Análise Estatística de dados

Inteligência Artificial

PECE Programa de Educação Continuada

Escola Politécnica da USP

USP

AULA 03 – NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA

Larissa Driemeier

PROGRAMA DO CURSO

Aula	Data	Conteúdo da Aula
01	18/02	Aula Inaugural
02	25/02	Introdução ao Curso. Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte I
03	11/03	Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte II
04	18/03	Decomposição de valor singular (SVD)
05	25/03	Otimização: derivadas, derivadas parciais (operadores gradiente, Jacobiano, Hessiano e Laplaciano), algoritmos de gradiente, noções de algoritmos genéticos
06	01/04	Variáveis independentes e não independentes. Estatística Descritiva e Indutiva. Definições de medidas de dispersão e tendência central.
07	08/04	Probabilidade e Teorema de Bayes
08	15/04	Modelos de probabilidade discretos/contínuos
09	22/04	Intervalo de confiança e teste de hipóteses
10	29/04	Modelo de Markov. Modelo de Markov oculto.

CARDÁPIO DE HOJE

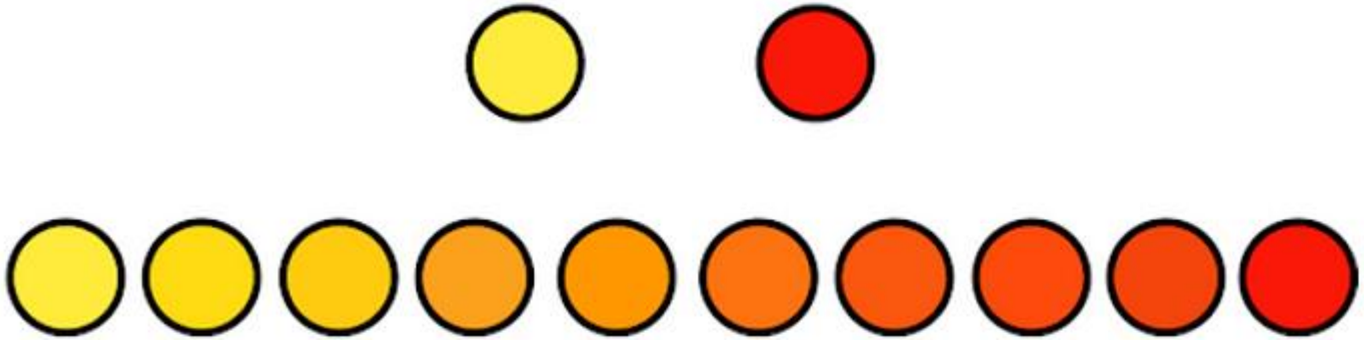
- Dependência linear e span: Base de um espaço vetorial
- Sistema linear de equações $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Determinantes
- Autovalores e autovetores

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

DEPENDÊNCIA LINEAR E SPAN

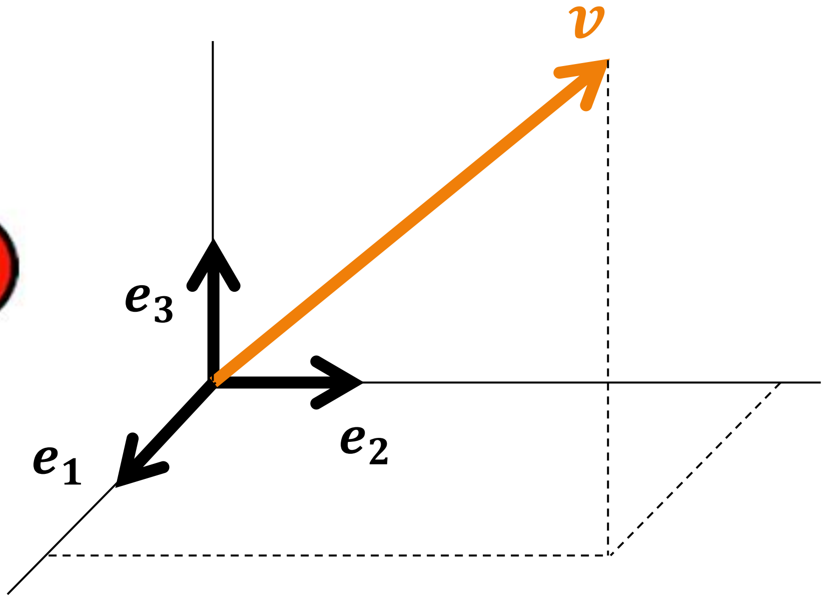
COMBINAÇÃO LINEAR E SPAN

SPAN DE AMARELO E VERMELHO



$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{v}$$

Vejam que $\boldsymbol{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \cdots \boldsymbol{e}_n$.



COMBINAÇÃO LINEAR E SPAN

Dois vetores 2D quaisquer:

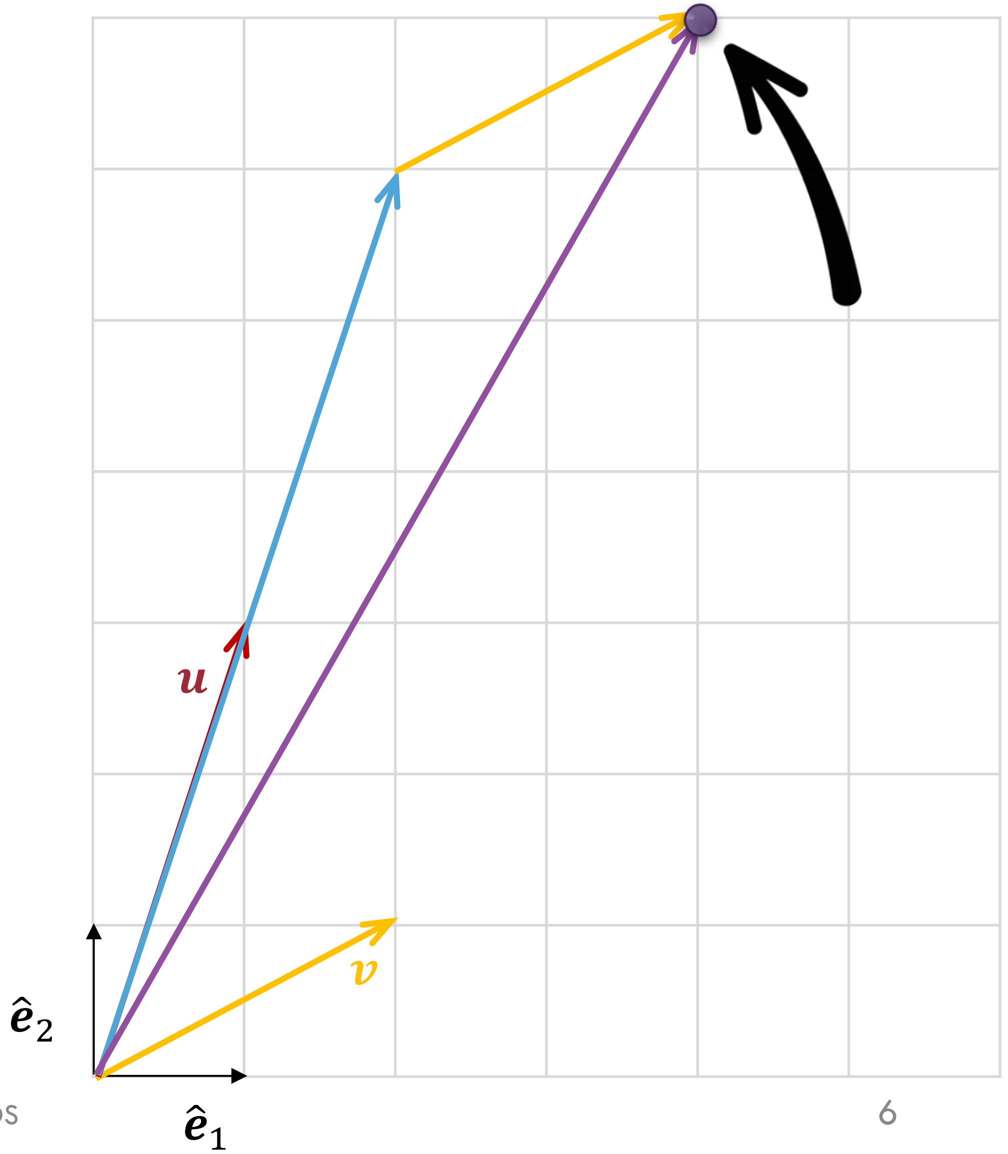
$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a combinação linear entre eles é dada por,

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $a = 2, b = 1$:

$$2\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$



COMBINAÇÃO LINEAR E SPAN

Dois vetores 2D quaisquer:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a combinação linear entre eles é dada por,

$$a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

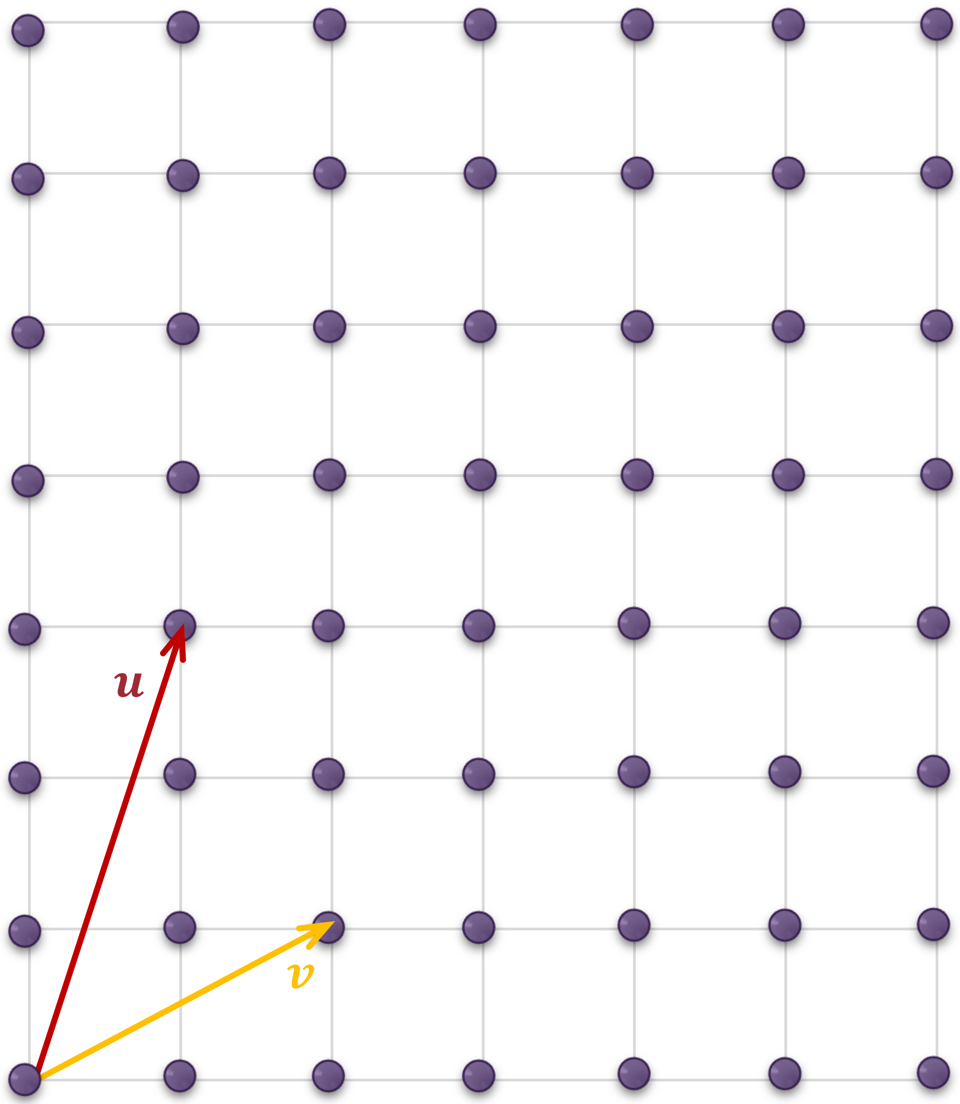
Se $a = 2, b = 1$:

