1. (1) 두 개의 주사위를 던지는 확률실험에서 두 주사위 눈의 합이 소수가 될 확률을 구하여라.

(2) 두 눈의 합이 소수일 때, 그 합이 3일 확률을 구하여라.

(3) 두 개의 주사위를 던져 두 눈의 합이 소수가 나오는 시행을 계속하는 실험을 할 때, 소수 5에서 이 실험이 정지될 확률을 구하여라.

(sol)

(1) $\Omega=\{(i,j)\,|\,1\le i\le 6,\ 1\le j\le 6\}$

$A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(5,6),(6,5)\}$

$(\therefore)\ P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

(2) $B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{4}{15}$

(3) n번 시행에서 실험이 정지되고, n번째 시행에서 두 눈이 합이 소수 5일 확률 : $\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{7}{12}\right)^{n-1}$

$$(\therefore)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{7}{12}\right)^{n-1}=\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{7}{12}}=\frac{4}{15}$$

2. 세 사건 A, B, C가 (상호) 독립일 때, 다음의 사건들도 각각 독립임을 증명하여라.

(1) A^C과 $B \cap C$

(2) A^C과 $B \cap C^C$

(3) B와 $A \cup C$

(4) A^C, B, C^C

(sol) ※ A와 B가 독립이면, A와 B^C, B와 A^C, A^C와 B^C는 독립이다.

(1) $P(A^C \cap (B \cap C)) = P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(B \cap C) - P(A)P(B \cap C)$

$= \{1 - P(A)\}P(B \cap C) = P(A^C)P(B \cap C)$ ※ B^C와 $A \cap C$, C^C와 $A \cap B$도 독립이다.

(2) $P(A^C \cap (B \cap C^C)) = P(B \cap C^C) - P(A \cap B \cap C^C)$

$= P(B \cap C^C) - P(A \cap B)P(C^C)$

$= P(B \cap C^C) - P(A)P(B)P(C^C)$

$= P(B \cap C^C) - P(A)P(B \cap C^C)$

$= \{1 - P(A)\}P(B \cap C^C) = P(A^C)P(B \cap C^C)$

(3) $P(B \cap (A \cup C)) = P((B \cap A) \cup (B \cap C))$

$= P(B \cap A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(B)P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)$

$= P(B)\{P(A) + P(C) - P(A)P(C)\} = P(B)P(A \cup C)$

(4) $P(A^C \cap B \cap C^C) = P(B \cap (A^C \cap C^C))$

$= P(A^C \cap C^C) - P(B^C \cap A^C \cap C^C)$

$= \{1 - P(A \cup C)\} - \{1 - P(A \cup B \cup C)\}$

$= P(A \cup B \cup C) - P(A \cup C)$

$= \{P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)\}$

$- \{P(A) + P(C) - P(A \cap C)\}$

$= P(B) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$= P(B)\{1 - P(A) - P(C) + P(A)P(C)\}$

$= P(B)\{1 - P(A \cup C)\}$

$= P(B)P(A^C \cap C^C)$

$= P(B)P(A^C)P(C^C)$

3. 한 상자에 3장의 카드가 있다. 하나의 카드는 양면이 모두 빨간색이고, 두 번째 카드는 양면이 모두 초록색이며, 세 번째 카드는 한 면은 빨간색이고 다른 면은 초록색이다.

이 상자에서 꺼낸 한 장의 카드가 한 면이 빨간색일 때, 다른 면도 빨간색일 확률을 구하여라.

(sol)

$A_1=\{$양면이 빨간색인 카드$\}$

$A_2=\{$양면이 초록색인 카드$\}$

$A_3=\{$한 면은 빨간색, 다른 면은 초록색인 카드$\}$

$B=\{$보이는 면이 빨간색$\}$

$$P(A_1|B)=\frac{P(B\cap A_1)}{P(B)}=\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(B|A_i)P(A_i)}=\frac{1\times\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}$$

$(\because)$ $1\le i\le 3$일 때, $P(B|A_1)=1$, $P(B|A_2)=0$, $P(B|A_3)=\frac{1}{2}$이고 $P(A_i)=\frac{1}{3}$이다.

4. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f_X(x)=\begin{cases} cx & , 0\le x<1 \\ c & , 1\le x<2 \\ c(3-x) & , 2\le x\le 3 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$ 일 때,

(1) 상수 c를 구하여라.

(2) X의 누적분포함수 F_X를 구하고, 그 개형을 그려라.

