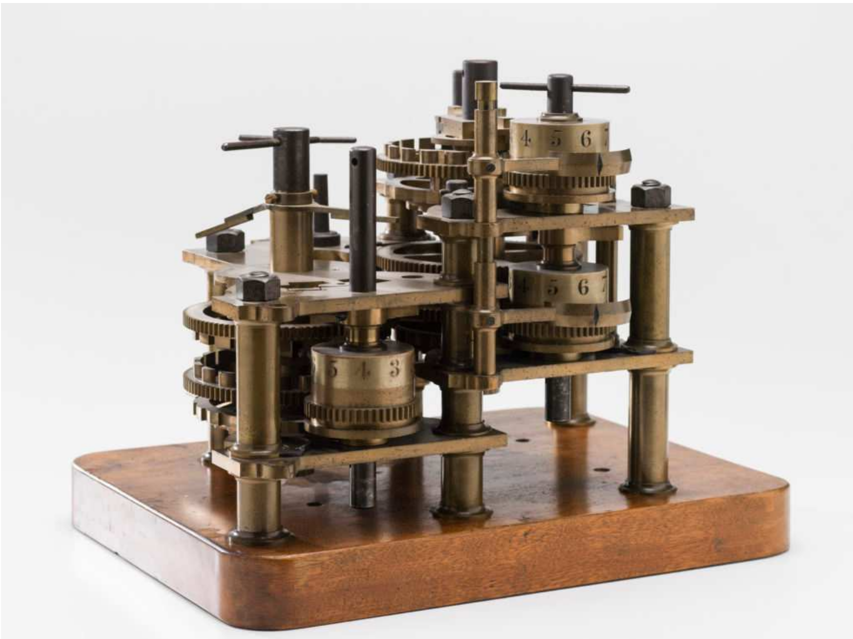
PRIRUČNICI TEHNIČKOG VELEUČILIŠTA U ZAGREBU
MANUALIA POLYTECHNICI STUDIORUM ZAGRABIENSIS

Dubravko Horvat, Diana Šaponja-Milutinović, Alemka Knapp

LABORATORIJSKO RAČUNALNI PRAKTIKUM IZ FIZIKE

(1.2 izdanje)



TEHNIČKO VELEUČILIŠTE
U ZAGREBU UNIVERSITY OF
APPLIED SCIENCES ZAGREB

Autori:
Prof.dr.sc. Dubravko Horvat
Zavod za fiziku
Fakultet elektrotehnike i
računarstva
Sveučilište u Zagrebu
Unska 3, 10 000 Zagreb
e-mail: dubravko.horvat@fer.hr

Diana Šaponja-Milutinović, dipl.ing.
Katedra za zajedničke predmete
Tehničko veleučilište
u Zagrebu
Vrbik 8, 10 000 Zagreb
e-mail: dsaponjam@tvz.hr

Alemka Knapp, dipl.ing.
Katedra za zajedničke predmete
Tehničko veleučilište
u Zagrebu
Vrbik 8, 10 000 Zagreb
e-mail: alemka.knapp@tvz.hr

Na naslovnoj stranici prikazana je slika replike prvog računalnog stroja koji je konstruirao Charles Babbage (1791.-1871.).

P Predgovor

Ove upute za laboratorijsko računalne vježbe iz fizike u Praktikumu Tehničkog veleučilišta u Zagrebu namijenjene su studentima preddiplomskog stručnog studija informatike koji slušaju kolegij Fizika u početnim semestrima studija.

Laboratorijsko računalni (LR) praktikum na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu organiziran je s namjerom da kroz savladavanje tema iz odabranih poglavlja fizike studenti kroz primjenu računala i računalnih metoda neposrednije dožive važnost fizikalnih tema koje su prilagođene primjeni računalnog jezika Python. Mjereći odgovarajuće fizikalne veličine studenti primjenom računala pri izvođenju pokusa i pri obradi rezultata mjerenja primjenjuju ranije stečena znanja iz programiranja, a istovremeno neposrednije i na zanimljiv način dolaze do spoznaje fizikalnih zakona koji ulaze u sve važne segmente moderne znanosti i tehnologije.

Proširenje Fizičkog praktikuma, koji je ne tako davno organiziran na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu (TVZ), na laboratorijsko računalno područje predstavlja daljnje približavanje sadržaja kolegija Fizike potrebama modernih metoda učenja u području tehničkih znanosti koje su osnovni sadržaj te visoke škole, čiji je napredak posljedica i takvih prilagodbi tradicionalnih prirodoslovno matematičkih i tehničkih disciplina zahtjevima primjene.

Valja ovdje istaknuti da praktikum na TVZ-u nastavlja tradiciju praktikuma koji je decenijama bio dio nastave fizike na tehničkim fakultetima Sveučilišta u Zagrebu, ali dalje se razvija samostalno i kroz proširenja poput ovog, uz nove vježbe prema potrebama novih studijskih smjerova i programa na TVZ-u. Tako i ovaj tekst nastaje kao samostalan okvir za rad u laboratorijsko računalnom praktikumu. Detaljni teorijski prikaz, upute i zadatci za pripremu vježbi, te niz dodataka s podatcima i matematičkim pomagalima, omogućuju kvalitetan i učinkovit studentski rad.

U ovoj inačici teksta uveden je dodatak o programskom jeziku Python koji ovdje predstavlja glavni alat pri rješavanju zadataka iz fizike, pri unošenju podataka mjerenja i pri njihovoj obradi. Dio teksta posebno je posvećen modulima Numpy i Matplotlib koji omogućuju vrlo učinkovito baratanje numeričkim podatcima i njihovom vizualizacijom. Popravljene su sitne tekstualne pogreške i u vježbama dodane tablice koje omogućuju lakšu primjenu formula u teoriji najmanjih kvadrata.

Autori

Zagreb, veljača 2022. godine

S Sadržaj

U Upute za pripremu, rad i sigurnost u praktikumu

Ovaj tekst potrebno je pažljivo slijediti jer daje niz važnih uputa koje će pomoći studentima da se dobro pripreme za laboratorijsko-računalni (LR) praktikum i da uspješno obave zadatke koje pred njih stavlja pojedina vježba.

Na početku semestra objavljuje se raspored - datumi pohađanja vježbi kao i grupe studenata. S obzirom da je obavljeni laboratorijsko-računalni praktikum s prolaznom ocjenom preduvjet polaganja ispita iz Fizike, nužno je redovito pohađanje praktikuma, po datumima kako je to objavljeno. Nadoknadu izostanka s praktikuma u zadano je vrijeme vrlo teško, gotovo nemoguće organizirati i to samo u vrlo opravdanim slučajevima. Laboratorijske vježbe s mjerenjima biti će najavljene. Najavit će se i broj vježbe koju se u određenom terminu radi. Oznake vježbi su u skladu s oznakama vježbi u ovom Priručniku (primjerice 1-1, ili 3-1 itd.).

Nužno je proučiti uvodno poglavlje o pogreškama mjerenja i naučiti izraze za srednju vrijednost, pogrešku pojedinog mjerenja, standardnu devijaciju i relativnu pogrešku te standardni zapis rezultata mjerenja i njihove obrade!

Potrebno je u ovom Priručniku pronaći odgovarajuću vježbu, pažljivo ju pročitati i na odgovarajućem listu papira čiji se uzorak nalazi na web-u odvojeno od ovog Priručnika, napisati pripremu. Valja ispuniti odgovarajuće rubrike (ime i prezime, naziv vježbe, broj vježbe, datum, itd.) i ukratko

(a) napisati svrhu ili cilj vježbe,

(b) nacrtati skicu pokusa,

(c) napisati odgovarajuće formule i izraze,

(d) prirediti tablice,

(e) prirediti grafove (nacrtati ih ili uzeti gotove ako su dani, ili donijeti milimetarski papir, prema uputi za vježbu),

(f) riješiti zadatke koji se nalaze na kraju upute za vježbu (reproducirati ponuđeno rješenje) i napisati ih sa svim detaljima postupka na kraju pripreme,

(g) pogledati Python pojmove i tehnike koje su povezane s posebnim zahtjevima za vježbu.

- Priprema mora imati 1.5 do 2 stranice, zajedno s tablicama i formulama.
- Svrha pripreme je da student dođe s određenim znanjem na vježbu, jer potrebno je u 90 minuta obaviti odgovarajući pokus, izmjeriti veličine, obraditi mjerene podatke i zapisati konačni rezultat. Posebno valja obratiti pažnju na jedinice i konstante.

- Pripremu valja napisati rukom, a tablice i grafove crtati s odgovarajućim priborom. Urednost pripreme i urednost postupka i računa bitni su dio svakog pokusa.
- *Priprema* na kraju pokusa, kada su izmjerene sve veličine i kada je vježba završena postaje *referat* koji opisuje cijeli postupak pokusa, od pripreme do konačnog rezultata.
- Valja se podsjetiti uporabe Pythona kao kalkulatora. Uporaba mobitela, iPoda i sličnih uređaja nije dozvoljena.
- Pažljivo slijediti upute kako obraditi rezultate pomoću Pythona, a posebno paziti na mogući grafički prikaz (naziv grafa, oznake osi, jedinice itd.).
- Bez kvalitetne pripreme ne može se pristupiti mjerenju, a s obzirom na gustoću rasporeda vrlo je teško pronaći termin za nadoknadu (u slučaju izostanka).
- Više od dvije vježbe ne može se nadoknaditi ni u kojem slučaju, tako da će trebati iznova upisati kolegij.
- Valja paziti na sigurnost pri radu: pojedine vježbe uključuju rad s električnom strujom te je potrebna posebna pozornost da se ne izloži strujnom udaru. Pojedine vježbe rade se s vrućim tekućinama i posuđem pa valja biti oprezan da ne dođe do opeklina. Pažnja koja se ne razlikuje od svakodnevne, kućne pažnje, pomoći će da ne dođe do neugodnih ili bolnih nezgoda.

Rad u praktikumu nije zahtjevan, vježbe s mjerenjem su zanimljive i jednostavne, dežurni nastavnici pomagat će u svim fazama pokusa i uz urednost, disciplinu i red, praktikum iz fizike bi morao biti lagana i ugodna zadaća za svakog studenta.

M MJERENJE I OBRADA REZULTATA MJERENJA

1.1 Uvod

Pri višestrukom mjerenju neke fizikalne veličine rezultati pojedinog mjerenja se razlikuju. Uzrok tome su pogreške koje se neizbježno javljaju pri mjerenju. Greške možemo podijeliti na *grube*, *sistematske* i *slučajne.*

Grube pogreške nastaju nepažnjom pri izvođenju mjerenja (krivo očitane brojke na mjernom instrumentu, uporaba krive skale na instrumentu, itd.)

Sistematske pogreške posljedica su npr. konzistentno krivog položaja mjernog instrumenta, uporaba nebaždarenog mjernog instrumenta (npr. početni položaj voltmetra nije na nuli, ili pomaknuta skala termometra), krivog položaja oka pri očitavanju (paralaksa) itd. *Sistematske greške* su uvijek istog predznaka (za razliku od *slučajnih* koje su pozitivne i negativne).

Slučajnim greškama opterećena su sva mjerenja i one se očituju u tome da rezultati mjerenja osciliraju za relativno male iznose oko neke prosječne vrijednosti. Teorija pogrešaka pri obradi rezultata mjerenja opisana ovdje odnosi se na *slučajne pogreške.*

1.2 Pokus i mjerenje. Osnovni pojmovi

Proces mjerenja, tj. izvođenje laboratorijskih vježbi u praktikumu možemo podijeliti u nekoliko faza:

(a) Priprema za pokus - pisanje pripreme (referata) i upoznavanje s aparaturom (čitanje upute) - vidjeti ranije uvodne upute;

(b) Izvođenje pokusa - promatranje i mjerenje, tj. bilježenje brojčanih rezultata mjerenja;

(c) Obrada rezultata mjerenja i iskazivanje rezultata mjerenja i

(d) Interpretacija rezultata mjerenja i zaključak.

Ovdje ćemo se koncentrirati na točku (c). Za opis osnovnih pojmova koji se javljaju kod obrade rezultata mjerenja poslužit ćemo se s više primjera. Osnovni pojmovi koje ćemo obraditi su **aritmetička sredina, pogreška pojedinog mjerenja, standardna devijacija, relativna pogreška** i **maksimalna pogreška**.

1.3 Pouzdane znamenke

Vrlo je važno pravilno mjeriti odgovarajuću veličinu, a jednako je važno računski obraditi rezultate mjerenja i prikazati ih na takav način da ih svaki pripadnik struke ili znanstvene discipline, bilo gdje u svijetu, na isti način razumije i interpretira. Posebno je važno na pravi način tretirati rezultate *mjerenja* i rezultate *proračuna* mjernih rezultata. Tu dolazimo do pojma pouzdanih znamenki.

Svaka fizikalna veličina - jer je mjerljiva - mora sadržavati:

- mjernu jedinicu i
- iznos, iskazan pisanjem odgovarajućeg broja pouzdanih znamenki.

O čemu ovisi broj pouzdanih znamenki u iznosima fizikalnih veličina?

Ovisi o načinu na koji je dana fizikalna veličina izmjerena, a što uključuje preciznost mjernog instrumenta kao i točnost samog procesa mjerenja.

Preciznost mjernog instrumenta definirana je najmanjim podjeljkom na skali kod analognih, ili brojem decimalnih mjesta kod digitalnih instrumenata, tj. općenito brojem redova veličina kojima procjenjujemo (sondiramo) danu fizikalnu veličinu.

Primjerice, mjerimo li školskim ravnalom čija je preciznost reda veličine milimetra, izmjerenu dimenziju nekog predmeta $d = 6.0\,\mathrm{cm}$ zapisali bismo s nepouzdanošću od 1 mm, tj. u znanstvenom obliku (zapisu) iskazali bismo je: $d = (6.0 \pm 0.1)\mathrm{cm}$, odnosno s dvije pouzdane znamenke.

Mjereći istu dimenziju pomičnom mjerkom, čija preciznost može iznositi 0.02 mm, odnosno, 0.002 cm rezultat mjerenja bit će iskazan s više pouzdanih znamenki (ovdje četiri), npr. $d = (6.012 \pm 0.002)\mathrm{cm}$.

Očito je da s povećanjem preciznosti mjernog instrumenta raste i broj pouzdanih znamenki kojima iskazujemo iznos mjerene fizikalne veličine. Poveća li se preciznost mjernog instrumenta 10 puta (1 red veličine), izmjerenoj vrijednosti dodajemo još jednu pouzdanu znamenku.

Kako nema apsolutno točnog mjerenja, odnosno, svako mjerenje je nužno opterećeno slučajnim pogreškama, mjerenje neke fizikalne veličine sadržavat će konačnu, ograničenu točnost.

Usporedimo sada dva mjerenja i pripadajuće obrade rezultata mjerenja računom pogrešaka, koja su izvedena mjernim instrumentima jednake preciznosti.

Primjer 1 (neposredno mjerena veličina)

U pokusu valja izmjeriti duljinu L metalnog predmeta. Uputa zahtijeva 5 mjerenja, obradu rezultata i zapis rezultata u standardnom obliku!

Rezultate mjerenja *uvijek* upisujemo u tablicu. U prvi stupac dolazi mjerena veličina (L_i) gdje "i" označava (redni) broj mjerenja (tj. $i = 1, 2, 3, 4, 5$), u drugi stupac dolazi pogreška pojedinog mjerenja (ΔL_i), a u treći stupac kvadrat pogreške pojedinog mjerenja ($(\Delta L_i)^2$). Statistička teorija nam kaže da je najbolja (najvjerojatnija) vrijednost veličine L (duljine) **srednja vrijednost** ($\overline{L}$) ili **aritmetička sredina** koja se računa prema formuli

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} L_i}{n} = \frac{L_1 + \cdots + L_5}{5} \tag{1-1}$$

(Na kraju ovog poglavlja dan je niz uputa za uporabu simbola Σ za sumiranje.)
Pogreška pojedinog mjerenja je

$$\Delta L_i = \overline{L} - L_i \qquad (i = 1, \ldots, 5). \tag{1-2}$$

Za kontrolu srednje vrijednosti vrijedi da je zbroj pogrešaka pojedinih mjerenja jednak nuli, tj. $\sum_{i=1}^{i=5} \Delta L_i = 0$. (To ponekad zbog zaokruživanja rezultata "na razumni broj znamenki" nije sasvim ispunjeno ali je zbroj tada vrlo blizu vrijednosti nula!)

Standardna devijacija aritmetičke sredine σ_L (nekad se naziva i srednja pogreška, a mi ćemo rabiti izraz **standardna devijacija**) računa se ovako (u *ovom* slučaju direktno mjerene veličine!)

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta L_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(\Delta L_1)^2 + \cdots + (\Delta L_5)^2}{5 \cdot 4}} \tag{1-3}$$

Maksimalna pogreška ΔL_M računa se ovako

$$\Delta L_M = 3 \cdot \sigma_L, \tag{1-4}$$

a **relativna pogreška** ΔL_R je omjer maksimalne pogreške ΔL_M i srednje vrijednosti $\overline{L}$, izraženo u postocima, tj.

$$\Delta L_R = \frac{3 \cdot \sigma_L}{\overline{L}} \cdot 100\ \%. \tag{1-5}$$

Rezultate pokusa (mjerenja veličine - duljine L) prikazujemo ovako

$$\boxed{L = (\overline{L} \pm \sigma_L)\ [\text{jedinice}]} \qquad \boxed{\Delta L_R = ...\%}. \tag{1-6}$$

Pri tome, broj pouzdanih znamenki i broj decimalnih mjesta za $\bar{L}$ i za σ_L (i sve druge računate veličine) određujemo iz rezultata mjerenja ali i iz obrade rezultata mjerenja. Drugim riječima, iako danas možemo na kalkulatorima dobiti 8,9, ili više decimala, moramo rezultate uvijek zaokružiti na onoliko decimalnih mjesta, odnosno na onaj broj pouzdanih znamenki koliko smo dobili *mjerenjem* i obradom rezultata mjerenja (vidjeti niže). Tu posebnu ulogu ima standardna devijacija koja se *uvijek* izražava - zaokružuje na 1 pouzdanu znamenku (gotovo nikad na dvije), a to će onda odrediti i broj pouzdanih znamenki srednje vrijednosti mjerene veličine.

Ovako iskazan rezultat mjerenja kazuje da je *najvjerojatnija* vrijednost fizikalne veličine L upravo $\overline{L}$, a teorija pogrešaka nam daje da *točna* vrijednost leži u intervalu $\overline{L} - \sigma_L \leq L \leq \overline{L} + \sigma_L$ s vjerojatnošću 68 %, odnosno u intervalu $\overline{L} - 2\sigma_L \leq L \leq \overline{L} + 2\sigma_L$ s vjerojatnošću 95 %, a u intervalu $\overline{L} - 3\sigma_L \leq L \leq \overline{L} + 3\sigma_L$ s vjerojatnošću 99,9 %.

Dakle, za prvo mjerenje imamo tablicu 1.1.

L_i/cm	ΔL_i/cm	$(\Delta L_i)^2$/cm^2
30.2	-0.14	0.0196
28.7	1.36	1.8496
29.5	0.56	0.3136
31.0	-0.94	0.8836
30.9	-0.84	0.7056

Tablica 1.1 - Rezultati prvog mjerenja duljine L

Srednja vrijednost:

$$\overline{L} = \frac{30.2 + \cdots + 30.9}{5} = 30.06\,\text{cm}; \tag{1-7}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine) (zaokružena na 1 pouzdanu znamenku):

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum(\Delta L_i)^2}{5 \cdot 4}} = 0.43\,\text{cm} \simeq 0.4\,\text{cm}; \tag{1-8}$$

Maksimalna pogreška:

$$\Delta L_M = 3 \cdot \sigma_L = 1.3\,\text{cm}; \tag{1-9}$$

Relativna pogreška:

$$\Delta L_R = \frac{3 \cdot \sigma_L}{\overline{L}} \cdot 100\% = 4.3\%; \tag{1-10}$$

Konačni zapis rezultata:

$$\boxed{L = (30.1 \pm 0.4)\,\mathrm{cm}} \quad \boxed{\Delta L_R = 4.3\%} \tag{1-11}$$

Broj pouzdanih znamenki za veličinu L je tri. (Dobro je uočiti da se međurezultati računa *prije konačnog zapisa* obično zapisuju na veći broj decimalnih mjesta od izmjerenih.) To je, najprije, određeno preciznošću mjernog instrumenta odnosno, iskazivanjem mjerenih vrijednosti s tri pouzdane znamenke. Standardna devijacija, koja se uvijek zaokružuje na jednu pouzdanu znamenku (0.4 cm) pokazuje da se nesigurnost provedenog mjernog postupka nalazi u određivanju znamenke koja se nalazi na prvom decimalnom mjestu (desetinka). S obzirom da je pouzdana znamenka standardne devijacije na mjestu desetinki, tada smo i srednju vrijednost L morali zaokružiti na desetinke. Time je određena maksimalna točnost mjerenja (koja je ovdje u skladu s preciznošću mjernog instrumenta). Relativna pogreška od 4.3% pokazuje da se radi o mjerenju prihvatljive točnosti (manje od 5%, što je ovdje razumna gornja granica dozvoljene pogreške).

Pogledajmo sada tablicu 1.2 za neko drugo mjerenje:

L_i/cm	$\Delta L_i/\mathrm{cm}$	$(\Delta L_i)^2/\mathrm{cm}^2$
31.6	-1.24	1.5376
35.0	-4.64	21.5296
29.7	0.66	0.4356
28.3	2.06	4.2436
27.2	3.16	9.9856

Tablica 1.2 - Rezultati drugog mjerenja duljine L

Srednja vrijednost:

$$\overline{L} = \frac{31.6 + \cdots + 27.2}{5} = 30.36\,\mathrm{cm}; \tag{1-12}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine):

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum(\Delta L_i)^2}{5 \cdot 4}} = 1.374\,\mathrm{cm}; \tag{1-13}$$

Maksimalna pogreška:

$$\Delta L_M = 3 \cdot \sigma_L = 4.1\,\mathrm{cm}; \tag{1-14}$$

Relativna pogreška:

$$\Delta L_R = \frac{3 \cdot \sigma_L}{\overline{L}} \cdot 100\% = 13.6\%; \tag{1-15}$$

Konačni zapis rezultata:

$$\begin{gathered} \left(\boxed{L = (30.4 \pm 1.4)\,\mathrm{cm}} \quad \boxed{\Delta L_R = 13.6\%} \right) \\ \boxed{L = (30 \pm 1)\,\mathrm{cm}} \quad \boxed{\Delta L_R = 13.6\%} \end{gathered} \tag{1-16}$$

Broj izmjerenih znamenki je tri što se vidi iz rezultata mjerenja (prvi stupac tablice 1.2, čiji je zapis određen preciznošću mjernog instrumenta) ali i iz prvog zapisa standardne devijacije koja je ovdje, samo ilustracije radi, izuzetno dana na dvije znamenke i govori nam, svojom prvom znamenkom, koja se nalazi na mjestu jedinica cm, da je ovo mjerenje nesigurno već oko određenja iznosa u centimetrima, a posljedično i oko svih milimetara iza toga. (Dobro je uočiti da se međurezultati računa *prije konačnog zapisa* obično zapisuju na veći broj decimalnih mjesta od izmjerenih.) Relativna pogreška od oko 14% pokazuje da se radi o mjerenju vrlo male točnosti, jer pogreške više od 5% su vrlo velike. Mi ćemo se uvijek držati općeg principa da standardnu devijaciju zaokružujemo na jednu pouzdanu znamenku (tj. $\sigma_L = 1$) pa je prema tome srednja vrijednost jednaka 30 cm, s obzirom da rezultati prilično "osciliraju" oko broja 30 (prema prvom stupcu tablice). Tako zapis mora izgledati ovako $L = (30 \pm 1)$ cm, kao što i piše gore. Ovdje možemo uočiti kako je mala točnost mjerenja dovela do smanjenja broja pouzdanih znamenki s tri na dvije.

Također uočavamo da manjoj točnosti mjernog postupka odgovara veća raspršenost odnosno veći interval unutar kojeg su smještene izmjerene vrijednosti.

Python i obrada rezultata mjerenja

Program Python i njegov modul Numpy vrlo su pogodni za obradu rezultata mjerenja. Ovdje je potrebno, nakon upoznavanja s osnovnim postupcima Pythona i Numpya, napisati program u kojem valja:

- Upisati broj mjerenja n;
- Napraviti petlju koja omogućuje upis podataka u objekt `array` čija je dimenzija dana brojem n;
- Ispisati unesene podatke i paziti na broj decimala u podatcima;
- Pomoću odgovarajuće naredbe za objekt `array` izračunati srednju vrijednost podataka;
- Pomoću odgovarajuće naredbe za objekt `array` izračunati `array` koji sadrži relativna odstupanja rezultata od srednje vrijednosti;
- Kvadrirati odstupanja i izračunati standardnu devijaciju aritmetičke sredine pomoću odgovarajućih operacija na `arrayu`;
- Izračunati relativnu i maksimalnu grešku i ispisati rezultate na standardan način. Paziti na pouzdane znamenke i na oblik zapisa, pri čemu valja rabiti različite Pythonove mogućnosti zaokruživanja.
- Pomoću modula Matplotlib nacrtati rezultate mjerenja kao točke na grafu i povući horizontalni pravac koji prikazuje srednju vrijednost podataka. Pažljivo opisati graf (naslov, oznake osi, jedinice, legenda).

Sve primjere obraditi Pythonom na gornji način.

Primjer 2 (neposredno mjerena veličina)

U pokusu valja izmjeriti duljinu x nekog predmeta. Uputa zahtijeva 7 mjerenja, obradu rezultata i zapis rezultata u standardnom obliku!

Dakle, imamo tablicu

x_i/m	Δx_i/m	$(\Delta x_i)^2 \times 10^{-6}$/m^2
7.364	0.0027	7.29
7.367	-0.0043	18.49.
7.363	0.0037	13.69
7.368	-0.0013	1.69
7.365	0.0017	2.89
7.366	0.0007	0.49
7.370	-0.0033	10.89

Tablica 1.3 - Rezultati mjerenja duljine x. Zbroj brojeva druge kolone nije nula (a morao bi biti) već se vrlo malo od nule razlikuje (rezultat je 0.0001).

Iz tablice, iz prve kolone, možemo procijeniti da će rezultat biti iskazan na četiri pouzdane znamenke (određene preciznošću mjerne skale do mm, tj. u ovom zapisu, na 3 decimalna mjesta). To će potvrditi i račun pogrešaka (standardna devijacija) pri obradi izmjerenih vrijednosti.

Srednja vrijednost:

$$\overline{x} = \frac{7.364 + \cdots + 7.370}{7} = 7.3667\,\mathrm{m}; \tag{1-17}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{7 \cdot 6}} = 0.0011\mathrm{m}; \tag{1-18}$$

Maksimalna pogreška:

$$\Delta x_M = 3 \cdot \sigma_x = 0.0033\,\mathrm{m}; \tag{1-19}$$

Relativna pogreška:

$$\Delta x_R = \frac{3 \cdot \sigma_x}{\overline{x}} \cdot 100\% = 0.04\%; \tag{1-20}$$

Konačni zapis rezultata:

$$\boxed{x = (7.367 \pm 0.001)\mathrm{m}} \quad \boxed{\Delta x_R = 0.04\%} \tag{1-21}$$

Pri konačnom zapisu rezultata vodili smo računa da je broj pouzdanih znamenki jednak 4, tj. imamo u ovom zapisu 3 decimalna mjesta, ali mogli smo napisati i rezultat ovako: 0.007367 km (na 6 decimalnih mjesta) pa bismo opet imali isti broj od četiri pouzdane znamenke. To pokazuje i standardna devijacija koja prvu nenultu znamenku ima na 3. decimalnom mjestu. Standardnu devijaciju zaokružili smo jednu pouzdanu znamenku koja se nalazi na mjestu tisućinki pa je zato na tisućinke zaokružena i srednja vrijednost.

Prema ranijim uputama, obraditi rezultate u Pythonu.

Zadatak 1.1 Rezultati mjerenja duljine predmeta su:

$$\begin{array}{llll} l_1 = 27.94\mathrm{cm} & l_2 = 27.96\,\mathrm{cm} & l_3 = 27.99\,\mathrm{cm} & l_4 = 27.97\,\mathrm{cm} \\ l_5 = 28.00\mathrm{cm} & l_6 = 27.93\mathrm{cm} & l_7 = 27.96\mathrm{cm} & l_8 = 27.98\mathrm{cm}. \end{array} \tag{1-22}$$

Obradite rezultate mjerenja prema gornjim uputama.
[Rezultati: $\overline{l} = 27.97\mathrm{cm}$, $\sigma_l = 0.01\,\mathrm{cm}$, $l = (27.97 \pm 0.01)\,\mathrm{cm}$.]

Zadatak 1.2 Mjerenjem promjera a kugle dobijeni su sljedeći rezultati:

a_i [cm]	Δa_i	$(\Delta a_i)^2$
4.81		
4.84		
4.76		
4.79		
4.82		

Obradite rezultate mjerenja (srednja vrijednost, standardna devijacija aritmetičke sredine, relativna pogreška) i izrazite rezultat u standardnoj formi! Prema ranijim uputama, obraditi rezultate u Pythonu.

RJEŠENJE: $\boxed{a = (4.80 \pm 0.01)\,\mathrm{cm}}$ $\Delta a_R = 0.9\%$.

Ponekad uvjeti mjerenja ne omogućuju višestruko mjerenje koje dovodi do obrade rezultata opisanih gore. U takvim je slučajevima potrebno uvesti procjene pogrešaka pri mjerenju. Primjerice, pri očitavanju položaja neke kazaljke na skali koja je podijeljena na milimetre, za očekivati je da će pogreška biti reda veličine milimetra. Tada, svako mjerenje možemo procijeniti na očitanu vrijednost $\pm 1\,\mathrm{mm}$ (ili $\pm 0.5\,\mathrm{mm}$) pa na taj način dobijemo ocjenu pouzdanosti mjerenja, dobijemo pogrešku pojedinog mjerenja i dobijemo mogućnost da na standardan način napišemo rezultate mjerenja. Sličnu ocjenu možemo uvesti pri mjerenju vremena zapornim satom - štopericom, jer je vrijeme reakcije oko 2 desetinke sekunde tako da svakom izmjerenom vremenu možemo procijeniti vrijednost do $\pm 0.2\,\mathrm{s}$. Svaki takav slučaj u ovom tekstu bit će u potpunosti objašnjen.

Primjer 3 (posredno mjerene veličine)

U pokusu direktno mjerimo niz veličina x_k, o kojima ovisi veličina F koja je funkcija veličina x_k tj.

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_k). \tag{1-23}$$

Želimo odrediti najvjerojatniju vrijednost veličine F i izračunati pogreške mjerenja.

Npr. trebamo odrediti volumen kvadra V mjerenjem duljina njegovih stranica a, b i c. Prema tome pišemo $V = V(a, b, c)$ i u tom je slučaju najvjerojatnija vrijednost $\overline{V}$ jednaka

$$\overline{V} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \tag{1-24}$$

Za svaku direktno mjerenu veličinu x_k (tj. a, b i c) možemo izračunati njenu standardnu devijaciju σ_{x_k}, a pomoću njih izračunavamo standardnu devijaciju funkcije σ_F (tj. σ_V) prema formuli

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot \sigma_{x_k} \right)^2}, \tag{1-25}$$

odnosno za slučaj računa volumena imamo

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a} \cdot \sigma_a \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b} \cdot \sigma_b \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c} \cdot \sigma_c \right)^2} \tag{1-26}$$

gdje su parcijalne derivacije jednostavno dane ovako $\partial V/\partial b = \partial(abc)/\partial b = ac$, itd., a σ_a je standardna devijacija izračunata po formuli iz primjera 1, tj. prema jednadžbi (3).

Neka su izmjerene vrijednosti stranica kvadra za račun volumena dane ovako

$$\begin{array}{lll} a_1 = 2.41\,\mathrm{cm} & a_2 = 2.40\,\mathrm{cm} & a_3 = 2.44\,\mathrm{cm} \\ b_1 = 4.22\,\mathrm{cm} & b_2 = 4.22\,\mathrm{cm} & b_3 = 4.24\,\mathrm{cm} \\ c_1 = 7.10\,\mathrm{cm} & c_2 = 7.16\,\mathrm{cm} & c_3 = 7.14\,\mathrm{cm} \end{array} \tag{1-27}$$

Tako izmjerene veličine *moramo* upisati u tablice! Ovdje to prikazujemo samo za stranicu a. Dakle

a_i/cm	Δa_i/cm	$(\Delta a_i)^2$/cm^2
2.41	0.01	0.0001
2.40	0.02	0.0004
2.44	-0.02	0.0004

Tablica 1.4 - Rezultati mjerenja duljine a

Račun srednjih vrijednosti (npr. $\overline{a}$ itd.), pogrešaka pojedinog mjerenja (npr. $\Delta a_1 = \overline{a} - a_1$ itd.), te relativnih pogrešaka i standardnih devijacija (σ_a npr.) prema prethodnom primjeru daje nam sljedeće rezultate za direktno mjerene veličine

$$\begin{array}{ll} \boxed{a = (2.42 \pm 0.01)\,\mathrm{cm}} & \boxed{\Delta a_R = 1.24\,\%} \\ \boxed{b = (4.23 \pm 0.01)\,\mathrm{cm}} & \boxed{\Delta b_R = 0.71\,\%} \\ \boxed{c = (7.13 \pm 0.02)\,\mathrm{cm}} & \boxed{\Delta c_R = 0.84\,\%}. \end{array} \tag{1-28}$$

Srednja vrijednost volumena ili najvjerojatnija vrijednost volumena jednaka $\overline{V} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = 72.987\,\mathrm{cm}^3$. Dakle, srednju vrijednost posredno mjerene (izračunate) veličine računamo iz srednjih vrijednosti direktno mjerenih veličina.

Standardna je devijacija volumena dana prema gornjoj formuli s parcijalnim derivacijama, tj.

$$\begin{aligned} \sigma_V &= \sqrt{(\overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \sigma_a)^2 + (\overline{a} \cdot \overline{c} \cdot \sigma_b)^2 + (\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \sigma_c)^2} \\ &= \sqrt{(0.3016)^2 + (0.1725)^2 + (0.2047)^2} \\ &= 0.40\,\mathrm{cm}^3. \end{aligned} \tag{1-29}$$

pa je maksimalna pogreška jednaka

$$\Delta V_M = 3 \cdot \sigma_V = 1.21\,\mathrm{cm}^3, \tag{1-30}$$

a relativna je pogreška

$$\Delta V_R = \frac{\Delta V_M}{\overline{V}} \cdot 100 = 1.66\%. \tag{1-31}$$

Konačni je rezultat

$$\boxed{V = (73.0 \pm 0.4)\,\mathrm{cm}^3} \qquad \boxed{\Delta V_R = 1.66\,\%}. \tag{1-32}$$

Rezultat volumena smo iskazali na tri pouzdane znamenke, jer zaokruživši standardnu devijaciju na jednu pouzdanu znamenku (koja je na mjestu desetica) i srednju vrijednost volumena moramo zaokružiti na desetice (jedno decimalno mjesto) tj. $72.987 \simeq 73.0$.

Primijeniti ranije upute o Pythonu u obradi rezultata mjerenja. Napisati program koji će obaviti:

- upisati tri grupe podataka s istim brojem pojedinih mjerenja n prema uputama uz Primjer 1;
- izračunati srednje vrijednosti, standardne devijacije, relativne pogreške i ispisati rezultate vodeći računa o pouzdanim znamenkama;
- prema formulama za volumen, napisati izraz za standardnu devijaciju volumena iz ranijih podataka za mjerene podatke i za relativnu pogrešku;
- zapisati konačni rezultat za volumen vodeći računa o ispravnom zapisu.

PRAVILA O POUZDANIM ZNAMENKAMA

1. Nule ispred brojeva nisu pouzdane znamenke.

Npr. $0.03\,\mathrm{s}$ (1 pouzdana znamenka)

$0.0075\,\mathrm{s}$ (2 pouzdane znamenke)

2. Kada su iza brojeva, nule jesu pouzdane znamenke.

Npr. $1500\,\mathrm{g} = 1.500 \times 10^3\,\mathrm{g}$ (4 pouzdane znamenke)

$9.20\,\mathrm{m} = 9.20 \times 10^2\,\mathrm{cm}$ (3 pouzdane znamenke)

Slično za iznose manje od 1:

$0.00023\,\mathrm{m} = 2.3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ (2 pouzdane znamenke)

$0.000230\,\mathrm{m} = 2.30 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}$ (3 pouzdane znamenke).

3. Množenje i dijeljenje

Kod množenja i dijeljenja veličina koje su određene različitim brojem pouzdanih znamenki, rezultat ima onoliko pouzdanih znamenki koliko i veličina s najmanje pouzdanih znamenki.

Primjer (s 2 pouzdane znamenke):

$$\begin{aligned} S = \pi r^2 = \pi \cdot (6.0\,\mathrm{cm})^2 &\neq 113.0973355\,\mathrm{cm}^2 \\ &\neq 113\,\mathrm{cm}^2 \\ &= 1.1 \times 10^2\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

4. Zbrajanje i oduzimanje

Kod zbrajanja i oduzimanja važan je broj decimalnih mjesta, a ne broj pouzdanih znamenki neke veličine. Rezultat ima onoliko decimalnih mjesta koliko ih ima član u zbroju ili razlici s najmanjim brojem decimalnih mjesta.

Primjer (s 1 decimalnim mjestom):

$$23.2 + 5.174 \neq 28.374$$
$$23.2 + 5.2 = 28.4.$$

Programski paket Python posjeduje nekoliko naredbi o zaokruživanju brojeva na određeni broj znamenki. Valja proučiti sve naredbe i znati zapisivati brojeve na način koji slijedi upute o broju pouzdanih znamenki.

5. Primjeri zapisa rezultata:

ne ovako	**nego**
$a = \left(3.877 \pm 1.86 \cdot 10^{-3}\right)\,\mathrm{cm}$	$a = (3.877 \pm 0.002)\mathrm{cm}$
$V = (20.419 \pm 0.044)\mathrm{cm}^3$	$V = (20.42 \pm 0.04)\mathrm{cm}^3$
$d = (12.84 \pm 0.018)\mathrm{mm}$	$d = (12.84 \pm 0.02)\mathrm{mm}$
$V = (1108.39 \pm 4.66)\mathrm{mm}^3$	$V = (1108 \pm 5)\mathrm{mm}^3$
$V = (1108.39 \pm 109.66)\mathrm{mm}^3$	$V = (1.1 \pm 0.1) \cdot 10^3\,\mathrm{mm}^3$
$\rho = (7669.64 \pm 84.34)\mathrm{kg\,m}^{-3}$	$\rho = (7.67 \pm 0.08) \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$

Valja uočiti da su **sve** standardne devijacije zaokružene na jednu pouzdanu znamenku. Ako je ta znamenka desetica, tada je i srednja vrijednost zaokružena na desetice (u svim jedinicama). Ako je znamenka standardne devijacije stotica, tada i srednja vrijednost mora biti zaokružena na stotice (u svim jedinicama) itd. Treba i uočiti da se ponekad mora prijeći na množenje s faktorom 10^3, ovisno o veličini standardne devijacije.

PREGLED FORMULA ZA RAČUN POGREŠAKA

Aritmetička sredina

$$\overline{L} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} L_i}{n} = \frac{L_1 + \cdots + L_n}{n} \tag{1-33}$$

Pogreška pojedinog mjerenja

$$\Delta L_i = \overline{L} - L_i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{1-34}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine) σ_L direktno mjerene veličine

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\Delta L_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(\Delta L_1)^2 + \cdots + (\Delta L_n)^2}{n \cdot (n-1)}} \tag{1-35}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine) σ_F posredno mjerene veličine $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\sigma_F = \sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \cdot \sigma_{x_k} \right)^2}, \tag{1-36}$$

gdje je σ_{x_k} standardna devijacija direktno mjerenih veličina x_i, jednadžba (1-35).

Posebni slučajevi:

$$\begin{array}{llll} \text{ako je} & F = x_1 \pm x_2 \pm \cdots \pm x_k & \text{tada je} & \sigma_F = \sqrt{(\sigma_{x_1})^2 + (\sigma_{x_2})^2 + \cdots + (\sigma_{x_k})^2} \\ \text{ako je} & F = x_1^m \cdot x_2^n & \text{tada je} & \sigma_F = \overline{F} \cdot \sqrt{\left(m \frac{\sigma_{x_1}}{\overline{x}_1} \right)^2 + \left(n \frac{\sigma_{x_2}}{\overline{x}_2} \right)^2} \end{array} \tag{1-37}$$

Maksimalna pogreška

$$\Delta L_M = 3 \cdot \sigma_L, \tag{1-38}$$

Maksimalna apsolutna pogreška

$$\Delta F = \sum_{k=1}^{k=n} \left| \frac{\partial F}{\partial x_k} \right| |\Delta x_k| \tag{1-39}$$

Relativna pogreška

$$\Delta L_R = \frac{3 \cdot \sigma_L}{\overline{L}} \cdot 100\ \%. \tag{1-40}$$

Rezultate pokusa (mjerenja veličine L) prikazujemo ovako

$$\boxed{L = (\overline{L} \pm \sigma_L)\ [\text{jedinice}]} \qquad \boxed{\Delta L_R = \_\_\%} \tag{1-41}$$

PREGLED FORMULA ZA SUMIRANJE

U više slučajeva u ovom tekstu srećemo se s formulama koje sadržavaju simbol $\sum_i$. To je skraćeni zapis sume koji ima sljedeće značenje:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \tag{1-42}$$

Važno je uočiti da oznaka indeksa i ili j ima isto značenje. Često se zato takvi indeksi zovu "nijemi indeksi" (ili "dummy indices"). Vrlo često se ne napiše ni gornja ni donja granica sumiranja (ovdje je to n) jer je jasno iz konteksta problema koliki je n. Tako često pišemo umjesto gornjeg zapisa ovo

$$\sum_{i} x_i \tag{1-43}$$

i uzima se da zbrajanje kreće od 1 do nekog n. Pogledajmo neke važne slučajeve koji uključuju različite kombinacije unutar znaka sumacije Σ_i.

