

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Estruturas de Dados Cinéticas**

Marcos Siolin Martins

MONOGRAFIA FINAL

MAC 499 — TRABALHO DE  
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cristina Gomes Fernandes

São Paulo  
2022

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

## Agradecimentos

*Whatever you do, do it well.*

— Walt Disney

[illegible]



## Resumo

Marcos Siolin Martins. **Estruturas de Dados Cinéticas**. Monografia (Bacharelado).

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Palavras-chave:** Palavra-chave1. Palavra-chave2. Palavra-chave3.



# Abstract

Marcos Siolin Martins. **Kinetic Data Structures**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2022.

[illegible]

**Keywords:** Keyword1. Keyword2. Keyword3.





# Lista de Figuras

1.1	Exemplo ordenação cinética . . . . .	5
1.2	Expiração de certificado . . . . .	8
1.3	Atualização de certificado . . . . .	8
1.4	Certificados atualizados . . . . .	9
1.5	Exemplo de estrutura da ABB . . . . .	10
1.6	Representação dos certificados da ABB . . . . .	11
1.7	Representação de certificado expirado . . . . .	13
1.8	ABB após atualização . . . . .	13
1.9	Exemplo de ABB com campo <i>size</i> . . . . .	14
1.10	Exemplo de busca pelo <i>i</i> -ésimo . . . . .	15
1.11	ABB após chamada de CHANGE . . . . .	15
1.12	ABB após chamar INSERT . . . . .	16
1.13	ABB após chamar DELETE . . . . .	17
2.1	Exemplo máximo cinético . . . . .	19
2.2	Certificado expirado . . . . .	21
2.3	Certificados atualizados . . . . .	21
2.4	Certificados após CHANGE . . . . .	23
2.5	Representação da estrutura torneio . . . . .	24
2.6	Representação de certificados em torneio . . . . .	24
2.7	Representação de certificado expirado . . . . .	26
2.8	Torneio após tratamento de certificado expirado . . . . .	27
2.9	Torneio após operação CHANGE . . . . .	28
2.10	Exemplo de torneio que suporta inserção e remoção . . . . .	32
2.11	Torneio após inserção de elemento . . . . .	33
2.12	Torneio após remoção de elemento . . . . .	34
3.1	Exemplo do problema par mais próximo . . . . .	35
3.2	Exemplo de cones do algoritmo estático . . . . .	36

3.3	Os pontos $q$ e $r$ pertencem a $Dom(p)$ , mas o ponto $s$ não. . . . .	37
3.4	Representação dos conjuntos do algoritmo . . . . .	37
3.5	A distância de $r$ até $q$ é menor do que a distância $p$ até $r$ e do que a distância $p$ até $q$ . . . . .	38
3.6	O ponto $p$ está numa inclinação de $\phi - \theta$ graus em relação a reta que passa pela origem e por $x'$ . . . . .	39
3.7	Na figura, $l$ é $low(p)$ e $u$ é $up(p)$ . A subárvore $\alpha$ contém todos os pontos que estão entre $low(p)$ e $up(p)$ e, portanto, corresponde ao conjunto $Cands(p)$ . . . . .	40
3.8	Da esquerda para direita, o caso em que $p$ está em $Hits_{up}(q)$ . Da direita para esquerda, o caso em que $q$ está em $Hits_{low}(p)$ . . . . .	44
3.9	Se $p$ não está em $Hits_{up}(q)$ , ou se $q$ não está em $Hits_{low}(p)$ , nada acontece. . . . .	45
3.10	Da esquerda para direita, o caso em que $p$ está em $Hits_{low}(q)$ , ou seja, $q$ está entrando em $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que $q$ está em $Cands(p)$ , saindo de $Dom(p)$ . . . . .	48
3.11	Da esquerda para a direita, todos os pontos de $Hits_{up}(q)$ são transferidos para $Hits_{up}(p)$ e $p$ , que está em $Hits_{low}(q)$ , é transferido para $Hits_{low}(t)$ . Da direita para esquerda, os pontos em $Hits_{up}(p)$ são transferidos para $Hits_{up}(q)$ e $p$ , que está em $Hits_{low}(t)$ , é transferido para $Hits_{low}(q)$ . . . . .	49
3.12	Da esquerda para direita, o caso em que $p$ está em $Hits_{up}(q)$ , ou seja, $q$ está entrando em $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que $q$ está em $Cands(p)$ , saindo de $Dom(p)$ . . . . .	49
3.13	Da esquerda para direita, o caso em que $p$ está em $Hits_{up}(q)$ , ou seja, $q$ está entrando em $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que $q$ está em $Cands(p)$ , saindo de $Dom(p)$ . . . . .	51
3.14	Da direita para esquerda, $p$ , que estava em $Hits_{up}(q)$ foi transferido para $Hits_{up}(t)$ e todos os elementos em $Hits_{low}(q)$ foram transferidos para $Hits_{low}(p)$ . Da esquerda para direita, $p$ , que estava em $Hits_{up}(t)$ , foi transferido para $Hits_{up}(q)$ e os pontos à direita de $v$ em $Hits_{low}(p)$ foram transferidos para $Hits_{low}(q)$ . . . . .	51
3.15	Exemplo de colisão entre três pontos. . . . .	52
3.16	Exemplo de parâmetro de evento horizontal ocorrendo entre $p$ e $q$ , com a trajetória simulada. . . . .	53

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela para as Figuras 2.2 e 2.3. (incompleta) . . . . .	21
-----	--	----



# Lista de Algoritmos

1.1	Função ADVANCE. . . . .	7
1.2	Função EVENT. . . . .	8
1.3	Função UPDATE. . . . .	8
1.4	Função QUERY_KTH. . . . .	9
1.5	Função CHANGE. . . . .	9
1.6	Função UPDATE. . . . .	13
1.7	Função EVENT. . . . .	13
1.8	Função QUERY_KTH. . . . .	14
1.9	Função CHANGE. . . . .	15
1.10	Função INSERT. . . . .	16
1.11	Função DELETE. . . . .	16
2.1	Função UPDATE. . . . .	22
2.2	Função EVENT. . . . .	22
2.3	Função QUERY_MAX. . . . .	22
2.4	Função CHANGE. . . . .	22
2.5	Função UPDATE. . . . .	25
2.6	Função EVENT. . . . .	26
2.7	Função QUERY_MAX. . . . .	26
2.8	Função CHANGE. . . . .	27
2.9	Função UPDATE. . . . .	30
2.10	Função EVENT. . . . .	30
2.11	Função QUERY_MAX. . . . .	31
2.12	Função CHANGE. . . . .	31
2.13	Função INSERT. . . . .	32
2.14	Função INSERTTOURN. . . . .	32
2.15	Função DELETE. . . . .	33
2.16	Função DELETETOURN. . . . .	34
3.1	Função CLOSEST_PAIR( $p, n, \theta$ ). . . . .	38
3.2	Função SUCCESSOR( $p$ ). . . . .	41

3.3	Função $\text{PREDECESSOR}(p)$ . . . . .	41
3.4	Função $\text{lcand}(p)$ . . . . .	42
3.5	Função $\text{QUERY\_CLOSEST}$ . . . . .	42
3.6	Função $\text{HORIZONTAL\_EVENT}$ . . . . .	46
3.7	Função $\text{UP\_EVENT}$ . . . . .	47
3.8	Função $\text{downEvent}$ . . . . .	50

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Ordenação cinética</b>	<b>5</b>
1.1 Lista ordenada cinética . . . . .	6
1.2 Árvore binária balanceada de busca . . . . .	9
<b>2 Máximo cinético</b>	<b>19</b>
2.1 Heap cinético . . . . .	20
2.2 Torneio cinético . . . . .	23
2.2.1 Inserção e remoção em torneio . . . . .	28
<b>3 Par mais próximo</b>	<b>35</b>
3.1 Algoritmo Estático . . . . .	36
3.2 Algoritmo Cinético . . . . .	43
3.2.1 Tratamento de casos degenerados . . . . .	52





# Introdução

Quando desejamos criar algoritmos para resolver problemas com o computador, utilizamos maneiras de organizar os dados para que operações de acesso e alteração desses dados possam ser realizadas rapidamente, as chamadas estruturas de dados. A forma como serão organizados os dados depende altamente das características do problema em questão.

Neste trabalho estudaremos *estruturas de dados cinéticas* (em inglês, *KDS - Kinetic Data Structures*), propostas por Basch, Guibas e Hershberger para a resolução dos chamados problemas *cinéticos*.

Problemas *cinéticos* são problemas em que deseja-se manter um determinado atributo sobre objetos que estão em movimento contínuo. Os objetos nos problemas podem representar entidades do mundo físico: pontos podem representar pessoas, aviões, estabelecimentos, entre outras coisas, retas podem representar trajetórias. Devido à natureza desses problemas é razoável que estudemos problemas clássicos de geometria computacional, mas dentro de um contexto cinético. Por exemplo, num conjunto dado de pontos em movimento, qual par de pontos possui distância mínima.

Quando é dado um conjunto fixo de objetos geométricos, e deseja-se saber informações de um determinado atributo desses objetos (como, por exemplo, em um conjunto dado de pontos, qual par de pontos possui distância mínima), dizemos que esse é um problema *estático*.

O mesmo problema pode ser formulado sobre um conjunto mutável. Por exemplo, pontos poderiam ser inseridos e removidos ao longo do tempo. Queremos calcular o atributo sem ter que resolver do zero a nova instância do problema estático. Chamamos esse tipo de problema de *dinâmico* ou *on-line*.

As *estruturas de dados cinéticas* recebem esse nome para diferenciá-las das estruturas de dados *estáticas* e *dinâmicas*, pois têm como foco manter a descrição combinatória do problema que se altera frequentemente com a passagem de tempo, já que os objetos estão em movimento contínuo.

Essas estruturas nos permitem realizar consultas de um determinado atributo dos objetos, no instante atual. A garantia de que a estrutura permanece correta se dá através do uso de instrumentos chamados *certificados*. Os certificados estabelecem que uma relação entre um objeto da estrutura e outro se mantém verdadeira até o seu vencimento e devem ajudar na manutenção da estrutura para permitir as consultas desejadas. Chamaremos o instante de tempo em que o certificado vence de valor ou *prazo de validade* do certificado.

As estruturas contarão com uma operação *ADVANCE*, responsável por avançar até o

instante de tempo atual mantendo a estrutura correta. Para tal, é necessário que nenhum certificado esteja vencido no instante  $t$ , ou seja, o certificado de menor prazo de validade expira após o instante  $t$ . Sendo assim, estamos interessados nos certificados de menor prazo de validade, para que possamos realizar os ajustes necessários enquanto existir um certificado que expira antes do instante de tempo que desejamos alcançar.

Para identificar o instante de vencimento de certificados manteremos uma fila com prioridades utilizando como prioridade o prazo de validade do certificado.

Para calcular o prazo de validade dos certificados, utilizaremos o chamado *plano de vôo* dos objetos. O plano de vôo de um objeto é uma função que, dado o instante de tempo atual, determina sua trajetória. Assim como na vida real, o plano de vôo pode sofrer mudanças. Essas mudanças no plano de vôo geram a necessidade de atualização de certificados e de ajustes nas estruturas. A operação `CHANGE` será utilizada para atualizar o plano de vôo dos objetos e realizar as mudanças necessárias para manter a estrutura correta.

Por fim, a operação `QUERY` ficará responsável por responder o atributo geométrico que desejamos saber num dado instante.

Uma questão natural a ser feita a respeito destas estruturas é como medir o desempenho delas, já que as formas clássicas de determinar a complexidade de algoritmos não se enquadram muito bem, por conta da adição da dimensão tempo. Basch, Guibas e Hershberger propuseram algumas formas de analisá-las e medi-las. São elas:

- Responsividade: uma estrutura é dita *responsiva* se o custo de processar um certificado, isto é, o custo de atualizar os certificados e as outras estruturas necessárias é pequeno;
- Eficiência: uma estrutura é dita *eficiente* se a razão entre a quantidade total de eventos processados e a quantidade de eventos externos é pequena. Um evento diz respeito ao vencimento de um certificado, os eventos chamados *externos* são eventos que geram mudanças na descrição combinatória, enquanto eventos chamados *internos* não geram mudanças na descrição combinatória, mas ainda são necessários para manter a estrutura;
- Compacidade: uma estrutura é dita *compacta* se a quantidade máxima de certificados que podem estar na fila com prioridades em um determinado instante é linear;
- Localidade: uma estrutura é dita *local* se a quantidade máxima de certificados na fila que estão relacionados com um determinado objeto é pequena.

O custo de uma operação é dito pequeno se o custo é assintoticamente polilogarítmico ou polinomial para um valor pequeno no expoente.

Neste trabalho estudaremos alguns problema cinéticos e as estruturas utilizadas para resolvê-los. Apesar do modelo proposto por Basch, Guibas e Hershberger funcionar para trajetórias não-lineares, nos restringiremos apenas a trajetórias lineares.

No capítulo 1 estudaremos o problema da ordenação cinética, que consiste de

No capítulo 2 estudaremos o problema do máximo cinético

No capítulo 3 estudaremos o problema do par mais próximo cinético, em que utilizaremos estruturas vistas nos dois capítulos anteriores.



# Capítulo 1

## Ordenação cinética

Considere o seguinte problema cinético. Dada uma coleção de  $n$  pontos em movimento retilíneo, o objetivo é responder consultas do tipo: para um certo  $i$ , com  $1 \leq i \leq n$ , quem é o  $i$ -ésimo maior valor da coleção no instante corrente.

Por exemplo, se tivermos quatro elementos na coleção, digamos  $(6, -\frac{1}{2})$ ,  $(5, 0)$ ,  $(3, \frac{1}{4})$  e  $(0, \frac{4}{3})$ , podemos representar essa coleção como na Figura 1.1.



**Figura 1.1:** O segundo maior valor no instante  $t = 0$  é do elemento 2, e no instante  $t = 3$  é do elemento 1. O menor valor da coleção no instante  $t = 3$  é do elemento 3, e no instante  $t = 5$  é do elemento 1.

Queremos dar suporte às seguintes operações:

- $\text{ADVANCE}(t) \rightarrow$  avança o tempo corrente para  $t$ ;
- $\text{CHANGE}(j, v) \rightarrow$  altera a velocidade do elemento  $j$  para  $v$ ;
- $\text{QUERY\_KTH}(i) \rightarrow$  devolve o elemento cujo valor é o  $i$ -ésimo maior no instante atual.

## 1.1 Lista ordenada cinética

Um jeito natural de resolver o problema da ordenação cinética é por meio de uma lista ordenada cinética, que é manter um vetor com os elementos dados em ordem decrescente do valor no instante atual.

Inicialmente o vetor começa com os valores dos elementos no instante  $t = 0$ , ou seja, com o valor  $x_0$  de cada elemento, e este vetor é ordenado em ordem decrescente. Na verdade, o vetor pode armazenar não os valores, mas os índices dos elementos, e fazemos ordenação indireta. No caso de empates nos valores dos elementos, o desempate será feito pela velocidade, ou seja, se dois elementos, digamos  $i$  e  $j$ , possuem o mesmo valor  $x_0$ , mas a velocidade de  $i$  é maior que a de  $j$ , então  $i$  será tratado como se possuísse maior valor que  $j$  no instante inicial. Esse mesmo critério de desempate será aplicado em todos os instantes e também em todos os problemas daqui em diante.

Uma vez de posse do vetor ordenado com os valores iniciais decrescentemente, construímos um certificado para cada par de elementos consecutivos no vetor. O  $i$ -ésimo certificado, denotado pelo par  $(i, t)$ , se refere ao par das posições  $i$  e  $i + 1$ . O valor  $t$  consiste no instante de tempo em que o  $i$ -ésimo elemento deixará de ter um valor maior que o valor do  $(i + 1)$ -ésimo elemento do vetor, se esse instante for maior ou igual a 0, ou em geral ao instante atual. Do contrário, o valor  $t$  consiste em  $+\infty$ . O valor  $t$  do certificado é o seu prazo de validade.

Esses prazos de validade determinam os eventos que potencialmente causarão modificações no vetor que mantém os elementos ordenados pelo seu valor e consequentemente em alguns certificados.

Esses  $n - 1$  certificados são colocados em uma fila com prioridades, com seu prazo de validade determinando a prioridade. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade. Ou seja, a fila com prioridades pode ser implementada com um heap de mínimo que usa os prazos de validade como chave.

Para descrever a implementação das três operações, precisamos estabelecer o nome das variáveis usadas. São elas:

1.  $n$ : o número de elementos dados;
2.  $x_0$  e  $speed$ : vetores com o valor e a velocidade inicial de cada um dos  $n$  elementos;
3.  $now$ : instante atual. A variável  $now$  será tratada como global, ou seja, será utilizada nas rotinas sem ser passada como argumento;
4.  $sorted$ : vetor com os índices dos  $n$  elementos em ordem decrescente do seu valor no instante  $now$ ;

5. *indS*: vetor de  $n$  posições; *indS*[ $j$ ] guarda a posição em *sorted* do elemento  $j$ ;
6. *cert*: vetor com os  $n - 1$  certificados; *cert*[ $i$ ] guarda o  $i$ -ésimo, ou seja, o certificado entre *sorted*[ $i$ ] e *sorted*[ $i + 1$ ], para  $1 \leq i < n$ ;
7.  $Q$ : fila que guarda os inteiros  $1, \dots, n - 1$ , sendo *cert*[ $i$ ] a prioridade de cada elemento da fila.

A interface da fila com prioridades que utilizaremos inclui as duas seguintes operações:

1. *MINPQ*( $Q$ ): devolve  $i$  tal que *cert*[ $i$ ] é mínimo;
2. *UPDATEPQ*( $Q, i, t$ ): altera a chave do  $i$ -ésimo certificado para  $t$  e ajusta  $Q$  de acordo.

O vetor *indS* nos permite implementar a operação *CHANGE* de maneira eficiente, pois, dado um elemento  $j$ , precisamos saber a posição  $i$  do elemento  $j$  em *sorted* para recalculer os certificados relacionados com a posição  $i$ .

Para implementar a operação *UPDATEPQ*( $Q, i, t$ ) em tempo logarítmico no número de elementos na fila  $Q$ , é necessário utilizar um vetor adicional *indQ* que guarda em *indQ*[ $i$ ] a posição em  $Q$  do  $i$ -ésimo certificado.

Com isso, a operação *ADVANCE*( $t$ ), implementada no Algoritmo 1.1, segue uma ideia bem simples: enquanto  $t$  for maior que o prazo de validade do próximo evento, avançamos *now* para esse prazo de validade e tratamos esse evento. Nos problemas seguintes, a operação *ADVANCE*( $t$ ) será sempre a mesma; as únicas mudanças ocorrerão no tratamento de um evento. Um evento está associado a um certificado ( $i, t$ ) que expira quando *now* =  $t$ . O tratamento do evento correspondente ao certificado ( $i, t$ ) consiste em trocar de lugar os índices das posições  $i$  e  $i + 1$  do vetor *sorted*, recalculer o prazo de validade do  $(i - 1)$ -ésimo certificado se  $i > 1$ , e do  $(i + 1)$ -ésimo certificado se  $i < n - 1$ . O  $i$ -ésimo certificado também deve ser ajustado para  $+\infty$ . Finalmente, é necessário fazer ajustes em  $Q$ , alterando a chave dos certificados que sofreram alteração.