(sol)

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_0^1 cx\,dx+\int_1^2 c\,dx+\int_2^3 c(3-x)\,dx$

$=c\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+c\left[x\right]_1^2+c\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_2^3$

$=c\left[\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right]=2c=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{2}$

(2) $F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

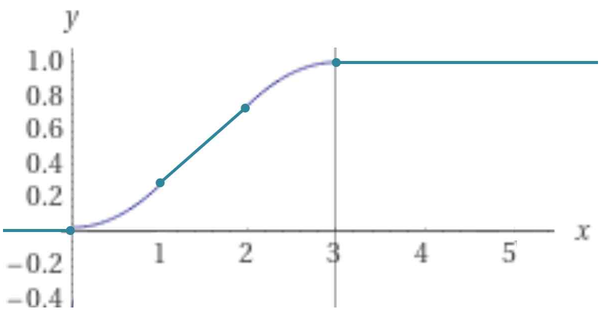
$x<0$: $F_X(x)=0$

$0\le x<1$: $F_X(x)=\int_0^x \frac{x}{2}\,dt=\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^x=\frac{x^2}{4}$

$1\le x<2$: $F_X(x)=\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx+\int_1^x \frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{4}+\left[\frac{t}{2}\right]_1^x=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$2\le x<3$: $F_X(x)=\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx+\int_1^2 \frac{1}{2}\,dt+\int_1^x \frac{3-t}{2}\,dt=\frac{3}{4}+\left[\frac{3}{2}t-\frac{t^2}{4}\right]_2^x=-\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}$

$x\ge 3$: $F_X(x)=1$



5. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f_X(x)=\begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 일 때,

$0<b<2$인 b에 대하여 조건부확률 $P(X<b \mid X>\frac{b}{2})$을 구하여라.

(sol)

$$P(X<b \mid X>\frac{b}{2})=\frac{P(\frac{b}{2}<X<b)}{P(X>\frac{b}{2})}=\frac{7b^3}{64-b^3}$$

$$P(\frac{b}{2}<X<b)=\int_{\frac{b}{2}}^{b}\frac{3}{8}x^2\,dx=\left[\frac{1}{8}x^3\right]_{\frac{b}{2}}^{b}=\frac{b^3}{8}-\frac{b^3}{64}=\frac{7}{64}b^3$$

$$P(X>\frac{b}{2})=\int_{\frac{b}{2}}^{2}\frac{3}{8}x^2\,dx=\left[\frac{1}{8}x^3\right]_{\frac{b}{2}}^{2}=1-\frac{b^3}{64}=\frac{64-b^3}{64}$$

6. 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f_X(x)=\begin{cases} 6x(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$ 일 때,

(1) $f_X(x)$가 실제로 확률밀도함수인지를 확인하여라.

(2) $P(X<c)=2P(X>c)$를 만족하는 상수 c를 구하여라.

(3) 조건부확률 $P(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})$을 구하여라.

(sol)

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^1 6x(1-x)\,dx = \left[3x^2 - 2x^3 \right]_0^1 = 1$

(2) $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 6t(1-t)\,dt = \left[3t^2 - 2t^3 \right]_0^1 = 3x^2 - 2x^3$

$P(X<c)=2P(X>c)$

$\Leftrightarrow F_X(c) = 2\{1 - F_X(c)\}$

$\Leftrightarrow 3c^2 - 2c^3 = 2\{1 - (3c^2 - 2c^3)\}$

$\Leftrightarrow 6c^3 - 9c^2 + 2 = 0 \Rightarrow c_1 \approx -0.41699,\ c_2 \approx 0.61304,\ c_3 \approx 1.3040$

$(\therefore)\ c \approx 0.61304$

(3) $P(X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}) = \dfrac{P(\frac{1}{3} < X \le \frac{1}{2})}{P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3})} = \dfrac{\frac{13}{54}}{\frac{13}{27}} = \frac{1}{2}$

$P(\frac{1}{3} < X \le \frac{1}{2}) = F_X(\frac{1}{2}) - F_X(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{7}{27} = \frac{13}{54}$

$P(\frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}) = F_X(\frac{2}{3}) - F_X(\frac{1}{3}) = \frac{20}{27} - \frac{7}{27} = \frac{13}{27}$

7. 두 개의 주사위를 던지는 확률실험에서 나온 눈의 개수가 크거나 같은 값을 확률변수 X라 할 때,

(1) X의 확률질량함수와 누적분포함수를 구하여라.

(2) X의 기댓값 $E[X]$와 분산 $Var[X]$을 구하여라.

