Akar Fungsi

$f(x) = 0 \longrightarrow x = ?$

akar fungsi f(x)

Contoh: $x - \frac{1}{x} = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow$ x = 1 dan -1

$3x^2 = 6 - 7x \longrightarrow 3x^2 + 7x - 6 = (3x-2)(x+3) = 0$

$\downarrow$

x = 2/3 dan -3

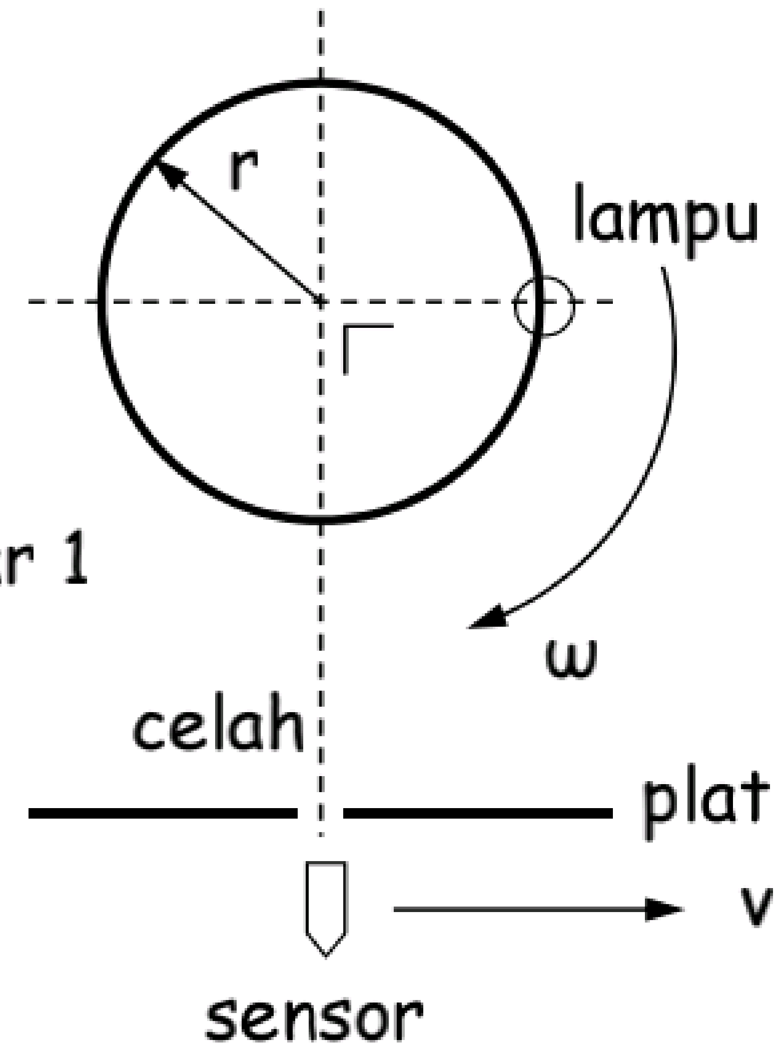
Pada dua contoh di atas akar fungsi dapat dicari secara analitik.

Secara umum, tidak selalu begitu keadaannya.

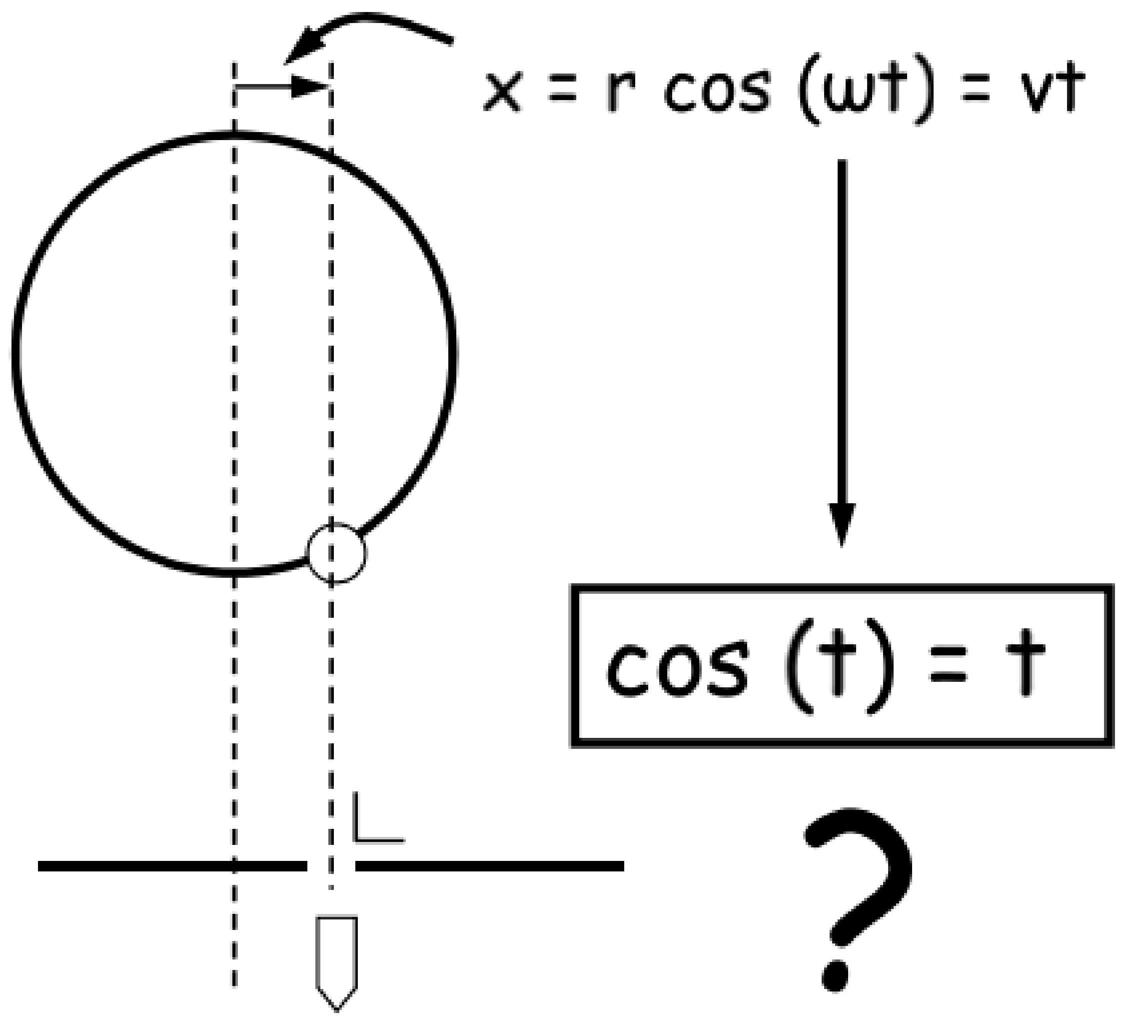
Problem:

Sebuah lampu dipasang di pinggir sebuah piringan berjari-jari 10 cm. Sebuah plat bercelah sempit diletakkan di dekat piringan itu. Tepat di belakang celah itu dipasang sebuah sensor cahaya yang menghadap tegak lurus ke celah. Piringan diputar konstan 1 rad/s dan plat beserta sensor digeser lurus konstan 10 cm/s. Saat ini posisi celah dan lampu seperti pada gambar 1. Kapan sensor cahaya menerima cahaya terbanyak?

Sensor menerima cahaya terbanyak pada saat posisi lampu dan celah membentuk garis tegak lurus terhadap plat, seperti pada gambar 2.