$$2\boldsymbol{u} + 1\boldsymbol{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

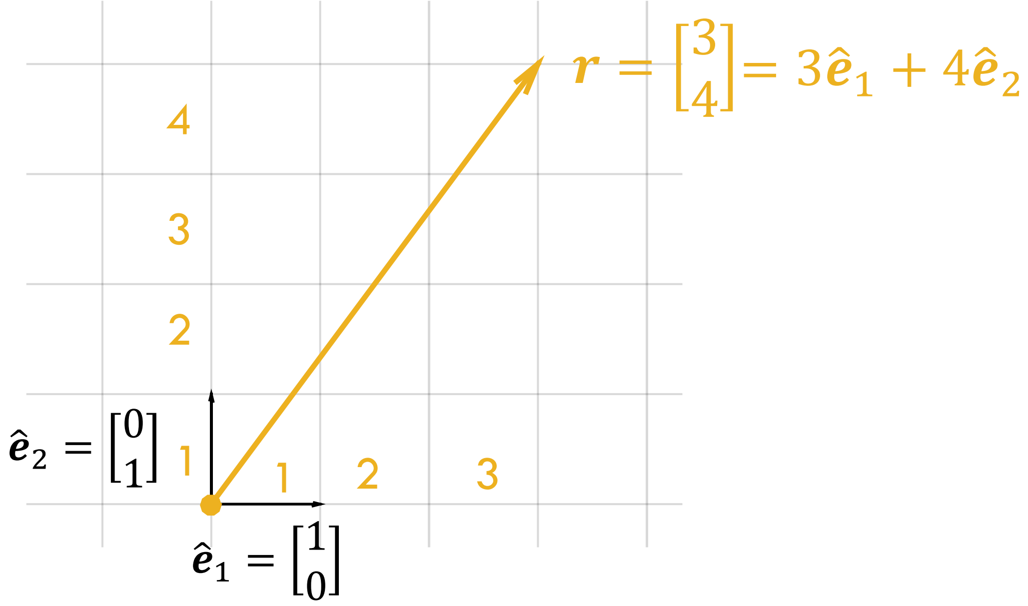
Pense em todos os pontos que você pode alcançar com a combinação entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, alterando a e b. Este conjunto de pontos é o span do conjunto de vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

$$51\,\boldsymbol{u} + 76\,\boldsymbol{v}$$

$$-\frac{1}{1000}\boldsymbol{u} + \pi^6\,\boldsymbol{v}$$



BASE DE UM CONJUNTO DE VETORES



Base de vetores (bidimensional) de nosso sistema de coordenadas.

Diz-se que n vetores formam uma base para um conjunto de vetores de dimensão n se:

- Não são uma combinação linear entre eles
- Abrangem todo o espaço n-dimensional (todo span).

Se você colocar esses vetores de base em uma matriz, você terá a seguinte matriz identidade:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

PORTANTO...

A base é um sistema de coordenadas usado para descrever espaços vetoriais (conjuntos de vetores). É uma referência que você usa para associar números a vetores geométricos.

Cada vetor no espaço é uma combinação única dos vetores de base.

A dimensão de um espaço é definida como o tamanho de um conjunto de base. Por exemplo, existem dois vetores de base em $\mathbb{R}^2$ (correspondendo aos eixos x e y no plano cartesiano), ou três em $\mathbb{R}^3$.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Matematicamente, para que um conjunto de vetores $\boldsymbol{v}_i$ seja linearmente independente, em um espaço n-dimensional, a expressão

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{v}_n = 0$$

deve ser possível apenas se todos os fatores lineares c_i forem 0.

Em resumo, qualquer vetor não pode ser expresso como uma combinação linear de outros.

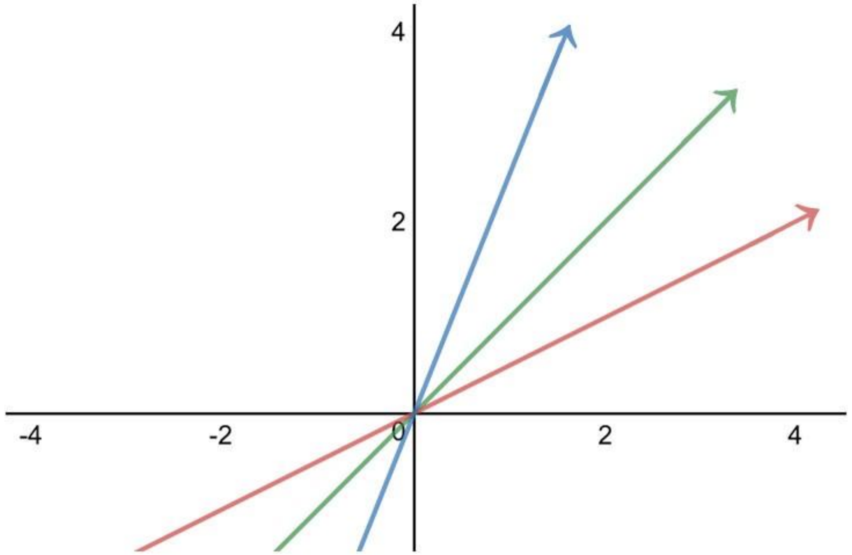
Matricialmente…

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_1 \\ \\ \end{bmatrix} c_1 + \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_2 \\ \\ \end{bmatrix} c_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{v}_n \\ \\ \end{bmatrix} c_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

se e somente se $\boldsymbol{c}^T = [0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0]$.

ESPAÇO COMPOSTO DE VETORES LI

Um espaço n-dimensional não pode ter mais que n vetores linearmente independentes.



RANK DA MATRIZ

O ***rank*** mede a independência linear de uma matriz. O rank de uma matriz é igual ao número de linhas ou colunas independentes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

- 2x

3x

So what?

だから何？

Dakara nani?

SISTEMA LINEAR DE EQUAÇÕES

$$Ax = b$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES

Resolva o sistema:

$$3x_1 + 7x_2 = 27$$
$$5x_1 + 2x_2 = 16$$

Em outras palavras, encontre x_1 e x_2 que satisfazem ambas as equações.

Um sistema de equações pode ser composto por várias equações.

De forma genérica,

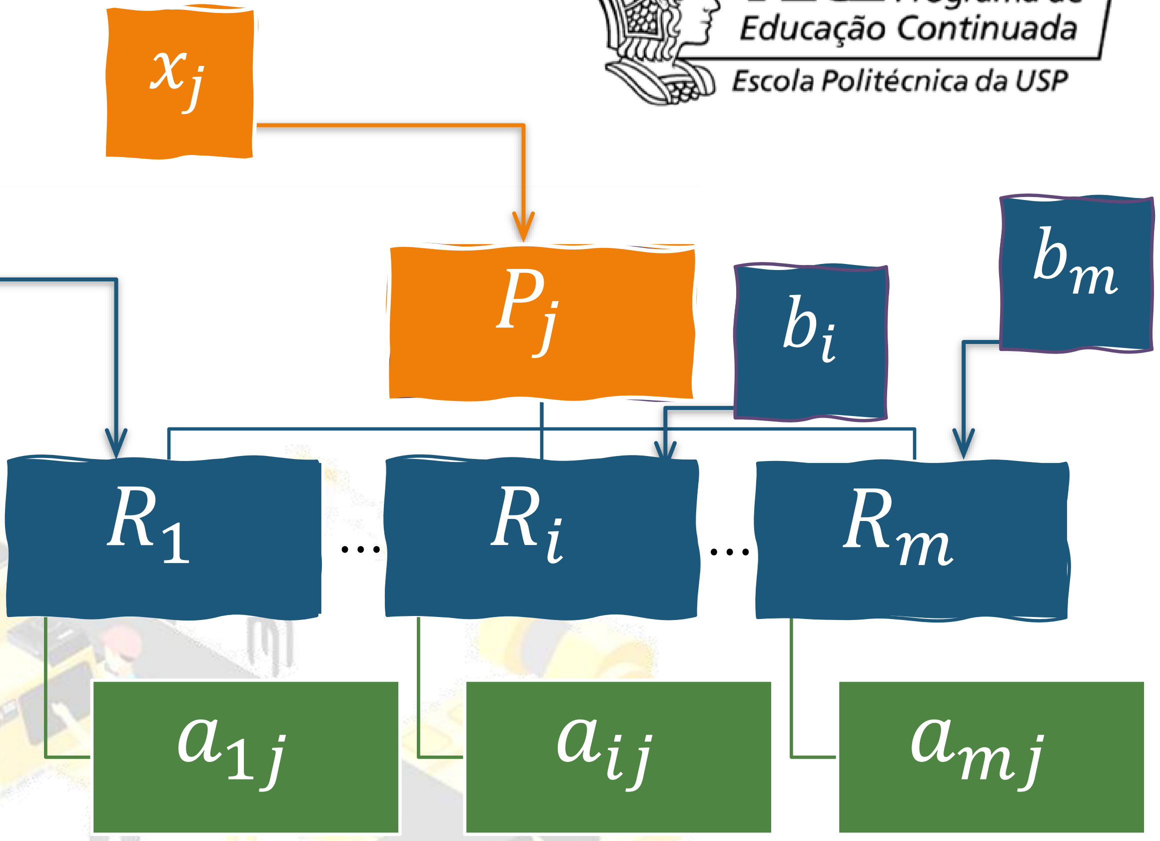
$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Resolver esse sistema equivale encontrar os valores de x_i que satisfaçam todas as equações simultaneamente.

