

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Estruturas de Dados Cinéticas

Marcos Siolin Martins

MONOGRAFIA FINAL

MAC 499 — TRABALHO DE
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof^a. Dr^a. Cristina Gomes Fernandes

São Paulo
2022

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

Agradecimentos

Whatever you do, do it well.

— Walt Disney

Gostaria de colocar aqui os meus agradecimentos a todos aqueles que me apoiaram e contribuíram, de forma direta ou indireta, com a produção deste trabalho.

Gostaria de agradecer à minha família: as minhas irmãs, Melissa e Milena, e os meus pais especialmente, Elke e Renato. Eles têm me guiado e apoiado desde o início e foi com esse apoio e colaboração que as minhas maiores realizações foram possíveis.

Gostaria de agradecer também a todos os amigos e colegas que participaram da realização deste trabalho. Em particular, gostaria de agradecer ao Davi, ao Luciano, ao Willian (Hiroshi) e ao Daniel (Lawand).

Por fim, gostaria de agradecer a todos os meus professores que me ensinaram e me fizeram evoluir nos últimos quatro anos. Em especial, gostaria de agradecer a minha orientadora: a Cris, que me orientou com muita paciência e dedicação, mesmo antes, quando este estudo era ainda uma iniciação científica.

Resumo

Marcos Siolin Martins. **Estruturas de Dados Cinéticas**. Monografia (Bacharelado).

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

Estruturas de dados cinéticas são um modelo proposto por Basch, Guibas e Hershberger para a resolução de problemas cinéticos de maneira eficiente. Problemas cinéticos são problemas em que os objetos envolvidos estão em movimento contínuo e desejamos saber um determinado atributo destes objetos no instante atual. Por exemplo, consultar qual o par de pontos mais próximo no momento, num conjunto de pontos em movimento.

A interface proposta para as estruturas oferece suporte a três operações: consulta, que retorna o atributo mantido, avançar no tempo, que altera o instante atual para um dado instante no futuro, e alterar a trajetória de objetos, caracterizada pela alteração de uma função cujo nome é plano de vôo. O plano de vôo é necessário para manter o atributo desejado sobre os elementos: ele define a trajetória dos pontos ao longo do tempo e será utilizado para calcular os chamados certificados. Os certificados são objetos que garantem que a organização interna da estrutura está correta até um determinado instante, denominado prazo de validade do certificado. As estruturas serão orientadas a eventos, que são o vencimento de certificados. Os certificados serão mantidos numa fila de prioridades com o seu prazo de validade como prioridade. O vencimento de um certificado significa que a estrutura ficou inválida e é necessário realizar mudanças para que ela volte a se tornar válida, removendo os certificados vencidos e gerando novos certificados no processo.

Com a inclusão da dimensão tempo, a forma tradicional de analisar algoritmos não é adequada para a análise dessas estruturas. Por isso, Basch, Guibas e Hershberger também propuseram outros quatro critérios com o intuito de determinar a eficiência de cada estrutura: responsividade, eficiência, localidade e compacidade.

Neste trabalho, estudaremos quatro problemas: ordenação, máximo, par mais próximo e triangulação de Delaunay, todos num contexto cinético. Também estudaremos as respectivas estruturas utilizadas na solução de cada problema e discutiremos sobre os critérios de eficiência em cada uma delas. Para algumas das estruturas também discutiremos um cenário dinâmico-cinético, ou seja, consideraremos operações de inserção e remoção dentro de um contexto cinético.

Palavras-chave: Estruturas de dados cinéticas. Geometria computacional. Algoritmos.

Abstract

Marcos Siolin Martins. **Kinetic Data Structures**. Capstone Project Report (Bachelor).
Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

Kinetic data structures are a model proposed by Basch, Guibas and Hershberger to efficiently solve kinetic problems. Kinetic problems are problems in which the objects involved are in continuous motion and we want to know a certain attribute about these objects at the current moment. For example, we would like to query the closest pair of points at the moment, in a set of moving points.

The proposed interface for the data structures supports three operations: query, that returns the maintained attribute, advance, that adjusts the current moment to a given instant in the future, and changing the object motion, given by updates on a function called flight plan. The flight plan is necessary to maintain the attribute of interest over the elements, it defines the object motion through time and will be used for computing the so called certificates. The certificates are objects that ensure the internal state of our data structure is correct until a certain instant of time: the certificate's expiration time. Our data structures will be event driven where the events are the expirations of certificates. The certificates will be kept in a priority queue with their expiration time as priority. The expiration of a certificate means the data structure has become invalid and we need to change it in order to be in a correct state again, deleting the expired certificates and generating new ones in the process.

The traditional way of analyzing algorithms does not work well with these structures. Because of that, Basch, Guibas and Hershberger also proposed four criteria to determine the quality of the structures: responsiveness, efficiency, locality, and compactness.

In this work, we address four problems: sorting, maximum, closest pair and Delaunay triangulation, all in a kinetic context. We study the respective kinetic data structures used to solve these problems and discuss the quality criteria for each one of them. For some of the structures we also consider a kinetic-dynamic scenario, where insert and delete operations will also be supported in a kinetic context.

Keywords: Kinetic data structures. Computational geometry. Algorithms.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo ordenação cinética	5
1.2	Exemplo de expiração de certificado da lista ordenada	8
1.3	Exemplo de atualização de certificado da lista ordenada	8
1.4	Exemplo após atualização de certificados da lista ordenada	9
1.5	Exemplo de árvore binária de busca com lista duplamente ligada	10
1.6	Exemplo dos certificados da árvore binária de busca	11
1.7	Exemplo de certificado expirado na árvore binária de busca	13
1.8	Exemplo de atualização de certificados da árvore binária de busca	13
1.9	Exemplo de árvore binária de busca com campo <i>size</i>	14
1.10	Exemplo de busca pelo <i>i</i> -ésimo na árvore binária de busca	15
1.11	Exemplo de mudanças na árvore binária de busca após operação CHANGE	15
1.12	Exemplo de operação INSERT na árvore binária de busca	16
1.13	Exemplo de operação DELETE na árvore binária de busca	17
2.1	Exemplo máximo cinético	19
2.2	Certificado expirado	21
2.3	Exemplo de atualização de certificados no heap cinético	21
2.4	Exemplo certificados do heap cinético após operação CHANGE	22
2.5	Exemplo de torneio	23
2.6	Exemplo de certificados em torneio	24
2.7	Exemplo de certificado expirado no torneio	25
2.8	Exemplo de tratamento de certificado no torneio	26
2.9	Exemplo de torneio após operação CHANGE	27
2.10	Exemplo de torneio que suporta inserção e remoção	29
2.11	Exemplo de operação INSERT em torneio	30
2.12	Exemplo de operação DELETE em torneio	31
3.1	Exemplo par mais próximo cinético	35
3.2	Exemplo de cones do algoritmo estático	36

3.3	Exemplo de $Dom(p)$	36
3.4	Exemplo dos conjuntos utilizados no algoritmo	37
3.5	Exemplo de $lcand(p)$	37
3.6	Exemplo de rotação dos pontos	39
3.7	Exemplo de como extrair pontos entre $low(p)$ e $up(p)$	41
3.8	Exemplo de evento HORIZONTAL	43
3.9	Exemplo de evento HORIZONTAL em que nada acontece	44
3.10	Exemplo de evento UP	45
3.11	Exemplo de evento DOWN	47
4.1	Exemplo triangulação de Delaunay	51
4.2	Exemplo diagrama de Voronoi	52
4.3	Exemplo da dualidade entre Delaunay e Voronoi	52
4.4	Exemplo grafo de Delaunay e triangulação de Delaunay	53
4.5	Exemplo troca de aresta	53
4.6	Exemplo evento INCIRCLE	55
4.7	Exemplo de evento LEFT	55
4.8	Exemplo de não localidade	57

Lista de Algoritmos

1.1	Algoritmo ADVANCE	7
1.2	Algoritmo UPDATE da lista ordenada	8
1.3	Algoritmo EVENT da lista ordenada	8
1.4	Algoritmo QUERY_KTH da lista ordenada	9
1.5	Algoritmo CHANGE da lista ordenada	9
1.6	Algoritmo UPDATE da árvore binária de busca	14
1.7	Algoritmo EVENT da árvore binária de busca	14
1.8	Algoritmo QUERY_KTH da árvore binária de busca	15
1.9	Algoritmo CHANGE da árvore binária de busca	16
1.10	Algoritmo INSERT da árvore binária de busca	16
1.11	Algoritmo DELETE da árvore binária de busca	17
2.1	Algoritmo UPDATE do heap cinético	21
2.2	Algoritmo EVENT do heap cinético	21
2.3	Algoritmo QUERY_MAX do heap cinético	22
2.4	Algoritmo CHANGE do heap cinético	22
2.5	Algoritmo UPDATE do torneio cinético	25
2.6	Algoritmo EVENT do torneio cinético	25
2.7	Algoritmo QUERY_MAX do torneio cinético	26
2.8	Algoritmo CHANGE do torneio cinético	26
2.9	Algoritmo INSERT do torneio cinético	29
2.10	Algoritmo INSERT_TOURN do torneio cinético	30
2.11	Algoritmo DELETE do torneio cinético	31
2.12	Algoritmo DELETETOURN do torneio cinético	32
3.1	Algoritmo CLOSEST_PAIR do par mais próximo	38
3.2	Algoritmo SUCCESSOR do par mais próximo	40
3.3	Algoritmo PREDECESSOR do par mais próximo	40
3.4	Algoritmo LCAND do par mais próximo	41
3.5	Algoritmo QUERY_CLOSEST do par mais próximo	41
3.6	Algoritmo HORIZONTALEVENT do par mais próximo cinético	43

3.7	Algoritmo HORIZONTALEVENTLEFT do par mais próximo cinético	44
3.8	Algoritmo HORIZONTALEVENTRIGHT do par mais próximo cinético	45
3.9	Algoritmo UPEVENT do par mais próximo cinético	45
3.10	Algoritmo UPEVENTLEFT do par mais próximo cinético	46
3.11	Algoritmo UPEVENTRIGHT do par mais próximo cinético	46
3.12	Algoritmo DOWNEVENT do par mais próximo cinético	47
3.13	Algoritmo DOWNEVENTLEFT do par mais próximo cinético	48
3.14	Algoritmo DOWNEVENTRIGHT do par mais próximo cinético	48
4.1	Algoritmo DELAUNAY da triangulação de delaunay	54

Sumário

Introdução	1
1 Ordenação cinética	5
1.1 Lista ordenada cinética	6
1.1.1 Análise de desempenho	9
1.2 Árvore binária balanceada de busca	9
1.2.1 Análise de desempenho	17
2 Máximo cinético	19
2.1 Heap cinético	20
2.1.1 Análise de desempenho	22
2.2 Torneio cinético	23
2.2.1 Inserção e remoção em torneio	27
2.2.2 Análise de desempenho	32
3 Par mais próximo cinético	35
3.1 Algoritmo estático	36
3.2 Algoritmo cinético	42
3.2.1 Análise de desempenho	48
4 Triangulação de Delaunay cinética	51
4.1 Análise de desempenho	56
Referências	59

Introdução

Quando desejamos criar algoritmos para resolver problemas com o computador, utilizamos maneiras de organizar os dados, as chamadas estruturas de dados, para que operações de acesso e alteração desses dados possam ser realizadas rapidamente. A forma como serão organizados os dados depende altamente das características do problema em questão.

Neste trabalho estudaremos *estruturas de dados cinéticas* (em inglês, *KDS – Kinetic Data Structures*), propostas por Basch, Guibas e Hershberger [BASCH *et al.*, 1999] para a resolução dos chamados problemas *cinéticos*.

Problemas *cinéticos* são problemas em que deseja-se manter um determinado atributo sobre objetos que estão em movimento contínuo. Os objetos nos problemas podem representar entidades do mundo físico: pontos podem representar pessoas, aviões, aparelhos móveis, entre outras coisas; retas podem representar trajetórias. Devido à natureza desses problemas é razoável que estudemos problemas clássicos de geometria computacional, mas dentro de um contexto cinético. Por exemplo, num conjunto dado de pontos em movimento, qual par de pontos possui distância mínima.

Quando se tem dado um conjunto fixo de objetos geométricos, e deseja-se saber informações de um determinado atributo desses objetos (como, por exemplo, em um conjunto dado de pontos, qual par de pontos possui distância mínima), dizemos que esse é um problema *estático*.

O mesmo problema pode ser formulado sobre um conjunto mutável. Por exemplo, pontos poderiam ser inseridos e removidos ao longo do tempo. Queremos calcular o atributo sem ter que resolver do zero a nova instância do problema estático. Chamamos esse tipo de problema de *dinâmico* ou *on-line*.

As *estruturas de dados cinéticas* recebem esse nome para diferenciá-las das estruturas de dados *estáticas* e *dinâmicas*, pois têm como foco manter a descrição combinatória do problema que se altera frequentemente com a passagem de tempo, já que os objetos estão em movimento contínuo.

Essas estruturas nos permitem realizar consultas de um determinado atributo dos objetos, no instante atual. A garantia de que a estrutura permanece correta se dá através do uso de instrumentos chamados *certificados*. Os certificados estabelecem que uma relação entre um objeto da estrutura e outro se mantém verdadeira até o seu vencimento e devem ajudar na manutenção da estrutura para permitir as consultas desejadas. Chamaremos o instante de tempo em que o certificado vence de valor ou *prazo de validade* do certificado.

As estruturas contarão com uma operação ADVANCE, responsável por avançar até o

instante de tempo atual t mantendo a estrutura correta. Para tal, é necessário que nenhum certificado esteja vencido no instante t , ou seja, o certificado de menor prazo de validade expira após o instante t . Sendo assim, estamos interessados nos certificados de menor prazo de validade, para que possamos realizar os ajustes necessários enquanto existir um certificado que expira antes do instante de tempo que desejamos alcançar.

Para identificar o instante de vencimento de certificados, manteremos os certificados em uma fila com prioridades, utilizando como prioridade o prazo de validade do certificado.

Para calcular o prazo de validade dos certificados, utilizaremos o chamado *plano de vôo* dos objetos. O plano de vôo de um objeto é uma função que, dado o instante de tempo atual, determina sua trajetória. Assim como na vida real, o plano de vôo pode sofrer mudanças. Essas mudanças no plano de vôo geram a necessidade de atualização de certificados e de ajustes nas estruturas. A operação `CHANGE` será utilizada para atualizar o plano de vôo dos objetos e realizar as mudanças necessárias para manter a estrutura correta.

Por fim, a operação `QUERY` ficará responsável por responder o atributo geométrico que desejamos saber num dado instante.

Uma questão natural a ser feita a respeito destas estruturas é como medir o desempenho delas, já que as formas clássicas de determinar a complexidade de algoritmos não se enquadram muito bem, por conta da adição da dimensão tempo. Basch, Guibas e Hershberger [BASCH *et al.*, 1999] propuseram algumas formas de avaliar essas estruturas. São elas:

- Responsividade: uma estrutura é dita *responsiva* se o custo de processar um certificado, isto é, o custo de atualizar os certificados e as outras estruturas necessárias é pequeno;
- Eficiência: uma estrutura é dita *eficiente* se a razão entre a quantidade total de eventos processados e a quantidade de eventos *externos* é pequena. Um evento diz respeito ao vencimento de um certificado, os eventos chamados *externos* são eventos que geram mudanças na descrição combinatória do atributo, enquanto eventos chamados *internos* não geram mudanças na descrição combinatória do atributo, mas ainda são necessários para manter a estrutura. O total de eventos processados é a soma da quantidade de eventos externos e internos;
- Compacidade: uma estrutura é dita *compacta* se a quantidade máxima de certificados que podem estar na fila com prioridades em um determinado instante é linear;
- Localidade: uma estrutura é dita *local* se a quantidade máxima de certificados na fila que estão relacionados com um determinado objeto é pequena.

O custo de uma operação é dito pequeno se o custo é assintoticamente polilogarítmico no número de objetos ou polinomial para um valor pequeno no expoente.

Neste trabalho estudaremos alguns problema cinéticos e as estruturas utilizadas para resolvê-los. Apesar do modelo proposto por Basch, Guibas e Hershberger [BASCH *et al.*, 1999] funcionar para trajetórias não-lineares, nos restringiremos apenas a trajetórias lineares. Neste caso, cada objeto corresponde a um par (x_0, v) , onde x_0 representa o valor inicial do objeto e v é a velocidade atual do objeto.

No Capítulo 1 estudaremos o problema da ordenação cinética. Neste problema, os pontos movem-se apenas em uma dimensão $x(t) = x_0 + vt$ e desejamos saber, para um dado i , qual dos pontos possui o i -ésimo maior valor na coleção em determinado instante t . As estruturas que consideraremos para resolver o problema são a lista ordenada cinética e uma árvore binária balanceada de busca. A árvore binária balanceada de busca além de suportar as operação já citadas também será capaz de realizar operações INSERT e DELETE.

No Capítulo 2 estudaremos o problema do máximo cinético. Assim como no problema anterior, os pontos movem-se apenas em uma dimensão $x(t) = x_0 + vt$ e desejamos saber qual dos pontos possui o maior valor no instante atual. Apesar do problema anterior resolver este problema, pois basta buscar pelo primeiro maior valor na coleção, veremos que é possível obter essa resposta de forma mais eficiente utilizando outras estruturas.

No Capítulo 3 estudaremos o problema do par mais próximo cinético, em que utilizaremos estruturas vistas nos dois capítulos anteriores. Diferentemente dos problemas anteriores, os pontos movem-se em duas dimensões de acordo com uma função $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, sendo que $x(t) = x_0 + v_x t$ e $y(t) = y_0 + v_y t$. Desejamos saber qual dos pares possíveis de pontos possui distância mínima.

No Capítulo 4 estudaremos o problema da triangulação de Delaunay cinética. Assim como no problema do par mais próximo, os pontos movem-se em duas dimensões de acordo com uma função $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, sendo que $x(t) = x_0 + v_x t$ e $y(t) = y_0 + v_y t$. Desejamos manter uma descrição da triangulação de Delaunay dos pontos.

Capítulo 1

Ordenação cinética

Considere o seguinte problema cinético. Dada uma coleção de n pontos em movimento retilíneo, o objetivo é responder consultas do tipo: para um certo i , com $1 \leq i \leq n$, quem é o i -ésimo maior valor da coleção no instante corrente.

Por exemplo, se tivermos quatro elementos na coleção, digamos $(6, -\frac{1}{2})$, $(5, 0)$, $(3, \frac{1}{4})$ e $(0, \frac{4}{3})$, podemos representar essa coleção como na Figura 1.1.

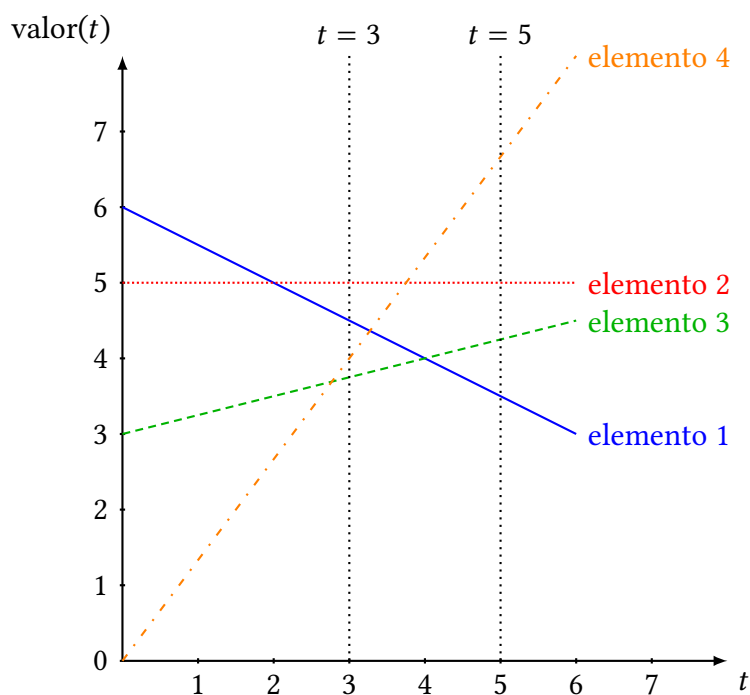


Figura 1.1: O segundo maior valor no instante $t = 0$ é do elemento 2, e no instante $t = 3$ é do elemento 1. O menor valor da coleção no instante $t = 3$ é do elemento 3, e no instante $t = 5$ é do elemento 1.