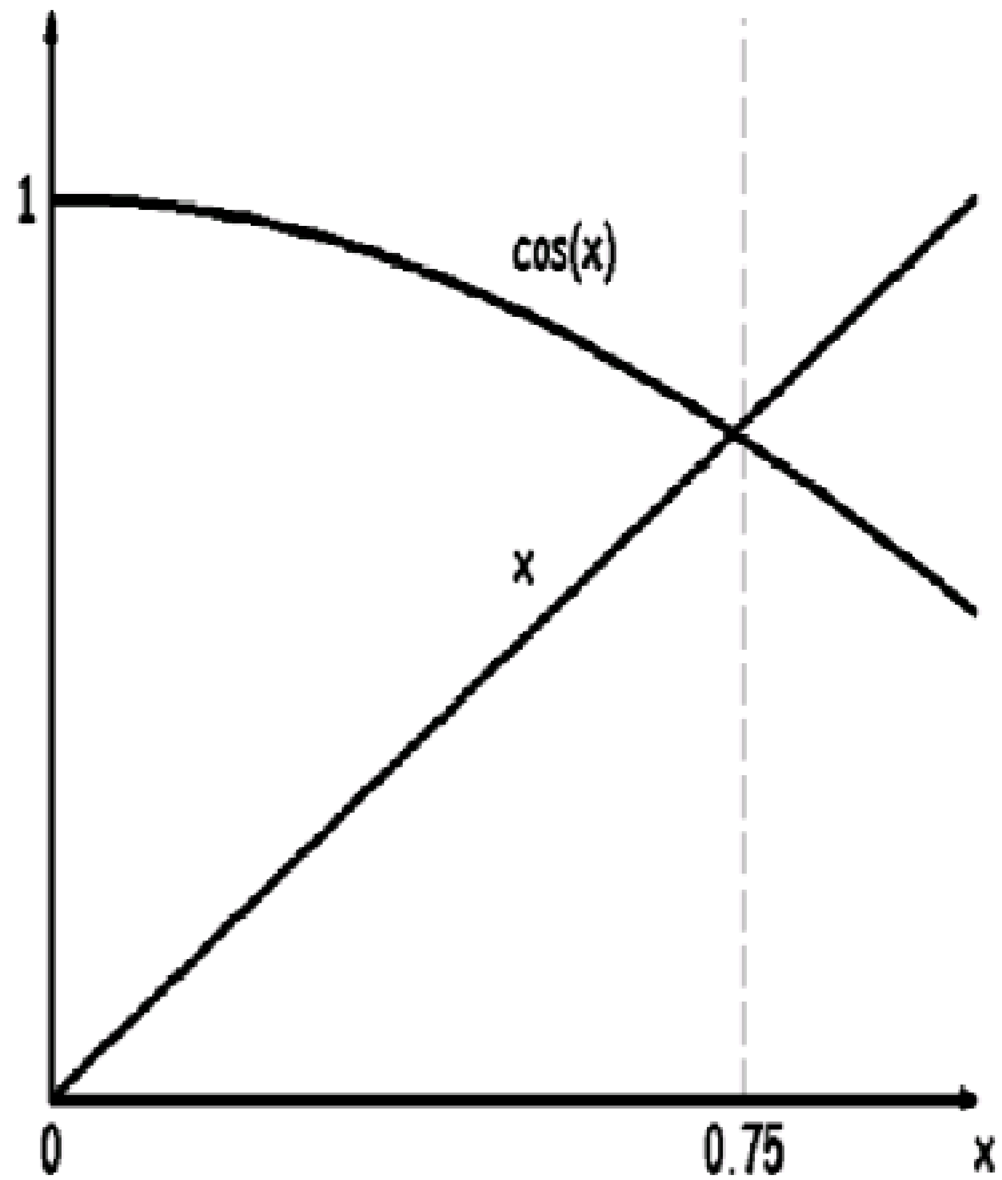


gambar 1



gambar 2

Plot cos(x) dan x:



Grafik ini menunjukkan bahwa cos(x) = x pada x sedikit kurang dari 0.75.

Bisakah lebih akurat lagi?

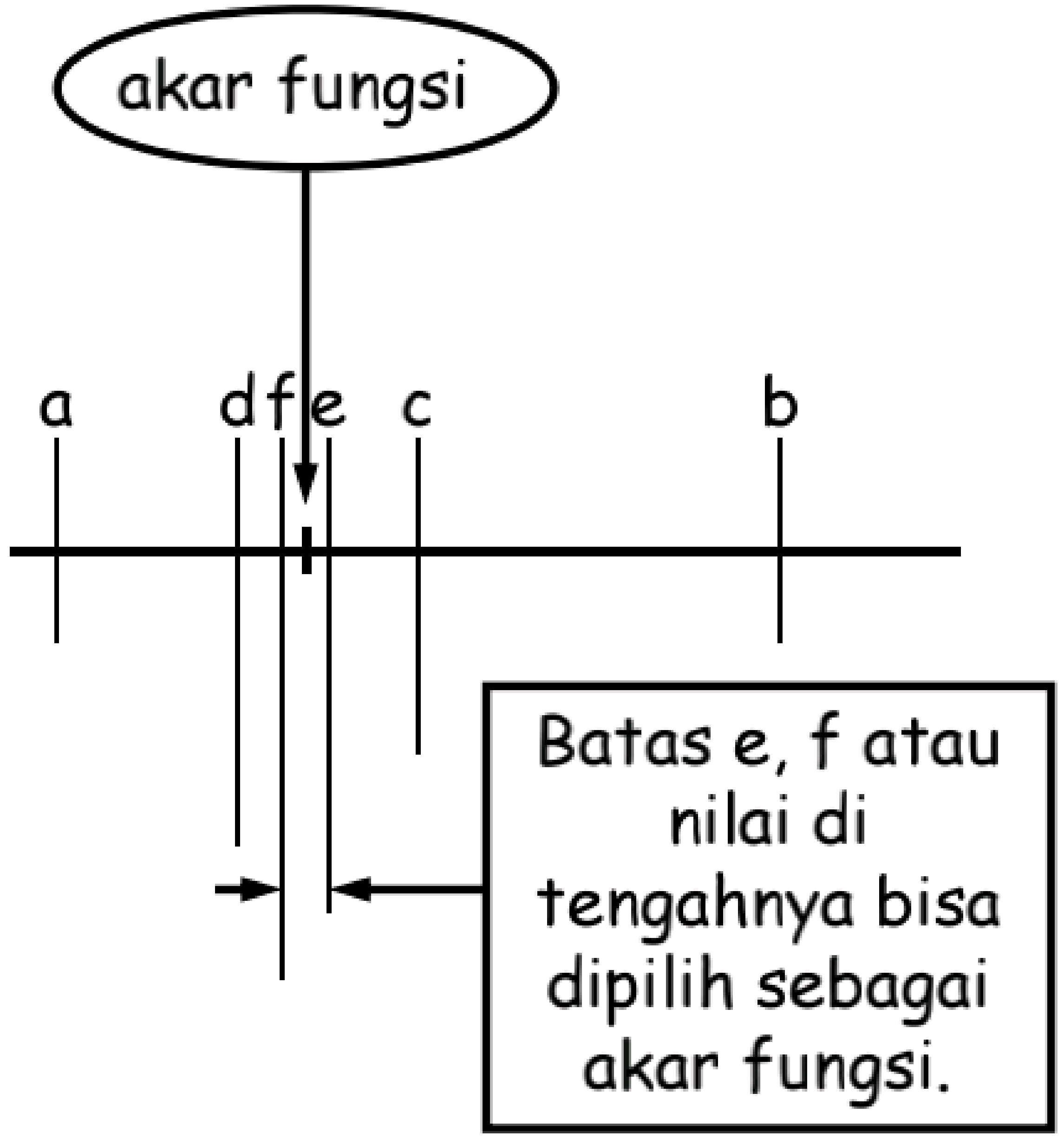
Cari secara numerik akar fungsi dari
f(x) = cos(x) - x

Bisection

Prinsip: Kurung akar fungsi di antara dua batas, lalu paruh batas itu terus menerus sampai batas itu sedemikian sempit dan dengan demikian lokasi akar fungsi diketahui dengan keakuratan tertentu.

Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi (bisa dengan cara memplot fungsi).
2. Tentukan batas awal yang mengurung akar fungsi.
3. Belah dua daerah berisi akar fungsi itu.
4. Tentukan daerah yang berisi akar fungsi.
5. Ulangi langkah 3 dan 4 sampai dianggap cukup.
6. Tentukan akar fungsi.

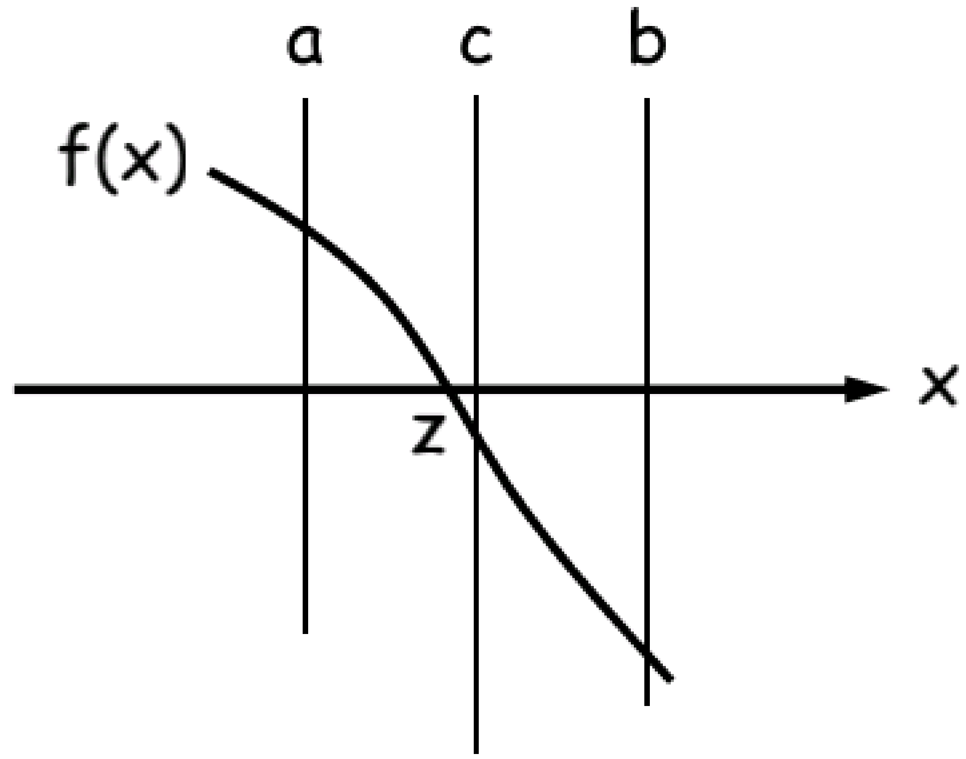


- Menentukan daerah yang berisi akar fungsi:

  Jika z merupakan akar fungsi, maka $f(x < z)$ dan $f(x > z)$ saling berbeda tanda.