(sol)

X	1	2	3	4	5	6	합
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

(1) $f_X(x)=\begin{cases} \frac{2x-1}{36} & , x=1,2,3,4,5,6 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$

$$F_X(x)=\sum_{r\le x} f_X(r)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{36}=\begin{cases} 0 & , x<1 \\ \frac{n^2}{36} & , n\le x<n+1,\ n=1,2,3,4,5 \\ 1 & , x\ge 6 \end{cases}$$

(2) $E[X]=\sum_{x\in R_X} x f_X(x)=\sum_{x=1}^{6} x\cdot\frac{2x-1}{36}=\frac{1}{36}\left(2\frac{6\cdot7\cdot13}{6}-\frac{6\cdot7}{2}\right)=\frac{161}{36}$

$$E[X^2]=\sum_{x\in R_X} x^2 f_X(x)=\sum_{x=1}^{6} x^2\cdot\frac{2x-1}{36}=\frac{1}{36}\left(2\left[\frac{6\cdot7}{2}\right]^2-\frac{6\cdot7\cdot13}{6}\right)=\frac{791}{36}$$

$$Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{791}{36}-\left(\frac{161}{36}\right)^2=\frac{2555}{36^2}$$

8. $R_X=\{0,1,2,3,4\}$를 치역공간으로 갖는 이산확률변수 X의 확률질량함수가 $f_X(x)=c(5-x)$일 때, 누적확률분포함수 $F_X(x)$를 구하고, X의 기댓값 $E[X]$와 분산 $Var[X]$을 구하여라.

(sol)

$$\sum_{x\in R_X} f_X(x)=\sum_{x\in R_X} c(5-x)=c(5+4+3+2+1)=15c=1 \;\Rightarrow\; c=\frac{1}{15}$$

$$E[X]=\sum_{x\in R_X} x\cdot\frac{1}{15}(5-x)=\frac{1}{15}(0\cdot5+1\cdot4+2\cdot3+3\cdot2+4\cdot1)=\frac{4}{3}$$

$$E[X^2]=\sum_{x\in R_X} x^2\cdot\frac{1}{15}(5-x)=\frac{1}{15}(0\cdot5+1^2\cdot4+2^2\cdot3+3^2\cdot2+4^2\cdot1)=\frac{10}{3}$$

$$(\therefore)\;\; Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{14}{9}$$

9. (1) 하나의 동전을 앞면이 나올 때까지 던지고, 그 때까지 시행횟수를 X라 할 때, X의 확률분포를 구하여라.

(2) X의 기댓값 $E[X]$와 분산 $Var[X]$를 구하여라.

(3) X의 적률생성함수 $m_X(t)$를 구하여라.

(sol)

(1) n번째 처음으로 앞면이 나올 확률 : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$

$$f_X(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}, & x=1,2,\cdots \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(2) $$E[X]=\sum_{x=1}^{\infty}x\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}E[X]=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}E[X]=1\cdot\frac{1}{2}+\sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=1 \quad (\therefore)\ E[X]=2$$

$$E[X^2]=\sum_{x=1}^{\infty}x^2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$=1^2\cdot\frac{1}{2}+2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}E[X^2]=1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+2^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}E[X^2]=1^2\cdot\frac{1}{2}+\sum_{x=2}^{\infty}\{x^2-(x-1)\}^2\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3 \quad (\therefore)\ E[X^2]=6$$

$$=\sum_{x=2}^{\infty}(2x-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$$

$$=2\sum_{x=2}^{\infty}x\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-\sum_{x=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=2\left(2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$(\therefore)\ Var[X]=E[X^2]-(E[X])^2=6-2^2=2$

(3) $$m_X(t)=E[e^{tX}]=\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}=\frac{\frac{e^t}{2}}{1-\frac{e^t}{2}}=\frac{e^t}{2-e^t}$$

$$m_X{}'(t)=\frac{e^t(2-e^t)+e^t\cdot e^t}{(2-e^t)^2}=\frac{2e^t}{(2-e^t)^2} \Rightarrow m_X{}'(0)=2$$

$$m_X{}''(t)=\frac{2e^t(2-e^t)^2-2e^t\cdot[-2(2-e^t)]}{(2-e^t)^4}=\frac{2e^{2t}+4e^t}{(2-e^t)^3} \Rightarrow m_X{}''(0)=6$$

$(\therefore)\ Var[X]=m_X{}''(0)-m_X{}'(0)=6-2^2=2$

10. X의 평균이 $E[X]=4$이고, 분산이 $Var[X]=9$인 연속확률변수일 때,

(1) $P(-2<X<10)$

(2) $P(|X-4|\geq 6)$

의 상한값 또는 하한값을 구하여라.

(sol)

(1) $P(-2<X<10)=P(-6<X-4<6)=P(|X-4|\leq 2\cdot 3)=P(|X-\mu|\leq 2\cdot\sigma)\geq 1-\dfrac{1}{2^2}=0.75$

(2) $P(|X-4|\geq 6)=1-P(|X-4|\leq 6)\leq 1-0.75=0.25$