Primjer Neka je zadana tablica u kojoj se javljaju veličine x_i i y_i:

x_i	0	1.5	2.6	3.9	4.2
y_i	1.3	2.7	3.1	4.6	5.2

Tablica 1.5 - Dva skupa veličina

Izračunajmo sljedeće izraze, gdje je $n = 5$ tj. broj x_i−ova i y_i.

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = \sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 0 + 1.5 + 2.6 + 3.9 + 4.2 = 12.2;$$

$$\sum_{j=1}^{5} y_j = y_1 + y_2 + \cdots + y_5 = 1.3 + 2.7 + 3.1 + 4.6 + 5.2 = 16.9;$$

$$\left(\sum_i x_i\right) \cdot \left(\sum_j y_j\right) = (0 + 1.5 + 2.6 + 3.9 + 4.2) \cdot (1.3 + 2.7 + 3.1 + 4.6 + 5.2) = 12.2 \cdot 16.9;$$

$$\sum_i x_i y_i = \sum_j x_j y_j = 0 \cdot 1.3 + 1.5 \cdot 2.7 + 2.6 \cdot 3.1 + 3.9 \cdot 4.6 + 4.2 \cdot 5.2 = \ldots;$$

$$\sum_i x_i^2 = 0^2 + 1.5^2 + 2.6^2 + 3.9^2 + 4.2^2 = \ldots;$$

$$\left(\sum_i x_i\right)^2 = (0 + 1.5 + 2.6 + 3.9 + 4.2)^2 = 12.2^2 = \ldots;$$

$$\sum_i x_i y_i^2 = 0 \cdot 1.3^2 + 1.5 \cdot 2.7^2 + 2.6 \cdot 3.1^2 + 3.9 \cdot 4.6^2 + 4.2 \cdot 5.2^2 = \ldots$$

$$\sum_i x_i^2 y_i^2 = 0^2 \cdot 1.3^2 + 1.5^2 \cdot 2.7^2 + 2.6^2 \cdot 3.1^2 + 3.9^2 \cdot 4.6^2 + 4.2^2 \cdot 5.2^2 = \ldots$$

Sumacije gornjih vrsta (koje gore nisu do kraja brojčano izračunate) javljaju se pri računima u teoriji najmanjih kvadrata i zato valja razumjeti i pažljivo primijeniti gore opisana pravila. U Pythonu uvesti dva objekta `array` čija je dimenzija jednaka broju podataka u tablici (5). Upisati podatke interaktivno i pomoću operacija na ta dva objekta izračunati svih 8 izraza za različite kombinacije sa sumiranjem.

F Izrazi i formule za odabrana poglavlja fizike i matematike

Ovdje je dan pregled izraza i formula za teme iz fizike koje sadržajno ulaze u područja obrađena na predavanjima i u laboratorijsko računalnom praktikumu. U drugom dijelu ovog odjeljka dan je pregled nekih osnovnih matematičkih formula i izraza koji su važni za praćenje nastave i obavljanje pokusa u praktikumu.

1. KINEMATIKA I DINAMIKA MATERIJALNE TOČKE

2. Newtonov aksiom: vremenska promjena količine gibanja tijela (materijalne točke - čestice) $\vec{p} = m\vec{v}$ jednaka je (vektorskom) zbroju vanjskih sila koje djeluju na to tijelo, tj.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \quad \text{ili} \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_j \vec{F}_j \quad \text{ili} \\ m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_j \vec{F}_j \quad \text{ili} \quad m\ddot{\vec{r}} = \sum_j \vec{F}_j; \end{aligned} \tag{1-1}$$

$\ddot{\vec{r}}$ - akceleracija tijela; na desnoj strani je (vektorski) zbroj vanjskih sila koje djeluju na tijelo mase m.
Iznos brzine $v(t)$ i položaj $x(t)$, za gibanje duž pravca (os x):

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t')\,dt'; \qquad a(t') = \frac{d^2x}{dt'^2} \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t v(t')\,dt'. \tag{1-2}$$

x_0 - početni položaj tijela; v_0 - iznos početne brzine tijela; $v(t)$ - iznos trenutne brzine tijela.
Jednoliko gibanje po pravcu ($\sum_j \vec{F}_j = 0$, tj. rezultantna sila jednaka je nuli):

$$x(t) = x_0 + v_0 t; \quad v(t) = v_0; \tag{1-3}$$

Stalna sila - jednoliko ubrzano gibanje akceleracijom a

$$\begin{aligned} a = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad & v(t) = \frac{dx}{dt} \\ x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2; \quad & v(t) = v_0 + at; \end{aligned} \tag{1-4}$$

Sila teža (konstantna sila) - jednadžba gibanja

$$\vec{G} = mg(-\hat{\jmath}); \qquad m\ddot{y} = -mg \tag{1-5}$$

$y(t)$ - vertikalni položaj tijela; "+"-smjer je prema gore!
g - akceleracija sile teže: $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

Rješenje jednadžbe gibanja (gibanje u vertikalnom smjeru):

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2; \quad v(t) = v_0 - gt \tag{1-6}$$

y_0 - početna visina tijela. *Ako je*:
(a) $v_0 = 0$ - slobodni pad s visine y_0;
(b) $v_0 > 0$ (u vertikalnom smjeru) - vertikalni hitac prema gore;
(c) $v_0 < 0$ (u vertikalnom smjeru) - vertikalni hitac prema dolje;

Horizontalni hitac
$v_0 > 0$ (u horizontalnom smjeru):

$$\begin{gathered} v_x(t) = v_0 \qquad v_y(t) = -gt \\ x(t) = v_0 t \qquad y(t) = -\frac{g}{2} t^2, \quad \text{ili} \\ y(x) = y_0 - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \end{gathered} \tag{1-7}$$

- y_0 - visina s koje je "hitac" ispaljen.

Kosi hitac
v_0 koso prema gore pod kutom α (iz ishodišta, tj. $y_0 = 0$):

$$\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos\alpha)\, t & v_x(t) &= v_0 \cos\alpha \\ y(t) &= (v_0 \sin\alpha)\, t - \frac{g}{2} t^2 & v_y(t) &= v_0 \sin\alpha - gt \quad \text{ili} \\ y(x) &= x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2; & Y &= \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \\ t_\uparrow &= \frac{v_0 \sin\alpha}{g} & X &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \end{aligned} \tag{1-8}$$

Y - maksimalna visina; $t_\uparrow$ - vrijeme uspinjanja; X - horizontalni domet hica.

Sila trenja (iznos sile)

$$F_{tr} = \mu F_N \tag{1-9}$$

μ - koeficijent trenja: F_N - sila pritiska tijela na podlogu.

Sila opruge (sila ovisna o koordinati)

$$F(x) = -kx \tag{1-10}$$

k -konstanta opruge: $[k] = \mathrm{N/m}$; x - produljenje opruge (prema nerastegnutom položaju).

Kružno gibanje po kružnici polumjera r

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad \vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}, \qquad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}; \tag{1-11}$$

$\vec{\omega}$ - kutna brzina; $\vec{a}_r$ - radijalna akceleracija; r - polumjer putanje;
$\vec{a}_t$ - tangencijalna akceleracija; $\vec{\alpha}$ - kutna akceleracija.
Jednadžba putanje - kružnice (u parametarskom obliku)

$$x(t) = r\cos\theta(t) = r\cos\omega t; \qquad y(t) = r\sin\theta(t) = r\sin\omega t. \tag{1-12}$$

$\theta(t)$ - prevaljeni kut;
Jednolika vrtnja po kružnici polumjera r:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t; \tag{1-13}$$

$\theta(t)$ - prevaljeni kut; ω_0 - stalna kutna brzina;
Jednoliko ubrzana vrtnja:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2; \quad \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}; \qquad \alpha = \frac{d\omega(t)}{dt}; \tag{1-14}$$

α - kutna akceleracija; $\omega(t)$ - trenutna kutna brzina.
Centripetalna sila:

$$\vec{F}_{cp} = ma_{cp}(-\hat{r}) = m\frac{v^2}{r}(-\hat{r}) \tag{1-15}$$

$\hat{r}$ - jedinični vektor koji "gleda" od središta "prema van".

♠ ♠

2. RAD, ENERGIJA, SNAGA; ZAKONI OČUVANJA

Rad W

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{2-16}$$

Rad stalne sile na putu s

$$W_s = F\cdot\cos\alpha\cdot s; \tag{2-17}$$

W_s - obavljeni rad na putu s; $F\cdot\cos\alpha$ - komponenta (vektora) sile u smjeru puta s.

Kinetička energija E_k i potencijalna energija E_p u polju sile teže

$$E_k = \frac{mv^2}{2}; \qquad E_p = mgh; \tag{2-18}$$

$\vec{v}$ - brzina čestice mase m; $v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v}$;
h - visina iznad referentne razine (npr. tla).
Potencijalna energija opruge

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{2-19}$$

k - konstanta opruge; x - pomak od ravnotežnog položaja.

Snaga
Prosječna snaga $\overline{P}$ definira se kao rad ΔW izvršen u vremenu Δt, tj.

$$\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{2-20}$$

Trenutna snaga

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}. \tag{2-21}$$

Koeficijent iskorištenja
Korisnost nekog stroja

$$\eta = \frac{W_{\text{dobiveni}}}{W_{\text{uloženi}}}, \tag{2-22}$$

(obično se izražava u postocima).

Veza rada i potencijalne energije: rad *konzervativne* sile izvršen između dva položaja tijela jednak je razlici potencijalne energije početnog (A) i konačnog (B) položaja tijela, tj.

$$W_{\mathrm{AB}} = E_p(A) - E_p(B) = -\Delta E_p, \tag{2-23}$$

što se može napisati i ovako

$$\Delta E_p = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{ili} \quad \vec{F} = -\nabla E_p. \tag{2-24}$$

Zakon očuvanja mehaničke energije: u zatvorenom (izoliranom) sustavu ukupna mehanička energija je konstantna, tj.

$$E_k + E_p = \text{konst.} \tag{2-25}$$

Ako sustav nije zatvoren, tada je promjena mehaničke energije jednaka radu vanjskih sila koje djeluju na sustav

$$E_2 - E_1 = \Delta E_p + \Delta E_k = W. \tag{2-26}$$

Zakon očuvanja energije (uz djelomični prijelaz energije u toplinu Q)

$$E_k + E_p = E_k' + E_p' + Q. \tag{2-27}$$

Zakon impulsa sile i količine gibanja: Impuls sile jednak je promjeni količine gibanja tijela na koje djeluje ta sila, tj.

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \tag{2-28}$$

a impuls sile je vremenski integral sile, tj.

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt. \tag{2-29}$$

Zakon očuvanja količine gibanja

Savršeno elastičan sudar:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' \quad \text{ili} \\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= m_1\vec{v}_1{}' + m_2\vec{v}_2{}' \end{aligned} \tag{2-30}$$

Savršeno neelastičan sudar:

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{P} \qquad \text{ili} \\ m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 &= (m_1 + m_2)\vec{v}. \end{aligned} \tag{2-31}$$

Faktor (koeficijent) restitucije pri izravnom (centralnom) sudaru dvije čestice jednak je omjeru relativnih brzina poslije i prije sudara

$$k = \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}; \tag{2-32}$$

$k = 1$ - za savršeno elastičan sudar; $k = 0$ - za savršeno neelastičan sudar.

♠ ♠

3. STATIKA

Statika proučava ravnotežu tijela pod utjecajem sila. Hvatište vanjske sile smije se pomicati uzduž pravca djelovanja, a da se time djelovanje sile ne promijeni. Konkurentne sile su one čiji se pravci djelovanja sijeku u jednoj točki, te se one mogu vektorski zbrojiti u rezultantnu silu

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i. \tag{3-33}$$

Na taj se način djelovanje konkurentnih sila na kruto tijelo svodi na djelovanje sila na materijalnu točku. Moment sile utječe na rotaciju tijela. Moment sile definiran s obzirom na neku točku je

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{3-34}$$

$\vec{r}$ - vektor položaja bilo koje točke na pravcu djelovanja sile $\vec{F}$, s obzirom na točku u odnosu na koju računamo moment.

Da bi se osigurala translacijska i rotacijska ravnoteža krutog tijela, moraju biti ispunjena dva uvjeta: vektorski zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na kruto tijelo mora biti jednak nuli i vektorski zbroj svih vanjskih momenata (s obzirom na bilo koju točku) mora biti jednak nuli

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad \sum_i \vec{M}_i = 0; \tag{3-35}$$

$\vec{F}_i$ - vanjska sila ("i-ta") koja djeluje na tijelo;

$\vec{M}_i$ - vanjski moment ("i-ti") koji djeluje na tijelo.

Težište sustava materijalnih točaka i krutog tijela

Težište sustava materijalnih točaka:

$$\begin{gathered} \vec{r}_{\mathrm{T}} = \frac{\sum\limits_i \vec{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \quad \text{ili} \\ x_{\mathrm{T}} = \frac{\sum\limits_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{\sum\limits_i y_i m_i}{\sum_i m_i} \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{\sum\limits_i z_i m_i}{\sum_i m_i} \end{gathered} \tag{3-36}$$

Težište krutog tijela mase M:

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\int y\,dm \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{1}{M}\int z\,dm \tag{3-37}$$

♠ ♠

4. DINAMIKA KRUTOG TIJELA

Jednadžba gibanja krutog tijela (oko stalne osi z)

$$M_z = I_z \alpha; \tag{4-38}$$

M_z - komponenta momenta sile s obzirom na os (z) oko koje tijelo rotira;

I_z - moment tromosti tijela u odnosu na os rotacije (os z); α - kutna akceleracija tijela.

Koordinate centra mase (CM)

$$\begin{gathered} x_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i}; \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i y_i m_i}{\sum_i m_i}; \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_i z_i m_i}{\sum_i m_i} \quad \text{ili} \\ x_{\mathrm{CM}} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}; \quad y_{\mathrm{CM}} = \frac{\int y\,dm}{\int dm}; \quad z_{\mathrm{CM}} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}. \end{gathered} \tag{4-39}$$

Moment tromosti (oko osi z)

$$I = \int r^2 dm; \tag{4-40}$$

r - udaljenost infinitezimalnog elementa mase dm od osi z; $dm = \rho(x, y, z)\, dV$.

Steinerov poučak (o paralelnim osima)

$$I = I_0 + md^2; \tag{4-41}$$

I_0 - moment tromosti oko osi kroz centar mase; I - moment tromosti oko osi paralelnoj s osi kroz centar mase;

d - udaljenost paralelnih osi; m - masa tijela.

Kutna količina gibanja

Kutna količina gibanja materijalne točke s obzirom na točku O

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}); \tag{4-42}$$

$\vec{r}$ - radijus-vektor koji spaja materijalnu točku s točkom O;

Kutna količina gibanja tijela s obzirom na stalnu os z oko koje tijelo rotira

$$L_z = I_z \omega \tag{4-43}$$

L_z - komponenta ukupne kutne količine gibanja $\vec{L}$ s obzirom na os rotacije (os z);

ω - iznos kutne brzine tijela;

Kutna količina gibanja tijela koje rotira oko glavne osi tromosti (inercije):

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{4-44}$$

$\vec{\omega}$ - kutna brzina tijela;

Jednadžba gibanja za rotaciju krutog tijela (oko stalne osi z)

$$M_z = \frac{d}{dt} L_z. \tag{4-45}$$

Osnovna jednadžba rotacije krutog tijela

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}; \tag{4-46}$$

$\vec{M}$ i $\vec{L}$ - računaju se s obzirom na nepomičnu točku oko koje tijelo rotira. Ako os oko koje tijelo rotira nema nepomičnu točku u danom inercijalnom sustavu, onda se računa sve s obzirom na centar mase.

Kinetička energija rotacije tijela momenta tromosti I

$$E_{k/rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}. \tag{4-47}$$

Rad pri rotaciji oko stalne osi (os z)

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} M_z \, d\phi. \tag{4-48}$$

Snaga pri rotaciji oko stalne osi (os z)

$$P = M_Z \omega. \tag{4-49}$$

♠ ♠

5. GRAVITACIJA

Newtonov opći zakon gravitacije: dvije materijalne točke privlače se gravitacijskom silom oblika

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{21}; \tag{5-50}$$

$\vec{F}_{12}$ - sila "tijela 2" na "tijelo 1"!

Vrijedi i $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$! $\hat{r}_{21}$ - jedinični vektor koji "gleda" *od 2 prema 1*!

G - gravitacijska konstanta: $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$.

Izraz vrijedi i za dvije homogene kugle, ali i za kugle čija gustoća ovisi ovisi samo o udaljenosti od središta kugle.

Jakost gravitacijskog polja tijela mase m_1 definiramo kao omjer gravitacijske sile i mase tijela na koje djeluje ta sila

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}. \tag{5-51}$$

Jedinica za gravitacijsko polje je (isto kao i za akceleraciju) $\mathrm{m/s^2}$.

Gravitacijska potencijalna energija

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{5-52}$$

Gravitacijska potencijalna energija čestice mase m i protežitog tijela mase M:

$$U = -Gm\int\limits_{V_M}\frac{dM}{r}; \tag{5-53}$$

Integracija se proteže po cijelom volumenu V_M tijela M.

Ukupna energija tijela mase m u gravitacijskom polju tijela mase M

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} \tag{5-54}$$

Gravitacijski potencijal tijela mase m je omjer gravitacijske potencijalne energije i mase

$$\phi = \frac{U}{m}. \tag{5-55}$$

♠ ♠

6. INERCIJSKI I NEINERCIJSKI SUSTAVI

Galilejeve transformacije Radijusvektori položaja, brzine i akceleracije materijalne točke s obzirom na inercijalni sustav $S(\vec{r}, \vec{v}, \vec{a})$ i inercijalni sustav $S'(\vec{r}', \vec{v}', \vec{a}')$ povezani su Galileievim transformacijama

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}'(t) + \vec{r}_0(t) \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}'(t) + \vec{v}_0 \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}'(t) \end{aligned} \tag{6-56}$$

gdje su $\vec{r}_0(t)$ i $\vec{v}_0$ radijusvektor položaja i brzine ishodišta sustava S' u odnosu na sustav S. U slučaju kada su sustavi S i S' pravokutni (Kartezijevi) sustavi čije se osi x i x' poklapaju, a y i z osi su paralelne osima y' i z', te im se u početnom trenutku ishodišta poklapaju, Galileieve transformacije poprimaju sljedeći oblik

$$\begin{aligned} x &= x' + v_0 t \qquad & v_x &= v'_x + v_0 \\ y &= y' & v_y &= v'_y \\ z &= z' & v_z &= v'_z. \end{aligned} \tag{6-57}$$

Inercijske sile u neinercijskom sustavu Ubrzava li se (neinercijski) sustav S' u odnosu na inercijski sustav S akceleracijom $\vec{a}$, na tijelo u sustavu S' djeluje inercijska sila $\vec{F}_i$ koja je dana ovako

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}; \tag{6-58}$$

$\vec{F}_i$ - inercijska sila; $\vec{a}$ - akceleracija (neinercijskog) sustava;
Inercijska sila pri jednolikom kružnom gibanju:

$$\vec{F}_{cf} = m\frac{v^2}{r}\hat{r}; \tag{6-59}$$

$\vec{F}_{cf}$ - centrifugalna sila na tijelo u "njegovom" sustavu;
$v^2/r = a_{cf} = |\vec{a}_{cp}|$ - centrifugalna akceleracija (akceleracija neinercijskog sustava) po iznosu jednaka centripetalnoj akceleraciji.
$\hat{r}$ - jedinični vektor koji gleda "od središta", tj. smjer inercijske sile je suprotan centripetalnoj akceleraciji (koja "gleda" prema središtu).

Coriolisova sila Kada se tijelo mase m giba brzinom $\vec{v}'$ u odnosu na rotirajući sustav, na njega djeluje (osim centrifugalne) i Coriolisova sila dana ovako

$$\vec{F}_{\mathrm{Cor}} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}, \tag{6-60}$$

$\vec{\omega}$ - kutna brzina rotirajućeg sustava.

♠ ♠

7. RELATIVISTIČKA MEHANIKA

Lorentzove transformacije
Za prijelaz iz inercijalnog sustava S u inercijalni sustav S' koji se s obzirom na S giba stalnom brzinom v u pozitivnom smjeru osi x vrijede Lorentzove transformacije

$$\begin{gathered} x' = \gamma(x - vt) = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \\ t' = \gamma(t - vx/c^2) = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{gdje je} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{gathered} \tag{7-61}$$

Inverzne transformacije iz sustava S' u S:

$$\begin{gathered} x = \gamma(x' + vt') = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \\ t = \gamma(t' + vx'/c^2) = \frac{t' + vx'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{gathered} \tag{7-62}$$

Kontrakcija duljine
Ako štap u odnosu na sustav S u kojem miruje ima duljinu ℓ_0, za promatrača u sustavu S' , u odnosu na koji se štap giba , njegova će duljina biti kraća

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{7-63}$$

Dilatacija vremena
Ako je vremenski interval između dva događaja (npr. dva otkucaja sata, srca,...) u istoj točki prostora inercijskog sustava S jednak Δt_0 (vlastito vrijeme) , vremenski interval između ta ista dva događaja, ali mjeren u sustavu S', je produljen (sat ili srce kucaju usporeno)

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7-64}$$

Relativističko slaganje brzina

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v/c^2}; \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}; \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v/c^2)}; \tag{7-65}$$

u'_x - brzina tijela u sustavu S' koji se giba brzinom v u smjeru osi x u odnosu na mirni sustav S;
Inverzne transformacije (iz sustava S' u sustav S)

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}; \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}; \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + u'_x v/c^2)}. \tag{7-66}$$

Relativistička količina gibanja

$$\vec{p} = \gamma(v)\, m\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{7-67}$$

Ukupna energija E, energija mirovanja E_0 i kinetička energija E_k:

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad E_0 = mc^2 \qquad E_k = E - E_0. \tag{7-68}$$

Veza između ukupne energije E i količine gibanja p, te između brzine, količine gibanja i ukupne energije:

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \qquad \vec{v} = \frac{c^2}{E}\vec{p}. \tag{7-69}$$

♠ ♠

8. STATIKA I DINAMIKA FLUIDA

Tlak
Tlak se definira kao omjer sile i površine na koju ta sila djeluje

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{8-70}$$

p - tlak; $[p]$ =N/m^2= paskal = Pa; 1 atm = 1.01325 × 10^{5}Pa; 1 bar = 10^{5}Pa; "760 mm Hg" = 1 atm.
Ako je sila jednaka u svim točkama površine S tada je tlak jednak

$$p = \frac{F}{S}. \tag{8-71}$$

Pascalov princip kaže da je u svakoj točki mirnog nestlačivog fluida tlak jednak.
Tlak na dubini h

$$p = p_0 + \rho g h; \tag{8-72}$$

p_0 - vanjski tlak; h - dubina (mjerena od površine tekućine);
ρ - gustoća tekućine;
$\rho g h$ - hidrostatski tlak uzrokovan težinom tekućine.

Uzgon
Kada je tijelo uronjeno u fluid, kao posljedica hidrostatskog tlaka javlja se rezultantna sila prema gore koja se zove *uzgon* i on je jednak

$$F_U = \rho_f V_u g \tag{8-73}$$

ρ_f - gustoća fluida; V_u - volumen uronjenog dijela tijela u fluid.
Arhimedov zakon kaže da se težina tijela uronjenog u fluid smanjuje za iznos težine istisnutog fluida.
Koeficijent površinske napetosti σ definira se izrazom

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta S} \tag{8-74}$$

ΔW - rad potreban za povećanje površine ΔS.
Jednadžba kontinuiteta predstavlja zakon očuvanja mase

$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2 = \text{konst.} \tag{8-75}$$

v_1 - brzina tekućine na "mjestu 1"; S_1 - površina presjeka cijevi na "mjestu 1".
Volumni protok je omjer volumena tvari (fluida) ΔV koja proteče za vremenski interval Δt i tog vremenskog intervala

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot v. \tag{8-76}$$

$[q]$=m^3/s.
Bernoullijeva jednadžba za stacionarno strujanje nestlačivog idealnog fluida (predstavlja zakon očuvanja energije):

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} = \text{konst.} \tag{8-77}$$

p_i - (vanjski) tlak na mjestu "i"; h_i - visina mjesta "i";
v_i - brzina protjecanja na mjestu "i".
Sila viskoznog trenja je sila među dva susjedna sloja fluida čija je površina S

$$F_\eta = \eta S \frac{dv}{dz}; \tag{8-78}$$

η - dinamički koeficijent viskoznosti tekućine;
dv/dz - promjena brzine okomito na smjer toka tekućine;
S - površina sloja tekućine između kojih se javlja sila F_η.
Laminarno strujanje nastaje ako je Reynoldsov broj

$$\text{Re} = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{8-79}$$

manji od kritičnog.

Re - Reynoldsov broj određuje prijelaz iz laminarnog u turbulentno strujanje: Re<Re$_{\text{krit.}}$: Re$_{\text{krit.}}$ - kritični Reynoldsov broj;

d - karakteristična dimenzija (za cijev kružnog presjeka jednaka je promjeru, za kvadratni presjek jednaka je stranici kvadrata); ρ - gustoća fluida.

v - brzina strujanja fluida (odnosno brzina tijela koje se giba kroz fluid); η - dinamički koeficijent viskoznosti.

Raspodjela brzina u uskoj cijevi (kapilari) pri laminarnom strujanju realnog fluida

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L}(R^2 - r^2) \tag{8-80}$$

L - duljina cijevi; R - polumjer cijevi (kapilare);

r - udaljenost od sredine cijevi; $p_1 - p_2$ - razlika tlakova na ulaznom i izlaznom dijelu cijevi;

η - koeficijent dinamičke viskoznosti.

Poiseuilleov zakon - u slučaju gornje raspodjele brzina, volumni protok je jednak

$$q_V = \frac{\pi}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{L}R^4. \tag{8-81}$$

Stokesova sila - sila na kuglu polumjera R koja se giba kroz fluid konstantnom brzinom v

$$F_S(\text{kugla}) = 6\pi\eta R v. \tag{8-82}$$

♠ ♠

9. TITRANJE

Harmonički oscilator

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right) = A\cos(2\pi\nu t + \phi); \tag{9-83}$$

A - amplituda titranja; ω - kružna frekvencija: $\omega = 2\pi\nu$;

T - period (titrajno vrijeme): $T = 2\pi/\omega = 1/\nu$;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; \tag{9-84}$$

ϕ - faza titranja; ν - frekvencija;

k - konstanta opruge (konstanta iz Hookeovog zakona $F = kx$): $k = m\omega^2$.

Energija titranja

$$E_k(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 \qquad E_p(t) = \frac{1}{2}k\,(x(t))^2 \tag{9-85}$$

E_k - kinetička energija tijela; E_p - potencijalna energija;

$x(t)$ - elongacija tijela; $\frac{d}{dt}x(t)$ - brzina tijela.

Matematičko njihalo

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t + \phi) = \theta_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right); \tag{9-86}$$

θ_0 - amplituda (maksimalni kutni otklon); T - titrajno vrijeme (period)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad \text{(za mali kut otklona);} \tag{9-87}$$

ℓ - duljina niti matematičkog njihala; g - akceleracija sile teže;

Torzijsko njihalo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right); \tag{9-88}$$

θ_0 - amplituda (maksimalni kutni otklon); T - titrajno vrijeme (period)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}; \tag{9-89}$$

I - moment tromosti tijela obješenog na žicu torzijskog njihala;
D - konstanta torzije žice

$$D = \frac{\pi}{2}\frac{R^4 G}{\ell}; \tag{9-90}$$

R - polumjer žice; ℓ - duljina žice;
G - modul torzije (smicanja) materijala.

Fizičko njihalo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right); \tag{9-91}$$

θ_0 - amplituda (maksimalni kutni otklon); T - titrajno vrijeme (period)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}; \tag{9-92}$$

I - moment tromosti tijela - fizičkog njihala oko osi titranja;
m - ukupna masa tijela;
b - udaljenost od osi titranja do centra mase;

Reducirana duljina fizičkog njihala

$$\ell_r = \frac{I}{m\ell}. \tag{9-93}$$

Prigušeno titranje

$$x(t) = A(t)\cos(\omega t + \phi) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \phi); \tag{9-94}$$

$A(t)$ - vremenski ovisna amplituda; δ - faktor prigušenja;

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}; \qquad \delta T = \lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} \tag{9-95}$$

ω - kružna frekvencija prigušenog titranja;
ω_0 - kružna frekvencija titranja bez prigušenja;
δT - logaritamski dekrement prigušenja.

Prisilno titranje

$$x(t) = A(\omega_P)\cos(\omega_P t + \phi) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_P^2)^2 + 4\delta^2\omega_P^2}} \cdot \cos(\omega_P t + \phi) \tag{9-96}$$

A_0 - odgovara amplitudi vanjske prisile F_0, tj. $A_0 = F_0/m$; vanjska prisila $F(t) = F_0 \sin\omega_P t$;
ω_P - frekvencija vanjske prisile; ω_0 - frekvencija nesmetanog sustava;
δ - faktor prigušenja.

Oberbeckova njihala

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t,\omega_1) + y_2(t,\omega_2) \\ &= 2A\cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)+(\phi_1-\phi_2)}{2}\right]\sin\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)+(\phi_1+\phi_2)}{2}\right] \end{aligned} \tag{9-97}$$

$\omega_{1,2}$ - frekvencije pojedinih titranja;
$\frac{|\omega_1-\omega_2|}{2\pi}$ - frekvencija udara.

Lissajoussove krivulje

$$x(t) = A\sin(\omega_x + \phi_x) \qquad y(t) = B\sin(\omega_y + \phi_y) \tag{9-98}$$

Krivulje nastaju kada je omjer ω_x/ω_y jednak omjeru malih cijelih brojeva (1:1, 1:2, 2:3, 3:4, itd.).

10. ELEKTROSTATIKA

Coulombov zakon

$$\vec{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r} \tag{10-99}$$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$;
$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-9}\,\mathrm{C^2/N{\cdot}m^2}$.
Q_i - količina naboja;
$\hat{r}$ - jedinični vektor koji pokazuje prema naboju čiju silu računamo;

Gaussov zakon (za elektrostatiku)

$$\int_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_{\text{unutar } S} Q_i \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho(\vec{r}) \tag{10-100}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ - vektor električnog pomaka;

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0 \tag{10-101}$$

Električno polje

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{10-102}$$

$\vec{E}$ - električno polje; $[\vec{E}] = \mathrm{V/m}$.

Razlika potencijala

$$V_{AB} = \frac{W}{q} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \qquad V_{AB} = V_A - V_B. \tag{10-103}$$

V - razlika potencijala; $[V_i]$=V - volt; 1 V=J/C;

W - rad; $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -q\vec{E} \cdot d\vec{r}$; $d\vec{r} = \hat{\imath}dx + \hat{\jmath}dy + \hat{k}dz$ (Kartezijeve koordinate); $d\vec{r} = \hat{\rho}d\rho + \hat{\phi}\, d\phi + \hat{k}dz$ (cilindrične koordinate); $d\vec{r} = \hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta + \hat{\phi}r\sin\theta d\phi$ (sferne koordinate);

$$V = E\, d \qquad dV = k\frac{\rho(\vec{r})\, dV}{|\vec{r}|} \tag{10-104}$$

E - iznos jednolikog električnog polja; d - razmak između dvije točke u smjeru polja $\vec{E}$;
$\rho(\vec{r})$ - gustoća naboja; $\vec{r}$ - udaljenost od rasporeda naboja do točke u kojoj se računa potencijal.

Električni kapacitet C

$$C = \frac{Q}{V}; \tag{10-105}$$

C - električni kapacitet; $[C]$=farad=F=kulon/volt=C/V;

Kapacitet pločastog kondenzatora

$$C = \varepsilon_0\frac{S}{d} \qquad \text{i} \qquad C = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{d}; \tag{10-106}$$

S - površina ploče kondenzatora; d - razmak između ploča; ε_0 - permitivnost vakuuma;
ε_r - permitivnost sredstva (relativna permitivnost).

Energija pohranjena u kondenzatoru

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2; \tag{10-107}$$

Q - naboj na kondenzatoru; V - napon među pločama.

11. ELEKTRIČNA STRUJA

Električna struja I

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}; \qquad I = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}; \tag{11-108}$$

Q - električni naboj; I - električna struja: $[I]$= kulon/sekunda = C/s = amper = A.

Gustoća struje $\vec{J}$

$$\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S} = n_0 Q\vec{v}_d; \tag{11-109}$$

$\vec{J}$ - gustoća struje: [J] = A = amper/m^2; n_0 - broj naboja u m^3; $\vec{v}_d$ - usmjerena brzina naboja Q.

Ohmov zakon

$$\vec{E} = \rho\vec{J} \quad \text{ili} \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}; \tag{11-110}$$

ρ - specifični otpor (otpornost) materijala: $[\rho]$ = om·metar = Ω·m = V·m/A, a Ω = volt/amper;
σ - električna vodljivost.

Električni otpor

$$R = \frac{\Delta V}{I}; \tag{11-111}$$

R - električni otpor: $[R]$ =om= Ω. Sada je

$$\rho = \frac{\Delta V/\ell}{I/S} = R\frac{S}{\ell} \quad \text{ili} \quad R = \rho\ell/S; \tag{11-112}$$

ℓ - duljina vodiča specifičnog otpora ρ;
S - površina presjeka vodiča.

Snaga električne struje

$$P = I\Delta V = I^2 R = \frac{(\Delta V)^2}{R}; \tag{11-113}$$

P - snaga: $[P]$=J/s=vat=W.

Elektromotorna sila

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dQ}; \tag{11-114}$$

$\mathcal{E}$ - elektromotorna sila: $[\mathcal{E}]$ =J/C = volt = V;
W - rad;

Kirchoffova pravila:

(1) - U točki grananja zbroj ulaznih struja jednak je zbroju izlaznih struja:

$$\sum_i I_i^{(\mathrm{ul})} = \sum_j I_j^{(\mathrm{iz})} \quad \text{ili} \quad \sum_k I_k = 0; \tag{11-115}$$

(ako ulazne struje imaju pozitivan predznak, a izlazne negativan, onda se dobije zadnja relacija!)

(2) - zbroj svih promjena potencijala u zatvorenoj petlji jednak je nuli:

$$\sum_j \Delta V_j = 0. \tag{11-116}$$

12. ELEKTROMAGNETIZAM

Lorentzova sila

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{L/e} + \vec{F}_{L/m} = Q\vec{E} + Q\vec{v} \times \vec{B}; \tag{12-117}$$

$\vec{F}_{L/e}$ - električna komponenta Lorentzove sile;
$\vec{F}_{L/m}$ - magnetska komponenta Lorentzove sile;
Q - električni naboj čestice;
$\vec{E}$ - električno polje;
$\vec{B}$ - magnetsko polje, tj. gustoća magnetskog toka ili magnetska indukcija:
- $[B]$ = tesla = T = veber/m^2 = Wb/m^2.

Sila na vodič u kojem teče struja

$$d\vec{F} = I\, d\vec{\ell} \times \vec{B}; \tag{12-118}$$

I - jakost električne struje; $d\ell$ - djelić vodiča kojim teče struja.

Sila između dva paralelna vodiča kojima teku struje I_1 i I_2

$$F = \mu_0\mu_r \frac{I_1 I_2}{2\pi r}\ell; \tag{12-119}$$

μ_0 - permeabilnost vakuuma: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m/A}$;
μ_r - relativna permeabilnost sredstva; magnetska susceptibilnost $\chi_m = \mu_r - 1$.

Jakost magnetskog polja

$$H = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B; \tag{12-120}$$

H - jakost magnetskog polja; $[H]$ = amper/metar = A/m.

Magnetski tok

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}; \qquad \Phi_m = \int\limits_S \vec{B} \cdot d\vec{S}; \tag{12-121}$$

Φ_m - magnetski tok: $[\Phi_m]$=veber=Wb= tesla·m^2=T m^2.

Magnetska indukcija - Biot-Savartov zakon:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}; \tag{12-122}$$

- *ravni vodič:*

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}; \tag{12-123}$$

r - udaljenost od (ravnog) vodiča;
- *kružni zavoj (kružna petlja):*

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}; \tag{12-124}$$

R - polumjer kružnog zavoja.
- *zavojnica:*

$$B = \mu_0 \frac{NI}{\ell}; \tag{12-125}$$

N - broj zavoja; ℓ - duljina zavojnice.

Faradayev zakon indukcije

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}; \tag{12-126}$$

$\mathcal{E}_i$ - inducirani elektromotorni napon.

Induktivitet zavojnice

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 S}{\ell}; \tag{12-127}$$

L - induktivitet: $[L]$ = henri = H = Wb/A = V s/A.
Elektromotorni napon samoindukcije

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt}. \tag{12-128}$$

Energija magnetskog polja zavojnice

$$W = \frac{LI^2}{2}. \tag{12-129}$$

13. FIZIKALNA (VALNA) OPTIKA

Interferencija svjetlosti - valova

$$\begin{aligned} E_1(t,x) &= E_0\cos(\omega t - k_1x_1) = E_0\cos(\omega(t - n_1x_1/c)) = E_0\cos(\varphi_1) \\ E_2(t,x) &= E_0\cos(\omega t - k_2x_2) = E_0\cos(\omega(t - n_2x_2/c)) = E_0\cos(\varphi_2) \end{aligned} \tag{13-130}$$

$E_{1,2}$ - monokromatski valovi koji interferiraju;
ω - kružna frekvencija valova: $\omega = 2\pi\nu$;
k_i - iznos valnog vektora (valni broj):

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi n_i}{\lambda}; \tag{13-131}$$

n_i - indeks loma "i-"tog sredstva; λ_i - valna duljina u "i-"tom sredstvu: $\lambda_i = \lambda/n_i$;
λ - valna duljina u vakuumu.

Optički put $L^{(j)}$, geometrijska Δ i optička δ razlika putova

$$\begin{gathered} L^{(k)} = \sum_i n_i \cdot x_i^{(k)} = n_1x_1^{(k)} + n_2x_2^{(k)} + \ldots; \qquad \Delta = \sum_i x_i^{(k)} - \sum_j x_j^{(l)} \\ \delta = L^{(k)} - L^{(l)}; \end{gathered} \tag{13-132}$$

$L^{(k)}$ - optički put $k-$tog vala je zbroj (geometrijskih) udaljenosti pomnoženih s odgovarajućim indeksima loma sredstava u kojima je prevaljen određeni geometrijski put x_i;
$X^{(k)}$ - geometrijski put $k-$tog vala: $X^{(k)} = \sum_i x_i^{(k)}$;
Δ - geometrijska razlika hoda: jednaka je razlici geometrijskih putova: $\Delta = X^{(1)} - X^{(2)}$;
δ - optička razlika hoda: jednaka je razlici optičkih putova.

Rezultantna amplituda, tj. amplituda rezultantnog vala

$$E_{0/\text{rez.}} = 2E_0\cos\left[\frac{1}{2}\Delta\phi\right] = 2E_0\cos\left(\frac{\omega}{2c}(L^{(1)} - L^{(2)})\right); \tag{13-133}$$

$\Delta\phi$ - razlika faza:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= |\phi_1 - \phi_2| = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}|n_1x_1 - n_2x_2| \quad \text{(u jednostavnom slučaju)}, \\ &= \frac{2\pi}{\lambda}|x_1 - x_2| = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta \quad \text{(u najjednostavnijem slučaju)}; \end{aligned} \tag{13-134}$$

Minimum i maksimum intenziteta

$$\begin{aligned} \frac{\delta\phi}{2} &= m\lambda && (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots) \quad \text{Maksimum} \\ \frac{\delta\phi}{2} &= (2m+1)\frac{\lambda}{2} && (m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots) \quad \text{minimum} \end{aligned} \tag{13-135}$$

Youngov pokus

- maksimum: $d\sin\theta_m^{(\text{maks.})} = m\lambda$;
- minimum : $d\sin\theta_m^{(\text{maks.})} = (2m+1)\lambda/2$; $(m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$; ($d$ - razmak između pukotina).

Newtonovi kolobari - reflektirana svjetlost

- tamni kolobari: $r_m^{(\mathrm{t})} = \sqrt{m\lambda R}$;
- svijetli kolobari: $r_m^{(\mathrm{s})} = \sqrt{(2m+1)\lambda R/2}$; $(m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$; R - polumjer leće.

Ogib na jednoj pukotini - intenzitet svjetlosti

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)^2}; \tag{13-136}$$

d - širina pukotine; θ - ogibni kut.

Optička rešetka - intenzitet svjetlosti

$$I = I_0 \underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta\right)}{\frac{\pi}{\lambda}a\sin\theta}\right)^2}_{\text{difr.}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\left(N\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda}d\sin\theta\right)}\right)^2}_{\text{interf.}}. \tag{13-137}$$

a - širina (jedne) pukotine (zareza); N - (ukupni) broj zareza (izvora);
d - razmak između pukotina (izračuna se iz konstante rešetke, tj. iz broja zareza na 1 mm).