Queremos dar suporte às seguintes operações:

- $\text{ADVANCE}(t) \rightarrow$ avança o tempo corrente para t ;
- $\text{CHANGE}(j, v) \rightarrow$ altera a velocidade do elemento j para v ;
- $\text{QUERY_KTH}(i) \rightarrow$ devolve o elemento cujo valor é o i -ésimo maior no instante atual.

1.1 Lista ordenada cinética

Um jeito natural de resolver o problema da ordenação cinética é por meio de uma lista ordenada cinética, que é manter um vetor com os elementos dados em ordem decrescente do valor no instante atual.

Inicialmente o vetor começa com os valores dos elementos no instante $t = 0$, ou seja, com o valor x_0 de cada elemento, e este vetor é ordenado em ordem decrescente. Na verdade, o vetor pode armazenar não os valores, mas os índices dos elementos, e fazemos ordenação indireta. No caso de empates nos valores dos elementos, o desempate será feito pela velocidade, ou seja, se dois elementos, digamos i e j , possuem o mesmo valor x_0 , mas a velocidade de i é maior que a de j , então i será tratado como se possuísse maior valor que j no instante inicial. Esse mesmo critério de desempate será aplicado em todos os instantes e também em todos os problemas daqui em diante.

Uma vez de posse do vetor ordenado com os valores iniciais decrescentemente, construímos um certificado para cada par de elementos consecutivos no vetor. O i -ésimo certificado, denotado pelo par (i, t) , se refere ao par das posições i e $i + 1$. O valor t consiste no instante de tempo em que o i -ésimo elemento deixará de ter um valor maior que o valor do $(i + 1)$ -ésimo elemento do vetor, se esse instante for maior ou igual a 0, ou em geral ao instante atual. Do contrário, o valor t consiste em $+\infty$. O valor t do certificado é o seu *prazo de validade*.

Esses prazos de validade determinam os *eventos* que potencialmente causarão modificações no vetor que mantém os elementos ordenados pelo seu valor e consequentemente em alguns certificados.

Esses $n - 1$ certificados são colocados em uma fila com prioridades, com seu prazo de validade determinando a prioridade. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade. Ou seja, a fila com prioridades pode ser implementada com um heap de mínimo que usa os prazos de validade como chave.

Para descrever a implementação das três operações, precisamos estabelecer o nome das variáveis usadas. São elas:

1. n : o número de elementos dados;
2. x_0 e $speed$: vetores com o valor e a velocidade inicial de cada um dos n elementos;
3. now : instante atual. A variável now será tratada como global, ou seja, será utilizada nas rotinas sem ser passada como argumento;
4. $sorted$: vetor com os índices dos n elementos em ordem decrescente do seu valor no instante now ;

5. *indS*: vetor de n posições; *indS*[j] guarda a posição em *sorted* do elemento j ;
6. *cert*: vetor com os $n - 1$ certificados; *cert*[i] guarda o i -ésimo, ou seja, o certificado entre *sorted*[i] e *sorted*[$i + 1$], para $1 \leq i < n$;
7. Q : fila que guarda os inteiros $1, \dots, n - 1$, sendo *cert*[i] a prioridade de cada elemento da fila.

A interface da fila com prioridades que utilizaremos inclui as duas seguintes operações:

1. *MINPQ*(Q): devolve i tal que *cert*[i] é mínimo;
2. *UPDATEPQ*(Q, i, t): altera a chave do i -ésimo certificado para t e ajusta Q de acordo.

O vetor *indS* nos permite implementar a operação *CHANGE* de maneira eficiente, pois, dado um elemento j , precisamos saber a posição i do elemento j em *sorted* para recalculer os certificados relacionados com a posição i .

Para implementar a operação *UPDATEPQ*(Q, i, t) em tempo logarítmico no número de elementos na fila Q , é necessário utilizar um vetor adicional *indQ* que guarda em *indQ*[i] a posição em Q do i -ésimo certificado.

Com isso, a operação *ADVANCE*(t), implementada no Algoritmo 1.1, segue uma ideia bem simples: enquanto t for maior que o prazo de validade do próximo evento, avançamos *now* para esse prazo de validade e tratamos esse evento. Nos problemas seguintes, a operação *ADVANCE*(t) será sempre a mesma; as únicas mudanças ocorrerão no tratamento de um evento. Um evento está associado a um certificado (i, t) que expira quando *now* = t . O tratamento do evento correspondente ao certificado (i, t) consiste em trocar de lugar os índices das posições i e $i + 1$ do vetor *sorted*, recalculer o prazo de validade do $(i - 1)$ -ésimo certificado se $i > 1$, e do $(i + 1)$ -ésimo certificado se $i < n - 1$. O i -ésimo certificado também deve ser ajustado para $+\infty$. Finalmente, é necessário fazer ajustes em Q , nas chaves dos certificados que sofreram alteração.

Algoritmo 1.1 Função *ADVANCE*.

```

1: function ADVANCE( $t$ )
2:   if  $t < \text{now}$  :
3:     return
4:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
5:   while  $t \geq \text{cert}[i]$  :
6:      $\text{now} \leftarrow \text{cert}[i]$ 
7:     EVENT()
8:      $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
9:    $\text{now} \leftarrow t$ 

```

Na implementação da operação *EVENT*, utilizaremos a rotina *UPDATE*(i) para calcular o novo prazo de validade t do i -ésimo certificado, se $1 \leq i < n$, e fazer os devidos ajustes em Q . Ambas as implementações podem ser encontradas nos Algoritmos 1.3 e 1.2, respectivamente. Para calcular t , utilizaremos uma rotina chamada *EXPIRE*(i, j), que calcula

o prazo de validade dos certificados entre os elementos i e j no instante now . A rotina auxiliar $EXPIRE(i, j)$ não mudará para outros problemas, mantendo a mesma definição. As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram as atualizações feitas por essas rotinas.

Algoritmo 1.2 Função UPDATE.

```

1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $1 \leq i < n$  :
3:      $t \leftarrow EXPIRE(i, i + 1)$ 
4:     UPDATEPQ( $Q, i, t$ )

```

Algoritmo 1.3 Função EVENT.

```

1: function EVENT()
2:    $i \leftarrow MINPQ(Q)$ 
3:   while  $cert[i] = now$  :
4:      $sorted[i] \leftrightarrow sorted[i + 1]$ 
5:      $indS[sorted[i]] \leftrightarrow indS[sorted[i + 1]]$ 
6:     UPDATE( $i$ )
7:     UPDATE( $i - 1$ )
8:     UPDATE( $i + 1$ )
9:    $i \leftarrow MINPQ(Q)$ 

```

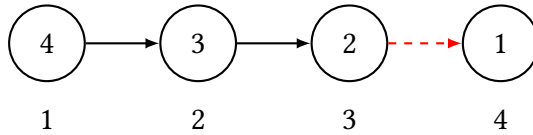


Figura 1.2: No exemplo da Figura 1.1, $cert[3]$ expirou no instante $t = 2$.

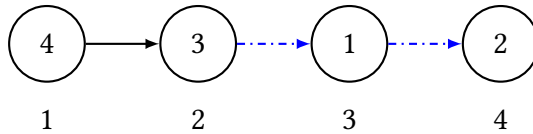


Figura 1.3: $sorted[3]$ e $sorted[4]$ foram trocados e $cert[2]$, $cert[3]$ foram atualizados.

A operação $QUERY_KTH(i)$, implementada no Algoritmo 1.4, consiste em devolver $sorted[i]$, enquanto que a operação $CHANGE(j, v)$ consiste em alterar a posição $x_0[j]$ para $x_0[j] + (speed[j] - v) \cdot now$, a posição $speed[j]$ para v e recalculer os eventuais certificados de que j participa. O novo valor da posição $x_0[j]$ corresponde à posição inicial do elemento caso ele tivesse começado com essa velocidade e estivesse na posição atual agora. Para tanto, a partir da posição i em que j se encontra no vetor $sorted$, podemos recalculer $cert[i - 1]$ se $i > 1$ e $cert[i]$ se $i < n$, como ilustrado na Figura 1.4, acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em Q correspondentes a estas modificações. As instruções executadas pela operação CHANGE estão descritas no Algoritmo 1.5.

Algoritmo 1.4: Função QUERY_KTH.

```

1: function QUERY_KTH( $i$ )
2:   if  $1 \leq i \leq n$  :
3:     return sorted[ $i$ ]
4:   return -1

```

Algoritmo 1.5 Função CHANGE.

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
3:    $\text{speed}[j] \leftarrow v$ 
4:    $i \leftarrow \text{indS}[j]$ 
5:   UPDATE( $i$ )
6:   UPDATE( $i - 1$ )

```

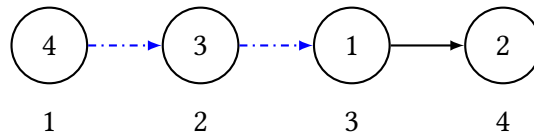


Figura 1.4: Após a mudança de velocidade, no instante $t = 2.1$, do elemento 3, que se encontra em $\text{sorted}[2]$, $\text{cert}[1]$ e $\text{cert}[2]$ foram atualizados.

1.1.1 Análise de desempenho

A lista ordenada cinética é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg n)$. O custo de processar um certificado corresponde a uma iteração da linha 3 na operação **EVENT**, que atualiza o vetor que guarda o índice dos elementos em $O(1)$ e realiza alterações na fila de certificados em tempo $O(\lg n)$, por isso o custo total $O(\lg n)$ para processar um certificado.

A lista ordenada cinética é uma estrutura *eficiente*, pois todos os eventos processados são eventos *externos*, isto é, todo vencimento de certificado representa a troca de ordem entre dois elementos na lista, que é uma mudança na descrição combinatória do problema.

A lista ordenada cinética é uma estrutura *compacta*, pois como cada certificado está associado à relação de ordem entre um elemento e seu predecessor, teremos no máximo n certificados na fila de prioridades num determinado instante.

A lista ordenada cinética é uma estrutura *local*, pois cada elemento está relacionado a no máximo dois certificados, o certificado entre ele e o seu predecessor e o certificado entre o seu sucessor e ele.

1.2 Árvore binária balanceada de busca

Manter um vetor ordenado é uma boa maneira de resolver o problema da lista ordenada cinética dando suporte às operações $\text{ADVANCE}(t)$, $\text{CHANGE}(j, v)$ e $\text{QUERY_KTH}(i)$. Poderíamos

também querer dar suporte, além das operações citadas, às seguintes operações:

- $\text{INSERT}(v, x_t) \rightarrow$ insere um elemento com velocidade v e valor x_t no instante now ;
- $\text{DELETE}(i) \rightarrow$ remove o elemento i no instante now .

Para inserir um elemento no vetor ordenado, antes teríamos de encontrar a posição que este deveria ocupar no vetor. Digamos que seja a posição j . Após encontrar a posição, movemos todos os elementos, a partir da posição j , uma posição à frente e colocamos o elemento na posição j . Após isso, os certificados de j até $n - 1$ devem ser atualizados, pois esses elementos mudaram de posição no vetor, e um novo certificado será criado, o n -ésimo certificado. Ademais, o total de elementos n deve ser mudado para $n + 1$. O novo certificado também deve ser inserido na fila com prioridades.

Só a operação de inserir um novo elemento no vetor já pode se tornar pouco eficiente com uma grande quantidade de elementos sendo inseridos no começo do vetor, consumindo tempo linear por inserção. Como a remoção de um elemento no vetor ordenado envolve uma sequência parecida de operações, da mesma maneira se torna pouco eficiente, também consumindo tempo linear no pior caso.

Dessa forma, apesar da lista ordenada cinética implementada manipulando um vetor ser uma estrutura eficiente para a operação $\text{QUERY_KTH}(i)$, com um consumo de tempo constante, o consumo de tempo para as operações $\text{INSERT}(v, x_t)$ e $\text{DELETE}(i)$ é, no pior caso, proporcional ao número de elementos, o que pode ser ruim para uma grande quantidade de elementos, inserções e remoções.

Podemos equilibrar o consumo de tempo das operações $\text{QUERY_KTH}(i)$, $\text{INSERT}(v, x_t)$ e $\text{DELETE}(i)$ em tempo logarítmico no número de elementos, usando uma ABBB (árvore binária balanceada de busca). Os pontos serão armazenados na ABBB tendo o seu valor no instante now como chave.

Além da ABBB, para garantirmos a eficiência das operações EVENT , CHANGE , INSERT e DELETE , cada elemento terá um apontador para o seu predecessor e um apontador para o seu sucessor, formando uma lista duplamente ligada ordenada pelo valor do elemento no instante now ; veja a Figura 1.5.

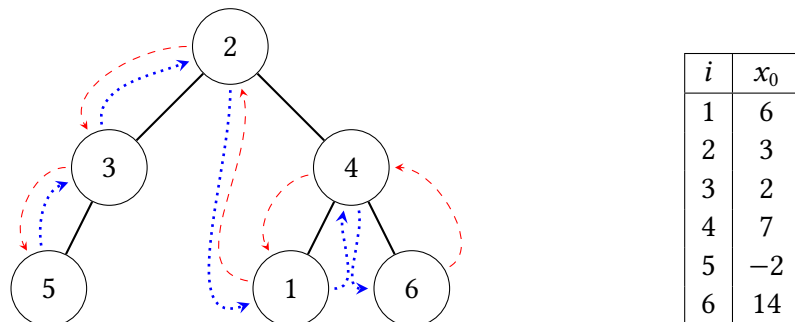


Figura 1.5: Exemplo de árvore em que a ordem dos elementos, do menor para o maior no instante $now = 0$, é $5 - 3 - 2 - 1 - 4 - 6$. Os apontadores para o elemento anterior são representados pelas setas vermelhas tracejadas e os apontadores para o elemento posterior são representados pelas setas azuis pontilhadas.

No que diz respeito aos certificados, antes um certificado estava associado a uma posição e, no vetor, ao inserirmos um elemento em uma determinada posição, teríamos que deslocar todos os certificados consequentes àquela posição. Agora, para que consigamos alterar apenas uma quantidade constante de certificados após uma inserção, os certificados não estarão mais associados a uma posição e sim aos elementos.

O certificado i se refere à relação estabelecida entre o elemento i e seu predecessor e consiste no instante de tempo em que o elemento i deixará de ter um valor maior que o valor do seu predecessor, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em $+\infty$. Se o elemento i não possui predecessor, então o certificado também consiste em $+\infty$. Veja a Figura 1.6.

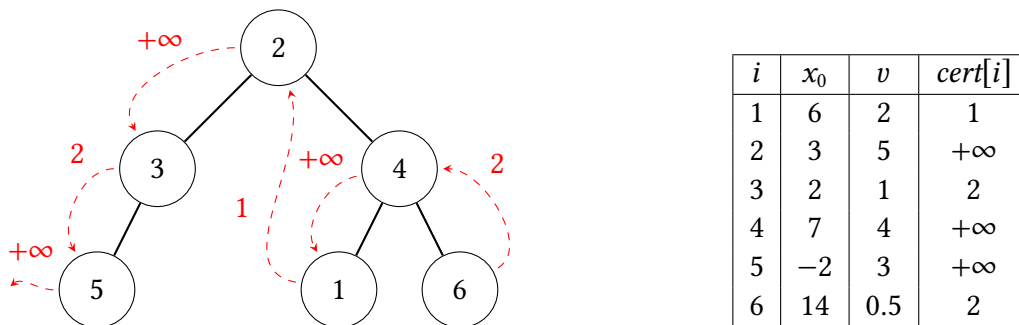


Figura 1.6: Certificados representados pelas setas vermelhas tracejadas. O elemento 5 é o último da lista e o seu certificado vale $+\infty$.

Esses n certificados também serão colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade determinando a prioridade. A fila com prioridades agora também deverá suportar operações como a inserção e remoção de certificados.

Para descrever as implementações das operações, vamos estabelecer os nomes dos objetos, variáveis e rotinas auxiliares utilizados:

1. n : número de elementos no instante *now*;
2. *node*: objeto que compõe a árvore binária balanceada de busca, com atributos:
 - (a) *left*: aponta para a raiz da subárvore esquerda do nó;
 - (b) *right*: aponta para a raiz da subárvore direita do nó;
 - (c) *key*: aponta para um elemento;
 - (d) *size*: quantidade de nós que a subárvore enraizada neste nó possui. Este atributo será importante para a operação `QUERY_KTH(i)`;
3. *root*: nó que é a raiz da árvore binária balanceada de busca;
4. *element*: objeto com os seguintes atributos:
 - (a) *id*: vem de *identifier* e é o atributo para identificar o objeto. Assim, daqui em diante, usaremos elemento i para nos referirmos ao elemento cujo *id* é i ;
 - (b) *speed*: velocidade do elemento;

- (c) x_0 : valor que o elemento possuía no instante $t = 0$;
 - (d) *next*: apontador para o elemento imediatamente posterior a este na coleção, no instante *now*. O elemento imediatamente posterior a i é aquele que possui o menor valor dentre a coleção de elementos que possuem valor maior que o elemento i ;
 - (e) *prev*: apontador para o elemento imediatamente anterior a este na coleção, no instante *now*;
 - (f) *pqpos*: vem de *priority queue position* e aponta para a posição do certificado associado ao elemento na fila com prioridades;
 - (g) *cert*: vem de *certificate* e é o prazo de validade do certificado entre este elemento e o elemento apontado por *prev*; se *prev* não aponta para ninguém, *cert* vale $+\infty$;
 - (h) *node*: apontador para o nó da árvore binária de busca em que o elemento se encontra;
5. Q : fila com prioridades que contém os elementos; o elemento com certificado de menor valor estará à frente da fila;
 6. $\text{INSERTKEY}(\text{root}, e) \rightarrow$ insere e , um elemento, na árvore binária balanceada de busca com raiz root e retorna a, possivelmente nova, raiz da árvore. No processo também atualiza a lista ligada de elementos;
 7. $\text{DELETEKEY}(\text{root}, e) \rightarrow$ remove e , um elemento, da árvore binária balanceada de busca com raiz root e retorna a, possivelmente nova, raiz da árvore. No processo também atualiza a lista ligada de elementos.

Para a implementação das operações $\text{CHANGE}(j, v)$ e $\text{DELETE}(i)$, precisamos de alguma maneira recuperar um elemento baseado no seu *id*. Para tal, podemos utilizar uma tabela de símbolos, implementada por uma árvore binária balanceada de busca ou uma tabela de dispersão. A seguir estão três operações que nos ajudarão a recuperar os elementos:

1. $\text{GETOBJECT}(i) \rightarrow$ retorna o elemento i ;
2. $\text{INSERTOBJECT}(e) \rightarrow$ insere e , que é um elemento, na estrutura;
3. $\text{DELETEOBJECT}(e) \rightarrow$ remove e , que é um elemento, da estrutura.

Para permitir a inserção e remoção de certificados, a interface da fila com prioridades será reformulada, contando com duas operações extras:

1. $\text{INSERTPQ}(Q, e, t) \rightarrow$ insere (e, t) na fila com prioridades Q , sendo t o prazo de validade do certificado de e ;
2. $\text{DELETEPQ}(Q, e) \rightarrow$ remove e da fila com prioridades Q ;
3. $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t) \rightarrow$ muda o prazo de validade do certificado de e para t e atualiza a fila com prioridades Q ;
4. $\text{MINPQ}(Q) \rightarrow$ devolve o elemento com o certificado de menor prazo de validade da fila com prioridades Q .

A operação $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t)$ pode ser implementada de modo a consumir tempo logarítmico no número de elementos em Q graças ao atributo $pqpos$ dos elementos.

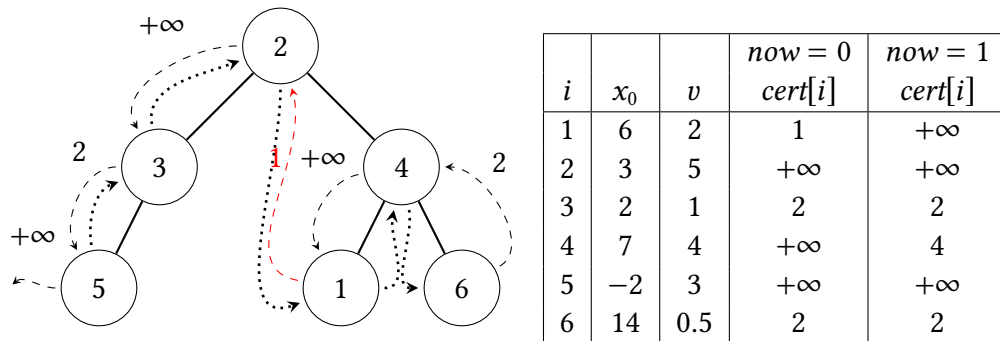


Figura 1.7: Certificado do elemento 1 expirou em $now = 1$.

Um evento está associado a um par (e, t) que corresponde ao certificado do elemento e que expira no instante t , veja a Figura 1.7. O tratamento do evento correspondente a esse par (e, t) consiste em trocar de lugar o elemento e e seu predecessor, digamos e' , na árvore binária de busca e na lista ligada, e recalculer o prazo de validade de até três certificados, ilustrado na Figura 1.8:

- do certificado de e ;
- do certificado de e' ;
- do certificado do novo sucessor de e' , caso não seja NULL.

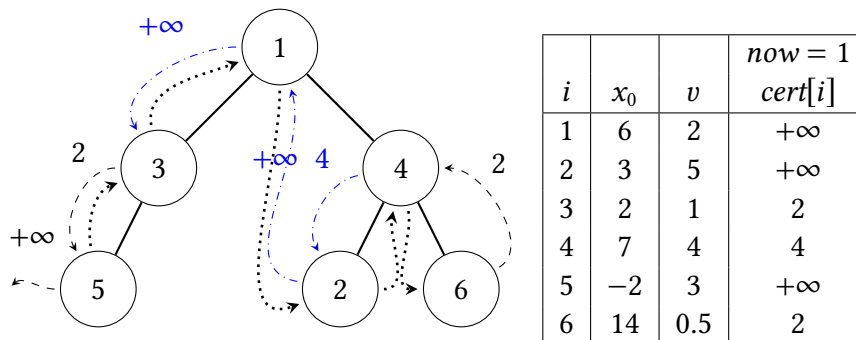


Figura 1.8: Em $now = 1$, o elemento 1 e o elemento 2 foram trocados e os certificados do elemento 1, elemento 2 e elemento 4 foram atualizados.

Na implementação da operação EVENT , no Algoritmo 1.7, utilizaremos a rotina $\text{UPDATE}(e)$, no Algoritmo 1.6, que calcula o novo prazo de validade t do certificado do elemento e , e chama a rotina $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t)$. A função $\text{SWAP}(e_1, e_2)$ troca a posição de e_1 e e_2 na árvore binária balanceada de busca e na lista ligada e a função $\text{EXPIRE}(e, e')$ calcula a validade do certificado entre os elementos e e e' ; se e' é NULL, retorna $+\infty$.

Algoritmo 1.6 Função UPDATE.