MOTIVAÇÃO...

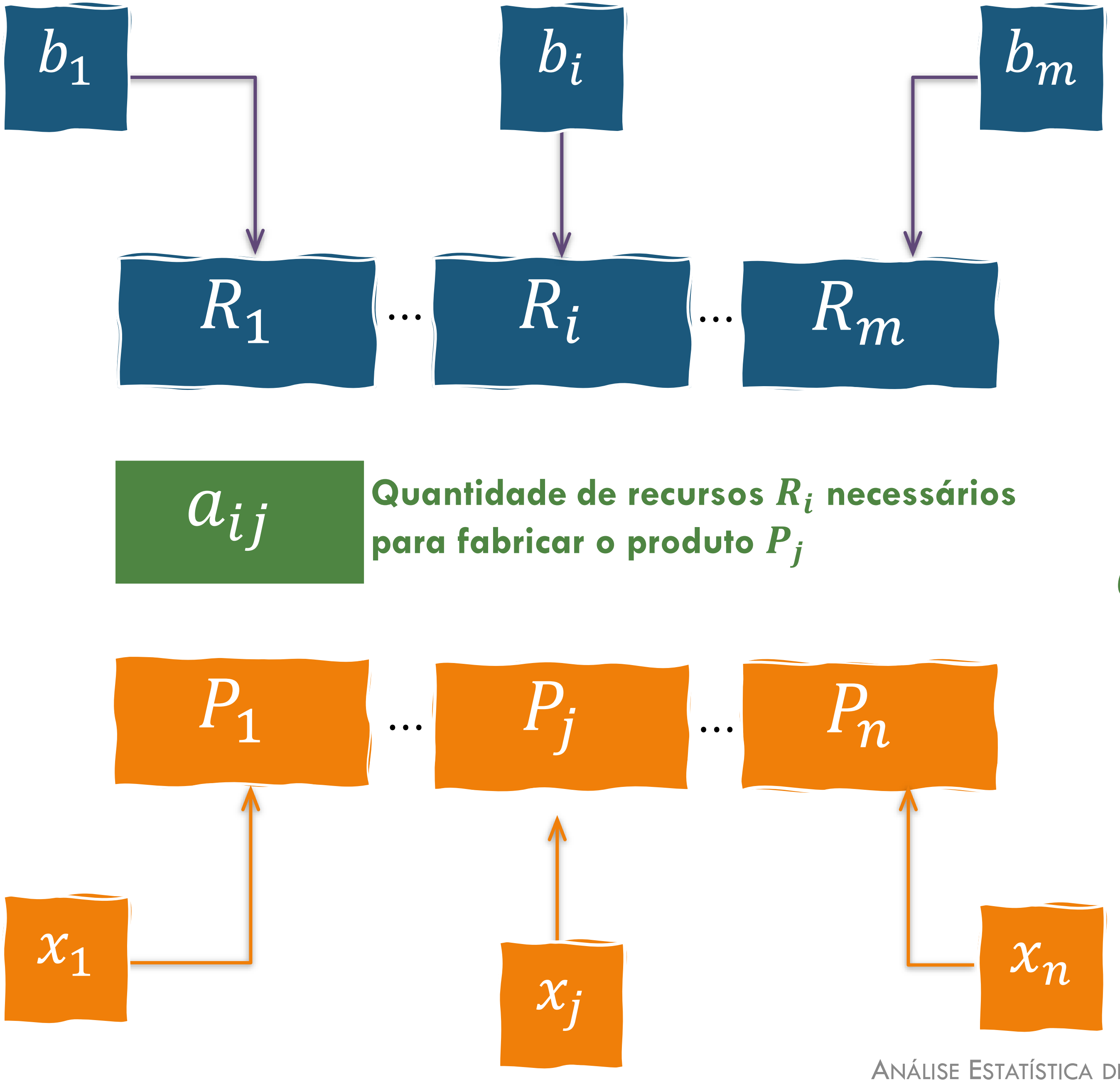
Uma empresa produz produtos $P_1, \cdots, P_n$ para quais recursos $R_1, \cdots, R_m$ são necessários. Para produzir uma unidade de produto P_j, a_{ij} unidades de recurso R_i são necessárias, onde $i = 1, \cdots, m$ e $j = 1, \cdots, n$.

O objetivo é encontrar um plano de produção ideal, ou seja, um plano de quantas unidades x_j do produto P_j devem ser produzidas se um total de b_i unidades de recursos R_i estiverem disponíveis e (idealmente) nenhum recurso sobrar.



$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

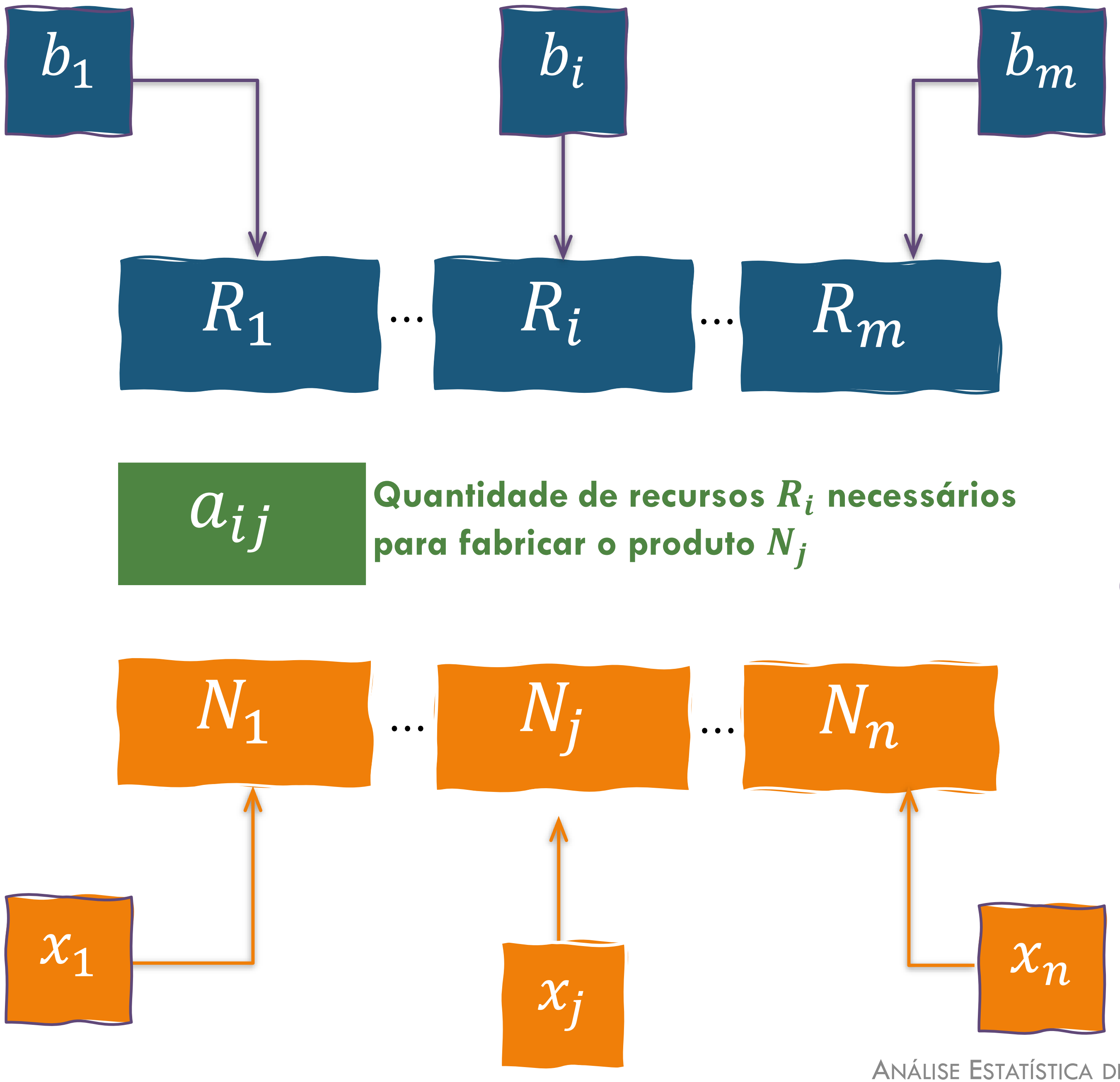
PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP



Quantidade de produtos P_2 fabricados

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Quantidade de recursos R_i necessários para fabricar o produto P_2



$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

Quantidade de recursos R_i totais

ENTÃO...

Um plano de produção ideal $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$, portanto, deve satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{gathered}$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ e $b_i \in \mathbb{R}$.

Qualquer *lista* de dimensão n $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça o conjunto de equações acima é a solução do *sistema de equações linear*.

E AGORA: COMO SE RESOLVE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES?

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1
\end{array}
$$

Não existe Solução – o sistema é inconsistente!

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & 2
\end{array}
$$

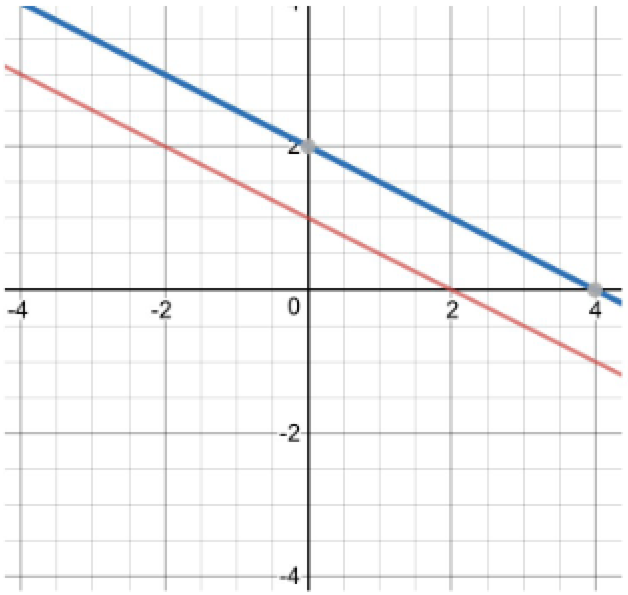
Solução única $(1;\ 1;\ 1)$!