---

**Algoritmo 1.1:** Função *ADVANCE*.

---

```

1: function ADVANCE( $t$ )
2:   if  $t < \text{now}$  :
3:     return
4:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
5:   while  $t \geq \text{cert}[i]$  :
6:      $\text{now} \leftarrow \text{cert}[i]$ 
7:     EVENT()
8:      $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
9:    $\text{now} \leftarrow t$ 

```

---

Na implementação da operação *EVENT*, utilizaremos a rotina *UPDATE*( $i$ ) para calcular o novo prazo de validade  $t$  do  $i$ -ésimo certificado, se  $1 \leq i < n$ , e fazer os devidos ajustes em  $Q$ . Ambas as implementações podem ser encontradas nos Algoritmos 1.2 e 1.3, respectivamente. Para calcular  $t$ , utilizaremos uma rotina chamada *EXPIRE*( $i, j$ ), que calcula o prazo de validade dos certificados entre os elementos  $i$  e  $j$  no instante *now*. A rotina auxiliar

$\text{EXPIRE}(i, j)$  não mudará para outros problemas, mantendo a mesma definição. As Figuras 1.2 e 1.3 ilustram as atualizações feitas por essas rotinas.

---

**Algoritmo 1.2:** Função EVENT.

---

```

1: function EVENT()
2:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $\text{cert}[i] = \text{now}$  :
4:      $\text{sorted}[i] \leftrightarrow \text{sorted}[i + 1]$ 
5:      $\text{indS}[\text{sorted}[i]] \leftrightarrow \text{indS}[\text{sorted}[i + 1]]$ 
6:     UPDATE( $i$ )
7:     UPDATE( $i - 1$ )
8:     UPDATE( $i + 1$ )
9:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

---



---

**Algoritmo 1.3:** Função UPDATE.

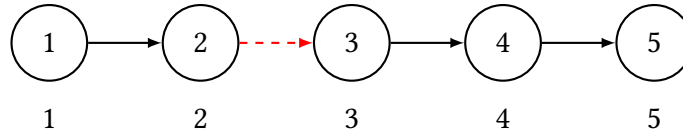
---

```

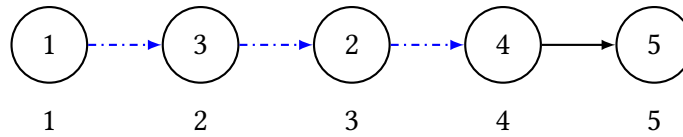
1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $1 \leq i < n$  :
3:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(i, i + 1)$ 
4:     UPDATEPQ( $Q, i, t$ )

```

---



**Figura 1.2:**  $\text{cert}[2]$  expirou.



**Figura 1.3:**  $\text{sorted}[2]$  e  $\text{sorted}[3]$  foram trocados e  $\text{cert}[1]$ ,  $\text{cert}[2]$ ,  $\text{cert}[3]$  foram atualizados.

A operação  $\text{QUERY\_KTH}(i)$ , implementada no Algoritmo 1.4, consiste em devolver  $\text{sorted}[i]$ , enquanto que a operação  $\text{CHANGE}(j, v)$  consiste em alterar a posição  $x_0[j]$  para  $x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now}$ , a posição  $\text{speed}[j]$  para  $v$  e recalculer os eventuais certificados de que  $j$  participa. O novo valor da posição  $x_0[j]$  corresponde à posição inicial do elemento caso ele tivesse começado com essa velocidade e estivesse na posição atual agora. Para tanto, a partir da posição  $i$  em que  $j$  se encontra no vetor  $\text{sorted}$ , podemos recalculer  $\text{cert}[i - 1]$  se  $i > 1$  e  $\text{cert}[i]$  se  $i < n$ , como ilustrado na Figura 1.4, acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em  $Q$  correspondentes a estas modificações. As instruções executadas pela operação CHANGE estão descritas no Algoritmo 1.5.



**Algoritmo 1.4:** Função QUERY\_KTH.

---

```

1: function QUERY_KTH( $i$ )
2:   if  $1 \leq i \leq n$  :
3:     return sorted[ $i$ ]
4:   return  $-1$ 

```

---

**Algoritmo 1.5:** Função CHANGE.

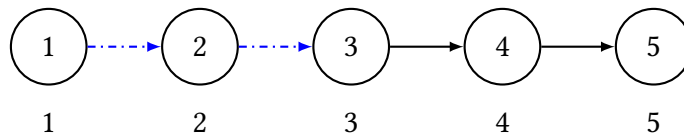
---

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (speed[j] - v) \cdot now$ ;
3:    $speed[j] \leftarrow v$ 
4:    $i \leftarrow indS[j]$ 
5:   UPDATE( $i$ )
6:   UPDATE( $i - 1$ )

```

---



**Figura 1.4:** Após a mudança de velocidade do elemento 2, que se encontra em sorted[2], cert[1] e cert[2] foram atualizados.

## 1.2 Árvore binária balanceada de busca

Manter um vetor ordenado é uma boa maneira de resolver o problema da lista ordenada cinética dando suporte às operações ADVANCE( $t$ ), CHANGE( $j, v$ ) e QUERY\_KTH( $i$ ). Poderíamos também querer dar suporte, além das operações citadas, às seguintes operações:

- INSERT( $v, x_t$ ) → insere um elemento com velocidade  $v$  e valor  $x_t$  no instante  $now$ ;
- DELETE( $i$ ) → remove o elemento  $i$  no instante  $now$ .

Para inserir um elemento no vetor ordenado, antes teríamos de encontrar a posição que este deveria ocupar no vetor. Digamos que seja a posição  $j$ . Após encontrar a posição, movemos todos os elementos, a partir da posição  $j$ , uma posição à frente e colocamos o elemento na posição  $j$ . Após isso, os certificados de  $j$  até  $n - 1$  devem ser atualizados, pois esses elementos mudaram de posição no vetor, e um novo certificado será criado, o  $n$ -ésimo certificado, o total de elementos  $n$  deve ser mudado para  $n + 1$ . O novo certificado também deve ser inserido na fila com prioridades.

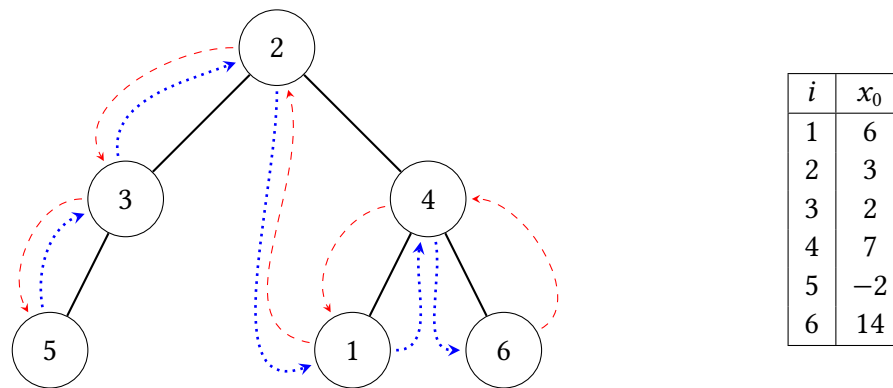
Só a operação de inserir um novo elemento no vetor já pode se tornar pouco eficiente com uma grande quantidade de elementos sendo inseridos no começo do vetor, consumindo tempo linear por inserção. Como a remoção de um elemento no vetor ordenado envolve uma sequência parecida de operações, da mesma maneira se torna pouco eficiente, também consumindo tempo linear no pior caso.

Dessa forma, apesar da lista ordenada cinética implementada manipulando um vetor ser uma estrutura eficiente para a operação QUERY\_KTH( $i$ ), com um consumo de tempo

constante, o consumo de tempo para as operações  $\text{INSERT}(v, x_t)$  e  $\text{DELETE}(i)$  é, no pior caso, proporcional ao número de elementos, o que pode ser ruim para uma grande quantidade de elementos, inserções e remoções.

Podemos equilibrar o consumo de tempo das operações  $\text{QUERY\_KTH}(i)$ ,  $\text{INSERT}(v, x_t)$  e  $\text{DELETE}(i)$  em tempo logarítmico no número de elementos, usando uma ABBB (árvore binária balanceada de busca). Os pontos serão armazenados na ABBB tendo o seu valor no instante *now* como chave.

Além da ABBB, para garantirmos a eficiência das operações  $\text{EVENT}$ ,  $\text{CHANGE}$ ,  $\text{INSERT}$  e  $\text{DELETE}$ , cada elemento terá um apontador para o seu predecessor e um apontador para o seu sucessor, formando uma lista duplamente ligada ordenada pelo valor do elemento no instante *now*; veja a Figura 1.5.



**Figura 1.5:** Exemplo de árvore em que a ordem dos elementos, do menor para o maior no instante *now* = 0, é 5 – 3 – 2 – 1 – 4 – 6. Os apontadores para o elemento anterior são representados pelas setas vermelhas tracejadas e os apontadores para o elemento posterior são representados pelas setas azuis pontilhadas.

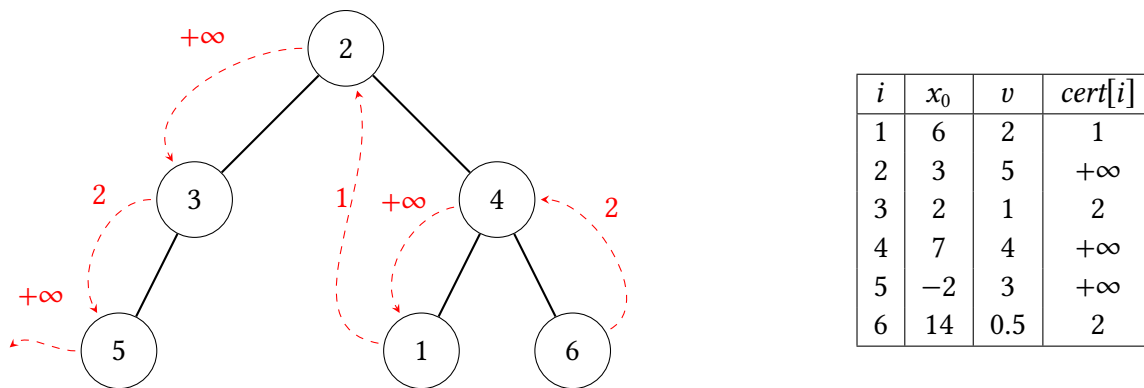
No que diz respeito aos certificados, antes um certificado estava associado a uma posição e, no vetor, ao inserirmos um elemento em uma determinada posição, teríamos que deslocar todos os certificados consequentes àquela posição. Agora, para que consigamos alterar apenas uma quantidade constante de certificados após uma inserção, os certificados não estarão mais associados a uma posição e sim aos elementos.

O certificado  $i$  se refere à relação estabelecida entre o elemento  $i$  e seu predecessor e consiste no instante de tempo em que o elemento  $i$  deixará de ter um valor maior que o valor do seu predecessor, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em  $+\infty$ . Se o elemento  $i$  não possui predecessor, então o certificado também consiste em  $+\infty$ . Veja a Figura 1.6.

Esses  $n$  certificados também serão colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade determinando a prioridade. A fila com prioridades agora também deverá suportar operações como a inserção e remoção de certificados.

Para descrever as implementações das operações, vamos estabelecer os nomes dos objetos, variáveis e rotinas auxiliares utilizados:

1.  $n$ : número de elementos no instante *now*;



**Figura 1.6:** Certificados representados pelas setas vermelhas tracejadas. O certificado do elemento 5 vale  $+\infty$ .

2. *node*: objeto que compõe a árvore binária balanceada de busca, com atributos:
  - (a) *left*: aponta para a raiz da subárvore esquerda do nó;
  - (b) *right*: aponta para a raiz da subárvore direita do nó;
  - (c) *key*: aponta para um elemento;
  - (d) *size*: quantidade de nós que a subárvore enraizada neste nó possui. Este atributo será importante para a operação *QUERY\_KTH(i)*;
3. *root*: nó que é a raiz da árvore binária balanceada de busca;
4. *element*: objeto com os seguintes atributos:
  - (a) *id*: vem de *identifier* e é o atributo para identificar o objeto. Assim, daqui em diante, usaremos elemento  $i$  para nos referirmos ao elemento cujo *id* é  $i$ ;
  - (b) *speed*: velocidade do elemento;
  - (c)  $x_0$ : valor que o elemento possuía no instante  $t = 0$ ;
  - (d) *next*: apontador para o elemento imediatamente posterior a este na coleção, no instante *now*. O elemento imediatamente posterior a  $i$  é aquele que possui o menor valor dentre a coleção de elementos que possuem valor maior que o elemento  $i$ ;
  - (e) *prev*: apontador para o elemento imediatamente anterior a este na coleção, no instante *now*;
  - (f) *pqpos*: vem de *priority queue position* e aponta para a posição do certificado associado ao elemento na fila com prioridades;
  - (g) *cert*: vem de *certificate* e é o prazo de validade do certificado entre este elemento e o elemento apontado por *prev*; se *prev* não aponta para ninguém, *cert* vale  $+\infty$ ;
  - (h) *node*: apontador para o nó da árvore binária de busca em que o elemento se encontra;

5.  $Q$ : fila com prioridades que contém os elementos; o elemento com certificado de menor valor estará à frente da fila;
6.  $\text{INSERTKEY}(root, e) \rightarrow$  insere  $e$ , um elemento, na árvore binária balanceada de busca com raiz  $root$  e retorna a, possivelmente nova, raiz da árvore. No processo também atualiza a lista ligada de elementos;
7.  $\text{DELETEKEY}(root, e) \rightarrow$  remove  $e$ , um elemento, da árvore binária balanceada de busca com raiz  $root$  e retorna a, possivelmente nova, raiz da árvore. No processo também atualiza a lista ligada de elementos.

Para a implementação das operações  $\text{CHANGE}(j, v)$  e  $\text{DELETE}(i)$ , precisamos de alguma maneira recuperar um elemento baseado no seu  $id$ . Para tal, podemos utilizar uma tabela de símbolos, implementada por uma árvore binária balanceada de busca ou uma tabela de dispersão. A seguir estão três operações que nos ajudarão a recuperar os elementos:

1.  $\text{GETOBJECT}(i) \rightarrow$  retorna o elemento  $i$ ;
2.  $\text{INSERTOBJECT}(e) \rightarrow$  insere  $e$ , que é um elemento, na estrutura;
3.  $\text{DELETEOBJECT}(e) \rightarrow$  remove  $e$ , que é um elemento, da estrutura.

Para permitir a inserção e remoção de certificados, a interface da fila com prioridades será reformulada, contando com duas operações extras:

1.  $\text{INSERTPQ}(Q, e) \rightarrow$  insere  $(e, t)$  na fila com prioridades  $Q$ ;
2.  $\text{DELETEPQ}(Q, e) \rightarrow$  remove  $e$  da fila com prioridades  $Q$ ;
3.  $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t) \rightarrow$  muda o prazo de validade do certificado de  $e$  para  $t$  e atualiza a fila com prioridades  $Q$ ;
4.  $\text{MINPQ}(Q) \rightarrow$  devolve o elemento com o certificado de menor prazo de validade da fila com prioridades  $Q$ .

A operação  $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t)$  pode ser implementada de modo a consumir tempo logarítmico no número de elementos em  $Q$  graças ao atributo  $pqpos$  dos elementos.

Um evento está associado a um par  $(e, t)$  que corresponde ao certificado do elemento  $e$  que expira no instante  $t$ . O tratamento do evento correspondente a esse par  $(e, t)$  consiste em trocar de lugar o elemento  $e$  e seu predecessor, digamos  $e'$ , na árvore binária de busca e na lista ligada, e recalculer o prazo de validade de até três certificados:

- do certificado de  $e$ ;
- do certificado de  $e'$ ;
- do certificado do novo sucessor de  $e'$ , caso não seja  $\text{NULL}$ .

Na implementação da operação  $\text{EVENT}$ , no Algoritmo 1.7, utilizaremos a rotina  $\text{UPDATE}(e)$ , no Algoritmo 1.6, que calcula o novo prazo de validade  $t$  do certificado do elemento  $e$ , e chama a rotina  $\text{UPDATEPQ}(Q, e, t)$ . A função  $\text{SWAP}(e_1, e_2)$  troca a posição de  $e_1$  e  $e_2$  na árvore binária balanceada de busca e na lista ligada e a função  $\text{EXPIRE}(e, e')$  calcula a validade do certificado entre os elementos  $e$  e  $e'$ ; se  $e'$  é  $\text{NULL}$  retorna  $+\infty$ .

**Algoritmo 1.6:** Função UPDATE.

---

```

1: function UPDATE( $e$ )
2:   if  $e \neq \text{NULL}$  :
3:      $e' \leftarrow e.\text{next}$ 
4:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(e, e')$ 
5:     UPDATEPQ( $Q, e, t$ )