Glavni maksimumi: $d\sin\theta_m^{(\mathrm{maks.})} = m\lambda$; $(m = 0,\, \pm1,\, \pm2,\, \ldots)$.
Moć razlučivanja R

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{1}{mN} = \frac{1}{R}; \tag{13-138}$$

m - red spektra.

Polarizirana svjetlost - Brewsterov zakon

$$\tan\,\alpha_B = \frac{n_2}{n_1}; \tag{13-139}$$

α_B - Brewsterov kut - kut upadne svjetlosti pri kojem dolazi do potpune polarizacije reflektirane i slomljene svjetlosti;
n_1 - indeks loma sredstva u kojem se širi upadna svjetlost;
n_2 - indeks loma sredstva u koje se širi lomljena zraka;

Intenzitet polarizirane svjetlosti - Malusov zakon

$$I(\theta) = I_0\cos^2\theta; \tag{13-140}$$

I_0 - intenzitet polarizirane svjetlosti koja pada na polarizator;
θ - kut između ravnine polarizirane svjetlosti i polarizatora.

14. MODERNA FIZIKA

Fotoelektrični efekt

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = W + E_k \quad hf_g = W \quad E_{k/maks} = eV_z \quad E_{k/maks} = h(f - f_g) \tag{14-141}$$

E - energija fotona frekvencije f i valne duljine λ; h - Planckova konstanta; W - izlazni rad;

E_k - kinetička energija elektrona; $E_{\mathrm{k/maks}}$ - maksimalna kinetička energija elektrona; V_z - zaustavni napon; f_g - granična frekvencija fotoefekta

Bohrov model atoma

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2}{kme^2} \quad r_1 = \frac{\hbar^2}{kme^2} \quad E_n = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k^2 me^4}{2\hbar^2} \quad E_n = -\frac{1}{n^2} E_I. \tag{14-142}$$

r_n - polumjer Bohrove $n-$te staze; n - kvantni broj ($n = 1, 2, 3, \ldots$); $\hbar$ - reducirana Planckova konstanta $\hbar = \frac{h}{2\pi}$;

E_n - kvantizirana energija elektrona u $n-$toj stazi; E_I - energija ionizacije vodikovog atoma (13.6 eV);

Balmerova formula

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \tag{14-143}$$

λ - valna duljina emitiranog fotona;
R_H - Rydbergova konstanta;
n - kvantni broj staze na koju skoči elektron; $(m > n)$
m - kvantni broj staze s koje skoči elektron; $(m > n)$

Prijelazi:

- $m \to 2$ Balmerova serija (vidljiva svjetlost)
- $m \to 1$ Lymanova serija (UV svjetlost)
- $m \to 3$ Paschenova serija (IC svjetlost)

Nuklearna fizika

Zakon radioaktivnog raspada

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}. \tag{14-144}$$

- $N(t)$ je broj jezgara u trenutku t koje se (još) nisu raspale; N_0 je početni broj jezgara; λ je konstanta raspada;
- vrijeme poluraspada:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}. \tag{14-145}$$

Aktivnost odnosno broj raspada u jedinici vremena

$$A(t) = -dN/dt \qquad A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \qquad A(t) = \lambda N(t). \tag{14-146}$$

- A_0 je aktivnost u trenutku $t = 0$; jedinica za aktivnost je broj raspada u sekundi; SI jedinica za aktivnost je *bekerel*: 1 Bq = 1 raspad/s.

♠ ♠

♠ ♠ ♠ ♠

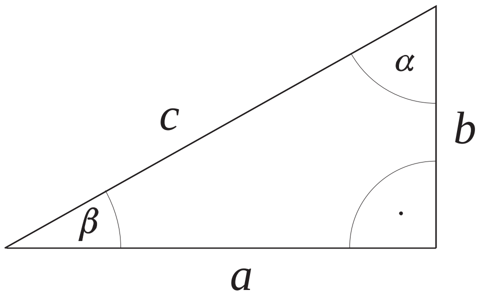
♠ ♠

M2. OSNOVNE MATEMATIČKE RELACIJE I FORMULE

M2.1 Trigonometrijske funkcije u pravokutnom trokutu

U pravokutnom trokutu $\triangle ABC$ na slici 1, sa stranicama a, b (katete) i c (hipotenuza) definiramo *trigonometrijske funkcije*

$$\sin\beta = \frac{b}{c} \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} \qquad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \qquad \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \tag{M-147}$$

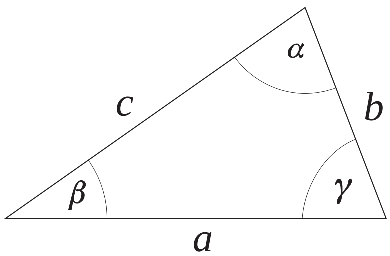


Slika 1 - Pravokutni trokut - uz definiciju trigonometrijskih funkcija

Iz definicije trigonometrijskih funkcija i Pitagorinog poučka izlaze sljedeći identiteti

$$\begin{gathered} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{ctg}\,x = 1 \\ \sin x = \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x}} \end{gathered} \tag{M-148}$$

M2.2 Trigonometrija kosokutnog trokuta



Slika 2 - Kosokutan trokut

U kosokutnom trokutu sa slike 2 vrijedi sinusov poučak

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \tag{M-149}$$

i kosinusov poučak

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \end{aligned} \tag{M-150}$$

Za mali kut x (u radijanima) vrijede aproksimativni izrazi:

$$\begin{aligned} \sin x &\simeq x - \frac{1}{6}x^3 \dots \quad & \cos x &\simeq 1 - \frac{1}{2}x^2 \dots \\ \operatorname{tg} x &\simeq x + \frac{1}{3}x^3 \cdots \quad & \operatorname{ctg} x &\simeq \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x \end{aligned} \tag{M-151}$$

a razvoji u redove su:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \\ \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \dots \end{aligned} \tag{M-152}$$

Kako za eksponencijalnu funkciju vrijedi

$$e^x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots \tag{M-153}$$

možemo uz zamjenu $x \to ix$ (i je imaginarna jedinica $i = \sqrt{-1}$) dobiti *Eulerovu formulu*

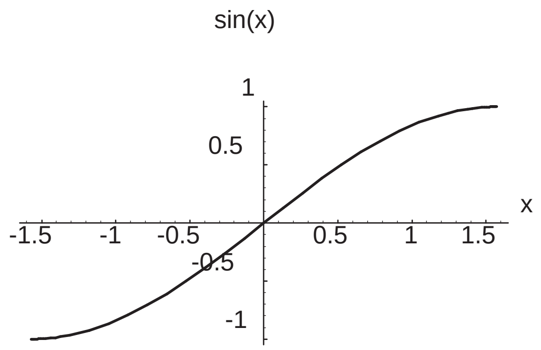
$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x, \tag{M-154}$$

pa dobijemo da je

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}). \tag{M-155}$$

M2.3 Inverzne trigonometrijske funkcije

Razmotrimo funkciju $y(x) = \sin x$ na intervalu $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Područje vrijednosti funkcije je interval $[-1, 1]$ na osi y.



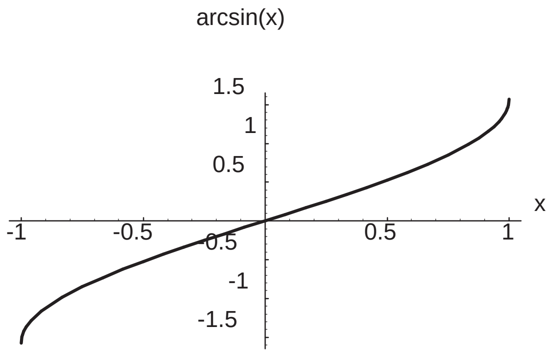
Slika 3 - Graf funkcije $y(x) = \sin x$ na intervalu $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$

Inverzna funkcija funkcije sinus

$$y(x) = \arcsin x \tag{M-156}$$

ima, prema tome, područje definicije $[-1, 1]$, a područje vrijednosti $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$. Prema tome vrijedi

$$\begin{cases} \arcsin(\sin\theta) = \theta & \text{za} \quad -\frac{1}{2}\pi \le \theta \le \frac{1}{2}\pi \\ \sin(\arcsin x) = x & \text{za} \quad -1 \le x \le 1. \end{cases} \tag{M-157}$$



Slika 4 - Graf funkcije $y(x) = \arcsin x$

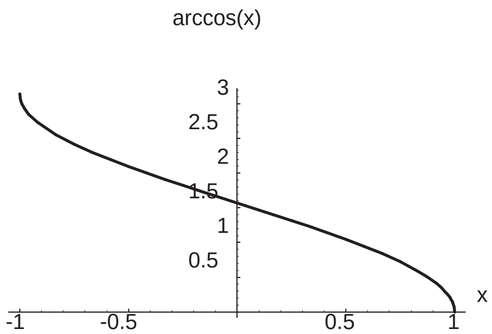
Neke vrijednosti funkcije arcsin su

$$\arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi \qquad \arcsin(-1) = -\frac{1}{2}\pi \qquad \arcsin 0 = 0$$
$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi \qquad \arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\frac{1}{4}\pi \qquad \arcsin(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{1}{3}\pi. \tag{M-158}$$

Funkcija $\sin x$ neparna pa je neparna i inverzna funkcija arcsin: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
Inverzna funkcija funkcije $\cos x$ je $\arccos x$. Neke vrijednosti funkcije $\arccos x$ su

$$\arccos 1 = 0 \qquad \arccos(-1) = \pi \qquad \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$$
$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\pi \qquad \arccos(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{4}\pi \qquad \arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{3}{4}\pi \tag{M-159}$$

Funkcija $y(x) = \arccos x$ prikazana je na slici 5.



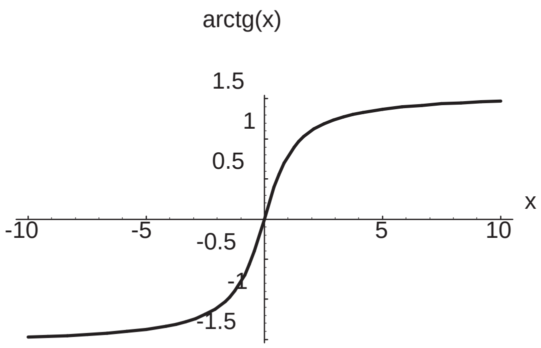
Slika 5 - Graf funkcije $y(x) = \arccos x$

Dvije korisne relacije s funkcijom arccos su

$$\arccos x + \arccos(-x) = \pi \qquad \arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi. \tag{M-160}$$

Prema tome vidimo da je funkcija $\arccos x$ već određena kada je definirana funkcija $\arcsin x$.
Inverzna funkcija funkcije tangens je

$$y(x) = \text{arctg } x \tag{M-161}$$



Slika 6 - Graf funkcije $y(x) = \text{arctg } x$

i prikazana je na slici 6.

Vidimo da je

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg } x = \frac{1}{2}\pi \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to-\infty} \text{arctg } x = -\frac{1}{2}\pi, \tag{M-162}$$

a neke vrijednosti funkcije $y(x) = \text{arctg } x$ su

$$\begin{array}{lll} \text{arctg } 0 = 0 & \text{arctg } 1 = \frac{1}{4}\pi & \text{arctg } \sqrt{3} = \frac{1}{3}\pi \\ \text{arctg } (-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi & \text{arctg } (\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \frac{1}{6}\pi & \text{arctg } (-1) = -\frac{1}{4}\pi. \end{array} \tag{M-163}$$

M2.4 Geometrijska tijela

$$\begin{array}{l} \text{Kugla} \quad r = \text{polumjer} \quad d = \text{promjer} \\ \qquad \text{Oplošje} \quad S = 4r^2\pi \quad \text{Volumen} \quad V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6} \\ \text{Valjak} \quad r = \text{polumjer} \quad h = \text{visina} \\ \qquad \text{Oplošje} \quad S = 2r\pi \cdot h \quad \text{Volumen} \quad V = r^2\pi \cdot h \\ \text{Stožac} \quad r = \text{polumjer} \quad h = \text{visina} \quad \ell = \text{izvodnica} \\ \qquad \text{Oplošje} \quad S = r\pi\sqrt{r^2 + h^2} \quad \text{Volumen} \quad V = \frac{r^2\pi \cdot h}{3} \\ \text{Kvadar} \quad a, b, c = \text{tri stranice} \\ \qquad \text{Oplošje} \quad S = 2(ab + ac + bc) \quad \text{Volumen} \quad V = abc \end{array} \tag{M-164}$$

♠ ♠

♠ ♠ ♠ ♠

♠ ♠

PY PYTHON I PROGRAMSKI ALATI NUMPY I MATPLOTLIB

Py.1 Uvod

Kao proširenje uporabe programa Python na probleme fizike odnosno matematike za rješenje problema i zadataka iz fizike ovdje su navedene kratke upute, s osnovnim naredbama za dva modula koje je nužno rabiti pri računima (Numpy) i pri grafičkim prikazima problema, zadataka i rješenja (Matplotlib). Nadalje, opisat ćemo kako se upisuju podatci ili rezultati te kako se ti podatci čitaju s računala. Taj kratki pregled poslužit će i kao podsjetnik na goleme računalne mogućnosti programa Python, koji je zadnjih godine doživio fantastičan uspjeh kao jedan od tri najprikladnija programska jezika (JavaScript, C++ i Python se stalno izmjenjuju na vrhu najboljih i najvažnijih programskih jezika). Svakako, za daljnji rad na programskom jeziku Python valja konzultirati golemu literaturu (koja postoji i na hrvatskom jeziku) od elementarnih uvoda do specijalnih primjena u svim područjima znanosti, tehnike, tehnologije, informatike pa čak i primijenjene umjetnosti (vidjeti literaturu na kraju ovog odjeljka).

U ovom tekstu bit će dan

(1) pregled osnovnih računanja s modulom `numpy` , upoznavanje s `numpy` objektima i funkcijama: `array, linspace, arrange, ones, zeros`

(2) pregled različitih grafičkih prikaza podataka i matematičkih funkcija s modulom `matplotlib` s najvažnijim detaljima za potpun grafički opis,

(3) zapis u, odnosno čitanje podataka iz datoteka na računalu,

(4) definicija, osnovna i napredna uporaba funkcija.

Sve gornje teme obrađene su preko niza primjera koje stoga valja prostudirati, jer se unutar zadanog teksta odnosno njegovog rješenja nalaze i upute kako se provode, rješavaju i ostvaruju zadani problemi i ciljevi. Rješenja koja su ponuđena ostvarena su na najjednostavniji način, što ujedno znači da sigurno postoje i druga, naprednija rješenja koja, međutim najčešće zahtijevaju posebno dobro poznavanje Pythona i njegovih modula.

Py.2 Osnovna računanja u Pythonu. `numpy` kao kalkulator

Za bilo koji ozbiljniji račun s Pythonom, važno je uvesti (importirati) modul Pythona zvan *numpy*. Izgovor te riječi nije sasvim jasan ni ljudima engleskog govornog područja, tako da mi ovdje imamo slobodu da zovemo taj paket *numpi* (valja čitati kako je napisano). Dakle za učitavanje modula `numpy` napišemo na samom početku programa

```
>>> import numpy as np
```

Na taj je način uveden modul numpy i najavljeno je da ćemo moći rabiti naredbe u skraćenom obliku, primjerice

`np.sin(x)` umjesto

`numpy.sin(x)`

Učitavanje drugog nužnog modula, koji ćemo obraditi kasnije, ide na sličan način

```
>>>import matplotlib.pyplot as plt
```

Prema tome, svaki program koji započinjemo s namjerom da računamo i/ili crtamo počinjemo ovako

```
>>> import numpy as np
```

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
```

Py.2.1 Osnovna računanja s modulom `numpy` . `numpy` kao kalkulator

Funkcije koje su nam sada na raspolaganju uvođenjem (importiranjem) numpya su
`np.sin(x), np.cos(x), np.sqrt(x), np.exp(x)` itd.
Za cijelu listu `numpy` funkcija valja na webu otići na adresu
`https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference`
i odabrati
`Available ufuncs`.

♠ ♠

Primjer Py.1 Izračunajte veličinu X u sljedećem numeričkom izrazu pomoću uvedenih `numpy` funkcija: (Za ovaj primjer nemojte voditi računa o pouzdanim znamenkama.)

$$X = \sqrt{2.114} \cdot \sin(60^\circ)$$

Rješenje Prvo valja znati da `python` računa trigonometrijske funkcije u radijanima te treba kut u stupnjevima pretvoriti u radijane. Za to postoji gotova `numpy` funkcija `np.radians()` ili `np.deg2rad()`. Dakle,

```
X = np.sqrt(2.114) * np.sin(np.deg2rad(60))
print(X)
1.2591660
```

♠ ♠

Primjer Py.2 Izračunajte veličinu X u sljedećim numeričkim izrazima pomoću uvedenih `numpy` funkcija: (Za ovaj primjer nemojte voditi računa o pouzdanim znamenkama.)

(a) $X = \dfrac{12.234 \cdot \sqrt{1.114}}{1.00 - \sqrt{2.345}}$

(b) $X = \dfrac{12.234 \cdot \sqrt{1.114} \cdot \sin(30^\circ)}{1.00 - \sqrt{2.345}}$

(c) $X = \dfrac{12.234}{\sqrt{1.114} \cdot \sin(30^\circ)} e^{-3.0 \cdot \sqrt{1.23}}$

(d) $X = \dfrac{12.234}{1.0 + \sqrt{1.114}} \cdot \sin(30^\circ) \cdot e^{-2.0 \cdot \cos\sqrt{1.12}}$

RJEŠENJE

(a)

X = (12.234 * np.sqrt(1.114))/(1.0 − np.sqrt(2.345))

print(X)

−24.3018393795

(b)

X = (12.234 * np.sqrt(1.114) * np.sin(np.radians(30)))/(1.0 − np.sqrt(2.345))

print(X)

−12.1509196897

(c)

X = (12.234 * np.exp(−3.0 * np.sqrt(1.23)))
    /(np.sqrt(1.114) * np.sin(np.radians(30)))

print(X)

0.832124357405

(d)

X = 12.234 * np.sin(np.radians(30)) * np.exp(−2.0 * np.cos(np.sqrt(1.12)))
    /(1.0 + np.sqrt(1.114))

print(X)

= 1.11612548989.

Valja uočiti da se umnošci u brojniku ne moraju obuhvatiti zagradom, dok je ona za umnoške u nazivniku nužna.

♠ ♠

Primjer Py.3 Zadane su (fizikalne) veličine (koje ovdje pišemo bez odgovarajućih jedinica): $a = 6.625 \times 10^{-27}$, $b = 3.00 \times 10^{10}$, $c = 0.178 \times 10^{-8}$, $d = 1.60 \times 10^{-12}$ i $e = 4.80 \times 10^{-10}$. Uvrstite te veličine u izraz za X

$$X = \frac{a \cdot b}{c \cdot d \cdot \sqrt{e}}$$

i pomoću `numpy` funkcija izračunajte njegovu numeričku vrijednost. Formatirajte dobiveni rezultat prema pravilu o pouzdanim znamenkama iz uvodnog dijela ovog teksta.

RJEŠENJE

```
import numpy as np                                                  ♯ (1)
X=(6.625e-27*3.00e+10)/(0.178e-8*1.60e-12*np.sqrt(4.8e-10))         ♯ (2)
print(X)                                                            ♯ (3)
3 185 272 072                                                       ♯ (4)
print('X={0:0.2e}'.format(X))                                       ♯ (5)
X=3.19·10^9                                                         ♯ (6)
```

Objašnjenja koraka programa:

♯ (1) Pythonov numerički paket;

♯ (2) zapis izraza za račun;

♯ (3) naredba za ispis;

♯ (5) naredba za formatiranje: prva nula označava prvi broj po redu koji valja formatirati. Druga nula označava minimalni broj mjesta za zapis broja. Broj 2 daje broj decimalnih mjesta iza decimalne točke. Slovo `e` označava eksponencijalni zapis formatiranog broja.

♠ ♠

Primjer Py.4 Zadane su (fizikalne) veličine (koje ovdje pišemo bez odgovarajućih jedinica): $a = 1.602 \times 10^{-19}$, $b = 9.11 \times 10^{-31}$, $c = 3.00 \times 10^{8}$. Uvrstite te veličine u izraz za X

$$X = 10.0 \cdot \sqrt{\frac{a}{b \cdot c}}$$

i pomoću `numpy` funkcija izračunajte njegovu numeričku vrijednost. Formatirajte dobiveni rezultat prema pravilu o pouzdanim znamenkama iz uvodnog dijela ovog teksta.

RJEŠENJE

```
import numpy as np
X = 10.0 * np.sqrt(1.602e - 19/(9.11e - 31 * 3.00e8))
print(X)
242.109282
print('X = {0 : 0.0f}'.format(X))
X = 242
```

♠ ♠

Py.2.2 Načini stvaranja i matematičke operacije s `numpy` objektom `array`

Matematičke operacije s 1-dimenzionalnim poljima (vektorima) koja se dobivaju `numpy` -objektima i funkcijama `array, linspace, arange, ones, zeros` nazivaju se "vektorskim" operacijama jer se objekt `array` ili "vektor" procesuira kao cjelina, odnosno, istovremeno se izvršavaju operacije nad svim elementima. Njihova prednost u rješavanju konkretnih problema očituje se u jednostavnijoj sintaksi i bržem izvođenju naredbi.

Pogledajmo jedan primjer liste brojeva koji postaju `array` i s kojima se zatim obavljaju razne operacije i transformacije. Opisi prema brojevnim oznakama na desno, dani su nakon zapisa programa.

Primjer Py.5 Zadan je skup brojeva različitih vrsta (cijeli, decimalni itd.). Brojevi su uvedeni u listu `L`, a zatim prevedeni u `numpy` objekt `array`. Pokazano je kako je za taj objekt moguće baratati različitim (brojevnim) operacijama. Dakle, zadani su brojevi $(-1,\ 0.5,\ 2.5\ 10)$. Valja prostudirati opisane procedure dane nakon ispisa programa.

Rješenje

```
import numpy as np
L = [-1,0.5,2,5,10]
a = np.array(L)
print(a)
print(L*2)
print(a*2)
print(a+2)
print (a/2)
print (a**2)
print(1 + np.exp(-a))
b = a[:-1]
print(b)
c = a[1:]
print(c)
print(b+c)
print(b-c)
print(b*c)
print(b/c)
print(sum(b))
print(sum(b)**2)
print(sum(b**2))
print(sum(b)*sum(c))
print(sum(b*c))
x = np.linspace(-np.pi,np.pi,6)
print(x)
print(np.cos(x))
t = np.linspace(0,5,11)
v = 2*t
print(v)
t = np.arange(0,5.5,0.5)
print(2*t)
k = np.ones(11)
print(k)
v = 5
print(5*np.ones(11))
a = np.zeros(11)
print(a)
```

Zapis programa kojim se uvodi `numpy`-jev objekt `array` i neka njegova važna svojstva.

Objašnjena koraka programa donosimo ovdje prema brojevima u programu:

- ♯ (1) Pythonov numerički paket;
- ♯ (2) Elementi liste `L` različitog su tipa;
- ♯ (3) Naredba pretvara listu `L` u `array` - polje;
- ♯ (4) Svi brojevi će biti iste vrste (realni, s decimalnom točkom);
- ♯ (5) Lista je udvostručena;
- ♯ (6) Svaki element `array`-a je pomnožen s 2;
- ♯ (7) Svakom elementu `array`-a dodan je broj 2;
- ♯ (8) Svaki element `array`-a podijeljen je s 2;
- ♯ (9) Svaki element `array`-a je kvadriran;
- ♯ (10) Nad svakim elementom izvršena je operacija zadana formulom;
- ♯ (11) Rezanje (segmentiranje) `array`-a: uklonjen je zadnji element;
- ♯ (12) Ispis;
- ♯ (13) Rezanje (segmentiranje) `array`-a: uklonjen je prvi element;
- ♯ (14) Ispis;
- ♯ (15) Zbrajanje `array`-a istih dimenzija;
- ♯ (16) Oduzimanje `array`-a istih dimenzija;
- ♯ (17) Množenje `array`-a istih dimenzija;
- ♯ (18) Dijeljenje `array`-a istih dimenzija;
- ♯ (19) Ispis zbroja elemenata (`b1+b2+b3+` ...)
- ♯ (20) Ispis kvadrata zbroja elemenata (`(b1+b2+b3+...)`^{2})
- ♯ (21) Ispis zbroja kvadrata elemenata (`b1`^{2}`+b2`^{2}`+` ...)
- ♯ (22) Ispis (`b1+b2+b3+` ... `)*(c1+c2+c3+` ...)
- ♯ (23) Ispis (`b1*c1+b2*c2+b3*c3+` ...)
- ♯ (24) Zadavanje skupa brojeva: (početni, konačni (uključivo), broj međubrojeva N). Ako N nije zadan, podrazumijeva se $N = 50$.
- ♯ (25) Ispis: `array` sa 6 jednako razmaknutih točaka u danom intervalu;
- ♯ (26) Zadanim brojevima x pridružuje se 6 vrijednosti funkcije $\cos x$;
- ♯ (27) Neka je t vrijeme pa je zadan vremenski interval $[0, 5]$ (sekundi) na 11 točaka;
- ♯ (28) Neka je v brzina koja se mijenja u vremenu;
- ♯ (29) Ispis 11 brzina izvrijednjenih na intervalu $[0, 5]$;

♯ (30) Druga mogućnost zadavanja vremenskog intervala: (početak, kraj (nije uključen), korak);

♯ (31) Ispis brzine $v = 2t$ na gore zadanom intervalu;

♯ (32) Definicija `array`-a koji se sastoji od 11 jedinica;

♯ (33) Ispis;

♯ (34) Neka je brzina v konstantna;

♯ (35) U svim vremenima danim u koraku (32) pridijeljuje se ista brzina;

♯ (36) Definicija `array`-a koji se sastoji od 11 nula;

♯ (37) Ispis (akceleracija je 0 na svih 11 vremenskih točaka)

♠ ♠

Py.2.3 Vrste i još neka svojstva i operacije na objektu `array`

Objekt `array` koji je gore opisan predstavlja jednodimenzionalni skup brojeva, koji je najsličniji komponentama vektora. Međutim, `array` može imati i više dimenzija. Primjerice, naredbom

```
ma=array([1,2,3],[7,8,9])
print ma
```

dobije se "tablica brojeva" (ali ne matrica, iako tako izgleda)

```
[[1 2 3]
[7 8 9]]
```

Tablica sadrži cijele brojeve, a da bismo naredili da brojevi budu realni moramo u gornju naredbu dodati `Float`, tj.

```
ma=np.array([1,2,3],[7,8,9],Float)
print ma
```

dobije se "tablica realnih brojeva"

```
[[1.  2.  3.]
[7.  8.  9.]]
```

Naredbom `shape` saznajemo dimenziju

```
print ma.shape
```

dobijemo odgovor

`(2,3)` tj. `array` ima dva retka i tri stupca.

Naredbom `np.arrayrange` može se formirati `array` niza brojeva

```
r=np.arrayrange(9)
print r
```

dobije se

```
[0 1 2 3 4 5 6 7 8]
```

Naredbom od ranije `np.zeros` može se formirati `array` u više dimenzija

```
nula=np.zeros((3,3))
```

`print nula`
dobije se

```
[[0 0 0]
[0 0 0]
[0 0 0]]
```

a zatim ga se transformira
`b=np.zeros([3,3])+5`
dobije se

```
[[5 5 5]
[5 5 5]
[5 5 5]]
```

i slično za `jedan=np.ones((2,3))`.

Nadalje, naredba `arrayrange` i `shape` mogu se zanimljivo kombinirati

```
b=np.arrayrange(9)
b.shape=(3,3)
print b
```

dobije se

```
[[0 1 2]
[3 4 5]
[6 7 8]]
```

U daljnjem tekstu zadržat ćemo se na jednodimenzionalnim objektima `array`.

Funkcija `add.accumulate`

```
b=np.arrange(8)
print b
```

```
[0 1 2 3 4 5 6 7 8]
```

i dalje

```
ac=add.accumulate(b)
print ac
```

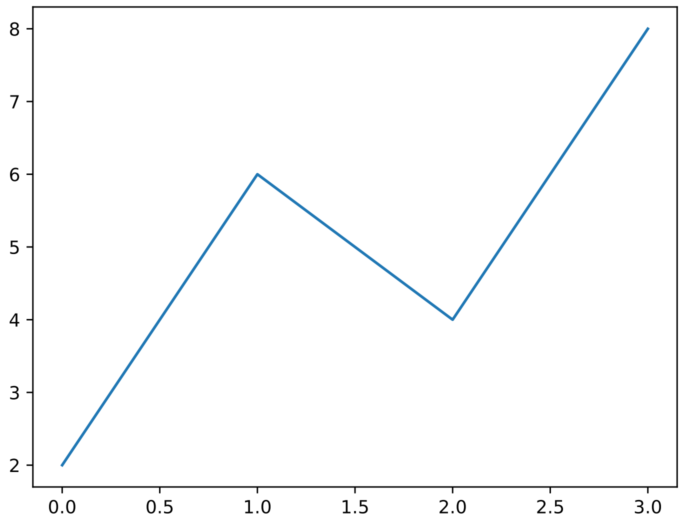
dobijemo (objasnite donji rezultat)

```
[0 1 3 6 10 15 21 28 36]
```

Py.3 Grafički prikaz podataka i funkcija. Modul `matplotlib`

U ovom odjeljku pokazujemo kako crtamo odnosno grafički prikazujemo točke, krivulje i funkcije pomoću Python modula `matplotlib.pyplot`. Krećemo od najjednostavnijih primjera koje valja rješavati radeći paralelno na računalu, jer postepeno dolazimo do sve boljih i informativnijih grafičkih prikaza koji u potpunosti mogu zadovoljiti sve stručne zahtjeve u fizici i tehnici.

Primjer Py.6 Napišite program koji grafički prikazuje skup od četiri točke u ravnini čije x koordinate (na horizontalnoj osi - apscisi) Python uzima automatski tj. jednake su $[0, 1, 2, 3]$, a njihove y koordinate (na vertikalnoj osi - ordinati) neka su jednake umnošku s brojem 2 brojeva danih u listi l koja je jednaka $[1, 3, 2, 4]$. Valja rabiti Pythonov modul `matplotlib.pyplot`.



Slika Py.1 uz primjer Py.6: naredba `plt.plot` sadrži y koordinate (ordinate) točaka koje su, redom, $[1 \cdot 2, 3 \cdot 2, 2 \cdot 2, 4 \cdot 2]$, a njih treba nacrtati za apscise $x = [0, 1, 2, 3]$. Program automatski spaja točke punim plavim crtama.

RJEŠENJE Program može izgledati ovako:

```
import matplotlib.pyplot as plt      ♯ Pythonov paket za grafičke prikaze
l = [1,3,2,4]                        ♯ lista
plt.plot([li*2 for li in l])         ♯ za x-os uzima 4 vrijednosti: 0,1,2,3
plt.show()                           ♯ otvara prozor koji prikazuje graf
```

♠ ♠

Zadatak Py.1 Promijenite naredbu prošlog primjera ovako
`plt.plot([li*2 for li in l],'o')` .

Kakav je rezultat te promjene? Dodatna oznaka ('o') zove se marker.

RJEŠENJE Rezultat je graf od 4 nepovezane točke predstavljene (prevelikim) kružićima zbog slova 'o' kao markera, a veličinu markera nismo specificirali pa je program "izabrao" svoju (automatsku) veličinu.

♠ ♠

Zadatak Py.2 Promijenite naredbu prošlog primjera ovako
`plt.plot([li*2 for li in l],'o', markersize=25)` .

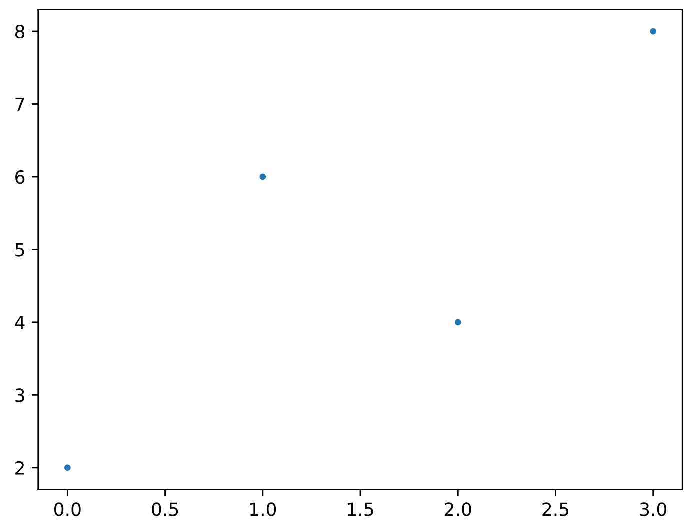
Kakav je rezultat te promjene?

RJEŠENJE Rezultat je graf od 4 nepovezane točke, a točke su označene kružićima zbog slova 'o' kao markera, koje su goleme zbog zadane veličine `markersize=25`.

♠ ♠

Zadatak Py.3 Promijenite naredbu prošlog primjera ovako
`plt.plot([li*2 for li in l],'.', markersize=5)` .

Kakav je rezultat te promjene?

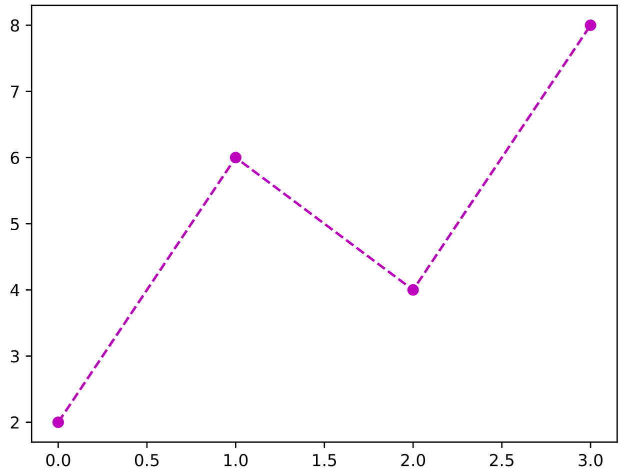


Slika Py.2 uz zadatak Py.3

RJEŠENJE Rezultat je graf od 4 nepovezane točke, a točke su označene kružićima razumne veličine zbog izbora veličine markera `markersize=5`. Umjesto točke '.' mogli smo,primjerice uzeti marker '*' koji bi dao zvijezdu. Za druge mogućnosti valja konzultirati odgovarajuću dokumentaciju na webu tražeći riječ `marker` i `matplotlib`.

♠ ♠

Primjer Py.7 Modul `matplotlib` može raditi i bez `numpy`-a. Prednost `numpy`-a je u tome što općenito rabi višedimenzionalne `array`- objekte (polja) te operacije izvršava nad cijelim poljem odjednom, a ne pojedinačno nad svakim elementom, što ubrzava generiranje koordinata pa u konačnici dobivamo jednostavniji, čitljiviji



Slika Py.3 uz primjer Py.7.
Valja uočiti naredbu koja proizvodi crtkane spojne crte boje `magenta`.

i brži kôd. Ponovite primjer Py.6 uz uporabu polja (`array`) umjesto liste. Spojite točke crtkano i izaberite boju po volji (b-`blue`, c-`cyan`, g-`green`, k-`black`, m- `magenta`, r-`red`, w-`white`, y-`yellow`).

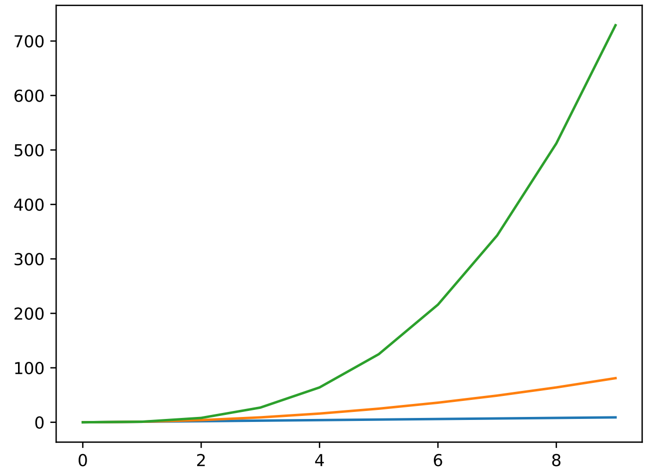
Rješenje

```
import numpy as np                  ♯ Pythonov numerički paket
import matplotlib.pyplot as plt     ♯ Pythonov paket za grafičke prikaze

l = [1,3,2,4]                       ♯ lista
x = np.array(l)                     ♯ pretvara listu u array (svi elementi moraju biti iste vrste)
plt.plot(2*x,"mo--")                ♯  marker je 'o', točke su spojene crtkano magenta bojom
plt.show()                          ♯ otvara prozor koji prikazuje graf
```

♠ ♠

Primjer Py.8 Valja grafički prikazati točke nastale kada se pomoću linearnog niza brojeva x_i od 0 do 9 formiranih funkcijom `range` iz standardnog Python paketa izračunaju odgovarajuće y_i koordinate i to (a) $y_i = x_i$, (b) $y_i = x_i^2$ i (c) $y_i = x_i^3$. Želimo prikazati sve točke u istom koordinatnom sustavu rabeći samo Pythonov paket `matplotlib.pyplot`.

Rješenje



Slika Py.4 uz primjer Py.8.
Program je sam izabrao različite boje spojnih crta.

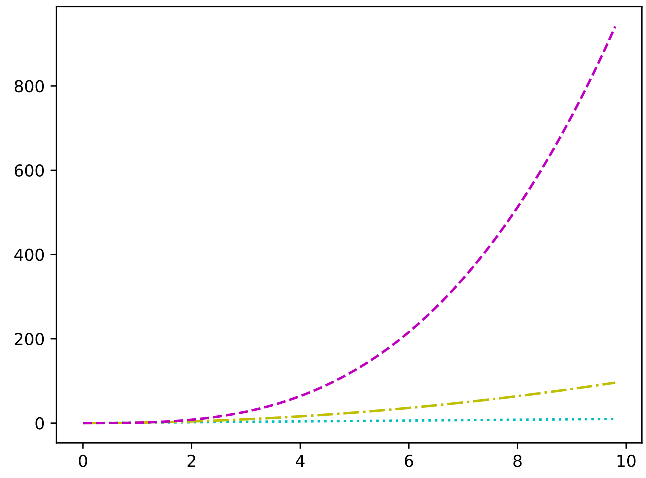
```
import matplotlib.pyplot as plt                      ♯  Pythonov paket za grafičke prikaze
x = range (10)                                       ♯  lista brojeva od 0 do 10-1, tj. [0,9]
plt.plot(x,[xi for xi in x],                         ♯
    x,[xi**2 for xi in x],x,[xi**3 for xi in x])     ♯  crta (grube) krivulje
plt.show()                                           ♯  otvara prozor koji prikazuje graf
```

♠ ♠

Primjer Py.9 Prethodni problem riješit ćemo brže i jednostavnije ako umjesto funkcije `range` upotrijebimo `numpy`-jevu funkciju `np.arange` koja će na (horizontalnoj) x osi generirati niz točaka u intervalu od 0 do 9, međusobno razmaknutih za 0.2. Ordinate točaka - koordinate na (vertikalnoj) y osi - neka su: (a) jednake apscisama, (b) jednake kvadratima apscisa i (c) jednake kubovima apscisa. Program automatski spaja točke tako da se očekuje grafički prikaz (a) pravca, (b) parabole (x^2) i (c) kubične (x^3) funkcije.

Rješenje

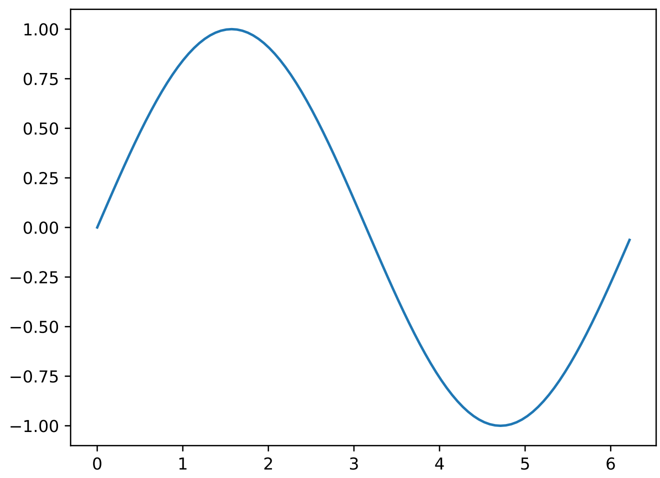
```
import numpy as np                                   ♯  Pythonov numerički paket
import matplotlib.pyplot as plt                      ♯  Pythonov paket za grafičke prikaze

x = np.arange(0.0,10,0.2)                            ♯  formiranje niza brojeva od 0 do 9, s razmakom 0.2

plt.plot(x,x,"c:",x,x**2,"y-.",x,x**3,"m--")         ♯   crta ( glatke ) krivulje
plt.show()                                           ♯  otvara prozor koji prikazuje graf
```



Slika Py.5 uz primjer Py.9.
Valja uočiti naredbe koje proizvode različite boje
i vrste spojnih crta.

♠ ♠

Primjer Py.10 Modul `matplotlib` može raditi i s paketom `math` koji je standardni dio Pythona. Pomoću njega želimo nacrtati funkciju sinus izvrijednjenu na 100 točaka u intervalu od 0 do 2π.



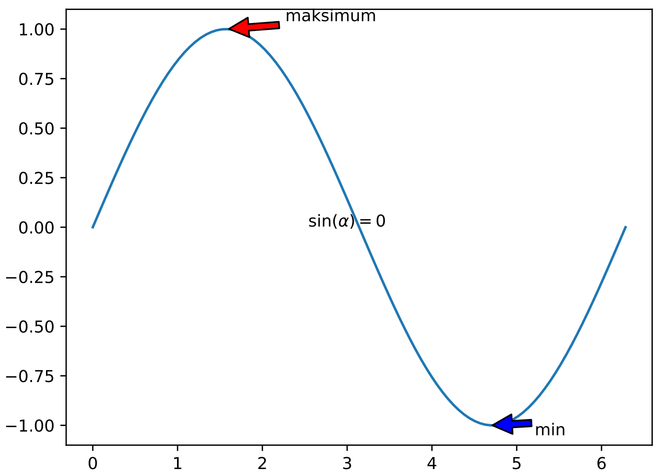
Slika Py.6 uz primjer Py.10

RJEŠENJE Program izgleda ovako

