线性筛法的核心代码如下。

```
const int MAXN = 1e5 + 5;
int prime[MAXN],cnt;
bool flag[MAXN];
void Euler(int n)
{
    for (int i = 2; i <= n; i++)
    {
        if (!flag[i])
            prime[++cnt] = i; //素数
        for (int j = 1; j <= cnt && i * prime[j] <= n; j++)
        {
            flag[i * prime[j]] = 1;
            if (i %prime[j] == 0)
                break; //确保每个数只被最大的因子筛掉
        }
    }
}
```

参考词条

整除、因数、倍数、指数、质(素)数、合数

延伸阅读

KENNETH H R. 初等数论及其应用(原书第 6 版)[M]. 夏鸿刚，译. 北京：机械工业出版社，2015：51-55.

典型题目

1. NOIP2008 提高组 笨小猴
2. NOIP2009 普及组 细胞分裂
3. NOIP2021 提高组 报数

(谷多玉　叶金毅)

1.5.4　离散与组合数学

1.5.4.1　集合

集合，简称集，是指由一些确定的对象构成的整体。集合中的每一个对象称为一个元素。集合的元素具有确定性、互异性和无序性。

(1) 确定性：一个元素是否属于一个集合是确定的。

(2) 互异性：集合中的元素两两不同。

(3) 无序性：集合中的元素不存在先后顺序。

如果一个集合包含有限个元素，则称这个集合为有限集。如果一个集合包含无限个元素，则称这个集合为无限集。

对于有限集，集合中的元素个数称为集合的基数(cardinal number)，有时也称为集合的大小，集合 S 的基数记为 $|S|$。对于无限集，集合基数的表示和比较方法在信息学竞赛中不涉及，此处不再介绍。

不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\varnothing$。如果某个集合包含所涉及的所有元素，则称该集合为全集，通常记作 U。

一个元素 x 在集合 S 中则称 x 属于 S，记为 $x \in S$；否则称 x 不属于 S，记为 $x \notin S$。

如果一个集合 A 中的所有元素都在集合 S 中，则称集合 A 为集合 S 的子集，记为 $A \subseteq S$。如果集合 A 是集合 S 的子集且 A 和 S 不相同，则称集合 A 为集合 S 的真子集，记为 $A \subsetneqq S$。

集合可以使用列举法表示，通常写法为大括号中包含多个元素，例如，小写元音字母集 $\{a,e,i,o,u\}$，大写字母集 $\{A,B,\cdots,Z\}$，整数集 $\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$。

集合也可以使用描述法来表示，例如，某个方程的解集 $\{x \mid x^2+x-1=0\}$，有理数集 $\left\{\frac{q}{p} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, p \neq 0, q \in \mathbb{Z}\right\}$。

对于给定的两个实数 a、b，由介于 a 和 b 之间的实数组成的集合称为区间。区间用 $[a,b]$ 或 (a,b) 表示，其中中括号表示包含 a 和 b，即 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，小括号表示不包含 a 和 b，即 $\{x \mid a<x<b\}$。区间可以包含一端而不包含另一端，称为半开半闭区间，例如 $[a,b)$ 或 $(a,b]$。

集合 A 与集合 B 的公共部分称为集合 A 与集合 B 的交，记为 $A \cap B$，即 $\{x \mid x \in A, x \in B\}$。

由集合 A 与集合 B 中所有元素组成的集合称为集合 A 与集合 B 的并，记为 $A \cup B$，即 $\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$。

由在全集 U 中而不在集合 A 中的元素组成的集合称为 A 的补集，记为 $\overline{A}$ 或 $\complement_{\mathrm{U}} A$，即 $\{x \mid x \in \mathrm{U}, x \notin A\}$。

（胡伟栋）

1.5.4.2 加法原理

加法原理：做一件事情，有 n 类办法，第 1 类办法有 m_1 种方法，第 2 类办法有 m_2 种方法，第 n 类办法有 m_n 种方法，则完成这件事情的方法有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种。

加法原理属于分类计数原理，分类需要包括所有情况，类与类之间不会产生重复。

参考词条

1. 排列

2. 组合

延伸阅读

[1] RICHARD A B. 组合数学(原书第 5 版)[M]. 冯速，译. 北京：机械工业出版社，2012：16-17.

[2] THOMAS H C，CHARLES E L，RONALD L R，et al. 算法导论(原书第 3 版)[M]. 殷建平，徐云，王刚，译. 北京：机械工业出版社，2013：676.