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\
2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5
\end{array}
$$

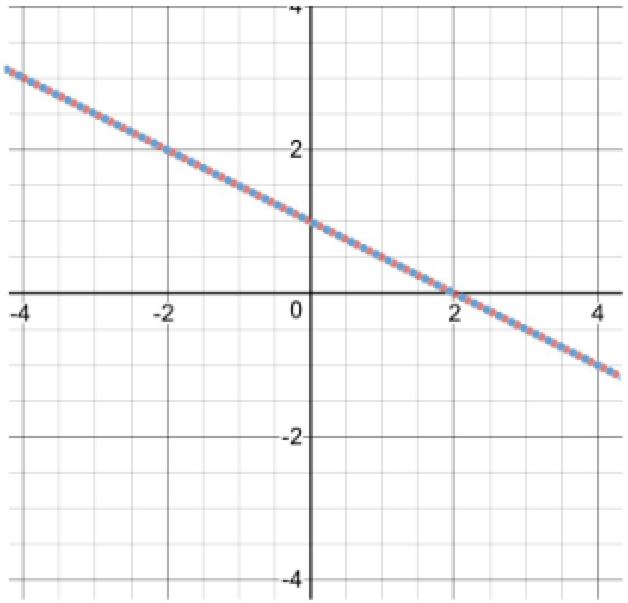
Múltiplas soluções – o sistema é dependente:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a; a\right) a \in \mathbb{R}$$

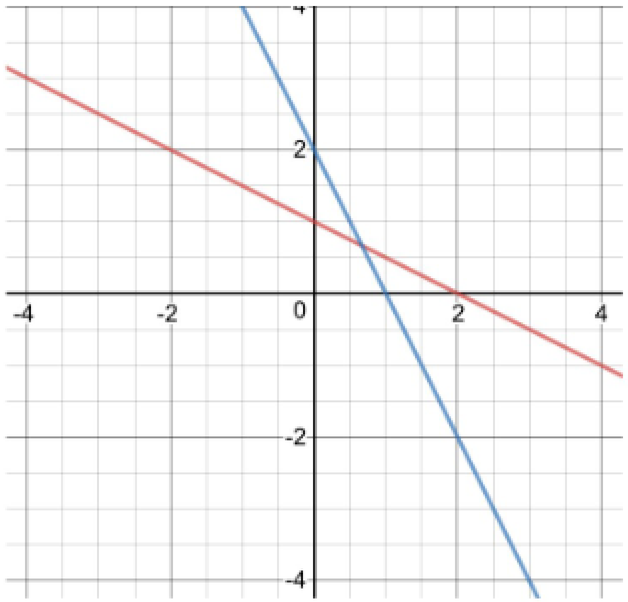
QUANDO $m = n$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + 4y = 8$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + 4y = 4$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



$$x + 2y = 2$$
$$2x + y = 2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Duas linhas não podem se cruzar mais de uma vez, mas podem ser paralelas ou sobrepostas

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \overset{\text{Vetor } \boldsymbol{a}_2\text{...}}{\boxed{\begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}} x_2 + \cdots + \overset{\text{Vetor } \boldsymbol{a}_n\text{...}}{\boxed{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}} x_n = \boxed{\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}} \rightarrow \text{Vetor } \boldsymbol{b}\text{...}$$

Graficamente, temos que viajar desde a origem (zero em todas as dimensões) até o ponto de coordenadas $\boldsymbol{b}$. Os vetores $\boldsymbol{a}$ nos dão as direções pelas quais podemos viajar e seus pesos x_i são o comprimento do caminho nessa direção.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

Matriz ***A***...

$$\iff \boxed{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Ax} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} x_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Portanto, as colunas de $\boldsymbol{A}$ nos dão as direções pelas quais podemos viajar e seus pesos $(\boldsymbol{x})$ são o comprimento do caminho em cada direção.

O número de colunas de $\boldsymbol{A}$ é o número de dimensões do nosso espaço vetorial.

O número de soluções do nosso sistema linear corresponde ao número de maneiras pelas quais podemos alcançar $\boldsymbol{b}$ percorrendo nossas n dimensões.

$$\boldsymbol{A^{-1}Ax = A^{-1}b}$$

$$\boldsymbol{x = A^{-1}b}$$

O PROBLEMA É ACHAR A INVERSA DE $\boldsymbol{A}$

Supondo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

VAMOS POR ETAPAS...

A chave para resolver este problema está nas transformações elementares que não mudam a solução, mas que transformam o sistema de equações em uma forma mais simples:

- Troca de duas equações (linhas na matriz representando o sistema de equações)
- Multiplicação de uma equação (linha) por uma constante $\lambda \in \mathbb{R}$
- Adição de duas equações (linhas)

Ou na fórmula...

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \operatorname{adj}(\boldsymbol{A})$$

METODOLOGIA TRADICIONAL DE SUBSTITUIÇÃO REVERSA

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 2 & 4\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

3ª=2ª-3ª $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\1 & 2 & 4\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

2ª = 2ª-1ª $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

3ª=3ª-2ª $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & 1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

2ª=2ª-3ª $$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1ª=1ª-2ª-3 x 3ª $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\-2 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

OBVIAMENTE...

```python
import numpy as np
#Matriz 3x3
A = np.array([[1,1,3],
              [1,2,4],
              [1,1,2]])

# Inversa
print(np.linalg.inv(A))
```

```
[[ 0. -1.  2.]
 [-2.  1.  1.]
 [ 1. -0. -1.]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

PORTANTO...

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

DESSA FORMA, PODEMOS RESOLVER O PROBLEMA DIRETAMENTE

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 1 + 2 \times 0 + 2 \times (-1) \\ 3 \times \frac{1}{3} + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{1}{3} \\ 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TREINO

Resolva o sistema:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \mathrm{adj}(\boldsymbol{A})$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{22} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

E OS OUTROS DOIS PROBLEMAS?

$$\begin{matrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{matrix}$$

Múltiplas soluções:

$$\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}a; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a; a\right) a \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \end{matrix}$$

Não existe Solução!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

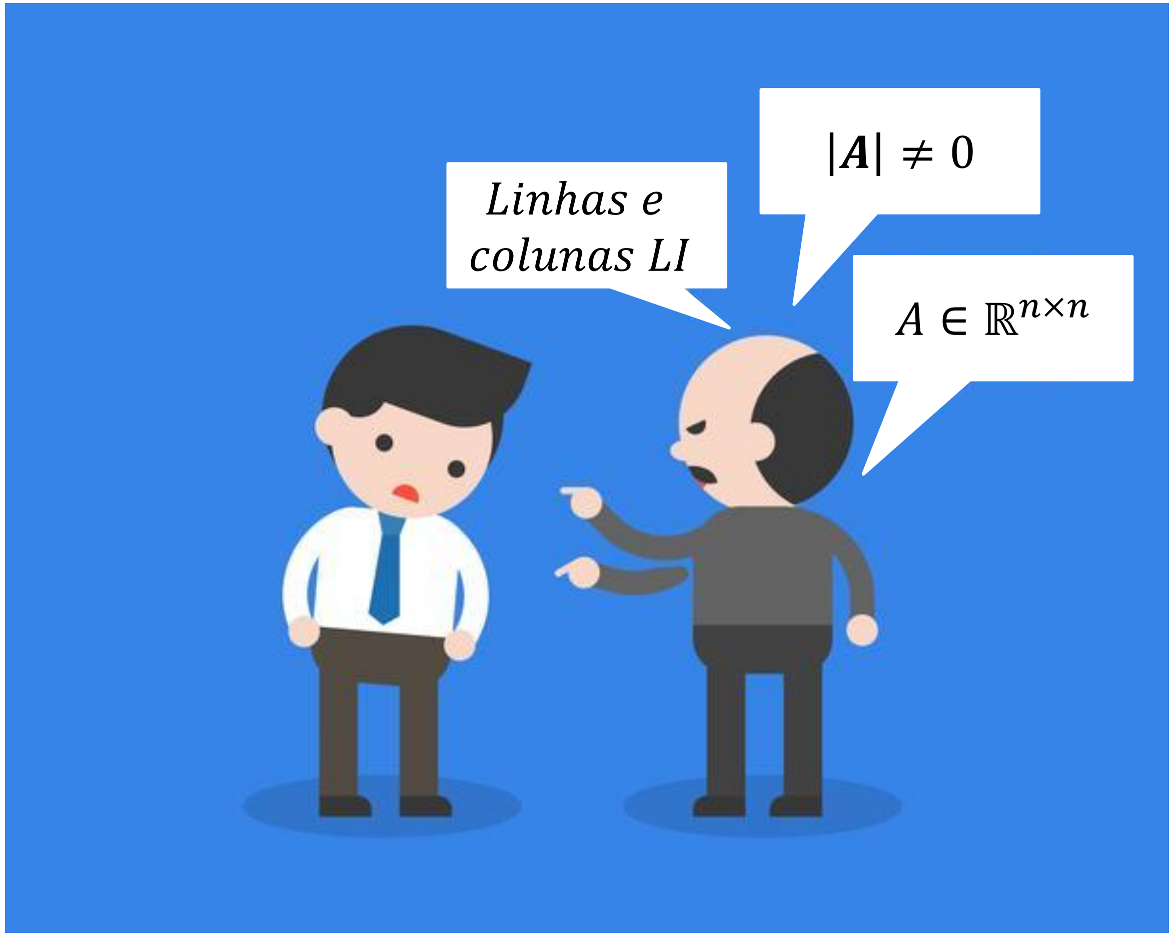
```
---------------------------------------------------------------------------
LinAlgError                               Traceback (most recent call last)
<ipython-input-6-9ab2ab7bf482> in <module>()
      5 
      6 # Inversa
----> 7 print(np.linalg.inv(A))

<__array_function__ internals> in inv(*args, **kwargs)

1 frames

/usr/local/lib/python3.7/dist-packages/numpy/linalg/linalg.py in _raise_linalgerror_singular(err, flag)
     86 
     87 def _raise_linalgerror_singular(err, flag):
---> 88     raise LinAlgError("Singular matrix")
     89 
     90 def _raise_linalgerror_nonposdef(err, flag):