```

1: function UPDATE( $e$ )
2:   if  $e \neq \text{NULL}$  :
3:      $e' \leftarrow e.\text{next}$ 
4:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(e, e')$ 
5:     UPDATEPQ( $Q, e, t$ )

```

Algoritmo 1.7: Função EVENT.

```

1: function EVENT()
2:    $e_1 \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $e_1.\text{cert} = \text{now}$  :
4:      $e_2 \leftarrow e_1.\text{prev}$ 
5:     SWAP( $e_1, e_2$ )
6:     UPDATE( $e_1$ )
7:     UPDATE( $e_2$ )
8:     UPDATE( $e_2.\text{next}$ )
9:      $e_1 \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

A operação $\text{QUERY_KTH}(i)$ consiste em devolver o i -ésimo maior elemento da lista ligada, ou seja, o i -ésimo da direita para a esquerda, pois a árvore está em ordem crescente da esquerda para a direita. Para tal, percorreremos a árvore binária balanceada de busca utilizando o atributo *size* para, a cada iteração, decidir em qual subárvore o i -ésimo está, ajustando i quando necessário. O Algoritmo 1.8 implementa esta operação e a Figura 1.10 simula a execução em um exemplo. A rotina auxiliar $\text{RSIZE}(r)$ devolve o valor de $r.\text{right.size}$ caso $r.\text{right}$ seja não nulo, caso contrário devolve 0.

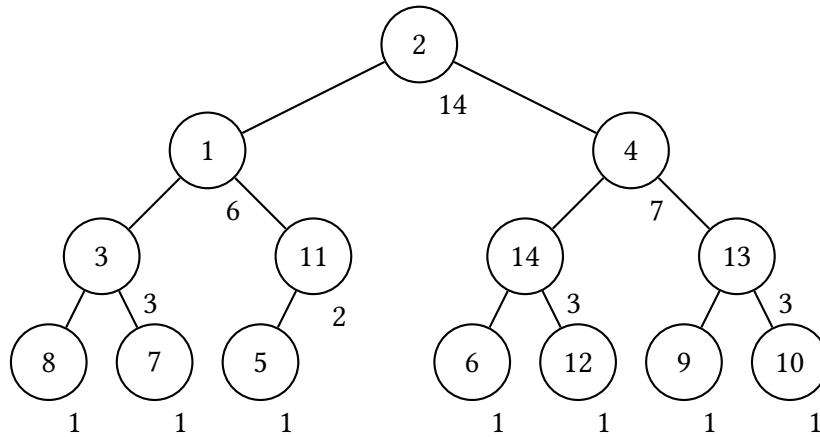


Figura 1.9: Exemplo de ABB com campo *size*.

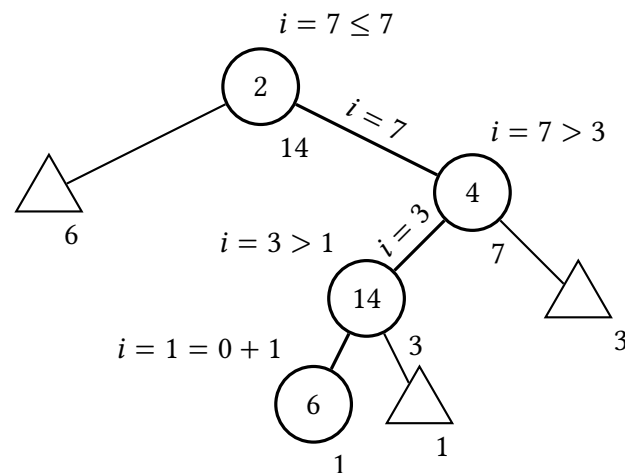


Figura 1.10: Exemplo de busca pelo 7º elemento da direita para a esquerda na árvore da Figura 1.9.

Algoritmo 1.8: Função QUERY_KTH.

```

1: function QUERY_KTH( $i$ )
2:    $node \leftarrow root$ 
3:    $r \leftarrow RSIZE(node)$ 
4:   while  $i \neq r + 1$  :
5:     if  $i \leq r$  :
6:        $node \leftarrow node.right$ 
7:     else
8:        $node \leftarrow node.left$ 
9:        $i \leftarrow i - (r + 1)$ 
10:     $r \leftarrow RSIZE(node)$ 
11:  return  $node.key$ 

```

A operação $CHANGE(j, v)$, como implementada no Algoritmo 1.9, consiste em recuperar o elemento e com identificador j , alterar seu atributo x_0 para $x_0 + (speed - v) \cdot now$, $speed$ para v e recalculer os eventuais certificados de que j participa, que seriam $e.cert$ e $e.next.cert$, se $e.next$ existe. A Figura 1.11 ilustra um exemplo com os elementos afetados.

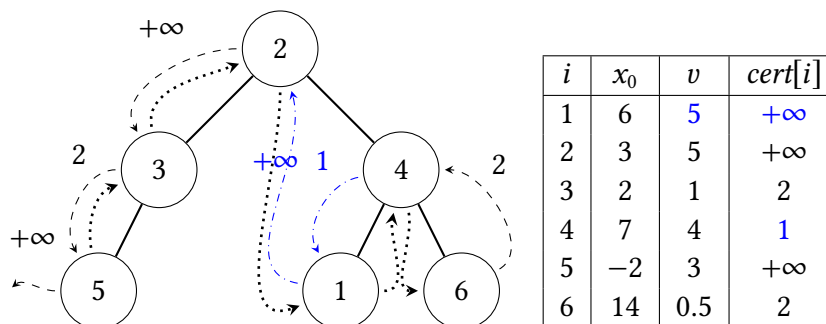


Figura 1.11: Após chamar $CHANGE(1, 5)$, a velocidade do elemento 1 foi alterada para 5 e os certificados do elemento 1 e do elemento 4 foram atualizados.

Algoritmo 1.9: Função CHANGE.

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $e \leftarrow \text{GETOBJECT}(j)$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow e.x_0 + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
4:    $e.\text{speed} \leftarrow v$ 
5:   UPDATE( $e$ )
6:   UPDATE( $e.\text{next}$ )

```

A operação $\text{INSERT}(v, x_t)$, como ilustrado na Figura 1.12, consiste em criar um novo elemento, inicializando seus atributos com os devidos valores, inseri-lo na árvore binária balanceada de busca e na estrutura que usamos para recuperá-lo depois, calcular o seu certificado e inseri-lo na fila com prioridades e, por fim, atualizar o certificado de seu sucessor, caso exista. Uma importante observação é que se $\text{now} \neq 0$, então $x_t \neq x_0$. Para calcular x_0 , podemos utilizar a relação $x_t = \text{now} \cdot \text{speed} + x_0$, que implica que $x_0 = x_t - \text{speed} \cdot \text{now}$. O Algoritmo 1.10 implementa esta operação.

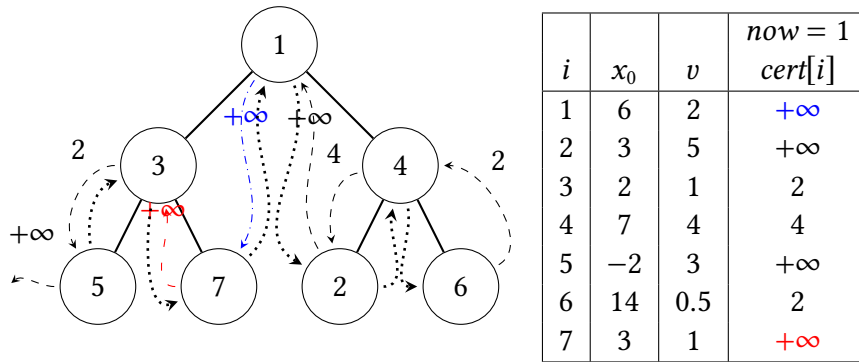


Figura 1.12: Após chamar $\text{INSERT}(1, 4)$, no instante 1, o elemento 7 foi inserido na árvore. O certificado do elemento 7 foi criado e o certificado do seu sucessor, o elemento 1, atualizado.

Algoritmo 1.10: Função INSERT.

```

1: function INSERT( $v, x_t$ )
2:    $e.\text{speed} \leftarrow v$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow x_t - \text{now} \cdot v$ 
4:    $\text{root} \leftarrow \text{INSERTKEY}(\text{root}, e)$ 
5:   INSERTOBJECT( $e$ )
6:    $e.\text{cert} \leftarrow \text{EXPIRE}(e, e.\text{prev})$ 
7:   INSERTPQ( $Q, e$ )
8:   UPDATE( $e.\text{next}$ )

```

A operação $\text{DELETE}(i)$ consiste em recuperar o elemento i , removê-lo da árvore binária balanceada de busca e da estrutura que usamos para recuperá-lo, e depois removê-lo da fila com prioridades. Após isso, basta atualizar o certificado de seu sucessor, caso exista. Essa operação é ilustrada na Figura 1.13 e implementada no Algoritmo 1.11.

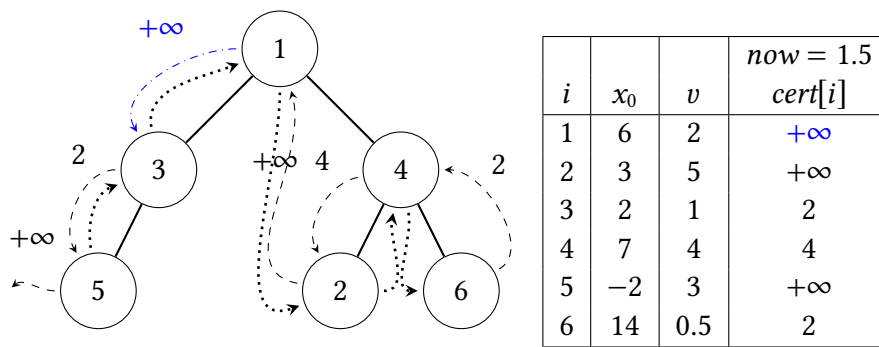


Figura 1.13: Após chamar `DELETE(7)` na árvore da Figura 1.12, o elemento 7 foi retirado da árvore, a lista ligada foi ajustada, o certificado do seu sucessor, o elemento 1, foi atualizado e o certificado do elemento 7 foi destruído.

Algoritmo 1.11: Função `DELETE`.

```

1: function DELETE( $i$ )
2:    $e \leftarrow \text{GETOBJECT}(i)$ 
3:    $e' \leftarrow e.\text{next}$ 
4:    $\text{root} \leftarrow \text{DELETEKEY}(\text{root}, e)$ 
5:   DELETEOBJECT( $e$ )
6:   DELETEPQ( $Q, e$ )
7:   UPDATE( $e'$ )

```

1.2.1 Análise de desempenho

A árvore binária balanceada de busca é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg n)$, onde n é o número de elementos sendo mantidos. O custo de processar um certificado corresponde a uma iteração da linha 3 na operação `EVENT`, que atualiza a posição dos elementos na árvore em $O(1)$ e realiza alterações na fila de certificados em tempo $O(\lg n)$, por isso o custo total de $O(\lg n)$ para processar um certificado.

Assim como a lista ordenada cinética, a árvore binária balanceada de busca é uma estrutura *eficiente*, *compacta* e *local*, pelas mesmas justificativas já apresentadas na seção da lista ordenada cinética.

Apesar do mesmo bom desempenho que a lista ordenada cinética, a árvore de busca binária balanceada realiza a operação `QUERY-KTH` em $O(\lg n)$, que é um desempenho assintótico pior em relação a lista ordenada cinética, que realiza a mesma operação em $O(1)$.

O desempenho pior na operação `QUERY-KTH` é justificado pelo ganho de desempenho nas operações `INSERT` e `DELETE` que também são realizadas em tempo $O(\lg n)$, enquanto que na lista ordenada cinética o tempo gasto é $O(n)$, pois precisamos mover $O(n)$ objetos para posicionar o novo objeto na posição correta ou para reorganizar o vetor de forma a ocupar a posição que ficou vazia após a remoção de um objeto.

Capítulo 2

Máximo cinético

Agora, considere o seguinte problema cinético. São dados n pares de valores em que cada par (x_0, v) representa um valor que está mudando linearmente com o tempo, assim como na lista cinética. Num instante arbitrário $t \geq 0$, o valor correspondente ao par (x_0, v) é $x_0 + tv$. Desta vez, o objetivo é responder consultas mais simples, do tipo: quem é o elemento com maior valor da coleção no instante corrente. Veremos que é possível obter implementações mais eficientes que para a ordenação cinética neste caso, como discutiremos nas seções sobre análise de desempenho.

Utilizando o mesmo exemplo da lista, se tivermos quatro elementos na coleção, digamos $\left(6, -\frac{1}{2}\right)$, $(5, 0)$, $\left(3, \frac{1}{4}\right)$ e $\left(0, \frac{4}{3}\right)$, podemos representar essa coleção da seguinte maneira:

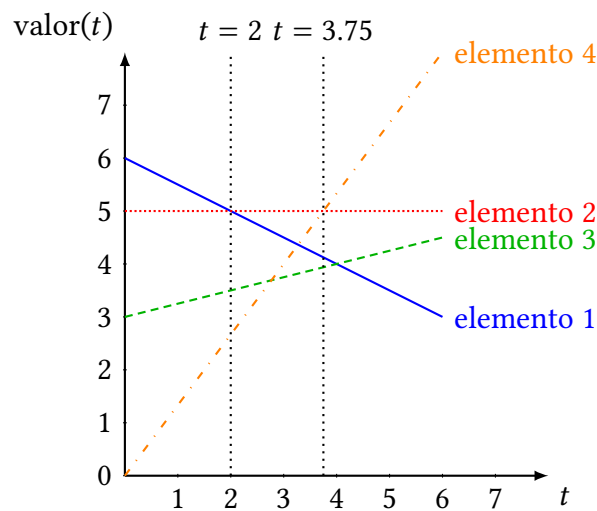


Figura 2.1: O maior valor até o instante $t = 2$ é o do elemento 1. Em seguida, o maior valor passa a ser o do elemento 2 até o instante $t = 3.75$, que é quando o elemento 4 passa a superar todos os outros.

Agora, além das operações $ADVANCE(t)$ e $CHANGE(j, v)$, em vez da operação $QUERY_KTH(i)$, queremos dar suporte à nova operação:

- `QUERY_MAX()` \rightarrow devolve um elemento cujo valor é o maior no instante atual.

2.1 Heap cinético

Um bom jeito de resolver o problema do máximo cinético é manter uma fila de prioridades com os elementos da coleção tendo como prioridade o valor corrente do elemento. Dessa maneira, o elemento que se encontra na raiz da fila será o que possui o maior valor da coleção. Para implementar a fila utilizaremos um vetor organizado como um heap.

Inicialmente o vetor começa com os índices dos elementos e o reorganizamos como um heap usando como chave o valor de cada elemento no instante $t = 0$, ou seja, o valor x_0 de cada elemento.

Uma vez montado o heap, construímos um certificado para cada par (filho, pai) no heap. O i -ésimo certificado se refere ao par das posições i e $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ e consiste no instante de tempo em que o i -ésimo elemento passará a ter um valor maior que o valor do $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ -ésimo elemento do vetor, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em $+\infty$.

Esses $n - 1$ certificados são colocados em uma fila com prioridades Q , com o prazo de validade como chave. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade.

Para descrever a implementação das três operações, precisamos estabelecer o nome das novas variáveis usadas. São elas:

1. *heap*: vetor com os índices dos n elementos formando um heap de acordo com o seu valor no instante *now*;
2. *cert*: vetor com os certificados, onde *cert*[i] guarda o certificado entre i e $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$, para $1 < i \leq n$.

A interface da fila com prioridades que utilizaremos não se altera.

Um evento está associado a um certificado (i, t) que expira no instante t , como pode ser visto na Figura 2.2. O tratamento do evento correspondente ao certificado (i, t) consiste em trocar de lugar os índices armazenados nas posições i e $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ do vetor *heap*, e recalculando o prazo de validade de até cinco certificados, ilustrados na Figura 2.3:

- do $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ -ésimo certificado, se $i > 1$;
- do j -ésimo certificado, se $i > 1$ e $j \leq n$, onde $j = 2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ é o irmão de i ;
- do $(2i)$ -ésimo certificado, se $2i \leq n$;
- do $(2i + 1)$ -ésimo certificado, se $2i + 1 \leq n$.

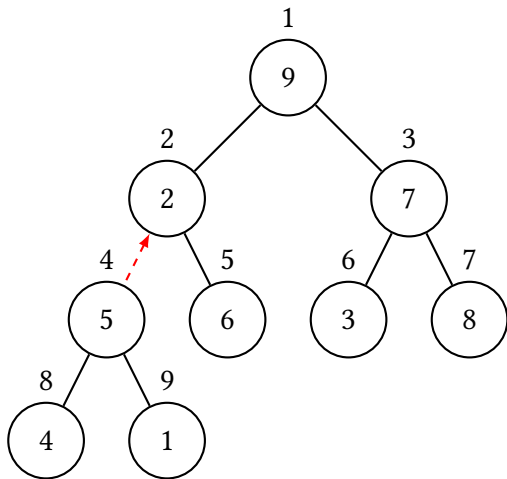


Figura 2.2: $\text{cert}[4]$ expirou.

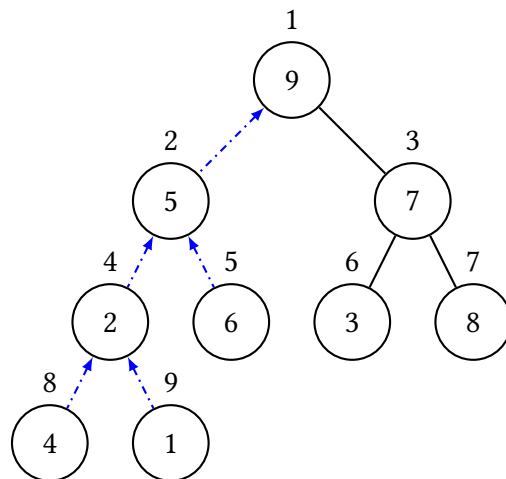


Figura 2.3: $\text{heap}[4]$ e $\text{heap}[2]$ foram trocados e $\text{cert}[2]$, $\text{cert}[4]$, $\text{cert}[5]$, $\text{cert}[8]$ e $\text{cert}[9]$ foram atualizados.

O i -ésimo certificado também deve ser ajustado para $+\infty$. Finalmente, é necessário fazer ajustes em Q , alterando a chave dos certificados que sofreram alteração.

Novamente, na implementação da operação **EVENT**, no Algoritmo 2.2, utilizaremos a rotina **UPDATE**(i), do Algoritmo 2.1, que calcula a nova validade t do i -ésimo certificado, se $1 < i \leq n$, e chama a rotina **UPDATEPQ**(Q, i, t).

Algoritmo 2.1: Função **UPDATE**.