  $f(a)*f(c)$ negatif, berarti di antara a & c ada akar fungsi.

  $f(b)*f(c)$ positif, berarti di antara b & c tidak ada akar fungsi



- Menentukan kapan proses pencarian akar fungsi berhenti:

  Proses pencarian akar fungsi dihentikan setelah keakuratan yang diinginkan dicapai, yang dapat diketahui dari kesalahan relatif semu.

$$\text{kesalahan relatif semu} = \left| \frac{\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}} \right|$$

Kesalahan

$$\text{kesalahan mutlak} = |\,\text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya}\,|$$

$$\text{kesalahan relatif} = \left| \frac{\text{perkiraan} - \text{nilai sebenarnya}}{\text{nilai sebenarnya}} \right|$$

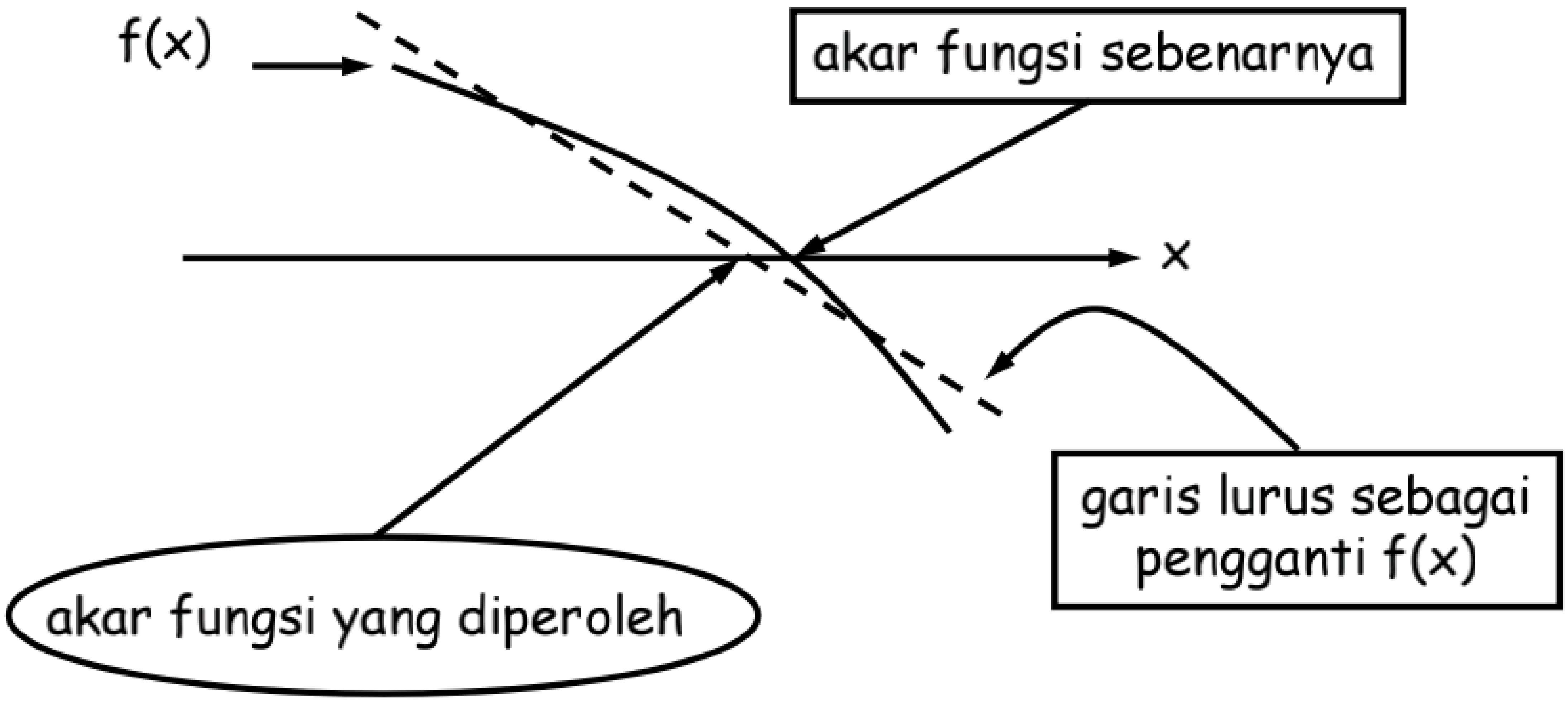
Dalam perhitungan numerik, nilai sebenarnya justru sering tidak diketahui, yang didapat hanya perkiraan terbaik. Karena perkiraan langkah berikut dianggap lebih akurat, yaitu lebih mendekati nilai sebenarnya, maka kesalahan yang dihitung yaitu:

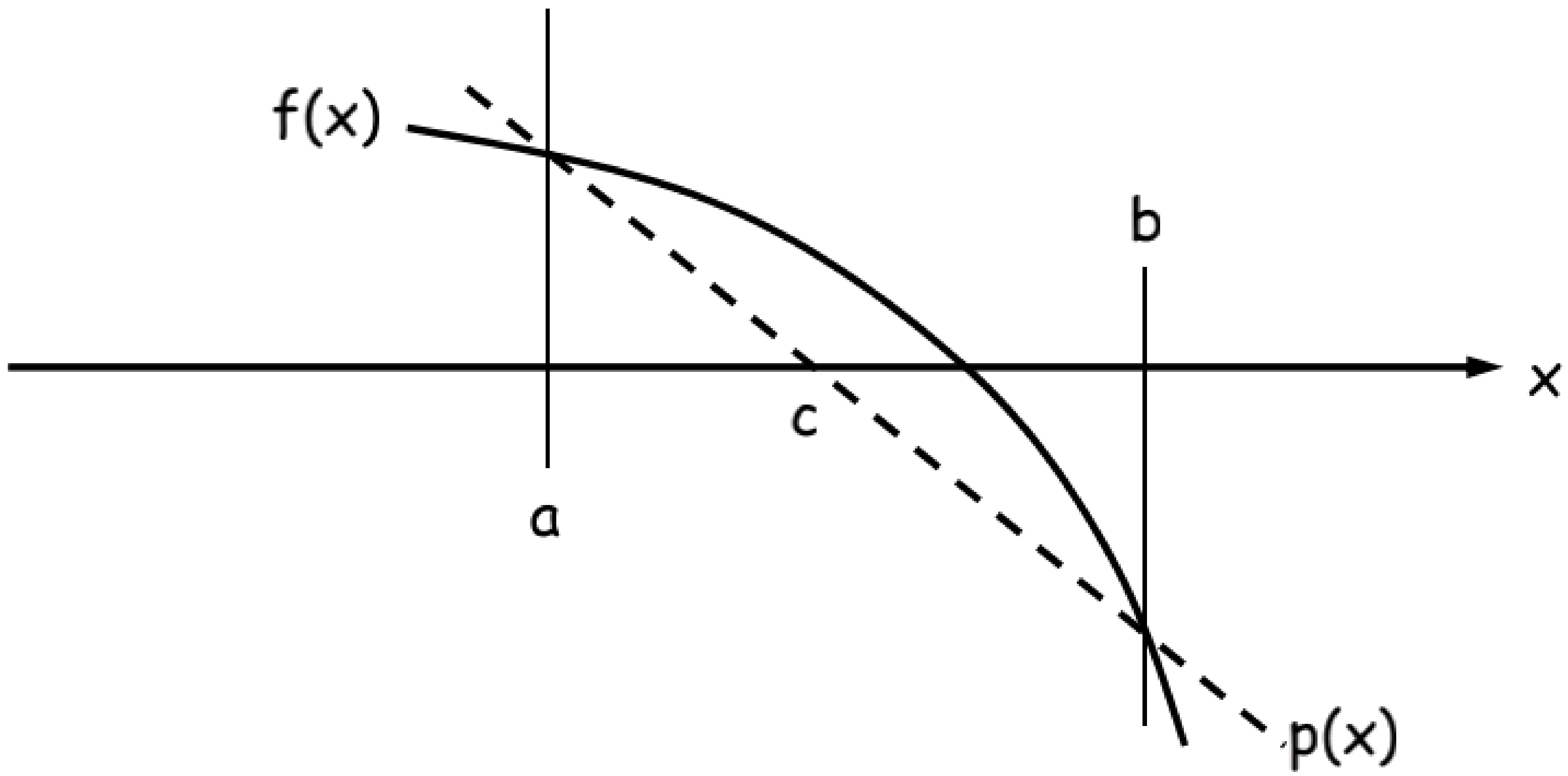
$$\text{kesalahan mutlak semu} = |\,\text{perkiraan sebelum} - \text{perkiraan berikut}\,|$$

$$\text{kesalahan relatif semu} = \left| \frac{\text{perkiraan sebelum - perkiraan berikut}}{\text{perkiraan berikut}} \right|$$

