3장 결합확률분포

§3.1. 결합확률분포

Definition

확률변수 X와 Y가 표본공간 Ω (또는 확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) 위에서 정의된 두 확률 변수 일 때,

$$(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$
$$\omega \mapsto (x, y)$$

를 **2차원 확률변수**(2-dimensional random variables)라 하고, 집합

$$R_{X \times Y} = \{ (x, y) \mid X(\omega) = x,\ Y(\omega) = y,\ \omega \in \Omega \}$$

을 (X, Y)의 **치역공간**이라 한다.

참고 치역공간 $R_{X \times Y}$이 유한집합이거나 가산무한집합이면, (X, Y)를 2차원 이산확률변수라 한다.

Example

한 개의 동전을 3번 던지는 확률실험에서 확률변수 X를 '앞면의 개수', 확률변수 Y를 '뒷면의 개수'라 하자.

(1) 확률변수 X, Y의 치역공간 R_X, R_Y을 각각 구하여라.

(2) $R_X \times R_Y$를 구하여라.

(3) 2차원 확률변수 (X, Y)의 치역공간 $R_{X \times Y}$를 구하여라.

Example

한 주머니에 흰 공, 검은 공, 빨간 공이 각각 3개, 2개, 3개씩 들어있다. 이 주머니에서 동시에 2개의 공을 임의로 꺼낼 때, 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 X, Y라 하자.

(1) 확률변수 X, Y의 치역공간 R_X, R_Y을 각각 구하여라.

(2) $R_X \times R_Y$를 구하여라.

(3) 2차원 확률변수 (X, Y)의 치역공간 $R_{X \times Y}$를 구하여라.

Definition

(X, Y)가 Ω위에서 정의된 2차원 확률변수일 때, 다음과 같이 정의된 이변수함수 $F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 를 (X, Y)의 **결합누적분포함수**(joint distribution function)라 한다.

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= P(X \le x,\ Y \le y) \\ &= P(\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \le x,\ Y(\omega) \le y \}) \end{aligned}$$

Definition

(X, Y)가 Ω위에서 정의된 2차원 이산확률변수일 때, 다음과 같이 정의된 이변수함수 $f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 를 (X, Y)의 **결합확률질량함수**(joint probability mass function)라 한다.

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= P(X = x,\ Y = y) \\ &= P(\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) = x,\ Y(\omega) = y \}) \end{aligned}$$

Theorem

결합확률질량함수 $f_{X,Y}(x, y)$는 다음 성질을 만족한다.

(1) 모든 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여, $f_{X,Y}(x, y) \ge 0$

(2) $\displaystyle\sum_{(x,y) \in R_{X \times Y}} f_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} f_{X,Y}(x, y) = 1$

(3) $\displaystyle P(X \le x,\ Y \le y) = \sum_{u \le x} \sum_{v \le y} f_{X,Y}(u, v)$

Example

한 주머니에 흰 공, 검은 공, 빨간 공이 각각 3개, 2개, 3개씩 들어있다. 이 주머니에서 동시에 2개의 공을 임의로 꺼낼 때, 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 X, Y라 하자.

(1) 확률변수 X와 Y의 확률질량함수를 각각 구하여라.

(2) (X, Y)의 결합확률질량함수 $f_{X,Y}(x, y)$를 구하여라.

(3) $f_X(1)$, $f_Y(1)$와 $f_{X,Y}(1, 1)$을 구하여라.

Example

한 개의 동전을 3번 던지는 확률실험에서 확률변수 X를 '앞면의 개수', 확률변수 Y를 '뒷면의 개수'라 할 때, $P(X \le 1, Y \le 3)$과 $P(X \le 1, Y \le 1)$을 구하여라.

Example 1

공정한 주사위 두 개를 던져서 나온 두 주사위 눈의 개수에서, 작거나 같은 값을 확률변수 X, 크거나 같은 값을 확률변수 Y라 하자.

(1) (X, Y)의 치역공간 $R_{X\times Y}$를 구하여라.

(2) (X, Y)의 결합확률질량함수 $f_{X,Y}(x,y)$를 구하여라.