```
import math                                   ♯ Pythonov matematički paket
import matplotlib.pyplot as plt               ♯ Pythonov paket za grafičke prikaze

T = range(100)                                ♯ graf će biti nacrtan pomoću 100 točaka
x = [(2*math.pi*t)/len (T) for t in T]        ♯ uvode se x-ovi reskaliranjem T u intervalu [0-2π]
y = [math.sin(xi) for xi in x]                ♯ generiraju se y-koordinate

plt.plot(x,y)                                 ♯ naredba crtanja (x, y) parova
plt.show()                                    ♯ otvara prozor koji prikazuje graf
```

♠ ♠

Primjer Py.11 Nacrtajmo ponovo funkciju sinus izvrijednjenu na 100 točaka u intervalu od 0 do 2π rabeći `numpy` - jevu funkciju `np.linspace` kojom postižemo puno jednostavniji programski kôd. Grafičkom prikazu dodali smo tekstovne oznake sa strelicama na mjestima maksimuma i minimuma, te tekst na mjestu jedne nultočke funkcije sinus.



Slika Py.7 uz primjer Py.11

RJEŠENJE Program izgleda ovako

```
import numpy as np                                                       ♯ (1)
import matplotlib.pyplot as plt                                          ♯ (2)

x=np.linspace(0,2*np.pi,100)                                             ♯ (3)
y=np.sin(x)                                                              ♯ (4)

plt.plot(x,y)                                                            ♯ (5)
plt.annotate("maksimum",xy=(0.5*np.pi,1), xytext=(0.5*np.pi+0.7,1+0.04), ♯ (6)
  arrowprops=dict(facecolor="red", shrink=0.05))                         ♯ (7)
plt.annotate("min", xy=(1.5*np.pi,-1), xytext=(1.5*np.pi+0.5,-1+0.03),   ♯ (8)
   arrowprops=dict(facecolor="blue",shrink=0.05))                        ♯
plt.text(np.pi-0.6,0,"$\sin(x)=0$")                                      ♯ (9)
plt.show()                                                               ♯ (10)
```

Objašnjenja koraka programa donosimo ovdje zbog duljine naredbi, prema brojevima u programu:

♯ (1) Pythonov numerički paket;

♯ (2) paket za grafičke prikaze;

♯ (3) 1-dimenzionalni x `array` stvara 100 jednako razmaknutih točaka u intervalu [0-2π];

♯ (4) 1-dimenzionalni y `array` uzima vrijednosti na cijelom $x-$`array`-u, a ne računa vrijednosti jednu po jednu;

♯ (5) naredba crtanja dvodimenzionalnog polja (x, y)

♯ (6) početak uvođenja dodatnih oznaka - strelica i teksta. Točka xy s koordinatama $(0.5 * \texttt{np.pi}, 1) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ je položaj vrha strelice. Uz strelicu će pisati tekst “maksimum”. Točka `xytext` s koordinatama $(0.5*\texttt{np.pi}+0.7, 1+0.04)$ je položaj donjeg lijevog ruba teksta. Strelica je “rastegnuta” između njenog početka xy i početka teksta u točki `xytext`.

♯ (7) Slijedi opis strelice - boja i proporcionalni faktor veličine (`shrink`).

♯ (8) točka xy je položaj vrha sljedeće strelice, uz koju će stajati tekst “min”, a koji započinje u točki `xytext`, uz parametre strelice.

♯ (9) slijedi tekst na mjestu nultočke. Donji lijevi rub teksta”$\sin(\alpha) = 0$” je u točki (π,0). Tekst je napisan u $\TeX-$u.

♯ (10) poznata naredba od ranije koja otvara prozor koji prikazuje graf.

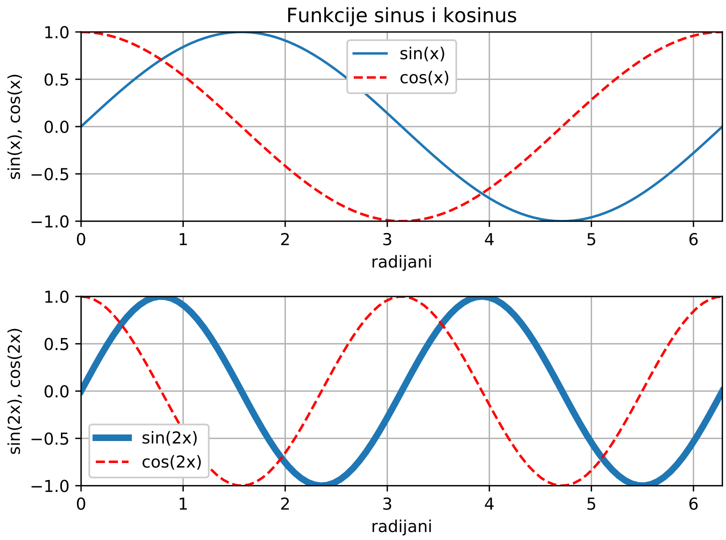
♠ ♠

Primjer Py.12 Valja nacrtati višestruke grafove funkcija sinus i kosinus izvrijednjene na 100 točaka u rasponu od 0 do 2π. Na jednom grafu prikazat ćemo funkcije $\sin(x)$ i $\cos(x)$, a na drugom funkcije $\sin(2x)$ i $\cos(2x)$. Grafove valja označiti i paziti na položaj sastavnice - legende. Valja napisati naziv grafičkog prikaza i dodati tekstovne oznake na osi te mrežu (`grid`) koja omogućava bolju čitljivost grafova. Neka graf funkcije $\sin(2x)$ bude nacrtan debljom linijom.

RJEŠENJE Program zahtijeva crtanje više grafova na jednoj slici. To se postiže s naredbom `subplot`. Dakle, program može izgledati ovako (komentari su pisani *AMSTEX*-om pa je tekst pomalo neobičan):

```
###########################################################################
import numpy as np                      # Pythonov numeri\v cki paket
import matplotlib.pyplot as plt         # Pythonov paket za
                                        # grafi\v cke prikaze
x=np.linspace(0,2*np.pi,100) }}         # 1-dim. {\tt array} stvara
                                        # 100 jednako razmaknutih to\v caka
                                        # u [0-2\pi]
y1=np.sin(x)                            # 1-dim. {\tt array} uzima vrijednosti
                                        # na cijelom $x$-u (ne 1 po 1)
y2=np.cos(x)                            # 1-dim. {\tt array} uzima vrijednosti
                                        # na cijelom $x$-u
y3=np.sin(2*x)                          # 1-dim. array uzima vrijednosti
                                        # na cijelom $x$-u
y4=np.cos(2*x)                          # 1-dim. {\tt array} uzima vrijednosti
                                        # na cijelom $x$-u
plt.subplot(2,1,1)                      # broj (redova,stupaca) je (2,1) i
                                        # crtamo prvi (1) graf
plt.plot(x,y1,label="sin(x)")           # prva krivulja, ima oznaku $\sin(x)$
plt.plot(x,y2,"r--",label="cos(x)")     # druga krivulja  $\cos(x)$ na istom grafu
                                        # krivulja je crtkana i crvene boje
plt.xlabel("x/radijani")                # oznaka varijable na $x-$osi
plt.ylabel("sin(x), cos(x)")            # imena funkcija na $y$ osi
plt.ylim(-1.0,1.0)                      # granice ``od-do" na $y-$osi
plt.xlim(0,2*np.pi)                     # granice ``od-do" na $x-$osi
plt.grid()                              # crta koordinatnu mre\v zu (linije)
plt.legend(loc="upper center")          # smje\v sta sastavnicu - legendu
                                        # mogu\' cnosti  su: best,upper
                                        # left(right,center),
                                        # lower left (right,center) itd.
plt.title("Funkcije sinus i kosinus")   # naslov na cijelom grafu
plt.subplot(2,1,2)                      # broj (redova,stupaca) je (2,1); drugi (2) graf
plt.plot(x, y3,linewidth=4)             # prva krivulja drugog grafa
                                        # pove\' cana debljina pune linije
plt.plot(x,y4,"r--")                    # druga krivulja  na drugom  grafu
                                        # crtkana i crvene boje
plt.xlabel("x/radijani")                # oznaka varijable na $x-$osi
plt.ylabel("sin(2x), cos(2x)")          # imena funkcija na $y$ osi
plt.ylim(-1.0,1.0)                      # granice ``od-do" na $y-$osi
plt.xlim(0,2*np.pi)                     # granice ``od-do" na $x-$osi
plt.grid()                              # crta koordinatnu mre\v zu (linije)
plt.legend(["sin(2x)","cos(2x)"])       # smje\v sta sastavnicu automatski
plt.tight\_layout()                     # prilago\dj ava smje\v stanje grafova
plt.show()                              # otvara prozor koji prikazuje graf
###########################################################################
```

Progam uz primjer Py.12. Vidjeti i sliku, dalje.



Slika Py.8 uz primjer Py.12

♠ ♠

Py.3 Zapis i čitanje podataka. "Input-output" procedure

Mjerenja u fizičkom praktikumu zahtijevaju pohranjivanje podataka, njihovu obradu te ponovni zapis rezultata. Prema tome, važno je razumjeti postupke spremanja i čitanja (velikog broja) podataka na čvrsti disk računala ili na neki drugi medij za pohranjivanje podataka. Pri tome je važno usvojiti principe formatiranja podataka i njihovo učitanje ili za daljnje račune ili za njihov grafički prikaz, prema procedurama opisanim u prethodnom odjeljku ovog teksta.

Primjer Py.13 Jednoliko ubrzano gibanje uz stalnu akceleraciju $a = 2.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ opisano je sljedećim jednadžbama za položaj $x(t)$ tijela (materijalne točke) koje se giba i njegove brzine $v(t)$ ovako

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 \quad \text{i} \quad v(t) = at.$$

Želimo napisati položaj tijela i njegovu brzinu za prvih 5 sekundi gibanja (od 0.0 do 5.0 s), tako da zapišemo sljedeće podatke: datum unosa, ime i prezime (studenta) i opis podataka - brojeva koji se nalaze u datoteci. Unosimo vrijeme u vremenskim razmacima (intervalima) od 0.5 sekundi, podatke o brzini i o položaju tijela. Podatke ćemo napisati na tvrdi disk računala uz opis podataka, a ime datoteke neka bude *Moji-podatci-1*.

RJEŠENJE Program izgleda ovako

```
import numpy as np                                                          ♯  (1)

a = 2.0                                                                     ♯  (2)
t = np.arange(0.0, 5.5, 0.5)                                                ♯  (3)
v = a * t                                                                   ♯  (4)
x = a * t**2 / 2                                                            ♯  (5)
info = 'Podatci o brzini i položaju tijela za prvih 5 sekundi gibanja'      ♯  (6)
info += '\nDatum:  11.  prosinca 2018.'                                     ♯  (7)
info += '\nPodatke obradio:  Oskar Bestanta'                                ♯  (8)
info += '\n\nPrvi redak-vrijeme(s), drugi redak-brzina(m/s),                ♯
      treći redak-položaj (m):\n'                                           ♯  (9)

np.savetxt('Moji-podatci-1.txt', (t,v,x), header=info, fmt='%6.2f')         ♯  (10)
```

Ovdje pohranjujemo podatke u tekstovnu datoteku (–.txt) pomoću funkcije `np.savetxt`. Objašnjena koraka programa donosimo ovdje zbog duljine naredbi, prema brojevima u programu:

♯ (1) Pythonov numerički paket;

♯ (2) zadana je akceleracija a (bez jedinica u programu);

♯ (3) zadan je vremenski raspon: t počinje u 0.0 sekundi i završava u 5.0 sekundi, uz vremenski interval od 0.5 s: $[0.0, 5.0] = [0.0,\ 0.5,\ 1.0,\ 1.5, \ldots, 5.0]$.

♯ (4) formula za brzinu v kod jednoliko ubrzanog gibanja;

♯ (5) formula za položaj tijela x kod jednoliko ubrzanog gibanja;

♯ (6) naredba `info =` koja upisuje odgovarajući tekst između znakova jednostrukih navodnika.

♯ (7) naredba `info +=` koja upisuje odgovarajući tekst između znakova jednostrukih navodnika. Valja obratiti pažnju na zapis u ovom retku.

♯ (8) naredba `info +=` koja upisuje odgovarajući tekst između znakova jednostrukih navodnika. Valja obratiti pažnju na zapis u ovom retku.

♯ (9) naredba `info +=` koja upisuje odgovarajući tekst između znakova jednostrukih navodnika. Valja obratiti pažnju na zapis u ovom retku.

♯ (10) naredba `np.savetxt` koja ima prvi (nužni) argument a to je *ime tekstovne datoteke*. Drugi (nužni) argument čine *grupe podataka* (`arrays`) koje želimo pohraniti, a sljedeći argument opisuje *zaglavlje* koje sadrži informacije o podatcima. Zadnji argument *formatira podatke* na način da ih oblikuje, dovoljno razmakne dajući im 6 mjesta, a ostavlja im dvije decimale i uredno ih poreda jedne ispod drugih.

Rezultat je zapis dan ovako

```
♯ Podatci o brzini i položaju tijela za prvih 5 sekundi gibanja
♯ Datum:  11.  studenoga 2018.
♯
♯ Podatke obradio:  Oskar Bestanta
♯
♯ Prvi redak-vrijeme (s), drugi redak-brzina (m/s), treći redak-položaj (m)
♯

      0.00 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00
      0.00 1.00 2.00 3.00 4.00 5.00 6.00 7.00 8.00 9.00 10.00
      0.00 0.25 1.00 2.25 4.00 6.25 9.00 12.25 16.00 20.25 25.00
```

♠ ♠

Primjer Py.14 Valja pročitati brojčane podatke iz datoteke koja ovdje ima ime `MyData1.txt` i nacrtati odgovarajući graf. Podatke treba prije pregledati s tekstovnim editorom da vidimo njihovu strukturu - pomoćne tekstove i organizaciju podataka. Valja rabiti naredbu `np.loadtxt`.

Neka datoteka `MyData1.txt` sada izgleda ovako:

```
♯ Podatci o brzini i položaju tijela za prvih 5 sekundi gibanja
♯ Datum:  11.  studenoga 2018.
♯
♯ Podatke obradio:  Oskar Bestanta
♯
  0.00 0.50 1.00 1.50 2.00 2.50 3.00 3.50 4.00 4.50 5.00
  0.00 1.00 2.00 3.00 4.00 5.00 6.00 7.00 8.00 9.00 10.00
  0.00 0.25 1.00 2.25 4.00 6.25 9.00 12.25 16.00 20.25 25.00
```

RJEŠENJE Sadržaj baze podataka imena `MyData1.txt` je takav da moramo preskočiti prvih 6 redaka koji sadrže komentare i objašnjenja. Naredba
`data = np.loadtxt('MyData1.txt', skiprows=6, unpack=True)`
daje ime datoteke, daje naredbu `skiprows=6` o broju redaka (6) koje valja preskočiti i naredbu `upack=True` kojom retke pretvara u stupce (u žargonu linearne algebre radi se o transponiranju matrice podatka, kada retci postaju stupci, a stupci postaju retci.)
Naredba `print(data)` nam samo prikazuje transponiranu matricu podataka. Originalna matrica podataka imala je strukturu (3,11), tj. 3 retka i 11 stupaca. Naredbom `upack=True` ta je matrica pretvorena u transponiranu koja sada ima strukturu (11,3) tj. 11 redaka i 3 stupca. Ta naredba nije nužna ali je vrlo korisna da kao kontrolu pogledamo strukturu podataka.
Naredba
`plt.plot(data[:, 0], data[:, 2])` crta podatke, ovdje konkretno crta (t, x) graf za koji je prvi stupac (`[:, 0]`) x-os, a treci stupac (`[:, 2]`) y-os.

Naredba `plt.show()` je poznata od ranije i prikazuje graf.

```
import numpy as np                                                      ♯ (1)
import matplotlib.pyplot as plt                                         ♯ (2)

data = np.loadtxt('MyData1.txt', skiprows=6, unpack=True)               ♯ (3)
print(data)                                                             ♯ (4)
plt.plot(data[:, 0], data[:, 2])                                        ♯ (5)
plt.show()                                                              ♯ (6)
```

Objašnjenja koraka programa donosimo ovdje zbog duljine naredbi, prema brojevima u programu:

♯ (1) Pythonov numerički paket;

♯ (2) Pythonov grafički paket;

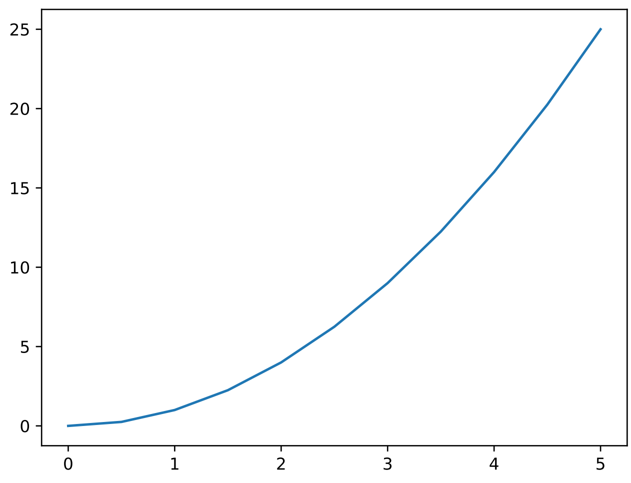
♯ (3) Čita podatke iz datoteke `MyData1.txt` uz preskakanje 6 redaka i uz naredbu o transponiranju matrice pročitanih podatka.

♯ (4) Ispisuje na zaslon podatke u transponiranom obliku.

♯ (5) Grafički prikazuje izbor podataka, tako da je prvi stupac izabran za podatke na $x-$osi, a treći stupac je izabran za podatke na $y-$osi. (Valja se sjetiti da Python počinje brojati od nule.)

♯ (6) Poznata naredba kojom se prikazuje graf.

Rezultat je jednostavan prikaz ovisnosti puta o vremenu za jednoliko ubrzano gibanje. Grafički prikaz valjalo bi još "ukrasiti" naslovom, oznakama osi, opisom itd.



Slika Py.9 uz primjer Py.14

♠ ♠

Primjer Py.15 Valja pročitati brojčane podatke iz datoteke koja ovdje ima ime `MyData1.txt` i nacrtati odgovarajući graf. Podatke treba prije pregledati s tekstovnim editorom da vidimo njihovu strukturu - pomoćne tekstove i organizaciju podataka. Valja rabiti naredbu `np.loadtxt`.

RJEŠENJE Sadržaj baze podataka imena `MyData1.txt` je takav da moramo preskočiti prvih 6 redaka koji sadrže komentare i objašnjenja. Naredba
`data = np.loadtxt('MyData1.txt', skiprows=6)`
daje ime datoteke, daje naredbu `skiprows=6` o broju redaka (6) koje valja preskočiti.
Naredba `print(data.T)` nam samo prikazuje transponiranu matricu podataka. Originalna matrica podataka ima strukturu (3,11), tj. 3 retka i 11 stupaca. Naredbom je ta matrica pročitana u transponiranom obliku koji ima strukturu (11,3) tj. 11 redaka i 3 stupca. Ta naredba nije nužna ali je vrlo korisna da kao kontrolu pogledamo strukturu podataka.
Naredba
`plt.plot(data.T[:, 0], data.T[:,1],data.T[:,0],data.T[:,2])` na istom grafu crta dvije krivulje, pri čemu se podaci pomocu `data.T` direktno transponiraju iz redaka u stupce. Za prvu krivulju podatci za $x-$os su u prvom stupcu, a za $y-$os u drugom stupcu. Za drugu krivulju također su podatci za $x-$os u prvom stupcu, a podatci za $y-$os su u trećem stupcu. (Valja se sjetiti da Python počinje brojati od nule.)
Naredba `plt.show()` je poznata od ranije i prikazuje graf.

```
import numpy as np                                          ♯ (1)
import matplotlib.pyplot as plt                             ♯ (2)

data = np.loadtxt('MyData1.txt', skiprows=6)                ♯ (3)
print(data.T)                                               ♯ (4)
plt.plot(data.T[:, 0], data.T[:,1],data.T[:,0],data.T[:,2]) ♯ (5)
plt.show()                                                  ♯ (6)
```

Objašnjenja koraka programa donosimo ovdje prema brojevima u programu:

♯ (1) Pythonov numerički paket;

♯ (2) Pythonov grafički paket;

♯ (3) Čitanje podatka iz datoteke `MyData1.txt` uz preskakanje 6 redaka.

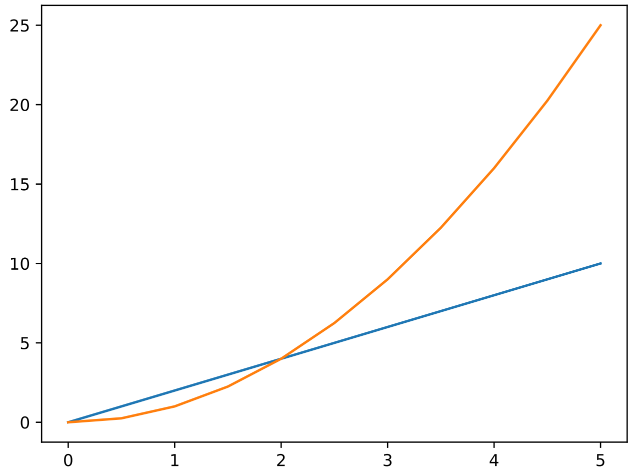
♯ (4) Ispisuje na zaslon podatke u transponiranom obliku.

♯ (5) Grafički prikazuje izbor podataka, tako da je za prvi graf prvi stupac izabran za podatke na $x-$osi, a treći stupac je izabran za podatke na $y-$osi. Za drugi graf prvi stupac izabran za podatke na $x-$osi, a treći stupac je izabran za podatke na $y-$osi. (Valja se sjetiti da Python počinje brojati od nule.)

♯ (6) Poznata naredba kojom se prikazuje graf.

Rezultat je jednostavan prikaz ovisnosti puta o vremenu za jednoliko ubrzano gibanje. Grafički prikaz valjalo bi još "ukrasiti" naslovom, oznakama osi, opisom itd.

♠ ♠



Slika Py.10 uz primjer Py.15

Py.4 Definicija funkcije. Osnovna i napredna uporaba funkcija

Složeni problemi često se u programiranju rješavaju tako da se program rastavi na više jednostavnijih dijelova, odnosno manjih programa koji čine logičke cjeline. To se postiže tehnikom definiranja vlastitih funkcija, koje se zatim mogu višestruko rabiti u različitim problemskim situacijama.

U jezgri Pythona postoje mnoge ugrađene funkcije: `int()`, `float()`, `input()`, `print()`, `min()`, `max()`, `len()`, `...`, a nalazimo ih i u modulima Numpy: `np.sqrt()`, `np.sin()`, `np.linspace()`, `...`, te Matplotlibu: `plt.plot()`, `plt.subplot()`, `plt.show()`, `...` Svima njima je zajedničko da uz ime, u zagradama sadrže jedan ili više argumenata (to mogu biti brojevi ili izrazi), a izvršavanjem daju (kažemo *vraćaju*) neku novu vrijednost. Naredbe, za razliku od funkcija ne daju vrijednosti, nego služe za organiziranje funkcija i drugih naredbi u veće cjeline, a u svrhu kontrole i upravljanja izvršavanja programa: njegovog grananja (`if`-naredba) i ponavljanja (`while` i `for` naredbe).

Struktura tehnike definiranja vlastite funkcije ima opći oblik :

```
def ime_funkcije (popis_parametara):
    ⟨blok_naredbi⟩
    return⟨vrijednosti⟩.
```

Naredbom `def` funkciji dajemo ime, parametri (po potrebi) su varijable koje služe kao ulazni podaci za funkciju. Uvučeni blok naredbi i izraza predstavlja "program" funkcije a na kraju bloka se nalazi naredba `return` iza koje stoji jedna ili više vrijednosti koje funkcija vraća. Parametre i varijable koji su definirani unutar funkcije zovemo *lokalnim varijablama*. Varijable kojima je doseg cijeli program nazivaju se *globalnim varijablama*. Potrebno je voditi računa da su izrazima i naredbama unutar funkcije dostupne i lokalne i globalne varijable, dok za izraze i naredbe izvan funkcije lokalne varijable nisu vidljive.

Ilustrirajmo navedeno definirajući vlastitu funkciju za računanje brzine i prijeđenog puta kod slobodnog pada:

```
def slobodni_pad(t):
    v=g*t              # brzina
```

```
    s = g*t**2/2        # put
    return v,s
```

Vidimo da je jedina ulazna varijabla vrijeme (t), a funkcija nam po zadanim jednadžbama izračunava i vraća vrijednosti za brzinu v i put s. S obzirom da ćemo vremenski interval zadati pomoću Numpy-jeve funkcije `np.linspace()` i da želimo prikazati grafove (v,t) i (s,t), uvodimo potrebne module:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
g = 9.81                            # jedinice m/s**2; parametar g se nalazi izvan funkcije.
t = np.linspace(0.0,10.0,100)       # definiranje vrem. intervala
                                    # Pozivamo vrijednosti koje je funkcija izračunala
v,s = slobodni_pad(t)
plt.subplot(2,1,1)                  # crtamo (v,t) graf
plt.plot(t,v)
plt.xlabel('vrijeme / s')
plt.ylabel('brzina / (m/s)')

plt.subplot(2,1,2)                  # crtamo (s,t) graf
plt.plot(t,s)
plt.xlabel('vrijeme / s')
plt.ylabel('put / m')
plt.tight_layout()
plt.show()
                                    # Računamo i ispisujemo maksimalnu brzinu tijela
v_max = g*max(t)
print('v_max = {:.1f} m/s'.format(v_max))
```

Da smo parametar g zadali unutar funkcije:

```
def slobodni_pad(t):
    g = 9.81
    s = g*t**2/2
    return v, s
```

on u izrazu za `v_max`, koji nije dio funkcije, ne bi bio vidljiv i program bi nam javio grešku:
`Name Error:  name 'g' is not defined`

♠ ♠

Literatura o Pythonu i modulima:

[1] L. Budin, P. Brođanac, Z. Markučič i S. Perić: *Rješavanje problema programiranjem u Pythonu*, (Element, Zagreb, 2014.).

[2] Z. Kalafatić, A. Pošćić, S. Šegvić i J. Šribar, *Python za znatiželjne*, (Element, Zagreb, 2016.).

[3] R. H. Landau, M. J. Paez, and C. C. Bordeianu, *Computational Physics - Problem solving with Python* , (Wiley - VCH, Weinheim, 2015.).

[4] M. Newman, *Computational Physics*, (IPP, 2015.).

[5] A. Scopatz, K. D. Huff, *Effective Computation in Physics - Field Guide to Research with Python*, (O'Reilly Media Inc., Boston, 2015.).

[6] A. Saha, *Doing Math with Python*, (No Starch Press, San Francisco, 2015.).

[7] S. J. Rojas, E. A. Christensen, F. J. Blanco-Silva, *Learning SciPy for Numerical and Scientific Computing, 2. ed.*, (Packt Publishing, 2015.).

[8] F. Nelli, *Python Data Analytics - with Pandas, NumPy, and Matplotlib, 2. ed.*, (APress, Rome, 2016.).

[9] C. Führer, J. E. Solem, O. Verdier, *Scientific Computing with Python 3*, (Packt Publishing, 2016.).

[10] R. Johansson, *Numerical Python*, (APress, Rome, 2016.).

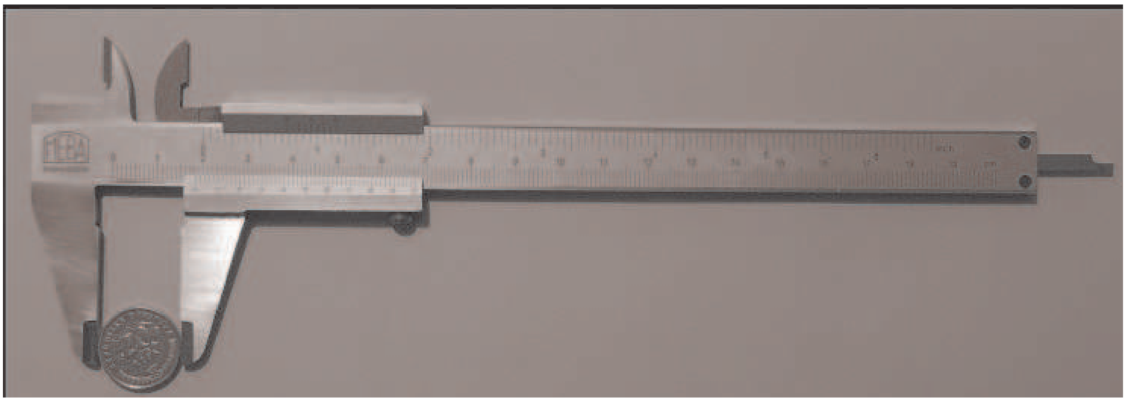
[11] I. Idris, *NumPy, 2. ed.*, (Packt Publishing, 2013.).

♠ ♠

1-1 Mjerenje pomičnom mjerkom i mikrometarskim vijkom

1. Uvod

U ovoj vježbi mjere se dimenzije (malih) tijela - kvadra, kugle i valjka i računaju se njihovi volumeni. Naglasak je na obradi rezultata mjerenja, pogreškama pri mjerenju i standardnom zapisu obrađenih rezultata. Odgovarajuće formule zapisuju se pomoću programa u Pythonu koji omogućuje upis broja mjerenja, upis samih podataka, račun svih veličina i konačni zapis rezultata vodeći računa o pouzdanim znamenkama. Podatci i rezultati obrade grafički se prikazuju i zapisuju se i na tvrdi disk uz komentare.



Slika 1 - pomična mjerka za mjerenje kvadra

2. Pribor

Za izvođenje vježbe priređena je pomična mjerka, mikrometarski vijak, kvadar i kugla.

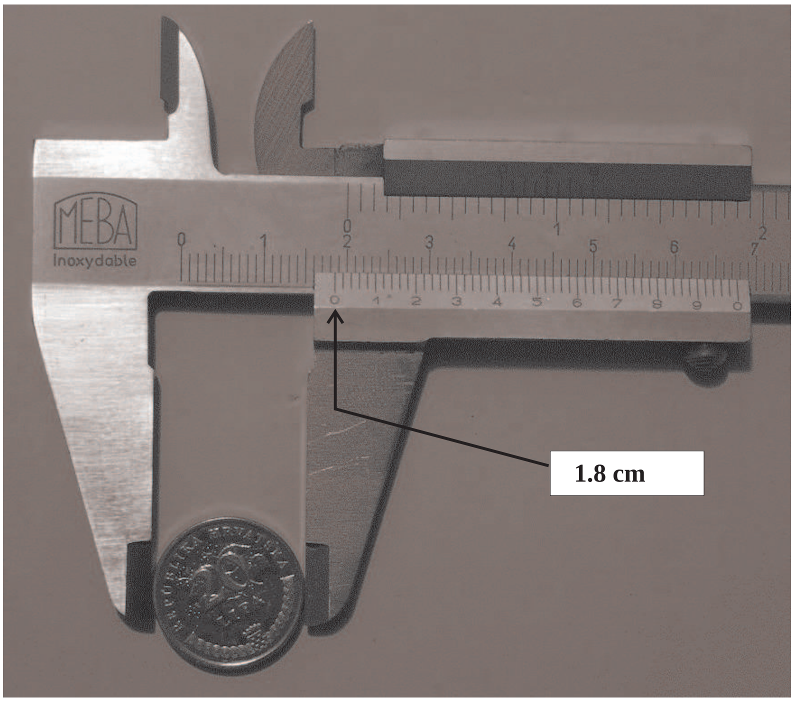
Pomična mjerka ima "čeljusti" u koje se stavlja predmet (kovanica na slici) čije se dimenzije žele izmjeriti. Na pomičnom dijelu mjerke postoji i nonius ili *vernier*†, tj. dodatna skala koja omogućuje mjerenje dodatnih djelića milimetra. Mjerka na slici 1, 2 i 3 može izmjeriti dimenziju do 2 tisućinke centimetra (ili dvije stotinke milimetra). Općenito možemo kazati da je preciznost mjerenja dana ovako

$$\text{preciznost mjerenja} = \frac{\text{najmanji djelić glavne skale}}{\text{broj djelića na skali noniusa}} = (\text{u ovom slučaju}) = \frac{1\,\text{mm}}{50} = 0.02\,\text{mm}.$$

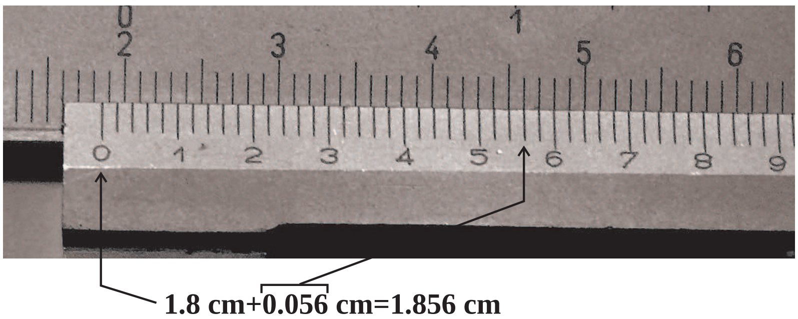
Dodatne znamenke određuju se tako da se gleda koja se crta na gornjoj skali u potpunosti podudara sa crtom na donjoj skali. Kada se ustanovi podudaranje tada se na donjoj skali očitaju dodatne znamenke (0.056 cm na primjeru na slici 3) pa je ukupna vrijednost mjerenjau našem primjeru

† Pierre Vernier (1580.-1637.) je bio francuski izumitelj koji je pri napravio skalu koja povećava točnost mjerenja.

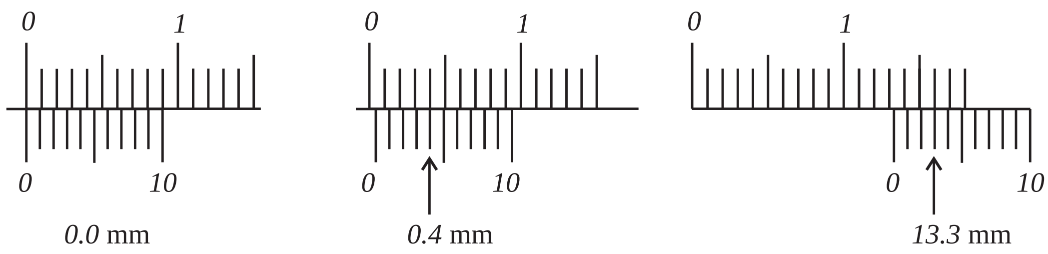
jednaka zbroju mjere određene nulom (to je 1.8 cm na slici) i noniusom određene dvije dodatne znamenke tako da imamo: 1.8 cm+0.056 cm=1.856 cm ili 18.56 mm (slika 3).



Slika 2 - direktno očitana dimenzije je 1.8 cm.



Slika 3 - povećana skala za očitavanje: ukupno očitanje - direktno i pomoću noniusa (verniera).



Slika 4 - primjeri očitavanja. Na srednjoj slici podudara se četvrta crtica noniusa pa je dimenzija 0.4 mm, a na trećoj slici, nula na noniusu pokazuje da je osnovna duljina 13 mm, a podudaranje treće crtice daje rezultat 13.3 mm. Preciznost je ovdje, prema ranijoj definiciji, 1 mm/10 = 0.1 mm.

3. Mjerenje i obrada rezultata mjerenja

1. mjerenje

U prvom mjerenju pomoću pomične mjerke (prema slici) mjere se dimenzije kvadra: stranice a, b i c te se izračunava volumen kvadra. Potrebno je napraviti 3 tablice, za svaku stranicu posebno, a primjer tablice za stranicu a dan je niže.

Tablica 1-1.1

a_i/cm	Δa_i/cm	$(\Delta a_i)^2$/cm^2

Tablica za stranicu a kvadra

Primjer očitavanja dimenzije dan je na slikama 2 i 3 za mjerenje kovanice od 50 lipa. Za mjerenje stranice kvadra valja paziti da se stranica stavi između čeljusti, tamo gdje su one izbrušene. Nadalje, valja mjeriti dimenzije u centimetrima redom (ciklički), tj. prvi puta a, b pa c, a zatim drugi puta a, b pa c itd. Potrebno je obaviti 5 mjerenja koja upisujemo u (tri) tablice za svaku dimenziju te obraditi i prikazati rezultate mjerenja na standardan način, prema uvodnom poglavlju. Prema tome valja izračunati (ovdje dajemo primjer samo za stranicu a):

Srednju vrijednost

$$\overline{a} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} a_i \qquad ((1\text{-}1)\text{-}1)$$

gdje su a_i rezultati pojedinih mjerenja. Zatim popunjavamo tablicu odstupanjima pojedinog mjerenja (pogreška pojedinog mjerenja)

$$\Delta a_i = \overline{a} - a_i \qquad ((1\text{-}1)\text{-}2)$$

i računamo njihove kvadrate (treći stupac u tablici). Pomoću trećeg stupca u tablici računamo *standardnu devijaciju aritmetičke sredine* prema formuli

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(\Delta a_i)^2}{n\cdot(n-1)}} \quad \text{odnosno} \\ \sigma_a &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=5}(\Delta a_i)^2}{5\cdot 4}} = \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2+(\Delta a_2)^2+\cdots+(\Delta a_5)^2}{5\cdot 4}}.\end{aligned} \tag{(1-1)-3}$$

Standardnu devijaciju valja zaokružiti na jednu pouzdanu znamenku i ostale vrijednosti iskazati na isti broj decimalnih mjesta (u istim mjernim jedinicama) kao kod standardne devijacije.

Primjerice, ako je izračunata standardna devijacija $\sigma_a = 0.0286\,\text{cm}$, tada ju valja zaokružiti na $\sigma_a = 0.03\,\text{cm}$. Srednju vrijednost ćemo zato zaokružiti na dvije decimale.

Valja izračunati *relativnu pogrešku*, i iskazati rezultat mjerenja na ovaj način

$$\boxed{a = (\overline{a} \pm \sigma_a)\,\text{cm}} \quad \Delta a_R = \ldots\%.$$

Na isti način valja izraziti druge dvije stranice (b i c).

Račun volumena svodi se na račun posredno mjerene veličine. Prema tome, *srednja vrijednost volumena* kvadra je

$$\overline{V} = \overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c} = \ldots \ \text{cm}^3. \tag{(1-1)-4}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine) računa se prema izrazu

$$\sigma_V = \sqrt{(\overline{b}\cdot\overline{c}\cdot\sigma_a)^2 + (\overline{c}\cdot\overline{a}\cdot\sigma_b)^2 + (\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\sigma_c)^2} = \ldots\text{cm}^3 \tag{(1-1)-5}$$

gdje se uvrštavaju srednje vrijednosti stranica i standardne devijacije.

Maksimalna pogreška volumena je

$$\Delta V_M = 3\sigma_V = \ldots\text{cm}^3, \tag{(1-1)-6}$$

a *relativna pogreška* je

$$\Delta V_R = \frac{\Delta V_M}{\overline{V}}\cdot 100 = \ldots\%.$$

Konačni zapis rezultata jest

$$\boxed{V = (\overline{V} \pm \sigma_V)\,\text{cm}^3} \quad \Delta V_R = \ldots\%. \tag{(1-1)-7}$$

Slika 5 - mikrometarski vijak.

Pomoću Pythona napisati program u kojem se upisuje broj mjerenja, te se upisuju, redom, mjereni podatci rabeći objekte `array`. Program dalje računa srednje vrijednosti, standardne devijacije i relativne pogreške pomoću operacija na objektima `array`. Pomoću modula Matplotlib, program crta na tri istovremeno prikazana grafa podatke kao točke na grafu, te crta pravce koji opisuju srednju vrijednost. Valja paziti na opis grafova. Konačno, program ispisuje rezultat računa volumena, vodeći računa o pouzdanim znamenkama. Program, nadalje, zapisuje sve podatke na tvrdi disk u odgovarajuću datoteku, prema sintaksi Pythona, uz odgovarajuće komentare o podatcima.

