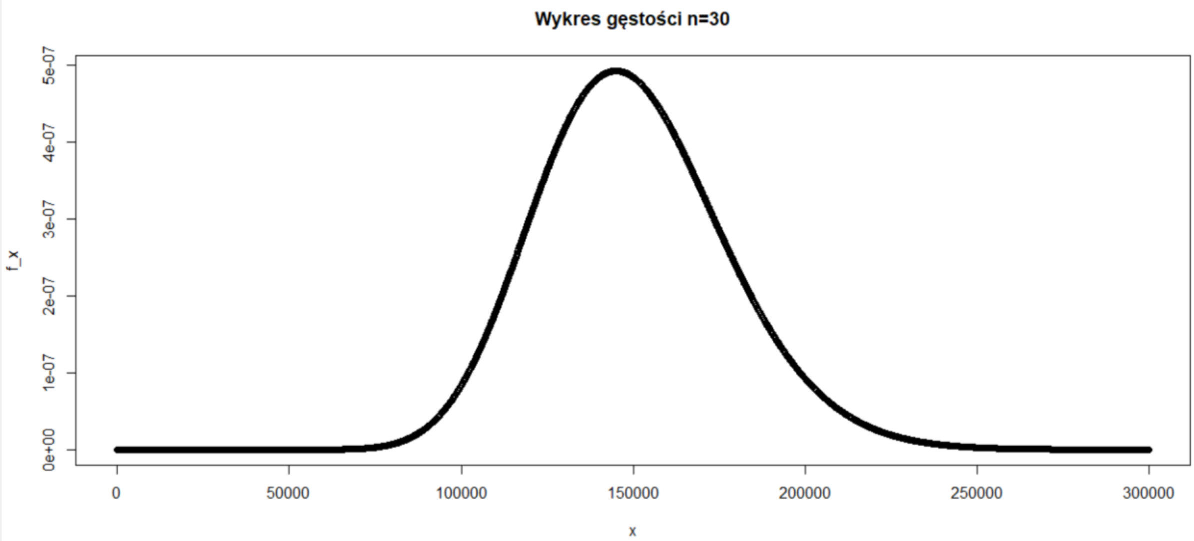
$$\frac{X_1 + X_2 + .. + X_n}{n} \sim \frac{\Gamma(n, \lambda)}{n}$$



Wykres 6.1. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=2.



Wykres 6.2. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=10.

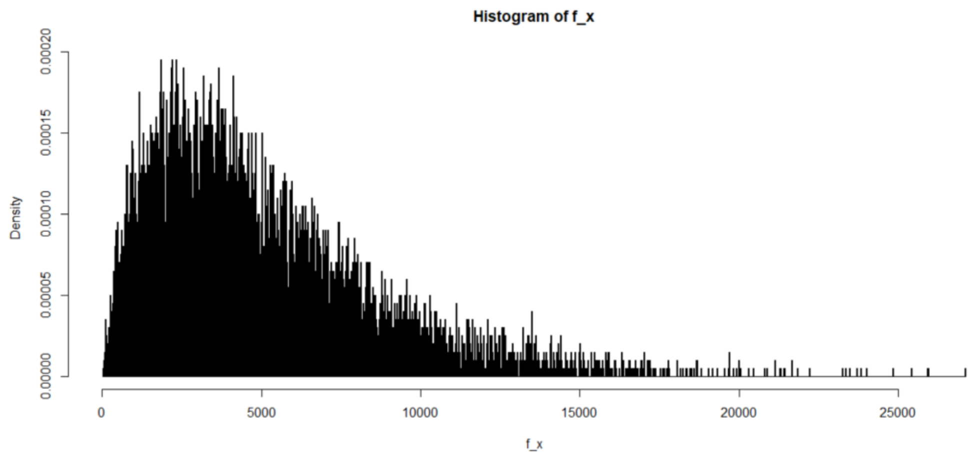


Wykres 6.3. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=30.