False Position

Prinsip: Di sekitar akar fungsi yang diperkirakan, anggap fungsi merupakan garis lurus. Titik tempat garis lurus itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi.



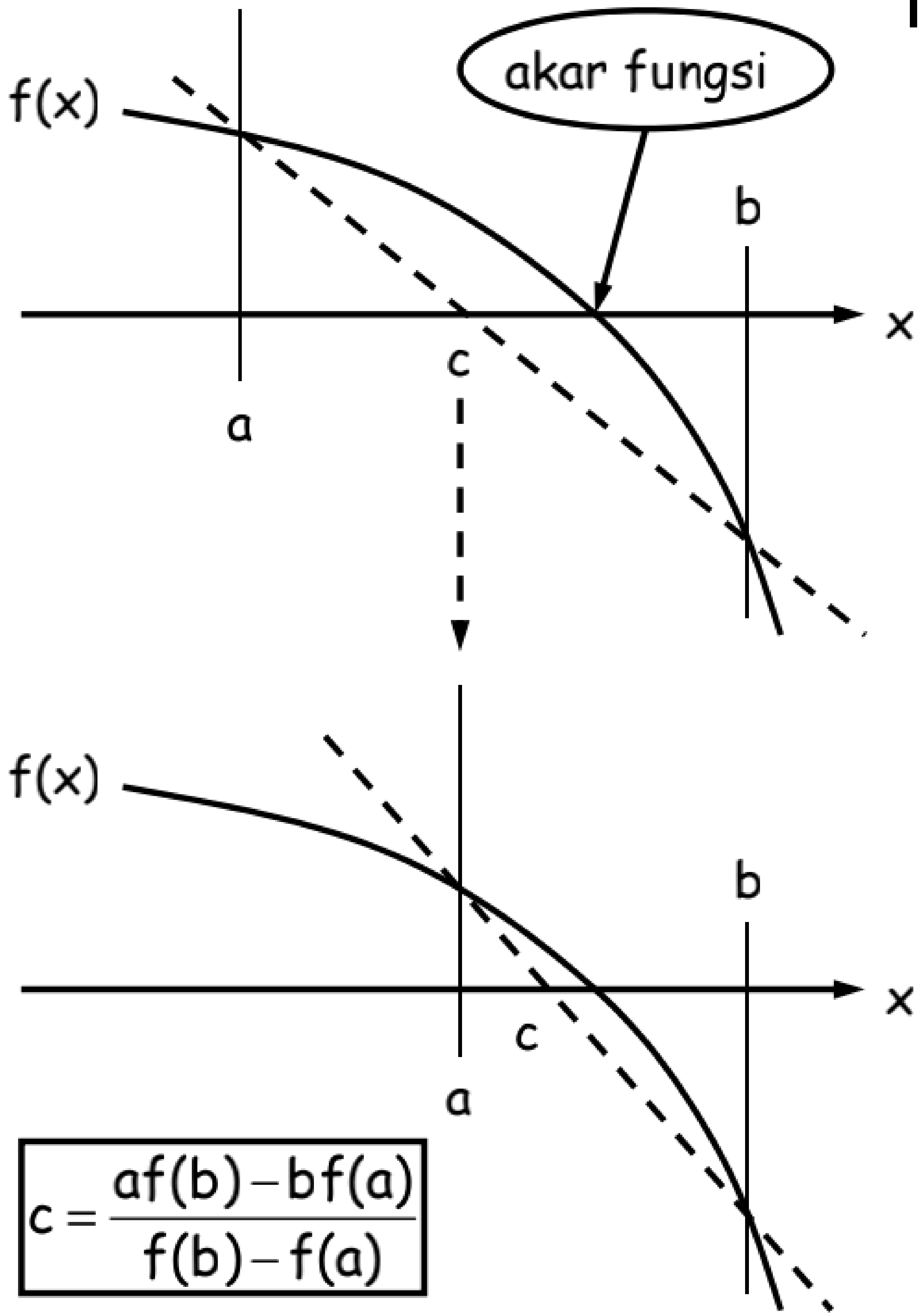


Diperoleh: $$p(x) = \left(\frac{x-b}{a-b}\right)f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)f(b)$$

$$p(c) = 0 \longrightarrow \boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi (bisa dengan cara memplot fungsi).
2. Tentukan batas awal yang mengurung akar fungsi.
3. Tarik garis lurus penghubung nilai fungsi pada kedua batas, lalu cari titik potongnya dengan garis nol.
4. Geser salah satu batas ke titik potong itu, sementara batas lain tidak berubah. Ulangi langkah 3.
5. Ulangi langkah 4 sampai dianggap cukup.
6. Titik potong garis nol dan garis lurus yang terakhir dinyatakan sebagai akar fungsi.

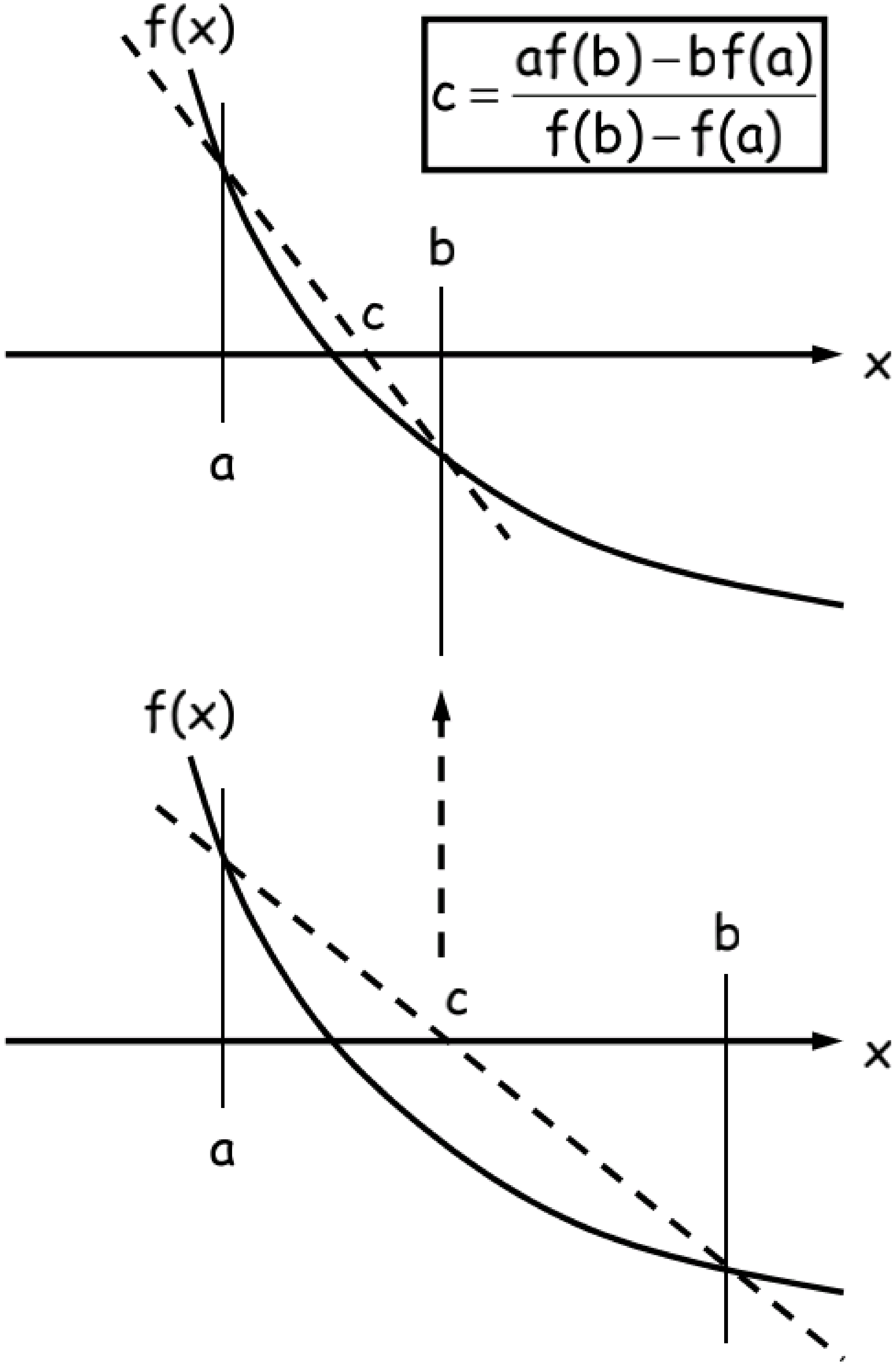


$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$

Metode false position juga menggunakan dua batas seperti metode bisection. Namun, berbeda dari metode bisection, pada metoda false position hanya satu batas yang berubah.