2. mjerenje

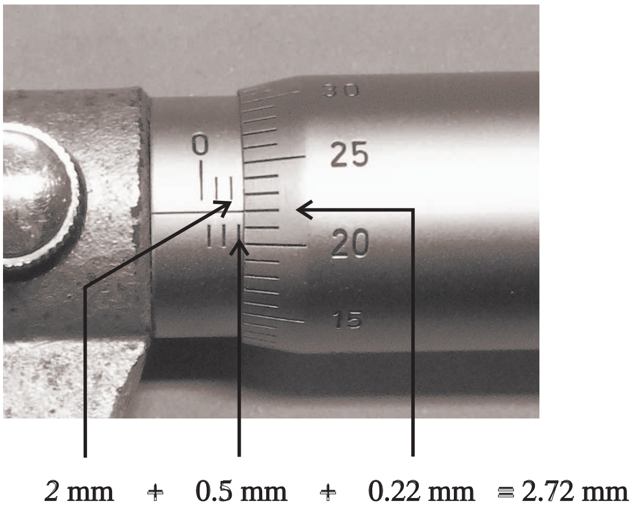
Pomoću mikrometarskog vijka (na slici 5) valja pet puta izmjeriti promjer d kuglice te obraditi rezultate mjerenja i pogrešaka na standardni način. Iz tih rezultata valja izračunati volumen kugle, uz račun pogrešaka i uz standardni prikaz rezultata mjerenja.

Mikrometarski vijak ima glavni okvir ili maticu pomoću koje očitavamo dimenziju predmeta (vidjeti sliku 6). Pri jednom punom okretu, vijak se pomakne za 0.5 mm. Dijelovi milimetra očitavaju se na bubnju, koji je podijeljen na 50 dijelova, tako da prema ranijoj definiciji imamo preciznost od $0.5\,\mathrm{mm}/50 = (1/100)\,\mathrm{mm} = 0.01\,\mathrm{mm}$. Pri mjerenju vrtimo vijak držeći ga za nareckani dio (slika 5). Kada vijak dođe do predmeta, on počne "preskakati" što znači da je predmet dovoljno stegnut, jer valja izbjegavati pretjerano stezanje predmeta (i zbog deformacije predmeta i zbog vijka). Očitavanje debljine odnosno dimenzije predmeta prikazano je na slici 6.

Tablica 1-1.2

d_i/mm	$\Delta d_i/\mathrm{mm}$	$(\Delta d_i)^2/\mathrm{mm}^2$

Tablica za promjer kugle d.



Slika 6 - primjer očitavanja dimenzije
na bubnju mikrometarskog vijka.

Za promjer kuglice, koji je izmjeren 5 puta i nakon unošenja rezultata u tablicu u milimetrima, valja izračunati *srednju vrijednost* $\overline{d}$, *standardnu devijaciju* σ_d, *maksimalnu pogrešku* Δd_M i *relativnu pogrešku* Δd_R. Standardnu devijaciju zaokružimo na jednu pouzdanu znamenku. Srednju vrijednost promjera zaokružimo na isti broj decimala u istim jedinicama pa dobijemo odgovarajući broj pouzdanih znamenki. Rezultate valja napisati na standardan način

$$\boxed{d = (\overline{d} \pm \sigma_d)\,\mathrm{mm}} \quad \Delta d_R = \ldots\%. \tag{(1-1)-8}$$

Volumen kugle jednak je

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}$$

gdje je r polumjer kugle, a d njen promjer. Srednja vrijednost volumena jednaka je

$$\overline{V} = \frac{\left(\overline{d}\right)^3 \pi}{6} \tag{(1-1)-9}$$

a standardnu devijaciju σ_V izračunamo prema formuli

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial d} \cdot \sigma_d\right)^2} \quad \text{odnosno} \qquad \sigma_V = \frac{3\overline{V}}{\overline{d}} \cdot \sigma_d \tag{(1-1)-10}$$

gdje je σ_d standardna devijacija promjera izračunata ranije. Standardnu devijaciju volumena zaokružimo na jednu pouzdanu znamenku, a srednju vrijednost volumena zaokružimo na isti broj decimalnih mjesta kao što ga ima standardna devijacija te tako dobijemo odgovarajući broj pouzdanih znamenki volumena. Pomoću standardne devijacije volumena valja izračunati maksimalnu pogrešku ΔV_M i relativnu pograšku ΔV_R te izraziti rezultate u standardnom obliku

$$\boxed{V = (\overline{V} \pm \sigma_V)\,\mathrm{mm}^3} \quad \Delta V_R = \ldots\%. \tag{(1-1)-11}$$

Pomoću Pythona napisati program u kojem se upisuje broj mjerenja, te se upisuju mjereni podatci za promjer kuglice rabeći objekt `array`. Program dalje računa srednju vrijednost, standardnu devijaciju i relativnu pogrešku pomoću operacija na objektima `array`. Pomoću modula Matplotlib, program crta na grafu podatke mjerenja kao točke na grafu, te crta pravac koji opisuje srednju vrijednost. Valja paziti na opis grafova. Konačno, program ispisuje rezultat računa volumena, vodeći računa o pouzdanim znamenkama. Program zapisuje sve podatke na tvrdi disk u odgovarajuću datoteku, prema sintaksi Pythona, uz odgovarajuće komentare o podatcima.

3. mjerenje

U trećem mjerenju pomoću pomične mjerke mjere se dimenzije valjka: promjer d i visina h te se izračunava volumen valjka. Potrebno je napraviti 2 tablice, za promjer d i za visinu h. Primjer tablice za promjer d dan je niže.

Tablica 1-1.3

d_i/cm	$\Delta d_i/\mathrm{cm}$	$(\Delta d_i)^2/\mathrm{cm}^2$

Tablica za promjer d valjka

Za mjerenje promjera valja paziti da se valjak stavi između čeljusti, tamo gdje su one izbrušene. Nadalje, valja mjeriti dimenzije u centimetrima redom - izmjenično - promjer, visina, promjer, visina itd. Potrebno je obaviti 5 mjerenja koja upisujemo u (dvije) tablice za svaku dimenziju te valja obraditi i prikazati rezultate mjerenja na standardan način, prema uvodnom poglavlju. Prema tome valja izračunati (ovdje dajemo primjer samo za promjer d):

Srednju vrijednost

$$\overline{d} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} d_i \qquad ((1\text{-}1)\text{-}12)$$

gdje su d_i rezultati pojedinih mjerenja. Zatim popunjavamo tablicu odstupanjima pojedinog mjerenja (pogreška pojedinog mjerenja)

$$\Delta d_i = \overline{d} - d_i \qquad ((1\text{-}1)\text{-}13)$$

i računamo njihove kvadrate (treći stupac u tablici). Pomoću trećeg stupca u tablici računamo *standardnu devijaciju aritmetičke sredine* prema formuli

$$\begin{aligned} \sigma_d &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(\Delta d_i)^2}{n\cdot(n-1)}} \quad \text{odnosno} \\ \sigma_d &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=5}(\Delta d_i)^2}{5\cdot 4}} = \sqrt{\frac{(\Delta d_1)^2 + (\Delta d_2)^2 + \cdots + (\Delta d_5)^2}{5\cdot 4}}. \end{aligned} \qquad ((1\text{-}1)\text{-}14)$$

Standardnu devijaciju valja zaokružiti na jednu pouzdanu znamenku i ostale vrijednosti iskazati na isti broj decimalnih mjesta kao kod standardne devijacije.

Primjerice, ako je izračunata standardna devijacija $\sigma_d = 0.0286\,\text{cm}$, tada ju valja zaokružiti na $\sigma_d = 0.03\,\text{cm}$. Srednju vrijednost ćemo zaokružiti prema tome na dvije decimale.

Valja izračunati *relativnu pogrešku*, i iskazati rezultat mjerenja na ovaj način

$$\boxed{d = (\overline{d} \pm \sigma_d)\,\text{cm}} \quad \Delta d_R = \ldots\%.$$

Na isti način valja izraziti i obraditi visinu h.

Račun volumena svodi se na račun posredno mjerene veličine. Prema tome, *srednja vrijednost volumena* valjka je

$$\overline{V} = \frac{1}{4}\left(\overline{d}\right)^2 \pi \cdot h = \ldots \ \ \text{cm}^3. \tag{(1-1)-15}$$

Standardna devijacija (aritmetičke sredine) računa se prema izrazu

$$\sigma_V = \overline{V} \cdot \sqrt{\left(\frac{2\sigma_d}{\overline{d}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{\overline{h}}\right)^2} \tag{(1-1)-16}$$

gdje se uvrštavaju srednje vrijednosti promjera i visine i njihove standardne devijacije.

Maksimalna pogreška volumena je

$$\Delta V_M = 3\sigma_V = \ldots\,\text{cm}^3, \tag{(1-1)-17}$$

a *relativna pogreška* je

$$\Delta V_R = \frac{\Delta V_M}{\overline{V}} \cdot 100 = \ldots\%.$$

Konačni zapis rezultata jest

$$\boxed{V = (\overline{V} \pm \sigma_V)\,\text{cm}^3} \quad \Delta V_R = \ldots\%. \tag{(1-1)-18}$$

Pomoću Pythona napisati program u kojem se upisuje broj mjerenja, te se upisuju mjereni podatci za promjer valjka i visinu valjka rabeći objekte `array`. Program dalje računa srednje vrijednosti, standardne devijacije i relativne pogreške pomoću operacija na objetima `array`. Pomoću modula Matplotlib, program crta na dva grafa istog koordinatnog sustava podatke mjerenja kao točke na grafu, te crta pravce koji opisuju srednje vrijednosti. Valja paziti na opis grafova. Konačno, program ispisuje rezultat računa volumena, vodeći računa o pouzdanim znamenkama. Program zapisuje sve podatke na tvrdi disk u odgovarajuću datoteku, prema sintaksi Pythona, uz odgovarajuće komentare o podatcima.

4. Zadaci za pripremu

Riješiti zadatke i napisati rješenja s cijelim postupkom na kraju pripreme.

Zadatak (1-1)-1. Izračunajte volumen Marsa ako se zna da je njegov promjer 4879 km. (Valja uočiti da je promjer dan na četiri pouzdane znamenke.)

RJEŠENJE: $V = 6.081 \times 10^{19}\,\mathrm{m}^3$.

Zadatak (1-1)-2. Izračunajte stranicu kocke čiji je volumen $10.0\,\mathrm{m}^3$. Izrazite rezultat u milimetrima. (Valja uočiti da je volumen dan na tri pouzdane znamenke.)

RJEŠENJE: $a = 2.15 \times 10^3\,\mathrm{mm}$.

Zadatak (1-1)-3. Kugla od metala ima volumen $100\,\mathrm{cm}^3$. Ako kuglu rastalimo i od nje napravimo kocku, kolika je stranica te kocke? Koliki je omjer polumjera kugle i stranice kocke? (Valja uočiti da je volumen dan na tri pouzdane znamenke.)

RJEŠENJE: $r = 2.88\,\mathrm{cm}$; $a = 4.64\,\mathrm{cm}$; $(r/a) = 0.621$.

1-3 Zakon spiralne opruge

1. Uvod

U ovoj vježbi istražuje se svojstvo linearnog rastezanja spiralne opruge i određuje se konstanta spiralne opruge. Programski jezik Python uvođenjem objekta `array` i operacijama na njemu omogućuje općenit zapis programa koji upisuje podatke, izabire relevantne podatke, računa konstantu opruge k teorijom najmanjih kvadrata i grafički prikazuje mjerene podatke i rezultat računa konstante k.

2. Rastezanje opruge

Kada vanjska sila F_v djeluje na oprugu, opruga se rasteže. Produljenje opruge Δx proporcionalno je sili F_v, a u jednom rasponu rastegnuća opruge, odnos između sile rastezanja i produljenja opruge je linearan. Govorimo, dakle o *zakonu linearnog rastezanja opruge* i pišemo

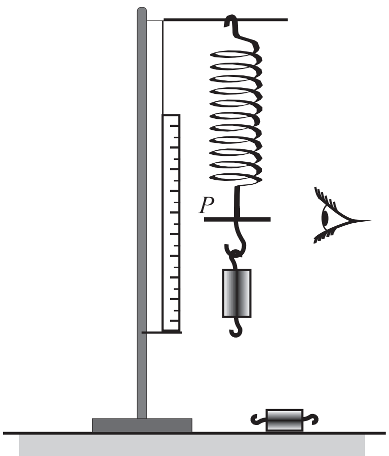
$$F_v \propto \Delta x. \qquad ((1\text{-}3)\text{-}1)$$

Ako konstantu proporcionalnosti između vanjske sile F i sile opruge F_o označimo s k, tada možemo napisati izraz za silu opruge ovako (pišemo x umjesto Δx)

$$F_o = kx \qquad ((1\text{-}3)\text{-}2)$$

pa proporcionalnost ((1-3)-1) sada postaje jednakost

$$F_v = F_o. \qquad ((1\text{-}3)\text{-}3)$$



Slika 1 - Očitavanje položaja tijela na opruzi. Pločica P služi za točno očitavanje na skali.

Konstanta k zove se, jednostavno, *konstanta opruge*, a jedinica za k je njutn metar^{-1} = N m^{-1}. Sila opruge uvijek je suprotna produljenju: kada x raste (nadesno, primjerice) sila raste i djeluje nalijevo, a ako se x smanjuje nalijevo (oprugu sabijamo), tada raste sila nadesno.

Opruge su često izrađene tako da su navoji opruge stisnuti, gusti. Kada počnemo rastezati oprugu, tada nema linearne proporcionalnosti između produljenja i (vanjske) sile koja rasteže oprugu. Kada se opruga malo rastegnula, dolazimo da područja linearnosti, tj. tada je

$$F_v = kx \qquad ((1\text{-}3)\text{-}4)$$

Ako nastavimo rastezati oprugu, tada možemo doći do područja kada se opruga trajno deformira (trajno se rastegnu zavoji) i to područje rastegnuća sigurno nije linearno.

3. Ravnoteža tijela na opruzi

Ako objesimo tijelo na oprugu ono će zauzeti ravnotežni položaj, tj. težina tijela G koja sada igra ulogu vanjske sile F_v bit će u ravnoteži sa silom opruge F_0 pa ćemo imati jednakost iznosa sila

$$F_v = F_o \quad \text{ili} \quad G = F_o, \tag{(1-3)-5}$$

koje, međutim djeluju, kao vektori, u suprotnim smjerovima

$$\vec{G} = -\vec{F}_o \tag{(1-3)-6}$$

tako da je njihov zbroj jednak nuli

$$\vec{G} + \vec{F}_o = 0 \tag{(1-3)-7}$$

što je sadržaj 1. Newtonovog aksioma: na tijelo ne djeluje sila pa ono miruje (ili se giba jednoliko po pravcu). Kažemo da je tijelo u ravnoteži jer na njega djeluju sile, ali njihova je rezultanta jednaka nuli.

Ako pomaknemo tijelo iz položaja ravnoteže i pustimo ga, tada će ono početi harmonički titrati.

4. Pribor

Za mjerenje priređen je stalak s oprugom i skala s podjelom na centimetre i milimetre za očitavanje položaja predmeta obješenog na opruzi. Na donjem kraju opruge nalazi se pločica P koja pomaže pri očitavanju položaja tijela pri određenom rastegnuću opruge (slika 1). Priređen je komplet utega čija je masa takva da omogućuju povećanje obješene mase za iste iznose (50 g), od 0 do 450 g.

5. Mjerenje i obrada rezultata mjerenja

1. Opruga je obješena na stalku i mjerenje počinjemo s oprugom bez utega. Pločica P koja je obješena na kraju opruge služi za točno očitavanje položaja na skali.

Na kraj opruge redom se stavljaju utezi od 50 g, 100 g, 150 g itd., sve do 450 g. Bilježe se odgovarajući položaji i podaci se unose u tablicu 1.

Tablica 1-3.1

F_i/N	0	$1 \cdot G$	$2 \cdot G$	$3 \cdot G$	$4 \cdot G$	$5 \cdot G$	$6 \cdot G$	$7 \cdot G$	$8 \cdot G$	$9 \cdot G$
x_i/cm										

Tablica za promjene položaja utega u ovisnosti o vanjskoj sili odnosno težini utega. Povećanjem mase za 50 g povećava se i sila rastezanja opruge, pri čemo je povećanje sile jednako $G = mg = 0.050\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}} = 0.49\,\mathrm{N}$.

U prvom retku tablice su veličine sila kojom opruga djeluje na obješeni uteg, a u drugom retku se bilježe položaji: x_0 bez opterećenja, x_1 za $50\,\mathrm{g}$, x_2 za $2 \cdot 50\,\mathrm{g}$, x_3 za $3 \cdot 50\,g$ itd. S obzirom da je u ravnoteži sila opruge jednaka sili koja ju rasteže, a radi se o težini utega, tako se ovdje bilježi ovisnost sile opruge o odgovarajućem produljenju koje je proizvelo tu silu.

2. Nakon unošenja svih podataka, nužno je nacrtati graf. Na horizontalnu os nanose se položaji na skali x_i (u centimetrima), a na vertikalnoj osi redom se unose vrijednosti $y_i = F_i$ višekratnika sile, tj.

$$\begin{aligned}
&F_0 = 0 \cdot G = y_0 \quad \text{(ravnotežni položaj bez utega)}\\
&F_1 = 1 \cdot G = 0.49 = y_1 \quad \text{(obješen uteg od 50 g koji daje silu od 0.49 N)}\\
&F_2 = 2 \cdot G = 2 \cdot 0.49 = 0.98 = y_2 \quad \text{itd.}
\end{aligned} \tag{(1-3)-8}$$

Na grafu $(x_i, y_i) = (x_i, F_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, 9)$ uočimo područje linearnosti. Ako je opruga u nerastegnutom položaju jako stisnuta, tada je za očekivati da se ona na početku (za male mase) ne ponaša linearno, no za mase $150\,\mathrm{g}$, $200\,\mathrm{g}$ itd. rastezanje je linearno. Samo iz tih podataka linearnog raspona određujemo konstantu opruge k prema formulama koje su izvedene u teoriji najmanjih kvadrata.[†]

(a) Grafički prikaz ovisnosti sile opruge $F_i = i \cdot G = i \cdot mg$ u ovisnosti o rastegnuću x_i pokazuje da je ovisnost u jednom dijelu grafa linearna, tj. opisana je pravcem $y = a + bx$ gdje je b koeficijent smjera pravca, a a je odsječak na osi y.

(b) U našem slučaju je $y \leftrightarrow F_i$ a $x \leftrightarrow x_i$ (prema tablici 1) pa za određenje konstante opruge moramo odrediti koeficijent smjera b koji je upravo jednak konstanti opruge k, tj. $k = b$. Prema formuli iz dodatka D4, imamo

$$\boxed{\begin{aligned}
b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}\\
a &= \frac{1}{n}\sum y_j - b \cdot \frac{1}{n}\sum x_j.
\end{aligned}} \tag{(1-3)-9}$$

S tim konstantama a i b je određen, po teoriji najmanjih kvadrata, *najbolji* pravac koji prolazi skupom točaka.

(c) Prema tome, srednja vrijednost konstante opruge $\overline{k}$ je

$$\overline{k} = b = \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}. \tag{(1-3)-10}$$

y_j su samo one vrijednosti sile iz tablice 1 za koje je rastezanje linearno, a x_j su samo one vrijednosti x_j iz iste tablice za koje je rastezanje linearno. Primjerice, ako linearnost počinje

---

[†] Teorija najmanjih kvadrata je metoda u kojoj se postavlja zahtjev da je zbroj kvadrata odstupanja neke mjerene vrijednosti od prave vrijednosti minimalan. Vidjeti dodatak D4.

Tablica 1-3.2

y_i							$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i										
$\sum_i x_i$						$\sum_i x_i^2$				
$(\sum_i x_i)^2$						$\sum_i y_i$				
$\sum_i y_i^2$						$\sum_i x_i y_i$				

Priređene veličine za račun parametara pravca a i b prema formulama u tekstu, metodom najmanjih kvadrata. Računa se samo s podatcima x_i i y_i koji su u linearnom prodručju, prema nacrtanom grafu.

s vrijednošću sile $4G$, tada je $y_1 = 4G$, $y_2 = 5G$, $y_3 = 6G$, $\dots$ $y_6 = 9G$. Odgovarajuće vrijednosti x_j pročitamo iz tablice: x_1 je rastegnuće koje odgovara sili $4G$, x_2 odgovara sili $5G$ itd. U formuli ((1-3)-10) je n jednak broju točaka u linearnom području, tj. broj točaka koje leže na pravcu (prema gornjem primjeru, $n = 6$).

(d) Najbolje je posebno računati pojedine dijelove formule za $\overline{k}$: zbroj umnožaka sile i rastegnuća $\sum_j x_j y_j$, zbroj rastegnuća $\sum_j x_j$, zbroj kvadrata rastegnuća $\sum_j x_j^2$ itd., prema tablici 1-3.2, a zatim pojedine rezultate uvrstiti u izraz ((1-3)-10).

(e) Valja paziti na jedinice: konstanta opruge k ima jedinicu $\mathrm{N\,m^{-1}}$, a vrijednosti x_i (rastegnuća) dane su u jedinicama cm, tako da se rezultat za k mora pomnožiti sa 100 i ne zaboraviti da je $G = 0.49\,\mathrm{N}$.

(f) Vrijednost konstante opruge označili smo s $\overline{k}$.

(g) Formule ((1-3)-9) i ((1-3)-10) valja u Pythonu izračunati pomoću objekta `array`. Sve izmjerene podatke x_i valja upisati u jedan `array`, a odgovarajuće vrijednosti sile odnosno y_i u drugi `array`. Modulom Matplotlib valja nacrtati graf (sa svim oznakama na osima) koji prikazuje ovisnost sile $F_i = y_i$ koja se javlja u opruzi o rastegnuća opruge x_i. Iz grafa valja očitati, kako piše gore, vrijednosti parova (x_i, y_i) za koje je opruga linearna. Zatim pomoću samo tih parova valja preko operacija na objektu `array` izračunati elemente tablice 1-3.2. Valja uočiti da su upravo svojstva objekta `array` vrlo pogodna za račune u teoriji najmanjih kvadrata. Nacrtati novi graf na kojem su prikazani svi mjereni podatci i zatim pravac koji određuje konstantu opruge $\overline{k}$.

(h) Postupak provjere računa konstante k, kako slijedi u odjeljku **6** upisati u nastavku Python programa. Paziti na zapis vodeći računa o pouzdanim znamenkama.

6. Rezultati i kontrola pokusa

Konstantu opruge k, odnosno njenu srednju vrijednost $\overline{k}$ izračunali smo prema gornjoj formuli ((1-3)-10) i zapisali na odgovarajući broj pouzdanih znamenki naznačivši jedinice.

Ranije smo kazali da kada se tijelo na opruzi pokrene na gibanje (po vertikalnom pravcu) tada ono izvodi harmoničko titranje. Vrijeme jednog titraja, odnosno period T dano je ovako

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{(1-3)-11}$$

Iz te formule možemo izraziti konstantu opruge k i mjereći titrajno vrijeme izračunati tu konstantu.

Zadovoljit ćemo se ovdje jednostavnom provjerom rezultata tako da sa štopericom (zapornim satom) izmjerimo 10 titraja, t_{10}. Mjerenje obavimo tako da uklonimo okruglu pločicu i objesimo uteg od $m_{300} = 300\,\mathrm{g}$ na oprugu i lagano pomaknemo uteg iz položaja ravnoteže te ga pustimo da titra gore-dolje. Pažljivo gledamo gibanje utega "da uhvatimo ritam" te u jednom trenutku, kada se uteg zaustavi ili u najnižoj ili u najvišoj točki, pokrenemo štopericu i počnemo brojati titraje (pri tome u trenutku kada pokrenemo štopericu, brojimo *nula, jedan, dva,* ...). Izmjerimo 10 titraja, dobijemo vrijeme t_{10} i izračunamo vrijeme *jednog titraja*. Tako dobijemo $T_{10} = \frac{t_{10}}{10}$. Pomoću izmjerene konstante opruge $\overline{k}$ izračunamo vrijeme iz gornje formule (11) i dobijemo T_0

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{300}}{\overline{k}}}. \tag{(1-3)-12}$$

Izračunamo pogrešku ΔT ovako

$$\Delta T = |T_0 - T_{10}|. \tag{(1-3)-13}$$

Izračunamo pogrešku mjerenja konstante k ovako

$$\Delta k = 2\frac{\overline{k}}{T_{10}} \cdot \Delta T = \ldots \,\mathrm{N\,m^{-1}}. \tag{(1-3)-14}$$

Veličina Δk ima ovdje ulogu standardne devijacije za račun konstante k, tako da nju moramo, prema ranije uvedenom principu, zaokružiti na jednu pouzdanu znamenku. Izračunamo relativnu pogrešku mjerenja konstante k

$$\Delta k_R = \frac{\Delta k}{\overline{k}} \cdot 100 = 2\frac{\Delta T}{T_{10}} \cdot 100 = \ldots \%. \tag{(1-3)-15}$$

i izrazimo konačni rezultat mjerenja konstante opruge k

$$\boxed{k = (\overline{k} \pm \Delta k)\,\mathrm{N\,m^{-1}})} \quad \Delta k_R = \ldots \%.$$

Prema ranijoj uputi, gornje postupke i rezultate valja upisati u Python program, nakon grafičkih prikaza podataka i rezultata računa teorijom najmanjih kvadrata.

7. Zadatci za pripremu

Riješiti zadatke pri čemu valja rabiti Python kao kalkulator i napisati rješenja (vodeći računa o broju pouzdanih znamenki) s cijelim postupkom, na kraju pripreme.

Zadatak 1-3.1 Izračunajte konstantu opruge k ako uteg mase 200 g za jednu minutu napravi 80 titraja.

RJEŠENJE: $k = 14.0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

Zadatak 1-3.2 Sila iznosa 3.0 N rastegne oprugu za 15.0 cm. Koliko titraja u minuti napravi tijelo mase $m = 200\,\mathrm{g}$ koje titra na toj opruzi?

RJEŠENJE: $T = 0.63\,\mathrm{s}$ i $n = 95$ titraja.

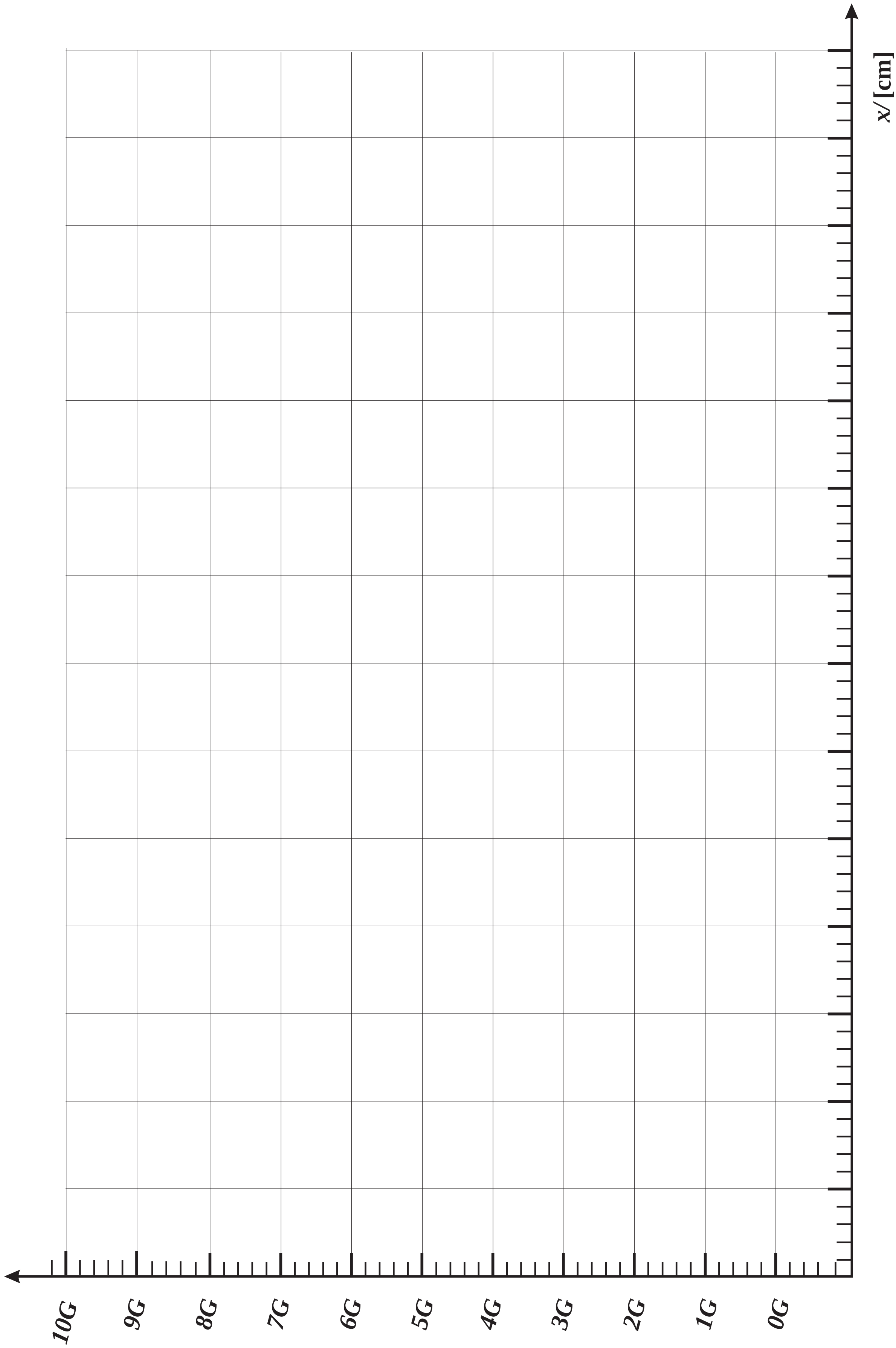
LITERATURA:

[1] D. Horvat: Fizika 1 - mehanika i toplina, Hinus, Zagreb, 2005. Str. 1-33 do 1-36.

[2] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi, optika i uvod u modernu fiziku, Element, Zagreb, 2018. Str. 2-2 do 2-10.

♠ ♠

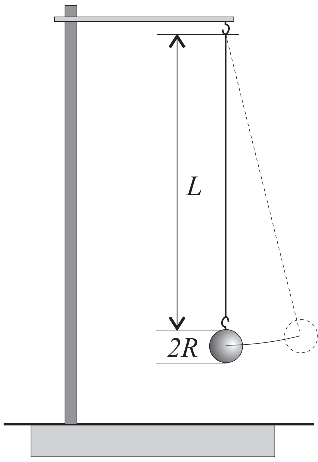
Graf uz vježbu 1-3



1-4 Određivanje akceleracije sile teže matematičkim njihalom

1. Uvod

U ovoj vježbi određuje se akceleracija sile teže g mjerenjem titrajnog vremena T matematičkog njihala. Provedbu računa valja obaviti Pythonom, pri čemu se interaktivno upisuju podatci mjerenja, a rezultati se ispisuju na zaslon i upisuju na tvrdi disk.



Slika 1 - Matematičko njihalo - kuglica na niti duljine L. Otklon od položaja ravnoteže treba biti oko 2-3 cm za duljinu niti od oko 30 - 40 cm.

2. Matematičko njihalo i akceleracija sile teže

Kada sitno tijelo (materijalna točka), obješeno na nerastezljivoj niti bez mase, miruje u položaju ravnoteže, tada su u ravnoteži dvije sile: sila teža tj. težina tijela G i napetost niti N, tj. pisano vektorski

$$\vec{G} + \vec{N} = 0. \qquad ((1\text{-}4)\text{-}1)$$

Ako tijelo otklonimo malo od položaja ravnoteže, tada na njega počinje djelovati komponenta sile teže koja uzrokuje njihanje tijela. Takvo njihalo zovemo, uz gornje pretpostavke (točkasto tijelo, nerastezljiva nit bez mase) *matematičko njihalo*. Njihanje - titranje tijela je harmoničko, tj. položaj tijela je opisan funkcijama sinus i kosinus.

Period titranja, tj. vrijeme jednog titraja (pomak tijela na niti od početnog položaja - prikazanog crtkano na slici - i natrag) dan je formulom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad ((1\text{-}4)\text{-}2)$$

gdje je ℓ duljina niti na koju je obješena materijalna točka, a g je akceleracija sile teže. U našem slučaju umjesto materijalne točke imamo kuglicu polumjera R odnosno promjera $2R$. Ako sažmemo kuglicu u točku koja je u središtu kuglice, tada možemo uzeti da je ukupna duljina niti na kojoj visi "naša materijalna točka" jednaka

$$\ell = L + R \qquad ((1\text{-}4)\text{-}3)$$

gdje je L duljina niti od objesišta do površine kuglice.

Ako u pokusu izmjerimo T i ℓ tada možemo izraziti i izračunati akceleraciju sile teže g, tj.

$$\boxed{g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}.}$$

Akceleracija sile teže ovisi o nizu faktora (zemljopisna širina, nadmorska visina itd.), tako da nacionalni uredi za utege i mjere daju točne vrijednosti akceleracije g za pojedina područja. Za Zagreb, tj. za područje blizu rijeke Save, vrijednost akceleracije sile teže je

$$g_{\mathrm{Zg}} = 9.80\,663\,337\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \qquad ((1\text{-}4)\text{-}4)$$

U udžbenicima se uzima vrijednost g od $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ što je zadovoljavajuća vrijednost za računanje, a mi ćemo naše eksperimentalne rezultate uspoređivati s vrijednošću

$$\boxed{g_{\mathrm{Zg}} = 9.807\,\mathrm{m\,s^{-2}}.} \qquad ((1\text{-}4)\text{-}5)$$

3. Pribor

Za mjerenje pripređen je stalak s matematičkim njihalom, tj. kuglicom polumjera R (promjera $2R$) i zapornim satom. Nadalje, imamo ravnalo kojim mjerimo duljinu niti L i pomičnu mjerku (koju valja nakratko posuditi iz kompleta vježbe 1-1) kojom mjerimo promjer kuglice $2R$.

4. Mjerenje

1. Kada kuglica miruje na stalku, pomoću ravnala izmjerimo duljinu niti L od objesišta do površine kuglice. Ravnalo nam omogućuje mjerenje do preciznosti od $1\,\mathrm{mm}$, tako da možemo očekivati da se pri tom mjerenju javlja pogreška od $\Delta L = \pm 1\,\mathrm{mm}$. Podatak mjerenja upisujemo u Python program vodeći ra čuna o formatiranju brojeva.

2. Pomoću pomične mjerke izmjerimo promjer kuglice $2R$. Možemo procijeniti da se pri tom mjerenju javlja pogreška od $\Delta R = \pm 0.1\,\mathrm{mm}$.

3. Kuglicu odmaknemo od položaja ravnoteže (prema crtkanoj slici) za, otprilike 2 do 3 cm i pustimo ju da se njiše. Pažljivo promatramo kuglicu "da uhvatimo ritam" i tada u trenutku kada se kuglica nađe u maksimalnom odmaku od položaja ravnoteže, pokrenemo štopericu (zaporni sat) i počnemo mjerenje vremena za 10 titraja. (Kada pokrenemo štopericu brojimo "nula", "jedan", "dva"" itd.) Izmjereno vrijeme od 10 titraja podijelimo s 10 i u tablicu upišemo vrijeme jednog titraja T_i ($i = 1, 2, \ldots$).

4. Ponovimo pet puta ($i = 1$ do $i = 5$) mjerenje titrajnog vremena T. Rezultate mjerenja upisujemo u Python programu u objekt `array` koji je pogodan za račun standardne devijacije titrajnog vremena (perioda).

Tablica 1-4.1

T_i/s	ΔT_i/s	$(\Delta T_i)^2/\mathrm{s}^2$
ℓ	(	$\pm$ 0.11)cm

Tablica mjerenja titrajnog vremena T. Mjerenje 10 titraja zapornim satom daje rezultat na 4 značajne znamenke (tri decimalna mjesta). Upisati duljinu $\ell = L + R$, uz procijenjene pogreške $\Delta\ell = \Delta L + \Delta R = 1\mathrm{mm} + 0.1\mathrm{mm} = 1.1\,\mathrm{mm} = 0.11\,\mathrm{cm}$.

5. Rezultati, pogreške mjerenja i kontrola rezultata

Za račun akceleracije sile teže g rabimo formulu od ranije

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}.$$

Račune izvedimo pomoću Pythona kao kalkulatora. Prvo obradimo rezultate mjerenja titrajnog vremena T: izračunamo *srednju vrijednost*

$$\overline{T} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} T_i \qquad ((1\text{-}4)\text{-}6)$$

i popunimo tablicu *relativnim odstupanjima pojedinog mjerenja*

$$\Delta T_i = \overline{T} - T_i, \qquad ((1\text{-}4)\text{-}7)$$

a zatim pomoću trećeg stupca tablice izračunamo *standardnu devijaciju aritmetičke sredine*

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta T_i)^2}{5\cdot 4}} \qquad ((1\text{-}4)\text{-}8)$$

i izračunamo relativnu ΔT_R pogrešku

$$\Delta T_R = \frac{3\sigma_T}{\overline{T}}\cdot 100 = \ldots\% \qquad ((1\text{-}4)\text{-}9)$$

te napišemo rezultat na standardni način:

$$\boxed{T = (\overline{T} \pm \sigma_T)\,\mathrm{s}} \qquad \Delta T_R = \ldots\%. \qquad ((1\text{-}4)\text{-}10)$$

Rezultate mjerenja i računa vezanih uz obradu rezultata mjerenja prema gore i ranije opisanom postupku u Python programu upišemo na tvrdi disk.

Pomoću $\overline{T}$ izračunamo prema gornjoj formuli *srednju vrijednost akceleracije sile teže*

$$\overline{g} = 4\pi^2 \frac{\ell}{\overline{T}^2} \tag{(1-4)-11}$$

pri čemu je $\ell = L + R$.

Standardnu devijaciju akceleracije sile teže izračunamo pomoću Pythona kao kalkulatora preko formule za standardnu devijaciju posredno mjerene veličine

$$\sigma_g = \overline{g} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{\overline{T}}\right)^2}, \tag{(1-4)-12}$$

gdje nam $\Delta\ell$ igra ulogu standardne devijacije duljine niti ℓ koju smo procijenili kao

$$\Delta\ell = \Delta L + \Delta R = 0.1\,\mathrm{cm} + 0.01\,\mathrm{cm} = 0.11\,\mathrm{cm}. \tag{(1-4)-13}$$

Izračunamo *relativnu pogrešku*

$$\Delta g_R = \frac{3 \cdot \sigma_g}{\overline{g}} \cdot 100 = \ldots\%, \tag{(1-4)-14}$$

i napišemo rezultat mjerenja na standardni način

$$\boxed{g = (\overline{g} \pm \sigma_g)\,\mathrm{m\,s^{-2}}} \qquad \Delta g_R = \ldots\% \tag{(1-4)-15}$$

vodeći računa o broju značajnih znamenki.

Provjera rezultata Zadovoljit ćemo se ovdje jednostavnom provjerom rezultata tako da uzmemo eksperimentalnu vrijednost akceleracije sile teže za Zagreb, formula ((1-4)-4) i izračunamo relativno odstupanje Δg_{rel} našeg rezultata od g_{Zg}:

$$\Delta g = \frac{|g_{\mathrm{Zg}} - \overline{g}|}{g_{\mathrm{Zg}}} \cdot 100 = \ldots\%. \tag{(1-4)-16}$$

Prihvatljiva pogreška mjerenja je oko 1 - 5%. Sve rezultate računa formatiramo prema uputama i pomoću Pythona zapišemo na tvrdi disk.

6. Zadatci za pripremu

Riješiti zadatke rabeći Python kao kalkulator i napisati rješenja sa cijelim postupkom na kraju pripreme.

Zadatak 1-4.1 Kolika mora biti duljina niti matematičkog njihala da dobijemo njihalo koje titra 60 puta u jednoj minuti?

RJEŠENJE: $\ell = 0.25\,\mathrm{m}$.

Zadatak 1-4.2 Matematičko njihalo ima period $T = 1.303\,\mathrm{s}$. Za koliko treba produljiti nit njihala da titrajno vrijeme poraste za 10%?

RJEŠENJE: $\Delta\ell = 0.0883\,\mathrm{m}$.

LITERATURA:

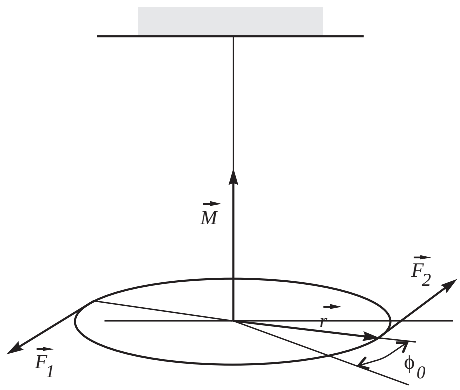
[1] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi optika i uvod u modernu fiziku, Neodidacta, Zagreb, 2011. Str. 2-29 do 2-33 i 2-88 do 2-90.

♠ ♠

1-5 Određivanje konstante torzije torzijskim njihalom

1. Uvod

U ovoj vježbi određuje se konstanta torzije žice mjerenjem titrajnog vremena T torzijskog njihala. U programu Python valja napisati program koji će na interaktivni način upisati podatke o tijelu koje titra kao torzijsko njihalo te koji će omogućiti zapis mjerenih podataka pomoću Numpy objekta `array` uz njihov standardni način obrade: račun srednje vrijednosti, relativnog odstupanja, standardne devijacije, relativne pogreške te račun momenata tromosti tijela koja titraju. Nadalje, usporedit će rezultat dobivene konstante torzije mjerenjem perioda titranja i direktnim računom iz geometrijskog rasporeda mase tijela u prostoru.



Slika 1 - Torzijsko njihalo - ploča obješena na žici zakrenuta je iz položaja ravnoteže momentima sila. Početni kut otklona ϕ_0 dobro je uzeti oko 90°.