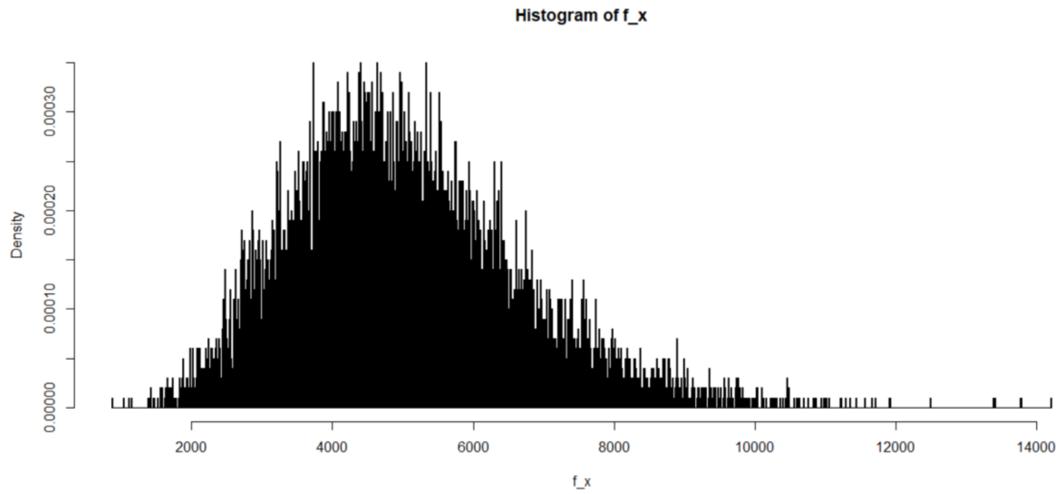
Możemy zauważyć, że zwiększając n funkcja gęstości zaczyna przypominać rozkład normlany.

Następnie dokonujemy stymulacji dla 10 000 losowych prób z parametrami jak wyżej.

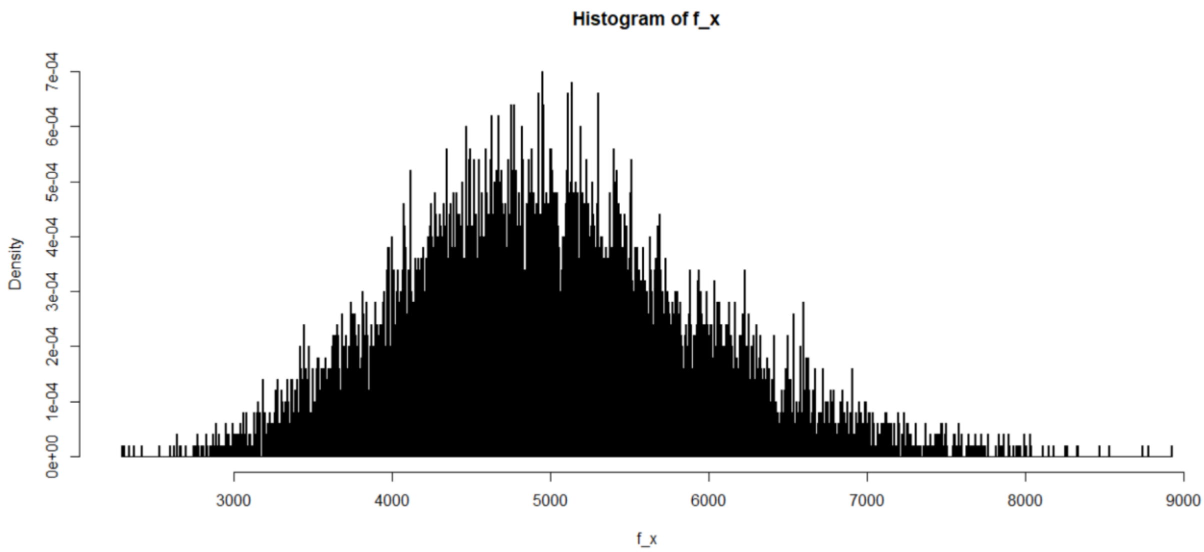
```
> f_x<-rgamma(10000,10,1/5000)/10
> hist(f_x, 10, probability=TRUE,plot=TRUE)
> hist(f_x, 1000, probability=TRUE,plot=TRUE)
> f_x<-rgamma(10000,2,1/5000)/2
> hist(f_x, 1000, probability=TRUE,plot=TRUE)
> f_x<-rgamma(10000,30,1/5000)/30
> hist(f_x, 1000, probability=TRUE,plot=TRUE)
```



Wykres 6.4. Wykres symulacji dla rozkładu średniej arytmetycznej n=2.



Wykres 6.5. Wykres symulacji dla rozkładu średniej arytmetycznej n=10.



Wykres 6.6. Wykres symulacji dla rozkładu średniej arytmetycznej n=30.

Możemy zauważyć, że symulacja różni się od idealnej krzywej gęstości rozkładu, jednak kształt (linia trendu) jest podobna do wykresów rozkładów. Nie mamy tutaj idealnej krzywej, ponieważ występują skoki, spowodowane losowością w próbie.