LinAlgError: Singular matrix
```

SEARCH STACK OVERFLOW

PODE-SE INVERTER QUALQUER MATRIZ?

Não!

- A matriz deve ser quadrada!
- Matriz não deve ser singular. é singular quando tem linhas e/ou colunas linearmente dependentes.
- Por consequência, seu **determinante** não pode ser nulo.



DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

Determinante é um número associado a uma **matriz** quadrada, é como um "resumo numérico" das informações.

DETERMINANTE DE $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

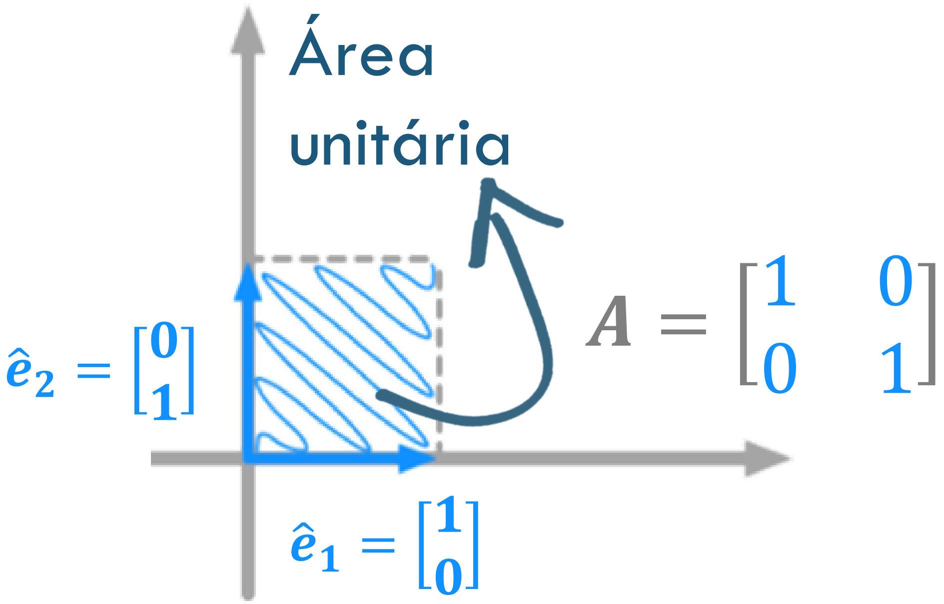
O determinante de uma matriz $\boldsymbol{A}$ quadrada, $|\boldsymbol{A}|$ ou $\det(\boldsymbol{A})$, é um número, ié, $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$.

Algebricamente, pode-se escrever uma fórmula explícita para o determinante de $\boldsymbol{A}$, mas infelizmente isso dá pouca intuição sobre seu significado.

Começaremos fornecendo uma interpretação geométrica do determinante e depois veremos algumas de suas propriedades algébricas específicas...

DETERMINANTE

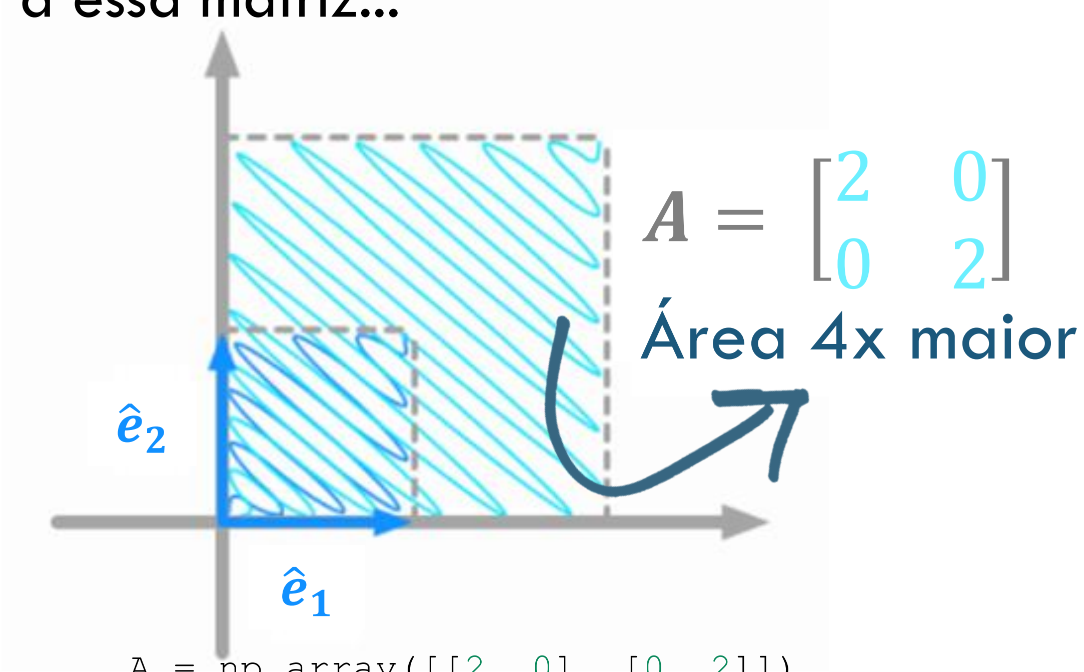
O determinante de uma matriz pode dizer muitas coisas sobre a transformação associada a essa matriz...




```
A = np.array([[1,0], [0,1]])
np.linalg.det(A)
1.0
```

$$A\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

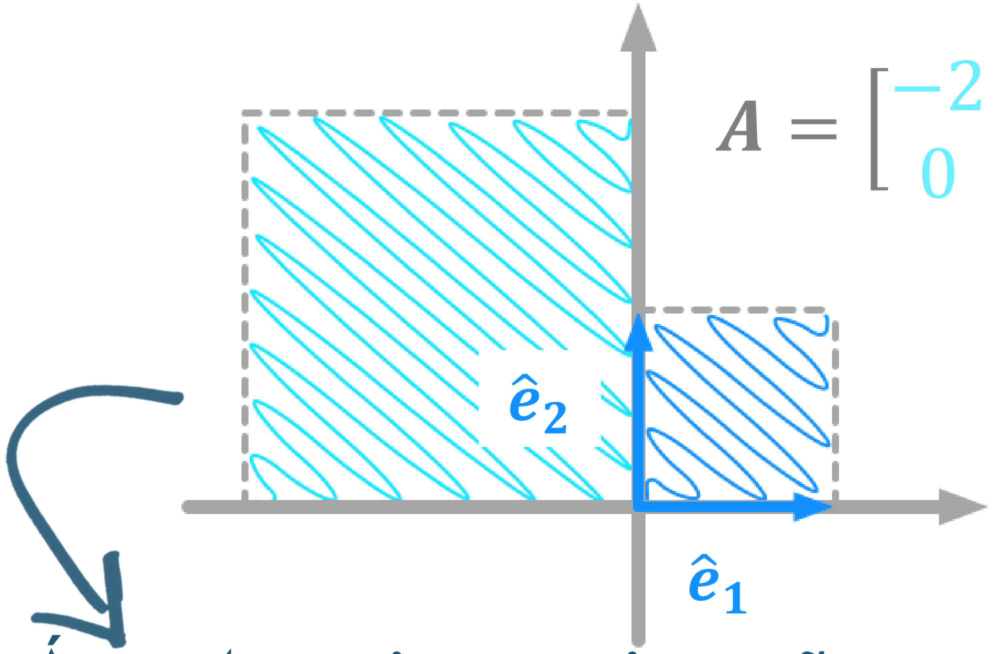



```
A = np.array([[2, 0], [0, 2]])
np.linalg.det(A)
4.0
```

$$A\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A\hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP



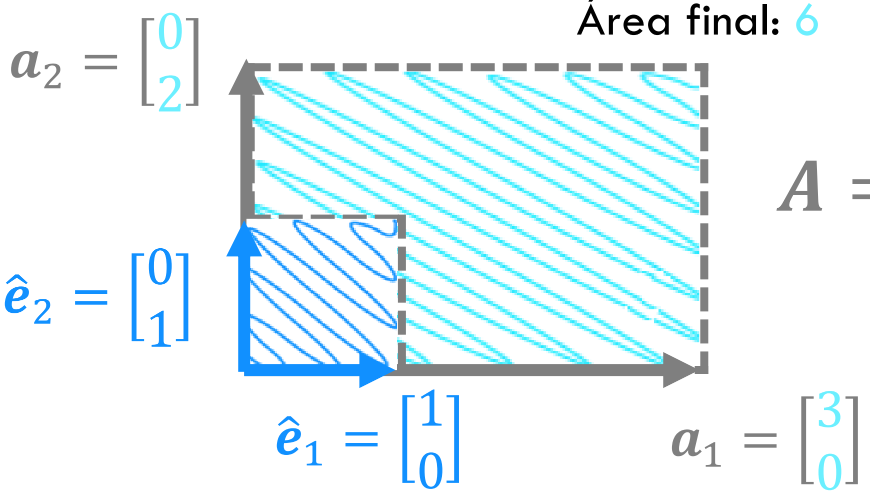
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Área 4x maior com inversão