(3) $P(X\geq 4, Y\geq 4)$를 구하여라.

Definition

(X, Y)가 Ω 위에서 정의된 2차원 이산 확률변수일 때, X, Y의 확률질량함수 $f_X(x)$, $f_Y(y)$를 각각 X, Y의 **주변확률질량함수**(marginal probability mass function)라 한다.

Theorem

2차원 이산확률변수 (X, Y)의 결합확률질량함수 $f_{X,Y}$와 결합누적분포함수 $F_{X,Y}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $f_X(x)=\sum_{y\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$

(2) $f_Y(y)=\sum_{x\in\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)$

(3) $F_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty)=\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$

(4) $F_Y(y)=F_{X,Y}(\infty,y)=\lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y)$

(proof)

Example

[예제1]에서 X와 Y의 결합확률이 다음 표와 같다.
X, Y의 주변확률질량함수 $f_X(x)$, $f_Y(x)$를 구하여라.

X \ Y	1	2	3	4	5	6	합
1							
2							
3							
4							
5							
6							
합							

Example 2

두 이산확률변수 X와 Y의 결합확률이 다음 표와 같다.

(1) X와 Y의 주변확률질량함수를 구하여라.

(2) 확률 $P(X\leq 2)$를 구하여라.

X \ Y	1	2	3	합
1	0.03	0.05	0.23	
2	0.05	0.13	0.15	
3	0.13	0.16	0.07	
합				

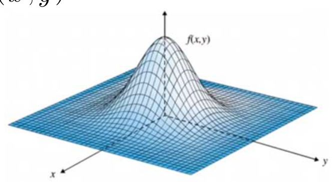
Definition

(X, Y)가 Ω 위에서 정의된 2차원 연속 확률변수일 때, 이변수함수 $f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 이

$$P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\,dt\,ds$$

을 만족하면, $f_{X,Y}$를 (X, Y)의 **결합확률밀도함수**(joint probability density function)라 한다.

참고 $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{X,Y}(x,y)$



Definition

결합확률밀도함수 $f_{X,Y}(x,y)$는 다음 성질을 만족한다.

(1) 모든 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$에 대하여, $f_{X,Y}(x,y) \ge 0$이다.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx = 1$

(3) $\displaystyle P(a_1 \le X \le a_2, b_1 \le Y \le b_2) = \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$

Example

정사각형 $[0,2] \times [0,2]$의 내부에서 임의로 한 점을 찍을 때, 그 점의 x-좌표와 y-좌표를 각각 X, Y로 표시한다. 이때 2차원 확률변수 (X, Y)의 결합확률밀도함수 $f_{X,Y}$를 결정하고, 이를 이용하여 확률 $P(0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1)$를 구하여라.

Example

X와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & 0 \le x < \infty 1,\ 0 \le y < \infty \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

로 주어질 때, 다음 확률을 구하여라.

(1) $P(X > 1, Y < 1)$

(2) $P(X < Y)$

Definition

(X, Y)가 Ω 위에서 정의된 2차원 연속확률변수일 때, X, Y의 확률밀도함수 $f_X(x)$, $f_Y(y)$를 각각 X, Y의 **주변확률밀도함수**(marginal probability density function)라 한다.

Theorem

2차원 연속확률변수 (X, Y)의 결합확률밀도함수 $f_{X,Y}$와 결합누적분포함수 $F_{X,Y}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\displaystyle f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

(2) $\displaystyle f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$

(3) $\displaystyle F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$

(4) $\displaystyle F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y)$

Example 3

연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \text{the others} \end{cases}$$

(1) 두 확률변수 X와 Y의 주변확률밀도함수를 구하여라.

(2) $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le Y \le 1)$, $P(0 \le X \le \frac{1}{2})$, $P(\frac{1}{2} \le Y \le 1)$을 구하여라.

Example 4

연속률변수 X, Y의 결합누적분포함수가

$$F_{X,Y}(x,y) = x^2(1 - e^{-2y}),\ 0 \le x \le 1,\ y > 0$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) X와 Y의 결합확률밀도함수

(2) X와 Y의 주변확률밀도함수

(3) 확률 $P(0 < X \le 0.5, 0 < Y \le 1)$

§3.2. 조건부 확률분포

Definition

2차원 이산확률변수 (X, Y)가 결합확률질량함수 $f_{X,Y}$와 주변확률질량함수 $f_X(x)$, $f_Y(y)$를 갖는다고 하자.