```

---

**Algoritmo 1.7:** Função EVENT.

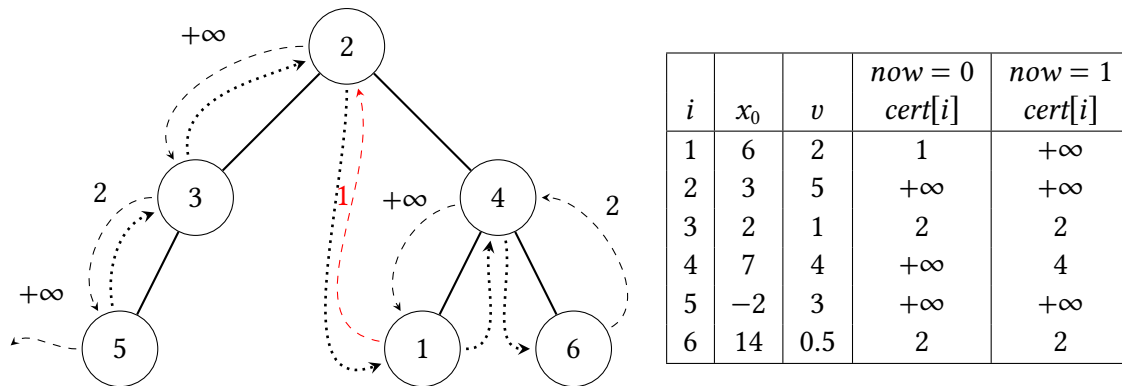
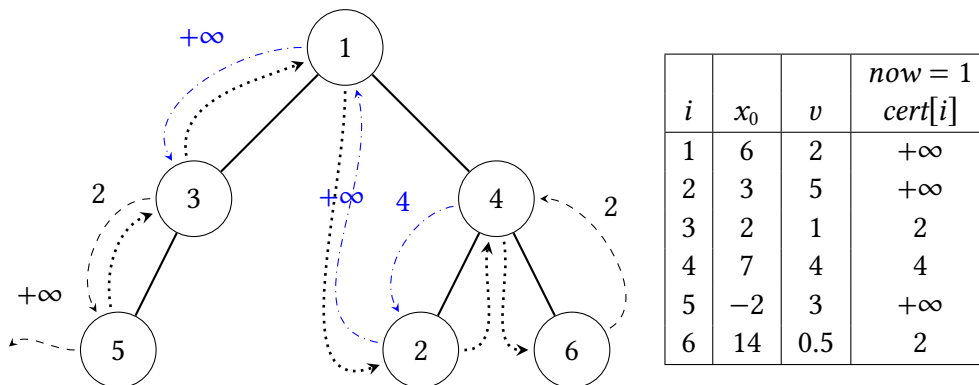
---

```

1: function EVENT()
2:    $e_1 \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $e_1.\text{cert} = \text{now}$  :
4:      $e_2 \leftarrow e_1.\text{prev}$ 
5:     SWAP( $e_1, e_2$ )
6:     UPDATE( $e_1$ )
7:     UPDATE( $e_2$ )
8:     UPDATE( $e_2.\text{next}$ )
9:    $e_1 \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

---

**Figura 1.7:** Certificado do elemento 1 expirou em  $\text{now} = 1$ .**Figura 1.8:** Em  $\text{now} = 1$ , o elemento 1 e o elemento 2 foram trocados e os certificados do elemento 1, elemento 2 e elemento 4 foram atualizados.

A operação  $\text{QUERY\_KTH}(i)$  consiste em devolver o  $i$ -ésimo maior elemento da lista ligada, ou seja, o  $i$ -ésimo da direita para a esquerda, pois a árvore está em ordem crescente da esquerda para a direita. Para tal, percorreremos a árvore binária balanceada de busca utilizando o atributo *size* para, a cada iteração, decidir em qual subárvore o  $i$ -ésimo está, ajustando  $i$  quando necessário. O Algoritmo 1.8 implementa esta operação e a Figura 1.10 simula a execução em um exemplo. A rotina auxiliar  $\text{RSIZE}(r)$  devolve o valor de  $r.\text{right.size}$  caso este seja não nulo, caso contrário devolve 0.

---

**Algoritmo 1.8:** Função  $\text{QUERY\_KTH}$ .

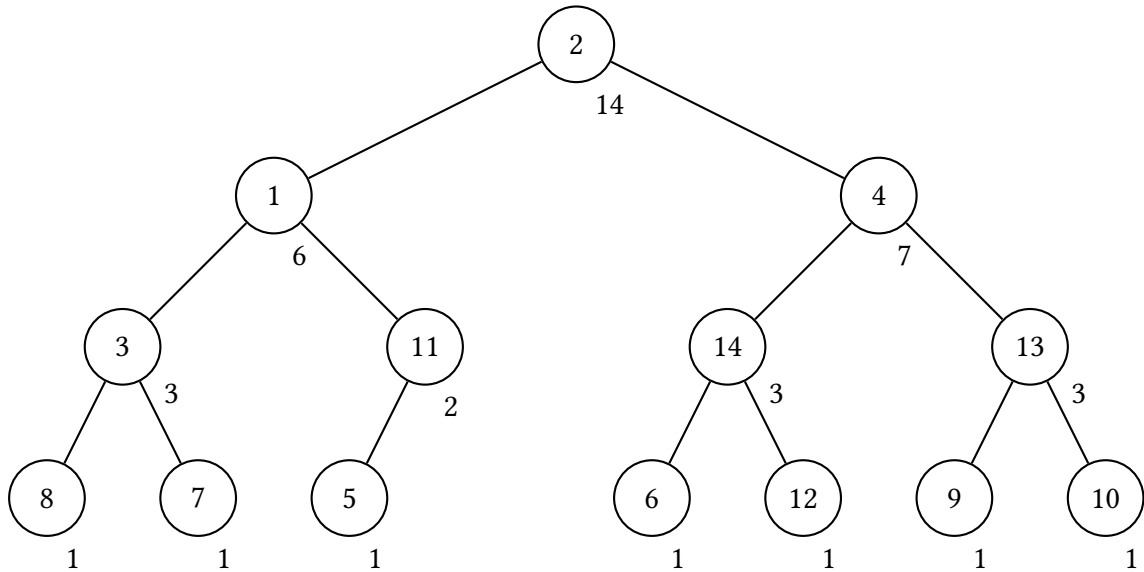
---

```

1: function  $\text{QUERY\_KTH}(i)$ 
2:    $node \leftarrow root$ 
3:    $r \leftarrow \text{RSIZE}(node)$ 
4:   while  $i \neq r + 1$  :
5:     if  $i \leq r$  :
6:        $node \leftarrow node.\text{right}$ 
7:     else
8:        $node \leftarrow node.\text{left}$ 
9:        $i \leftarrow i - (r + 1)$ 
10:     $r \leftarrow \text{RSIZE}(node)$ 
11:  return  $node.\text{key}$ 

```

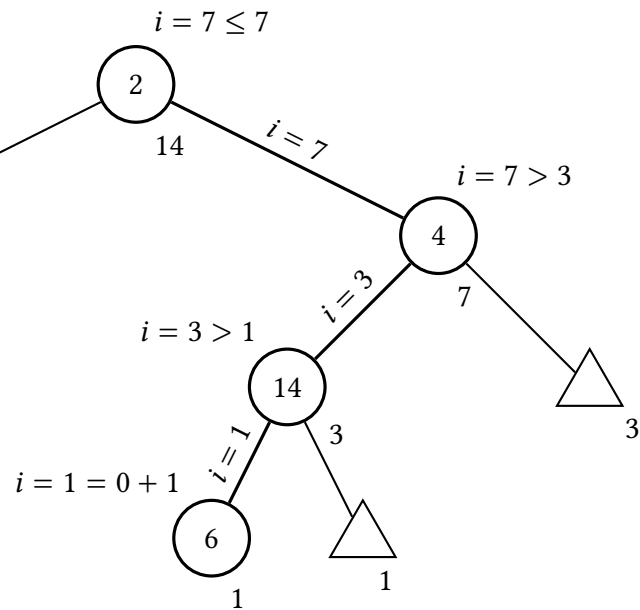
---



**Figura 1.9:** Exemplo de ABB com campo *size*.

A operação  $\text{CHANGE}(j, v)$ , como implementada no Algoritmo 1.9, consiste em recuperar o elemento  $e$  com identificador  $j$ , alterar seu atributo  $x_0$  para  $x_0 + (speed - v) \cdot now$ ,  $speed$  para  $v$  e recalculer os eventuais certificados de que  $j$  participa, que seriam  $e.\text{cert}$  e  $e.\text{next.cert}$ , se  $e.\text{next}$  existe. A Figura 1.11 ilustra um exemplo com os elementos afetados.

A operação  $\text{INSERT}(v, x_t)$ , como ilustrado na Figura 1.12, consiste em criar um novo elemento, inicializando seus atributos com os devidos valores, inseri-lo na árvore binária



**Figura 1.10:** Exemplo de busca pelo 7º elemento da direita para a esquerda na árvore da Figura 1.9.

---

**Algoritmo 1.9:** Função CHANGE.

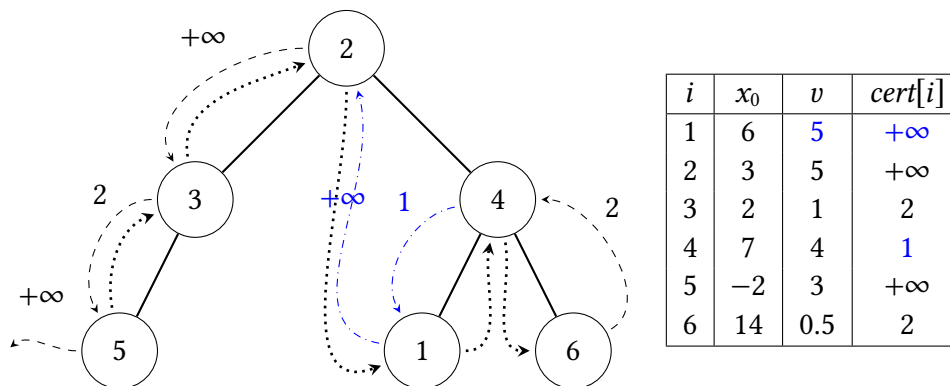
---

```

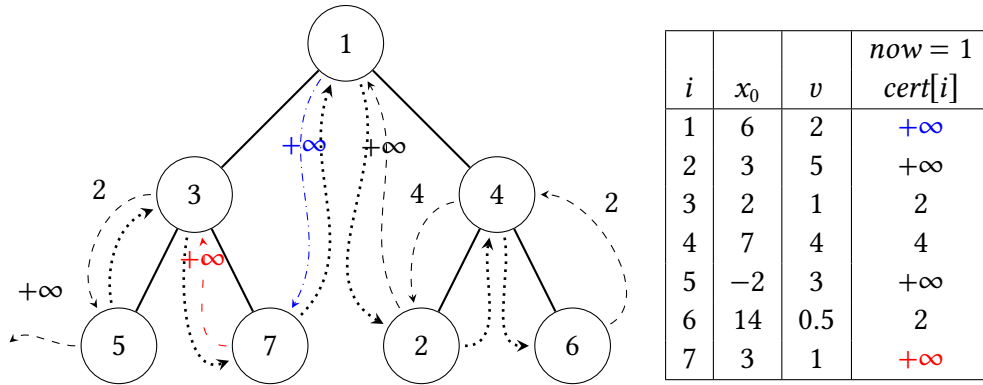
1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $e \leftarrow \text{GETOBJECT}(j)$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow e.x_0 + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
4:    $e.\text{speed} \leftarrow v$ 
5:   UPDATE( $e$ )
6:   UPDATE( $e.\text{next}$ )

```

---



**Figura 1.11:** Após chamar CHANGE(1, 5), a velocidade do elemento 1 foi alterada para 5 e os certificados do elemento 1 e do elemento 4 foram atualizados.



**Figura 1.12:** Após chamar  $INSERT(1, 4)$ , no instante 1, o elemento 7 foi inserido na árvore. O certificado do elemento 7 foi criado e o certificado do seu sucessor, o elemento 1, atualizado.

balanceada de busca e na estrutura que usamos para recuperá-lo depois, calcular o seu certificado e inseri-lo na fila com prioridades e, por fim, atualizar o certificado de seu sucessor, caso exista. Uma importante observação é que se  $now \neq 0$ , então  $x_t \neq x_0$ . Para calcular  $x_0$ , podemos utilizar a relação  $x_t = now \cdot speed + x_0$ , que implica que  $x_0 = x_t - speed \cdot now$ . O Algoritmo 1.10 implementa esta operação.

---

**Algoritmo 1.10:** Função  $INSERT$ .

---

```

1: function  $INSERT(v, x_t)$ 
2:    $e.speed \leftarrow v$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow x_t - now \cdot v$ 
4:    $root \leftarrow INSERTKEY(root, e)$ 
5:    $INSERTOBJECT(e)$ 
6:    $e.cert \leftarrow EXPIRE(e, e.prev)$ 
7:    $INSERTPQ(Q, e)$ 
8:    $UPDATE(e.next)$ 

```

---

A operação  $DELETE(i)$  consiste em recuperar o elemento  $i$ , removê-lo da árvore binária balanceada de busca e da estrutura que usamos para recuperá-lo, e depois removê-lo da fila com prioridades. Após isso, basta atualizar o certificado de seu sucessor, caso exista. Essa operação é ilustrada na Figura 1.13 e implementada no Algoritmo 1.11.

---

**Algoritmo 1.11:** Função  $DELETE$ .

---

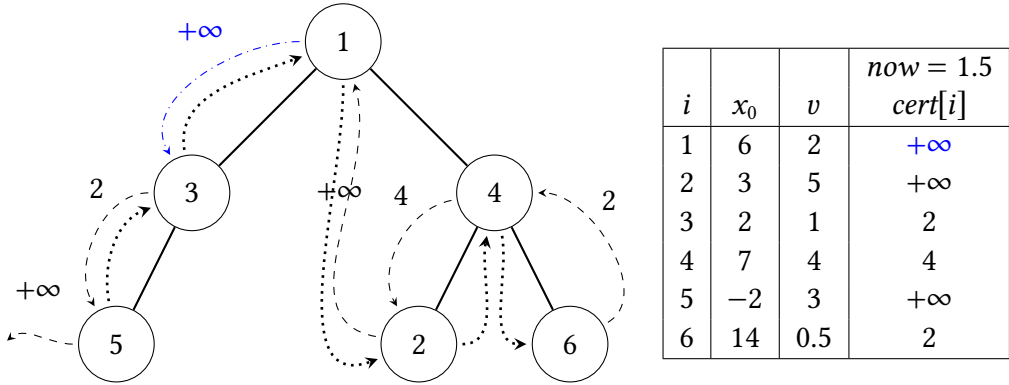
```

1: function  $DELETE(i)$ 
2:    $e \leftarrow GETOBJECT(i)$ 
3:    $e' \leftarrow e.next$ 
4:    $root \leftarrow DELETEKEY(root, e)$ 
5:    $DELETEOBJECT(e)$ 
6:    $DELETEPQ(Q, e)$ 
7:    $UPDATE(e')$ 

```

---





**Figura 1.13:** Após chamar *DELETE*(7) na árvore da Figura 1.12, o elemento 7 foi retirado da árvore, a lista ligada foi ajustada, o certificado do seu sucessor, o elemento 1, foi atualizado e o certificado do elemento 7 foi destruído.

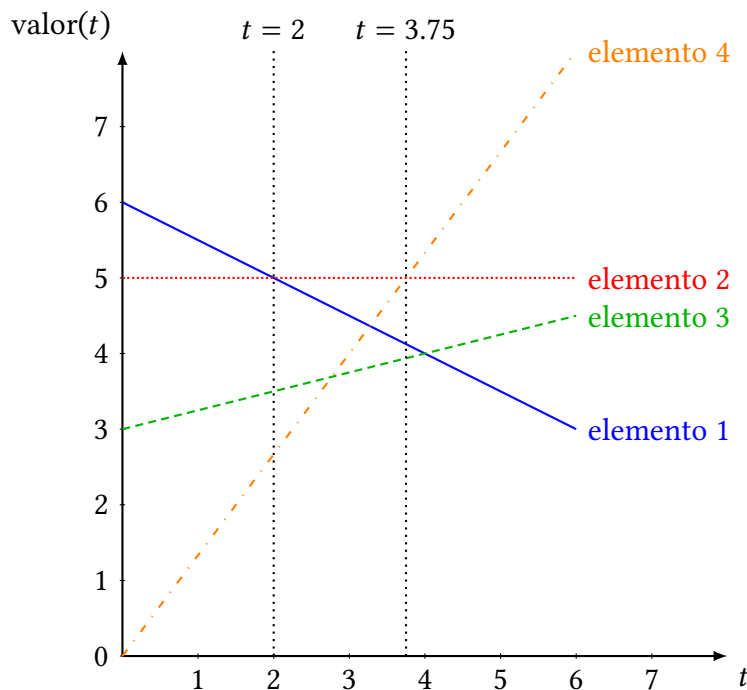


## Capítulo 2

### Máximo cinético

Agora, considere o seguinte problema cinético. São dados  $n$  pares de valores em que cada par  $(x_0, v)$  representa um valor que está mudando linearmente com o tempo, assim como na lista cinética. Num instante arbitrário  $t \geq 0$ , o valor correspondente ao par  $(x_0, v)$  é  $x_0 + tv$ . Desta vez, o objetivo é responder consultas mais simples, do tipo: quem é o elemento com maior valor da coleção no instante corrente. Veremos que é possível obter implementações mais eficientes que para a ordenação cinética neste caso.

Utilizando o mesmo exemplo da lista, se tivermos quatro elementos na coleção, digamos  $\left(6, -\frac{1}{2}\right)$ ,  $(5, 0)$ ,  $\left(3, \frac{1}{4}\right)$  e  $\left(0, \frac{4}{3}\right)$ , podemos representar essa coleção da seguinte maneira:



**Figura 2.1:** O maior valor até o instante  $t = 2$  é o do elemento 1. Em seguida, o maior valor passa a ser o do elemento 2 até o instante  $t = 3.75$ , que é quando o elemento 4 passa a superar todos os outros.

Agora, além das operações  $\text{ADVANCE}(t)$  e  $\text{CHANGE}(j, v)$ , em vez da operação  $\text{QUERY\_KTH}(i)$ , queremos dar suporte à nova operação:

- $\text{QUERY\_MAX}() \rightarrow$  devolve o elemento cujo valor é o maior no instante atual.

## 2.1 Heap cinético

Um bom jeito de resolver o problema do máximo cinético é manter uma fila de prioridades com os elementos da coleção tendo como prioridade o valor corrente do elemento. Dessa maneira, o elemento que se encontra na raiz da fila será o que possui o maior valor da coleção. Para implementar a fila utilizaremos um vetor organizado como um heap.

Inicialmente o vetor começa com os índices dos elementos e reorganizamos como um heap usando como chave o valor de cada elemento no instante  $t = 0$ , ou seja, o valor  $x_0$  de cada elemento.

Uma vez montado o heap, construímos um certificado para cada par (filho, pai) no heap. O  $i$ -ésimo certificado, que se refere ao par das posições  $i$  e  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ , consiste no instante de tempo em que o  $i$ -ésimo elemento passará a ter um valor maior que o valor do  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ -ésimo elemento do vetor, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em  $+\infty$ .

Esses  $n - 1$  certificados são colocados em uma fila com prioridades  $Q$ , com o prazo de validade como chave. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade.

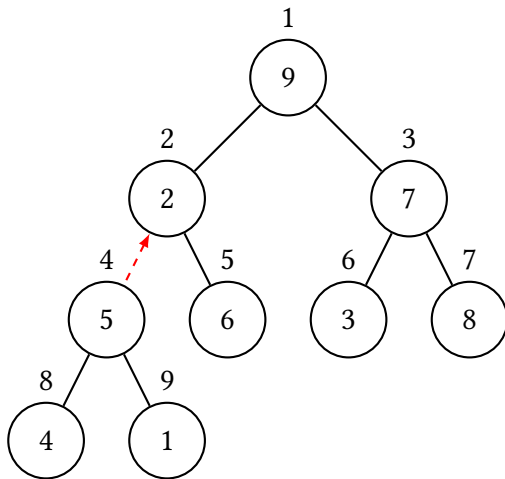
Para descrever a implementação das três operações, precisamos estabelecer o nome das novas variáveis usadas. São elas:

1. *heap*: vetor com os índices dos  $n$  elementos formando um heap de acordo com o seu valor no instante *now*;
2. *cert*: vetor com os certificados, onde  $\text{cert}[i]$  guarda o certificado entre  $i$  e  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ , para  $1 < i \leq n$ .

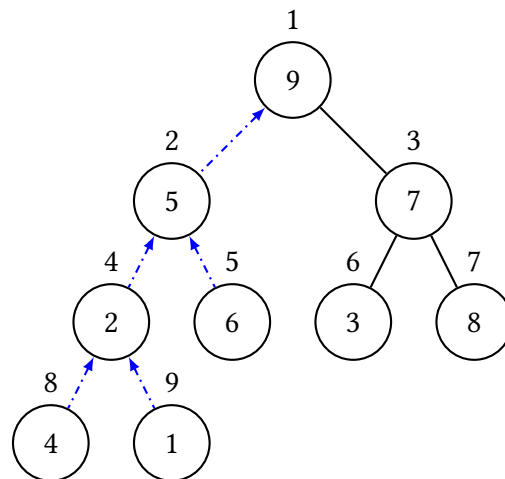
A interface da fila com prioridades que utilizaremos não se altera.

Um evento está associado a um certificado  $(i, t)$  que expira no instante  $t$ , como pode ser visto na Figura 2.2. O tratamento do evento correspondente ao certificado  $(i, t)$  consiste em trocar de lugar os índices armazenados nas posições  $i$  e  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$  do vetor *heap*, e recalcular o prazo de validade de até cinco certificados, ilustrados na Figura 2.3:

- do  $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ -ésimo certificado, se  $i > 1$ ;
- do  $j$ -ésimo certificado, se  $i > 1$  e  $j \leq n$ , onde  $j = 2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$  é o irmão de  $i$ ;
- do  $(2i)$ -ésimo certificado, se  $2i \leq n$ ;
- do  $(2i + 1)$ -ésimo certificado, se  $2i + 1 \leq n$ .



**Figura 2.2:**  $\text{cert}[4]$  expirou.



**Figura 2.3:**  $\text{heap}[4]$  e  $\text{heap}[2]$  foram trocados e  $\text{cert}[2]$ ,  $\text{cert}[4]$ ,  $\text{cert}[5]$ ,  $\text{cert}[8]$  e  $\text{cert}[9]$  foram atualizados.

O  $i$ -ésimo certificado também deve ser ajustado para  $+\infty$ . Finalmente, é necessário fazer ajustes em  $Q$ , alterando a chave dos certificados que sofreram alteração.

$i$	$x_0$	$v$	$\text{now} = 0$ $\text{cert}[i]$	$\text{now} = 1$ $\text{cert}[i]$
1	2	2	?	?
2	6	1	?	?
3	-6	3	?	?
4	-16	4	?	?
5	-1	5	?	?
6	1	2.5	?	?
7	-18	6	?	?
8	5	1	?	?
9	-12	3	?	?

**Tabela 2.1:** Tabela para as Figuras 2.2 e 2.3. (incompleta)

Novamente, na implementação da operação **EVENT**, no Algoritmo 2.2, utilizaremos a rotina **UPDATE**( $i$ ), do Algoritmo 2.1, que calcula a nova validade  $t$  do  $i$ -ésimo certificado, se  $1 < i \leq n$ , e chama a rotina **UPDATEPQ**( $Q, i, t$ ).

A operação **QUERY\_MAX**(), no Algoritmo 2.3, consiste em devolver  $\text{heap}[1]$ , enquanto que a operação **CHANGE**( $j, v$ ), no Algoritmo 2.4, consiste em alterar a posição  $x_0[j]$  para  $x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now}$ , a posição  $\text{speed}[j]$  para  $v$  e recalculer os eventuais certificados de que  $j$  participa. Para tanto, a partir da posição  $i$  em que  $j$  se encontra no vetor  $\text{heap}$ , podemos recalculer  $\text{cert}[i]$  se  $i > 1$ ,  $\text{cert}[2i]$  se  $2i \leq n$  e  $\text{cert}[2i + 1]$  se  $2i + 1 \leq n$ , acionando a rotina **UPDATE** para fazer os devidos acertos em  $Q$  correspondentes a estas modificações. Veja a Figura 2.4.

---

**Algoritmo 2.1:** Função UPDATE.

---