```

1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $1 < i \leq n$  :
3:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(i, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$ 
4:     UPDATEPQ( $Q, i, t$ )

```

Algoritmo 2.2: Função **EVENT**.

```

1: function EVENT()
2:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $\text{cert}[i] = \text{now}$  :
4:      $\text{heap}[i] \leftrightarrow \text{heap}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor]$ 
5:     for  $j \leftarrow \{i, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor, 2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i+1) \bmod 2), 2i, 2i+1\}$  :
6:       UPDATE( $j$ )
7:      $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

A operação **QUERY_MAX**(), no Algoritmo 2.3, consiste em devolver $\text{heap}[1]$, enquanto que a operação **CHANGE**(j, v), no Algoritmo 2.4, consiste em alterar a posição $x_0[j]$ para $x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now}$, a posição $\text{speed}[j]$ para v e recalculer os eventuais certificados

de que j participa. Para tanto, a partir da posição i em que j se encontra no vetor *heap*, podemos recalcular $\text{cert}[i]$ se $i > 1$, $\text{cert}[2i]$ se $2i \leq n$ e $\text{cert}[2i + 1]$ se $2i + 1 \leq n$, acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em Q correspondentes a estas modificações. Veja a Figura 2.4.

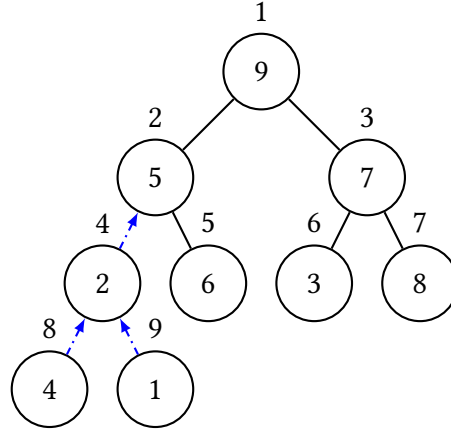


Figura 2.4: Após a mudança de velocidade do elemento 2, que se encontra em $\text{heap}[4]$, os certificados $\text{cert}[4]$, $\text{cert}[8]$ e $\text{cert}[9]$ foram atualizados.

Algoritmo 2.3: Função QUERY_MAX.

```

1: function QUERY_MAX()
2:   return heap[1]

```

Algoritmo 2.4: Função CHANGE.

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
3:    $\text{speed}[j] \leftarrow v$ 
4:   for  $j \leftarrow \{i, 2i, 2i + 1\}$  :
5:     UPDATE( $j$ )

```

2.1.1 Análise de desempenho

O heap cinético é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg n)$, onde n é a quantidade de pontos. O custo de processar um certificado corresponde a uma iteração da linha 3 da operação EVENT, que troca de posição os dois elementos envolvidos no certificado em $O(1)$ e atualiza os cinco certificados afetados em $O(\lg n)$.

O heap cinético é uma estrutura *eficiente*, pois a quantidade de eventos internos é $O(n \lg^2 n)$ para trajetórias lineares, mostrado em [BASCH, 1999](#). Como a quantidade de eventos externos é $\Theta(n)$ temos uma razão $O(\lg^2 n)$, que é polilogarítmica em n , tornando o heap cinético uma estrutura eficiente em trajetórias lineares.

O heap cinético é uma estrutura *compacta*, pois há no máximo n certificados na fila com prioridades, um para cada objeto.

O heap cinético é uma estrutura *local*, pois um elemento está envolvido em no máximo três certificados da fila ao mesmo tempo.

2.2 Torneio cinético

Considere o seguinte algoritmo para achar o valor máximo em um conjunto de n elementos: aloque um vetor *tourn* com $2n - 1$ posições. Inicializamos as últimas n posições com os valores dos n elementos e uma variável i com o valor da última posição, $i = 2n - 1$. Repita o seguinte processo até que i seja igual a 1: se $\text{tourn}[i] > \text{tourn}[i - 1]$, então $\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor] = \text{tourn}[i]$, caso contrário $\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor] = \text{tourn}[i - 1]$, e, por fim, subtraia 2 de i . Dessa maneira, ao fim da execução do algoritmo, em $\text{tourn}[1]$ estará o maior valor da coleção. Na verdade, podemos fazer a comparação de maneira indireta, e guardar os índices dos elementos no vetor *tourn* e não seus valores. Veja a Figura 2.5.

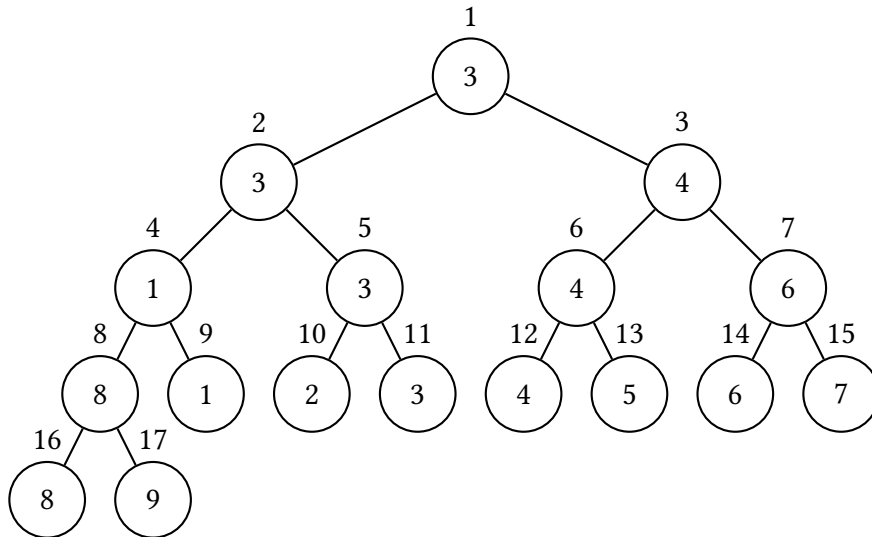


Figura 2.5: Torneio com 9 elementos em que 3 é o elemento com valor máximo.

Podemos pensar nessas comparações entre $\text{tourn}[i]$ e $\text{tourn}[i - 1]$ como sendo partidas de um torneio classificatório, por isso o nome torneio. Chamaremos de “partida” as comparações entre $\text{tourn}[i]$ e $\text{tourn}[i - 1]$ e diremos que o elemento j “vence” o elemento k quando os elementos j e k disputaram uma partida entre si e o elemento j possuía maior valor nesse instante. Utilizaremos esse “torneio” para resolver o problema do máximo cinético e, para implementá-lo, será utilizado um vetor como o citado no algoritmo descrito no parágrafo anterior.

Inicialmente o vetor começa com os índices dos elementos ocupando as últimas posições e construímos o torneio de acordo com o valor de cada elemento no instante $t = 0$, ou seja, com o valor x_0 de cada elemento.

Uma vez montado o torneio, construímos um certificado para cada elemento no torneio. O i -ésimo certificado se refere ao par formado pelo i -ésimo elemento da entrada e quem o venceu, digamos j , na última partida que disputou, e consiste no instante de tempo em

que o i -ésimo elemento passará a ter um valor maior que o valor do j -ésimo elemento, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em $+\infty$. Veja a Figura 2.6.

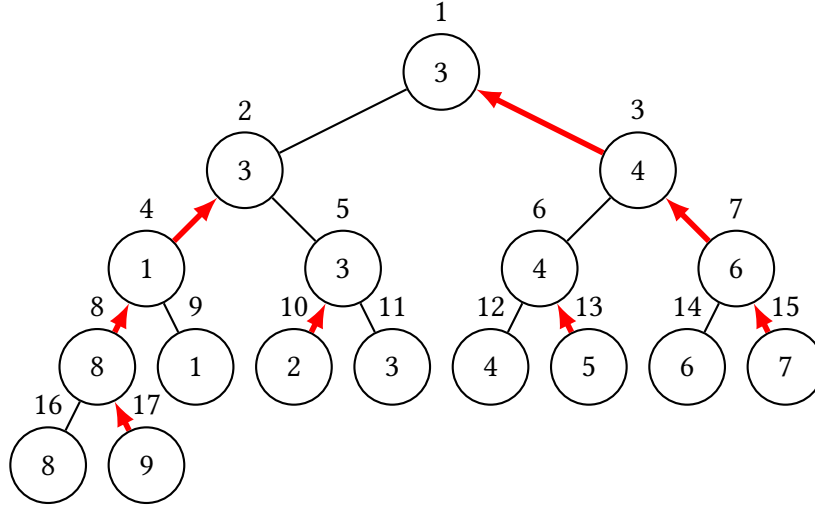


Figura 2.6: Torneio com 9 elementos e os certificados visualmente representados pelas setas vermelhas mais grossas. O certificado correspondente ao elemento 3 terá a chave $+\infty$.

É importante observar que o elemento que se encontra na primeira posição do torneio não é vencido por ninguém no instante *now*. Dessa forma, sendo i o elemento que ocupa a primeira posição do torneio, associamos ao i -ésimo certificado a chave $+\infty$.

Esses n certificados são colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade como chave. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade.

Para descrever a implementação das operações ADVANCE, CHANGE e QUERY_MAX, precisamos estabelecer o nome das novas variáveis usadas. São elas:

1. *tourn*: vetor, de $2n - 1$ posições, com os índices dos n elementos formando um torneio de acordo com o seu valor no instante *now*;
2. *cert*: vetor com os certificados; *cert*[i] guarda o certificado entre o elemento i e quem o venceu na última partida que disputou, para $1 \leq i \leq n$;
3. *indT*: vetor de n posições; *indT*[i] guarda a posição em *tourn* em que i perde uma partida, com $1 \leq i \leq n$. Se i não perde nenhuma partida, *indT*[i] é igual a -1 .

A interface da fila com prioridades que utilizaremos não se altera.

Na implementação da operação EVENT, no Algoritmo 2.6, utilizaremos a rotina UPDATE(i), no Algoritmo 2.5, que calcula a nova validade t do elemento j que se encontra na i -ésima posição de *tourn*, isto é, $j = \text{tourn}[i]$ certificado, se $1 \leq i \leq 2n - 1$, e chama a rotina UPDATEPQ(Q, i, t).

No trecho das linhas 5 – 11 do Algoritmo 2.6, o resultado da partida entre o elemento j e seu adversário que se encontra na posição k de *tourn* é recalculado, e o certificado correspondente é atualizado. Caso o resultado da partida tenha sido alterado, a verificação

Algoritmo 2.5: Função UPDATE.

```

1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $i = 1$  :
3:      $t \leftarrow \infty$ 
4:   if  $1 < i \leq 2n - 1$  :
5:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor], \text{tourn}[i])$ 
6:    $j \leftarrow \text{tourn}[i]$ 
7:   UPDATEPQ( $Q, j, t$ )

```

Algoritmo 2.6: Função EVENT.

```

1: function EVENT()
2:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $\text{cert}[i] = \text{now}$  :
4:      $j \leftarrow \text{indT}[i]$ 
5:      $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
6:     while  $j > 1$  and  $\text{VALUE}(j) \geq \text{VALUE}(k)$  :
7:        $\text{tourn}[\lfloor \frac{j}{2} \rfloor] \leftarrow \text{tourn}[j]$ 
8:        $\text{indT}[\text{tourn}[k]] \leftarrow k$ 
9:       UPDATE( $k$ )
10:       $j \leftarrow \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$ 
12:     $\text{indT}[\text{tourn}[j]] \leftarrow j$ 
13:    UPDATE( $j$ )
14:     $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

se propaga para o nível de cima, veja as Figuras 2.7 e 2.8. A função $\text{VALUE}(j)$ retorna $\text{speed}[j] \cdot \text{now} + x_0[j]$.

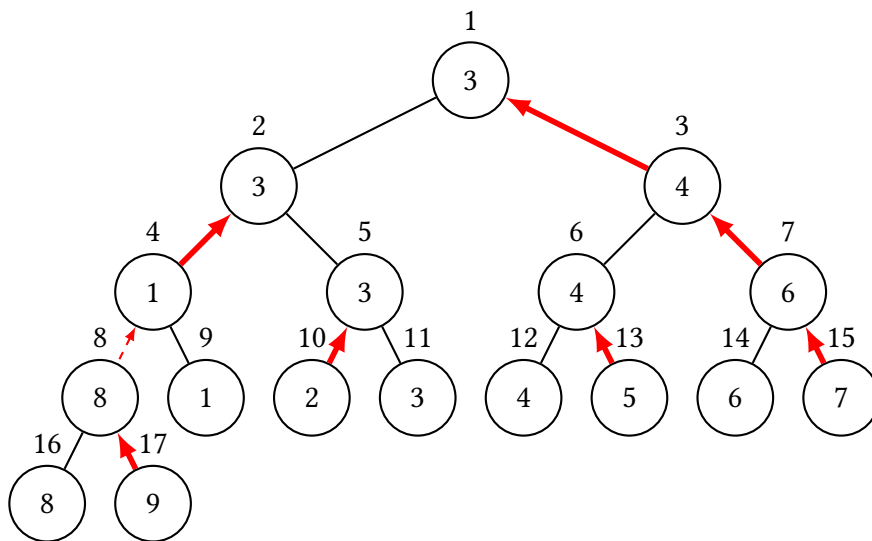


Figura 2.7: $\text{cert}[8]$ expirou.

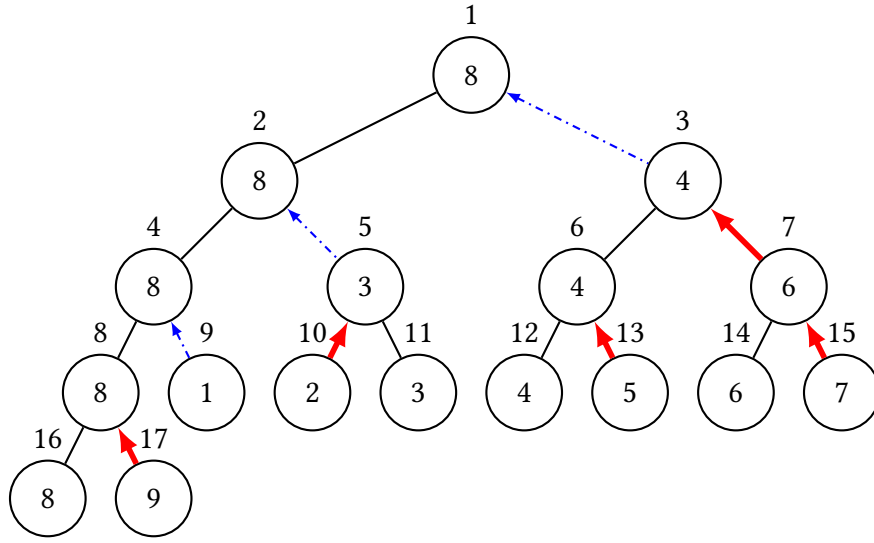


Figura 2.8: Após $\text{cert}[8]$ ter expirado, o elemento 8 passou a vencer o elemento 1 e $\text{tourn}[4]$ foi atualizado, o elemento 8 também venceu dos elementos 3 e 4 e $\text{tourn}[2]$ e $\text{tourn}[1]$ foram atualizados. Os certificados $\text{cert}[1]$, $\text{cert}[3]$ e $\text{cert}[4]$, indicados pelas setas azuis, também foram atualizados.

A operação QUERY_MAX , no Algoritmo 2.7, consiste em devolver $\text{tourn}[1]$, enquanto que a operação $\text{CHANGE}(j, v)$, no Algoritmo 2.8, consiste em alterar a posição $x_0[j]$ para $x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now}$, a posição $\text{speed}[j]$ para v e recalculer os eventuais certificados de que j participa. Para tanto, a partir da posição i em que j se encontra no vetor tourn , podemos recalculer $\text{cert}[j]$ e então continuamos visitando as partidas em que j participou para atualizar os certificados daqueles que perderam de j , acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em Q correspondentes a estas modificações. Veja a Figura 2.9.

Algoritmo 2.7: Função QUERY_MAX .

```

1: function  $\text{QUERY\_MAX}()$ 
2:   return  $\text{tourn}[1]$ 

```

Algoritmo 2.8: Função CHANGE .

```

1: function  $\text{CHANGE}(j, v)$ 
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
3:    $\text{speed}[j] \leftarrow v$ 
4:    $i \leftarrow \text{indT}[j]$ 
5:    $\text{UPDATE}(i)$ 
6:   while  $i < n$  :
7:     if  $\text{tourn}[i] = \text{tourn}[2i]$  :
8:        $i \leftarrow 2i$ 
9:     else
10:       $i \leftarrow 2i + 1$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
12:       $\text{UPDATE}(k)$ 

```

▷ adversário

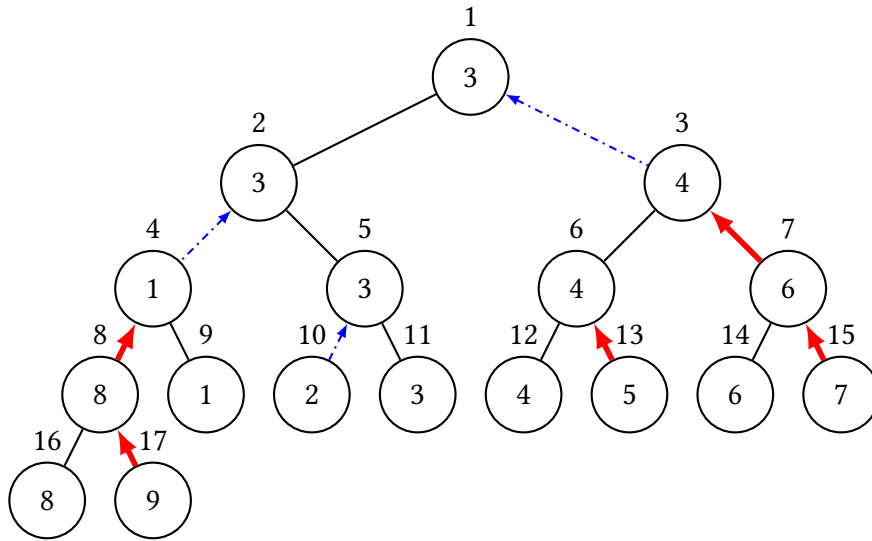


Figura 2.9: Após atualizar a velocidade do elemento 3, os certificados $\text{cert}[2]$, $\text{cert}[1]$ e $\text{cert}[4]$ foram atualizados porque disputaram partidas com 3.