(1) $Y=y$일 때, $X=x$의 조건부확률을 나타내는 함수

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=P(X=x\,|\,Y=y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (\text{단, } f_Y(y)>0)$$

를 $Y=y$에 대한 X의 **조건부 확률질량함수**(conditional probability mass function)라 한다.

(2) $X=x$일 때, $Y=y$의 조건부확률을 나타내는 함수

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=P(Y=y\,|\,X=x) = \quad (\text{단, } f_X(x)>0)$$

를 $X=x$에 대한 Y의 **조건부 확률질량함수**(conditional probability mass function)라 한다.

참고 $A=\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=x\}$, $B=\{\omega\in\Omega\,|\,Y(\omega)=y\}$이면

$$A\cap B=\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=x, Y(\omega)=y\}$$

이므로,

$$P(A\,|\,B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)}=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

이다.

Example 1

확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{21} & , x=1,2,\ y=1,2,3 \\ 0 & , \text{otherwise}\end{cases}$$

(1) Y의 주변확률질량함수를 구하여라.
(2) $Y=y$에 대한 X의 조건부확률질량함수를 구하여라.
(3) $Y=2$에 대한 X의 조건부확률질량함수를 구하여라.
(4) 조건부확률 $P(X=1\,|\,Y=2)$를 구하여라.

Example 2

이산확률변수 X와 Y의 결합확률이 다음 표와 같다.
(1) X와 Y의 주변확률질량함수를 구하여라.
(2) $Y=2$에 대한 X의 조건부확률질량함수를 구하여라.
(3) $Y=2$일 때, $X=1$ 또는 $X=3$의 확률을 구하여라.

X \ Y	1	2	3	4	$f_X(x)$
1	0.10	0.06	0.07	0.04	
2	0.05	0.07	0.11	0.10	
3	0.04	0.06	0.09	0.05	
4	0.02	0.04	0.03	0.07	
$f_Y(y)$					

Remark

(1) 주어진 $Y=y$에서,

① 모든 $x\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $f_{X|Y}(x\,|\,y)\geq 0$이다.

② $\displaystyle\sum_{x\in R_X} f_{X|Y}(x\,|\,y)=\sum_{x\in R_X}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_Y(y)}{f_Y(y)}=1$

(2) 주어진 $X=x$에서,

① 모든 $y\in\mathbb{R}$ 에 대하여 $f_{Y|X}(y\,|\,x)\geq 0$이다.

② $\displaystyle\sum_{y\in R_Y} f_{Y|X}(y\,|\,x)=\sum_{y\in R_Y}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}=\frac{f_X(x)}{f_X(x)}=1$

Definition

2차원 연속확률변수 (X, Y)가 결합확률밀도함수 $f_{X,Y}$와 주변확률밀도함수 $f_X(x)$, $f_Y(y)$를 갖는다고 하자.

(1) $Y=y$에 대한 X의 **조건부 확률밀도함수**(conditional probability density function)는 다음과 같이 정의된다.

$$f_{X|Y}(x\,|\,y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \quad (\text{단, } f_Y(y)>0)$$

(2) $X=x$에 대한 Y의 **조건부 확률밀도함수**(conditional probability density function)는 다음과 같이 정의된다.

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \quad (\text{단, } f_X(x)>0)$$

참고 $$P(x_1\leq X\leq x_2\,|\,Y=y)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx$$

$$P(y_1\leq Y\leq y_2\,|\,X=x)=\int_{y_1}^{y_2}\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}dy$$

Example

연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{X,Y}(x,y)=x^2+\frac{1}{3}xy,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) X와 Y의 주변확률밀도함수

(2) 조건부확률밀도함수 $f_{X|Y}(x|y)$와 $f_{Y|X}(y|x)$

(3) 조건부확률 $P(X\le\frac{1}{3}|Y=1)$

Definition

두 확률변수 X, Y에서 만약 모든 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$에 대하여

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

이면, X와 Y는 **독립**(independent)이라 한다.