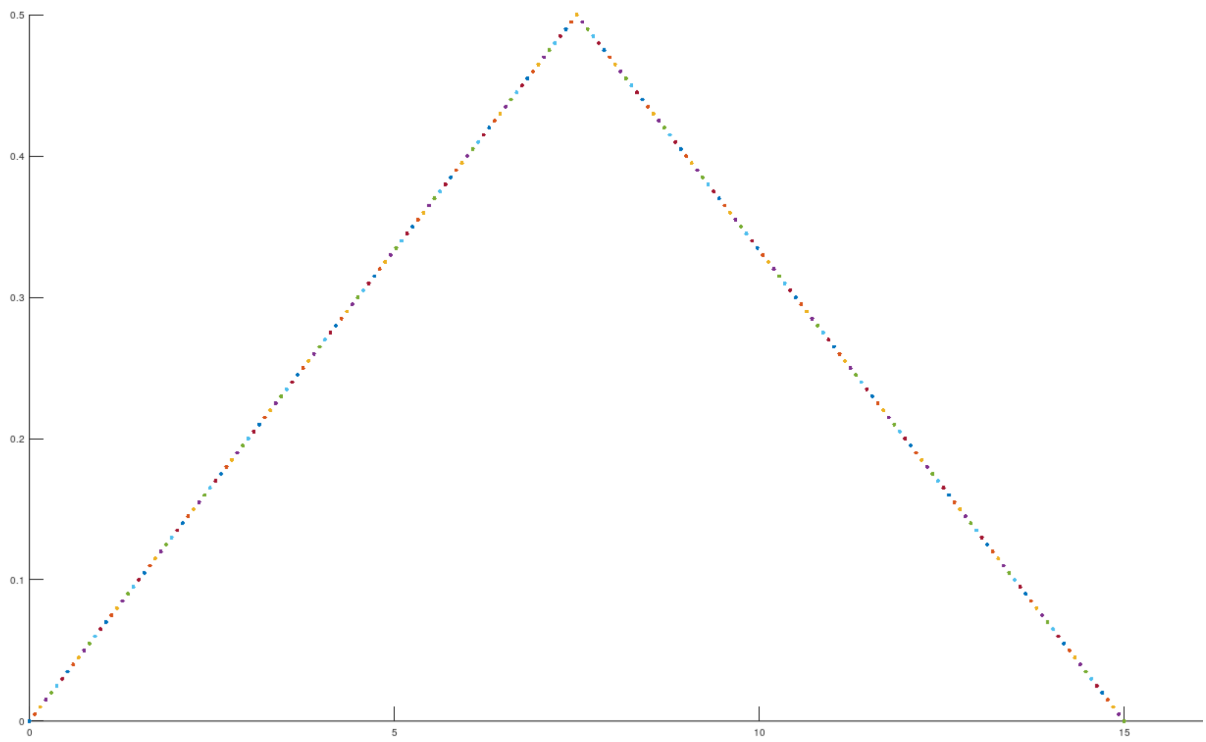
b) Dla n niezależnych zmiennych losowych pochodzących z rozkładu jednostajnego ciągłego na odcinku (0,1) $X_1, X_2, .., X_n \sim U(0,1)$ można zdefiniować zmienną losową będącą ich suma $X = X_1 + X_2 + .. + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ O zmiennej X mówimy, że pochodzi z rozkładu Irwina-Halla, co zapisujemy $X \sim IH(n)$.

Funkcja gęstości:

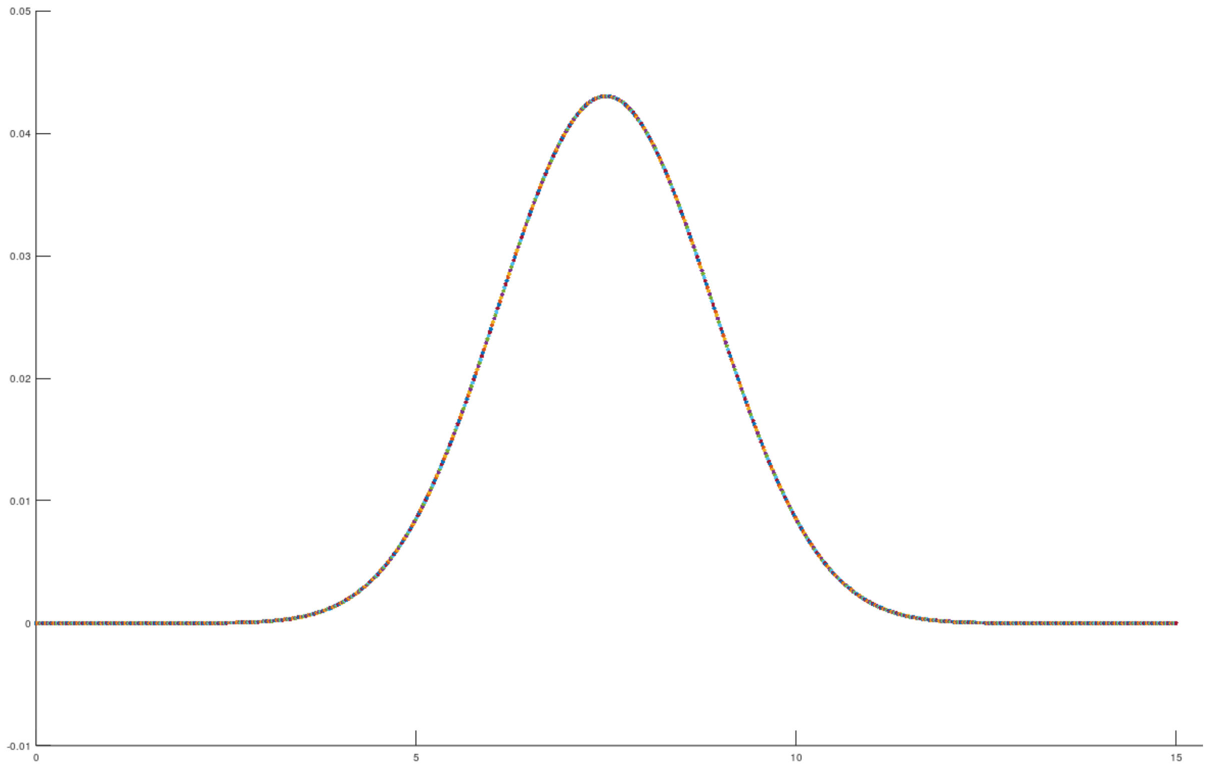
$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1}$$