```

1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $1 < i \leq n$  :
3:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(i, \lfloor \frac{i}{2} \rfloor)$ 
4:     UPDATEPQ( $Q, i, t$ )

```

---



---

**Algoritmo 2.2:** Função EVENT.

---

```

1: function EVENT
2:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $\text{cert}[i] = \text{now}$  :
4:      $\text{heap}[i] \leftrightarrow \text{heap}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor]$ 
5:     UPDATE( $i$ )
6:     UPDATE( $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$ )
7:     UPDATE( $2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ )
8:     UPDATE( $2i$ )
9:     UPDATE( $2i + 1$ )
10:     $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

---



---

**Algoritmo 2.3:** Função QUERY\_MAX.

---

```

1: function QUERY_MAX
2:   return  $\text{heap}[1]$ 

```

---



---

**Algoritmo 2.4:** Função CHANGE.

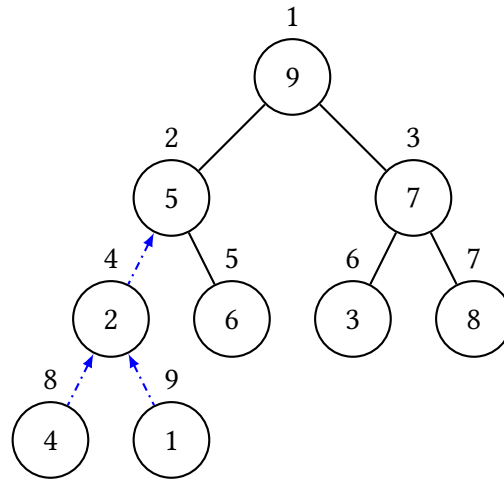
---

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
3:    $\text{speed}[j] \leftarrow v$ 
4:   UPDATE( $i$ )
5:   UPDATE( $2i$ )
6:   UPDATE( $2i + 1$ )

```

---



**Figura 2.4:** Após a mudança de velocidade do elemento 2, que se encontra em  $\text{heap}[4]$ ,  $\text{cert}[4]$ ,  $\text{cert}[8]$  e  $\text{cert}[9]$  foram atualizados.

## 2.2 Torneio cinético

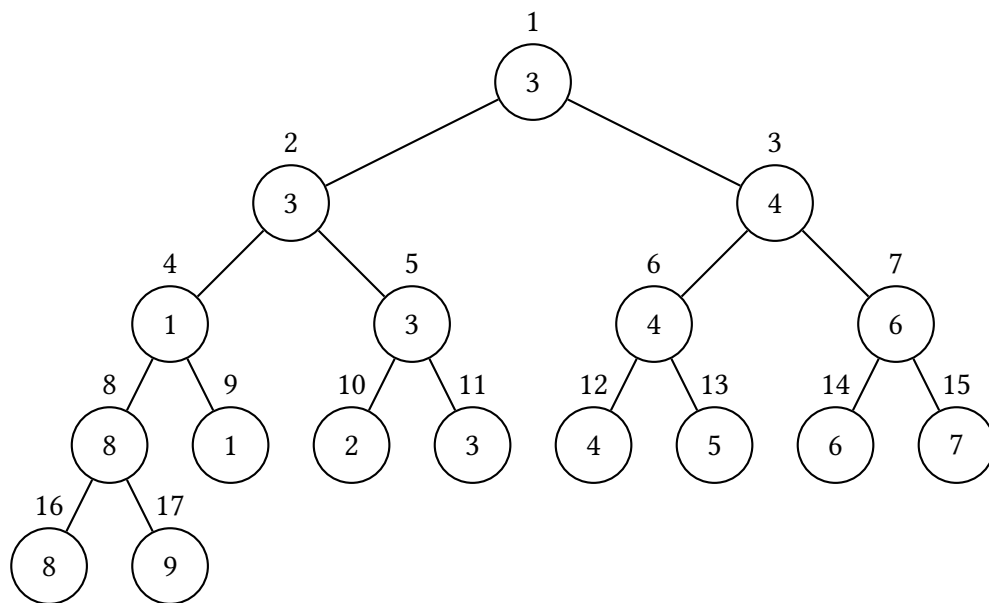
Considere o seguinte algoritmo para achar o valor máximo em um conjunto de  $n$  elementos: aloque um vetor  $\text{tourn}$  com  $2n - 1$  posições. Inicializamos as últimas  $n$  posições com os valores dos  $n$  elementos e uma variável  $i$  com o valor da última posição,  $i = 2n - 1$ . Repita o seguinte processo até que  $i$  seja igual a 1: se  $\text{tourn}[i] > \text{tourn}[i - 1]$ , então  $\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor] = \text{tourn}[i]$ , caso contrário  $\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor] = \text{tourn}[i - 1]$ , e, por fim, subtraia 2 de  $i$ . Dessa maneira, ao fim da execução do algoritmo, em  $\text{tourn}[1]$  estará o maior valor da coleção. Na verdade, podemos fazer a comparação de maneira indireta, e guardar os índices dos elementos no vetor  $\text{tourn}$  e não seus valores. Veja a Figura 2.5.

Podemos pensar nessas comparações entre  $\text{tourn}[i]$  e  $\text{tourn}[i - 1]$  como sendo partidas de um torneio classificatório, por isso o nome torneio. Chamaremos de “partida” as comparações entre  $\text{tourn}[i]$  e  $\text{tourn}[i - 1]$  e diremos que o elemento  $j$  “vence” o elemento  $k$  quando os elementos  $j$  e  $k$  disputaram uma partida entre si e o elemento  $j$  possuía maior valor nesse instante. Utilizaremos esse “torneio” para resolver o problema do máximo cinético e, para implementá-lo, será utilizado um vetor como o citado no algoritmo acima.

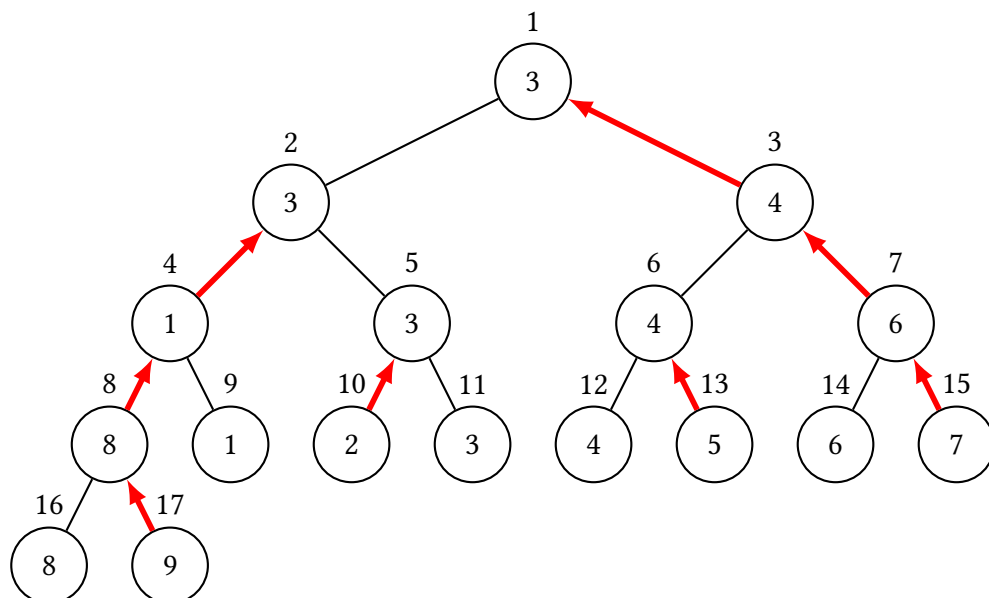
Inicialmente o vetor começa com os índices dos elementos ocupando as últimas posições e construímos o torneio de acordo com o valor de cada elemento no instante  $t = 0$ , ou seja, com o valor  $x_0$  de cada elemento.

Uma vez montado o torneio, construímos um certificado para cada elemento no torneio. O  $i$ -ésimo certificado, que se refere ao par formado pelo  $i$ -ésimo elemento da entrada e quem o venceu na última partida que disputou, consiste no instante de tempo em que o  $i$ -ésimo elemento passará a ter um valor maior que o valor do elemento que o venceu anteriormente, se esse instante for maior que o instante atual. Do contrário, o certificado consiste em  $+\infty$ . Veja a Figura 2.6.

É importante observar que o elemento que se encontra na primeira posição do torneio não é vencido por ninguém no instante  $\text{now}$ . Dessa forma, sendo  $i$  o elemento que ocupa a primeira posição do torneio, associamos ao  $i$ -ésimo certificado a chave  $+\infty$ .



**Figura 2.5:** Torneio com 9 elementos em que 3 é o elemento com valor máximo.



**Figura 2.6:** Torneio com 9 elementos e os certificados visualmente representados pelas setas vermelhas mais grossas. O certificado correspondente ao elemento 3 terá a chave  $+\infty$ .



Esses  $n$  certificados são colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade como chave. Estamos interessados nos certificados com menor prazo de validade.

Para descrever a implementação das operações ADVANCE, CHANGE e QUERY\_MAX, precisamos estabelecer o nome das novas variáveis usadas. São elas:

1. *tourn*: vetor, de  $2n - 1$  posições, com os índices dos  $n$  elementos formando um torneio de acordo com o seu valor no instante *now*;
2. *cert*: vetor com os certificados; *cert*[ $i$ ] guarda o certificado entre o elemento  $i$  e quem o venceu na última partida que disputou, para  $1 \leq i \leq n$ ;
3. *indT*: vetor de  $n$  posições; *indT*[ $i$ ] guarda a posição em *tourn* em que  $i$  perde uma partida, com  $1 \leq i \leq n$ . Se  $i$  não perde nenhuma partida, *indT*[ $i$ ] é igual a  $-1$ .

A interface da fila com prioridades que utilizaremos não se altera.

Na implementação da operação EVENT, no Algoritmo 2.6, utilizaremos a rotina UPDATE( $i$ ), no Algoritmo 2.5, que calcula a nova validade  $t$  do elemento  $j$  que se encontra na  $i$ -ésima posição de *tourn*, isto é,  $j = \text{tourn}[i]$  certificado, se  $1 \leq i \leq 2n - 1$ , e chama a rotina UPDATEPQ( $Q, i, t$ ).

---

**Algoritmo 2.5:** Função UPDATE.

---

```

1: function UPDATE( $i$ )
2:   if  $i = 1$  :
3:      $t \leftarrow \infty$ 
4:   if  $1 < i \leq 2n - 1$  :
5:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(\text{tourn}[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor], \text{tourn}[i])$ 
6:    $j \leftarrow \text{tourn}[i]$ 
7:   UPDATEPQ( $Q, j, t$ )

```

---

No trecho das linhas 5 - 11 do Algoritmo 2.6, o resultado da partida entre o elemento  $j$  e seu adversário que se encontra na posição  $k$  de *tourn* é recalculado, e o certificado correspondente é atualizado. Caso o resultado da partida tenha sido alterado, a verificação se propaga para o nível de cima. A função VALUE( $j$ ) retorna  $\text{speed}[j] \cdot \text{now} + x_0[j]$ .

A operação QUERY\_MAX, no Algoritmo 2.7, consiste em devolver *tourn*[1], enquanto que a operação CHANGE( $j, v$ ), no Algoritmo 2.8, consiste em alterar a posição  $x_0[j]$  para  $x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now}$ , a posição  $\text{speed}[j]$  para  $v$  e recalculando os eventuais certificados de que  $j$  participa. Para tanto, a partir da posição  $i$  em que  $j$  se encontra no vetor *tourn*, podemos recalculando *cert*[ $j$ ] e então continuamos visitando as partidas em que  $j$  participou para atualizar os certificados daqueles que perderam de  $j$ , acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em  $Q$  correspondentes a estas modificações.

**Algoritmo 2.6:** Função EVENT.

---

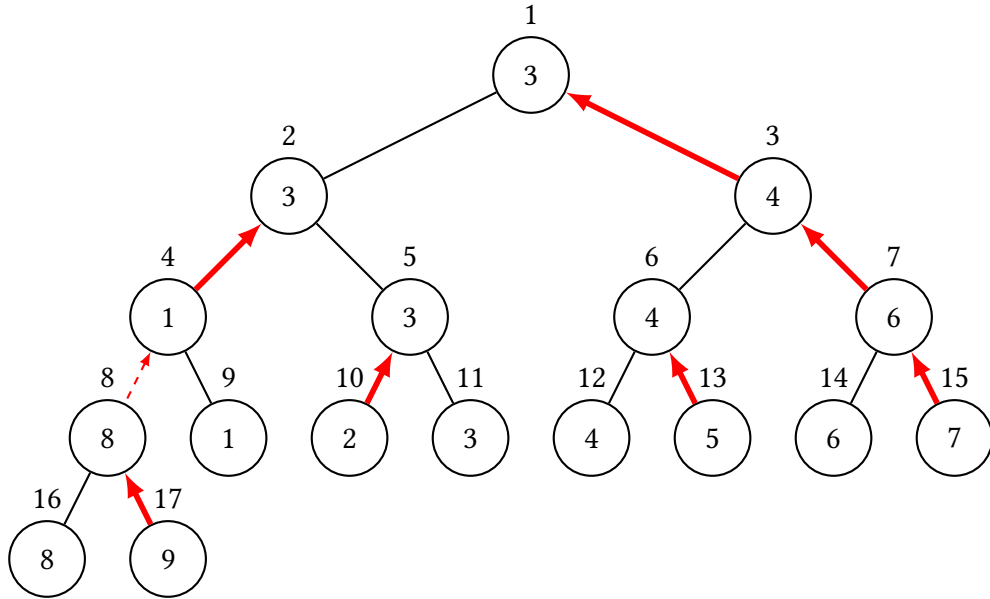
```

1: function EVENT()
2:    $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $\text{cert}[i] = \text{now}$  :
4:      $j \leftarrow \text{indT}[i]$ 
5:      $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
6:     while  $j > 1$  and  $\text{VALUE}(j) \geq \text{VALUE}(k)$  :
7:        $\text{tourn}[\lfloor \frac{j}{2} \rfloor] \leftarrow \text{tourn}[j]$ 
8:        $\text{indT}[\text{tourn}[k]] \leftarrow k$ 
9:        $\text{UPDATE}(k)$ 
10:       $j \leftarrow \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$ 
12:     $\text{indT}[\text{tourn}[j]] \leftarrow j$ 
13:     $\text{UPDATE}(j)$ 
14:     $i \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

---

▷

**Figura 2.7:**  $\text{cert}[8]$  expirou.**Algoritmo 2.7:** Função QUERY\_MAX.

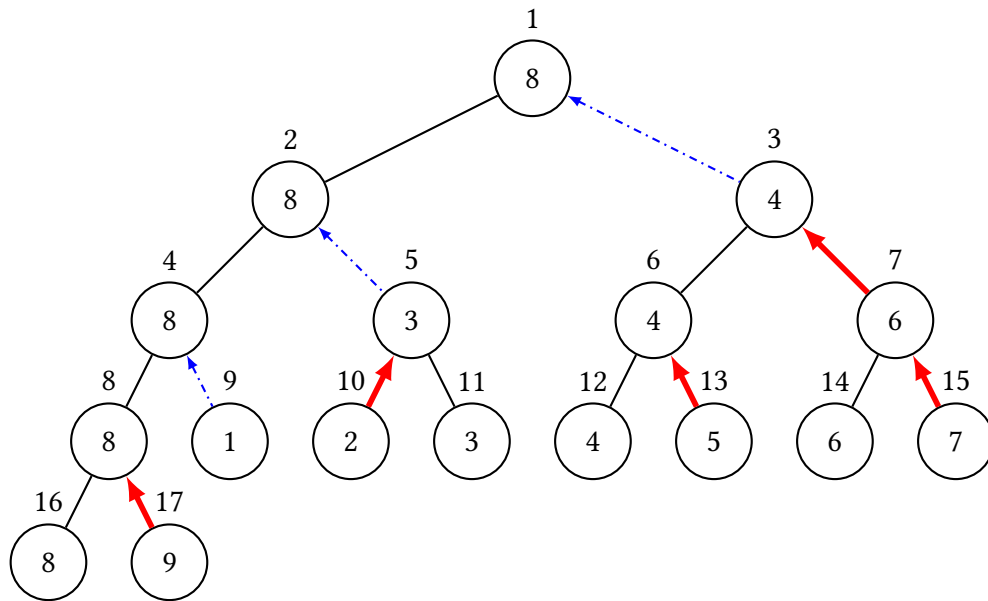
---

```

1: function QUERY_MAX()
2:   return  $\text{tourn}[1]$ 

```

---



**Figura 2.8:** Após  $\text{cert}[8]$  ter expirado, o elemento 8 passou a vencer o elemento 1 e  $\text{tourn}[4]$  foi atualizado, o elemento 8 também venceu dos elementos 3 e 4 e  $\text{tourn}[2]$  e  $\text{tourn}[1]$  foram atualizados. Os certificados  $\text{cert}[1]$ ,  $\text{cert}[3]$  e  $\text{cert}[4]$ , indicados pelas setas azuis, também foram atualizados

---

**Algoritmo 2.8:** Função CHANGE.

---

```

1: function CHANGE( $j, v$ )
2:    $x_0[j] \leftarrow x_0[j] + (\text{speed}[j] - v) \cdot \text{now};$ 
3:    $\text{speed}[j] \leftarrow v$ 
4:    $i \leftarrow \text{indT}[j]$ 
5:   UPDATE( $i$ )
6:   while  $i < n$  :
7:     if  $\text{tourn}[i] = \text{tourn}[2i]$  :
8:        $i \leftarrow 2i$ 
9:     else
10:       $i \leftarrow 2i + 1$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{i}{2} \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
12:      UPDATE( $k$ )

```

---



Note que o elemento que está na primeira posição do torneio não é vencido por ninguém no instante *now*. Portanto, daremos o valor  $+\infty$  para o seu certificado.