2. Elastičnost materijala i torzijsko njihalo

Kada na neko tijelo djeluje sila tada ono mijenja svoj oblik, tj. kažemo da se tijelo deformiralo. Nakon što sila prestane djelovati, neka tijela vraćaju se u svoj prvobitni oblik. Takva tijela zovemo elastičnim, točnije, materijal od kojih su ona načinjena je elastični materijal.

Naprezanja, tj. djelovanja sila na površinu tijela, koja su uzrokovana tim vanjskim silama možemo podijeliti na *vlačno naprezanje*, na *tlačno naprezanje* i na *torzijsko naprezanje* ili *smicanje*. Ovdje ćemo istražiti elastično svojstvo žice, odnosno, elastično svojstvo metala od kojeg je izlivena žica, s obzirom na torzijsko naprezanje.

Zbog djelovanja vanjskih momenata sila, kao na slici 1, žica se uvija - tordira, a zbog elastičnosti materijala u žici se javlja unutarnje naprezanje koje vraća žicu, a time i tijelo obješeno na žici, u ravnotežni položaj. Kada se napiše jednadžba gibanja tijela (ploče na slici 1) koje ima moment tromosti I, tada rješenje te jednadžbe vodi na periodičko titranje, a tijelo postaje torzijsko njihalo (iako se tu ne radi o njihanju u pravom smislu riječi već o rotaciji lijevo-desno). Period ili titrajno vrijeme T torzijskog njihala dan je ovako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \qquad ((1\text{-}5)\text{-}1)$$

gdje je I moment tromosti tijela koje titra, a D je konstanta torzije žice i ona je dana ovako

$$D = \frac{\pi G R^4}{2\ell}. \tag{(1-5)-2}$$

U gornjoj formuli G je modul torzije (vidjeti dodatak ovom tekstu za vrijednosti G za različite materijale), tj. svojstvo materijala (metala od kojeg je izlivena žica) s obzirom na torzijsko naprezanje, R je polumjer žice, a ℓ je njena duljina. Jedinica za konstantu torzije žice je $\mathrm{kg\,m}^2 s^{-2}$ (vidjeti niže).

Moment tromosti je i geometrijska veličina koja pokazuje i kako se u prostoru raspoređuje masa (krutog) tijela. Moment tromosti mjeri tromost tijela pri rotaciji: veći moment tromosti ukazuje da je tijelo teže pokrenuti na rotaciju, slično kao što masa tijela mjeri tromost tijela kada ga se pokuša pokrenuti. Moment tromosti ovisi i o osi oko koje tijelo rotira (titra, u našem slučaju).

Moment tromosti homogenog štapa $I_{\text{š}}$ za os kroz sredinu štapa, tj. kroz njegovo težište je dan ovako

$$I_{\text{š}} = \frac{1}{12} m L^2 \tag{(1-5)-3}$$

gdje je L duljina štapa, a m njegova masa. (Podaci o štapu dani su u uputi vježbe na stolu za pokuse.)

Moment tromosti materijalne točke I_{mt} koja rotira na udaljenosti d od središta vrtnje je

$$I_{\text{mt}} = m_t d^2 \tag{(1-5)-4}$$

gdje je m_t masa materijalne točke.

Ako imamo složeno tijelo koje rotira, primjerice štap i materijalnu točku koja je negdje "prikvačena" na tijelo, tada ukupni moment tromosti izračunamo kao zbroj momenata tromosti pojedinih dijelova složenog tijela. U slučaju da imamo dvije materijalne točke koje su pričvršćene na krajeve štapa, a štap rotira (ili titra kao kod nas) oko osi kroz težište, ukupni moment tromosti je

$$\begin{aligned} I_u = I_{\text{š}} + I_{\text{mt}} &= \frac{1}{12} m L^2 + 2 m_t \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{2} \cdot \left(m_t + \frac{m}{6}\right). \end{aligned} \tag{(1-5)-5}$$

gdje smo uzeli da su (dvije) materijalne točke udaljene upravo $d = \frac{L}{2}$ od osi rotacije (titranja). Ako su materijalne točke (pločice) postavljene na četvrtinu udaljenosti od težišta, tj. za $L/4$ udaljene od kraja tada je moment tromosti jednak

$$\begin{aligned} I'_u = I_{\text{š}} + I'_{\text{mt}} &= \frac{1}{12} m L^2 + 2 m_t \left(\frac{L}{4}\right)^2 \\ &= \frac{L^2}{4} \cdot \left(\frac{m_t}{2} + \frac{m}{3}\right). \end{aligned} \tag{(1-5)-6}$$

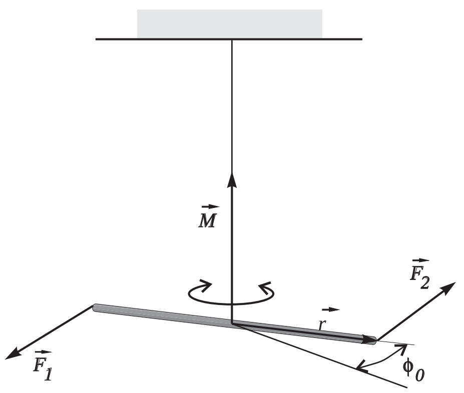
Ako u pokusu izmjerimo T i znamo izračunati ili izmjeriti moment tromosti I tijela koje titra, tada možemo izraziti i izračunati konstantu torzije D

$$D = I \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad ((1\text{-}5)\text{-}7)$$

i usporediti tu vrijednost s vrijednošću izračunatom iz formule ((1-5)-2). Iz gornjeg izraza ((1-5)-7) odmah vidimo da je jedinica za konstantu torzije jednaka jedinici za moment tromosti koja je jednaka $\mathrm{kg\,m^2}$ (prema formuli ((1-5)-4) ili prema formuli ((1-5)-3)) kroz jedinica za titrajno vrijeme na kvadrat tj. $\mathrm{s^{-2}}$ što daje jedinicu za D $\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}$.

3. Pribor

Za mjerenje je priređen stalak sa žicom na kojoj je obješen štap duljine L i mase m, prema slici. Nadalje, imamo ravnalo kojim mjerimo duljinu žice ℓ, mikrometarski vijak (koji valja nakratko posuditi iz kompleta vježbe 1-1) kojim mjerimo promjer žice $2R$ i zaporni sat - štopericu kojom mjerimo titrajno vrijeme T. Također imamo i dvije kuglice ili pločice (koje dobro aproksimiraju materijalne točke) koje se mogu pričvrstiti na kraj štapa i na taj način promijeniti moment tromosti tijela koje titra.



Slika 2 - Torzijsko njihalo za mjerenje - tanki štap poznate mase m i poznate duljine L obješen je na na žici i zakrenut iz položaja ravnoteže momentima sila. Početni kut otklona ϕ_0 dobro je uzeti oko $90°$. Važno je paziti da se štap na titranje pokrene iz horizontalnog položaja i da on u horizontalnom položaju i titra (lijevo-desno). U nastavku mjerenja, uzmu se dvije kuglice svaka mase m_t i pričvrste na kraj štapa tako da mu se promijeni moment tromosti od $I_{\text{š}} = mL^2\frac{1}{12}$ na $I_{\text{u}} = (m_t + m/6)L^2/2$. Time se promijeni i period titranja T.

4. Mjerenja i obrada rezultata mjerenja

1. mjerenje

1. Pažljivo postavimo štap u horizontalni položaj i s dvije ruke ga zakrenemo, tako da žica ostaje u vertikalnom položaju, a štap u horizontalnom položaju. Kut zakreta neka bude oko $90°$. Titrajno vrijeme - period T *ne ovisi* o početnom kutu zakreta, no manji početni kut zakreta omogućava da štap titra u horizontalnoj ravnini. Istovremeno ispustimo štap iz obje ruke i pustimo ga da titra kao torzijsko njihalo.

2. Uzmemo zaporni sat - štopericu i promatramo titranje štapa "da uhvatimo ritam". Tada, u trenutku kada je štap u mirnom položaju, pokrenemo štopericu i počnemo mjerenje vremena za 10 titraja. (Kada pokrenemo štopericu brojimo "nula", "jedan", "dva"" itd.) Štap napravi jedan cijeli titraj kada se od mirnog položaja pokrene, nađe u drugom mirnom položaju i vrati se natrag. Izmjereno vrijeme od 10 titraja podijelimo s 10 i u tablicu upišemo vrijeme jednog titraja T_i $(i = 1, 2, \dots)$.

3. Bez zaustavljanja štapa, resetiramo zaporni sat i ponovno izmjerimo 10 titraja. Ponovimo pet puta ($i = 1$ do $i = 5$) mjerenje titrajnog vremena T i upišemo rezultate u tablicu. U Pythonu napišemo program koji omogućuje zapis podataka o štapu (koji je dan uz uputu na stolu pri pokusu), te pomoću Numpy objekta `array` upišemo izmjerena titrajna vremena u `array`. Operacijama na tom objektu izračunamo relativna odstupanja i standardnu devijaciju za titrajno vrijeme te napišemo rezultat na standardni način vodeći računa o pouzdanim znamenkama.

Tablica 1-5.1

T_i/s	ΔT_i/s	$(\Delta T_i)^2$/s^2

Tablica mjerenja titrajnog vremena T. Mjerenje 10 titraja zapornim satom daje rezultat na 4 značajne znamenke (tri decimalna mjesta). Moment tromosti štapa izračunamo prema podatcima uz vježbu o masi štapa m i njegovoj duljini L, a moment tromosti izračunamo pomoću izraza $I_{š} = \frac{1}{12} m L^2$.

4. **Rezultati, pogreške mjerenja i kontrola rezultata 1. mjerenja**
   Obradimo rezultate mjerenja titrajnog vremena na standardni način: izračunamo srednju vrijednost

$$\overline{T} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^{i=5} T_i \qquad ((1\text{-}5)\text{-}8)$$

popunimo tablicu s odstupanjima pojedinog mjerenja od srednje vrijednosti (drugi stupac)

$$\Delta T_i = \overline{T} - T_i \qquad ((1\text{-}5)\text{-}9)$$

i izračunamo kvadrate odstupanja $(\Delta T_i)^2$ (treći stupac tablice) te standardnu devijaciju direktno mjerene veličine

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta T_i)^2}{5 \cdot 4}} \qquad ((1\text{-}5)\text{-}10)$$

i maksimalnu pogrešku

$$\Delta T_M = 3 \cdot \sigma_T, \qquad ((1\text{-}5)\text{-}11)$$

relativnu pogrešku

$$\Delta T_R = \frac{\Delta T_M}{\overline{T}} \cdot 100 = \ldots \% \qquad ((1\text{-}5)\text{-}12)$$

i napišemo rezultate na standardni način

$$\boxed{T = (\overline{T} \pm \sigma_T)\,\mathrm{s}} \quad \Delta T_R = \ldots \%. \qquad ((1\text{-}5)\text{-}13)$$

5. **Račun konstante torzije žice** Iz izraza za titrajno vrijeme torzijskog njihala ((1-5)-1) izrazimo konstantu torzije žice ((1-5)-7) tj.

$$D = \frac{4\pi^2 I_{š}}{T^2}. \qquad ((1\text{-}5)\text{-}7)$$

a zatim izračunamo *srednju vrijednost* konstante torzije

$$\overline{D} = \frac{4\pi^2 I_{š}}{\overline{T}^2}. \qquad ((1\text{-}5)\text{-}14)$$

Standardnu devijaciju izračunamo preko formule za standardnu devijaciju posredno mjerene veličine

$$\sigma_D = 2 \cdot \frac{\overline{D}}{\overline{T}} \sigma_T. \qquad ((1\text{-}5)\text{-}15)$$

Izračunamo *relativnu pogrešku*

$$\Delta D_R = \frac{3 \cdot \sigma_D}{\overline{D}} \cdot 100 = \ldots \%, \qquad ((1\text{-}5)\text{-}16)$$

i napišemo *rezultat mjerenja* na standardni način

$$\boxed{D = (\overline{D} \pm \sigma_D)\,\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}} \qquad \Delta D_R = \ldots \% \qquad ((1\text{-}5)\text{-}17)$$

vodeći računa o broju značajnih znamenki. Cijeli niz gornjih računa obavimo u Pythonu rabeći ga kao kalkulator. Unesene podatke i rezultate obrade mjerenih podataka zapišemo na tvrdi disk uz popratne komentare.

6. **Kontrola mjerenja** Pomoću formule ((1-5)-2)

$$D = D_{\mathrm{teor}} = \frac{\pi G R^4}{2\ell}.$$

i pomoću podataka danih uz vježbu izračunamo (teorijsku) konstantu torzije D_{teor}: uvrstimo duljinu žice ℓ, polumjer žice R i modul torzije G (čelične) žice. Usporedimo taj rezultat s rezultatom za D iz izraza ((1-5)-17), tj. izračunamo relativno odstupanje našeg rezultata ((1-5)-17) od rezultata D_{teor}

$$\Delta D_t = \frac{|D_{\text{teor}} - D|}{D_{\text{teor}}} \cdot 100\%. \tag{(1-5)-18}$$

Rezultat provjere dodamo i u Pythonu na tvrdi disk.

2. mjerenje

Uzmemo štap i pločice te pločice pričvrstimo na krajeve štapa (ili na polovišta štapa, prema uputi na stolu). Ponovimo korake od 1 do 6 prema prvom mjerenju, unoseći podatke u tablicu 2 identičnu tablici 1. Moment tromosti torzijskog njihala dan je sada izrazom ((1-5)-5)

$$I_u = \frac{L^2}{2} \cdot \left(m_t + \frac{m}{6}\right) \quad \text{(pločice na kraju)}$$

gdje smo uzeli da su (dvije) materijalne točke udaljene upravo $d = \frac{L}{2}$ od osi rotacije (titranja). Ako su materijalne točke (pločice) postavljene na četvrtinu udaljenosti od težišta, tj. za $L/4$ udaljene od kraja tada je moment tromosti dan izrazom ((1-5)-6)

$$I'_u = \frac{L^2}{4} \cdot \left(\frac{m_t}{2} + \frac{m}{3}\right) \quad \text{(pločice na polovištu).}$$

Unesemo u Pythonski program zadane veličine i izraze i sve zapišemo na tvrdi disk.

7. Ukupni rezultati mjerenja konstante torzije žice

Ispišite (prepišite) gotove rezultate iz gornjih mjerenja i računa:

A. **Rezultati 1. mjerenja**

$$\boxed{T = (\overline{T} \pm \sigma_T)\,\text{s}} \quad \Delta T_R = \ldots\%$$

$$\boxed{D = \ldots\,\text{kg}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}} \quad \Delta D_t = \ldots\%$$

B. **Rezultati 2. mjerenja**

$$\boxed{T = (\overline{T} \pm \sigma_T)\,\text{s}} \quad \Delta T_R = \ldots\%$$

$$\boxed{D = \ldots\,\text{kg}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}} \quad \Delta D_t = \ldots\%$$

Ispišemo Pythonom na zaslon gornje rezultate A. i B. te ih dodamo uz postojeće podatke na tvrdi disk. Zatvorimo datoteku zapisa na tvrdi disk.

8. Zadatci za pripremu

Riješiti dva zadatka rabeći Python kao kalkulator i napisati rješenja s cijelim postupkom na kraju pripreme.

Zadatak 1-5.1 Kolika mora biti duljina horizontalno postavljenog štapa mase $m = 0.50\,\mathrm{kg}$ obješenog u težištu na vertikalnu žicu konstante torzije $D = 0.020\,\mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$ ako titrajno vrijeme - period T iznosi $5.0\,\mathrm{s}$?

RJEŠENJE: $L = 0.55\,\mathrm{m}$.

Zadatak 1-5.2 Metalna kugla mase $m = 900.0\,\mathrm{g}$ i polumjera $R = 7.00\,\mathrm{cm}$ obješena je na žicu te titra kao torzijsko njihalo. Ako je konstanta torzije žice $D = 0.033\,\mathrm{kg\,m^2s^{-2}}$ izračunajte titrajno vrijeme takvog torzijskog njihala. Moment tromosti kugle je $I_\mathrm{k} = \frac{2}{5}mR^2$.

RJEŠENJE: $T = 1.45\,\mathrm{s}$.

♠ ♠

Neobavezan zadatak za vježbu

Zadatak 1-5.3 Tanki štap mase m i duljine L postavljen horizontalno i obješen u težište na žici, titra kao torzijsko njihalo uz titrajno vrijeme T_0. Ako na krajeve štapa stavimo (dvije) materijalne točke čije su mase $m_1 = m_2 = m$ i zatitramo takvo torzijsko njihalo, titrajno vrijeme - period je T_1. Izračunajte omjer $k = \frac{T_1}{T_0}$.

RJEŠENJE: $k = \sqrt{7}$.

LITERATURA:

[1] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi, optika i uvod u modernu fiziku, Neodidacta, Zagreb, 2011. Str. 1-12 do 1-13, 1-16 do 1-17 i 2-25 do 2-29.

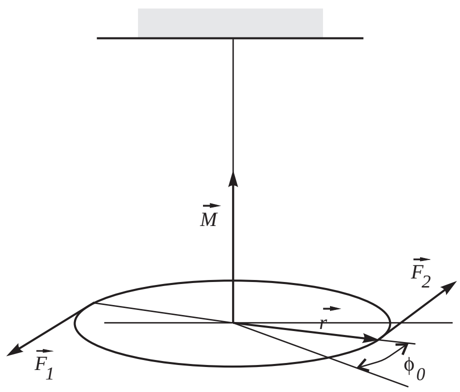
♠ ♠

1-7 Određivanje perioda torzijskog njihala

1. Uvod

U ovoj vježbi određuje se ovisnost perioda - titrajnog vremena torzijskog njihala o momentu tromosti tijela koje titra kao torzijsko njihalo. U programu Python valja napisati program koji će na interaktivni način upisati podatke mjerenja perioda titranja torzijskog njihala s promjenljivim momentom tromosti te koji će omogućiti zapis mjerenih podataka pomoću Numpy objekta `array`. Prema formulama iz teorije najmanjih kvadrata pomoću svojstava objekta `array` odredit će se parametri prilagodbe i provesti račun provjere rezultata. Python modul Matplotlib omogućit će grafički prikaz rezultata prilagodbe. Rezultati će biti pohranjeni na tvrdi disk računala.

Tijelo koje titra bit će kružna ploča na koju dodajemo sitna tijela na određenoj udaljenosti te tako mijenjamo moment tromosti torzijskog njihala.



Slika 1 - Torzijsko njihalo - ploča obješena na žici zakrenuta je iz položaja ravnoteže vanjskim momentima sila. U materijalu se javi torzijsko naprezanje pa kada se vanjski momenti uklone, zbog unutarnjeg naprezanja javlja se moment elastičnih sila i obješeno tijelo počne titrati kao torzijsko njihalo.

2. Jednadžba gibanja torzijskog njihala Ako promotrimo situaciju na slici, vidimo da će par sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ proizvesti moment sile koji je jednak zbroju vektorskih umnožaka krakova i sila:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad (\text{uz } |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| \quad \text{i} \quad |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r) \tag{(1-7)-1}$$

Posljedica toga je torzija žice nastala zakretanjem ploče za kut ϕ_0. U žici se javlja otpor torzijskom naprezanju u obliku momenta elastičnih sila $\vec{M}_E$ u suprotnom smjeru (prema slici). Ploča miruje jer su momenti jednaki po iznosu, no suprotnih smjerova: $\vec{M} = -\vec{M}_E$. Eksperimentalna je činjenica da je moment elastičnih sila $\vec{M}_E$ linearno proporcionalan kutu zakreta ϕ, $M_E \propto \phi$, odnosno

$$M_E = -D\phi, \tag{(1-7)-2}$$

a djeluje suprotno od momenta koji uzrokuje povećanje kuta ϕ, tj. on vraća žicu (a time i ploču) u početni položaj. Konstanta proporcionalnosti (koja odgovara konstanti opruge k) zove se *konstanta torzije* D, a za žicu duljine ℓ i polumjera r dana je ovako:

$$D = \frac{\pi G r^4}{2\ell} \tag{(1-7)-3}$$

gdje je G tzv. *modul smicanja* ili *torzije*, tj. konstanta za dani materijal koja opisuje "odgovor" materijala na naprezanje smicanjem (a njena vrijednost je za razne materijale dana u tablici na kraju dodatka D5), r je polumjer žice, a ℓ je njena duljina. Jedinica za konstantu torzije žice je $\mathrm{kg\,m^2}s^{-2}$.

Nakon što prestane djelovati moment vanjskih sila (ploču koju smo držali jednostavno pustimo), moment elastičnih sila pokrene ploču prema ravnotežnom položaju, tj. imamo *jednadžbu gibanja* ploče:

$$M_E = I\alpha = -D\phi \tag{(1-7)-4}$$

gdje je I moment tromosti ploče, a α je kutna akceleracija (ploče): $\alpha = d^2\phi/dt^2 = \ddot{\phi}$. Dijeljenjem s I dobijemo

$$\boxed{\ddot{\phi} + \omega_T^2\phi = 0.} \tag{(1-7)-5}$$

Uveli smo kružnu frekvenciju $\omega_T \equiv \sqrt{D/I}$ ("T" stoji za "torziju"). Početni su uvjeti $\phi(0) = \phi_0$, odnosno u početnom je trenutku ploča bila zakrenuta za kut ϕ_0 od položaja ravnoteže i $\dot{\phi}(0) = 0$, tj. brzina ploče je u trenutku kada smo je pustili bila jednaka nuli. Opće rješenje te diferencijalne jednadžbe, uz gornje početne uvjete je

$$\phi(t) = \phi_0 \cos\omega_T t. \tag{(1-7)-6}$$

Dobili smo periodičko gibanje ploče - torzijskog njihala. Budući da je

$$\omega_T T = 2\pi, \tag{(1-7)-7}$$

dobijemo za period ili titrajno vrijeme torzijskog njihala jednakost

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}.} \tag{(1-7)-8}$$

gdje je I moment tromosti tijela koje titra, a D je konstanta torzije.

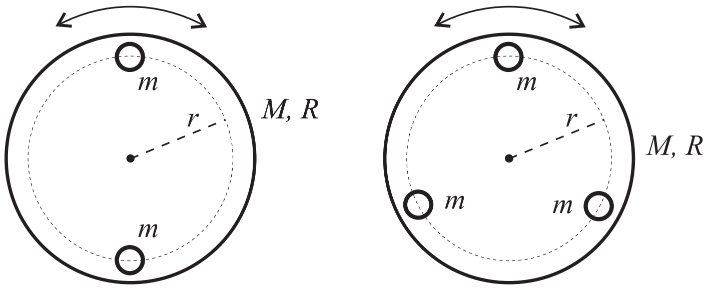
Amplituda (i elongacija) titranja je kut ϕ_0 (odnosno ϕ). Pokus nam potvrđuje gornji rezultat da period T ne ovisi o amplitudi (veličini početnog kuta zakreta).

3. Moment tromosti torzijskog njihala

Moment tromosti je i geometrijska veličina koja pokazuje i kako je raspoređena masa (krutog) tijela. Moment tromosti mjeri tromost tijela pri rotaciji: veći moment tromosti ukazuje da je tijelo teže pokrenuti na rotaciju, slično kao što masa tijela mjeri tromost tijela kada ga se pokuša pokrenuti. Moment tromosti ovisi i o osi oko koje tijelo rotira (titra, u našem slučaju).

Moment tromosti ravne okrugle ploče polumjera R i mase M za os kroz središte, tj. kroz njeno težište je dan ovako

$$I_{\mathrm{pl}} = \frac{1}{2}MR^2. \tag{(1-7)-9}$$



Slika 2 - Kružnoj ploči mase M i polumjera R dodana su dva odnosno tri mala utega (materijalne točke) svaki mase m na udaljenosti r. Ukupni moment tromosti dan je zbrojem momenta tromosti ploče i momenta tromosti materijalnih točaka.

Moment tromosti materijalne točke koja rotira na udaljenosti d od središta vrtnje je

$$I_{\mathrm{mt}} = m_t d^2 \tag{(1-7)-10}$$

gdje je m_t masa materijalne točke.

U slučaju da imamo dvije materijalne točke, svaka mase m_t, koje su simetrično pričvršćene na kružnu ploču mase M i polumjera R na udaljenosti r od osi titranja, ukupni moment tromosti je

$$I_u = I_{\mathrm{pl}} + I_{\mathrm{mt}} = \frac{1}{2}MR^2 + 2m_t r^2. \tag{(1-7)-11}$$

Povećanjem broja materijalnih točaka (simetrično raspoređenih na ploči, prema slici) povećavat će se moment tromosti, a time će se produljivati i period titranja T. U pokusu ćemo istražiti ovisnost perioda - titrajnog vremena T o broju masa raspoređenih na kružnoj ploči.

Krenut ćemo od prazne ploče s momentom tromosti $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$, tj.

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}. \tag{(1-7)-12}$$

Dodavši dvije mase imamo

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{D}}. \tag{(1-7)-13}$$

gdje je sada moment tromosti jednak

$$I_2 = I_0 + 2mr^2 \tag{(1-7)-14}$$

pa možemo napisati T_2 i ovako

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2\cdot(mr^2)}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + 2\cdot\frac{mr^2}{D}}. \tag{(1-7)-15}$$

Period za tri mase m je

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{I_3}{D}}. \tag{(1-7)-16}$$

gdje je sada moment tromosti jednak

$$I_3 = I_0 + 3mr^2 \tag{(1-7)-17}$$

pa možemo napisati T_3 i ovako

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 3\cdot(mr^2)}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + 3\cdot\frac{mr^2}{D}}. \tag{(1-7)-18}$$

Općenito za x masa imamo formulu za vrijeme T_x, tj. za slučaj kada imamo x tijela na ploči $(x = 0, 2, 3, 4, 5, 6)$, možemo napisati

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + \frac{mr^2}{D}\cdot x}. \tag{(1-7)-19}$$

Dijeljenjem s 2π i kvadriranjem dobijemo

$$\left(\frac{T_x}{2\pi}\right)^2 = \frac{I_0}{D} + \frac{mr^2}{D}\cdot x = a + bx \tag{(1-7)-20}$$

tj. vidimo da se kvadrat perioda (podijeljen s 2π) linearno povećava s brojem masa x. Da bismo to provjerili, pomoću formula za prilagodbu (često se u računarskom žargonu kaže "fitanje") linearne funkcije, izračunat ćemo parametre pravca $y = a + bx$, tj.

$$\begin{aligned} a &= \frac{I_0}{D} && \text{- odsječak na osi } y \text{ i} \\ b &= \frac{mr^2}{D} && \text{- koeficijent smjera (tangens kuta koji pravac zatvara s osi } x\text{).} \end{aligned} \tag{(1-7)-21}$$

Formule za prilagodbu (raznih) krivulja ekperimentalnim podacima dane su u dodatku D4. Račun koji odgovara torzijskom titranju dan je u primjeru D4.2.

4. Pribor

Za mjerenje je pripređen stalak sa žicom na kojoj je obješena ploča mase M i polumjera R. Nadalje, imamo komplet sitnih tijela iste mase (matice najčešće), koja igraju ulogu materijalnih točaka i zaporni sat - štopericu. Za grafički prikaz rezultata mjerenja rabit ćemo Python modul Matplotlib.

5. Mjerenje i obrada rezultata mjerenja

Mjerenjem perioda torzijskog njihala - okrugle ploče polumjera R i mase M, na koju se simetrično raspoređuju sitna tijela određuje se ovisnost perioda titranja T o momentu tromosti, tj. o broju sitnih tijela dodanih na ploču.

1. Pažljivo postavimo praznu ploču u horizontalni položaj i s dvije ruke je zakrenemo, tako da žica ostaje u vertikalnom položaju, a ploča u horizontalnom položaju. Kut zakreta neka bude oko 90°. Titrajno vrijeme - period T *ne ovisi* o početnom kutu zakreta, no manji početni kut zakreta omogućava da lakše kontroliramo da ploča titra u horizontalnoj ravnini. Istovremeno ispustimo ploču iz obje ruke i pustimo je da titra kao torzijsko njihalo. Pazimo da se ploča ne njiše, već da se samo giba lijevo-desno.

2. Uzmemo zaporni sat - štopericu i promatramo titranje ploče lijevo-desno "da uhvatimo ritam". Tada, u trenutku kada je ploča u mirnom položaju, pokrenemo štopericu i počnemo mjerenje vremena za 10 titraja. (U trenutku kada pokrenemo štopericu, počnemo brojati "nula", "jedan", "dva"" itd.) Ploča napravi jedan cijeli titraj kada se od jednog mirnog položaja pokrene, nađe u drugom mirnom položaju i vrati se natrag. Izmjereno vrijeme od 10 titraja podijelimo s 10 i u tablicu upišemo *vrijeme jednog titraja* T_0. Istovremeno u Python program upisujemo podatke mjerenja. Period T_0 odgovara momentu tromosti prazne ploče koji označimo s I_0, tj.
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}. \qquad ((1\text{-}7)\text{-}22)$$
Rezultat mjerenja titrajnog vremena T_0 upišemo u tablicu. Istovremeno u Python program upisujemo podatke mjerenja.

3. Zaustavimo ploču i pažljivo postavimo sasvim uz rub ploče 2 tijela (pločice ili matice) simetrično tako da ploča bude u horizontalnom položaju. Resetiramo zaporni sat i ponovno izmjerimo 10 titraja. Dijeljenjem s 10 dobili smo rezultat za period T_2, s dvije mase m, tj.
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{D}}. \qquad ((1\text{-}7)\text{-}23)$$
gdje je sada moment tromosti jednak
$$I_2 = I_0 + 2mr^2 \qquad ((1\text{-}7)\text{-}24)$$
pa možemo napisati T_2 i ovako
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2\cdot(mr^2)}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + 2\cdot\frac{mr^2}{D}}. \qquad ((1\text{-}7)\text{-}25)$$
Rezultat mjerenja titrajnog vremena T_2 upišemo u tablicu i u Python program.

4. Zaustavimo ploču i pažljivo postavimo sasvim uz rub ploče 3 tijela simetrično tako da ploča bude u horizontalnom položaju. Resetiramo zaporni sat i ponovno izmjerimo 10 titraja. Dijeljenjem s 10 dobili smo rezultat za period T_3, s tri mase m, tj.
$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{I_3}{D}}. \qquad ((1\text{-}7)\text{-}26)$$
gdje je sada moment tromosti jednak
$$I_3 = I_0 + 3mr^2 \qquad ((1\text{-}7)\text{-}27)$$

Tablica 1-7.1

i	0	2	3	4	5	6
T_i/s						
$\left(\frac{T_i^2}{4\pi^2}\right)/\mathrm{s}^2$						

Tablica mjerenja titrajnih vremena - perioda T_i $i = 0, 2, 3, 4, 5, 6$. Mjerenje 10 titraja zapornim satom daje rezultat na 4 pouzdane (značajne) znamenke (tri decimalna mjesta). U tablicu i u Python program upisujemo vrijeme jednog titraja.

pa možemo napisati T_3 i ovako

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 3\cdot(mr^2)}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + 3\cdot\frac{mr^2}{D}}. \tag{(1-7)-28}$$

Rezultat mjerenja titrajnog vremena T_3 upišemo u tablicu i u Python program.

5. Izmjerimo, prema gornjim uputama, periode za 4, 5 i 6 tijela.

6. Pomoću modula Matplotlib crtamo rezultate mjerenja tako da uvedemo Numpy objekte `array` i nacrtamo graf, uz sve oznake na koordinatnim osima. Na horizontalnu os dolazi broj utega (0, 2, 3, 4, 5 i 6), a na vertikalnu os podatci - brojevi iz zadnjeg retka tablice 1-7.1, tj. $\left(\frac{T_i^2}{4\pi^2}\right)$. Iz grafa ćemo zaključiti da točke pokazuju linearnu ovisnost kvadrata perioda torzijskog njihala (podijeljenog s $4\pi^2$) o broju masa na ploči.

7. Prilagodba pravca rezultatima mjerenja: prema gornjoj formuli za vrijeme T_x, tj. za slučaj kada imamo x tijela na ploči ($x = 0, 2, 3, 4, 5, 6$), možemo napisati

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D} + \frac{mr^2}{D}\cdot x}. \tag{(1-7)-29}$$

Iz gornje formule dobijemo

$$\left(\frac{T_x}{2\pi}\right)^2 = \frac{I_0}{D} + \frac{mr^2}{D}\cdot x = a + bx. \tag{(1-7)-30}$$

Pomoću formula za prilagodbu (koje su dane i u dodatku D4, a vidjeti i niže), izračunat ćemo parametre pravca a - odsječak na osi y i b - koeficijent smjera (tj. tangens kuta koji pravac zatvara s osi x). Valja pogledati i primjer D4.2.

Dakle, za račun parametara a i b pravca $y = a + bx$ formule iz dodatka su

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ a &= \frac{1}{n}\sum y_j - b\cdot\frac{1}{n}\sum x_j. \end{aligned}} \tag{(1-7)-31}$$

U našem slučaju x_j ima vrijednosti $0, 2, 3, 4, 5, 6$ (prvi red tablice 1-7.1) a y_j su odgovarajuće vrijednosti iz zadnjeg retka tablice 1-7.1.

Za račun koji se provodi u izrazima ((1-7)-31) dobro je rabiti pomoćnu tablicu koju je lako ispuniti ako se u Pythonu pomoću modula Numpy uvedu objekti `array` za vrijednosti x_j i y_j prema uputama, a koji su već rabljeni za grafički prikaz. Tada je lako zapisati formule za parametre a i b iz ((1-7)-31).

Tablica 1-7.2

x_i	0	2	3	4	5	6
y_i						
$\sum_i x_i$				$\sum_i x_i^2$		
$(\sum_i x_i)^2$				$\sum_i y_i$		
$\sum_i y_i^2$				$\sum_i x_i y_i$		

Pomoćna tablica za veličine za račun parametara pravca a i b prema formulama u tekstu, metodom najmanjih kvadrata. Redak koji sadrži y_i jednak je zadnjem retku tablice 1-7.1.

Time je određen, po teoriji najmanjih kvadrata, *najbolji* pravac koji prolazi skupom točaka iz tablice.

Zapišimo rezultat u obliku

$$\boxed{\left(\frac{T(x)}{2\pi}\right)^2 = \cdots + \ldots x.} \qquad ((1\text{-}7)\text{-}32)$$

8. Točnost prilagodbe i relativne pogreške.

Za ocjenu točnosti prilagodbe valja izračunati koeficijent korelacije r^2 prema formuli u dodatku koja izgleda ovako

$$\boxed{r^2 = \frac{\left[\sum x_j y_j - \frac{1}{n}\sum x_j \sum y_j\right]^2}{\left[\sum x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_j\right)^2\right]\left[\sum y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_j\right)^2\right]}} \qquad ((1\text{-}7)\text{-}33)$$

gdje su x_j, y_j i drugi izrazi dani ranije u (pomoćnoj) tablici 1-7.2. Prilagodba je to bolja što je koeficijent korelacije r^2 bliži jedinici.

Nadalje, valja u tablici 1-7.3 popuniti treći redak gdje su pojedine vrijednosti $T_i(x_i)$ izračunate pomoću linearne funkcije određene ranije, tj. $T_i(x_i)$ računamo pomoću izraza

$$T_i(x_i) = 2\pi\sqrt{a + bx_i}, \quad (x_i = 0, 2, 3, 4, 5, 6) \qquad ((1\text{-}7)\text{-}34)$$

Tablica 1-7.3

x_i	0	2	3	4	5	6
T_i/s						
$T_i(x_i)$/s						
ΔT_i/rel.						

Tablica odstupanja mjerenih T_i i izračunatih $T_i(x_i)$ vrijednosti perioda torzijskog njihala. U drugi redak valja prepisati rezultate mjerenja titrajnih vremena - perioda T_i $i = 0, 2, 3, 4, 5, 6$ iz tablice 2. U trećem retku valja izračunati periode prema rezultatima prilagodbe: $T_i(x_i) = 2\pi\sqrt{a + bx_i}$, a četvrti redak daje relativne pogreške (vidjeti formulu u tekstu). Račune provesti Python objektima i rezultate upisati u Python program.

a b i a su parametri linearne prilagodbe izračunati gore. Račune valja provesti u Pythonu u kojem su već u potpunosti priređeni objekti `array`.

U četvrti redak tablice valja upisati relativna odstupanja mjerenih vrijednosti perioda T_i od izračunatih $T_i(x_i)$, tj.

$$\Delta T_i = \frac{|T_i - T_i(x_i)|}{T_i} \cdot 100\%. \qquad ((1\text{-}7)\text{-}35)$$

Sve rezultate upisati u Python program vodeći računa o pouzdanim znamenkama.

6. Zadatci za pripremu

Riješiti dva zadatka pomoću Pythona kao kalkulatora i napisati rješenja sa cijelim postupkom na kraju pripreme.

Zadatak 1-7.1 Kružna ploča polumjera $R = 12.0\,\mathrm{cm}$ obješena je u horizontalnom položaju na žicu i titra kao torzijsko njihalo uz period jednak $T_0 = 3.713\,\mathrm{s}$. Ako se sasvim na rub ploče stave simetrično dva sitna tijela svako mase $m = 20.0\,\mathrm{g}$, period se poveća na $T_2 = 3.902\,\mathrm{s}$. Kolika je masa prazne ploče?

RJEŠENJE: $M = 766\,\mathrm{g}$.

Zadatak 1-7.2 Okrugla ploča polumjera $R = 20\,\mathrm{cm}$ kada titra kao torzijsko njihalo ima period T_0. Koliko daleko od središta ploče valja postaviti dva sitna tijela da se period T_0 poveća za 20%? Masa svakog tijela jednaka je masi cijele ploče.

RJEŠENJE: $R' = 6.6\,\mathrm{cm}$.

♠ ♠

Neobavezan zadatak za vježbu

Zadatak 1-7.3 Kružna ploča polumjera R i mase M titra kao torzijsko njihalo. Kada se umjesto ploče na žicu stavi kugla mase M i polumjera R, za koji će faktor period ploče biti veći od perioda kugle?

RJEŠENJE: $T_p = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot T_k$.

LITERATURA:

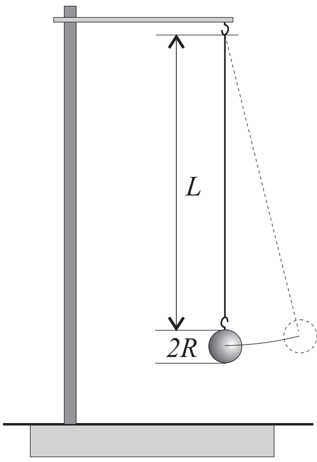
[1] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi optika i uvod u modernu fiziku, Neodidacta, Zagreb, 2011. Str. 1-12 do 1-13, 1-16 do 1-17 i 2-25 do 2-29.

♠ ♠

1-9 Određivanje akceleracije sile teže metodom najmanjih kvadrata

1. Uvod

U ovoj vježbi određuje se akceleracija sile teže g mjerenjem ovisnosti titrajnog vremena T matematičkog njihala o duljini niti. Python je sa svojim modulom Numpy, u kojem su uvedeni objekti `array`, posebno pogodan za metodu najmanjih kvadrata, kojom se izvodi izraz za akceleraciju sile teže kao rezultat višestrukih mjerenja pri promjeni parametara pokusa.



Slika 1 - Matematičko njihalo - kuglica na niti duljine L. Otklon od položaja ravnoteže treba biti oko 2-3 cm za duljinu niti od oko 30 - 40 cm.

2. Matematičko njihalo i akceleracija sile teže

Kada sitno tijelo (materijalna točka), obješeno na nerastezljivoj niti bez mase, miruje u položaju ravnoteže, tada su u ravnoteži dvije sile: sila teža tj. težina tijela G i napetost niti N, tj. pisano vektorski

$$\vec{G} + \vec{N} = 0. \qquad ((1\text{-}9)\text{-}1)$$

Ako tijelo otklonimo malo od položaja ravnoteže, tada na njega počinje djelovati komponenta sile teže koja uzrokuje njihanje tijela. Takvo njihalo zovemo, uz gornje pretpostavke (točkasto tijelo, nerastezljiva nit bez mase) *matematičko njihalo*. Njihanje - titranje tijela je harmoničko, tj. položaj tijela je opisan funkcijama sinus i kosinus.

Period titranja, tj. vrijeme jednog titraja (pomak tijela na niti od početnog položaja - prikazanog crtkano na slici - i natrag) dan je formulom

$$T_i = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_i}{g}} \qquad ((1\text{-}9)\text{-}2)$$

gdje je ℓ_i duljina niti na koju je obješena materijalna točka, a g je akceleracija sile teže. (Gornja formula dobra je za male otklone od položaja ravnoteže.) U našem slučaju umjesto materijalne točke imamo kuglicu polumjera R odnosno promjera $2R$. Ako sažmemo kuglicu u točku koja je u središtu kuglice, tada možemo uzeti da je ukupna duljina niti na kojoj visi "naša materijalna točka" jednaka

$$\ell_i = L_i + R \tag{(1-9)-3}$$

gdje je L_i duljina niti od objesišta do površine kuglice.

U pokusu je omogućeno mijenjanje duljine niti, a mjerenjem zapornim satom određujemo titrajno vrijeme - period T_i za odgovarajuću duljinu niti ℓ_i. Višestrukim ponavljanjem mjerenja uz promjenljivu duljinu niti ℓ_i, određujemo akceleraciju sile teže prilagodbom krivulje - pravca eksperimentalnim vrijednostima duljine ℓ_i i perioda T_i. Mijenjanje duljine niti postižemo tako da nit namatamo na horizontalni držač i nakon svakog namotaja duljina niti ℓ_i se smanjuje. Svaki puta izmjerimo (novu) duljinu ℓ_i i zatim mjerimo odgovarajuće titrajno vrijeme T_i. Rezultate ćemo upisati u tablicu i pomoću Python programa upisati u program u kojem smo, interaktivno, upisali i parametre pokusa - duljinu niti, promjer kuglice.