```
A = np.array([[-2, 0], [0, 2]])
np.linalg.det(A)
```

```
-4.0
```

Área inicial: 1
Área final: 6



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Portanto, a transformação linear dos vetores escalonou a área por um fator de 6.

Esse fator de escala é chamado de determinante.

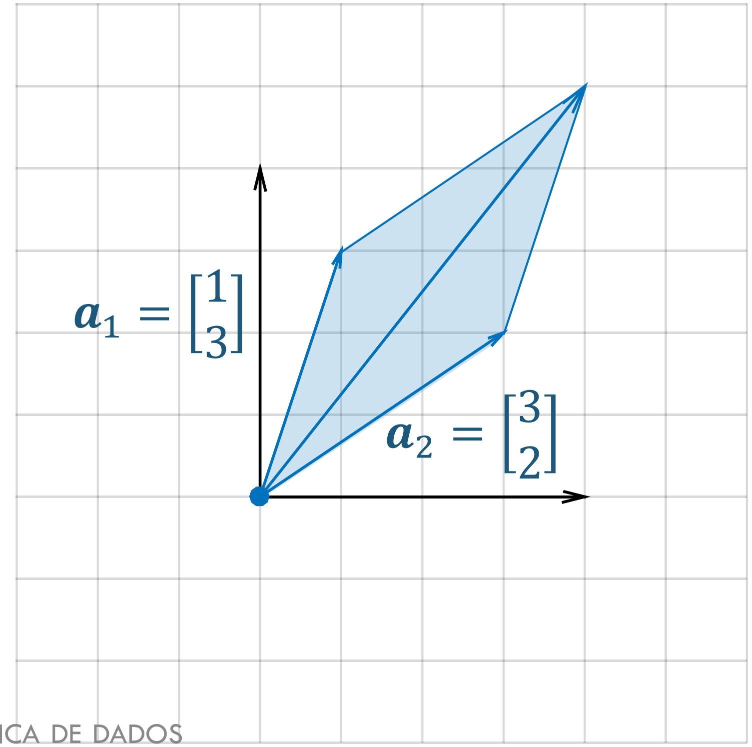
$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

Considere o conjunto de pontos $S \in \mathbb{R}^n$ formado tomando todas as combinações lineares possíveis dos vetores de linha $\boldsymbol{a}_1 \ldots \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ de A, onde os coeficientes da combinação linear estão todos entre 0 e 1.

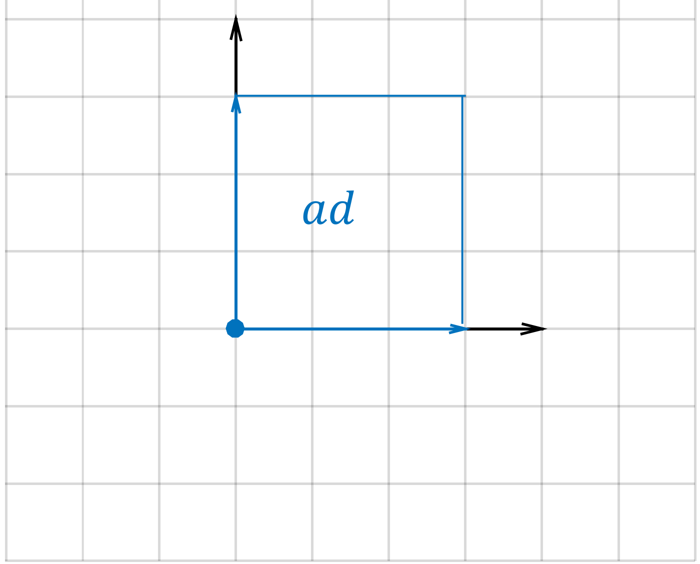
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

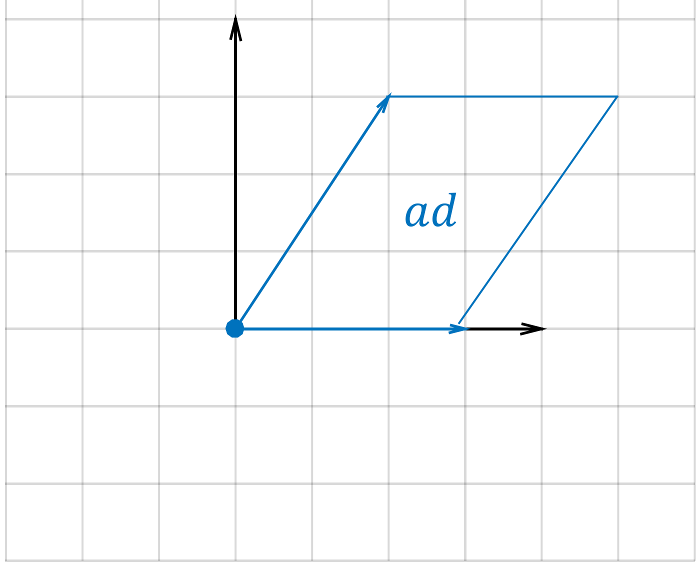


DETERMINANTE DE UMA MATRIZ

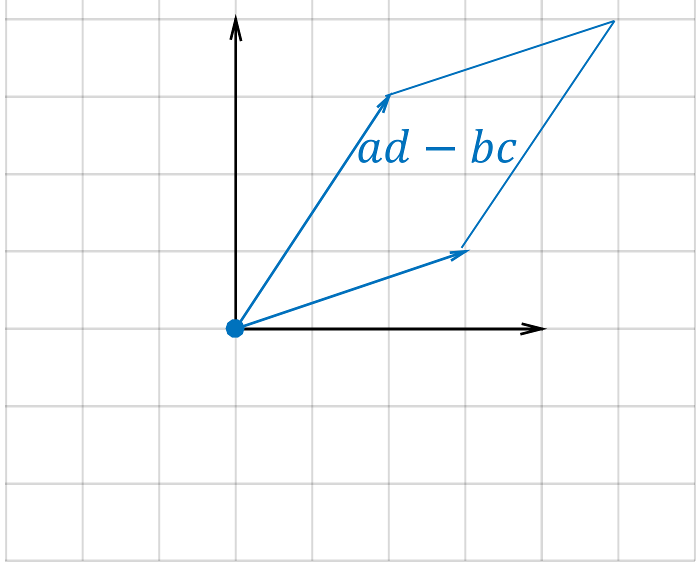
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad$$



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad$$

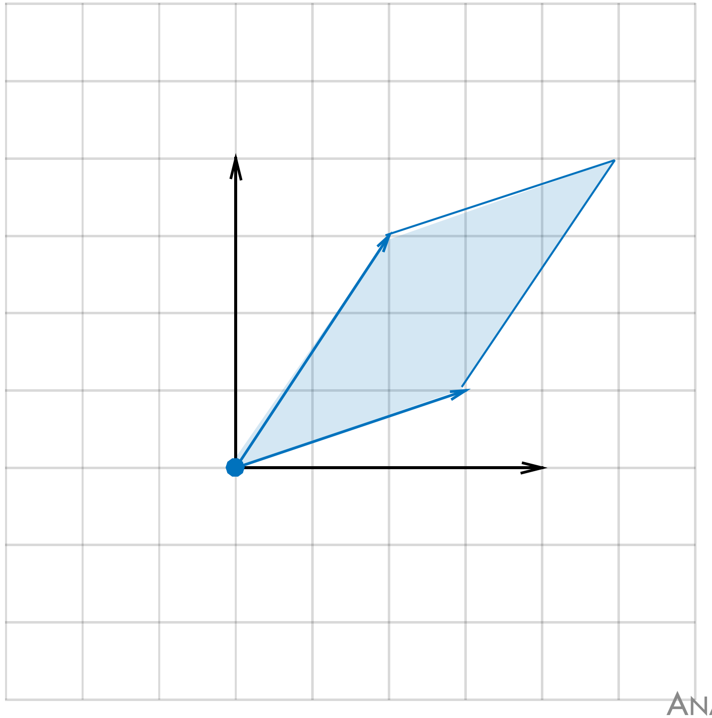


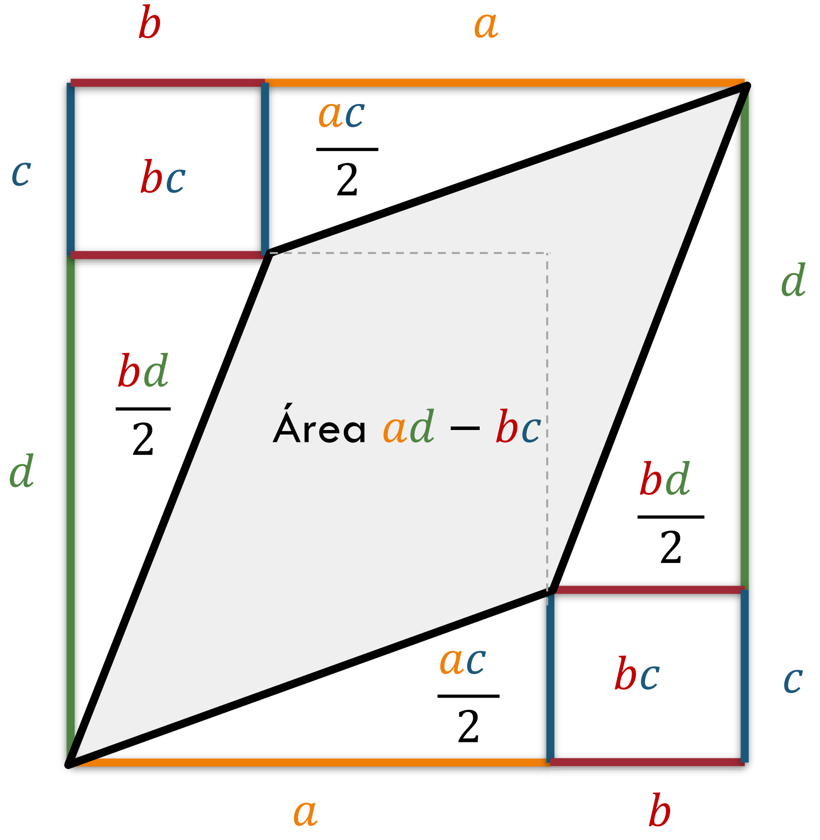
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det(\boldsymbol{A}) = ad - bc$$



GENERALIZANDO O CASO 2D

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$





$$(a + b)(c + d) - ac - bd - 2bc =$$
$$(ac + ad + bc + bd) - ac - bd - 2bc =$$
$$ad - bc$$

ARRISCAMOS EXPLICITAR O DETERMINANTE DE ALGUMAS MATRIZES...

$$
\begin{aligned}
\left|\left[a_{11}\right]\right| &= a_{11} \\
\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right| &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\
\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right| &= \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}
\end{aligned}
$$

IMPORTANTE PROPRIEDADE DO DETERMINANTE

O determinante é um *escalonamento* da inversa. Por exemplo, a inversa de uma matriz 2x2,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é dada por,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Portanto, uma matriz cujo determinante é nulo, não é formada somente de vetores LI. Em outras palavras, a matriz é singular.

VOLTANDO...

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 1 \end{array}$$

Não existe Solução!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A = np.array([[1,1,1],
              [1,-1,2],
              [2,0,3]])

# Inversa
print(np.linalg.det(A))
0.0
```

AUTOVALORES E AUTOVETORES

A palavra "eigen" é talvez mais útil se for traduzida do alemão como “característica”.

Então, quando falamos de um *eigenproblem (problema característico)*, estamos falando em encontrar as propriedades características de algo. Mas característica de quê?