2.2.1 Inserção e remoção em torneio

Assim como fizemos na Seção 1.2, além das operações $\text{ADVANCE}(t)$, $\text{CHANGE}(j, v)$ e $\text{QUERY_MAX}()$, poderíamos querer dar suporte a operações como:

- $\text{INSERT}(v, x_t) \rightarrow$ insere um elemento com velocidade v e valor x_t no instante now ;
- $\text{DELETE}(i) \rightarrow$ remove o elemento i no instante now .

Agora, diferentemente da Seção 1.2, não utilizaremos uma nova estrutura para dar suporte a essas operações, pois um torneio já suporta operações como inserção e remoção de elementos em tempo logarítmico. Porém, da maneira como se encontra a interface, poderíamos ter problemas como espaços de memória ociosos após várias remoções ou um gasto elevado de tempo redimensionando vetores para que suportem a inserção de novos elementos. Dessa forma, descreveremos a seguir alterações a serem feitas na interface para evitar problemas como os citados.

Inicialmente o vetor que guarda o torneio começa com os elementos ocupando as suas últimas posições e construímos o torneio de acordo com o valor de cada elemento no instante $t = 0$.

Uma vez montado o torneio, construímos um certificado para cada elemento no torneio. Agora os certificados não serão mais mantidos em um vetor; serão mantidos junto aos elementos para facilitar a inserção e remoção de certificados, já que estas vêm junto com a inserção e remoção de elementos. O certificado de um elemento e se refere à relação estabelecida entre o elemento e e o elemento k , que é o elemento que venceu e na última partida que e disputou, e consiste no instante de tempo em que o elemento e passará a ter um valor maior que o valor do elemento k , se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em $+\infty$.

Note que o elemento que está na primeira posição do torneio não é vencido por ninguém

no instante *now*. Portanto, daremos o valor $+\infty$ para o seu certificado.

Esses n certificados serão colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade como prioridade. O certificado com menor prazo de validade estará ocupando a primeira posição da fila. Na verdade, como os certificados estarão diretamente ligados aos elementos, colocaremos os elementos nessa fila.

Para descrever as implementações das operações $\text{ADVANCE}(t)$, $\text{CHANGE}(j, v)$, $\text{QUERY_MAX}()$, $\text{INSERT}(v, x_t)$ e $\text{DELETE}(i)$, vamos estabelecer os nomes dos objetos, variáveis e rotinas auxiliares utilizados:

1. n : número de elementos no instante *now*;
2. *element*: elemento com os seguintes atributos:
 - (a) *id*: atributo para identificar o elemento. Daqui em diante, usaremos elemento i para se referir ao elemento cujo *id* é i ;
 - (b) *speed*: a velocidade do elemento;
 - (c) x_0 : é o valor que o elemento possuía no instante $t = 0$;
 - (d) *cert*: o tempo de validade do certificado do elemento;
 - (e) *pqpos*: atributo que aponta para a posição do elemento na fila com prioridades;
 - (f) *lastMatch*: atributo que aponta para a posição do vetor *tourn* em que o elemento disputou sua última partida.
3. *tourn*: vetor, de $2n - 1$ posições, que guarda apontadores para os elementos formando um torneio de acordo com seus valores no instante *now*;
4. Q : fila com prioridades que contém os elementos, com o elemento com certificado de menor valor à frente;
5. $\text{INSERTTOURN}(e) \rightarrow$ insere e , que é um elemento, no torneio e atualiza os certificados necessários no processo;
6. $\text{DELETETOURN}(e) \rightarrow$ remove e , que é um elemento, do torneio e atualiza os certificados necessários no processo.

Para a implementação das operações $\text{CHANGE}(j, v)$ e $\text{DELETE}(i)$, precisamos de alguma maneira recuperar um elemento baseado no seu *id*. Para tal, podemos utilizar estruturas como uma árvore binária balanceada de busca ou uma tabela de dispersão. A seguir estão três operações que nos ajudarão a recuperar os elementos:

1. $\text{GETOBJECT}(i) \rightarrow$ retorna o elemento i ;
2. $\text{INSERTOBJECT}(e) \rightarrow$ insere e , que é um elemento, na estrutura;
3. $\text{DELETEROBJECT}(e) \rightarrow$ remove e , que é um elemento, da estrutura.

Para permitir a inserção e remoção de certificados, a interface da fila com prioridades será reformulada, contando com duas operações extras:

1. $\text{INSERTPQ}(Q, e) \rightarrow$ insere e na fila com prioridades Q ;

2. $\text{DELETEPQ}(Q, e) \rightarrow$ remove e da fila com prioridades Q ;
3. $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t) \rightarrow$ muda o valor do certificado de e para t e atualiza a fila com prioridades Q ;
4. $\text{MINPQ}(Q) \rightarrow$ devolve o elemento com o certificado de menor valor da fila com prioridades Q .

As operações $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t)$ e $\text{DELETEPQ}(Q, e)$ podem ser implementadas em tempo logarítmico no número de elementos em Q graças ao atributo $pqpos$ dos elementos.

Um evento está associado a um certificado (e, t) que expira no instante t . As implementações das operações EVENT , QUERY_MAX e CHANGE são similares às implementações da Seção 2.2.

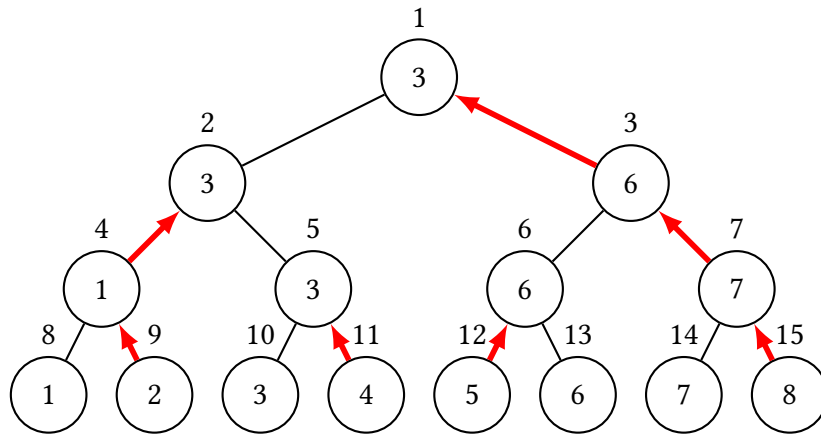


Figura 2.10: Um torneio com 8 elementos e seus certificados representados pelas setas vermelhas, mais grossas; cada posição guarda um apontador para um elemento, mas na figura apenas os id's são mostrados.

A operação $\text{INSERT}(v, x_t)$, no Algoritmo 2.9, consiste em criar um novo elemento, inicializando seus atributos com os devidos valores, inseri-lo no torneio e na estrutura que usamos para recuperá-lo, calcular o seu certificado e inseri-lo na fila de prioridade. Uma importante observação é que se $\text{now} \neq 0$, então $x_t \neq x_0$. Para calcular x_0 , podemos utilizar a relação $x_t = \text{now} \cdot \text{speed} + x_0 \Rightarrow x_0 = x_t - \text{speed} \cdot \text{now}$. Veja o exemplo da Figura 2.11.

Algoritmo 2.9 Função INSERT .

```

1: function  $\text{INSERT}(v, x_t)$ 
2:    $e.\text{speed} \leftarrow v$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow x_t - \text{now} \cdot v$ 
4:    $\text{root} \leftarrow \text{INSERTOBJECT}(\text{root}, e)$ 
5:    $\text{INSERTTOURN}(e)$ 
6:    $\text{NEWCERT}(e)$ 
7:    $\text{INSERTPQ}(Q, e)$ 

```

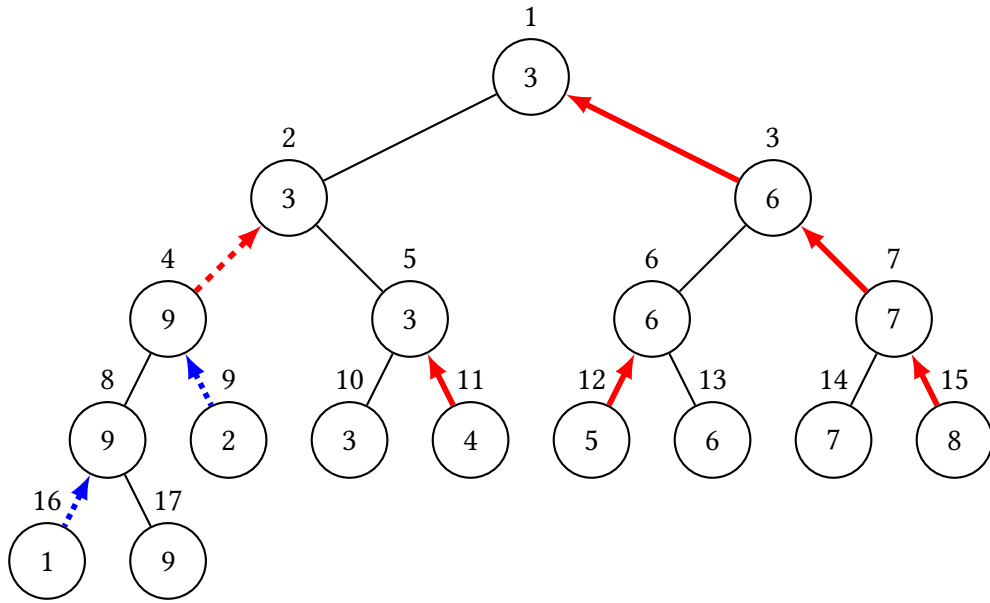


Figura 2.11: Torneio da Figura 2.10 após a inserção de um elemento com id 9. A seta vermelha tracejada representa o certificado criado e as setas azuis pontilhadas representam os certificados atualizados.

Utilizamos a função auxiliar `INSERTTOURN(e)`, do Algoritmo 2.10, que consiste em criar uma nova partida, usando o elemento que está na posição $n - 1$ para completar a partida, depois subir para o nível de cima no torneio, corrigindo os vencedores das partidas e atualizando os certificados correspondentes. O certificado do elemento inserido não será calculado nessa função, mas será calculado posteriormente. No Algoritmo 2.10, `RESIZE()` checa se `ourn` é capaz de suportar a inserção de novos elementos e, se não for, redimensiona `ourn`.

Algoritmo 2.10 Função `INSERTTOURN`.

```

1: function INSERTTOURN( $e$ )
2:   RESIZE()
3:    $n \leftarrow n + 1$ 
4:    $i \leftarrow 2n - 1$ 
5:    $ourn[i] \leftarrow e$ 
6:    $ourn[i - 1] \leftarrow ourn[\lfloor i/2 \rfloor]$ 
7:    $k \leftarrow i - 1$ 
8:   while  $i > 1$  and  $VALUE(i) \geq VALUE(k)$  :
9:      $ourn[\lfloor i/2 \rfloor] \leftarrow ourn[i]$ 
10:     $ourn[k].lastMatch \leftarrow k$ 
11:    UPDATE( $ourn[k]$ )
12:     $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
13:     $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
14:     $ourn[1].lastMatch \leftarrow 1$ 

```

▷ adversário

A operação `DELETE(i)`, no Algoritmo 2.11, consiste em recuperar o elemento i , removê-lo da fila de prioridade, do torneio e da estrutura que usamos para recuperá-lo depois.

Algoritmo 2.12 Função DELETETOURN.

```

1: function DELETETOURN( $e$ )
2:    $i \leftarrow \text{SUBSTITUTE}(e)$ 
3:    $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
4:   while  $i > 1$  :
5:     if  $\text{VALUE}(k) \geq \text{VALUE}(i)$  :
6:        $i \leftrightarrow k$ 
7:        $\text{tourn}[\lfloor i/2 \rfloor] \leftarrow \text{tourn}[i]$ 
8:        $\text{tourn}[k].\text{lastMatch} \leftarrow k$ 
9:        $\text{UPDATE}(\text{tourn}[k])$ 
10:       $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
12:       $\text{tourn}[1].\text{lastMatch} \leftarrow 1$ 
13:       $\text{UPDATE}(\text{tourn}[1])$ 

```

2.2.2 Análise de desempenho

O torneio cinético é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg^2 n)$, onde n é o número de elementos. De fato, o custo de processar um certificado corresponde a uma iteração da linha 3 da operação EVENT, que troca o resultado da partida entre os dois elementos envolvidos no certificado e atualiza o certificado em tempo $O(\lg n)$. Além disso, existem $O(\lg n)$ certificados a serem alterados com a propagação da verificação para o nível de cima, resultando no custo $O(\lg^2 n)$.

O torneio cinético é uma estrutura *eficiente*, pois a quantidade de eventos internos é $O(n \lg n)$ para trajetórias lineares, como mostraremos abaixo. Como a quantidade de eventos externos é $\Theta(n)$ temos uma razão $O(\lg n)$, que é logarítmica em n , tornando o torneio cinético uma estrutura eficiente em trajetórias lineares.

Vamos mostrar que a quantidade de eventos internos é $O(n \lg n)$. Cada evento do torneio é ocasionado pela troca do resultado de uma partida. Sendo assim, para contar a quantidade de eventos internos podemos contar a quantidade máxima de vezes que o valor de um nó se altera. É fácil ver que os elementos que podem ocupar um determinado nó só podem ser aqueles que estão nas folhas da subárvore com raiz naquele nó. Se uma subárvore enraizada num nó possui k folhas, então podem ocorrer no máximo $k - 1$ trocas naquele nó. O número de folhas que a subárvore enraizada no nó possui é $k = 2^h$, sendo h a altura do nó. Como o torneio é uma árvore binária balanceada, sua altura é $\lceil \lg n \rceil$. Temos

$\lfloor \frac{n}{2^h} \rfloor$ nós de altura h . Logo, sendo q a quantidade de eventos:

$$\begin{aligned}
 q &\leq \sum_{h=0}^{\lceil \lg n \rceil} \frac{n}{2^h} \cdot (2^h - 1) \\
 &\leq \sum_{h=0}^{\lceil \lg n \rceil} n - \sum_{h=0}^{\lceil \lg n \rceil} \frac{n}{2^h} \\
 &\leq \sum_{h=0}^{\lceil \lg n \rceil} n \\
 &\leq n \lceil \lg n \rceil + n \\
 &= O(n \lg n).
 \end{aligned}$$

O torneio cinético é uma estrutura *compacta*, pois tem no máximo n certificados na fila com prioridades, um para cada objeto.

O torneio cinético é uma estrutura *local*, pois um elemento está envolvido em $O(\lg n)$ certificados da fila ao mesmo tempo.

As operações INSERT e DELETE custam $O(\lg^2 n)$, por conta das respectivas operações INSERTTOURN e DELETETOURN que atualizam $O(\lg n)$ posições com custo $O(\lg n)$. Além disso, também vale observar que determinadas chamadas de INSERTTOURN podem ter um custo $O(n)$, caso seja necessário redimensionar o vetor na operação RESIZE, que dobra o tamanho de *tourn*. Porém, se o redimensionamento for implementado corretamente, o custo por operação se mantém de maneira amortizada.

Capítulo 3

Par mais próximo cinético

Considere o seguinte problema cinético. São dados n pontos movendo-se linearmente no plano. Cada ponto é representado por um par (s_0, \vec{v}) onde $s_0 = (x_0, y_0)$ é a sua posição inicial e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor velocidade. A posição de um determinado ponto p , num instante arbitrário $t \geq 0$, é $s_p = (x_p, y_p) = (x_0, y_0) + t \cdot \vec{v}$. Queremos saber o par (p, q) cuja distância $d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$ é mínima, num instante arbitrário $t \geq 0$.

Por exemplo, considere cinco pontos na coleção, representados na Figura 3.1: $((1, 0), (2, 1))$, $((5, -1), (-1, 2))$, $((0, 2), (1, -1))$, $((3, 2), (1, -2))$ e $((3, 1), (-1, 0))$.

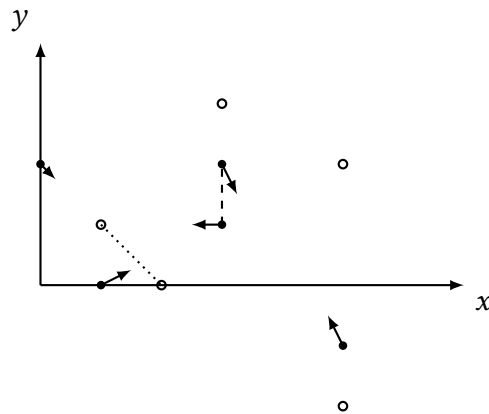


Figura 3.1: Os pontos preenchidos em preto representam a coleção no instante $t = 0$. Os pontos não preenchidos representam a coleção no instante $t = 2$. As setas representam a direção e sentido do vetor velocidade de cada ponto. A linha tracejada representa a distância entre o par mais próximo no instante $t = 0$, enquanto a linha pontilhada representa a distância entre o par mais próximo no instante $t = 2$.

Queremos dar suporte às seguintes operações:

- `ADVANCE(t)` → avança o tempo corrente para t ;
- `CHANGE(j, \vec{v})` → altera a velocidade do ponto j para \vec{v} ;
- `QUERY_CLOSEST()` → devolve os pontos que formam um par mais próximo no instante atual.

3.1 Algoritmo estático

O algoritmo que será aqui apresentado foi proposto por Basch, Guibas e Hershberger [BASCH *et al.*, 1999] e admite uma boa cinetização, usando a ideia de linha de varredura.

O algoritmo é baseado na ideia de dividir o plano, para cada ponto, em seis cones iguais. Os cones são delimitados pela reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto e pelas retas $x \pm 30^\circ$, isto é, as retas que passam pelo ponto e formam $\pm 30^\circ$ com o eixo x como mostra a Figura 3.2.

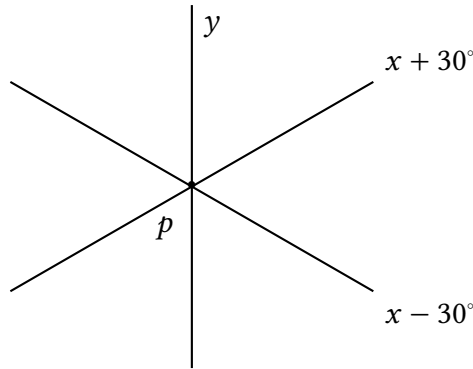


Figura 3.2: A reta paralela ao eixo y que passa por p e as retas $x \pm 30^\circ$.

Tendo dividido o plano em cones, a ideia é achar o ponto mais próximo de p dentro de cada um desses cones. Se assim o fizermos para todos os pontos, um desses pares possui a menor distância entre si e será um par mais próximo que buscamos.

Se (p, q) formam um par mais próximo, então (q, p) também forma um par mais próximo; na verdade, são o mesmo par. Dessa maneira, não precisamos dos seis cones para buscar os pares, somente de três deles. Para uma varredura da direita para a esquerda, apenas buscaremos os pares mais próximos nos três cones à direita de p .

Vamos começar analisando o cone cujo eixo central é paralelo ao eixo x . Chamaremos esse cone de *dominância de p* e o representaremos por $Dom(p)$. Consideraremos que um ponto em cima da linha $x + 30^\circ$ pertence a $Dom(p)$ e um ponto em cima de $x - 30^\circ$ não pertence a $Dom(p)$ como mostra a Figura 3.3. O mesmo algoritmo poderá ser aplicado aos outros dois cones se rotacionarmos o sistema de coordenadas $\pm 60^\circ$.