Esses  $n$  certificados serão colocados em uma fila com prioridades, com o prazo de validade como prioridade. O certificado com menor prazo de validade estará ocupando a primeira posição da fila. Na verdade, como os certificados estarão diretamente ligados aos elementos, colocaremos os elementos nessa fila.

Para descrever as implementações das operações  $\text{ADVANCE}(t)$ ,  $\text{CHANGE}(j, v)$ ,  $\text{QUERY\_MAX}()$ ,  $\text{INSERT}(v, x_t)$  e  $\text{DELETE}(i)$  vamos estabelecer os nomes dos objetos, variáveis e rotinas auxiliares utilizados:

1.  $n$ : número de elementos no instante *now*;
2. *element*: elemento com os seguintes atributos:
  - (a) *id*: atributo para identificar o elemento. Daqui em diante, usaremos elemento  $i$  para se referir ao elemento cujo *id* é  $i$ ;
  - (b) *speed*: a velocidade do elemento;
  - (c)  $x_0$ : é o valor que o elemento possuía no instante  $t = 0$ ;
  - (d) *cert*: o tempo de validade do certificado do elemento;
  - (e) *pqpos*: atributo que aponta para a posição do elemento na fila com prioridades;
  - (f) *lastMatch*: atributo que aponta para a posição do vetor *tourn* em que o elemento disputou sua última partida.
3. *tourn*: vetor, de  $2n - 1$  posições, que guarda apontadores para os elementos formando um torneio de acordo com seus valores no instante *now*;
4. *Q*: fila com prioridades que contém os elementos, com o elemento com certificado de menor valor à frente;
5.  $\text{INSERTTOURN}(e) \rightarrow$  insere  $e$ , que é um elemento, no torneio e atualiza os certificados necessários no processo;
6.  $\text{DELETETOURN}(e) \rightarrow$  remove  $e$ , que é um elemento, do torneio e atualiza os certificados necessários no processo.

Para a implementação das operações  $\text{CHANGE}(j, v)$  e  $\text{DELETE}(i)$ , precisamos de alguma maneira recuperar um elemento baseado no seu *id*. Para tal, podemos utilizar estruturas como uma árvore binária balanceada de busca ou uma tabela de dispersão. A seguir estão três operações que nos ajudarão a recuperar os elementos:

1.  $\text{GETOBJECT}(i) \rightarrow$  retorna o elemento  $i$ ;
2.  $\text{INSERTOBJECT}(e) \rightarrow$  insere  $e$ , que é um elemento, na estrutura;
3.  $\text{DELETEOBJECT}(e) \rightarrow$  remove  $e$ , que é um elemento, da estrutura.

Para permitir a inserção e remoção de certificados, a interface da fila com prioridades será reformulada, contando com duas operações extras:

1. INSERTPQ( $Q, e$ )  $\rightarrow$  insere  $e$  na fila com prioridades  $Q$ ;
2. DELETEPQ( $Q, e$ )  $\rightarrow$  remove  $e$  da fila com prioridades  $Q$ ;
3. UPDATEPQ( $Q, e, t$ )  $\rightarrow$  muda o valor do certificado de  $e$  para  $t$  e atualiza a fila com prioridades  $Q$ ;
4. MINPQ( $Q$ )  $\rightarrow$  devolve o elemento com o certificado de menor valor da fila com prioridades  $Q$ .

A operação UPDATEPQ( $Q, e, t$ ) pode ser implementada em tempo logarítmico no número de elementos em  $Q$  graças ao atributo *pqpos* dos elementos.

Um evento está associado a um certificado  $(e, t)$  que expira no instante  $t$ . Na implementação da operação EVENT, no Algoritmo 2.10, utilizaremos a rotina UPDATE( $e$ ), do Algoritmo 2.9, que calcula a nova validade  $t$  do certificado do elemento  $e$ , e chama a rotina UPDATEPQ( $Q, e, t$ ) e a rotina EXPIRE( $e, e'$ ) calcula a validade do certificado entre os elementos  $e$  e  $e'$ ; se  $e'$  é NULL retorna  $+\infty$ .

---

**Algoritmo 2.9:** Função UPDATE.

---

```

1: function UPDATE( $e$ )
2:   if  $e \neq \text{NULL}$  :
3:      $e' \leftarrow \text{tourn}[(e.\text{lastMatch})/2]$ 
4:      $t \leftarrow \text{EXPIRE}(e, e')$ 
5:     UPDATEPQ( $Q, e, t$ )

```

---



---

**Algoritmo 2.10:** Função EVENT.

---

```

1: function EVENT()
2:    $e \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 
3:   while  $e.\text{cert} = \text{now}$  :
4:      $j \leftarrow e.\text{lastMatch}$ 
5:      $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
6:     while  $j > 1$  and COMPARE( $j, k$ ) :
7:        $\text{tourn}[\lfloor \frac{j}{2} \rfloor] \leftarrow \text{tourn}[j]$ 
8:        $\text{tourn}[k].\text{lastMatch} \leftarrow k$ 
9:       UPDATE( $\text{tourn}[k]$ )
10:       $j \leftarrow \lfloor \frac{j}{2} \rfloor$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor \frac{j}{2} \rfloor + ((j + 1) \bmod 2)$  ▷ adversário
12:       $\text{tourn}[j].\text{lastMatch} \leftarrow j$ 
13:      UPDATE( $\text{tourn}[j]$ )
14:       $e \leftarrow \text{MINPQ}(Q)$ 

```

---

▷ COMPARE( $i, j$ ) retorna se o valor de  $i$  é maior que o valor de  $j$ .

---

No trecho das linhas 5 - 11 do Algoritmo 2.10, o resultado da partida entre o elemento  $j$  e seu adversário que se encontra na posição  $k$  de *tourn* é recalculado, e o certificado correspondente é atualizado. Caso o resultado da partida tenha sido alterado, a verificação se propaga para o nível de cima.

**Algoritmo 2.11:** Função QUERY\_MAX.

---

```

1: function QUERY_MAX()
2:   return tourn[1]

```

---

**Algoritmo 2.12:** Função CHANGE.

---

```

1: function CHANGE(j, v)
2:   e ← GETOBJECT(j)
3:   e.x0 ← e.x0 + (e.speed − v) · now;
4:   e.speed ← v
5:   i ← e.lastMatch
6:   UPDATE(e)
7:   while i < n :
8:     if tourn[i] = tourn[2i] :
9:       i ← 2i
10:    else
11:      i ← 2i + 1
12:      k ← 2 · ⌊ $\frac{i}{2}$ ⌋ + ((i + 1) mod 2)           ▷ adversário
13:      UPDATE(tourn[k])

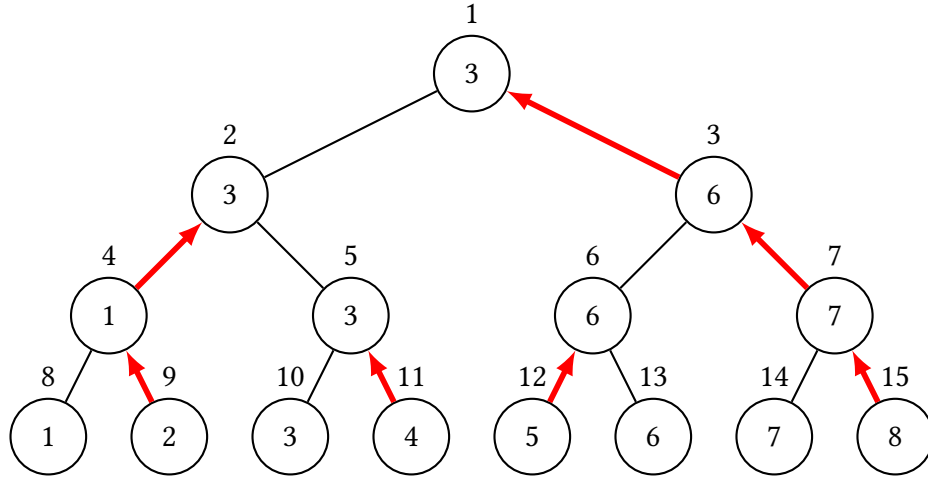
```

---

A operação QUERY\_MAX(), no Algoritmo 2.11, consiste em devolver *tourn*[1], enquanto que a operação CHANGE(*j*, *v*), no Algoritmo 2.12, consiste em recuperar o elemento *j*, alterar seu atributo *x*<sub>0</sub> para *x*<sub>0</sub> + (*speed* − *v*) · *now*, *speed* para *v* e recalculer os eventuais certificados de que *j* participa. Para tanto, a partir da posição *i* mais alta em que *j* se encontra no vetor *tourn*, podemos recalculer *cert*[*j*] e então continuamos visitando as partidas em que *j* participou para atualizar os certificados daqueles que perderam de *j*, acionando a rotina UPDATE para fazer os devidos acertos em *Q* correspondentes a estas modificações.

A operação INSERT(*v*, *x*<sub>*t*</sub>), no Algoritmo 2.13, consiste em criar um novo elemento, inicializando seus atributos com os devidos valores, inseri-lo no torneio e na estrutura que usamos para recuperá-lo, calcular o seu certificado e inseri-lo na fila de prioridade. Uma importante observação é que se *now* ≠ 0, então *x*<sub>*t*</sub> ≠ *x*<sub>0</sub>. Para calcular *x*<sub>0</sub>, podemos utilizar a relação  $x_t = now \cdot speed + x_0 \Rightarrow x_0 = x_t - speed \cdot now$ . Veja o exemplo da Figura 2.11. Utilizamos a função auxiliar INSERTTOURN(*e*), do Algoritmo 2.14, que consiste em criar uma nova partida, usando o elemento que está na posição *n* para completar a partida, depois subir para o nível de cima no torneio, corrigindo os vencedores das partidas e atualizando os certificados correspondentes. O certificado do elemento inserido não será calculado nessa função, mas será calculado posteriormente. No Algoritmo 2.14, RESIZE() checa se *tourn* é capaz de suportar a inserção de novos elementos e, se não for, redimensiona *tourn*.

A operação DELETE(*i*), no Algoritmo 2.15, consiste em recuperar o elemento *i*, removê-lo da fila de prioridade, do torneio e da estrutura que usamos para recuperá-lo depois. Utilizamos a função auxiliar DELETETOURN(*e*), do Algoritmo 2.16 que consiste em usar o perdedor da partida travada entre os elementos que estão nas duas últimas posições de *tourn* para substituir o elemento *e*. Além disso, desfazemos essa partida para que os *n*



**Figura 2.10:** A figura mostra um torneio com 8 elementos e seus certificados representados pelas setas vermelhas, mais grossas; cada posição guarda um apontador para um elemento, mas na figura apenas os id's são mostrados.

---

**Algoritmo 2.13:** Função INSERT.

---

```

1: function INSERT( $v, x_t$ )
2:    $e.speed \leftarrow v$ 
3:    $e.x_0 \leftarrow x_t - now \cdot v$ 
4:    $root \leftarrow INSERTOBJECT(root, e)$ 
5:   INSERTTOURN( $e$ )
6:   NEWCERT( $e$ )
7:   INSERTPQ( $Q, e$ )

```

---



---

**Algoritmo 2.14:** Função INSERTTOURN.

---

```

1: function INSERTTOURN( $e$ )
2:   RESIZE()
3:    $n \leftarrow n + 1$ 
4:    $i \leftarrow 2n - 1$ 
5:    $tourn[i] \leftarrow e$ 
6:    $tourn[i - 1] \leftarrow tourn[\lfloor i/2 \rfloor]$ 
7:    $k \leftarrow i - 1$ 
8:   while  $i > 1$  and COMPARE( $i, k$ ) :
9:      $tourn[\lfloor i/2 \rfloor] \leftarrow tourn[i]$ 
10:     $tourn[k].lastMatch \leftarrow k$ 
11:    UPDATE( $tourn[k]$ )
12:     $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
13:     $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
14:     $tourn[1].lastMatch \leftarrow 1$ 

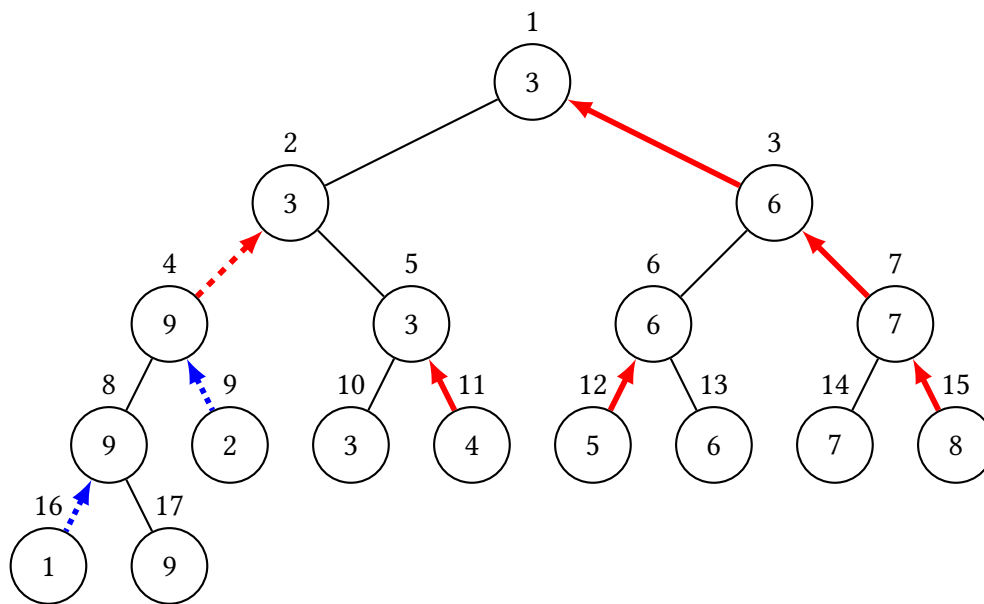
```

▷ adversário

▷ COMPARE( $i, j$ ) retorna se o valor de  $i$  é maior que o valor de  $j$ .

---





**Figura 2.11:** A figura mostra o torneio da figura 2.10 após a inserção de um elemento com id 9. A seta tracejada representa o certificado criado e as setas azuis pontilhadas representam os certificados atualizados.

elementos continuem a ocupar as  $2n - 1$  primeiras posições do torneio após a remoção de  $e$ . O perdedor substituirá o elemento  $e$  na posição da primeira partida de que  $e$  participou. Todas as partidas desde essa posição, se propagando para o nível de cima no caminho até a primeira posição, serão recalculadas com os devidos certificados atualizados. Essa propagação até a primeira posição é importante para que não haja resquícios do elemento removido no torneio. Veja o exemplo da Figura 2.12. Na implementação, no Algoritmo 2.16, a rotina `SUBSTITUTE( $e$ )` faz a substituição citada retornando a posição da primeira partida de que  $e$  participou e a rotina `COMPARE( $i, j$ )` retorna se o valor de  $i$  é maior que o valor de  $j$ .

**Algoritmo 2.15:** Função DELETE.

```

1: function DELETE( $i$ )
2:    $e \leftarrow \text{GETOBJECT}(i)$ 
3:   DELETEPQ( $Q, e$ )
4:   DELETETOURN( $e$ )
5:   DELETEOBJECT( $e$ )

```

**Algoritmo 2.16:** Função DELETETOURN.

---

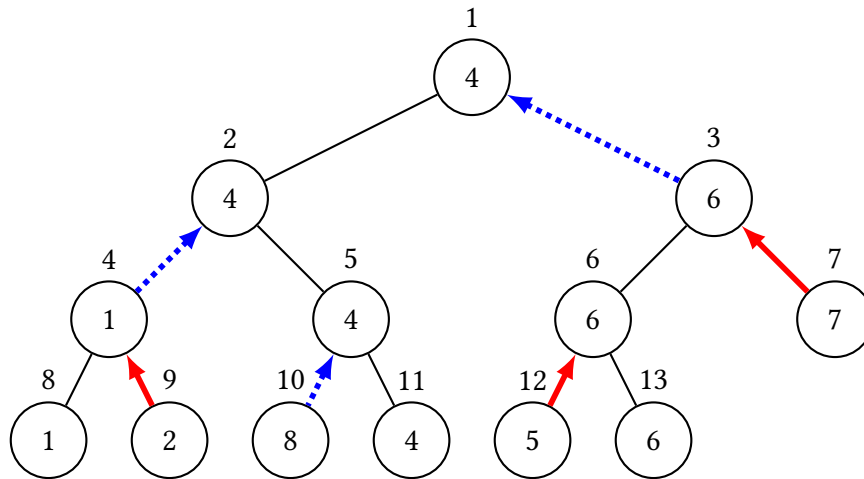
```

1: function DELETETOURN( $e$ )
2:    $i \leftarrow \text{SUBSTITUTE}(e)$ 
3:    $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
4:   while  $i > 1$  :
5:     if COMPARE( $k, i$ ) :
6:        $i \leftrightarrow k$ 
7:        $\text{tourn}[\lfloor i/2 \rfloor] \leftarrow \text{tourn}[i]$ 
8:        $\text{tourn}[k].\text{lastMatch} \leftarrow k$ 
9:       UPDATE( $\text{tourn}[k]$ )
10:       $i \leftarrow \lfloor i/2 \rfloor$ 
11:       $k \leftarrow 2 \cdot \lfloor i/2 \rfloor + ((i + 1) \bmod 2)$ 
12:    $\text{tourn}[1].\text{lastMatch} \leftarrow 1$ 
13:   UPDATE( $\text{tourn}[1]$ )

```

---

▷ adversário



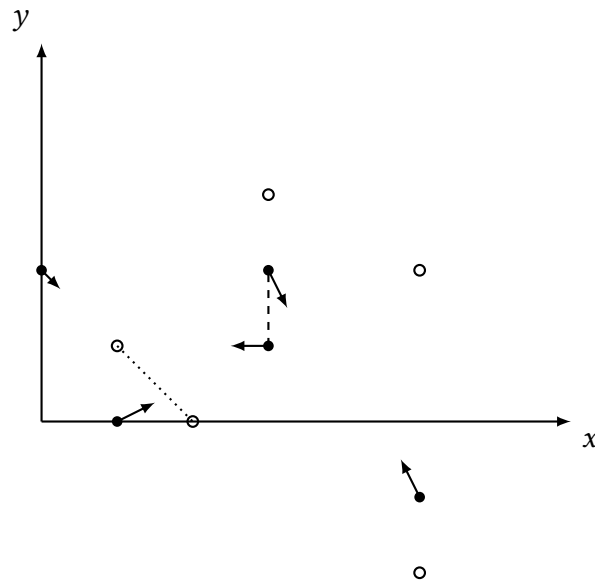
**Figura 2.12:** Torneio da Figura 2.10 após a remoção do elemento com id 3. O elemento 8, que era o perdedor da partida entre os elementos que ocupam a última posição, foi usado para substituir a posição que o elemento 3 ocupava. Todas as partidas até o topo foram recalculadas com os devidos certificados atualizados. As setas azuis pontilhadas representam os certificados atualizados.

## Capítulo 3

### Par mais próximo

Considere o seguinte problema cinético. São dados  $n$  pontos movendo-se linearmente no plano. Cada ponto é representado por um par  $(s_0, \vec{v})$  onde  $s_0 = (x_0, y_0)$  é a sua posição inicial e  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  um vetor velocidade. A posição de um determinado ponto  $p$ , num instante arbitrário  $t \geq 0$ , é  $s_p = (x_p, y_p) = (x_0, y_0) + t \cdot \vec{v}$ . Queremos saber o par  $(p, q)$  cuja distância  $d(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$  é mínima, num instante arbitrário  $t \geq 0$ .