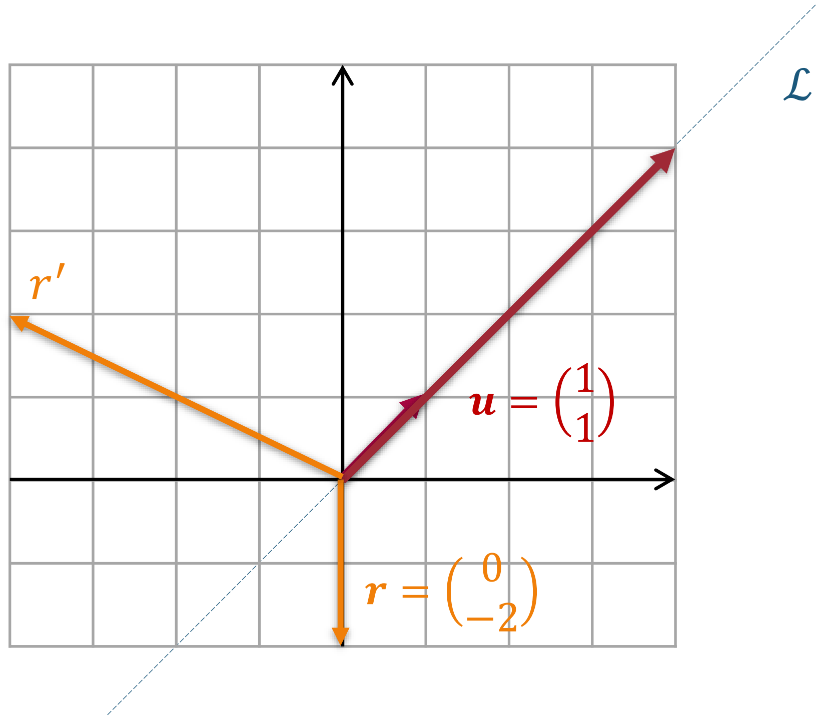
AUTOVALORES E AUTOVETORES

O que acontece se eu aplicar a transformação:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

em r?

$$r' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 2 \times (-2) \\ 5 \times 0 + (-1) \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$



O que acontece se eu aplicar a transformação:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

em u?

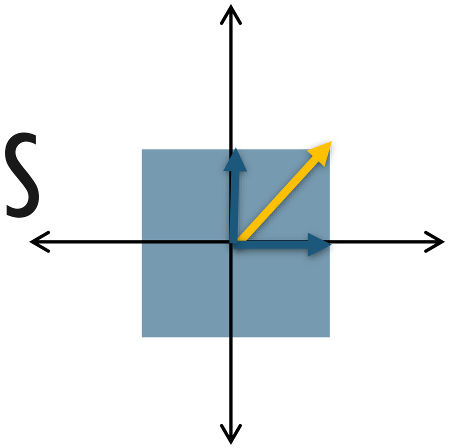
$$\boldsymbol{u}' = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 5 \times 1 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

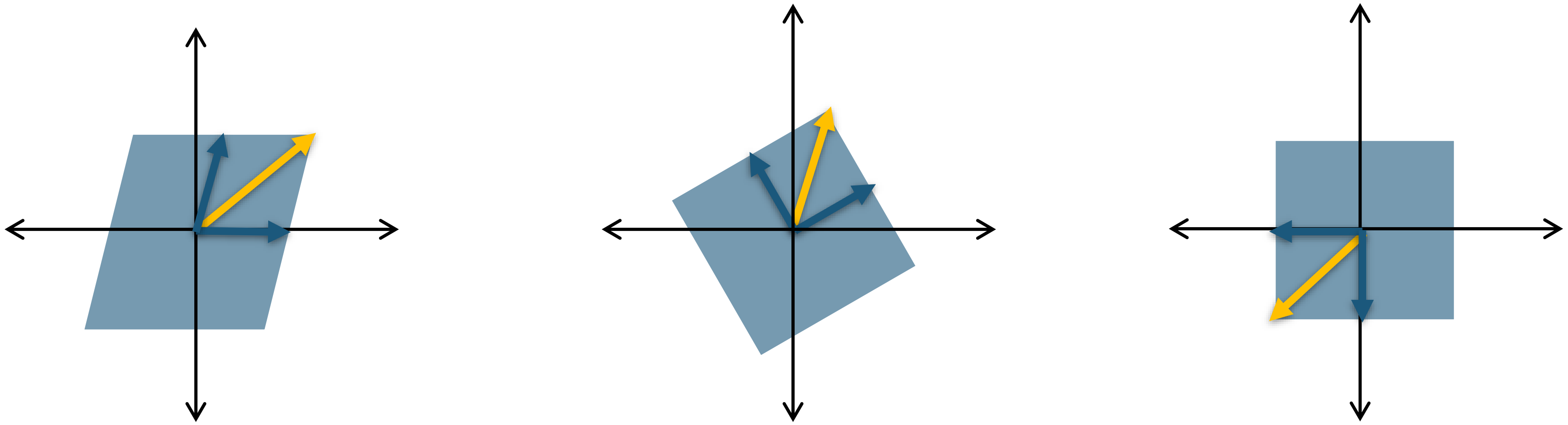
Vetor $\boldsymbol{u}$ foi escalonado de 4

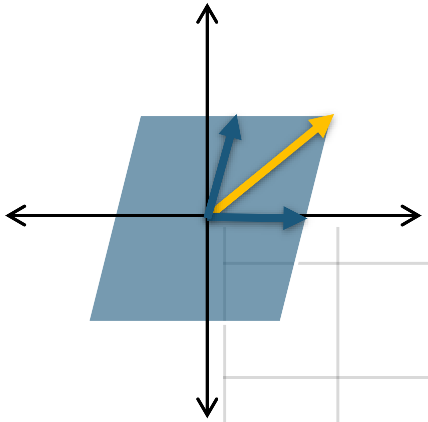
$\boldsymbol{u}$ é um autovetor de A

$\lambda = 4$ é um autovalor de A

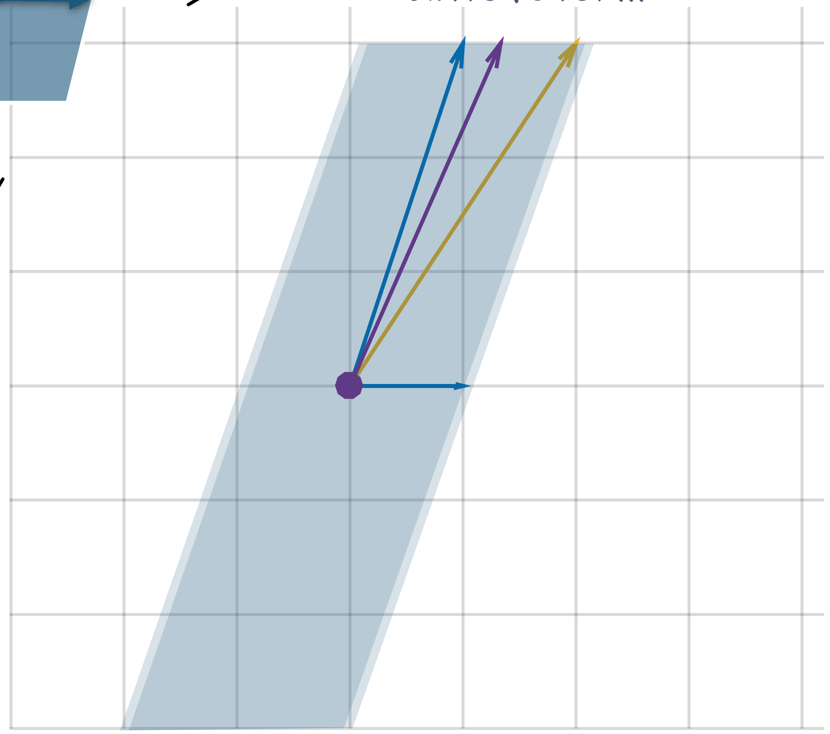
QUANTOS AUTOVETORES TEMOS EM CADA TRANSFORMADA?