Iz niza mjerenja duljine ℓ_i i titrajnog vremena T_i formirat ćemo skup podataka koji će nam poslužiti da metodom najmanjih kvadrata pomoću izraza

$$\frac{T_i^2}{4\pi^2} = \frac{1}{g} \cdot \ell_i \quad (\text{tj.} \quad y_i = b \cdot x_i\ ) \tag{(1-9)-4}$$

izračunamo koeficijent smjera b pravca $y = a + bx$ koji opisuje linearnu vezu između kvadrata titrajnog vremena T_i^2 i duljine ℓ_i. Koeficijent smjera b, koji izvedemo iz izraza za prilagodbu pravca nizu eksperimentalnih točaka (prema dodatku D4), prema gornjem izrazu jednak je

$$b = \frac{1}{g} \tag{(1-9)-5}$$

odakle dobijemo akceleraciju sile teže. Račun ćemo provesti u Pythonu rabeći modul Numpy i njegov objekt `array` čija su svojstva takva da omogućuju jednostavne račune inače prilično zahtjevnih formula.

Akceleracija sile teže ovisi o nizu faktora (zemljopisna širina, nadmorska visina itd.), tako da nacionalni uredi za utege i mjere daju točne vrijednosti akceleracije g za pojedina područja. Za Zagreb, tj. za područje blizu rijeke Save, vrijednost akceleracije sile teže je

$$g_{\mathrm{Zg}} = 9.80\,663\,337\,\mathrm{m\,s^{-2}}. \tag{(1-9)-6}$$

U udžbenicima se uzima vrijednost g od $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ što je zadovoljavajuća vrijednost za računanje, a mi ćemo naše eksperimentalne rezultate uspoređivati s vrijednošću

$$\boxed{g_{\mathrm{Zg}} = 9.807\,\mathrm{m\,s^{-2}}.} \tag{(1-9)-7}$$

3. Pribor

Za mjerenje priređen je stalak s matematičkim njihalom, tj. kuglicom polumjera R (promjera $2R$) i zapornim satom. Nadalje, imamo ravnalo kojim mjerimo duljinu niti L_i i pomičnu mjerku (koju valja nakratko posuditi iz kompleta vježbe 1-1) kojom mjerimo promjer kuglice $2R$. Horizontalni držač niti tako je priređen da omogućuje namatanje niti pa se time duljina niti smanjuje.

4. Mjerenje

1. Kada kuglica miruje na stalku, pomoću ravnala izmjerimo duljinu niti L_i od objesišta do površine kuglice. Ravnalo nam omogućuje mjerenje do preciznosti od 1 mm, tako da možemo očekivati da se pri tom mjerenju javlja pogreška od $\Delta L_i = \pm 1\,\text{mm}$.

2. Pomoću pomične mjerke izmjerimo promjer kuglice $2R$. Možemo procijeniti da se pri tom mjerenju javlja pogreška od $\Delta R = \pm 0.1\,\text{mm}$. Izmjerenu duljinu niti $\ell_i = L_i + R$ upišemo u prvi stupac tablice 1. Unesemo te podatke i u Python program priređen da prihvaća općenito unesene podatke.

3. Kuglicu odmaknemo od položaja ravnoteže (prema crtkanoj slici) za, otprilike 2 do 3 cm i pustimo ju da se njiše. Pažljivo promatramo kuglicu "da uhvatimo ritam" i tada u trenutku kada se kuglica nađe u maksimalnom odmaku od položaja ravnoteže, pokrenemo štopericu (zaporni sat) i počnemo mjerenje vremena za 5 titraja. (Kada pokrenemo štopericu brojimo "nula", "jedan", "dva"" itd.) Izmjereno vrijeme od 5 titraja podijelimo s 5 i u tablicu, u drugi stupac upišemo vrijeme jednog titraja $T_{i/1}$. Isti podatak unesemo i u Python program, u objekt `array`.

4. Ponovimo tri puta ($k = 1$ do $k = 3$) mjerenje titrajnog vremena $T_{i/k}$ i popunimo stupce 2 do 4 u tablici 1-9.1. U zadnji stupac upišemo srednju vrijednost titrajnog vremena $\overline{T_i}$ i isti podatak unesemo u Python program.

5. Promijenimo duljinu niti tako da jednom namotamo nit oko horizontalnog držača. Ponovimo gornja mjerenja za novu duljinu ℓ_i.

6. Smanjujemo duljinu niti tako dugo dok ne postigne duljinu ne manju od 20 cm. Tada prekinemo mjerenje.

Tablica 1-9.1

ℓ_i/[cm]	$T_{i/1}$/[s]	$T_{i/2}$/[s]	$T_{i/3}$/[s]	$\overline{T_i}$/[s]
... ...	... ...	... ...	... ...	... ...

Tablica mjerenja titrajnih vremena T_i, uz prethodno mjerenje duljine niti ℓ_i. Mjerenje 5 titraja zapornim satom daje rezultat na 4 pouzdane znamenke (tri decimalna mjesta). Upisati duljinu $\ell_i = L_i + R$, uz procijenjene pogreške $\Delta\ell_i = \Delta L_i + \Delta R = 1\text{mm} + 0.1\text{mm} = 1.1\,\text{mm} = 0.11\,\text{cm}$. Zadnja kolona daje srednju vrijednost titrajnog vremena za pojedinu duljinu niti ℓ_i. Broj redaka tablice ovisi o duljini niti koja se smanjuje. Duljina niti manja od 20 cm nije pogodna za mjerenje pa pri toj duljini valja prekinuti mjerenja.

5. Prilagodba krivulje, rezultati, pogreške mjerenja i kontrola rezultata

Podatke iz tablice 1-9.1 odnosno iz Python programa prvo priredimo za tablicu 2 pomoću koje ćemo pristupiti računu prilagodbe pravca prema teoriji najmanjih kvadrata.

Tablica 1-9.2

ℓ_i (x_i)							$\dots\ \dots$
$\left(\frac{\overline{T_i}^2}{4\pi^2}\right)$ /s^2 (y_i)							$\dots\ \dots$

Tablica za prilagodbu pravca podacima izmjerenim u pokusu. Jednadžba pravca $y_i = bx_i$ odgovara linearnom odnosu kvadrata titrajnog vremena T_i^2 i produljenja ℓ_i. Koeficijent smjera u jednadžbi pravca odgovara (inverznoj) akceleraciji sile teže: $b = \frac{1}{g}$.

U tablicu 1-9.2 unosimo duljine niti ℓ_i i odgovarajuće kvadrate srednjih vrijednosti titrajnih vremena $(\overline{T}_i)^2$, podijeljenih s $4\pi^2$. Tako smo priredili linearnu ovisnost kvadrata titrajnih vremena T_i^2 o duljini niti ℓ_i. Iste veličine unesemo u Python objekt `array` uz odgovarajuće oznake.

Jednadžba za titrajno vrijeme - period daje

$$\begin{aligned} \frac{\overline{T_i}^2}{4\pi^2} &= \frac{1}{g} \cdot \ell_i \quad \text{ili} \\ y_i &= b \cdot x_i \qquad \text{pa je} \\ &\boxed{g = \frac{1}{b}} \end{aligned} \tag{(1-9)-8}$$

i možemo primijeniti izraze za prilagodbu pravca skupu eksperimentalih podataka danih u tablici 1-9.2. Formule za prilagodbu (raznih) krivulja eksperimentalnim podacima dane su u dodatku D4.

Pomoću formula za prilagodbu, koje su dane u dodatku D4, izračunat ćemo parametar pravca b, koeficijent smjera (tj. tangens kuta koji pravac zatvara s osi x). Valja pogledati i primjer D4.2.

Za račun parametara a i b pravca $y = a + bx$ formule iz dodatka su

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ a &= \frac{1}{n}\sum y_j - b \cdot \frac{1}{n}\sum x_j. \end{aligned}} \tag{(1-9)-9}$$

U našem slučaju x_i su vrijednosti ℓ_i, a n je broj stupaca u tablici 1-9.2, odnosno to je broj različitih duljina ℓ_i koje smo dobili namatanjem niti. y_i su odgovarajuće vrijednosti iz drugog retka tablice 1-9.2. Za naš slučaj treba nam samo koeficijent smjera b, dok za Python program trebamo i a i b. Podatke koje smo u Pythonu uveli u odgovarajuće objekte `array` lako ćemo, rabeći svojstva baratanja s objektima `array`, ugraditi u formule za a i b, ((1-9)-9).

Tablica 1-9.3

x_i						... ...
y_i						... ...
$\sum_i x_i$			$\sum_i x_i^2$			
$(\sum_i x_i)^2$			$\sum_i y_i$			
$\sum_i y_i^2$			$\sum_i x_i y_i$			

Pomoćna tablica za račun parametara pravca a i b prema formulama u tekstu, metodom najmanjih kvadrata. U Python programu gornje izraze lako izračunamo pomoću objekata u koje smo pohranili podatke.

Najbolje je prvo redom popuniti tablicu 1-9.3 i te rezultate uvrstiti u formule za a i b, dok će u Python programu formula za a i b biti jednostavna zbog svojstava objekata `array`.

Time je određen, po teoriji najmanjih kvadrata, *najbolji* pravac koji prolazi skupom točaka iz tablice.

Zapišimo rezultat u obliku

$$\boxed{\left(\frac{T(x)}{2\pi}\right)^2 = \ldots x = b \cdot x.} \tag{(1-9)-10}$$

i iz koeficijenta smjera b izračunamo akceleraciju sile teže

$$g = \frac{1}{b}. \tag{(1-9)-11}$$

U Python programu, pomoću modula Matplotlib nacrtamo graf podataka gdje su na horizontalnoj osi vrijednosti x_i koje su jednake (ukupnim) duljinama niti ℓ_i, a na vertikalnoj osi su vrijednosti y_i, prema tablici 1-9.2. Zatim na grafu nacrtamo i pravac čiji su parametri dani formulama ((1-9)-9). Opisati osi i odgovarajuću legendu. Uočimo kako se podatci mjerenja i prilagodbe slažu.

Provjera rezultata Zadovoljit ćemo se ovdje jednostavnom provjerom rezultata tako da uzmemo eksperimentalnu vrijednost akceleracije sile teže za Zagreb, formula ((1-9)-6) i izračunamo relativno odstupanje Δg_{rel} našeg rezultata od g_{Zg}:

$$\Delta g = \frac{|g_{\mathrm{Zg}} - g|}{g_{\mathrm{Zg}}} \cdot 100 = \ldots \%. \tag{(1-9)-12}$$

Prihvatljiva pogreška mjerenja je od 1% do 5%. Isti postupak ponovimo u Python programu, u kojem je proizveden i odgovarajući graf.

6. Zadatci za pripremu

Riješiti zadatke rabeći Python kao kalkulator i napisati rješenja s cijelim postupkom na kraju pripreme.

Zadatak 1-9.1 Neko matematičko njihalo njiše 59 puta u minuti. Za koliko treba promijeniti duljinu niti da se broj titraja poveća na 60 puta u minuti?

RJEŠENJE: $\Delta\ell = 8.5\,\mathrm{mm}$.

Zadatak 1-9.2 Kolika mora biti duljina matematičkog njihala da bi sitno tijelo pri titranju načinilo 20 titraja u 1 minuti?

RJEŠENJE: $\ell = 2.24\,\mathrm{m}$..

LITERATURA:

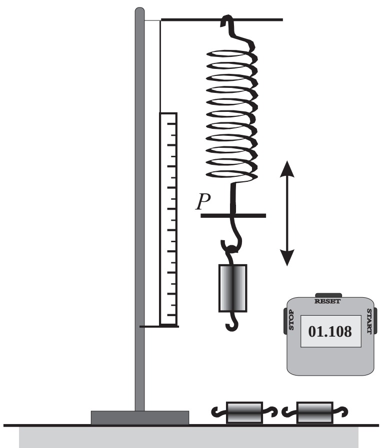
[1] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi optika i uvod u modernu fiziku, Neodidacta, Zagreb, 2011. Str. 2-29 do 2-33 i 2-88 do 2-90.

♠ ♠

1-10 Određivanje konstante opruge teorijom najmanjih kvadrata

1. Uvod

U ovoj vježbi određuje se konstanta spiralne opruge metodom najmanjih kvadrata, iz svojstva linearnog rastezanja spiralne opruge. Python je sa svojim modulom Numpy u kojem su uvedeni objekti `array` posebno pogodan za metodu najmanjih kvadrata kojom se izvodi izraz za konstantu opruge kao rezultat višestrukih mjerenja pri promjeni parametara pokusa, tj. mase utega koji titra.



Slika 1 - Mjerenje perioda titranja tijela na opruzi. Odbrojavanje 10 titraja počinjemo s brojem " nula".

2. Rastezanje opruge

Kada vanjska sila F_v djeluje na oprugu, opruga se rasteže. Produljenje opruge Δx proporcionalno je sili F_v, a u jednom rasponu rastegnuća opruge, odnos između sile rastezanja i produljenja opruge je linearan. Govorimo, dakle o *zakonu linearnog rastezanja opruge* i pišemo

$$F_v \propto \Delta x \qquad ((1\text{-}10)\text{-}1)$$

i ako konstantu proporcionalnosti između vanjske sile F i sile opruge F_o označimo s k, tada možemo napisati izraz za silu opruge ovako (pišemo x umjesto Δx)

$$F_o = kx \qquad ((1\text{-}10)\text{-}2)$$

pa proporcionalnost ((1-10)-1) sada postaje jednakost

$$F_v = F_o. \qquad ((1\text{-}10)\text{-}3)$$

Konstanta k zove se, jednostavno, *konstanta opruge*, a jedinica za k je njutn metar^{-1} = N m^{-1}. Sila opruge uvijek je suprotna produljenju: kada x raste (nadesno, primjerice) sila raste i djeluje nalijevo, a ako se x smanjuje nalijevo (oprugu sabijamo) tada raste sila nadesno.

Opruge su često izrađene tako da su navoji opruge stisnuti, gusti. Kada počnemo rastezati oprugu, tada nema linearne proporcionalnosti između produljenja i (vanjske) sile koja rasteže oprugu. Kada se opruga malo rastegnula, dolazimo da područja linearnosti, tj. tada je

$$F_v = kx \qquad ((1\text{-}10)\text{-}4)$$

Ako nastavimo rastezati oprugu, tada možemo doći do područja kada se opruga trajno deformira (trajno se rastegnu zavoji) i to područje rastegnuća sigurno nije linearno.

3. Titranje tijela na opruzi

Ako objesimo tijelo na oprugu ono će zauzeti ravnotežni položaj, tj. težina tijela G koja sada igra ulogu vanjske sile F_v biti će u ravnoteži sa silom opruge F_0 pa ćemo imati jednakost iznosa sila

$$F_v = F_o \quad \text{ili} \quad G = F_o, \tag{(1-10)-5}$$

koje, međutim, djeluju kao vektori, u suprotnim smjerovima

$$\vec{G} = -\vec{F_o} \tag{(1-10)-6}$$

tako da je njihov zbroj jednak nuli

$$\vec{G} + \vec{F_o} = 0 \tag{(1-10)-7}$$

što je sadržaj 1. Newtonovog aksioma: na tijelo ne djeluje sila pa ono miruje (ili se giba jednoliko po pravcu). Kažemo da je tijelo u ravnoteži jer na njega djeluju sile, ali njihova je rezultanta jednaka nuli.

Ako pomaknemo tijelo na opruzi iz položaja ravnoteže i pustimo ga, tada će ono početi harmonički titrati. Gibanje tijela opisano je drugim Newtonovim zakonom

$$m\ddot{x} = -kx \tag{(1-10)-8}$$

tj. jednadžbom gibanja koja je diferencijalna jednadžba. Njeno rješenje u svakom trenutku t dano je ovako

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos(\omega t + \phi) \qquad &\text{(položaj)} \\ v(t) &= -A_0 \omega \sin(\omega t + \phi) \qquad &\text{(brzina)} \end{aligned} \tag{(1-10)-9}$$

gdje je A_0 amplituda titranja tijela, tj. najveća udaljenost koju postigne tijelo pri titranju, a ϕ je faza titranja koja može biti jednaka nuli ako na spretan način pokrenemo tijelo na titranja, tj. faza ϕ ovisi o početnim uvjetima. Nadalje, kružna frekvencija titranja tijela jednaka je

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \tag{(1-10)-10}$$

a *period* ili *titrajno vrijeme* je

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.} \tag{(1-10)-11}$$

Period je neovisan o amplitudi kojom tijelo titra.

Frekvencija titranja ν jednaka je $\nu = \frac{1}{T}$. Iz gornjeg izraza za period (ili titrajno vrijeme) vidimo da je ono proporcionalno drugom korijenu iz mase m tijela koje titra, tj. kvadrat perioda proporcionalan je masi. Vidimo, dakle da možemo napisati

$$\frac{T_1^2}{4\pi^2} = \frac{1}{k} \cdot m_1, \qquad \frac{T_2^2}{4\pi^2} = \frac{1}{k} \cdot 2m_1, \qquad \frac{T_3^2}{4\pi^2} = \frac{1}{k} \cdot 3m_1 \quad \text{itd.} \qquad \ldots \tag{(1-10)-12}$$

tj. postoji linearna veza između kvadrata perioda i broja masa na opruzi. Na osnovu tog svojstva mi ćemo, mjereći titrajna vremena T_i za različite mase tijela m_i odrediti teorijom najmanjih kvadrata konstantu opruge k na kojoj tijelo titra.

4. Pribor

Za mjerenje je priređen stalak s oprugom. Na donjem kraju opruge nalazi se pločica P koja pomaže pri određivanju položaja tijela pri titranju. (slika 1). Priređen je komplet utega čija je masa takva da omogućuje povećanje obješene mase za iste iznose (25 g, 50 g, ili prema uputi na stolu) (od 1 do 5·50 g ili od 1 do 5·25 g). Osnovni uteg veće mase M (od 150 g do 300 g ili prema uputi na stolu) služi da se postigne titranje u linearnom području opruge. U priboru je i štoperica - zaporna ura, koja je i prikazana na slici. Za provedbu vježbe potreban je milimetarski papir (dimenzije A4), a za obradu rezultata mjerenja rabimo Pythonov modul Numpy i modul Matplotlib za grafičke prikaze.

5. Mjerenje i obrada rezultata mjerenja

1. Opruga je obješena na stalku i mjerenje počinjemo većim utegom mase M (300 g ili slično). Uteg oprezno povučemo nadolje i ostavimo ga da titra duž vertikalnog pravca, gore-dolje. Pokušamo "uhvatiti ritam" titranja i u jednom trenutku, kad je primjerice uteg u najnižem položaju, pokrenemo zapornu uru da bismo izmjerili vrijeme od deset (10) titraja. Jedan cijeli titraj tijelo obavi kada od najnižeg položaja ono postigne najviši i vrati se natrag. Brojanje počinjemo s " nula" (u trenutku pokretanja sata) i zaustavimo sat nakon 10 titraja. Rezultat deset (10) titraja podijelimo s 10 i upišemo rezultat u tablicu u prvi stupac (na mjestu $x = 0$, odnosno T_0). U Python programu interaktivno upisujemo podatke za M (masa velikog početnog utega) i m_1 (masa pojedinog utega koji dodajemo). Nadalje, u Numpy objekt `array` upisujemo titrajna vremena (periode). Dimenzija `array`-a jednaka je broju utega (plus 1) koje postepeno dodajemo.

2. Zaustavimo tijelo, dodamo jednu (malu) masu m_1, tako da je ukupna masa sada $m = M + m_1$ i ponovimo mjerenje kao s jednom masom. Dobiveno vrijeme od 10 titraja ponovno podijelimo s 10 i upišeno rezultat u tablicu kao T_1 odnosno u Python programu u `array`.

3. Zaustavimo tijelo, dodamo još jednu masu, tako da je ukupna masa $m = M + 2m_1$ i ponovimo mjerenje. Dobiveno vrijeme od 10 titraja uvijek podijelimo s 10 i upišemo rezultat u tablicu kao T_2 odnosno u Python programu u `array`.

4. Na kraj opruge redom se stavljaju utezi $3m_1$, $4m_1$ i $5m_1$. Mjere se odgovarajući periodi i podaci se unose u tablicu. Sve podatke unosimo i u Python program.

5. Izračunamo red tablice s vrijednostima $\frac{T_i^2}{4\pi^2}$, odnosno u Pythonu uvedemo odgovarajući `array`.

6. Na milimetarski papir nacrtamo točke iz tablice 1-10.1. Na horizontalnu os nanesemo broj utega x (0, 1, 2, 3, 4 i 5), a na vertikalnu os unosimo brojeve iz zadnjeg retka tablice, tj. $\left(\frac{T_x^2}{4\pi^2}\right)$.

Tablica 1-10.1

x	0	1	2	3	4	5
T_x/s						
$\left(\frac{T_x^2}{4\pi^2}\right)$/s^2						

Tablica mjerenja titrajnih vremena - perioda T_x, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Mjerenje 10 titraja zapornom urom daje rezultat na 4 pouzdane (značajne) znamenke (tri decimalna mjesta). U tablicu upisujemo vrijeme jednog titraja (4 pouzdane znamenke). Iste podatke Python sprema u odgovarajući array.

Izaberemo takvu podjelu na osima koja omogućuje da točke u horizontalnom i vertikalnom smjeru "pokrivaju" cijeli *vertikalni* format A4. Iz crteža ćemo zaključiti da točke pokazuju linearnu ovisnost kvadrata perioda titranja (podijeljenog s $4\pi^2$) o broju masa na opruzi. U Pythonu pozovemo modul Matplotlib i na horizontalnu os stavljamo broj x (vidjeti gore), a na vertikalnu os dolaze kvadrati y_i titrajnih vremena (podijeljenih s $4\pi^2$). Vidimo linearnu ovisnost y_i o x_i.

Za račun parametara a i b pravca $y = a + bx$ formule iz dodatka D4 su

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ a &= \frac{1}{n}\sum y_j - b\cdot\frac{1}{n}\sum x_j. \end{aligned}} \qquad ((1\text{-}10)\text{-}13)$$

U našem slučaju x_j su vrijednosti $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, a y_j su odgovarajuće vrijednosti iz zadnjeg retka tablice 1-10.1. U Pythonu su u programu ti nizovi brojeva pohranjeni u odgovarajuće `array`-e pa je s njima, s obzirom na svojstva baratanja s `array`-ima vrlo jednostavno provesti račun.

Tablica 1-10.2

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i						
$\sum_i x_i$				$\sum_i x_i^2$		
$(\sum_i x_i)^2$				$\sum_i y_i$		
$\sum_i y_i^2$				$\sum_i x_i y_i$		

Pomoćna tablica za račun parametara pravca a i b prema formulama u tekstu, metodom najmanjih kvadrata. Redak koji sadrži y_i jednak je zadnjem retku tablice 1-10.1.

7. Prilagodba pravca rezultatima mjerenja: prema gornjoj formuli za vrijeme T_x, tj. za slučaj kada imamo x tijela na opruzi ($x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), možemo napisati

$$T_x = 2\pi\sqrt{\frac{M + x\cdot m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k} + \frac{m_1}{k}\cdot x}. \qquad ((1\text{-}10)\text{-}14)$$

Iz gornje formule dobijemo

$$\left(\frac{T_x}{2\pi}\right)^2 = \frac{M}{k} + \frac{m_1}{k}\cdot x = a + bx, \quad \text{tj.}$$
$$a = \frac{M}{k} \quad \text{i} \quad b = \frac{m_1}{k}. \tag{(1-10)-15}$$

Pomoću formula za prilagodbu, koje su dane u dodatku D4 odnosno u izrazima ((1-10)-13) izračunat ćemo parametre a i b pravca - odsječak na osi a i koeficijent smjera b (tj. tangens kuta koji pravac zatvara s osi x). Valja pogledati i primjer D4.2. Nakon što su u Pythonu uvedeni objekti `array` za unos podataka, lako je formule za a i b izračunati u programu.

Za račun je dobro prvo popuniti tablicu 1-10.2, tj. prirediti sve numeričke rezultate zbog zamršenosti inače jednostavnog računa.

Time je određen, po teoriji najmanjih kvadrata, *najbolji* pravac koji prolazi skupom točaka iz tablice 1-10.2.

Zapišimo rezultat $y = a + bx$ u obliku

$$\boxed{\left(\frac{T(x)}{2\pi}\right)^2 = \cdots + \ldots x.} \tag{(1-10)-16}$$

Prema ranijoj formuli vidimo da je parametar b jednak masi m_1 (koja je zadana) podijeljenoj s konstantom opruge k, tj. $b = m_1/k$ i $k = \frac{m_1}{b}$. Dakle, napišimo konačni rezultat

$$\boxed{k = \frac{m_1}{b} = \ldots\ldots \mathrm{Nm}^{-1}.} \tag{(1-10)-17}$$

Taj rezultat upišemo i u Python programu.

8. Točnost prilagodbe i relativne pogreške.

Za ocjenu točnosti prilagodbe važno je izračunati *koeficijent korelacije* r^2 (koji je uvijek manji ili najviše jednak 1) prema formuli u dodatku D4 koja izgleda ovako

$$\boxed{r^2 = \frac{\left[\sum x_j y_j - \frac{1}{n}\sum x_j \sum y_j\right]^2}{\left[\sum x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_j\right)^2\right]\left[\sum y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_j\right)^2\right]}} \tag{(1-10)-18}$$

gdje su x_j i y_j dani kao ranije. Prilagodba je to bolja što je koeficijent korelacije r^2 bliži jedinici, no ne može biti veći od 1, tj. $r^2 \leq 1$. Račun koeficijenta korelacije olakšan je rezultatima računa u pomoćnoj tablici 1-10.2, a u Python programu objekti `array` pokazuju svoju praktičnost za ovakve račune.

Tablica 1-10.3

x_i	0	1	2	3	4	5
T_i/s						
$T_i(x_i)$/s						
ΔT_i/rel.						

Tablica odstupanja mjerenih T_i i izračunatih $T_i(x_i)$ vrijednosti perioda titranja tijela na opruzi. U drugi redak valja prepisati rezultate mjerenja titrajnih vremena - perioda T_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ iz tablice 1-10.1. U trećem retku valja izračunati periode prema rezultatima prilagodbe: $T_i(x_i) = 2\pi\sqrt{a + bx_i}$, a četvrti redak daje relativne pogreške (vidjeti formulu u tekstu).

Gornju formulu za r^2 možemo napisati i na sljedeći način koji može biti jednostavniji za računanje

$$\boxed{r^2 = b^2 \cdot \frac{n\sum x_j^2 - \left(\sum x_j\right)^2}{n\sum y_j^2 - \left(\sum y_j\right)^2}.} \tag{(1-10)-19}$$

Nadalje, valja u tablici 1-10.3 popuniti treći redak gdje su pojedine vrijednosti $T_i(x_i)$ izračunate pomoću linearne funkcije određene ranije, tj. $T_i(x_i)$ računamo pomoću izraza

$$T_i(x_i) = 2\pi\sqrt{a + bx_i}, \quad (x_i = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \tag{(1-10)-20}$$

a $a = M/k$ i $b = m_1/k$ su parametri linearne prilagodbe izračunati gore.

U četvrti redak tablice valja upisati relativna odstupanja mjerenih vrijednosti perioda T_i od izračunatih $T_i(x_i)$, tj.

$$\Delta T_i = \frac{|T_i - T_i(x_i)|}{T_i} \cdot 100\%. \tag{(1-10)-21}$$

Za očekivati je da relativne pogreške ne budu veće od 5-6%.

Sve rezultate provjere valja izračunati i u Python programu, a potrebno ih je i zapisati na tvrdi disk računala, s opisom veličina i u formatu koji vodi računa o pouzdanim znamenkama.

♠ ♠

6. Zadatci za pripremu

Riješiti zadatke rabeći Python kao kalkulator i napisati rješenja (vodeći računa o broju pouzdanih znamenki) s cijelim postupkom, na kraju pripreme.

Zadatak 1-10.1 Ako uteg mase 200 g za jednu minutu napravi 80 titraja, za koliko valja promijeniti masu utega da broj titraja na istoj opruzi naraste na 100?

RJEŠENJE: $\Delta m = 72\,\mathrm{g}$.

Zadatak 1-10.2 Sila iznosa 4.00 N rastegne oprugu za 18.0 cm. Koliki je period i koliko titraja u minuti napravi tijelo mase $m = 200\,\mathrm{g}$ koje titra na toj opruzi? Kolika je kružna frekvencija tog titranja?

RJEŠENJE: $T = 0.600\,\mathrm{s}$ i $n = 100$ titraja; $\omega = 10.5\,\mathrm{s}^{-1}$.

LITERATURA:

[1] D. Horvat: Fizika 2 - titranje, valovi, optika i uvod u modernu fiziku, Element, Zagreb, 2018. Str. 2-2 do 2-10.

♠ ♠

D1 PREFIKSI

Tablica 1

Prefix	Simbol	1000^m	10^n	Decimalni zapis
jota	Y	1000^8	10^{24}	1000000000000000000000000
zeta	Z	1000^7	10^{21}	1000000000000000000000
eksa	E	1000^6	10^{18}	1000000000000000000
peta	P	1000^5	10^{15}	1000000000000000
tera	T	1000^4	10^{12}	1000000000000
giga	G	1000^3	10^9	1000000000
mega	M	1000^2	10^6	1000000
kilo	k	1000^1	10^3	1000
hekto	h	$1000^{\frac{2}{3}}$	10^2	100
deka	da	$1000^{\frac{1}{3}}$	10^1	1
deci	d	$1000^{-\frac{1}{3}}$	10^{-1}	0.1
centi	c	$1000^{-\frac{2}{3}}$	10^{-2}	0.01
mili	m	1000^{-1}	10^{-3}	0.001
mikro	μ	1000^{-2}	10^{-6}	0.000001
nano	n	1000^{-3}	10^{-9}	0.000000001
piko	p	1000^{-4}	10^{-12}	0.000000000001
femto	d	1000^{-5}	10^{-15}	0.000000000000001
ato	a	1000^{-6}	10^{-18}	0.000000000000000001
zepto	d	1000^{-7}	10^{-21}	0.000000000000000000001
jokto	y	1000^{-8}	10^{-24}	0.000000000000000000000001

Prefiksi fizikalnih (i drugih) jedinica

D2 Momenti tromosti raznih tijela

Momenti tromosti raznih tijela i položaja osi

Tablica - Momenti tromosti

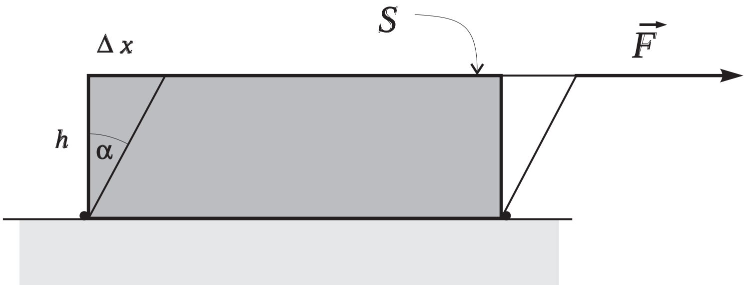
Tijelo	Položaj osi	Moment tromosti
Tanki prsten	kroz središte, $\perp$ na ravninu pr.	mr^2
Tanki prsten	kroz središte, u ravnini pr.	$\frac{1}{2}mr^2$
Kružna ploča	kroz središte, $\perp$ na ravninu pl.	$\frac{1}{2}mr^2$
Tanki štap duljine ℓ	kroz središte, $\perp$ na štap	$\frac{1}{12}m\ell^2$
Kugla	kroz središte	$\frac{2}{5}mr^2$
Kuglina ljuska	kroz središte	$\frac{2}{3}mr^2$
Valjak visine h	kroz plašt, $\perp$ na os rotacije	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}mh^2$
Pravokutna ploča		
sa stranicama a i b	kroz središte, $\perp$ na pl.	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
Materijalna točka	$\perp$ na ravninu rotacije	mr^2

♠ ♠

D3 Torzija žice i moduli elastičnosti

Torzija žice i torzijska konstanta

Naprezanje na smicanje ili torzijsko naprezanje nastaje kada je sila F usmjerena tangencijalno jednoj površini, dok je druga površina, paralelna njoj učvršćena (v. sliku 1).



Slika 1 - Smicanje - donja je površina učvršćena

Relativnu deformaciju pri smicanju definiramo kao odnos pomaka gornje stranice (površine S) na koju djeluje sila (paralelno s površinom S) i debljine materijala h, tj. razmaka između donje i gornje površine. Dakle

$$\delta_x = \frac{\Delta x}{h}, \tag{(D3)-1}$$

pa *modul smicanja* G možemo opisati na sljedeći način

$$G = \frac{\text{napr. na smicanje}}{\text{rel. deformacija}} = \frac{F/S}{\Delta x/h}. \tag{(D3)-2}$$

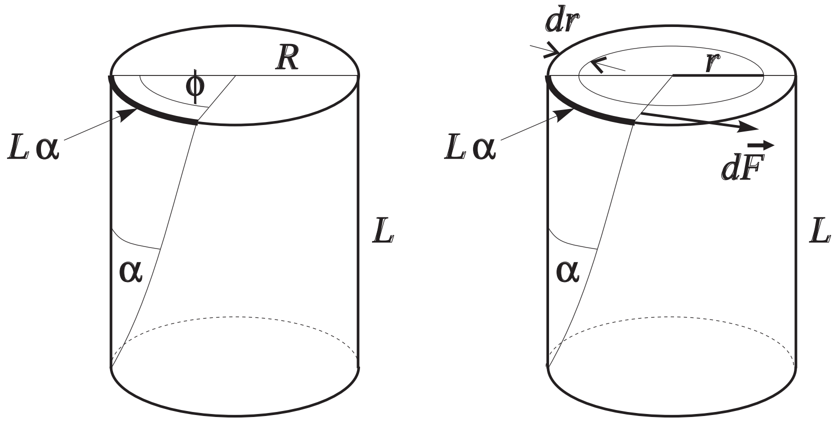
Veličine modula smicanja dane su za različite materijale u tablici 1. Može se uočiti da je modul torzije G oko 3 puta manji od Youngovog modula elastičnosti E tj. $G \simeq E/3$.

Do smicanja (torzije u užem smislu) dolazi i pri zakretanju valjkastog tijela (okruglog štapa, žice i sl.) kada je jedna baza valjka učvršćena, a par sila djeluje svojim momentima na površinu paralelnu učvršćenoj. I u tom slučaju dolazi do relativnog pomaka slojeva štapa, slojeva paralelnih učvršćenoj bazi. Pri tom se naprezanju javlja unutarnji moment elastičnih sila koji je po iznosu jednak

$$M = \frac{G\pi R^4}{2L}\phi \equiv D\phi, \tag{(D3)-3}$$

gdje je G modul smicanja, R je polumjer valjka (žice, štapa), L je visina valjka (duljina žice), a ϕ je kut zakreta. Konstantu proporcionalnosti D između momenta i kuta zakreta zovemo konstanta torzije.

Ovdje ćemo izvesti izraz za konstantu torzije žice.



Slika 2 - Torzija žice

Neka je valjkasto tijelo (žica npr.) polumjera R i duljine L učvršćeno tako da mu je donja baza učvršćena, a na gornju bazu djeluje moment para sila koji uzrokuje promjenu oblika tijela, odnosno, uzrokuje smicanje. Smicanje se manifestira kao relativni pomak kružnih presjeka tako da se pravac koji leži na plaštu netordiranog (nedeformiranog) valjka i paralelan je s osi valjka, "svine" za kut α, prema slici 2. Istovremeno se jedan presjek valjka zakrene za kut ϕ u odnosu na nepomičnu bazu (prema slici 2). Moment koji zakreće valjak daje (ujedno) silu na površinu koja predstavlja naprezanje $\sigma = F/S$, a S je površina paralelna sili. Na udaljenosti r od središta valjkastog tijela "komadić" sile dF djeluje na "komadić" površine dS koja je jednaka površini kružnog vijenca polumjera r i širine dr, tj.

$$\sigma = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2r\pi\, dr}, \tag{(D3)-4}$$

a što je s modulom elastičnosti G torzije povezano ovako

$$\begin{aligned} G = \frac{\sigma}{\theta} = \frac{dF/2r\pi\, dr}{r\phi/L} = \frac{L\, dF}{\phi 2r^2\pi dr} \qquad &\text{što daje} \\ dF = \frac{G}{L}2\pi\phi\, r^2 dr. \end{aligned} \tag{(D3)-5}$$

Tu je G modul torzije, kut θ je kut "svijanja" pravca - izvodnice na plaštu valjka, kut ϕ je kut zakreta kružnog presjeka, r je polumjer kružnog presjeka, a R je polumjer žice (valjka) ($r < R$). Na tom je mjestu, jer su vektor $\vec{r}$ i vektor $\vec{F}$ okomiti, moment sile jednak $dM = r\, dF$ i vrijedi $dM = (G/L)2\pi\phi r^3 dr$, a ukupni moment sile dobijemo "zbrajanjem" svih dM-ova, odnosno integracijom duž cijelog kružnog presjeka, tj.

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R dM = \frac{G}{L}2\pi\phi\int_0^R r^3 dr \\ &= \frac{\pi G R^4}{2L} \equiv D\phi. \end{aligned} \tag{(D3)-6}$$

Time je izvedena analitička formula za konstantu torzije valjkastog tijela (žice npr.)

$$D = \frac{\pi G R^4}{2L}. \tag{(D3)-7}$$

U gornjoj formuli M je moment vanjskih sila koje uzrokuju torziju, tj. zakret ϕ. Kao posljedica zakreta (deformacije) javlja se u materijalu *moment unutarnjih sila* M_u i on je u ravnoteži s momentom vanjskih sila (kada je žica npr. zakrenuta za kut ϕ i zadržana u tom položaju). Dakle $\vec{M} + \vec{M}_u = 0$. Vektorski to znači sljedeće

$$\begin{aligned} \vec{M} &= D\phi(\hat{r} \times \hat{\phi}) \qquad \text{i} \\ \vec{M}_u &= -D\phi(\hat{r} \times \hat{\phi}). \end{aligned} \tag{(D3)-8}$$

Jedinični vektor $\hat{r}$ "gleda" od središta prema obodu kružnice, a jedinični vektor $\hat{\phi}$ pokazuje u smjeru povećanja kuta ϕ, tangencijalno na obod kružnice.

♠ ♠ ♠ ♠

Materijal	$E \times 10^9$ [N/m^2]	$G \times 10^9$ [N/m^2]	$B \times 10^9$ [N/m^2]
Aluminij	70	25	73
Bakar	125	45	140
Beton	20	12	9
Čelik	200	80	170
Drvo			
duž vlakna	10		
$\perp$ na vlakna	1		
Kost	15	80	
Kvarcna nit	73	31	
Mramor	50	20	33
Staklo	58	28	39
Željezo	200	80	150

Tablica 1 - Moduli elastičnosti: E - Youngov modul elastičnosti, G - modul smicanja i volumni modul elastičnosti B

♠ ♠

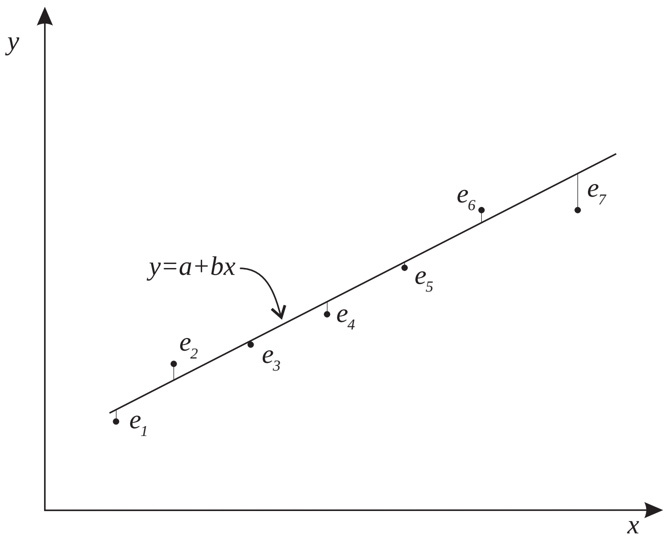
D4 METODA NAJMANJIH KVADRATA ZA PRILAGODBU KRIVULJE

D4.1 Uvod

Pri mjerenjima često želimo odrediti funkcionalnu zavisnost jedne veličine, y, o nekoj drugoj veličini x. Da bismo pronašli tu zavisnost, moramo eksperimentalno odrediti niz parova točaka

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \tag{(D4)-1}$$

te kroz njih povući krivulju koja prikazuje funkcionalnu ovisnost y od x. Vrstu funkcije koju ćemo provući eksperimentalno određenim točkama određujemo prema preglednoj slici (grafu) koju dobijemo nanoseći parove točaka na (milimetarski) papir. *To je izuzetno važan korak pri prilagodbi krivulje i njega nikada ne treba zaobići!* Naravno, matematički oblik krivulje možemo znati i iz teoretskog modela u okviru kojeg rješavamo problem. Dakle, tražena funkcija može biti *polinom n-tog stupnja (pravac kao polinom prvog stupnja, parabola tj. polinom drugog stupnja itd.), eksponencijalna funkcija, funkcija sinus, cosinus* itd. Svaka od tih funkcija sadržava koeficijente ili parametre koje valja odrediti da bi funkcija *najbolje* prolazila eksperimentalno dobivenim točkama.