Por exemplo, se tivermos 5 pontos na coleção, representados na figura 3.1:  $((1, 0), (2, 1))$ ,  $((5, -1), (-1, 2))$ ,  $((0, 2), (1, -1))$ ,  $((3, 2), (1, -2))$  e  $((3, 1), (-1, 0))$ .



**Figura 3.1:** Os pontos preenchidos em preto representam a coleção no instante  $t = 0$ . Os pontos não preenchidos representam a coleção no instante  $t = 2$ . As setas representam a direção e sentido do vetor velocidade de cada ponto. A linha tracejada representa a distância entre o par mais próximo no instante  $t = 0$ , enquanto a linha pontilhada representa a distância entre o par mais próximo no instante  $t = 2$ .

Queremos dar suporte às seguintes operações:

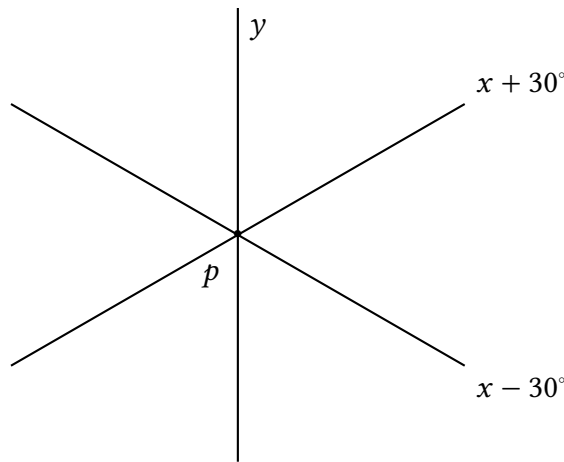
- $\text{ADVANCE}(t) \rightarrow$  avança o tempo corrente para  $t$ ;

- $\text{CHANGE}(j, \vec{v}) \rightarrow$  altera a velocidade do ponto  $j$  para  $\vec{v}$ ;
- $\text{QUERY\_CLOSEST}() \rightarrow$  devolve os pontos que formam o par mais próximo no instante atual.

### 3.1 Algoritmo Estático

O algoritmo que será aqui apresentado foi proposto por Basch, Guibas e Hershberger e admite uma boa cinetização, usando a ideia de linha de varredura.

O algoritmo é baseado na ideia de dividir o plano, para cada ponto, em seis cones iguais. Os cones são delimitados pela reta paralela ao eixo  $y$  que passa pelo ponto e pelas retas  $x \pm 30^\circ$ , isto é, as retas que passam pelo ponto e formam  $\pm 30^\circ$  com o eixo  $x$  como mostra a figura 3.2.



**Figura 3.2:** A reta paralela ao eixo  $y$  que passa por  $p$  e as retas  $x \pm 30^\circ$ .

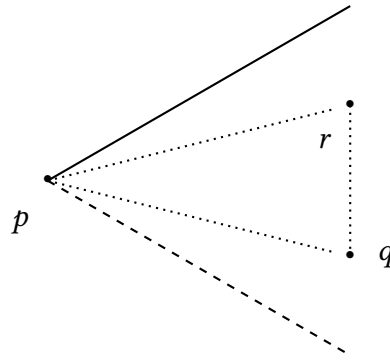
Tendo dividido o plano em cones, a ideia é achar o ponto mais próximo de  $p$  dentro de cada um desses cones. Se assim o fizermos para todos os pontos, um desses pares possui a menor distância entre si e será o par mais próximo que buscamos.

Se  $(p, q)$  formam um par mais próximo, então  $(q, p)$  também serão um par mais próximo, na verdade, serão o mesmo par. Dessa maneira, não precisamos dos seis cones para buscar os pares, somente de três deles. Para uma varredura da direita para a esquerda, apenas buscaremos os pares mais próximos nos três cones à direita de  $p$ .

Vamos começar analisando o cone cujo eixo central é paralelo ao eixo  $x$ . Chamaremos esse cone de *dominância de  $p$*  e o representaremos por  $\text{Dom}(p)$ . Consideraremos que um ponto em cima da linha  $x + 30^\circ$  pertence a  $\text{Dom}(p)$  e um ponto em cima de  $x - 30^\circ$  não pertence a  $\text{Dom}(p)$  como mostra a figura 3.3. O mesmo algoritmo poderá ser aplicado aos outros dois cones se rotacionarmos o sistema de coordenadas  $\pm 60^\circ$ .

Definiremos como  $\text{Maxima}(p)$  o conjunto dos pontos à direita de  $p$  que não pertencem a *dominância* de nenhum ponto à direita de  $p$ . Isso nos permite definir o conjunto de *candidatos* de  $p$  representado por  $\text{Cands}(p)$ :  $\text{Cands}(p) = \text{Dom}(p) \cap \text{Maxima}(p)$ , ou seja, os *candidatos* de  $p$  são aqueles pontos à direita de  $p$  que não pertencem a *dominância* de





**Figura 3.5:** A distância de  $r$  até  $q$  é menor do que a distância  $p$  até  $r$  e do que a distância  $p$  até  $q$ .

sua coordenada  $x$ . No algoritmo,  $a$  e  $b$  são os pontos que representam o par mais próximo. Se  $p$  ou  $q$  são nulos,  $d(p, q)$  retorna  $+\infty$ .

A cada iteração do algoritmo 3.1,  $Maxima$  é igual a  $Maxima(p)$ . Na nossa implementação,  $Maxima$  estará armazenado em uma árvore binária de busca, mais especificamente em uma *splay tree* cuja chave é a coordenada  $y$  dos pontos. Com isso, podemos buscar por  $up(p)$  e  $low(p)$  em tempo logarítmico, bem como podemos retirar  $Cands(p)$  de  $Maxima$  em tempo logarítmico, isto é, atualizar  $Maxima$  de maneira que  $Maxima = Maxima \setminus Cands(p)$ .

---

**Algoritmo 3.1:** Função  $CLOSEST\_PAIR(p, n, \theta)$ .

---

```

1: function CLOSEST_PAIR( $p, n, \theta$ )
2:    $(a, b) \leftarrow (NULL, NULL)$ 
3:   HEAPSORT( $p, n, \theta$ )  $\triangleright p.x[1] > \dots > p.x[n]$ 
4:    $Maxima \leftarrow \emptyset$ 
5:   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  :
6:      $Cands \leftarrow Maxima \cap Dom(p_i)$ 
7:      $Maxima \leftarrow (Maxima \setminus Cands) \cup \{p_i\}$ 
8:      $lcand \leftarrow MIN\_X(Cands)$ 
9:     if  $d(p_i, lcand) < d(a, b)$  :
10:       $(a, b) \leftarrow (p_i, lcand)$ 
11:   return  $(a, b)$ 

```

---

Para descrever a implementação do algoritmo, já considerando as versões rotacionadas dele, iremos antes precisar estabelecer os nomes das variáveis e rotinas auxiliares utilizadas. São elas:

1.  $n$ : o número de pontos dados;
2. *point*: um ponto com os seguintes atributos:
  - (a)  $x$ : coordenada  $x$  do ponto;
  - (b)  $y$ : coordenada  $y$  do ponto.
3. *root*: raiz da *splay tree*;
4. *node*: objeto que compõe a árvore de busca binária, atributos:

- (a) *left*: aponta para a raiz da subárvore esquerda do nó. A subárvore esquerda é composta apenas por pontos que possuem *key* com menor ordenada que a *key* do nó;
  - (b) *right*: aponta para a raiz da subárvore direita do nó. A subárvore direita é composta apenas por pontos que possuem *key* com ordenada maior ou igual que a *key* do nó;
  - (c) *parent*: aponta para o nó que é pai deste nó;
  - (d) *key*: aponta para um ponto.
5. *angle*: ângulo de rotação do sistema de coordenadas;
  6. *points*: vetor de  $n$  posições que guarda os pontos;
  7.  $\text{GETX}(p) \rightarrow$  retorna a coordenada  $x$  de um ponto  $p$  baseada no ângulo de rotação *angle*;
  8.  $\text{GETY}(p) \rightarrow$  retorna a coordenada  $y$  de um ponto  $p$  baseada no ângulo de rotação *angle*;
  9.  $\text{HEAPSORT}() \rightarrow$  ordena o vetor *points*, utilizando o algoritmo *heapsort*, de acordo com a coordenada  $x$  de cada ponto cujo valor é retornado pela rotina  $\text{GETX}(p)$ .

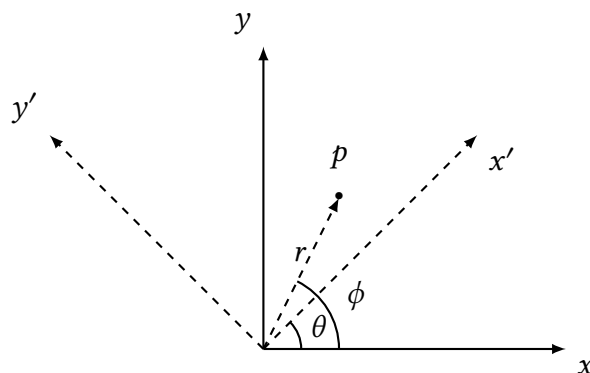
Para um ponto  $(r, \phi)$  em coordenadas polares  $x = r\cos(\phi)$  e  $y = r\sin(\phi)$ .

Rotacionar o sistema de coordenadas por  $\theta$  é o mesmo que transformar  $\phi$  em  $\phi - \theta$ , veja a figura 3.6. Isso significa que agora as novas coordenadas são descritas como:

$$x^* = r\cos(\phi - \theta) = r\cos(\phi)\cos(\theta) + r\sin(\phi)\sin(\theta) = x\cos(\theta) + y\sin(\theta)$$

$$y^* = r\sin(\phi - \theta) = r\sin(\phi)\cos(\theta) - r\cos(\phi)\sin(\theta) = y\cos(\theta) - x\sin(\theta)$$

Os valores  $x^*$  e  $y^*$  são os valores, respectivamente, retornados por  $\text{GETX}(p)$  e  $\text{GETY}(p)$  para  $\theta = \text{angle}$ .



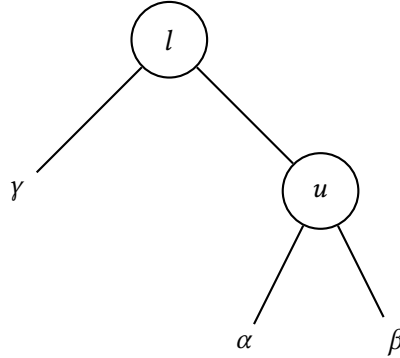
**Figura 3.6:** O ponto  $p$  está numa inclinação de  $\phi - \theta$  graus em relação a reta que passa pela origem e por  $x'$ .

A interface da *splay tree*, cuja chave é a coordenada  $y$  do ponto, contará com as seguintes operações além das usuais:

1.  $SUCCESSOR(p) \rightarrow$  busca pelo nó cuja chave é  $up(p)$  na *splay tree*. Esse nó corresponde ao sucessor de  $p$  na árvore;
2.  $PREDECESSOR(p) \rightarrow$  busca pelo nó cuja chave é  $low(p)$  na *splay tree*. Esse nó corresponde ao predecessor de  $p$  na árvore;
3.  $LCAND(p) \rightarrow$  calcula  $Cands(p)$ , remove da *splay tree* e determina  $lcand(p)$ , que pode ser  $NULL$ ;

No algoritmo 3.2 e no algoritmo 3.3 a rotina  $checkLine(p, q, \theta)$  retorna se o ponto  $q$  está à esquerda, sobre ou à direita da reta  $r$ . A reta  $r$  é a reta que passa por  $p$  e faz um ângulo de  $\theta$  radianos com o eixo  $x$ . Para  $q$  à esquerda de  $r$  o retorno é 1, para  $q$  sobre  $r$  o retorno é 0 e para  $q$  à direita de  $r$ , o retorno é  $-1$ .

O algoritmo 3.4 implementa a função  $LCAND(p)$ . Sabemos que  $lcand(p)$  é o elemento de  $Cands(p)$  com menor coordenada  $x$  e que  $Cands(p)$  é limitado por  $low(p)$  e  $up(p)$ . A ideia para retirar  $Cands(p)$  da árvore é reorganizá-la de modo que  $low(p)$  seja a raiz e  $up(p)$  o filho direito da raiz, dessa forma  $Cands(p)$  é a subárvore esquerda do filho direito da raiz, veja a figura 3.7. Nem sempre tal configuração é possível, mas o algoritmo tratará dos casos de borda que são quando  $low(p)$ , ou  $up(p)$ , ou ambos, não existem. A rotina  $SPLIT(x)$  separa a subárvore de raiz  $x$  da *splay tree* e retorna a raiz dessa nova árvore. A rotina  $MIN\_X(z)$  retorna o ponto com menor coordenada  $x$  da árvore de raiz  $z$ .



**Figura 3.7:** Na figura,  $l$  é  $low(p)$  e  $u$  é  $up(p)$ . A subárvore  $\alpha$  contém todos os pontos que estão entre  $low(p)$  e  $up(p)$  e, portanto, corresponde ao conjunto  $Cands(p)$ .

O algoritmo 3.5 implementa a função  $QUERY\_CLOSEST$  que retorna o par  $(a, b)$  que possui distância mínima em *points*.



---

**Algoritmo 3.2:** Função  $\text{SUCCESSOR}(p)$ .

---

```

1: function  $\text{SUCCESSOR}(p)$ 
2:    $x \leftarrow \text{root}$ 
3:    $up \leftarrow \text{NULL}$ 
4:   while  $x \neq \text{NULL}$  :
5:      $y \leftarrow x$ 
6:     if  $\text{CHECKLINE}(p, x.\text{key}, \pi/6) = -1$  :
7:        $x \leftarrow x.\text{right}$ 
8:     else
9:        $up \leftarrow x$ 
10:       $x \leftarrow x.\text{left}$ 
11:  if  $y \neq \text{NULL}$  : ▷ dá SPLAY no último nó visitado
12:     $\text{SPLAY}(y)$ 
13:  return  $up$ 

```

---



---

**Algoritmo 3.3:** Função  $\text{PREDECESSOR}(p)$ .

---

```

1: function  $\text{PREDECESSOR}(p)$ 
2:    $x \leftarrow \text{root}$ 
3:    $low \leftarrow \text{NULL}$ 
4:   while  $x \neq \text{NULL}$  :
5:      $y \leftarrow x$ 
6:     if  $\text{CHECKLINE}(p, x.\text{key}, -\pi/6) \leq 0$  :
7:        $x \leftarrow x.\text{left}$ 
8:     else
9:        $low \leftarrow x$ 
10:       $x \leftarrow x.\text{right}$ 
11:  if  $y \neq \text{NULL}$  : ▷ dá SPLAY no último nó visitado
12:     $\text{SPLAY}(y)$ 
13:  return  $low$ 

```

---

**Algoritmo 3.4:** Função  $lcand(p)$ .

---

```

1: function LCAND( $p$ )
2:    $r \leftarrow root$ 
3:    $low \leftarrow PREDECESSOR(p)$ 
4:   if  $low \neq NULL$  :
5:     SPLAY( $low$ )
6:      $r \leftarrow SPLIT(low.right)$ 
7:    $up \leftarrow SUCCESSOR(p)$ 
8:   if  $up \neq NULL$  :
9:     SPLAY( $up$ )
10:     $r \leftarrow SPLIT(up.left)$ 
11:   if  $up \neq NULL$  and  $low \neq NULL$  :
12:      $low.right \leftarrow up$ 
13:      $up.parent \leftarrow low$ 
14:   return MIN_X( $r$ )

```

---

**Algoritmo 3.5:** Função QUERY\_CLOSEST.

---

```

1: function QUERY_CLOSEST()
2:    $(m, n) \leftarrow (NULL, NULL)$ 
3:    $angle \leftarrow -\frac{\pi}{3}$ 
4:   while  $angle \leq \frac{\pi}{3}$  :
5:     HEAPSORT( $points, n, \theta$ )  $\triangleright points.x[1] > \dots > points.x[n]$ 
6:     for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  :
7:        $p \leftarrow points[i]$ 
8:        $lcand \leftarrow LCAND(p)$ 
9:       INSERT( $p$ )
10:      if  $d(p, lcand) < d(a, b)$  :
11:         $(a, b) \leftarrow (p, lcand)$ 
12:       $angle \leftarrow angle + \frac{\pi}{3}$ 
13:      CLEARALL()  $\triangleright$  esvazia a splay tree
14:   return  $(m, n)$ 

```

---

## 3.2 Algoritmo Cinético

Para “cinetizar” o algoritmo estático utilizaremos certificados, para assegurar que as nossas estruturas permanecerão corretas. Primeiramente, teremos os certificados das três *listas ordenadas cinéticas*, seção 1.1, que guardarão a ordem dos pontos de acordo com os eixos  $x$ ,  $x + 60^\circ$  e  $x - 60^\circ$ .

Para garantir qual, dentre os pares  $(p, lcand(p))$ , é o par mais próximo usaremos um *torneio cinético com inserção e remoção*, seção 2.2.1, com respeito ao mínimo em vez de ao máximo. Temos um total de  $3n$  pares, pois consideraremos também os pares  $(p, lcand(p))$  em que  $lcand(p)$  é nulo e os certificados destes serão  $+\infty$ .

Também precisaremos manter informação guardada para atualizar com eficiência mudanças provocadas por trocas na ordem dos pontos em relação a um dos três eixos. Por exemplo, uma troca na ordem dos pontos pode acarretar na mudança nos conjuntos  $Cands(p)$  e  $Cands(q)$ . Mudanças nesses conjuntos ocorrerão quando  $q = up(p)$ ,  $q = low(p)$  ou  $q \in Cands(p)$ . Portanto, para que consigamos manter  $lcand(p)$  de maneira eficiente cada ponto terá três árvores binárias de busca associadas a ele com os conjuntos  $Cands(p)$ ,  $Hits_{up}(p)$  e  $Hits_{low}(p)$ . A árvore  $Cands(p)$  guarda os pontos que pertencem ao conjunto  $Cands(p)$  ordenados pela coordenada  $y$ . A árvore  $Hits_{up}(p)$  guarda os pontos  $q$  tais que  $up(q) = p$ , ordenados pela coordenada  $x$ . Similarmente, a árvore  $Hits_{low}(p)$  guarda os pontos  $q$  tais que  $low(q) = p$ , ordenados pela coordenada  $x$ . Utilizaremos uma árvore  $Cands(p)$ ,  $Hits_{up}(p)$  e  $Hits_{low}(p)$  para cada um dos eixos, logo, para cada ponto  $p$ , haverá nove *splay trees* no total.

Cada uma das três árvores têm sua raiz apontando para o nó  $p$ , e cada nó das árvores aponta para o seu nó pai. Na árvore  $Cands(p)$  cada nó deve apontar para o descendente que contém o ponto mais à esquerda na ordenação horizontal. Na nossa implementação as árvores serão *splay trees*. Essas estruturas contém toda a informação necessária para que mantenhamos nossas estruturas atualizadas e, conseqüentemente, o par mais próximo do conjunto.

Na implementação do algoritmo inicialmente inserimos os pontos nas três listas ordenadas. Uma vez que as listas estejam montadas, percorremos os pontos da direita para a esquerda preenchendo as estruturas  $Cands(p)$ ,  $Hits_{up}(p)$  e  $Hits_{low}(p)$  para cada ponto  $p$  e para cada um dos eixos. Esta etapa é feita da mesma forma que foi apresentada na seção sobre o algoritmo estático.

