

```
//取队首元素
x = q[front];
//取队尾元素
x = q[tail];
```

## ☞ 参考词条

1. 数组与数组下标
2. 链表：单链表、双向链表、循环链表
3. 双端队列
4. 单调队列
5. 优先队列

## 📖 延伸阅读

- [1] THOMAS H C, CHARLES E L, RONALD L R, et al. 算法导论(原书第3版)[M]. 殷建平, 徐云, 王刚, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2013: 130.
- [2] 严蔚敏, 吴伟民. 数据结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 58-65.
- [3] DONALD E K. 计算机程序设计艺术 卷1: 基本算法[M]. 李伯民, 范明, 蒋爱军, 译. 3版. 北京: 人民邮电出版社, 2016: 191-194.

## 📖 典型题目

1. NOIP2004 提高组 合并果子
2. NOIP2010 提高组 机器翻译

(叶金毅)

## 1.3.2 简单树

### 1.3.2.1 树的定义与相关概念

如果一个无向简单图  $G$  满足以下相互等价的条件之一, 那么  $G$  是一棵树。

- (1)  $G$  是没有回路的连通图。
- (2)  $G$  没有回路, 但在  $G$  内添加任意一条边就会形成一个回路。
- (3)  $G$  是连通的, 且去掉任意一条边后都不再连通。
- (4)  $G$  内的任意两个顶点能被唯一简单路径所连通。
- (5) 如果  $G$  有有限个顶点(设为  $n$  个顶点), 那么  $G$  是一棵树还等价于  $G$  是连通的且具有  $n-1$  条边的图。

树是一种非线性数据结构。设  $n$  为树的顶点个数。如果  $n=0$ , 则称为空树。在一棵树中可以指定一个特殊的结点——根。一棵有根树叫作有根树。

对于一棵有根树，一条边的两个端点中，靠近根的那个结点称作另一个结点的父结点，距离根比较远的那个结点称作另一个结点的子结点。除了根结点，每个结点有且仅有一个父结点。

对于一棵有根树，从根结点到任意结点的路径的长度称为该结点在树中的深度。结点在树中的高度是该结点向下到某个叶子结点最长简单路径中边的条数。树的高度是根结点的高度，也等于树中结点的最大深度。

树上结点分为叶子结点和分支结点。其中叶子结点是没有子结点的结点，分支结点是有子结点的结点，分支结点也称为内部结点。

树上结点之间的关系如下。

- (1) 父结点和子结点：某个内部结点与自己的子结点形成父结点与子结点关系。
- (2) 兄弟结点：同一个父结点的子结点之间互称兄弟结点。
- (3) 祖先结点：从该结点到根结点的简单路径上经过的结点称为该结点的祖先结点。
- (4) 子孙结点：以该结点为根的子树下的所有结点称为该结点的子孙结点。

如果一棵树中任意结点的子结点之间没有顺序关系，那么这棵树就是无序树；如果一棵树中任意结点的子结点之间有顺序关系，那么这棵树就是有序树。

若干棵互不相交的树的集合就是森林，只有一棵树也可以称为森林。

## 参考词条

图的定义与相关概念

## 延伸阅读

- [1] THOMAS H C, CHARLES E L, RONALD L R, et al. 算法导论(原书第3版)  
[M]. 殷建平, 徐云, 王刚, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2013: 687-691.
- [2] 严蔚敏, 吴伟民. 数据结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 118-121.

(叶金毅)

### 1.3.2.2 树的表示与存储

对于一个树形结构，一般有三种表示法：双亲表示法、孩子表示法、孩子兄弟表示法。

- 双亲表示法：通过记录树中每个结点的父亲结点来表示一棵树。双亲表示法只需在内存中使用一个数组记录父结点即可完成存储。
- 孩子表示法：通过记录树中每个结点的所有子结点来表示一棵树。由于每个结点的子结点数量不确定，可以使用动态数组的方法记录每个结点的子结点，也可以使用图的“链式前向星”存储方法存储一棵树。
- 孩子兄弟表示法：如果将一棵树中每个结点的所有孩子确定一个顺序，每个结点记录两个信息，第一个信息为其第一个孩子结点，第二个信息为其下一个兄弟结点，那么一棵树会被转换为一个二叉树再进行存储，该表示法即为孩子兄弟表示法，也称为左孩子右兄弟表示法。

## GO 参考词条

1. 树的定义与相关概念
2. 图的表示与存储：邻接表

## 延伸阅读

严蔚敏，吴伟民．数据结构[M]．北京：清华大学出版社，2007：118-120.