Pada contoh sebelum ini, batas a berubah sementara batas b tetap. Pada contoh berikut terjadi sebaliknya.

$$\boxed{c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}}$$



Menghitung akar fungsi dengan metode false position, menggunakan a dan b sebagai batas awal:

- jika batas a tetap, batas b berubah:

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{af(x_i) - x_i f(a)}{f(x_i) - f(a)} \qquad (i = 0,1,2,\ldots; \;\; x_0 = b)}$$

- jika batas b tetap, batas a berubah:

$$\boxed{x_{i+1} = \frac{bf(x_i) - x_i f(b)}{f(x_i) - f(b)} \qquad (i = 0,1,2,\ldots; \;\; x_0 = a)}$$

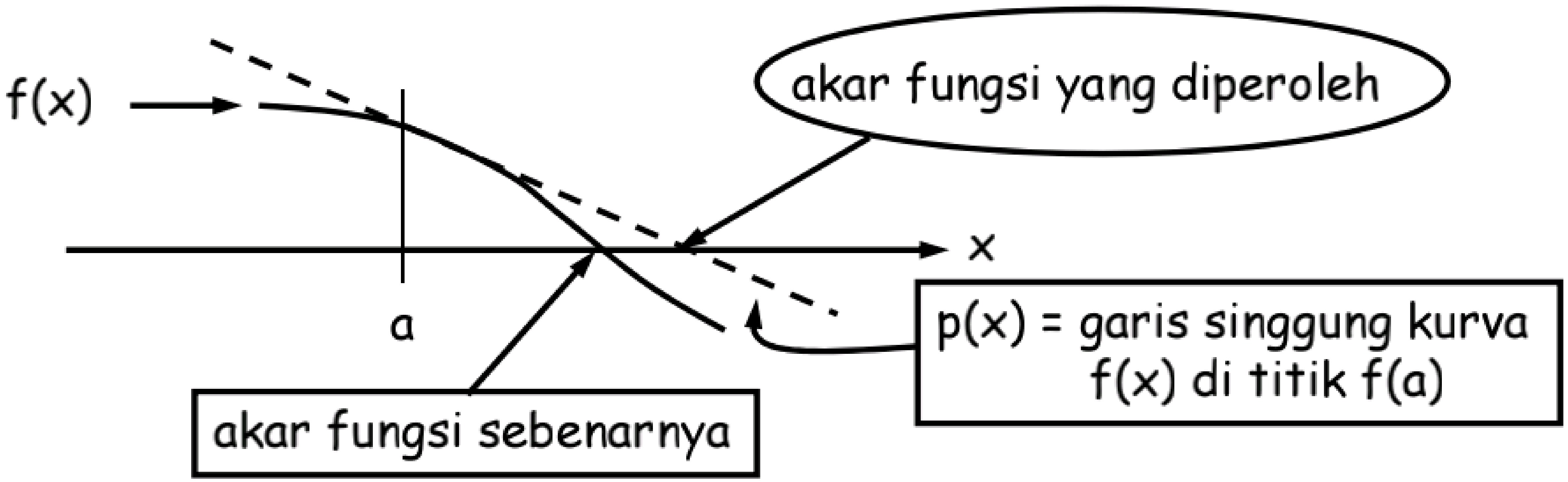
- kesalahan relatif semu:

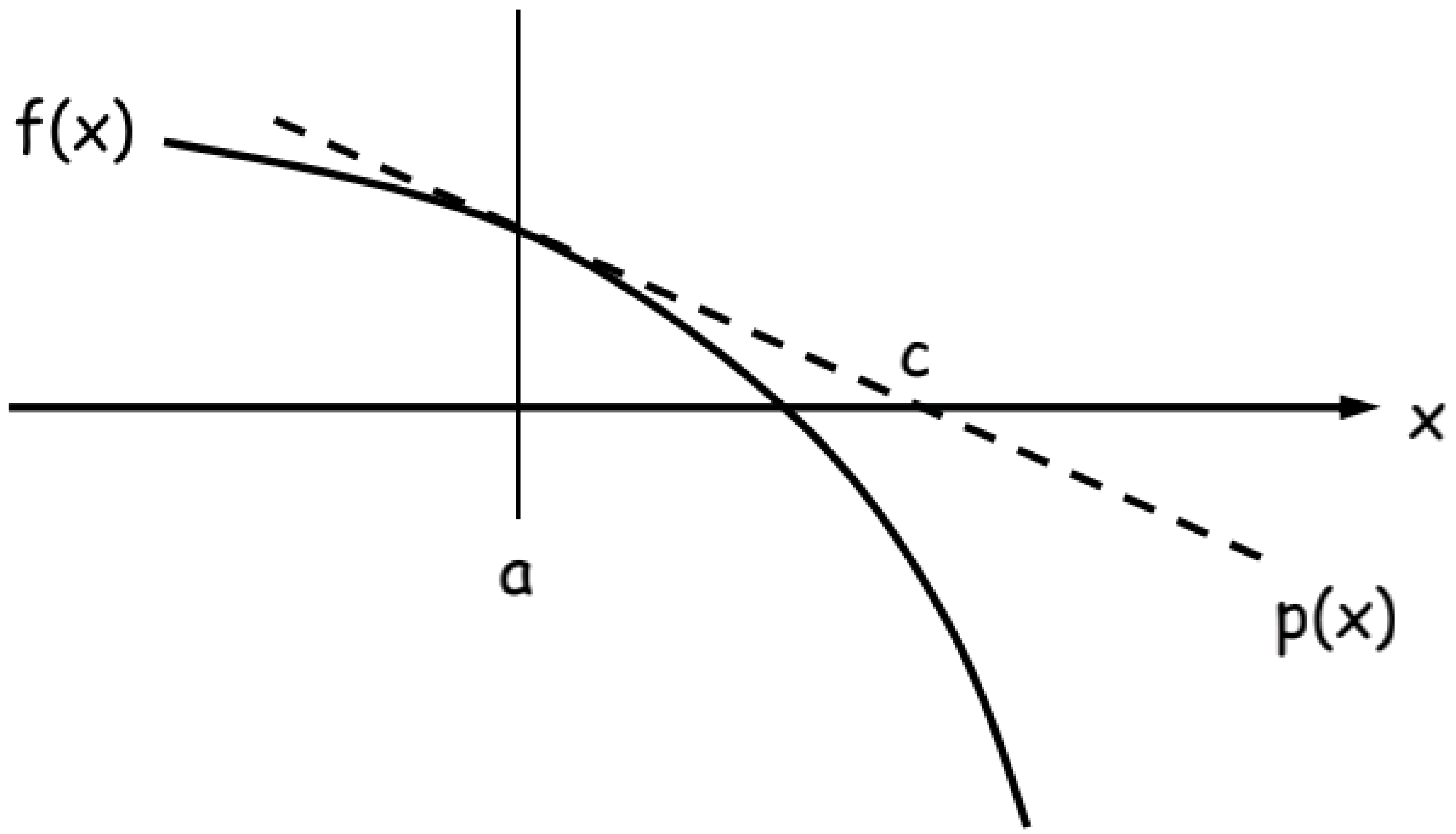
$$\boxed{\Delta_{rel} = \left| \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|}$$

Penghitungan dihentikan jika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan.

Newton-Raphson

Prinsip: Buat garis singgung kurva f(x) di titik di sekitar akar fungsi. Titik tempat garis singgung itu memotong garis nol ditentukan sebagai akar fungsi.