참고 ① $f_{X|Y}(x|y)=f_X(x)\ \Rightarrow\ f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

② $f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)\ \Rightarrow\ f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

Example 3

연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{X,Y}(x,y)=xe^{-\frac{y}{2}},\ 0\le x\le 1,\ y\ge 0$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) X와 Y의 주변확률밀도함수

(2) $Y=y$인 조건아래서, X의 조건부 확률밀도함수

(3) X와 Y가 독립성

Example 4

확률변수 X, Y의 결합분포함수가 다음과 같을 때, 두 확률변수의 독립성을 조사하여라.

(1) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{12}, & x=1,2,\ y=1,2,\cdots,6\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

(2) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & (x,y)=(0,3),\ (3,0)\\ \frac{3}{8}, & (x,y)=(1,2),\ (2,1)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

(3) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}x+y, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

(4) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$

Theorem

임의의 두 확률변수 X와 Y에 대하여 다음은 동치이다.

(1) X와 Y가 독립이다.

(2) 임의의 실수 x와 y에 대하여

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

이다.

(3) $P(a<X\le b, c<Y\le d)=P(a<X\le b)P(c<Y\le d)$

(proof)

Example 5

한 달 동안 인접한 두 도시 A와 B의 교통사고 건수를 조사한 결과, 각각의 교통사고 건수 X와 Y는 다음 결합확률함수를 갖는다.

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{e^5}\frac{2^x3^y}{x!y!},\ x=0,1,2,\cdots;\ y=0,1,2,\cdots$$

(1) X와 Y의 주변확률질량함수를 구하여라.

(2) X와 Y의 독립성을 조사하여라.

(3) 두 도시의 교통사고 건수가 각각 1을 초과하지 못할 확률을 구하여라.

Definition

두 확률변수 X와 Y가 항등적인 확률분포를 갖는 경우, 즉 모든 실수 x에 대하여

$$f_X(x)=f_Y(x)$$

이면, X와 Y는 **항등분포**(identically distributed)를 이룬다고 한다.

만약 두 확률변수 X와 Y가 독립이고 항등적인 확률분포를 이루는 경우, 독립인 항등분포(independent identically distributed ; i.i.d.)를 이룬다고 한다.

Example 6

두 확률변수 X, Y의 결합분포함수가 다음과 같을 때, X와 Y는 독립인 항등분포 확률변수인지 보여라.

(1) $f_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)},\ x>0,\ y>0$

(2) $F_{X,Y}(x,y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}),\ x>0,\ y>0$

(3) $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & (x,y)=(0,3),\ (3,0)\\ \frac{3}{8}, & (x,y)=(1,2),\ (2,1)\\ 0, & \text{the others}\end{cases}$

§3.3. 결합분포에 대한 기댓값

Theorem

(1) 이산확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수를 $f_{X,Y}(x,y)$라 할 때, 확률변수 X에 대한 기댓값(평균)과 분산은

$$\mu_X = E[X] = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x f_{X,Y}(x,y)$$

$$\sigma_X{}^2 = Var[X] = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} (x-\mu_X)^2 f_{X,Y}(x,y)$$

이다.

(2) 연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수를 $f_{X,Y}(x,y)$라 할 때, 확률변수 X에 대한 기댓값(평균)과 분산은

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

$$\sigma_X{}^2 = Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_{X,Y}(x,y)\, dy dx$$

이다.

$(proof)$

Definition

(1) 이산확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수를 $f_{X,Y}(x,y)$라 할 때, X와 Y의 함수 $u(X,Y)$에 대한 기댓값은

$$E[u(X,Y)] = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} u(x,y) f_{X,Y}(x,y)$$

이다.

(2) 연속확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수를 $f_{X,Y}(x,y)$라 할 때, X와 Y의 함수 $u(X,Y)$에 대한 기댓값은

$$E[u(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dy\, dx$$

이다.