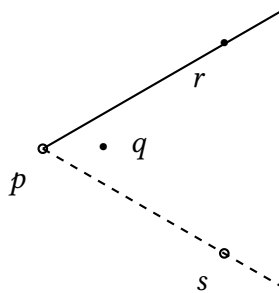


Figura 3.3: Os pontos q e r pertencem a $Dom(p)$, mas o ponto s não.

A Figura 3.4, inspirada em [BASCH et al., 1999](#), ilustra cada uma das definições a seguir. Definiremos como $Maxima(p)$ o conjunto dos pontos à direita de p que não pertencem à dominância de nenhum ponto à direita de p . Isso nos permite definir o conjunto de candidatos de p representado por $Cands(p)$: $Cands(p) = Dom(p) \cap Maxima(p)$, ou seja, os candidatos de p são aqueles pontos à direita de p que não pertencem à dominância de nenhum ponto à direita de p e pertencem à dominância de p . Chamaremos o ponto de $Maxima$ de menor ordenada que está acima de $Dom(p)$ de $up(p)$ e chamaremos o ponto de $Maxima$ de maior ordenada que está abaixo de $Dom(p)$ de $low(p)$. Caso não existam tais pontos, $up(p)$ e $low(p)$ são NULL. Os pontos de $Maxima$ estritamente entre $low(p)$ e $up(p)$ são justamente os de $Cands(p)$. Dentre os candidatos de p , chamaremos o ponto com menor coordenada x de $lcand(p)$.

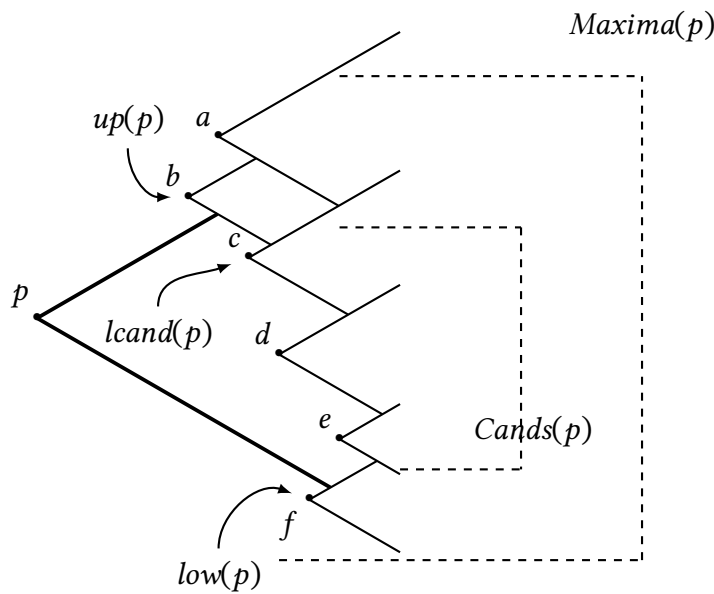


Figura 3.4: Os pontos c, d e e pertencem a $Cands(p)$, e todos os pontos exceto p pertencem a $Maxima(p)$. O ponto b é $up(p)$ e o ponto f é $low(p)$. O ponto c é $lcand(p)$.

Consideraremos apenas os pares $(p, lcand(p))$ como possíveis candidatos a par mais próximo. Caso, para algum p , mais de um ponto atenda à condição de ser $lcand(p)$ poderemos escolher qualquer um deles como $lcand(p)$, pois, em um caso em que há mais de um possível $lcand(p)$, esses pontos formarão um par mais próximo entre si do que o par $(p, lcand(p))$, como por exemplo na Figura 3.5.

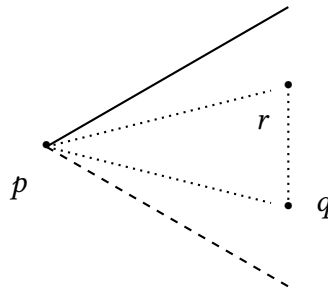


Figura 3.5: A distância de r até q é menor do que a distância p até r e do que a distância p até q .

O Algoritmo 3.1 descreve a sequência de operações a serem feitas para achar o par mais próximo em alguma das ordens $(-60^\circ, 0^\circ, 60^\circ)$ representadas pelo ângulo θ , dado em radianos. Antes da rotina ser chamada, os pontos devem ser ordenados de acordo com a sua coordenada x . Os pontos são então processados da direita para a esquerda. No algoritmo, a e b são os pontos que representam o par mais próximo. Se p ou q são nulos, $d(p, q)$ retorna $+\infty$.

A cada iteração do Algoritmo 3.1, $Maxima$ é igual a $Maxima(p)$. Na nossa implementação, $Maxima$ estará armazenado em uma árvore binária de busca, mais especificamente em uma *splay tree* cuja chave é a coordenada y dos pontos, determinada de acordo com o valor de θ . Com isso, podemos buscar por $up(p)$ e $low(p)$ em tempo logarítmico, bem como podemos retirar $Cands(p)$ de $Maxima$ em tempo logarítmico, isto é, atualizar $Maxima$ de maneira que $Maxima = Maxima \setminus Cands(p)$.

Algoritmo 3.1: Função $CLOSEST_PAIR(p, n, \theta)$.

```

1: function CLOSEST_PAIR( $p, n, \theta$ )
2:    $(a, b) \leftarrow (NULL, NULL)$ 
3:   HEAPSORT( $p, n, \theta$ )  $\triangleright p.x[1] > \dots > p.x[n]$ 
4:    $Maxima \leftarrow \emptyset$ 
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  :
6:      $Cands \leftarrow Maxima \cap Dom(p_i)$ 
7:      $Maxima \leftarrow (Maxima \setminus Cands) \cup \{p_i\}$ 
8:      $lcand \leftarrow MIN\_X(Cands)$ 
9:     if  $d(p_i, lcand) < d(a, b)$  :
10:       $(a, b) \leftarrow (p_i, lcand)$ 
11:   return  $(a, b)$ 

```

Para descrever a implementação do algoritmo, já considerando as versões rotacionadas dele, iremos antes precisar estabelecer os nomes das variáveis e rotinas auxiliares utilizadas. São elas:

1. n : o número de pontos dados;
2. *point*: um ponto com os seguintes atributos:
 - (a) x : coordenada x do ponto;
 - (b) y : coordenada y do ponto.
3. *root*: raiz da *splay tree*;
4. *node*: objeto que compõe a árvore binária de busca, atributos:
 - (a) *left*: aponta para a raiz da subárvore esquerda do nó. A subárvore esquerda é composta apenas por pontos que possuem *value* com menor ordenada que a *value* do nó;
 - (b) *right*: aponta para a raiz da subárvore direita do nó. A subárvore direita é composta apenas por pontos que possuem *value* com ordenada maior ou igual que a *value* do nó;

- (c) *parent*: aponta para o nó que é pai deste nó;
 - (d) *value*: aponta para um ponto.
5. *angle*: ângulo de rotação do sistema de coordenadas;
 6. *points*: vetor de n posições que guarda os pontos;
 7. $\text{GETX}(p, \text{angle}) \rightarrow$ retorna a coordenada x de um ponto p baseada no ângulo de rotação *angle*;
 8. $\text{GETY}(p, \text{angle}) \rightarrow$ retorna a coordenada y de um ponto p baseada no ângulo de rotação *angle*;
 9. $\text{HEAPSORT}(\text{points}, n, \text{angle}) \rightarrow$ ordena o vetor *points*, utilizando o algoritmo *heapsort*, de acordo com a coordenada x de cada ponto cujo valor é retornado pela rotina $\text{GETX}(p, \text{angle})$.

Para um ponto (r, ϕ) em coordenadas polares, $x = r \cdot \cos(\phi)$ e $y = r \cdot \sin(\phi)$.

Rotacionar o sistema de coordenadas por θ é o mesmo que transformar ϕ em $\phi - \theta$, veja a Figura 3.6. Isso significa que agora as novas coordenadas são descritas como:

$$x^* = r \cdot \cos(\phi - \theta) = r \cdot \cos(\phi) \cdot \cos(\theta) + r \cdot \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) = x \cdot \cos(\theta) + y \cdot \sin(\theta)$$

$$y^* = r \cdot \sin(\phi - \theta) = r \cdot \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) - r \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\theta) = y \cdot \cos(\theta) - x \cdot \sin(\theta).$$

Os valores x^* e y^* são os valores, respectivamente, retornados por $\text{GETX}(p, \text{angle})$ e $\text{GETY}(p, \text{angle})$ para $\theta = \text{angle}$.

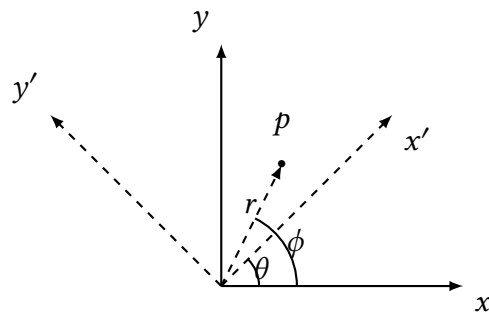


Figura 3.6: O ponto p está numa inclinação de $\phi - \theta$ radianos em relação a reta que passa pela origem e por x' .

A interface da *splay tree* que vai armazenar *Maxima*, e cuja chave é a coordenada y do ponto, contará com as seguintes operações, além das usuais $\text{INSERT}(p)$ e $\text{SPLAY}(x)$:

1. $\text{SUCCESSOR}(p) \rightarrow$ busca pelo nó cuja chave é $\text{up}(p)$ na *splay tree*. Esse nó corresponde ao sucessor de p na árvore;
2. $\text{PREDECESSOR}(p) \rightarrow$ busca pelo nó cuja chave é $\text{low}(p)$ na *splay tree*. Esse nó corresponde ao predecessor de p na árvore;
3. $\text{LCAND}(p) \rightarrow$ calcula $\text{Cands}(p)$, remove da *splay tree* e determina $\text{lcand}(p)$, que pode ser NULL;

No Algoritmo 3.2 e no Algoritmo 3.3, a rotina $\text{CHECKLINE}(p, q, \theta)$ retorna se o ponto q está à esquerda, sobre ou à direita da reta r . A reta r é a reta que passa por p e faz um ângulo de θ radianos com o eixo x . Para q à esquerda de r o retorno é 1, para q sobre r o retorno é 0 e para q à direita de r , o retorno é -1 .

Algoritmo 3.2: Função $\text{SUCCESSOR}(p)$.

```

1: function  $\text{SUCCESSOR}(p)$ 
2:    $x \leftarrow \text{root}$ 
3:    $up \leftarrow \text{NULL}$ 
4:   while  $x \neq \text{NULL}$  :
5:      $y \leftarrow x$ 
6:     if  $\text{CHECKLINE}(p, x.\text{value}, \pi/6) = -1$  :
7:        $x \leftarrow x.\text{right}$ 
8:     else
9:        $up \leftarrow x$ 
10:       $x \leftarrow x.\text{left}$ 
11:   if  $y \neq \text{NULL}$  : ▷ aciona SPLAY no último nó visitado
12:      $\text{SPLAY}(y)$ 
13:   return  $up$ 

```

Algoritmo 3.3 Função $\text{PREDECESSOR}(p)$.

```

1: function  $\text{PREDECESSOR}(p)$ 
2:    $x \leftarrow \text{root}$ 
3:    $low \leftarrow \text{NULL}$ 
4:   while  $x \neq \text{NULL}$  :
5:      $y \leftarrow x$ 
6:     if  $\text{CHECKLINE}(p, x.\text{value}, -\pi/6) \leq 0$  :
7:        $x \leftarrow x.\text{left}$ 
8:     else
9:        $low \leftarrow x$ 
10:       $x \leftarrow x.\text{right}$ 
11:   if  $y \neq \text{NULL}$  : ▷ aciona SPLAY no último nó visitado
12:      $\text{SPLAY}(y)$ 
13:   return  $low$ 

```

O Algoritmo 3.4 implementa a função $\text{LCAND}(p)$. Sabemos que $\text{lcand}(p)$ é o elemento de $\text{Cands}(p)$ com menor coordenada x e que $\text{Cands}(p)$ é limitado por $\text{low}(p)$ e $\text{up}(p)$. A ideia para retirar $\text{Cands}(p)$ da árvore é reorganizá-la de modo que $\text{low}(p)$ seja a raiz e $\text{up}(p)$ o filho direito da raiz. Dessa forma $\text{Cands}(p)$ é a subárvore esquerda do filho direito da raiz, veja a Figura 3.7. Nem sempre tal configuração é possível, mas o algoritmo tratará dos casos de borda que são quando $\text{low}(p)$, ou $\text{up}(p)$, ou ambos, não existem. A rotina $\text{SPLIT}(x)$ separa a subárvore de raiz x da *splay tree* e retorna a raiz dessa nova árvore. A rotina $\text{MIN_X}(z)$ retorna o ponto com menor coordenada x da árvore de raiz z .

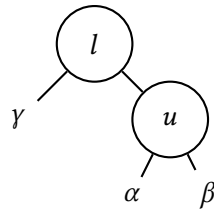


Figura 3.7: Se l é $\text{low}(p)$ e u é $\text{up}(p)$. A subárvore α contém todos os pontos que estão entre $\text{low}(p)$ e $\text{up}(p)$ e, portanto, corresponde ao conjunto $\text{Cands}(p)$.

Algoritmo 3.4 Função $\text{lcand}(p)$.

```

1: function LCAND( $p$ )
2:    $r \leftarrow \text{root}$ 
3:    $\text{low} \leftarrow \text{PREDECESSOR}(p)$ 
4:   if  $\text{low} \neq \text{NULL}$  :
5:     SPLAY( $\text{low}$ )
6:      $r \leftarrow \text{SPLIT}(\text{low}.\text{right})$ 
7:    $\text{up} \leftarrow \text{SUCCESSOR}(p)$ 
8:   if  $\text{up} \neq \text{NULL}$  :
9:     SPLAY( $\text{up}$ )
10:     $r \leftarrow \text{SPLIT}(\text{up}.\text{left})$ 
11:  if  $\text{up} \neq \text{NULL}$  and  $\text{low} \neq \text{NULL}$  :
12:     $\text{low}.\text{right} \leftarrow \text{up}$ 
13:     $\text{up}.\text{parent} \leftarrow \text{low}$ 
14:  return MIN_X( $r$ )

```

O Algoritmo 3.5 implementa a função QUERY_CLOSEST que retorna um par (a, b) que possui distância mínima em points .

Algoritmo 3.5 Função QUERY_CLOSEST .

```

1: function QUERY_CLOSEST()
2:    $(m, n) \leftarrow (\text{NULL}, \text{NULL})$ 
3:    $\text{angle} \leftarrow -\frac{\pi}{3}$ 
4:   while  $\text{angle} \leq \frac{\pi}{3}$  :
5:     HEAPSORT( $\text{points}, n, \text{angle}$ )  $\triangleright \text{points}.x[1] > \dots > \text{points}.x[n]$ 
6:     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  :
7:        $p \leftarrow \text{points}[i]$ 
8:        $\text{lcand} \leftarrow \text{LCAND}(p)$ 
9:       INSERT( $p$ )
10:      if  $d(p, \text{lcand}) < d(a, b)$  :
11:         $(a, b) \leftarrow (p, \text{lcand})$ 
12:       $\text{angle} \leftarrow \text{angle} + \frac{\pi}{3}$ 
13:    CLEARALL()  $\triangleright$  esvazia a splay tree
14:  return  $(m, n)$ 

```

3.2 Algoritmo cinético

Para “cinetizar” o algoritmo estático, utilizaremos certificados para assegurar que as nossas estruturas permanecerão corretas. Primeiramente, teremos os certificados das três *listas ordenadas cinéticas*, conforme a Seção 2.1, que guardarão a ordem dos pontos de acordo com os eixos x , $x + 60^\circ$ e $x - 60^\circ$.

Para garantir qual, dentre os pares $(p, lcand(p))$, é o par mais próximo, usaremos um *torneio cinético com inserção e remoção*, conforme a Seção 2.2.1, com respeito ao mínimo em vez de ao máximo. Temos um total de $3n$ pares, pois consideraremos também os pares $(p, lcand(p))$ em que $lcand(p)$ é nulo e os certificados destes serão $+\infty$.

Também precisaremos manter informação guardada para atualizar com eficiência mudanças provocadas por trocas na ordem dos pontos em relação a um dos três eixos. Por exemplo, uma troca na ordem dos pontos pode acarretar numa mudança nos conjuntos $Cands(p)$ e $Cands(q)$. Mudanças nesses conjuntos ocorrerão quando $q = up(p)$, $q = low(p)$ ou $q \in Cands(p)$. Portanto, para que consigamos manter $lcand(p)$ de maneira eficiente, cada ponto terá três árvores binárias de busca associadas a ele com os conjuntos $Cands(p)$, $Hits_{up}(p)$ e $Hits_{low}(p)$. A árvore $Cands(p)$ guarda os pontos que pertencem ao conjunto $Cands(p)$ ordenados pela coordenada y . A árvore $Hits_{up}(p)$ guarda os pontos q tais que $up(q) = p$, ordenados pela coordenada x . Similarmente, a árvore $Hits_{low}(p)$ guarda os pontos q tais que $low(q) = p$, ordenados pela coordenada x . Utilizaremos as árvores $Cands(p)$, $Hits_{up}(p)$ e $Hits_{low}(p)$ para cada um dos eixos, logo, para cada ponto p , haverá nove *splay trees* no total.

Cada uma das nove árvores têm sua raiz apontando para o nó p , e cada nó das árvores aponta para o seu nó pai. Na árvore $Cands(p)$, cada nó deve apontar para o descendente que contém o ponto mais à esquerda na ordenação horizontal. Na nossa implementação, as árvores serão *splay trees*. Essas estruturas contêm toda a informação necessária para que mantenhamos nossas estruturas atualizadas e, conseqüentemente, o par mais próximo do conjunto.

Na implementação do algoritmo, inicialmente inserimos os pontos nas três listas ordenadas. Uma vez que as listas estejam montadas, percorremos os pontos da direita para a esquerda preenchendo as estruturas $Cands(p)$, $Hits_{up}(p)$ e $Hits_{low}(p)$ para cada ponto p e para cada um dos eixos. Esta etapa é feita da mesma forma que foi apresentada na seção sobre o algoritmo estático, a Seção 3.1.

A medida que as estruturas $Cands(p)$ são inicializadas, inserimos o par $(p, lcand(p))$ no torneio. Quando todos os pares forem inseridos no torneio, realizamos as partidas e calculamos os certificados. O par (p, q) da partida que possuir menor distância é considerado o vencedor.

Todos os certificados são colocados em uma fila de prioridade Q . Os certificados inseridos na fila possuem quatro informações:

- $t \rightarrow$ instante de tempo em que o certificado expira. É utilizado como chave para a fila de prioridade. Desempates são tratados de maneira especial e serão explicados mais adiante;

- $p \rightarrow$ um dos pontos envolvidos no evento representado pelo certificado. Caso seja um certificado de troca na ordenação, p é o ponto mais à direita naquela ordenação;
- $q \rightarrow$ o outro ponto envolvido no evento representado pelo certificado. Caso seja um certificado de troca na ordenação, q é o ponto mais à esquerda naquela ordenação;
- $\text{tipo} \rightarrow$ o tipo de evento que o certificado representa. Pode representar uma troca em uma das três ordenações, denominadas por H (horizontal = 0° -ordem), U (up = $+60^\circ$ -ordem) e D (down = -60° -ordem) ou pode representar a vitória do par (p, q) em uma partida do torneio.