UWAGA: Aby uzyskać U(0,15) mnożymy wynik razy 15.

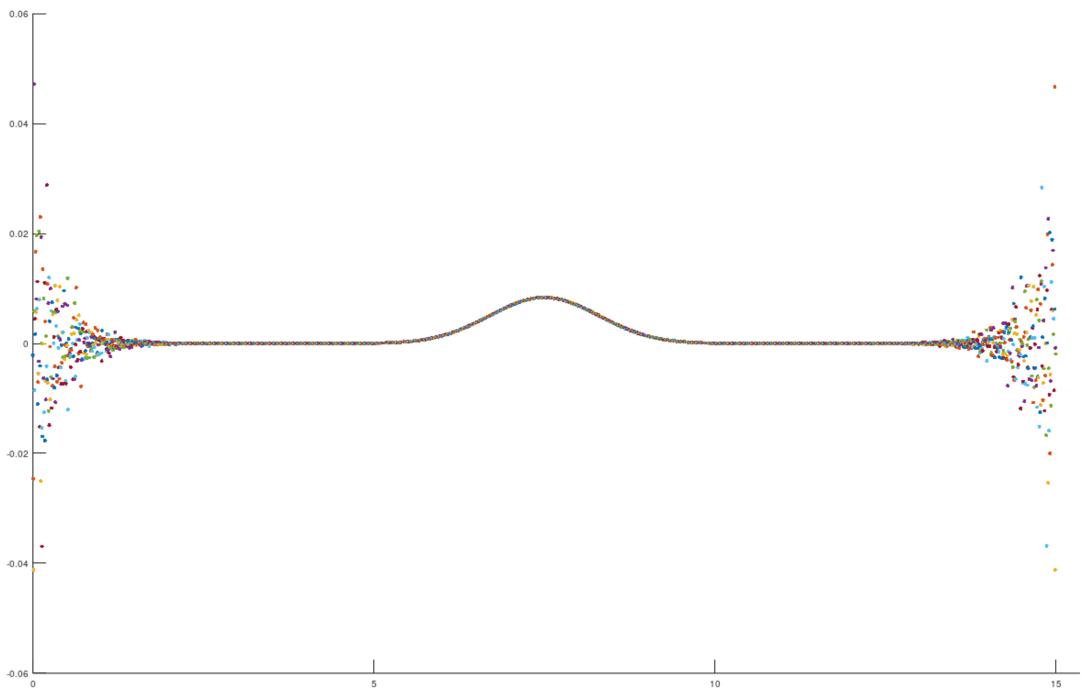
Niestety nie umiałam sobie poradzić z funkcją w R więc wygenerowałam te wykresy w Octave.



Wykres 6.7. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=2.



Wykres 6.8. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=10.



Wykres 6.9. Wykres krzywej gęstości dla rozkładu średniej arytmetycznej n=30.

SYMULACJE ROBIMY ANALOGICZNIE JAK W ZADANIU 6a)
W przypadku n=30 widzimy zaburzenia na końcach. Symulacje wychodzą podobnie jak w zad 6a. Warto zauważyć, że dla n->∞ rozkład zaczyna przypominać rozkład normalny.