참고 **선형성**

상수 a, b와 확률변수 (X,Y)의 함수 $u(X,Y)$, $v(X,Y)$에 대하여 다음이 성립한다.

$$E[a u(X,Y) + b v(X,Y)] = aE[u(X,Y)] + bE[v(X,Y)]$$

Example 1

확률변수 X와 Y의 결합확률질량함수가 다음과 같다.

(1) $E[X]$, $E[Y]$를 구하여라.

(2) $E[X+Y]$를 구하여라.

(3) $E[XY]$를 구하여라.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0.13	0.08	0.11	0.17	0.49
1	0.06	0.14	0.16	0.15	
$f_Y(y)$					

Theorem

확률변수 X와 Y가 독립이면,

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

이다.

$(proof)$

Example 2

두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f_{X,Y}(x,y)=3e^{-x-3y},\ x>0,\ y>0$$

일 때, 다음을 구하고 $E[XY]=E[X]E[Y]$임을 보여라.

(1) 독립성 (2) $E[X]$ (3) $E[Y]$ (4) $E[XY]$

(sol)

Example 3

확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1+xy(x^2-y^2)}{4}, & -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

(1) X와 Y의 독립성을 확인하여라.

(2) $E[X]$, $E[Y]$ 그리고 $E[XY]$를 구하여라.

■ 두 확률변수 X와 Y의 종속관계를 나타내기 위한 척도

Definition 1

두 확률변수 X와 Y의 **공분산**(covariance)은 다음과 같이 정의한다.

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

참고 $\mathrm{Cov}(X,X)=Var[X]$

$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$

Theorem

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$

(2) X와 Y가 독립이면, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ 이다.

(3) 임의의 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$에 대하여,

$$\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\mathrm{Cov}(X,Y)$$

(4) $|\mathrm{Cov}(X,Y)|\le\sqrt{Var[X]}\sqrt{Var[Y]}$

(proof)

Theorem

(1) $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

(2) $Var[X-Y]=Var[X]+Var[Y]-2\mathrm{Cov}(X,Y)$

(3) X와 Y가 독립이면,

$$Var[X\pm Y]=Var[X]+Var[Y]$$

이다.

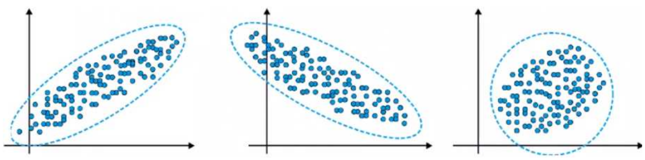
(proof)

Definition 2

두 확률변수 X, Y의 종속관계를 나타내기 위한 **상관계수** (correlation coefficient)를 다음과 같이 정의한다.

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

참고



양의 상관관계 음의 상관관계 무상관관계

(1) $\rho(X, Y) > 0$이면, 두 확률변수는 양의 상관관계가 있다고 한다.

(2) $\rho(X, Y) < 0$이면, 두 확률변수는 음의 상관관계가 있다고 한다.

(3) $\rho(X, Y) = 0$이면, 두 확률변수는 무상관이라 한다.

Theorem

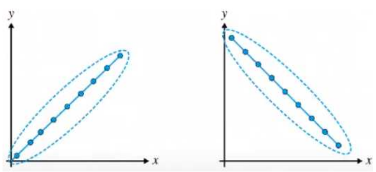
상관계수는 다음 성질을 갖는다.

(1) $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$

(2) $E[XY] = \mu_X \mu_Y + \rho(X, Y)\sigma_X \sigma_Y$

(3) $\rho(aX+b, cY+d) = \begin{cases} \rho(X, Y), & ac > 0 \\ -\rho(X, Y), & ac < 0 \end{cases}$

참고



완전 양의 상관관계 완전 음의 상관관계

(proof)

Example 4

X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 15x^2 y, & -1 \le x < y \le 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) X와 Y의 주변확률밀도함수를 구하여라.

(2) $\mathrm{Cov}(X, Y)$를 구하여라.

(3) $Var[X+Y]$를 구하여라.

Example 5

[예제 4]의 확률변수 X와 Y에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $\rho(X, Y)$

(2) $\rho(X+1, 1-2Y)$