(叶金毅)

### 1.3.2.3 二叉树的定义与基本性质

二叉树是一种树形结构，其特点是每个结点最多只有两个子树，二叉树的递归定义如下：

- (1) 它或者是一棵不包含任何结点的空树，或者有且仅有一个结点称为根结点；
- (2) 根结点至多有两个互不相交的子树，并且每个子树也是一棵二叉树。

定义二叉树根结点的层是 1，其余结点的层等于该结点的父结点的层加 1。

二叉树的性质如下：

- (1) 非空二叉树第  $i$  层上至多有  $2^{i-1}$  个结点；
- (2) 高为  $h$  的二叉树至多有  $2^{h+1}-1$  个结点；
- (3) 对于任何非空二叉树，若其叶结点个数为  $n_0$ ，有两个孩子的结点个数为  $n_2$ ，则

$n_0 = n_2 + 1$ 。

## GO 参考词条

1. 二叉树的表示与存储
2. 完全二叉树的定义与基本性质

## 延伸阅读

严蔚敏，吴伟民．数据结构[M]．北京：清华大学出版社，2007：118-120.

(叶金毅)

### 1.3.2.4 二叉树的表示与存储

使用孩子表示法表示一棵二叉树，可定义二叉树的数据结构中包含如下信息。

- (1) 数据域：存放结点本身信息。
- (2) 孩子域：存放结点左右子结点的数组下标或者内存地址，由于最多只有两个孩子，所以只需要设置左子域以及右子域。

## 代码示例

对于二叉树的数据结构，结构体中使用整数存储左右孩子在数组中的下标，代码如下。

```
struct BinaryTreeNode
{
    int data;
    int leftchild, rightchild; //记录左右子数组下标
};
```

## GO 参考词条

1. 二叉树的定义与基本性质
2. 树的表示与存储

## 📖 延伸阅读

- [1] THOMAS H C, CHARLES E L, RONALD L R, et al. 算法导论(原书第3版)  
[M]. 殷建平, 徐云, 王刚, 等译. 北京: 机械工业出版社, 2013: 137-138.
- [2] 严蔚敏, 吴伟民. 数据结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 121-123.

(叶金毅)

### 1.3.2.5 二叉树的遍历：前序、中序、后序

二叉树的遍历是指从二叉树的根结点开始，按照某种次序依次访问二叉树中的所有结点，每个结点都被访问且仅被访问一次。二叉树有三种常用遍历顺序，分别是前序、中序、后序遍历。

- 前序遍历：先访问根结点，再递归前序访问左子树，最后递归前序访问右子树。
- 中序遍历：先递归中序访问左子树，再访问根结点，最后递归中序访问右子树。
- 后序遍历：先递归后序访问左子树，再递归后序访问右子树，最后访问根结点。

## 📄 代码示例

以下代码使用结构体实现了二叉树的数据结构，并且中序递归遍历了二叉树的所有结点。

```
const int maxsize = 1010;
struct BinaryTreeNode
{
    int data;
    int leftChild;
    int rightChild;
} t[maxsize];
//二叉树中序遍历 左->根->右
void inOrder(int node)
{
    if (node == 0)
        return;
```

```

inOrder(t[node].leftChild);
cout << node.data << ' ';
inOrder(t[node].rightChild);
}

```

## 参考词条

1. 递归法
2. 二叉树的表示与存储
3. 二叉搜索树的定义和构造

## 延伸阅读

- [1] DONALD E K. 计算机程序设计艺术 卷1: 基本算法[M]. 李伯民, 范明, 蒋爱军, 译. 3版. 北京: 人民邮电出版社, 2016: 253-262.
- [2] 严蔚敏, 吴伟民. 数据结构[M]. 北京: 清华大学出版社, 2007: 128-133.

## 典型题目

1. NOIP2001 普及组 求先序排列
2. NOIP2004 普及组 FBI 树
3. NOIP2003 提高组 加分二叉树
4. NOIP2018 普及组 对称二叉树
5. CSP2020-J 表达式

(叶金毅)

## 1.3.3 特殊树

### 1.3.3.1 完全二叉树的定义与基本性质

一棵二叉树只有最下面两层结点的度数可以小于2, 且最下面一层的结点都处于该层左边的连续位置上, 这样的二叉树称为完全二叉树, 如图1.5所示。

完全二叉树具有如下基本性质。

(1) 具有  $n$  个结点的完全二叉树的深度为  $\lfloor \log_2 n \rfloor$ 。

(2) 对于具有  $n$  个结点的完全二叉树, 若按层次从上到下、从左到右、从1开始依次对每个结点进行编号, 则编号为  $x$  的结点具有以下性质。

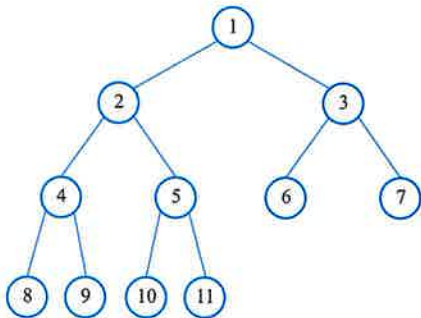


图 1.5 完全二叉树