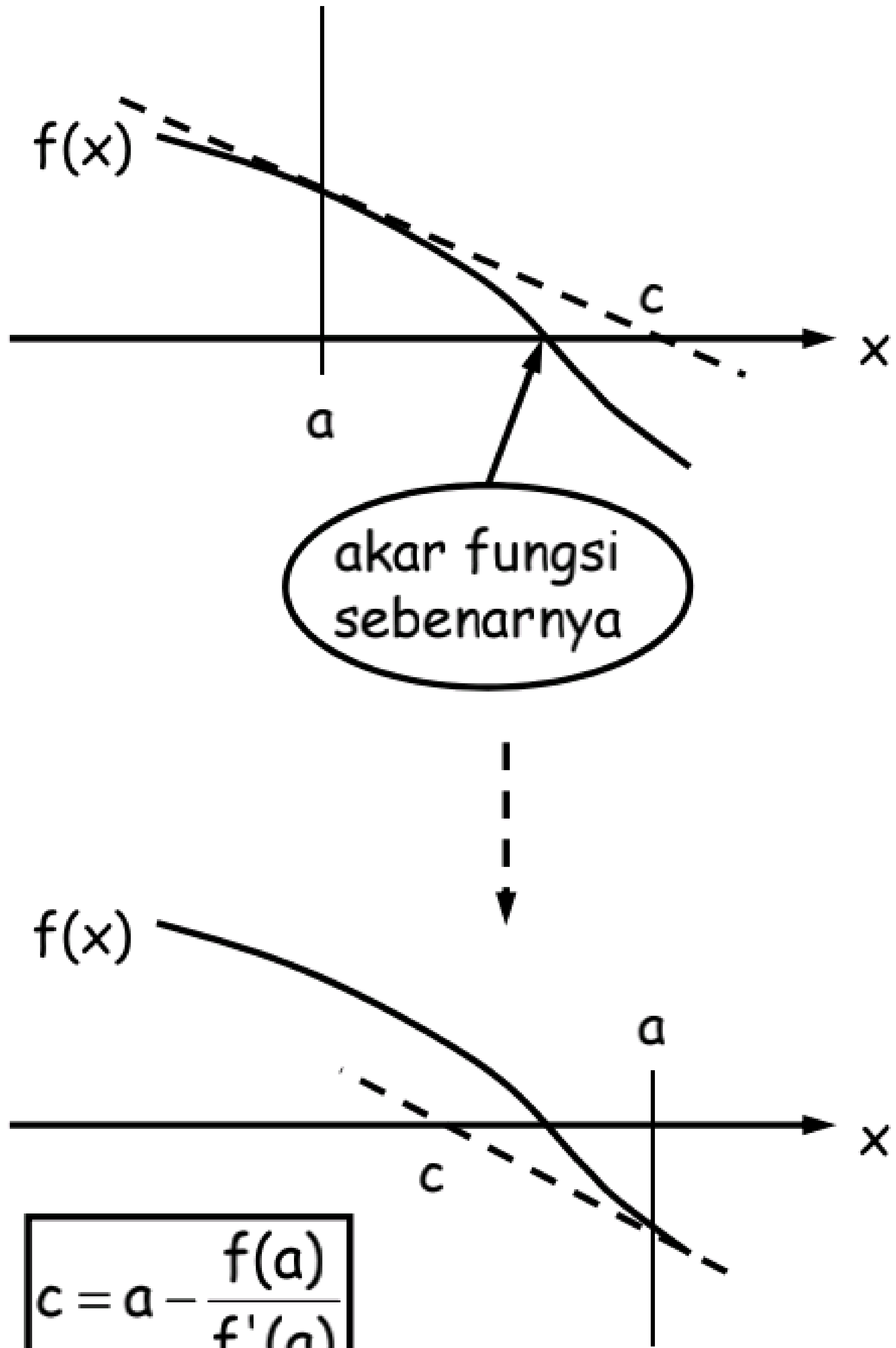
Diperoleh: $p(x) = f(a) + (x - a)f'(a)$

($f'(a)$ turunan pertama $f(x)$ pada $x = a$)

$$p(c) = 0 \longrightarrow \boxed{c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}}$$

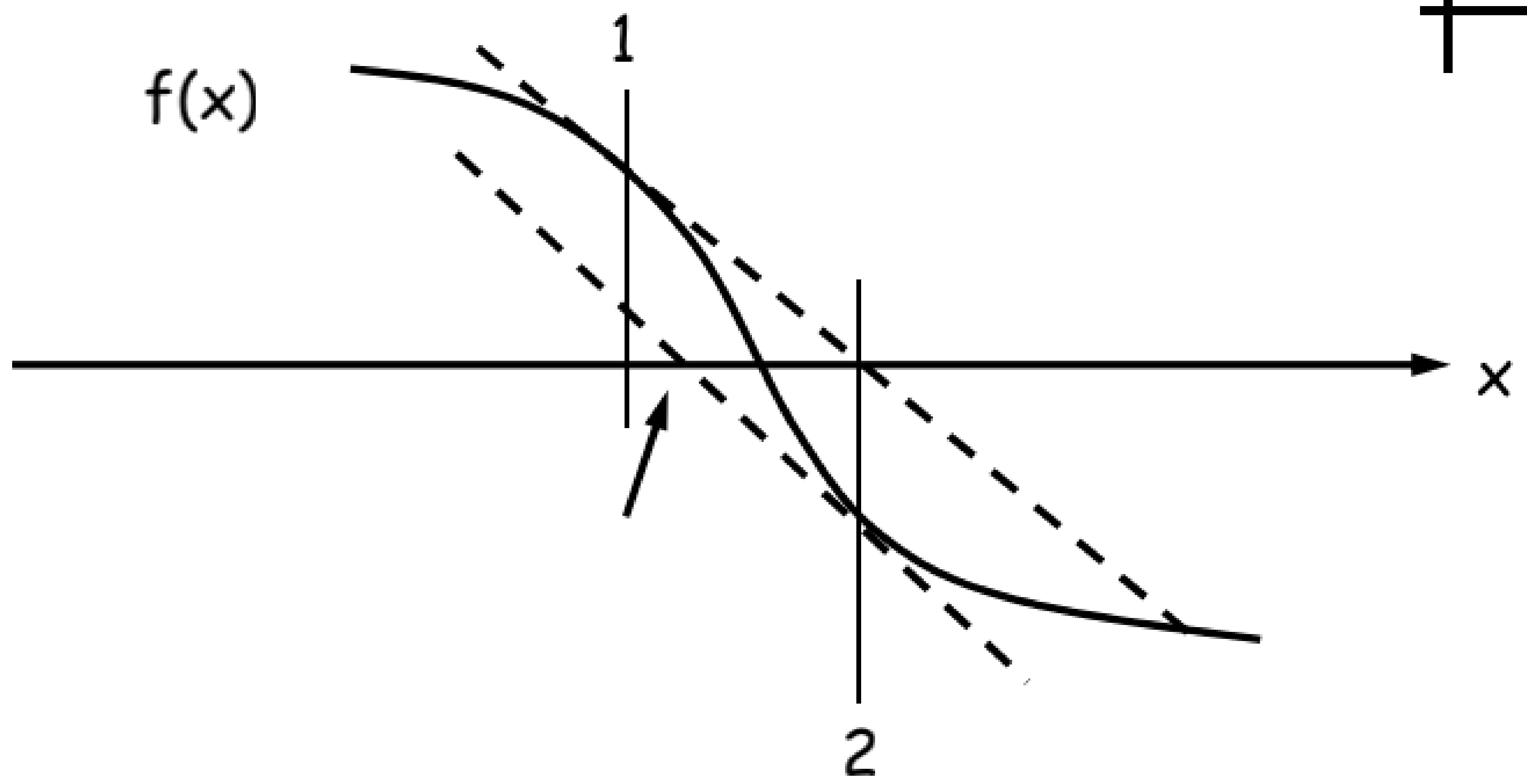
Langkah:

1. Perkirakan akar fungsi.
2. Buat garis singgung pada titik sesuai akar fungsi yang diperkirakan itu, lalu cari titik potongnya dengan garis nol.
3. Titik potong itu merupakan perkiraan akar fungsi baru.
4. Ulangi langkah 2 dan 3 sampai dianggap cukup.
5. Titik potong garis nol dan garis singgung kurva yang terakhir dinyatakan sebagai akar fungsi.