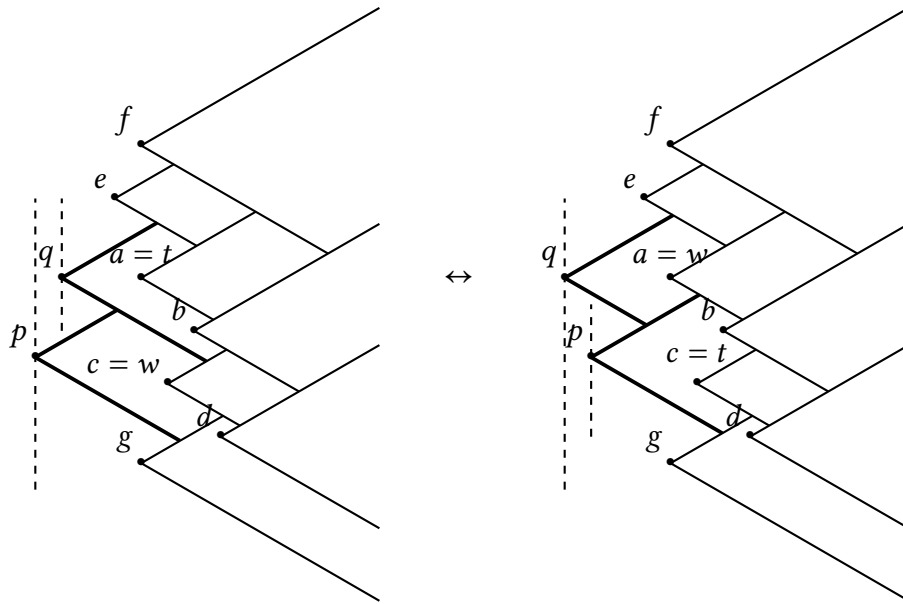


Figura 3.8: Da esquerda para a direita, o caso em que p está em $\text{Hits}_{up}(q)$. Da direita para a esquerda, o caso em que q está em $\text{Hits}_{low}(p)$.

Vamos agora falar de um evento em que ocorre uma mudança na ordem horizontal. No primeiro caso, p se encontra à esquerda e abaixo de q , veja a Figura 3.8. O caso em que q está à esquerda de p será tratado de maneira parecida. O Algoritmo 3.6 implementa a sequência de operações referentes a esse tipo de evento.

Algoritmo 3.6 Função HORIZONTAL EVENT.

```

1: function HORIZONTAL EVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$  :
3:     HORIZONTAL EVENT LEFT( $p, q, dir$ )
4:   else
5:     if  $p = \text{OWNER}(q.\text{hitsLow}(p, dir))$  :
6:       HORIZONTAL EVENT RIGHT( $p, q, dir$ )
7:    $v \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{cands}(dir))$ 
8:    $v' \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$ 
9:   if  $v = v'$  :
10:    UPDATE LCAND( $v, dir$ )

```

Se p está à esquerda de q e em $Hits_{up}(q)$, como demonstrado na Figura 3.8, então parte de $Cands(q)$ terá de passar para $Cands(p)$. Além disso, também teremos alterações em $Hits_{low}(q)$, $Hits_{up}(q)$, $Hits_{up}(t)$ e $Hits_{low}(w)$, onde $t = up(p)$ após a troca de ordem entre os pontos e $w = low(q)$ antes da troca de ordem entre os pontos. O Algoritmo 3.7 implementa a sequência de operações necessárias para corrigir as estruturas afetadas pela troca. A rotina OWNER acha em tempo logarítmico na quantidade de nós da árvore o ponto para o qual a raiz aponta. Os atributos $hitsUp$ e $hitsLow$ são apontadores para o nó do ponto na respectiva árvore da direção especificada. Por exemplo, $q.hitsUp(U)$ é o apontador para o nó de q numa árvore $Hits_{up}$ de algum ponto, na direção UP. Se p não está em $Hits_{up}(q)$, então não haverá mudanças, veja a Figura 3.9.

Similarmente, se q está em $Hits_{low}(p)$, como demonstrado na Figura 3.8, parte de $Cands(p)$ passará a $Cands(q)$. Além disso, também teremos alterações em $Hits_{low}(q)$, $Hits_{up}(q)$, $Hits_{up}(t)$ e $Hits_{low}(w)$, onde $t = low(q)$ após a troca de ordem entre os pontos e $w = up(p)$ antes da troca de ordem entre os pontos. O Algoritmo 3.8 implementa a sequência de operações necessárias para corrigir as estruturas afetadas pela troca. Se q não está em $Hits_{low}(p)$, então não haverá mudanças, veja a Figura 3.9.

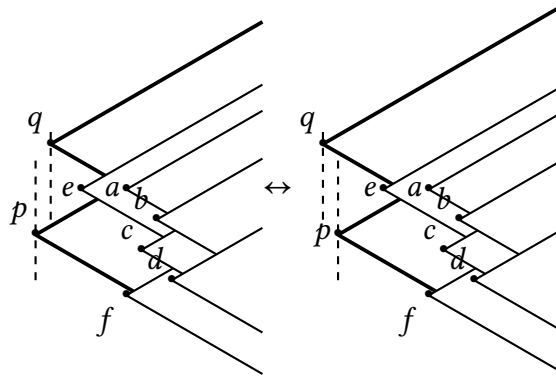


Figura 3.9: Se p não está em $Hits_{up}(q)$, ou se q não está em $Hits_{low}(p)$, nada acontece.

Algoritmo 3.7 Função HORIZONTALEVENTLEFT.

```

1: function HORIZONTALEVENTLEFT( $p, q, dir$ )
2:    $t \leftarrow \text{PREDECESSOR}(p, Cands(q, dir), U)$ 
3:   if  $t = \text{NULL}$  :
4:      $t \leftarrow \text{OWNER}(q.hitsUp(dir))$ 
5:    $newCands \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, Cands(q, dir))$ 
6:    $\text{JOIN}(Cands(p, dir), newCands)$ 
7:    $\text{DELETE}(p, Hits_{up}(q, dir))$ 
8:   if  $t \neq \text{NULL}$  :
9:      $\text{INSERT}(p, Hits_{up}(t, dir))$ 
10:   $w \leftarrow \text{OWNER}(q.hitsLow(dir))$ 
11:  if  $w \neq \text{NULL}$  :
12:     $\text{DELETE}(q, Hits_{low}(w, dir))$ 
13:     $\text{INSERT}(q, Hits_{low}(p, dir))$ 

```

Algoritmo 3.8 Função HORIZONTEVENTRIGHT.

```

1: function HORIZONTEVENTRIGHT( $p, q, dir$ )
2:    $t \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, \text{Cands}(p, dir), D)$ 
3:   if  $t = \text{NULL}$  :
4:      $t \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsLow}(dir))$ 
5:    $\text{newCands} \leftarrow \text{SPLIT}(t, \text{NULL}, \text{Cands}(p, dir))$ 
6:    $\text{JOIN}(\text{Cands}(q, dir), \text{newCands})$ 
7:    $\text{DELETE}(q, \text{Hits}_{\text{low}}(p, dir))$ 
8:   if  $t \neq \text{NULL}$  :
9:      $\text{INSERT}(q, \text{Hits}_{\text{low}}(t, dir))$ 
10:   $w \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$ 
11:  if  $w \neq \text{NULL}$  :
12:     $\text{DELETE}(p, \text{Hits}_{\text{up}}(w, dir))$ 
13:     $\text{INSERT}(p, \text{Hits}_{\text{up}}(q, dir))$ 

```

Na mudança horizontal também precisamos nos preocupar com a possível troca de um $lcand$, se p e q estão em Cands de um mesmo ponto v , como verificado na linha 9 do Algoritmo 3.6.

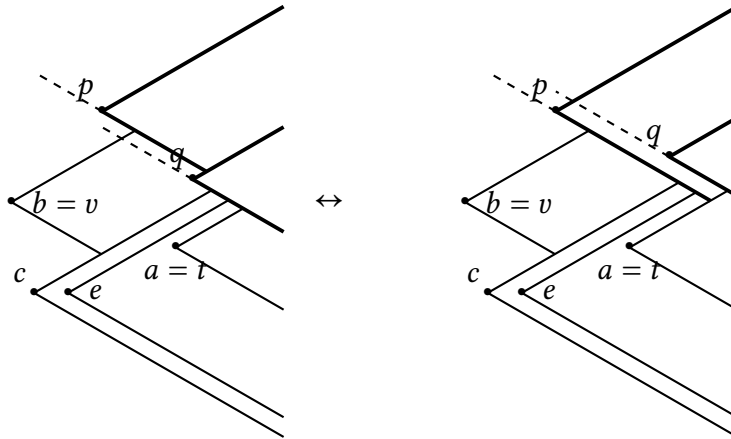


Figura 3.10: Da esquerda para a direita, o caso em que p está em $\text{Hits}_{\text{low}}(q)$, ou seja, q está entrando em $\text{Dom}(p)$. Da direita para a esquerda, o caso em que q está em $\text{Cands}(p)$, saindo de $\text{Dom}(p)$.

Algoritmo 3.9 Função UPEVENT.

```

1: function UPEVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = \text{OWNER}(p.\text{hitsLow}(dir))$  :
3:      $\text{UPEVENTLEFT}(p, q, dir)$ 
4:   else
5:     if  $p = \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$  :
6:        $\text{UPEVENTRIGHT}(p, q, dir)$ 

```

No caso de um evento em que ocorre uma mudança na 60° -ordem, que é a ordem dos pontos projetados no eixo $x + 60^\circ$, vamos assumir que p é o ponto que está à esquerda

e acima de q . O evento pode provocar a entrada ou saída do ponto q de $Cands(p)$, veja a Figura 3.10. O Algoritmo 3.9 implementa a sequência de operações referentes a este evento.

Se p está em $Hits_{low}(q)$, ou seja, q está entrando em $Dom(p)$ como demonstrado na Figura 3.10 da esquerda para direita, então a troca na 60°-ordem afetará o ponto v tal que q está em $Cands(v)$. A mudança também afetará todos os pontos que estão à esquerda de p e estão em $Hits_{up}(q)$, incluindo o ponto t em $Hits_{up}(q)$ mais à esquerda que está à direita de p . Se esse ponto t não existe, buscamos pelo ponto t tal que q está em $Hits_{low}(t)$. Buscamos por t para que possamos remover o ponto p de $Hits_{low}(q)$ e o inseri-lo em $Hits_{low}(t)$. As operações necessárias para corrigir as estruturas envolvidas estão descritas no Algoritmo 3.10. Se p não está em $Hits_{low}(q)$ não haverá mudanças.

Algoritmo 3.10 Função UPEVENTLEFT.

```

1: function UPEVENTLEFT( $p, q, dir$ )
2:    $v \leftarrow \text{OWNER}(q.cands(dir))$ 
3:   if  $v \neq \text{NULL}$  :
4:      $\text{DELETE}(q, Cands(v, dir))$ 
5:      $\text{INSERT}(q, Cands(p, dir))$ 
6:      $t \leftarrow \text{SUCCESSOR}(p, Hits_{up}(q, dir), H)$ 
7:     if  $t = \text{NULL}$  :
8:        $t \leftarrow \text{OWNER}(q.hitsLow(dir))$ 
9:      $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, Hits_{up}(q, dir))$ 
10:     $\text{JOIN}(Hits_{up}(p, dir), newHits)$ 
11:     $\text{DELETE}(p, Hits_{low}(q, dir))$ 
12:    if  $t \neq \text{NULL}$  :
13:       $\text{INSERT}(p, Hits_{low}(t, dir))$ 

```

Algoritmo 3.11 Função UPEVENTRIGHT.

```

1: function UPEVENTRIGHT( $p, q, dir$ )
2:    $t \leftarrow \text{OWNER}(p.hitsLow(dir))$ 
3:   if  $t \neq \text{NULL}$  :
4:      $\text{DELETE}(p, Hits_{low}(t, dir))$ 
5:      $\text{INSERT}(p, Hits_{low}(q, dir))$ 
6:    $v \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, Hits_{up}(p, dir), U)$ 
7:   if  $v = \text{NULL}$  :
8:      $v \leftarrow \text{OWNER}(p.cands(dir))$ 
9:    $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(v, \text{NULL}, Hits_{up}(p, dir))$ 
10:   $\text{JOIN}(newHits, Hits_{up}(q, dir))$ 
11:   $\text{DELETE}(q, Cands(p, dir))$ 
12:  if  $v \neq \text{NULL}$  :
13:     $\text{INSERT}(q, Cands(v, dir))$ 

```

Se q está em $Cands(p)$, ou seja, q está saindo de $Dom(p)$ como demonstrado na Fi-

gura 3.10 da direita para a esquerda, as mudanças serão similares, porém reversas ao outro caso, como demonstrado no Algoritmo 3.11.

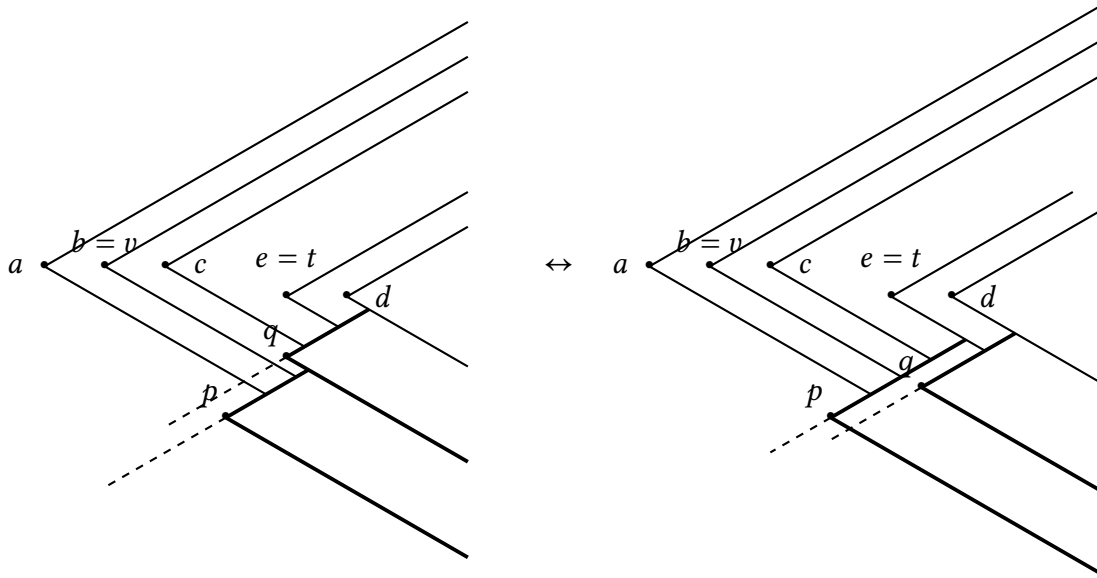


Figura 3.11: Da esquerda para a direita, o caso em que p está em $Hits_{up}(q)$, ou seja, q está entrando em $Dom(p)$. Da direita para a esquerda, o caso em que q está em $Cands(p)$, saindo de $Dom(p)$.

Um evento em que ocorre uma mudança na -60° -ordem, a ordem dos pontos projetados no eixo $x - 60^\circ$, é simétrico a um evento na 60° -ordem. Os pontos envolvidos no evento serão p e q e vamos assumir que p é o ponto mais à esquerda e abaixo de q . O evento pode provocar a entrada ou saída do ponto q de $Cands(p)$, veja a Figura 3.11. O Algoritmo 3.12 implementa a sequência de operações referentes a esse evento.

Algoritmo 3.12 Função downEvent.

```

1: function DOWNEVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = OWNER(p.hitsUp(dir))$  :
3:     DOWNEVENTLEFT( $p, q, dir$ )
4:   else
5:     if  $p = OWNER(q.cands(dir))$  :
6:       DOWNEVENTRIGHT( $p, q, dir$ )

```

Se p está em $Hits_{up}(q)$ (q está entrando em $Dom(p)$), como demonstrado na Figura 3.11, então a troca na -60° -ordem afetará o ponto v tal que q está em $Cands(v)$. Além disso, afetará $Cands(p)$, todos os pontos que estão à esquerda de p e estão em $Hits_{low}(q)$, incluindo o ponto t em $Hits_{low}(q)$ mais à esquerda que está à direita de p . Se não existe ponto que satisfaça essas condições, então buscamos pelo ponto t tal que q está em $Hits_{up}(t)$. Buscamos por t porque precisamos remover o ponto p de $Hits_{up}(q)$ e o inserimos em $Hits_{up}(t)$. Se p não está em $Hits_{up}(q)$ não haverá mudanças. As operações necessárias para corrigir as estruturas envolvidas estão descritas no Algoritmo 3.10.

Algoritmo 3.13 Função `downEventLeft`.

```

1: function DOWNEVENTLEFT( $p, q, dir$ )
2:    $v \leftarrow \text{OWNER}(q.cands(dir))$ 
3:   if  $v \neq \text{NULL}$  :
4:      $\text{DELETE}(q, Cands(v, dir))$ 
5:    $\text{INSERT}(q, Cands(p, dir))$ 
6:    $t \leftarrow \text{SUCCESSOR}(p, Hits_{low}(q, dir), H)$ 
7:   if  $t = \text{NULL}$  :
8:      $t \leftarrow \text{OWNER}(q.hitsUp(dir))$ 
9:    $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, Hits_{low}(q, dir))$ 
10:   $\text{JOIN}(Hits_{low}(p, dir), newHits)$ 
11:   $\text{DELETE}(p, Hits_{up}(q, dir))$ 
12:  if  $t \neq \text{NULL}$  :
13:     $\text{INSERT}(p, Hits_{up}(t, dir))$ 

```

Se q está em $Cands(p)$ (q está saindo de $Dom(p)$), como demonstrado na Figura 3.11, as mudanças serão similares, porém reversas ao outro caso, como demonstrado no Algoritmo 3.14.

Algoritmo 3.14 Função `downEventRight`.

```

1: function DOWNEVENTRIGHT( $p, q, dir$ )
2:    $t \leftarrow \text{OWNER}(p.hitsUp(dir))$ 
3:   if  $t \neq \text{NULL}$  :
4:      $\text{DELETE}(p, Hits_{up}(t, dir))$ 
5:    $\text{INSERT}(p, Hits_{up}(q, dir))$ 
6:    $v \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, Hits_{low}(p, dir), D)$ 
7:   if  $v = \text{NULL}$  :
8:      $v \leftarrow \text{OWNER}(p.cands(dir))$ 
9:    $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(v, \text{NULL}, Hits_{low}(p, dir))$ 
10:   $\text{JOIN}(newHits, Hits_{low}(q, dir))$ 
11:   $\text{DELETE}(q, Cands(p, dir))$ 
12:  if  $v \neq \text{NULL}$  :
13:     $\text{INSERT}(q, Cands(v, dir))$ 

```

3.2.1 Análise de desempenho

As análises de desempenho aqui foram extraídas de FREITAS, 2000.

A estrutura de dados cinética para manter um par de pontos mais próximo é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg n)$, onde n é o número de pontos. O custo de processar um certificado é o custo de realizar as trocas necessárias nas listas ordenadas, o que consome tempo $O(\lg n)$. Além disso também há o custo de corrigir as árvores $Cands$, $Hits_{low}$, $Hits_{up}$, o torneio e os certificados associados. Mas, essas operações são realizadas em sequência, consumindo um custo também de $O(\lg n)$.

A estrutura é *eficiente*, pois a razão entre o total de eventos e os eventos *externos*, isto é, as trocas de par mais próximo, de acordo com FREITAS, 2000, é $O(\epsilon \lg n)$, resultando em uma estrutura eficiente.

A estrutura é *compacta*, pois teremos $O(n)$ certificados na fila de prioridades associados a mudanças nas listas ordenadas e $O(n)$ certificados do torneio cinético, resultando em $O(n)$ certificados na fila com prioridades num determinado instante.

A estrutura é *local*, pois um ponto pode estar envolvido em até seis certificados das listas ordenadas, sendo dois para cada uma das ordenações, e pode estar envolvido em até $O(\lg n)$ certificados no torneio.

Capítulo 4

Triangulação de Delaunay cinética

Considere o seguinte problema cinético. São dados n pontos movendo-se linearmente no plano. Cada ponto é representado por um par (s_0, \vec{v}) onde $s_0 = (x_0, y_0)$ é a sua posição inicial e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor velocidade. A posição de um determinado ponto p , num instante arbitrário $t \geq 0$, é $s_p = (x_p, y_p) = (x_0, y_0) + t \cdot \vec{v}$. Queremos saber o conjunto de arestas que define a triangulação de Delaunay desses pontos, num instante arbitrário $t \geq 0$.