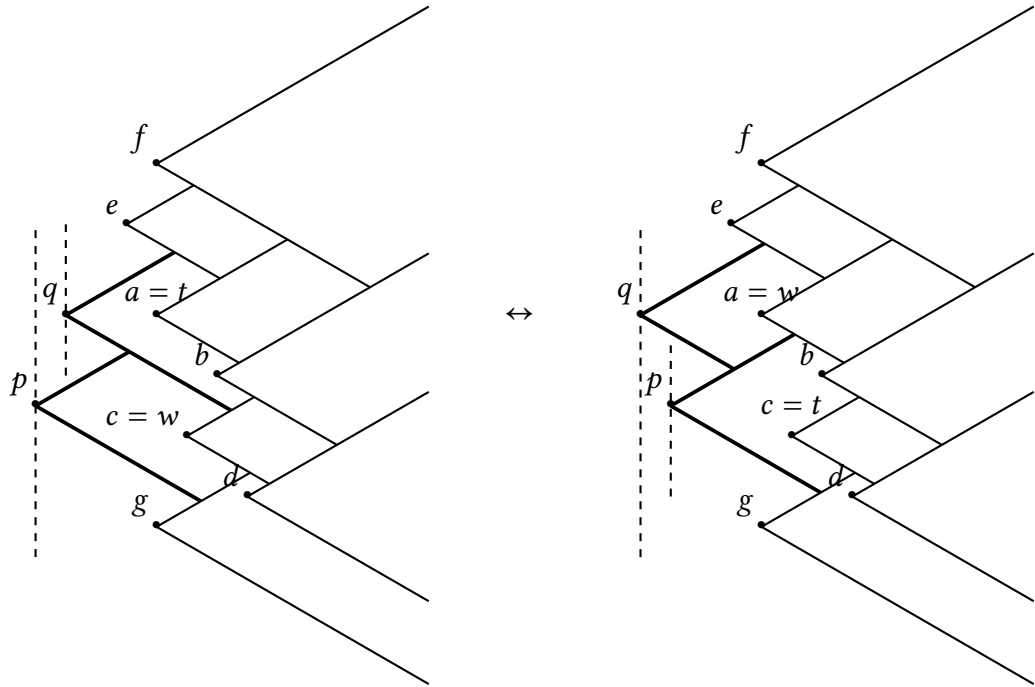
A medida que as estruturas  $Cands(p)$  são inicializadas inserimos o par  $(p, lcand(p))$  no torneio. Quando todos os pares forem inseridos no torneio realizamos as partidas e calculamos os certificados, o par  $(p, q)$  da partida que possuir menor distância é considerado o vencedor.

Todos os certificados são colocados em uma fila de prioridade  $Q$ . Os certificados inseridos na fila possuem quatro informações:

- $t \rightarrow$  instante de tempo em que o certificado expira. É utilizado como chave para a fila de prioridade. Desempates são tratados de maneira especial e serão explicados mais adiante;

- $p \rightarrow$  um dos pontos envolvidos no evento representado pelo certificado. Caso seja um certificado de troca na ordenação,  $p$  é o ponto mais a direita naquela ordenação;
- $q \rightarrow$  o outro ponto envolvido no evento representado pelo certificado. Caso seja um certificado de troca na ordenação,  $q$  é o ponto mais a esquerda naquela ordenação;
- $\text{tipo} \rightarrow$  o tipo de evento que o certificado representa. Pode representar uma troca em uma das três ordenações, denominadas por  $H$  (horizontal =  $0^\circ$ -ordem),  $U$  (up =  $+60^\circ$ -ordem) e  $D$  (down =  $-60^\circ$ -ordem) ou pode representar a vitória do par  $(p, q)$  em uma partida do torneio.

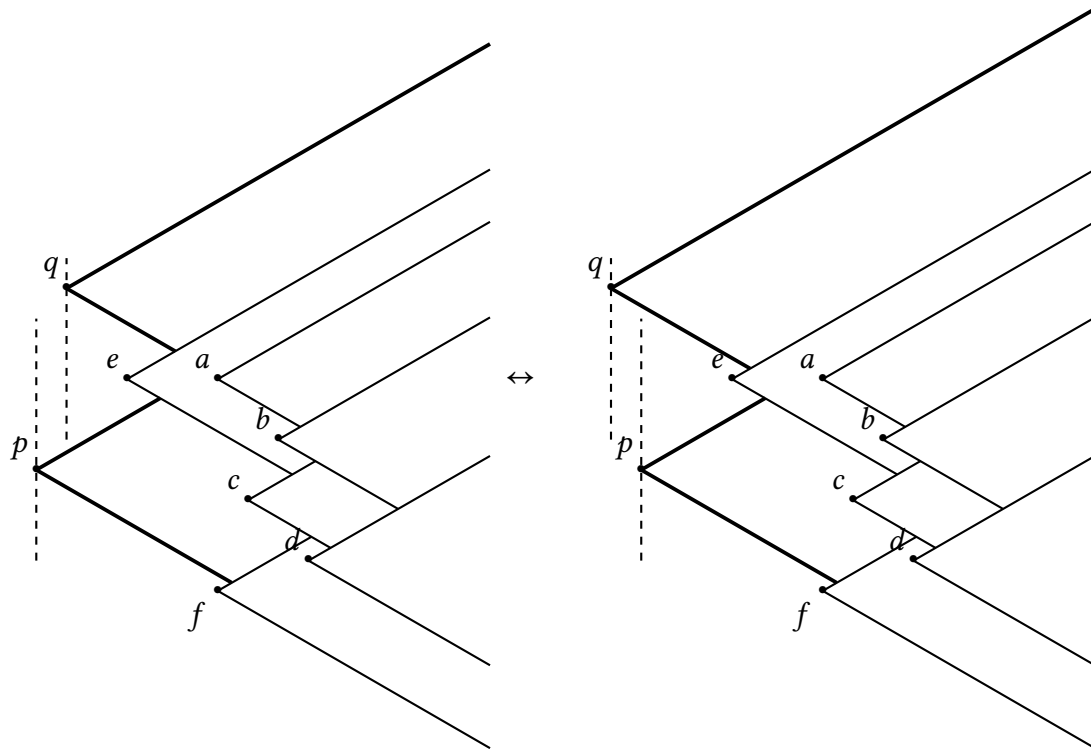
Vamos agora falar de um evento em que ocorre uma mudança na ordem horizontal. No primeiro caso,  $p$  se encontra à esquerda e abaixo de  $q$ , veja a figura 3.8. O caso em que  $q$  está à esquerda de  $p$  será tratado de maneira parecida. O algoritmo 3.6 implementa a sequência de operações referentes à esse tipo de evento.



**Figura 3.8:** Da esquerda para direita, o caso em que  $p$  está em  $Hits_{up}(q)$ . Da direita para esquerda, o caso em que  $q$  está em  $Hits_{low}(p)$ .

Se  $p$  está em  $Hits_{up}(q)$ , como demonstrado na figura 3.8, então parte de  $Cands(q)$  terá de passar para  $Cands(p)$ . Para tal, buscamos pelo novo  $t = up(p)$  em  $Cands(q)$  e chamamos a rotina *splay* para o nó que contém  $t$ . Após o *splay*, chamamos um *split* na subárvore esquerda desse nó e unimos ela a  $Cands(p)$ . Se  $t$  não for encontrado em  $Cands(q)$ , então  $t = up(q)$  e todos os pontos de  $Cands(q)$  devem ser transferidos para  $Cands(p)$ . Não podemos esquecer de remover  $p$  de  $Hits_{up}(q)$  e adicioná-lo em  $Hits_{up}(t)$ , além de remover  $q$  de  $Hits_{low}(w)$  e adicioná-lo em  $Hits_{low}(p)$ . Se  $p$  não está em  $Hits_{up}(q)$ , então não haverá mudanças, veja a figura 3.9.

Similarmente, se  $q$  está em  $Hits_{low}(p)$ , como demonstrado na figura 3.8, parte de  $Cands(p)$  passará para  $Cands(q)$ . Para realizar tal operação, buscamos pelo novo  $t = low(q)$



**Figura 3.9:** Se  $p$  não está em  $Hits_{up}(q)$ , ou se  $q$  não está em  $Hits_{low}(p)$ , nada acontece.

em  $Cands(p)$ , damos um *splay* no nó que o contém, separamos a subárvore direita desse nó e unimos ela à  $Cands(q)$ . Se  $t$  não for encontrado em  $Cands(p)$ , então  $t = low(p)$  e todos os pontos de  $Cands(p)$  devem ser passados para  $Cands(q)$ . Devemos também remover  $q$  de  $Hits_{low}(p)$  e inseri-lo em  $Hits_{low}(t)$ , além de remover  $p$  de  $Hits_{up}(w)$  e adicioná-lo em  $Hits_{up}(q)$ . Se  $q$  não está em  $Hits_{low}(p)$ , então não haverá mudanças, veja a figura 3.9.

No caso de um evento em que ocorre uma mudança na  $60^\circ$ -ordem, que é a ordem dos pontos projetados no eixo  $x + 60^\circ$ , vamos assumir que  $p$  é o ponto que está à esquerda e acima de  $q$ . O evento pode provocar a entrada ou saída do ponto  $q$  de  $Cands(p)$ , veja a figura 3.10. O algoritmo 3.7 implementa a sequência de operações referentes a este evento.

Se  $p$  está em  $Hits_{low}(q)$ , ou seja,  $q$  está entrando em  $Dom(p)$  como demonstrado na figura 3.10 da esquerda para direita, então a troca na  $60^\circ$ -ordem afetará o ponto  $v$  tal que  $q$  está em  $Cands(v)$ . Achamos esse ponto subindo em  $Cands(v)$ , a partir do nó que contém  $q$ , até a raiz que aponta para  $v$ . Devemos então remover  $q$  de  $Cands(v)$  e inseri-lo em  $Cands(p)$ . A mudança também afetará todos os pontos que estão à esquerda de  $p$  e estão em  $Hits_{up}(q)$ . Para achar esses pontos, buscamos o ponto  $t$  em  $Hits_{up}(q)$  mais à esquerda que está à direita de  $p$ . Chamamos *splay* para o nó que contém  $t$  e chamamos *split* para a subárvore esquerda desse nó e juntamos essa árvore em  $Hits_{up}(p)$ , pois são todos os pontos à esquerda de  $p$  que tinham  $q$  como *up* e agora seu novo *up* é  $p$ . Se esse ponto  $t$  não existe, todos os pontos de  $Hits_{up}(q)$  devem ser transferidos para  $Hits_{up}(p)$ , veja a figura 3.11, e buscamos pelo ponto  $t$  tal que  $q$  está em  $Hits_{low}(t)$ . Por fim, removemos o ponto  $p$  de  $Hits_{low}(q)$  e o inserimos em  $Hits_{low}(t)$ . Se  $p$  não está em  $Hits_{low}(q)$  não haverá mudanças.

Se  $q$  está em  $Cands(p)$ , ou seja,  $q$  está saindo de  $Dom(p)$  como demonstrado na fi-

---

**Algoritmo 3.6:** Função HORIZONTAL EVENT.
 

---

```

1: function HORIZONTAL EVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$  :
3:      $t \leftarrow \text{PREDECESSOR}(p, \text{Cands}(q, dir), U)$ 
4:     if  $t = \text{NULL}$  :
5:        $t \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{hitsUp}(dir))$ 
6:      $\text{newCands} \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, \text{Cands}(q, dir))$ 
7:      $\text{JOIN}(\text{Cands}(p, dir), \text{newCands})$ 
8:      $\text{DELETE}(p, \text{Hits}_{up}(q, dir))$ 
9:     if  $t \neq \text{NULL}$  :
10:       $\text{INSERT}(p, \text{Hits}_{up}(t, dir))$ 
11:      $w \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{hitsLow}(dir))$ 
12:     if  $w \neq \text{NULL}$  :
13:       $\text{DELETE}(q, \text{Hits}_{low}(w, dir))$ 
14:      $\text{INSERT}(q, \text{Hits}_{low}(p, dir))$ 
15:   else
16:     if  $p = \text{OWNER}(q.\text{hitsLow}(p, dir))$  :
17:        $t \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, \text{Cands}(p, dir), D)$ 
18:       if  $t = \text{NULL}$  :
19:          $t \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsLow}(dir))$ 
20:        $\text{newCands} \leftarrow \text{SPLIT}(t, \text{NULL}, \text{Cands}(p, dir))$ 
21:        $\text{JOIN}(\text{Cands}(q, dir), \text{newCands})$ 
22:        $\text{DELETE}(q, \text{Hits}_{low}(p, dir))$ 
23:       if  $t \neq \text{NULL}$  :
24:          $\text{INSERT}(q, \text{Hits}_{low}(t, dir))$ 
25:        $w \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$ 
26:       if  $w \neq \text{NULL}$  :
27:          $\text{DELETE}(p, \text{Hits}_{up}(w, dir))$ 
28:        $\text{INSERT}(p, \text{Hits}_{up}(q, dir))$ 
29:    $v \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{cands}(dir))$ 
30:    $v' \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$ 
31:   if  $v = v'$  :
32:      $\text{UPDATELCAND}(v, dir)$ 

```

---

gura 3.10 da direita para esquerda, então a troca afetará o ponto  $t$  tal que  $p$  está em  $Hits_{low}(t)$ . Se o ponto  $t$  existe, removemos  $p$  de  $Hits_{low}(t)$ . Devemos agora inserir  $p$  em  $Hits_{low}(q)$ , já que  $q$  é o novo  $low(p)$ . A mudança também afetará os pontos de  $Hits_{up}(p)$  que agora deverão estar em  $Hits_{up}(q)$ . Para achar esses pontos, buscamos pelo ponto  $v$  em  $Hits_{up}(p)$  mais à direita que não deveria estar em  $Hits_{up}(q)$ , chamamos *splay* para o nó que contém  $v$  e um *split* para sua subárvore direita, essa nova árvore deve ser incorporada a  $Hits_{up}(q)$ . Se tal ponto  $v$  não existe, todos os nós de  $Hits_{up}(p)$  devem ser passados para  $Hits_{up}(q)$ . Por fim, devemos achar o novo ponto  $u$  tal que  $q$  deve estar em  $Cands(u)$ . Se o ponto  $v$  descrito anteriormente existe, então  $u = v$ . Se  $v$  não existe, então  $u$  é o ponto tal que  $p$  está em  $Cands(u)$ . Dessa forma, retiramos  $q$  de  $Cands(p)$  e o inserimos em  $Cands(u)$ . Se  $q$  não está em  $Cands(p)$ , não haverá mudanças.

---

**Algoritmo 3.7:** Função **UPEVENT**.

---

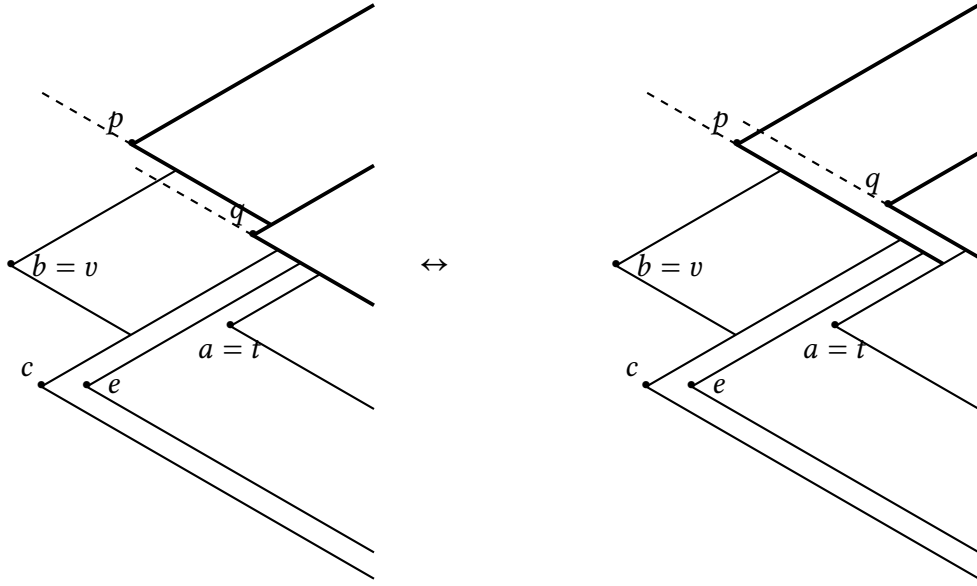
```

1: function UPEVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = \text{OWNER}(p.\text{hitsLow}(dir))$  :
3:      $v \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$ 
4:     if  $v \neq \text{NULL}$  :
5:       DELETE( $q, \text{Cands}(v, dir)$ )
6:       INSERT( $q, \text{Cands}(p, dir)$ )
7:        $t \leftarrow \text{SUCCESSOR}(p, Hits_{up}(q, dir), H)$ 
8:       if  $t = \text{NULL}$  :
9:          $t \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{hitsLow}(dir))$ 
10:       $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, Hits_{up}(q, dir))$ 
11:      JOIN( $Hits_{up}(p, dir), newHits$ )
12:      DELETE( $p, Hits_{low}(q, dir)$ )
13:      if  $t \neq \text{NULL}$  :
14:        INSERT( $p, Hits_{low}(t, dir)$ )
15:   else
16:     if  $p = \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$  :
17:        $t \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsLow}(dir))$ 
18:       if  $t \neq \text{NULL}$  :
19:         DELETE( $p, Hits_{low}(t, dir)$ )
20:         INSERT( $p, Hits_{low}(q, dir)$ )
21:        $v \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, Hits_{up}(p, dir), U)$ 
22:       if  $v = \text{NULL}$  :
23:          $v \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{cands}(dir))$ 
24:        $newHits \leftarrow \text{SPLIT}(v, \text{NULL}, Hits_{up}(p, dir))$ 
25:       JOIN( $newHits, Hits_{up}(q, dir)$ )
26:       DELETE( $q, \text{Cands}(p, dir)$ )
27:       if  $v \neq \text{NULL}$  :
28:         INSERT( $q, \text{Cands}(v, dir)$ )

```

---

Um evento em que ocorre uma mudança na  $-60^\circ$ -ordem, a ordem dos pontos projetados no eixo  $x - 60^\circ$ , é simétrico a um evento na  $60^\circ$ -ordem. Os pontos envolvidos no evento serão  $p$  e  $q$  e vamos assumir que  $p$  é o ponto mais à esquerda e abaixo de  $q$ . O evento pode



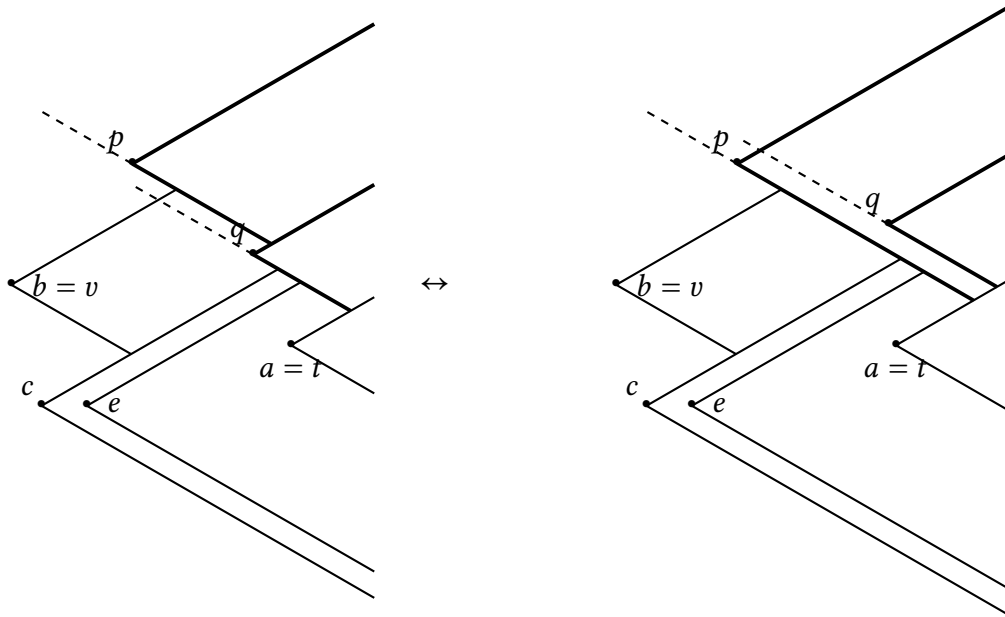
**Figura 3.10:** Da esquerda para direita, o caso em que  $p$  está em  $Hits_{low}(q)$ , ou seja,  $q$  está entrando em  $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que  $q$  está em  $Cands(p)$ , saindo de  $Dom(p)$ .

provocar a entrada ou saída do ponto  $q$  de  $Cands(p)$ , veja a figura 3.13. O algoritmo 3.13 implementa a sequência de operações referentes a esse evento.