(谷多玉　叶金毅)

1.5.4.3　乘法原理

乘法原理：做一件事情，需要分 n 个步骤，第 1 步有 m_1 种方法，第 2 步有 m_2 种方法，第 n 步有 m_n 种方法，则完成这件事情的方法有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种。

乘法原理属于分步计数原理，分步应注意如果各步依次独立完成，整个事件也应完成。

参考词条

1. 排列
2. 组合

延伸阅读

[1] RICHARD A B. 组合数学(原书第 5 版)[M]. 冯速，译. 北京：机械工业出版社，2012：17-18.

[2] THOMAS H C，CHARLES E L，RONALD L R，et al. 算法导论(原书第 3 版)[M]. 殷建平，徐云，王刚，译. 北京：机械工业出版社，2013：676.

(谷多玉　叶金毅)

1.5.4.4　排列

排列是指从 n 个不同的元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素进行排序，其个数就是排列数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 A_n^m 来表示，排列数的计算公式为：

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

排列数的性质如下。

$$A_n^m = nA_{n-1}^{m-1}$$

$$A_n^m = mA_{n-1}^{m-1} + A_{n-1}^m$$

参考词条

1. 加法原理

2. 乘法原理

延伸阅读

[1] RICHARD A B. 组合数学(原书第 5 版)[M]. 冯速，译. 北京：机械工业出版社，2012：21-24.

[2] THOMAS H C，CHARLES E L，RONALD L R，et al. 算法导论(原书第 3 版)[M]. 殷建平，徐云，王刚，译. 北京：机械工业出版社，2013：676-678.

（谷多玉　叶金毅）

1.5.4.5 组合

组合是指从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素，不考虑排序，其个数就是组合数，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 来表示，组合数的计算公式为：

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

组合数的性质如下。

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

参考词条

1. 加法原理
2. 乘法原理

延伸阅读

[1] RICHARD A B. 组合数学(原书第 5 版)[M]. 冯速，译. 北京：机械工业出版社，2012：24-27.

[2] THOMAS H C，CHARLES E L，RONALD L R，et al. 算法导论(原书第 3 版)[M]. 殷建平，徐云，王刚，译. 北京：机械工业出版社，2013：676-678.

典型题目

NOIP2006 提高组 2^k 进制数

（谷多玉　叶金毅）

1.5.4.6 杨辉三角

杨辉三角是二项式系数在三角形中的几何排列，中国南宋数学家杨辉于 1261 年在《详解九章算术》中介绍过，又称为开方作法本源，如图 1.13 所示。

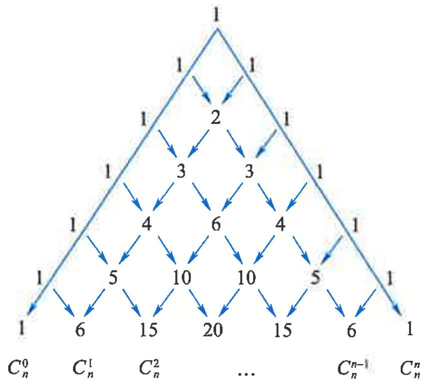

图 1.13 杨辉三角

杨辉三角中第 $i(0\leqslant 0\leqslant n)$ 行第 $j(0\leqslant j\leqslant i)$ 列的数字，可以用 C_i^j 来求得，即从 i 个元素中取 j 个的组合数。除此以外，杨辉三角中的数字也可以通过递推公式获得，即每行的第一个数和最后一个数为 1，其他数字等于其左上和右上数字之和。递推公式为：

$$C_i^j = C_{i-1}^{j-1} + C_{i-1}^{j}$$

代码示例

杨辉三角的核心代码如下。

```
long long c[50][50];
c[0][0] = 1;
for (int i = 1; i <= n; i++)
{
    c[i][0] = c[i][i] = 1;
    for (int j = 1; j < i; j++)
        c[i][j] = c[i - 1][j - 1] + c[i - 1][j];
}
```

参考词条

组合

延伸阅读

[1] 杨辉. 增补《详解九章算法》释注[M]. 北京：科学出版社，2014.

[2] THOMAS H C，CHARLES E L，RONALD L R，et al. 算法导论(原书第 3 版)[M]. 殷建平，徐云，王刚，译. 北京：机械工业出版社，2013：677-678.

[3] RICHARD A B. 组合数学(原书第 5 版)[M]. 冯速，译. 北京：机械工业出版社，2012：24-27.