Por exemplo, esta é a triangulação de Delaunay para os 8 pontos na coleção representada na Figura 4.1:

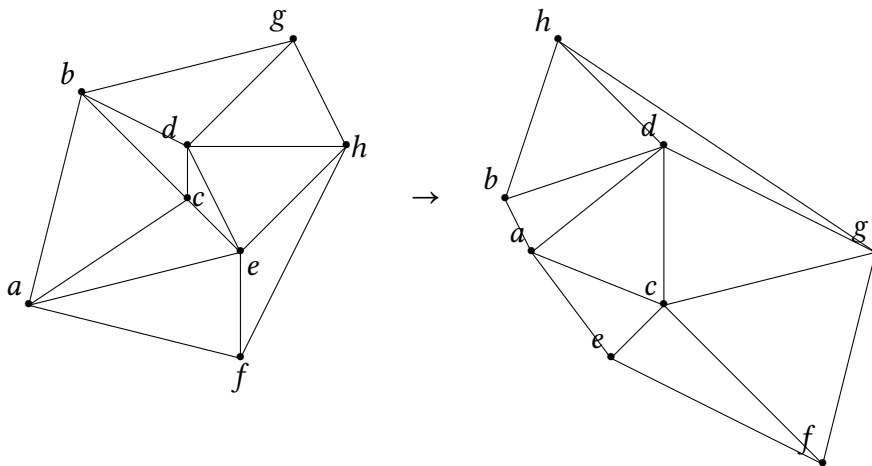


Figura 4.1: Triangulação de Delaunay da coleção de pontos nos instantes $t = 0$ e $t = 2$.

Para entender o que é a triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos, precisamos antes entender o que é o diagrama de Voronoi.

O diagrama de Voronoi de um conjunto P de pontos é uma partição do plano em regiões que correspondem aos pontos de p . Cada região $R(p)$ compreende todos os pontos do

plano mais próximos de p do que de qualquer outro ponto do conjunto P . As regiões são polígonos cujas arestas são formadas por pontos que estão equidistantes de dois ou mais pontos de P . Os vértices desse polígono estão equidistantes de três ou mais pontos de P . Veja a Figura 4.2.

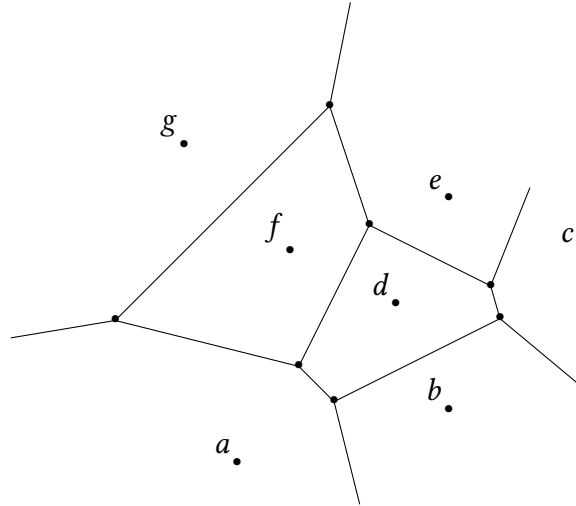


Figura 4.2: Exemplo diagrama de Voronoi.

A triangulação de Delaunay de um conjunto de pontos P é definida como a triangulação do grafo dual do diagrama de Voronoi para P . Os vértices do grafo dual são os pontos de P e para cada região associada ao ponto no diagrama de Voronoi existe uma aresta entre o vértice associado à região e os vértices associados às regiões adjacentes. Veja a Figura 4.3. O grafo dual é chamado de grafo de Delaunay e a triangulação desse grafo é chamada de triangulação de Delaunay.

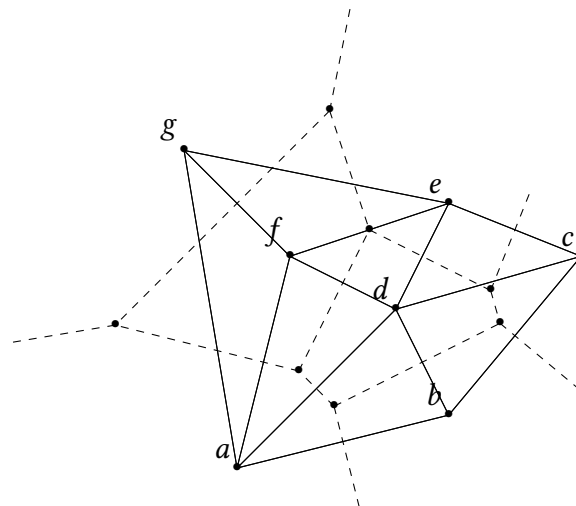


Figura 4.3: Exemplo da dualidade entre a triangulação de Delaunay e o Diagrama de Voronoi. Os segmentos tracejados são as arestas do diagrama. Os segmentos traçados são as arestas da triangulação.

Em geral, o grafo de Delaunay já é uma triangulação. Somente no caso em que existem

quatro ou mais pontos co-circulares é possível que existam faces no grafo de Delaunay com quatro ou mais arestas, veja a Figura 4.4.

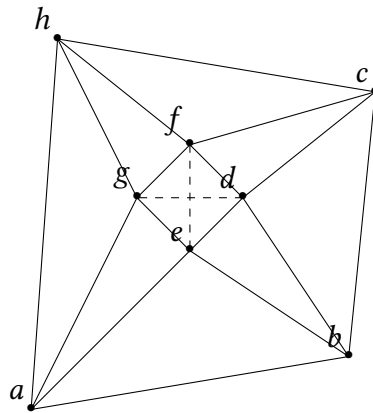


Figura 4.4: Para que o grafo de Delaunay seja uma triangulação é necessário adicionar uma das duas possíveis arestas tracejadas. O grafo de Delaunay da Figura não é uma triangulação porque os pontos f, g, d e e são co-circulares.

Considere uma aresta e de uma triangulação T de P . Se e não faz parte do fecho convexo de P , então faz parte de dois triângulos adjacentes na triangulação. Se esses triângulos formam um quadrilátero convexo, então os vértices da aresta podem ser trocados pelos outros dois vértices do quadrilátero, gerando uma nova triangulação. Essa troca na aresta gera seis novos ângulos na triangulação, veja a Figura 4.5.

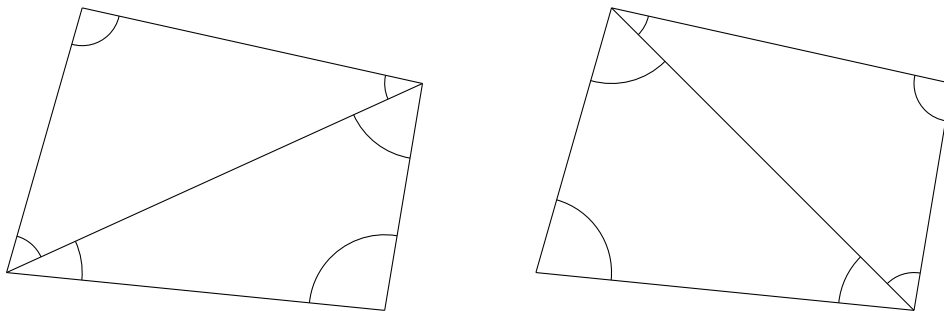


Figura 4.5: Após trocar os vértices da aresta do quadrilátero convexo, seis novos ângulos se formaram.

Uma aresta é dita ilegal se após a troca dos vértices, o menor dos ângulos do novo quadrilátero formado é maior que o menor dos ângulos do quadrilátero anterior a troca da aresta. Em [BERG et al., 2010](#) é demonstrado que uma aresta $p_i p_j$ é ilegal se o ponto p_l do quadrilátero convexo $p_i p_k p_j p_l$ está no interior do círculo que passa por $p_i p_k p_j$. Também é demonstrado que uma triangulação que não possui arestas ilegais é uma triangulação de Delaunay.

Isso nos dá um algoritmo para calcular a triangulação de Delaunay, podemos começar com uma triangulação qualquer e trocar arestas que identificarmos como ilegais. Uma possível forma de gerar uma triangulação inicial é utilizando o algoritmo de Graham, veja o Algoritmo 4.1.

Algoritmo 4.1 Função DELAUNAY(P).

```

1: function DELAUNAY( $P$ )
2:   ORDENA( $P$ )
3:   ADICIONAARESTA( $E, P[1], P[2]$ )
4:    $H[1] \leftarrow P[1]$ 
5:    $H[2] \leftarrow P[2]$ 
6:    $h \leftarrow 2$ 
7:   for  $i \leftarrow \{3, \dots, n\}$  :
8:     ADICIONAARESTA( $E, P[i], P[1]$ )
9:     ADICIONAARESTA( $E, H[h], P[i]$ )
10:    while  $h > 1$  and LEFT( $H[h], H[h-1], P[i]$ ) :
11:       $h \leftarrow h - 1$ 
12:      ADICIONAARESTA( $E, H[h], P[i]$ )
13:     $h \leftarrow h + 1$ 
14:     $H[h] \leftarrow P[i]$ 
15:   $l \leftarrow 1$ 
16:  while  $l = 1$  :
17:     $l \leftarrow 0$ 
18:    for  $e \leftarrow E$  :
19:      if ILLEGAL( $e$ ) :
20:         $l \leftarrow 1$ 
21:        FLIP( $e$ )

```

As primitivas utilizadas no Algoritmo 4.1 são os testes LEFT e INCIRCLE. O teste LEFT é um teste bem conhecido na geometria computacional e consiste em avaliar o valor do seguinte determinante:

$$\text{LEFT}(p_i, p_j, p_k) = \begin{vmatrix} x_{p_i} & y_{p_i} & 1 \\ x_{p_j} & y_{p_j} & 1 \\ x_{p_k} & y_{p_k} & 1 \end{vmatrix}$$

em que um valor maior que zero significa que p_k está à esquerda da reta orientada que passa por p_i e p_j , zero significa que p_k está sobre a reta e um valor menor que zero significa que p_k está à direita da reta.

Guibas e Stolfi [L. GUIBAS e STOLFI, 1985] mostram que para determinar se um ponto p_l está dentro do círculo que passa por $p_i p_j p_k$ podemos avaliar o valor do seguinte determinante:

$$\text{INCIRCLE}(p_i, p_j, p_k, p_l) = \begin{vmatrix} x_{p_i} & y_{p_i} & x_{p_i}^2 + y_{p_i}^2 & 1 \\ x_{p_j} & y_{p_j} & x_{p_j}^2 + y_{p_j}^2 & 1 \\ x_{p_k} & y_{p_k} & x_{p_k}^2 + y_{p_k}^2 & 1 \\ x_{p_l} & y_{p_l} & x_{p_l}^2 + y_{p_l}^2 & 1 \end{vmatrix}$$

em que um valor maior que zero significa que p_l está dentro do círculo, zero significa que p_l está na borda do círculo e um valor menor que zero significa que p_l está fora do círculo.

Guibas, Mitchell e Roos [L. J. GUIBAS *et al.*, 1992] propuseram uma estrutura de dados

cinética para manter a triangulação de Delaunay. Os certificados da estrutura serão os testes de `LEFT` e `INCIRCLE` utilizados para assegurar que não existem arestas ilegais. Os momentos em que ocorre uma inversão no valor desses determinantes definem o prazo de validade destes certificados.

Um evento associado ao vencimento de um certificado do tipo `INCIRCLE` resulta na troca de uma aresta, veja a Figura 4.6. Um detalhe que vale ser ressaltado é que a troca só deve ser realizada se o quadrilátero em questão é convexo.

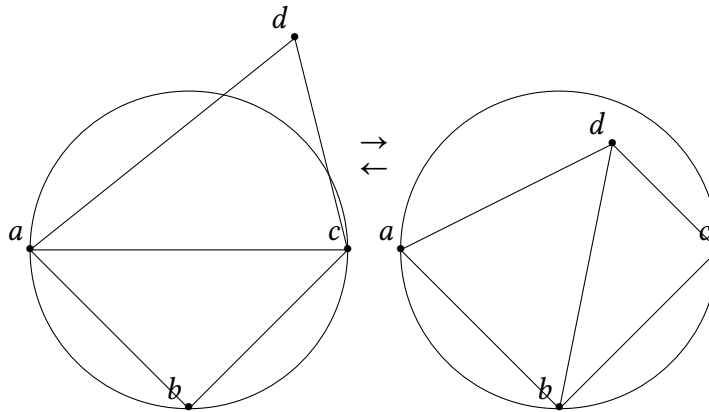


Figura 4.6: Após a entrada de d no círculo definido por a, b e c , a aresta ac se torna inválida e é trocada para uma aresta bd .

Um evento associado ao vencimento de um certificado do tipo `LEFT` resulta na adição ou remoção de um vértice ao fecho convexo dos pontos e na remoção ou adição de um novo triângulo na triangulação, veja a Figura 4.7.

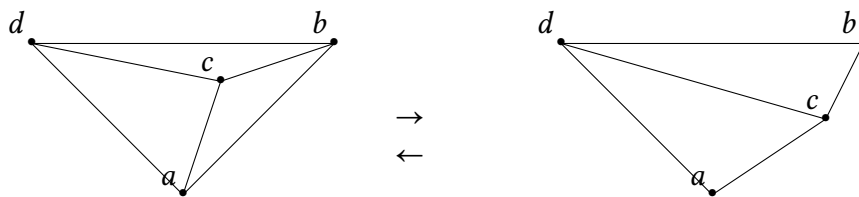


Figura 4.7: Exemplo de evento `LEFT`. O ponto c sai do fecho convexo, e por isso um triângulo é removido da triangulação. A Figura também pode ser vista da direita para à esquerda.

Na verdade, utilizaremos uma técnica muito comum na geometria computacional para facilitar a computação dos eventos. Adicionaremos um ponto no infinito e uma aresta entre cada ponto no fecho convexo e esse ponto no infinito. Dessa forma, poderemos tratar todos eventos da mesma forma, cada evento consiste na troca de uma aresta do quadrilátero formado pelos quatro vértices que participam do evento. Eventos envolvendo o ponto no infinito ainda devem ter o prazo de validade calculado através da rotina `LEFT` com os três pontos que não são o infinito.

Além disso, em certos casos degenerados, é possível que quadriláteros adjacentes estejam envolvidos num evento ao mesmo tempo. Esses são os casos em que o grafo

de Delaunay não corresponde à triangulação de Delaunay, com faces que são polígonos com mais de três lados. Isso ocorre quando mais de quatro pontos numa vizinhança se tornam co-circulares e são casos que devem ser tratados de forma especial. Esses casos são identificados quando os eventos da fila de prioridades ocorrem no mesmo instante, envolvendo quadriláteros adjacentes. A solução proposta em AGGARWAL *et al.*, 1987 calcula uma triangulação para o instante $t + \epsilon$ em tempo linear, sendo t o instante de ocorrência do evento. Assim, após o processamento desses eventos a estrutura permanece correta.

A estrutura de dado cinética pode ser construída da seguinte forma:

1. Calcular a triangulação de Delaunay de P para os pontos na posição inicial.
2. Para cada quadrilátero formado por triângulos adjacentes na triangulação calcular os prazos de validade dos certificados e inseri-los numa fila com prioridades. Isso inclui os quadriláteros que tem o ponto no infinito como vértice, que terão seus prazos de validade calculados de acordo com o zero da função LEFT, e não da função INCIRCLE como os demais.

Note que a estrutura de dados pode ser gerada independentemente do algoritmo utilizado para calcular a triangulação de Delaunay inicial. Isso nos permite utilizar um algoritmo mais eficiente para calcular a triangulação inicial, como o algoritmo incremental que consome tempo $O(n \lg n)$. O segundo passo também consome tempo $O(n \lg n)$, já que calcular os prazos de validade toma tempo constante e a inserção na fila com prioridades $O(\lg n)$.

4.1 Análise de desempenho

As análises de desempenho aqui foram extraídas de FREITAS, 2000.

A estrutura de dados cinética para manter a triangulação de Delaunay é uma estrutura *responsiva*, pois o custo de processar um certificado é $O(\lg n)$. O custo de processar um certificado é o custo de trocar uma aresta e recalculando os certificados dos quatro quadriláteros envolvidos nessa troca. Nos casos degenerados é mais do que quatro quadriláteros serão envolvidos, mas em L. J. GUIBAS *et al.*, 1992 é mostrado que o tempo amortizado continua sendo $O(\lg n)$.

A estrutura é *eficiente*, pois todos os eventos processados são eventos *externos*, isto é, todo vencimento de certificado representa uma troca na descrição combinatória da triangulação de Delaunay. De acordo com FREITAS, 2000, no caso de movimentos lineares, o número total de eventos é $O(n^3)$.

A estrutura é *compacta*, pois cada certificado está associado a uma aresta, teremos $O(n)$ certificados na fila de prioridades num determinado instante.

A estrutura não é *local*, pois um ponto pode estar envolvido em até $O(n)$ certificados, veja a Figura 4.8.

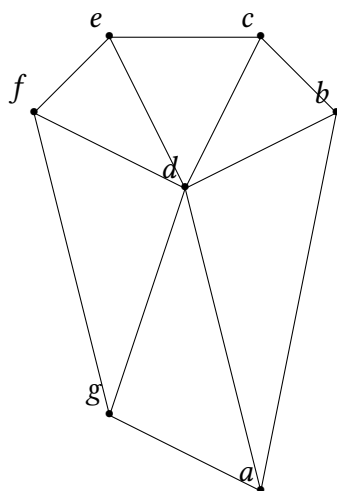


Figura 4.8: Exemplo de situação em que um ponto, o ponto d , está envolvido em $O(n)$ certificados.

Referências

- [AGGARWAL *et al.* 1987] A. AGGARWAL, L. GUIBAS, J. SAXE e P. SHOR. “A linear time algorithm for computing the voronoi diagram of a convex polygon”. Em: *Proceedings of the Nineteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. STOC ’87. New York, New York, USA: Association for Computing Machinery, 1987, pgs. 39–45. ISBN: 0897912217. DOI: [10.1145/28395.28400](https://doi.org/10.1145/28395.28400). URL: <https://doi.org/10.1145/28395.28400> (citado na pg. 56).
- [BASCH 1999] Julien BASCH. “Kinetic Data Structures”. Tese de dout. Stanford University, 1999 (citado na pg. 22).
- [BASCH *et al.* 1999] Julien BASCH, Leonidas J GUIBAS e John HERSHBERGER. “Data structures for mobile data”. Em: *Journal of Algorithms* 31.1 (1999), pgs. 1–28. ISSN: 0196-6774. DOI: <https://doi.org/10.1006/jagm.1998.0988>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0196677498909889> (citado nas pgs. 1, 2, 36, 37).
- [BERG *et al.* 2010] Mark de BERG, Otfried CHEONG, Marc van KREVELD e Mark OVERMARS. *Computational Geometry. Algorithms and Applications*. 2010. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-77974-2> (citado na pg. 53).
- [FREITAS 2000] Eduardo Garcia de FREITAS. “Problemas Cinéticos em Geometria Computacional”. Diss. de mest. Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2000 (citado nas pgs. 48, 49, 56).
- [L. GUIBAS e STOLFI 1985] Leonidas GUIBAS e Jorge STOLFI. “Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi”. Em: *ACM Trans. Graph.* 4.2 (abr. de 1985), pgs. 74–123. ISSN: 0730-0301. DOI: [10.1145/282918.282923](https://doi.org/10.1145/282918.282923). URL: <https://doi.org/10.1145/282918.282923> (citado na pg. 54).
- [L. J. GUIBAS *et al.* 1992] Leonidas J. GUIBAS, Joseph S. B. MITCHELL e Thomas ROOS. “Voronoi diagrams of moving points in the plane”. Em: *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*. Ed. por Gunther SCHMIDT e Rudolf BERGHAMMER. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992, pgs. 113–125. ISBN: 978-3-540-46735-9 (citado nas pgs. 54, 56).