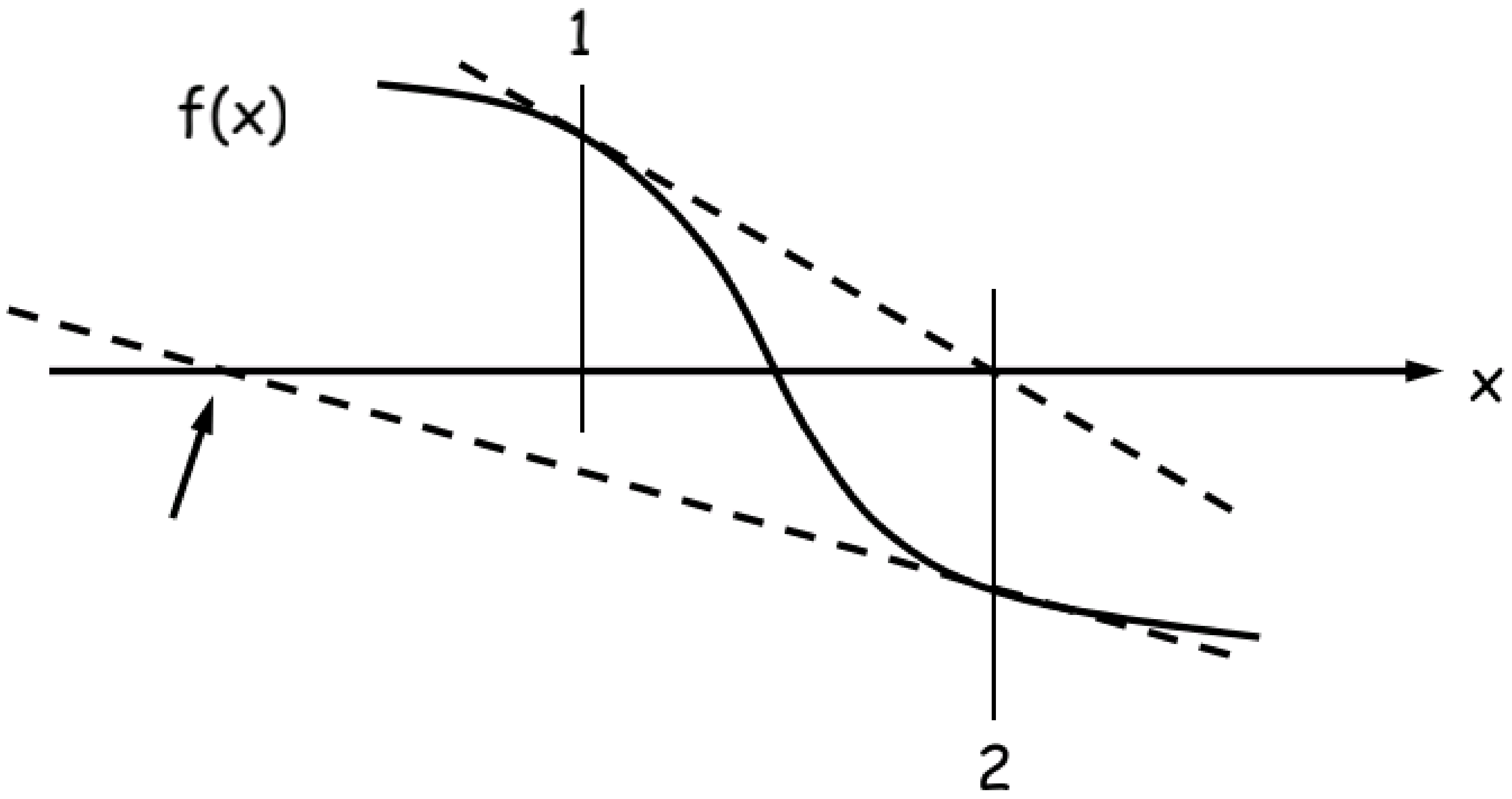


$$c = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Contoh perkiraan akar fungsi awal yang baik
→ perkiraan akar fungsi makin mendekati akar fungsi sebenarnya.



Contoh perkiraan akar fungsi awal yang buruk
→ perkiraan akar fungsi makin menjauhi akar fungsi sebenarnya.



Menghitung akar fungsi dengan metode Newton-Raphson:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (i = 0,1,2,\ldots;\ x_0 = a)}$$

kesalahan relatif semu:

$$\boxed{\Delta_{rel} = \left| \frac{x_i - x_{i+1}}{x_{i+1}} \right|}$$

Penghitungan dihentikan jika kesalahan relatif semu sudah mencapai / melampaui batas yang diinginkan.

Secant

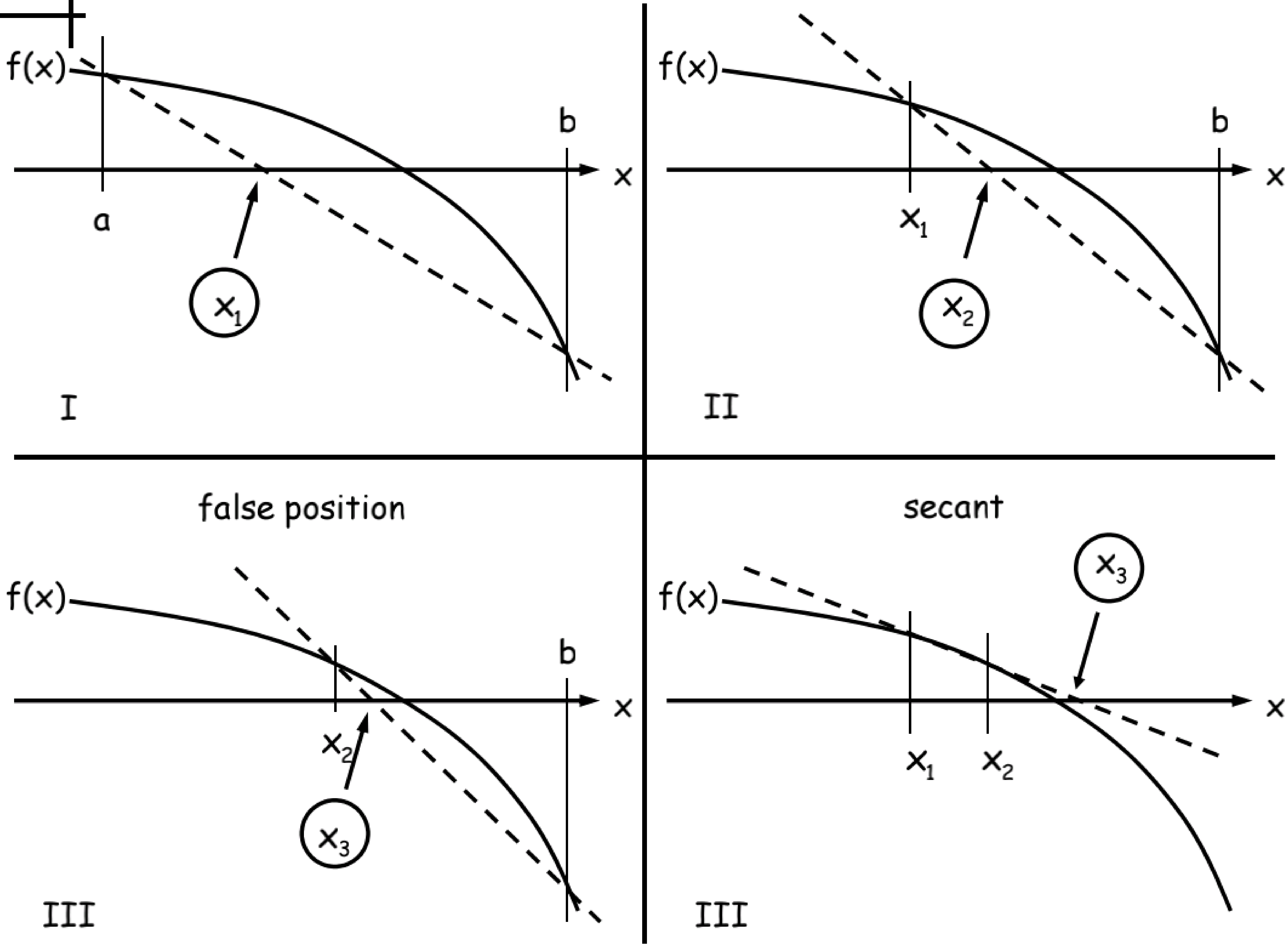
Kembali ke metode False Position, untuk contoh batas b tetap, akar fungsi dicari sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{bf(x_0) - x_0 f(b)}{f(x_0) - f(b)} \longrightarrow x_2 = \frac{bf(x_1) - x_1 f(b)}{f(x_1) - f(b)} \longrightarrow x_3 = \frac{bf(x_2) - x_2 f(b)}{f(x_2) - f(b)} \quad \ldots\ldots$$

Pada metode Secant, batas tidak dijaga tetap, melainkan berubah. Akar fungsi dicari sebagai berikut:

$$x_1 = \frac{bf(x_0) - x_0 f(b)}{f(x_0) - f(b)} \longrightarrow x_2 = \frac{bf(x_1) - x_1 f(b)}{f(x_1) - f(b)} \longrightarrow x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \quad \ldots\ldots$$

Jadi, mulai dari i = 3, akar fungsi dihitung dengan: $\boxed{x_i = \frac{x_{i-2} f(x_{i-1}) - x_{i-1} f(x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}}$


f(x)
a
b
x
x_1
I
f(x)
x_1
b
x
x_2
II
false position
secant
f(x)
x_2
b
x
x_3
III
f(x)
x_3
x_1
x_2
x
III

Akar fungsi pada metode Secant untuk i = 1, 2 bisa dihitung dengan metode yang lain atau ditebak. Mulai i = 3, akar fungsi dihitung dengan rumus:

$$x_i = \frac{x_{i-2}f(x_{i-1}) - x_{i-1}f(x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} \longrightarrow \boxed{x_i = x_{i-1} - \left(\frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}}\right)^{-1} f(x_{i-1})}$$

Yang menarik, jika i makin besar, maka beda antar dua akar fungsi yang berturutan semakin kecil, sehingga

$$\frac{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{x_{i-1} - x_{i-2}} \cong \frac{df(x_{i-1})}{dx_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \longrightarrow x_i \cong x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

Dengan begitu, metode Secant menyerupai metode Newton-Raphson. Jika turunan fungsi f(x) sulit diperoleh / dihitung, maka metode Secant menjadi alternatif yang baik bagi metode Newton-Raphson.