Slika 1 - Prikaz parova podataka (x_i, y_i) i pravca koji "najbolje" prolazi tim točkama. Pokazana su i odstupanja e_i pojedinih parova od pravca. Metodom najmanjih kvadrata zbroj kvadrata tih odstupanja bit će minimiziran i tim će se postupkom odrediti nagib pravca b i njegov odsječak na osi y prema jednadžbi pravca $y = a + bx$.

D4.2 Prilagodba pravca

Pogledajmo prvo primjer prilagodbe *pravca*, dakle polinoma prvog stupnja

$$y = a + bx \tag{(D4)-2}$$

koji moramo povući (engleska je riječ za taj postupak "fitting", pa se često i kod nas često rabi izraz "fitati" krivulju) kroz parove točaka ((D4)-1). Pri tom postupku traženja nagiba b (koeficijenta smjera) pravca i odreska a na osi y, zahtijevamo da je *zbroj kvadrata odstupanja parova točaka od pravca ((D4)-2) minimalan*, ili da je *zbroj kvadrata udaljenosti parova točaka ((D4)-1) od pravca minimalan*, s tim da se udaljenost mjeri u vertikalnom smjeru (smjer osi y). Takav se postupak zove *metoda najmanjih kvadrata*.

> Ponekad se ta metoda ili postupak zove i linearna regresija, a pri tome se riječ "linearna" ne odnosi na oblik funkcije koju se želi prilagoditi podacima, već na parametre krivulje (poput parametara a i b u ((D4)-2)) koji u problem ulaze u linearnom obliku.

Neka je (x_j, y_j) jedna točka iz ((D4)-1), a odgovarajuća točka na pravcu (D4-2) je $\tilde{y}_j = a+bx_j$, pa je udaljenost od točke na pravcu do eksperimentalne točke (x_j, y_j) jednaka $|y_j-\tilde{y}_j| = |y_j-a-bx_j|$, a zbroj kvadrata udaljenosti svih n točaka je

$$E(a,b) = \sum_{j=1}^{j=n}(y_j - a - bx_j)^2 = \sum_{j=1}^{j=n} e_j^2. \tag{(D4)-3}$$

Ta je udaljenost očito funkcija od a i b. Naime, kroz skup točaka ((D4)-1) možemo povući bezbroj pravaca, no samo jedan je onaj "najbolji", koji zadovoljava kriterij metode najmanjih kvadrata. Mi moramo naći minimum te funkcije tj.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(a,b)}{\partial a} &= 0 = -2\sum(y_j - a - bx_j) \\ \frac{\partial E(a,b)}{\partial b} &= 0 = -2\sum x_j(y_j - a - bx_j) \end{aligned} \tag{(D4)-4}$$

(sumacije, koje dalje ne pišemo, idu uvijek po j od 1 do n). Kako je npr. $\sum_{j=1}^{n} a = a\sum_{j=1}^{n} = an$ dobijemo sređivanjem gornjeg izraza

$$\begin{aligned} an \quad &+b\sum x_j &= \sum y_j \\ a\sum x_j &+b\sum x_j^2 &= \sum x_j y_j. \end{aligned} \tag{(D4)-5}$$

Iz gornje dvije linearne jednadžbe (tzv. *normalne jednadžbe*) za nepoznate vrijednosti parametara, dobijemo parametre pravca a - odsječak na osi y i b - koeficijent smjera

$$\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ a &= \frac{(\sum x_j^2)(\sum y_j) - (\sum x_j)(\sum x_j y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}. \end{aligned} \tag{(D4)-6}$$

Gornji izraz za a možemo napisati i na drugi način, tako da prvo izračunamo parametar b pa pomoću njega izrazimo a, tako da dobivamo

$$\boxed{\begin{aligned} b &= \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2} \\ a &= \frac{1}{n}\sum y_j - b\cdot\frac{1}{n}\sum x_j. \end{aligned}} \tag{(D4)-7}$$

Time je određen, po teoriji najmanjih kvadrata, *najbolji* pravac koji prolazi skupom točaka ((D4)-1).

Vrlo je važno uvesti kriterij po kojem možemo kazati koliko je dobra prilagodba podacima. Tome će poslužiti koeficijent korelacije za čiji račun trebamo *devijaciju* koja je određena formulom

$$\sigma_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n}(y_j - a - bx_j)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n} e_j^2}{n}} \tag{(D4)-8}$$

a daje podatak o srednjem odstupanju funkcije od podataka. Definiramo, nadalje, *varijancu* za x i y kao

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2 \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \overline{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j\Big)^2 \end{aligned} \tag{(D4)-9}$$

i *kovarijancu*

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y}) \tag{(D4)-10}$$

gdje je $\overline{x} = (\sum_j x_j)/n$ srednja vrijednost od x.

Iz izraza za zbroj kvadrata odstupanja e_j^2 ((D4)-3) možemo dobiti sljedeće

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n} e_j^2 &= \sum_{j=1}^{j=n}(y_j - a - bx_j)^2 = \sum_{j=1}^{j=n}\left[(y_j - (\overline{y} - \overline{x}b) - bx_j\right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{j=n}\left[(y_j - \overline{y})^2 - 2b(y_j - \overline{y})(x_j - \overline{x}) + b^2(x_j - \overline{x})^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{j=n}(y_j - \overline{y})^2 - 2\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} + \frac{\sigma_{xy}^2}{(\sigma_x^2)^2}\sum_{j=1}^{j=n}(x_j - \overline{x})^2 \\ &= n\sigma_y^2 - \frac{2n\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} + \frac{n\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = n\sigma_y^2 - \frac{n{\sigma_{xy}}^2}{\sigma_x^2}. \end{aligned} \tag{(D4)-11}$$

Iz gornjeg izraza možemo napisati

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{j=n} e_j^2 = \sigma_{yx}^2 = \sigma_y^2 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2} = \sigma_y^2\left(1 - \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}\right) = \sigma_y^2(1 - r^2) \tag{(D4)-12}$$

i kako zbroj kvadrata (na lijevoj strani gornjeg izraza) mora biti veći ili jednak nuli, dobije se uvijet

$$\sigma_y^2(1 - r^2) \geq 0 \tag{(D4)-13}$$

koji vodi na granice koeficijenta korelacije

$$-1 \leq r \leq 1. \tag{(D4)-14}$$

Dakle, pomoću varijance i kovarijance možemo napisati koeficijent b ovako

$$b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}. \tag{(D4)-15}$$

Koeficijent korelacije r^2 je bio dan za opći slučaj ovako

$$r^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \tag{(D4)-16}$$

ili za konkretan slučaj prilagodbe pravca

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum x_j y_j - \frac{1}{n^2}\left(\sum x_j\right)\left(\sum y_j\right)}{\sigma_x \sigma_y} \tag{(D4)-17}$$

što možemo napisati i ovako

$$\boxed{r^2 = \frac{\left[\sum x_j y_j - \frac{1}{n}\sum x_j \sum y_j\right]^2}{\left[\sum x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_j\right)^2\right]\left[\sum y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_j\right)^2\right]},} \tag{(D4)-18}$$

a koji pokazuje koliko krivulja (pravac u ovom slučaju) dobro slijedi niz točaka ((D4)-1), a koji ima vrijednosti $r^2 \leq 1$. Potpuno slaganje postignuto je za $r^2 = 1$, tj. prilagodba je to bolja što je koeficijent korelacije r^2 bliži jedinici!

Primjer D4.1 Pomoću metode najmanjih kvadrata odrediti pravac koji je određen parovima točaka

$$(-1.0,\ 1.000),\ (-0.1,\ 1.099),\ (0.2,\ 1.808),\ (1.0, 2.200).$$

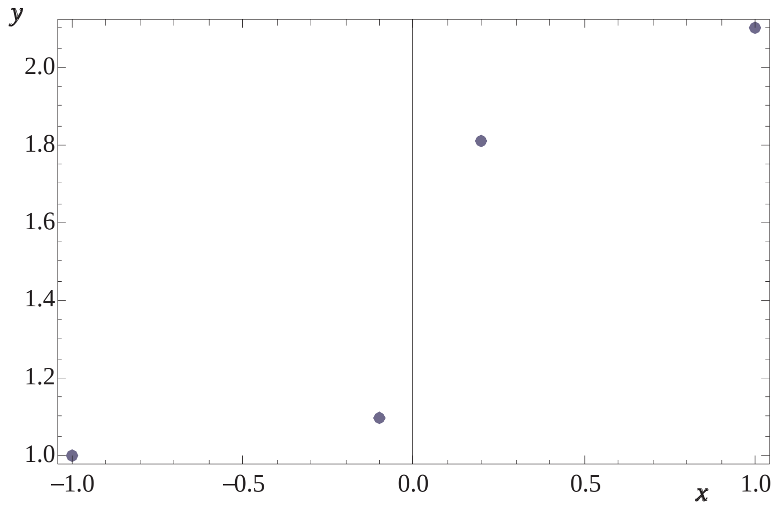
Izračunajte devijaciju σ_{yx} prema formuli ((D4)-8) i koeficijent korelacije r^2 prema formuli ((D4)-17).

Rješenje Vidimo da je $n = 4$, a pomoćni računi nam daju

$$\sum_{j=1}^{4} x_j = 0.1, \quad \sum_{j=1}^{4} x_j^2 = 2.05, \quad \sum_{j=1}^{4} y_j = 6.107, \quad \sum_{j=1}^{4} x_j y_j = 1.452. \tag{(D4)-19}$$

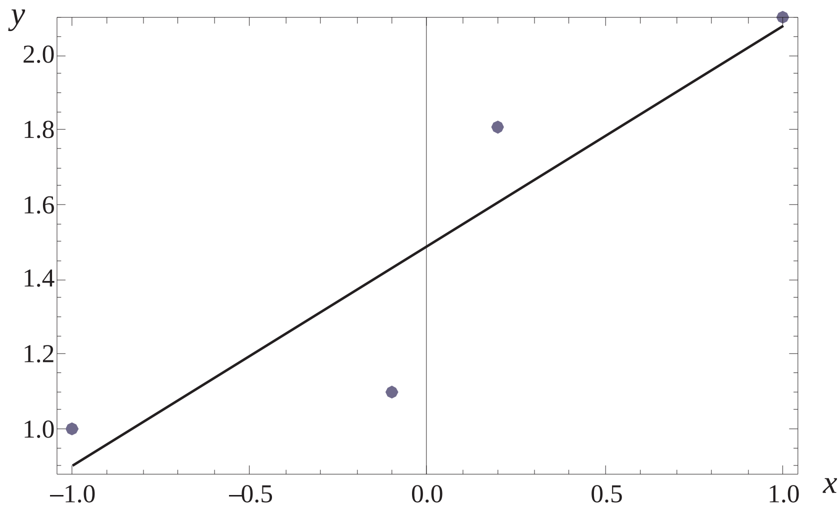
Kada te izraze uvrstimo u formula za b i a dobijemo: $b = 0.635$ i $a = 1.511$. Jednadžba pravca je

$$y = 1.511 + 0.635x. \tag{(D4)-20}$$



Slika 2 - Prikaz podataka iz primjera D4.1.

Devijacija koja pokazuje prosječno odstupanje dobivene krivulje od niza parova točaka je za naš primjer jednaka $\sigma_{yx} = 0.206$, a koeficijent korelacije je $r^2 = 0.831$ što pokazuje da je izbor pravca za matematički opis rasporeda eksperimentalnih točaka dobar. To se može ustanoviti i crtanjem eksperimentalnih točaka, što pokazuje nužnost grafičkog prikaza rezultata.



Slika 3 - Prikaz podataka i pravca dobivenog teorijom najmanjih kvadrata.

♠ ♠

Primjer D4.2 Mjerenjem titrajnog vremena T torzijskog njihala dobiveni su rezultati u tablici. Različita vremena T_j dobiju se kada se mijenja broj utega x na ploči torzijskog njihala, tako da se ukupni moment tromosti povećava kako raste broj utega. Prema teoriji torzijskog njihala, kvadrat titrajnog vremena (podijeljen s 2π) raste linearno s brojem masa x. Vrijednost $x = 0$ odgovara ploči torzijskog njihala bez utega. Pomoću metode najmanjih kvadrata odrediti pravac koji je određen parovima točaka iz tablice.

Tablica D4.1

x_j	0	2	3	4	5
$T_j/[\mathrm{s}]$	1.024	1.582	1.726	1.950	2.100
$\left(\frac{T_j}{2\pi}\right)^2 \times 10^{-2}/[\mathrm{s}^2]$	2.66	6.34	7.55	9.63	11.2
$y_j(x_j) \times 10^{-2}/[\mathrm{s}^2]$					

Podaci uz primjer D4.2. U zadnjem redu tablice valja izračunati vrijednosti prema dobivenoj jednadžbi pravca.

Rješenje Vidimo da je $n = 5$, a pomoćni računi nam daju (uz oznaku $y_j = \left(\frac{T_j}{2\pi}\right)^2$)

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = 14, \quad \sum_{j=1}^{5} x_j^2 = 54, \quad \sum_{j=1}^{5} y_j = 37.35 \times 10^{-2}, \quad \sum_{j=1}^{5} x_j y_j = 129.85 \times 10^{-2}, \quad \sum_{j=1}^{5} y_j^2 = 322.45 \times 10^{-2}. \tag{(D4)-21}$$

Iz formula za b - koeficijent smjera i a - odsječak na osi y dobijemo

$$b = 1.71 \times 10^{-2}\mathrm{s}^2 \qquad a = 2.69 \times 10^{-2}\mathrm{s}^2. \tag{(D4)-22}$$

Prema tome, možemo napisati prvo opću formulu za T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \tag{(D4)-23}$$

gdje je I moment tromosti, a D je konstanta torzije (žice). Moment tromosti se mijenja dodavanjem utega mase m

$$I(x) = I_0 + x \cdot mr^2 \tag{(D4)-24}$$

gdje je I_0 moment tromosti prazne ploče torzijskog njihala, a (točkaste) mase imaju (svaka) masu m i nalaze se na udaljenosti r od osi titranja. Iz gornjeg izraza dobijemo

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{I_0}{D} + \frac{mr^2}{D} \cdot x. \tag{(D4)-25}$$

Uz gornje rezultate možemo sada napisati

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 2.69 \times 10^{-2} + 1.71 \times 10^{-2} \cdot x. \tag{(D4)-26}$$

Koeficijent korelacije r^2 je

$$r^2 = 0.993 \tag{(D4)-27}$$

što pokazuje odlično slaganje teorijskog proračuna i rezultata mjerenja. Zadnji red tablice D4.1 daje vrijednosti, redom: (2.69, 6.11, 7.82, 9.53, 11.24) što također pokazuje da postoje minimalna odstupanja od mjerenih vrijednosti, a to bi pokazao i grafički prikaz podataka i dobivenog pravca.

♠ ♠

Zadatak D4.1 Odredite metodom najmanjih kvadrata pravac koji je određen parovima točaka: (2,5) (3,9) (4,15) (5,21). Nacrtajte točke i pravac i izračunajte devijaciju (vidjeti tablicu).

Tablica D4.2

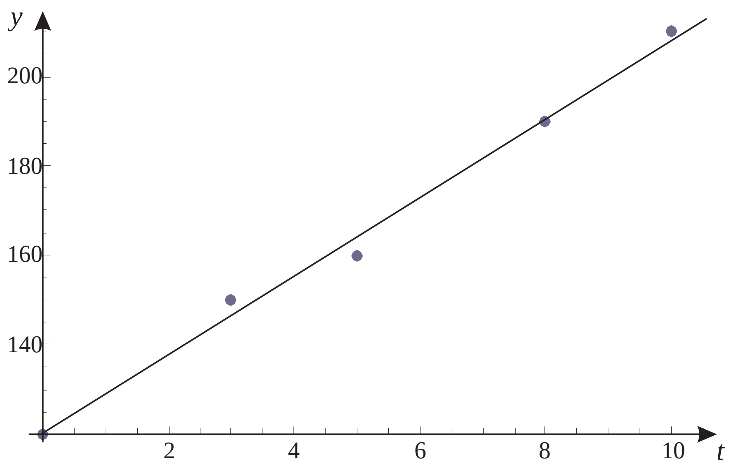
x_j	2	3	4	5
y_j	5	9	15	21
$\tilde{y}_j$	4.4	9.8	15.2	20.6
$(y_j - \tilde{y}_j)^2$	0.36	0.64	0.04	0.16
$(y_j - \overline{y})^2$	56.25	12.25	6.25	72.25

Podaci i pomoćni računi uz zadatak D4.1.

Rješenje $y = 5.4x - 6.4$, $\sigma_{yx} = 0.548$.

♠ ♠

Zadatak D4.2 Neka se automobil kreće ravnom cestom stalnom brzinom v (m/s). Mjerenjem su određeni parovi točaka (t, y) koji određuju pravac $y = y_0 + vt$. Nacrtajte parove točaka i odredite metodom najmanjih kvadrata brzinu v i početni položaj y_0 automobila.



Slika 4 uz zadatak D4.2:
podaci i pravac prilagođen podacima metodom najmanjih kvadrata.

Rješenje $y = 120.127 + 8.822t$. Brzina je, dakle, 8.822 m/s, a početni je položaj 120.127 m.

♠ ♠

Tablica D4.3

t/s	0	3	5	8	10
y/m	120	150	160	190	210

Mjereni parovi vremena t i pređenih udaljenosti y

D4.3 Prilagodba polinoma

Metoda prilagodbe može se poopćiti na polinom općeg oblika (m-tog stupnja)

$$p(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m \tag{(D4)-28}$$

koji prolazi eksperimentalno određenim parovima točaka ((D4)-1). Sada valja naći minimum funkcije E iz jednadžbe ((D4)-3) od $m+1$ varijabli b_m, tj. sada jednadžba (D4-3) postaje

$$E(b_0, \ldots, b_m) = \sum_{j=1}^{j=n} (y_j - b_0 - b_1 x - \cdots - b_m x^m)^2 \tag{(D4)-29}$$

pa imamo $m+1$ jednadžbi

$$\frac{\partial E}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b_1} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial E}{\partial b_m} = 0. \tag{(D4)-30}$$

gdje je na pr.

$$\frac{\partial E}{\partial b_b} = -2 \sum_{j=1}^{n} (y_j - b_0 - b_1 x - \cdots - b_m x^m) x_k. \tag{(D4)-31}$$

U slučaju polinoma drugog stupnja (kvadratna funkcija) imamo *normalne jednadžbe*

$$\begin{aligned} b_0 n \quad &+ b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 &= \sum y_j \\ b_0 \sum x_j &+ b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 &= \sum x_j y_j \\ b_0 \sum x_j^2 &+ b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 &= \sum x_j^2 y_j \end{aligned} \tag{(D4)-32}$$

koje možemo riješiti i dobiti nepoznate parametre (konstante) b_0, b_1 i b_2 i time odrediti ("najbolju") kvadratnu funkciju koja prolazi točkama ((D4)-1). Devijaciju računamo po izrazu ((D4)-8), a koeficijent korelacije po formuli ((D4)-17).

Primjer D4.3 Odredite parametre za prilagodbu polinoma drugog stupnja za niz podataka danih u prve dvije kolone tablice. (Druge dvije kolone predstavljaju već rezultate prilagodbe.)

Tablica D4.4

x_i	y_i	$y(x_i)$	e_i
1.02	0.20	0.209	-0.009
5.34	3.34	5.267	-1.927
6.54	12.49	10.841	1.418
7.56	19.26	17.004	2.256
10.03	35.80	37.356	-1.556
13.18	69.04	74.453	-5.413
13.51	83.07	79.062	4.008
14.89	99.30	99.823	-0.523
17.57	151.18	146.989	4.191
18.92	171.50	174.173	-2.673

Prikaz podataka za metodu najmanjih kvadrata uz primjer D4.3.

RJEŠENJE Vidimo da je $n = 10$ i da prema jednadžbama ((D4)-32) dobijemo sustav od 3 jednadžbe s tri nepoznanice b_0, b_1 i b_2:

$$\begin{aligned} b_0 n \quad &+ b_1 \sum x_j + b_2 \sum x_j^2 &= \sum y_j \\ b_0 \sum x_j &+ b_1 \sum x_j^2 + b_2 \sum x_j^3 &= \sum x_j y_j \\ b_0 \sum x_j^2 &+ b_1 \sum x_j^3 + b_2 \sum x_j^4 &= \sum x_j^2 y_j \end{aligned} \qquad ((D4)\text{-}33)$$

Dobijemo da je

$$b_0 = 2.446 \quad b_1 = -2.833 \quad b_2 = 0.6295 \qquad ((D4)\text{-}34)$$

pa je "najbolja" kvadratna funkcija po teoriji najmanjih kvadrata određena podacima iz tablice D4.4

$$y(x) = 2.226 - 2.833x + 0.6295x^2. \qquad ((D4)\text{-}35)$$

Podaci u trećoj koloni tablice D4.4 su izračunati pomoću gornje funkcije, a u četvrtoj koloni su odstupanja. Kada zbrojimo kvadrate tih odstupanja, podijelimo zbroj s n=10 i izvadimo drugi korijen, tada smo izračunali devijaciju, koja je dana izrazom ((D4)-8). Devijacija je 2.479, a koeficijent korelacije je $r^2 = 0.999$.

♠ ♠

D4.4 Prilagodba eksponencijalne funkcije

Teorija najmanjih kvadrata nam je do sada dala jednadžbe koje su bile linearne u parametrima koje je bilo lako riješiti. Međutim, ponekad moramo pronaći "najbolju" funkciju drugačijeg oblika od polinoma.

D4.4.1 Eksponencijalna funkcija I

Razmotrimo prilagodbu eksponencijalne funkcije oblika

$$y = Ae^{-bx} \qquad \text{((D4)-36)}$$

gdje su sada A i b nepoznati parametri. Oni ne ulaze u račun linearno, već se b javlja u eksponentu. Ako, međutim, logaritmiramo jednadžbu, dobijemo

$$\ln y = \ln A - bx \qquad U = \ln y \qquad U = a_0 + a_1 x, \qquad \text{((D4)-37)}$$

pa vidimo da možemo razmatrati *linearnu funkciju* (pravac) $U = a_0 + a_1 x$, s tim da su sada parovi točaka ((D4)-1) postali $(x_j, \ln y_j)$ (jasno je da prilagodba dolazi u obzir samo ako su svi y_j pozitivni). Kada pomoću izraza ((D4)-6) odredimo parametre a_0 i a_1 (tj. $a \leftrightarrow a_0$ i $b \leftrightarrow -a_1$), onda je

$$A = e^{a_0} \qquad \text{i} \qquad b = -a_1 \qquad \text{((D4)-38)}$$

pa je time potpuno određena funkcija ((D4)-36). Međutim prije nego pristupimo računu parametara a_0 i a_1 valja grafički prikazati parove točaka $(x_j, \ln y_j)$ i vidjeti da oni (približno) određuju pravac, tj. da prilagodba funkcije ((D4)-36) ima smisla za parove točaka (x_j, y_j).

Primjer D4.4

Tablica D4.5

x_j	0	0.25	0.4	0.5
y_j	9.532	7.983	4.826	5.503

Podaci za eksponencijalnu prilagodbu ((D4)-36)

Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre A i b eksponencijalne funkcije $y = A\exp(bx)$ za skup podataka u tablici D4.5.

Tablica D4.6

X_j	0	0.25	0.4	0.5
U_j	2.255	2.077	1.574	1.705

Podaci iz tablice D4.5 izračunati prema jednadžbi ((D4-37): $X_j = x_j$ i $U_j = \ln y_j$.

RJEŠENJE Odgovarajući linearizirani problem daje nam tablicu D4.6, gdje je

$$X_j = x_j \qquad U_j = \ln y_j \qquad \text{i} \qquad U = \ln A + bx = a_0 + a_1 x. \tag{(D4)-39}$$

Normalne jednadžbe postaju

$$\begin{aligned} 4.000\, a_0 + \quad 1.150\, a_1 &= 7.611 \\ 1.150\, a_0 + \quad 0.473\, a_1 &= 2.001 \end{aligned} \tag{(D4)-40}$$

koje daju $a_0 = 2.281$ i $a_1 = -1.317$, što dalje daje $A = 9.786$ i $b = -1.315$, pa je "najbolja" funkcija po teoriji najmanjih kvadrata jednaka

$$y = 9.786 \cdot e^{-1.317x}. \tag{(D4)-41}$$

Ovdje valja istaknuti da ovako dobijeni parametri nisu nužno jednaki onima koje bismo dobili direktnim računom (dakle bez linearizacije postignute logaritmiranjem). Naime, funkcija $E(a, b)$ za gore zadanu eksponencijalnu funkciju je

$$E(a, b) = \sum_{j=1}^{4} (y_j - Ae^{bx_j})^2 \tag{(D4)-42}$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial A} &= 0 = -2 \sum_{j=1}^{4} (y_j - A \cdot e^{bx_j}) e^{bx_j} \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= 0 = -2 \sum_{j=1}^{4} (y_j - A \cdot e^{bx_j}) A \cdot e^{bx_j} \end{aligned} \tag{(D4)-43}$$

što daje nelinearni sustav jednadžbi koji je kvadratičan u A, a parametar b se pojavljuje u eksponencijalnoj funkciji u obliku $e^{0.25b}$ ili $e^{0.4b}$ itd. Rješenje tog sustava je: $A = 9.731$ i $b = -1.265$, pa vidimo da je rezultat različit od rješenja lineariziranog problema.

♠ ♠

D4.4.2 Eksponencijalna funkcija II

Za prilagodbu eksponencijalne funkcije oblika

$$y = aN^x \tag{(D4)-44}$$

dobijemo (dekadskim) logaritmiranjem

$$\log y = \log a + x \log N \qquad z = \log y \qquad z = a_0 + a_1 x \tag{(D4)-45}$$

pa je $a_0 = \log a$ i $a_1 = \log N$. Dakle, problem smo linearizirali i sveli na određivanje parametara pravca a_0 i a_1, kao i u slučaju funkcije $y = A \exp(bx)$.

Tablica D4.7

x_j	1	2	3	4	5	6
y_j	1.00	1.15	1.30	1.50	1.75	2.00
x_j	7	8	9	10	11	12
y_j	2.30	2.65	3.00	3.50	4.00	4.65

Parovi točaka za logaritamsku prilagodbu prema jednadžbi ((D4)-44)

Primjer D4.5 Metodom najmanjih kvadrata odredite parametre funkcije $y = aN^x$ ako su poznati parovi točaka dani u tablici D4.7.

RJEŠENJE Logaritmiranjem dobijemo $z = a_0 + a_1 x$ pa u tablici D4.7 zamijenimo podatke y_j sa $z_j = \log y_j$. Riješivši normalne jednadžbe kao u prethodnom primjeru, dobijemo: $a_0 = -0.062251$ i $a_1 = 0.060421$, pa je $a = 10^{a_0} = 0.86646$ i $N = 10^{a_1} = 1.1493$ ili

$$y = 0.86646 \cdot (1.1493)^x. \qquad \text{((D4)-46)}$$

♠ ♠

D4.4.3 Eksponencijalna funkcija III

Za eksponencijalnu funkciju oblika

$$y = a\,x^n \qquad \text{((D4)-47)}$$

gdje je sada eksponent od x nepoznati parametar, ponovno primijenimo linearizaciju parametara logaritmiranjem, pa dobijemo

$$\log y = \log a + n \log x \qquad z = \log y, \quad w = \log x \qquad z = b_0 + b_1 w \qquad \text{((D4)-48)}$$

gdje je $b_0 = \log a$ i $b_1 = n$. Problem se svodi na nalaženje parametara pravca b_0 i b_1.

Tablica D4.8

x_j	1	2	3	4	5	6	7
y_j	5.0	7.5	9.5	11.3	13.0	14.5	16.0

Parovi točaka za logaritamsku prilagodbu prema jednadžbi ((D4)-47)

Primjer D4.6 Metodom najmanjih kvadrata odrediti parametre a i n funkcije $y = ax^n$, ako su poznati parovi točaka dani u tablici D4.8. Izračunajte koeficijent korelacije r i devijaciju σ.

Tablica D4.9

w_j	0	0.30103	0.47712	...
z_j	0.69897	0.87506	0.97772	...

Parovi logaritmiranih vrijednosti iz tablice D4.0.

Rješenje Logaritmiranjem funkcije $y = ax^n$ dobijemo funkciju $z = b_0 + b_1 w$ gdje je $b_0 = \log a$, $b_1 = n$, $w = \log x$ i $z = \log y$. Dobijemo tablicu D4.9 umjesto prethodne tablice, gdje sada umjesto parova (x_j, y_j) dolaze dekadski logaritmi tih brojeva $(\log x_j, \log y_j) = (w_j, z_j)$.

Iz normalnih jednadžbi dobijemo da je $b_0 = 0.69625$ i $b_1 = 0.59704$ ili: $a = 10^{b_0} = 4.9688$, $n = b_1 = 0.59704$, pa je

$$y = 4.9688 \cdot x^{0.59704}. \qquad ((D4)\text{-}49)$$

♠ ♠

U svim slučajevima računi prilagodbi eksponencijalnih funkcija svode se na račune provedene pri prilagodbi pravca. Odgovarajućim transformacijama (logaritmiranjem odnosno antilogaritmiranjem) iz jednadžbe pravca, odnosno od njegovih parametara, rekonstruira se odgovarajuća krivulja (eksponencijalne funkcije I, II i III).

Prilagodba drugih funkcija zadanim parovima točaka vodi do nelinearnih sustava jednadžbi koje je uz današnja računala i odgovarajuće programe, relativno jednostavno rješavati.

D6.5 PREGLED FORMULA:

(1) **Linearna funkcija - pravac**

$$y(x) = a + bx$$

parametri b i a:

$$b = \frac{n\sum x_j y_j - (\sum x_j)(\sum y_j)}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum y_j - b\cdot\frac{1}{n}\sum x_j.$$

devijacija:

$$\sigma_{yx} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n}(y_j - a - bx_j)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{j=n} e_j^2}{n}}$$

koeficijent korelacije:

$$r^2 = \frac{\left[\sum x_j y_j - \frac{1}{n}\sum x_j \sum y_j\right]^2}{\left[\sum x_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x_j\right)^2\right]\left[\sum y_j^2 - \frac{1}{n}\left(\sum y_j\right)^2\right]}$$

(2) **Eksponencijalna funkcija I**

$$y = Ae^{-bx}$$

$$\ln y = \ln A - bx \qquad U = \ln y \qquad U = a_0 + a_1 x,$$

i

$$A = e^{a_0} \qquad \text{i} \qquad b = -a_1$$

(3) **Eksponencijalna funkcija II**

$$y = aN^x$$

$$\log y = \log a + x\log N \qquad z = \log y \qquad z = a_0 + a_1 x$$

i

$$a_0 = \log a \qquad a_1 = \log N.$$

(4) **Eksponencijalna funkcija III**

$$y = a\,x^n$$

$$\log y = \log a + n\log x \qquad z = \log y, \quad w = \log x \qquad z = b_0 + b_1 w$$

i

$$b_0 = \log a \qquad b_1 = n.$$

♠ ♠

LITERATURA:

[1] F.B. Hildebrand: *Introduction to Numerical Analysis*, (McGraw Hill, New York, 1956).

[2] I. Jacques and C. Judd: *Numerical Analysis*, (Chapman and Hall, London, 1987).

[3] J.P. Nougier: *Méthodes de calcul Numérique*, (Masson, Paris, 1983).

[4] K.L. Nielsen: *Methods in Numerical Analysis*, (The Macmillan Company, New York, 1964).

[5] E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*, (J. Wiley, New York, 1988).

[6] R.E. Collins: *Mathematical Methods for Physicists and Engineers*, (Reinhold Book Corp., New York, 1968).

[7] M.D. Greenberg: *Advanced Engineering Mathematics*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988).

[8] A. Romer: *50 BASIC Programme: Der Computer als Hilfe in Untericht und Praxis*, (B.I.- , Mannheim, 1983).

[9] H.M. Wadsworth: *Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists*, (McGraw-Hill, New York, 1990).

[10] S.C. Chapra and R.P. Canale: *Numerical Methods for Engineers*, (MaGraw-Hill, New York, 1998).

♠ ♠

D5 PRIRODNE KONSTANTE. BROJČANI PODACI

D5.1 Neki važniji brojčani podaci i odnosi

Veličina	**Simbol**	**Brojčana vrijednost**
Polumjer Zemlje	R_{Z}	$6378.14\,\mathrm{km}$
Masa Zemlje	M_{Z}	$5.974 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
Udaljenost Sunce - Zemlja	D	$1.496 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
Masa Sunca	M_{S}	$1.989 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$
Ubrzanje sile teže	g	$9.8067\,\mathrm{m/s^2}$
Brzina zvuka u zraku (0°C)	v	$331\,\mathrm{m/s}$
Gustoća suhog zraka (0°C)	ρ_{zr}	$1.29\,\mathrm{kg/m^3}$
Srednja gustoća Zemlje	ρ_{Z}	$5.52\,\mathrm{kg/m^3}$
Rydbergova konstanta	R	$1.097 \times 10^{7}\,\mathrm{m^{-1}}$
Elektron-volt	eV	$1\,\mathrm{eV} = 1.6022 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$
Rydbergova energija	E_0	$13.6058\,\mathrm{eV}$
Atmosfera	atm	$1\,\mathrm{atm} = 1.013 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa}$
Bohrov magneton	μ_B	$0,927 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/T}$
Konjska snaga	KS	$1\,\mathrm{Ks} = 0.746\,\mathrm{kW}$

D5.2 Prirodne konstante

Konstanta	**Simbol**	**Vrijednost**
Brzina svjetlosti	c	$2.998 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s}$
Elementarni naboj	e	$1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Gravitacijska konstanta	Γ	$6.672 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
Atomska jedinica mase	$u = \text{masa}\,(^{12}C)/12$	$1.661 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
	$u = \text{masa}\,(^{12}C)/12$	$931.502\,\mathrm{MeV/c^2}$
Masa elektrona	m_e	$9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
	m_e	$0.511\,\mathrm{MeV/c^2}$
Masa protona	m_p	$1.673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
	m_p	$938.280\,\mathrm{MeV/c^2}$
Omjer masa m_p/m_e	$m_\mathrm{p}/m_\mathrm{e}$	1836.153
Masa neutrona	m_n	$1.675 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masa vodikovog atoma	$m_{^1\mathrm{H}}$	$1.0087\,\mathrm{u}$
Masa helijevog atoma	$m_{^4\mathrm{He}}$	$4.0026\,\mathrm{u}$
Omjer naboja i mase elektrona	e/m_e	$1.759 \times 10^{11}\,\mathrm{C/kg}$
Planckova konstanta	h	$6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
"Reducirana" Planckova konst.	$\hbar = h/2\pi$	$1.055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$
Avogadrov broj	N_A	$6.022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Boltzmannova konstanta	k	$1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$
Štefan-Boltzmannova konst.	σ	$5.671 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2{\cdot}K^4}$
Univerzalna plinska konstanta	R	$8.314\,\mathrm{J/mol{\cdot}K}$
Molarni volumen plinova	$V_{m/0}$	$22.4\,\ell$
Bohrov polumjer	r_B	$5.292 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$
Permitivnost vakuuma	ε_0	$8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}$
	$1/4\pi\varepsilon_0$	$8.99 \times 10^{9}\,\mathrm{kg \cdot m^3/s^2 \cdot C^2}$
Permeabilnost vakuuma	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{T \cdot m/A}$

L LITERATURA

Eksperimentalne metode fizike u praktikumu

[1] Y. Kraftmakher: *Experiments and Demonstrations in Physics*, (World Scientific, New Jersey, 2011);

[2] D. H. Loyd: *Physics Laboratory Manual*, (Thomson, Brooks/Cole, 2010);

[3] H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt, J. Sahm, *Das Neue Physikalische Praktikum* (Springer, New York, 2006);

[4] J. Becker i H. J. Jodl, *Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (Springer, Berlin, 1991.);

[5] J. D. Wilson i C. A. Hernandez-Hall, *Physics Laboratory Experiments*, (Cengage Learning, Australia, 2015.);

[6] R. M. Whittle i J. Yarwood, *Experimental Physics for Students*, (Chapman, London, 1976.);

[7] B. J. Brinkworth, *An Introduction to Experimentation*, (The EU Press, London, 1976.);

[8] D. W. Preston, *Experiments in Physics*, (Wiley, New York, 1986.);

[9] J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers*, (McGraw-Hill, New York, 1976.)

[10] D. Horvat, Diana Šaponja-Milutinović, *Fizički praktikum*, Priručnici TVZ-a, ISBN 978-953-7048-64-8 (TVZ, Zagreb, 2017.)

Analiza podataka i statistika s teorijom pogrešaka

[11] J. Topping, *Errors of Observations and Their Treatment*, (Chapman, London, 1972.)

[12] E. Kreyszig: *Advanced Engineering Mathematics*, (J. Wiley, New York, 1988);

[13] J. Schiller, R. A. Srinivasan i M Spiegel, *Schaum's Outlines of Probability and Statistics*, (McGraw-Hill, New Jersey, 2012.);

[14] R. E. Collins: *Mathematical Methods for Physicists and Engineers*, (Reinhold Book Corp., New York, 1968);

[15] N. C. Barford, *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth*, (Addison Wesley, London, 1967.);

[16] M. D. Greenberg: *Advanced Engineering Mathematics*, (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1988);

[17] H. M. Wadsworth: *Handbook of Statistical Methods for Engineers and Scientists*, (McGraw-Hill, New York, 1990);

[18] S. Brandt: *Datenanalyse - mit statistischen Methoden und Computerprogrammen*, (B.I. Mannheim, 1974.)

[19] R. Caulcutt: *Statistics in Research and Development*, (Chapman, London, 1984.);

[20] J. R. Taylor: *An Introduction to Error Analysis*, (USC Books, Sausalito, 1997.);

[21] B. D. Bowen i H. F. Weisberg, *An Introduction to Data Analysis*, (W.H. Freeman, San Francisco, 1980.);

[22] Ch. Chatfield, *Statistics for Technology - A Course in Applied Statistics*, (Chapman, London, 1978.);

[23] Ch. D. Deakon, *Error Analysis in the Introductory Physics Laboratory*, Physics Teacher 30, 368, 1992;

[24] D. Roberts, *Errors, Discrepancies and the Nature of Physics*, Physics Teacher, 155, March 1983;

Računala u praktikumu

[25] L. Budin, P. Brođanac, Z. Markučić i S. Perić, *Rješavanje problema programiranjem u Pythonu*, (Zagreb, Element, 2015.);

[26] M. Newman, *Computational Physics*, (Univ. of Michigan, 2013.);

[27] J. M. Kinder i Ph. Nelson, *A Student's Guide to Python for Physical Modeling*, (Princeton, Princeton University Press, 2015.);

[28] C. Führer, J. E. Solem i O. Verdier, *Scientific Computing with Python 3*, (Packt Publishing, 2016.);

[29] A. Saha, *Doing Math with Python*, (San Francisco, No Starch Press, 2015.);

[30] I. Idris, *Numpy*, 2nd Edition, (Open Source, Birmingham, 2021.);

[31] S. Keiser, *Learn Quantum Computing with Python and Q*, (Manning Publication, 2021.);

[32] T. A. Beu, *Introduction to Numerical Programming Using Python nad C++*, (CRC Press, Boca Raton, 2020.);

[33] E. Babić i A. Karmelić, *Numeričko modeliranje složenih gibanja*, (Školska knjiga, Zagreb, 1988.);

[34] A. Malthe-Sorensen, *Elementary Mechanics Using Python*, (Springer, Heidelberg, 2015.);

[35] R.H. Landau, M.J. Paez i Ch. C. Bordeianu, *Computational Physics, Problem Solving with Python*, (Wiley, Weinheim, 2015.);

[36] Th. J. Quirk, M. H. Quirk, H. F. Horton, *Excel 2013 for Physical Sciences Statistics*, (Springer, New York, 2013.);

[37] E. J. Billo, *Excel for Scientists and Engineers*, (Wiley, Hoboken, 2007.);

[38] L. Kirkup, *Data Analysis for Physical Scientists - Featuring Excel*, (Cambridge Univ. Press, New York, 2012.);

[39] A. Romer: *50 BASIC Programme: Der Computer als Hilfe in Unterricht und Praxis*, (B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1983.);

[40] Ch. Duller, *Einfürung in die Statistik mit EXCEL and SPSS*, (Physica Verlag, Heidelberg, 2007.);

[41] M. L. Hetland, *Python Algorithms*, 2nd Edition, (Apress, 2020.);

[42] Ch. Hill, *Learning Scienrific Programming with Python*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2020.);

[43] B. V. Liengme, *A Guide to Microsoft Excel 2002 for Scientists and Engineers*, (Elsevier, Amsterdam, 2002.);

Opća fizika

[44] P. M. Fishbane, S. Gasiorowicz i S. T. Thornton, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, (Prentice Hall, 2005.);

[45] D. Halliday, R. Resnick i J. Walker, *Fundamentals of Physics*, (Wiley, New York, 2011.);

[46] D. Horvat: *Fizika 1 - mehanika i toplina*, (Hinus, Zagreb, 2005.);

[47] D. Horvat: *Fizika 2 - titranje, valovi, optika i uvod u modernu fiziku*, (Neodidacta, Zagreb, 2011.);

[48] R. A. Serway i J. W. Jewett, *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, (Cengage Learning, 2005.).

♠ ♠