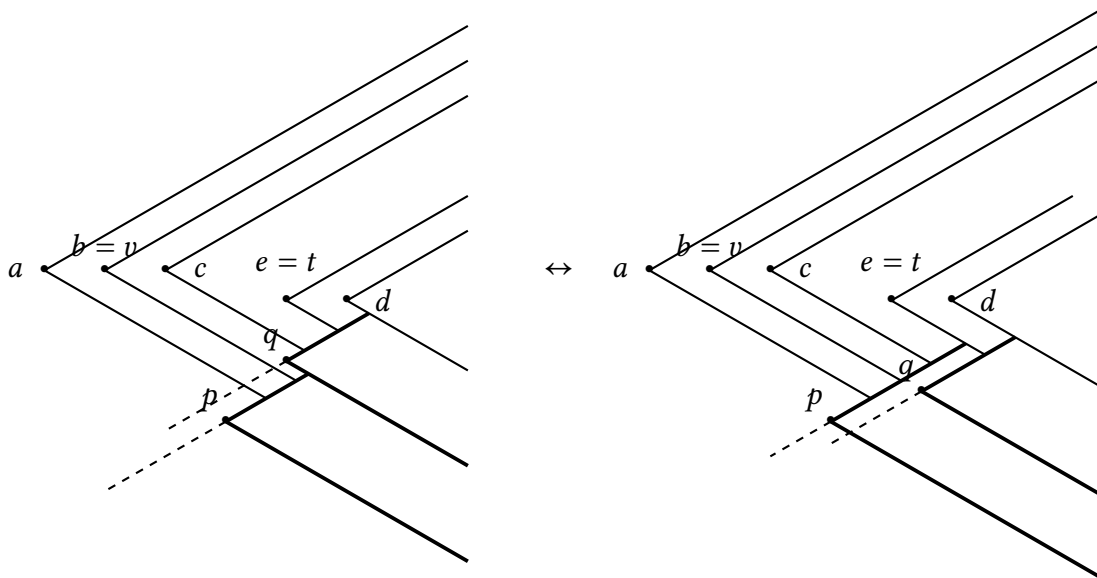
Se  $p$  está em  $Hits_{up}(q)$  ( $q$  está entrando em  $Dom(p)$ ), como demonstrado na figura 3.13, então a troca na  $-60^\circ$ -ordem afetará o ponto  $v$  tal que  $q$  está em  $Cands(v)$ . Achamos esse ponto subindo em  $Cands(v)$ , a partir do nó que contém  $q$ , até a raiz que aponta para  $v$ . Devemos então remover  $q$  de  $Cands(v)$  e inseri-lo em  $Cands(p)$ . A mudança também afetará todos os pontos que estão à esquerda de  $p$  e estão em  $Hits_{low}(q)$ . Para achar esses pontos buscamos o ponto  $t$  em  $Hits_{low}(q)$  mais à esquerda que está à direita de  $p$ . Chamamos *splay* para o nó que contém  $t$  e *split* para a nova subárvore esquerda desse nó e juntamos essa árvore em  $Hits_{low}(p)$ , pois são todos pontos à esquerda de  $p$  que tinham  $q$  como *low* e agora seu novo *low* é  $p$ . Se esse ponto  $t$  não existe, veja a figura 3.14, então buscamos pelo ponto  $t$  tal que  $q$  está em  $Hits_{up}(t)$ . Por fim, removemos o ponto  $p$  de  $Hits_{up}(q)$  e o inserimos em  $Hits_{up}(t)$ . Se  $p$  não está em  $Hits_{up}(q)$  não haverá mudanças.

Se  $q$  está em  $Cands(p)$  ( $q$  está saindo de  $Dom(p)$ ), como demonstrado na figura 3.13, então a troca afetará o ponto  $t$  tal que  $p$  está em  $Hits_{up}(t)$ . Se o ponto  $t$  existe, removemos  $p$  de  $Hits_{up}(t)$ . Devemos agora inserir  $p$  em  $Hits_{up}(q)$ , já que  $q$  é o novo  $up(p)$ . A mudança também afetará os pontos de  $Hits_{low}(p)$  que agora atingem  $Dom(q)$ . Para achar esses pontos, buscamos pelo ponto  $v$  em  $Hits_{low}(p)$  mais à direita que não atinge  $Dom(q)$ , chamamos *splay* para o nó que contém  $v$  e um *split* para sua subárvore direita. Essa nova árvore deve ser incorporada a  $Hits_{low}(q)$ . Se tal ponto  $v$  não existe, todos os nós de  $Hits_{low}(p)$  devem ser passados para  $Hits_{low}(q)$ . Por fim, devemos achar o novo ponto  $u$  tal que  $q$  deve estar em  $Cands(u)$ . Se o ponto  $v$  descrito anteriormente existe, então  $u = v$ . Se  $v$  não existe, então  $u$  é o ponto tal que  $p$  está em  $Cands(u)$ . Dessa forma, retiramos  $q$  de  $Cands(p)$  e o inserimos em  $Cands(u)$ . Se  $q$  não está em  $Cands(p)$ , não haverá mudanças.





**Figura 3.11:** Da esquerda para a direita, todos os pontos de  $Hits_{up}(q)$  são transferidos para  $Hits_{up}(p)$  e  $p$ , que está em  $Hits_{low}(q)$ , é transferido para  $Hits_{low}(t)$ . Da direita para esquerda, os pontos em  $Hits_{up}(p)$  são transferidos para  $Hits_{up}(q)$  e  $p$ , que está em  $Hits_{low}(t)$ , é transferido para  $Hits_{low}(q)$ .



**Figura 3.12:** Da esquerda para direita, o caso em que  $p$  está em  $Hits_{up}(q)$ , ou seja,  $q$  está entrando em  $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que  $q$  está em  $Cands(p)$ , saindo de  $Dom(p)$ .

---

**Algoritmo 3.8:** Função downEvent.

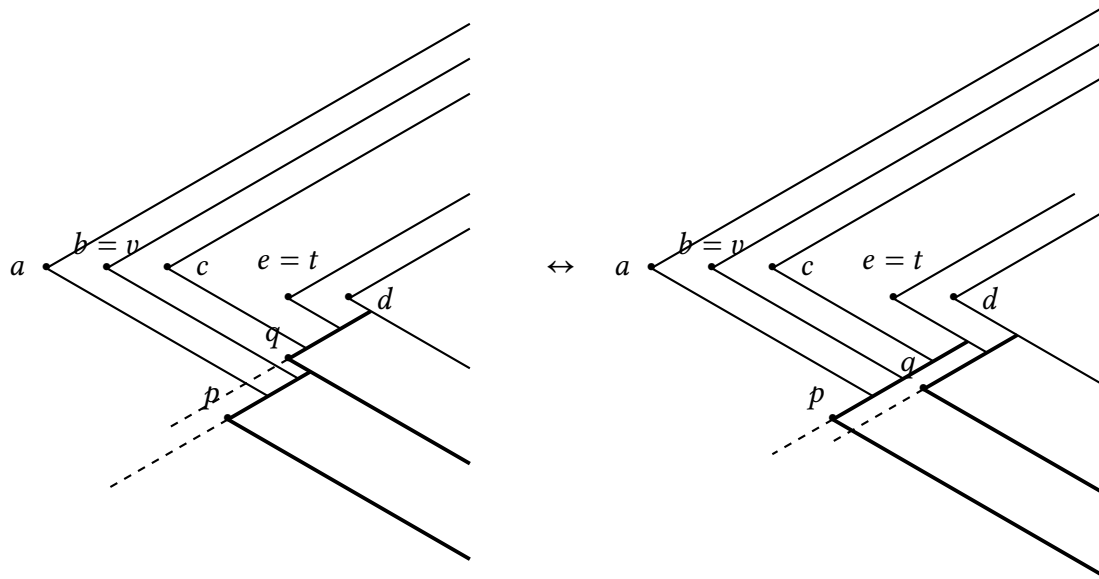
---

```

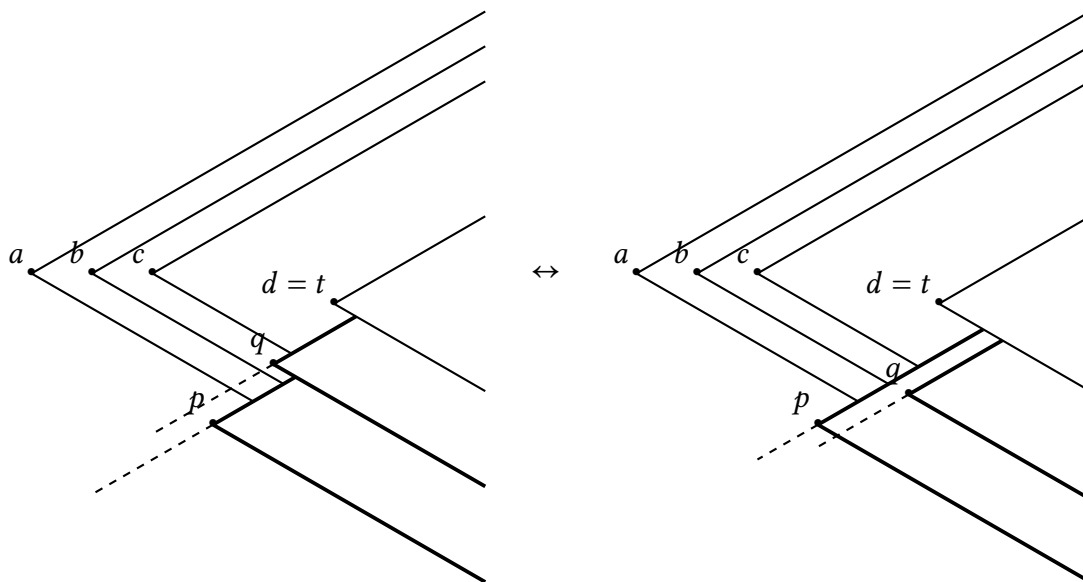
1: function DOWNEVENT( $p, q, dir$ )
2:   if  $q = \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$  :
3:      $v \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$ 
4:     if  $v \neq \text{NULL}$  :
5:       DELETE( $q, \text{Cands}(v, dir)$ )
6:     INSERT( $q, \text{Cands}(p, dir)$ )
7:      $t \leftarrow \text{SUCCESSOR}(p, \text{Hits}_{\text{low}}(q, dir), H)$ 
8:     if  $t = \text{NULL}$  :
9:        $t \leftarrow \text{OWNER}(q.\text{hitsUp}(dir))$ 
10:     $\text{newHits} \leftarrow \text{SPLIT}(\text{NULL}, t, \text{Hits}_{\text{low}}(q, dir))$ 
11:    JOIN( $\text{Hits}_{\text{low}}(p, dir), \text{newHits}$ )
12:    DELETE( $p, \text{Hits}_{\text{up}}(q, dir)$ )
13:    if  $t \neq \text{NULL}$  :
14:      INSERT( $p, \text{Hits}_{\text{up}}(t, dir)$ )
15:  else
16:    if  $p = \text{OWNER}(q.\text{cands}(dir))$  :
17:       $t \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{hitsUp}(dir))$ 
18:      if  $t \neq \text{NULL}$  :
19:        DELETE( $p, \text{Hits}_{\text{up}}(t, dir)$ )
20:      INSERT( $p, \text{Hits}_{\text{up}}(q, dir)$ )
21:       $v \leftarrow \text{PREDECESSOR}(q, \text{Hits}_{\text{low}}(p, dir), D)$ 
22:      if  $v = \text{NULL}$  :
23:         $v \leftarrow \text{OWNER}(p.\text{cands}(dir))$ 
24:       $\text{newHits} \leftarrow \text{SPLIT}(v, \text{NULL}, \text{Hits}_{\text{low}}(p, dir))$ 
25:      JOIN( $\text{newHits}, \text{Hits}_{\text{low}}(q, dir)$ )
26:      DELETE( $q, \text{Cands}(p, dir)$ )
27:      if  $v \neq \text{NULL}$  :
28:        INSERT( $q, \text{Cands}(v, dir)$ )

```

---



**Figura 3.13:** Da esquerda para direita, o caso em que  $p$  está em  $Hits_{up}(q)$ , ou seja,  $q$  está entrando em  $Dom(p)$ . Da direita para esquerda, o caso em que  $q$  está em  $Cands(p)$ , saindo de  $Dom(p)$ .



**Figura 3.14:** Da direita para esquerda,  $p$ , que estava em  $Hits_{up}(q)$  foi transferido para  $Hits_{up}(t)$  e todos os elementos em  $Hits_{low}(q)$  foram transferidos para  $Hits_{low}(p)$ . Da esquerda para direita,  $p$ , que estava em  $Hits_{up}(t)$ , foi transferido para  $Hits_{up}(q)$  e os pontos à direita de  $v$  em  $Hits_{low}(p)$  foram transferidos para  $Hits_{low}(q)$ .

### 3.2.1 Tratamento de casos degenerados

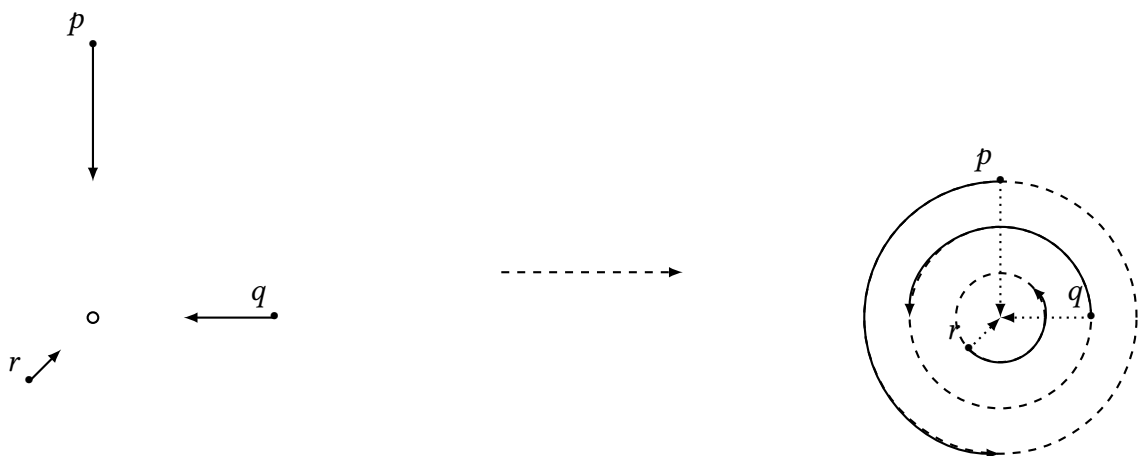
Como citado anteriormente, a nossa fila de prioridade  $Q$  guarda os certificados cuja chave é  $t$ , o instante de tempo em que o certificado expira. Porém, é possível que dois ou mais certificados expirem no mesmo instante de tempo  $t$ , configurando um empate na nossa fila. Nos problemas anteriores, tais empates costumavam ser tratados por algum critério de desempate que era suficiente para garantir que as estruturas permanecessem corretas. No entanto, para o par mais próximo cinético encontrar tal critério não é uma tarefa tão simples.

Para olhar mais profundamente para o problema vamos antes considerar que os eventos associados ao torneio não fazem parte da fila.

Algumas situações em que dois certificados vencem no mesmo instante acabam não causando problemas, por exemplo, dois eventos que envolvem pares de pontos distintos  $(p, q)$  e  $(r, s)$ , ocorrendo no mesmo instante de tempo  $t$ . Contudo, quando dois pontos se colidem, isto é, atingem a mesma posição em  $\mathbb{R}^2$  num instante  $t'$ , ocorrem trocas nas três direções ( $0^\circ$ ,  $+60^\circ$  e  $-60^\circ$ ). Essas trocas precisam ser realizadas de maneira consistente, para que as estruturas possam ser atualizadas da devida maneira.

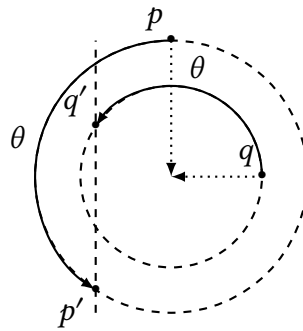
A colisão não necessariamente envolve apenas dois pontos, podem haver mais pontos se colidindo no mesmo instante e, nesse caso, precisamos nos preocupar também como as trocas afetam os pares de pontos, mas como elas afetam todos o pontos envolvidos no geral.

Para determinar em que ordem os eventos devem ocorrer podemos simular um evento não degenerado. No caso, vamos simular que os pontos desviam em uma trajetória circular, ao longo de uma circunferência de raio proporcional à sua velocidade, com mesma velocidade angular, e depois seguem em frente normalmente em suas trajetórias lineares. Adicionaremos então um parâmetro  $\theta \in [0, \pi]$  que indica o ângulo a ser percorrido até que o evento aconteça simulando essa trajetória circular, veja a figura 3.15.



**Figura 3.15:** Exemplo de colisão entre três pontos.

Como esse novo critério de desempate somos capazes de simular essa trajetória não degenerada e os eventos ocorrerão em uma ordem apropriada, veja um exemplo na figura 3.16.



**Figura 3.16:** Exemplo de parâmetro de evento horizontal ocorrendo entre  $p$  e  $q$ , com a trajetória simulada.

Existe ainda um outro detalhe de implementação que vale ser mencionado: quando temos vários pontos se colidindo no mesmo instante  $t'$  diversos eventos serão acionados em uma determinada ordem e, durante as alterações realizadas nos eventos, são realizadas checagens de predecessor e sucessor em uma determinada ordem. Porém, se os dois pontos se encontram na exata mesma posição, não é possível determinar quem é o sucessor e quem é o predecessor considerando apenas a posição dos pontos.

Um critério que pode ser utilizado para resolver esse problema é o seguinte: se os dois pontos possuem a mesma coordenada é certo que existiu, existe ou existirá um certificado na fila relacionado à troca da ordem entre eles em uma determinada direção. Então, comparamos esse certificado com o certificado atual da fila para verificar se ele já foi processado ou ainda virá a ser processado. Com isso, podemos determinar se queremos saber da situação em um instante  $t' - \epsilon$  ou  $t' + \epsilon$ , que pode ser computada facilmente considerando apenas o vetor velocidade dos pontos.