Kesalahan relatif semu dihitung sama seperti pada metode False Position atau Newton-Raphson.

Kecepatan Konvergensi

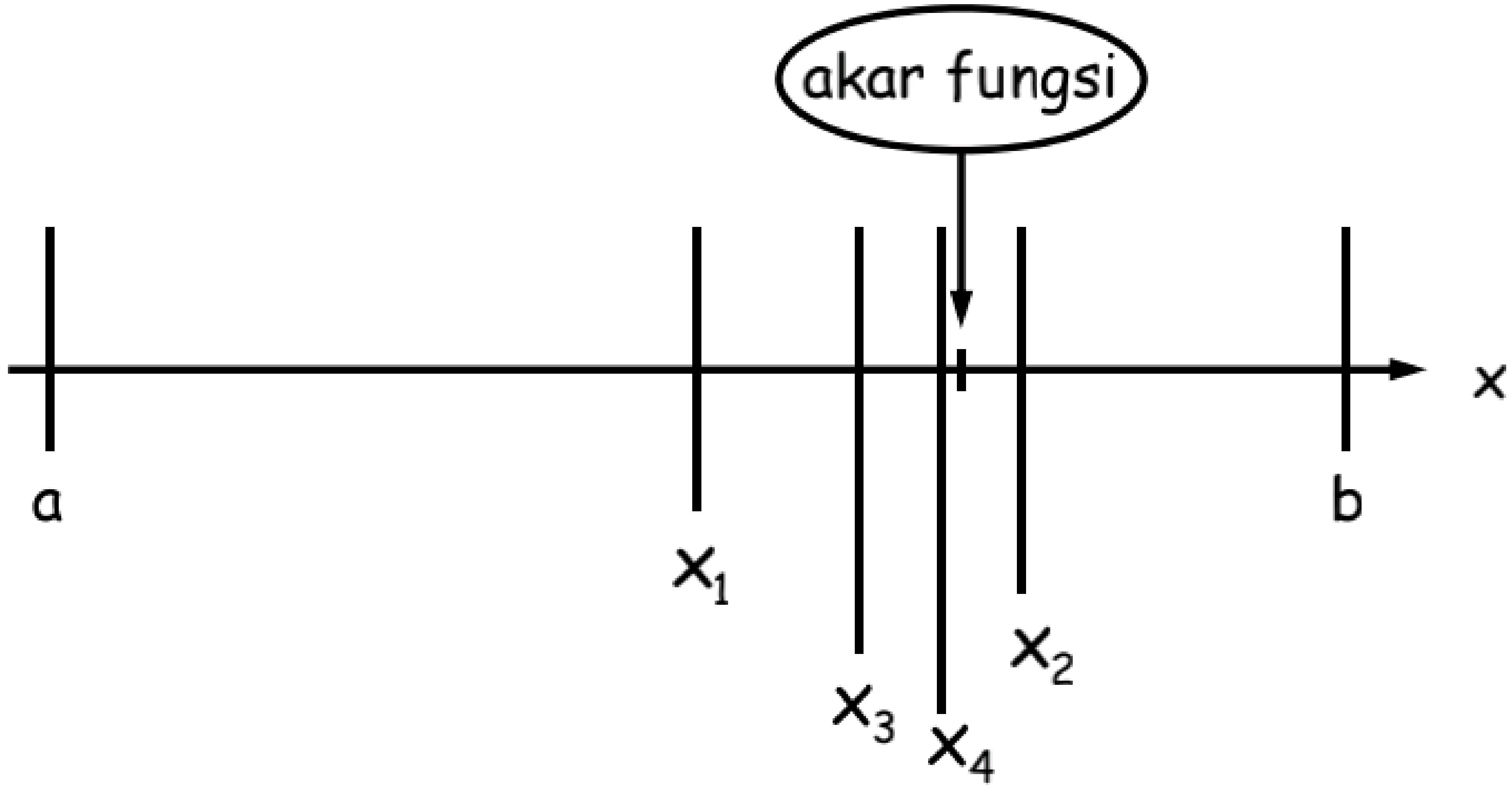
Pencarian akar fungsi dimulai dengan perkiraan akar fungsi yang pertama, lalu diikuti oleh perkiraan berikutnya dan seterusnya sampai perkiraan yang terakhir, yang kemudian dinyatakan sebagai akar fungsi hasil perhitungan tersebut. Proses itu harus bersifat konvergen yaitu, selisih perkiraan sebelum dari yang setelahnya makin lama makin kecil. Setelah dianggap cukup, proses pencarian akar fungsi berhenti.

$$\left|x_2 - x_1\right| > \left|x_3 - x_2\right| > \left|x_4 - x_3\right| \ldots \left|x_n - x_{n-1}\right| \leq \varepsilon$$

(ε = bilangan kecil)

Kecepatan konvergensi sebuah proses yaitu, kecepatan proses itu untuk sampai pada hasil akhir.

Contoh pencarian akar fungsi dengan metode Bisection:



Jika $\varepsilon_i \equiv |x_{i+1} - x_i|$, maka dari gambar diperoleh:

$$\varepsilon_1 = |x_2 - x_1|,\ \varepsilon_2 = |x_3 - x_2|,\ \varepsilon_3 = |x_4 - x_3|$$

$$\varepsilon_2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_1,\ \varepsilon_3 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_2$$

Kecepatan konvergensi bersifat linear: $\boxed{\varepsilon_{i+1} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_i}$

Pada metode False Position, Newton-Raphson dan Secant akar fungsi dicari dengan rumus yang bentuknya serupa:

False Position: $$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i) - f(a)}{x_i - a}\right)^{-1} f(x_i) \quad \text{(atau a diganti b)}$$

Newton-Raphson: $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Secant: $$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^{-1} f(x_i)$$

Mengingat dengan berjalannya proses pencarian akar fungsi rumus pada metode False Position dan terlebih lagi Secant semakin mendekati rumus pada metode Newton-Raphson, maka akan dibahas kecepatan konvergen pada metode Newton-Raphson.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_i \equiv x_i - x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \longrightarrow \varepsilon_{i+1} = \frac{f(x_{i+1})}{f'(x_{i+1})} = ?$$

ekspansi deret Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i - \varepsilon_i) = f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i) - \ldots$$

$$f'(x_{i+1}) = f'(x_i - \varepsilon_i) = f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \ldots$$

$$\longrightarrow \varepsilon_{i+1} = \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i) - \ldots}{f'(x_i) - \varepsilon_i f''(x_i) + \ldots}$$

$$\cong \frac{f(x_i) - \varepsilon_i f'(x_i) + \tfrac{1}{2}\varepsilon_i^2 f''(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\varepsilon_i^2$$

Kecepatan konvergensi pada metode Newton-Raphson (kira-kira demikian juga False Position dan Secant) bersifat kurang lebih kuadratik:

$$\boxed{\varepsilon_{i+1} \cong \frac{f''(x_i)}{2f'(x_i)}\varepsilon_i^2}$$

Dengan begitu, metode metode Newton-Raphson, False Position dan Secant lebih cepat dari metode Bisection.

Contoh hasil pencarian akar fungsi untuk soal cos(x) = x:

metode	akar	f(akar)	jumlah langkah
Bisection	0.7390795	9.3692161E-06	12
False Position	0.7390851	-7.7470244E-09	3
Newton-Raphson	0.7390851	-7.7470244E-09	4
Secant	0.7390851	-7.7470244E-09	3

Keterangan:

- Pencarian akar berhenti jika kesalahan relatif semu sama atau kurang dari 1.0E-05.
- Batas awal kiri dan kanan untuk metode Bisection, False Position dan Secant 0.72 dan 0.75.
- Perkiraan akar fungsi pertama untuk metode Newton-Raphson 0.72.