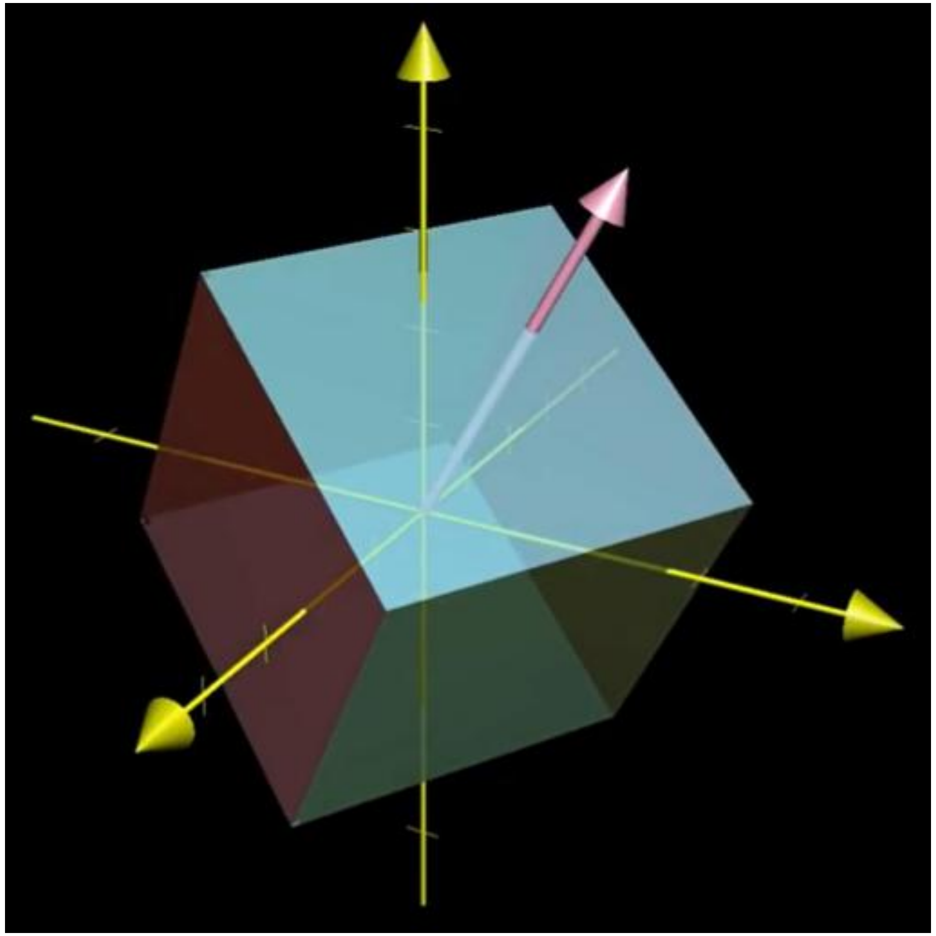


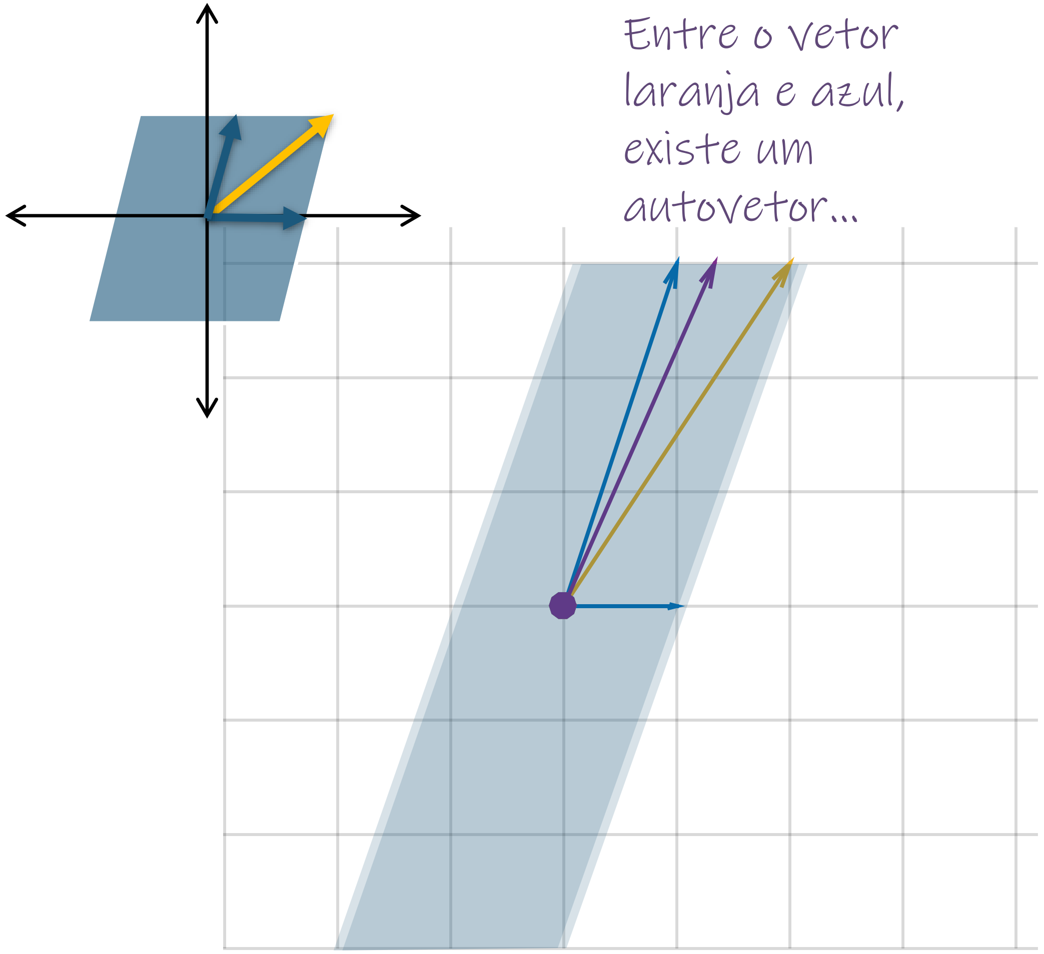




Entre o vetor laranja e azul, existe um autovetor...

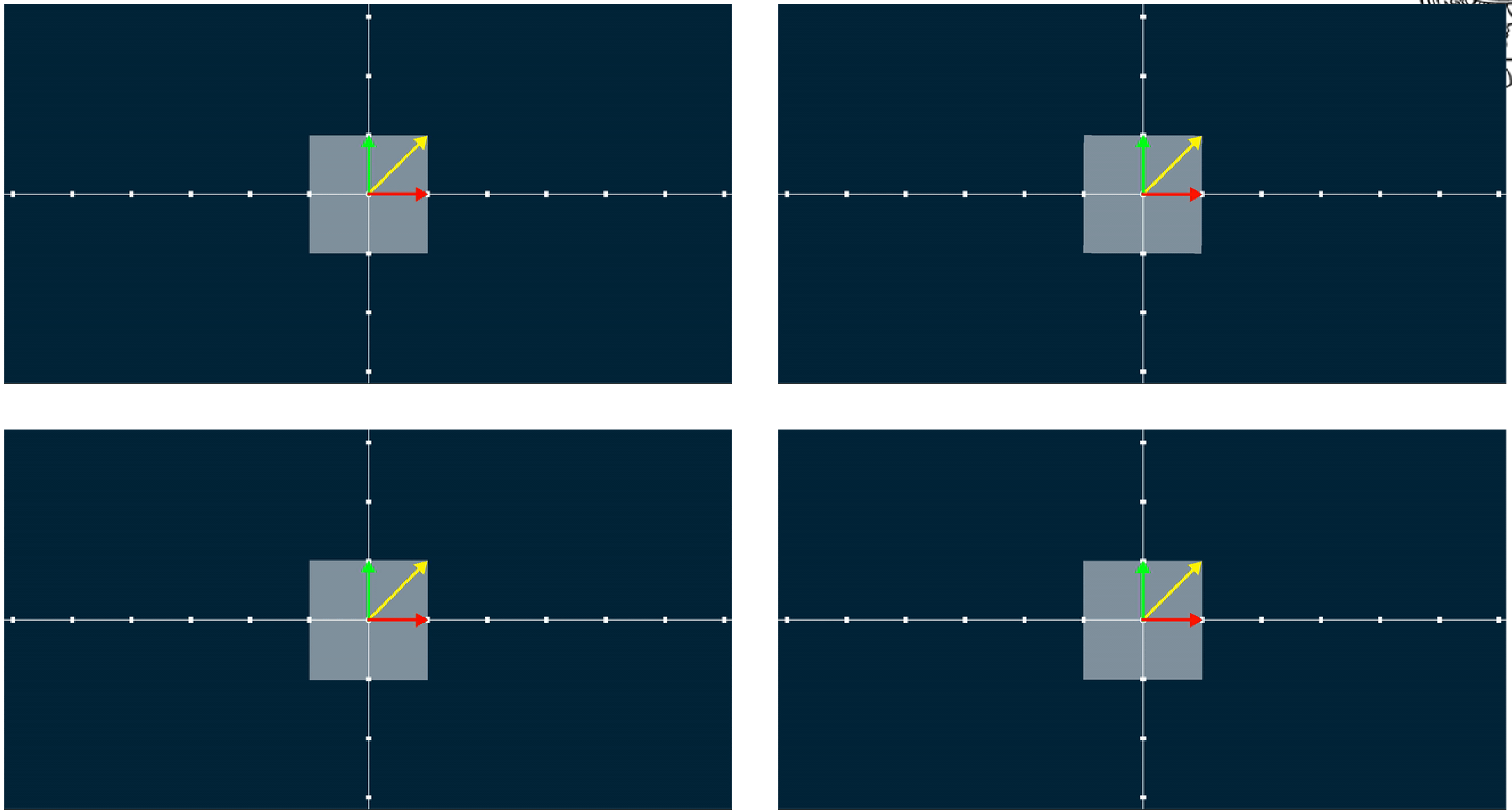






Entre o vetor laranja e azul, existe um autovetor...

Esse problema é ainda mais difícil em três ou mais dimensões, e muitos dos usos da teoria própria no aprendizado de máquina enquadram o sistema como sendo composto de centenas de dimensões ou mais. **Então, claramente, precisaremos de uma descrição matemática mais robusta desse conceito para podermos prosseguir.**



https://towardsdatascience.com/eigenvectors-and-eigenvalues-all-you-need-to-know-df92780c591f

QUAIS SÃO OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DE UMA TRANSFORMAÇÃO?

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 2 \times 1 \\ 5 \times 1 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{v} \neq 0$$

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = 0, \quad \boldsymbol{v} \neq 0$$

Como resolver??? Como achar λ e $\boldsymbol{u}$?

VEJAM BEM...

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{u} = 0$$

Se $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ *tem uma inversa, então, a solução do problema*

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{-1}0 \rightarrow \boldsymbol{u} = 0$$

E essa é chamada de solução trivial. Para obter uma solução diferente da trivial, a matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ não pode ter inversa. E, acabamos de verificar que matrizes singulares tem determinante nulo. Portanto, resolvemos nosso sistema impondo o determinante nulo de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$,

$$|(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})| = 0$$

EXEMPLO DE $\boldsymbol{A}$ $2x2$

$$|(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})| = 0$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \det \mathbf{A} = 0}$$

Polinômio característico

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Dado um operador linear $\boldsymbol{A}$ com dimensões $n \times n$, existe um conjunto de n vetores $\boldsymbol{v}_i$, cada um com a dimensão n, de modo que a multiplicação de qualquer um desses vetores por $\boldsymbol{A}$ resulta em um vetor paralelo a $\boldsymbol{v}_i$, com um comprimento multiplicado por uma constante λ_i,

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_\mathbf{i} = \lambda_\mathbf{i}\mathbf{v}_\mathbf{i}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Autovalores: através da equação característica

$$(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\,\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Autovetores: Substitui-se cada autovalor na equação básica e resolve-se um sistema linear.

EXEMPLO

Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\,\boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = -12, tr\ \boldsymbol{A} = 1$$

$$\lambda^2 - 1\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -3$$

autovalores

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u_{1,1} + 2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1}$$
$$5u_{1,1} - 5u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1} = t$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

autovetores $\boldsymbol{u}_i$

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 2 \\ 5 & -1-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix}$$

$$5u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0 \rightarrow u_{2,2} = t, \qquad u_{1,2} = -2t/5$$

EXEMPLO

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\ \boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = -12, tr\ \boldsymbol{A} = 1$$

$$\lambda^2 - 1\lambda - 12 = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$
$$\lambda_2 = -3$$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u_{1,1} + 2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1}$$
$$5u_{1,1} - 5u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{1,1} = u_{2,1} = t$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + t^2 = 1$$
$$2t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}707 \\ 0{,}707 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-(-3) & 2 \\ 5 & -1-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0 \rightarrow u_{2,2} = t, \qquad u_{1,2} = -2t/5$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = t^2 + \left(-\frac{2t}{5}\right)^2 = 1$$
$$\frac{29}{25}t^2 = 1 \rightarrow t = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -0.371 \\ 0.928 \end{pmatrix}$$

LEMBRAM-SE DA DEFINIÇÃO?

$$\boldsymbol{Av} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{v}_1$$

$$\boldsymbol{Av} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2t/5 \\ t \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} -\frac{2t}{5} \\ t \end{pmatrix} = -3\boldsymbol{v}_2$$

EXEMPLO

$$\lambda^2 - \mathrm{TR}(\boldsymbol{A})\,\lambda + \mathrm{DET}\ \boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = 2, tr\ \boldsymbol{A} = 3$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$

autovalores

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{1,1} = t, \quad -u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{2,1} = 0$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + 0^2 = 1$$
$$t = \pm 1$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

autovetores $\boldsymbol{v}_i$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{1,2} = 0, u_{2,2} = t$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = 0^2 + t^2 = 1$$
$$t = \pm 1$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

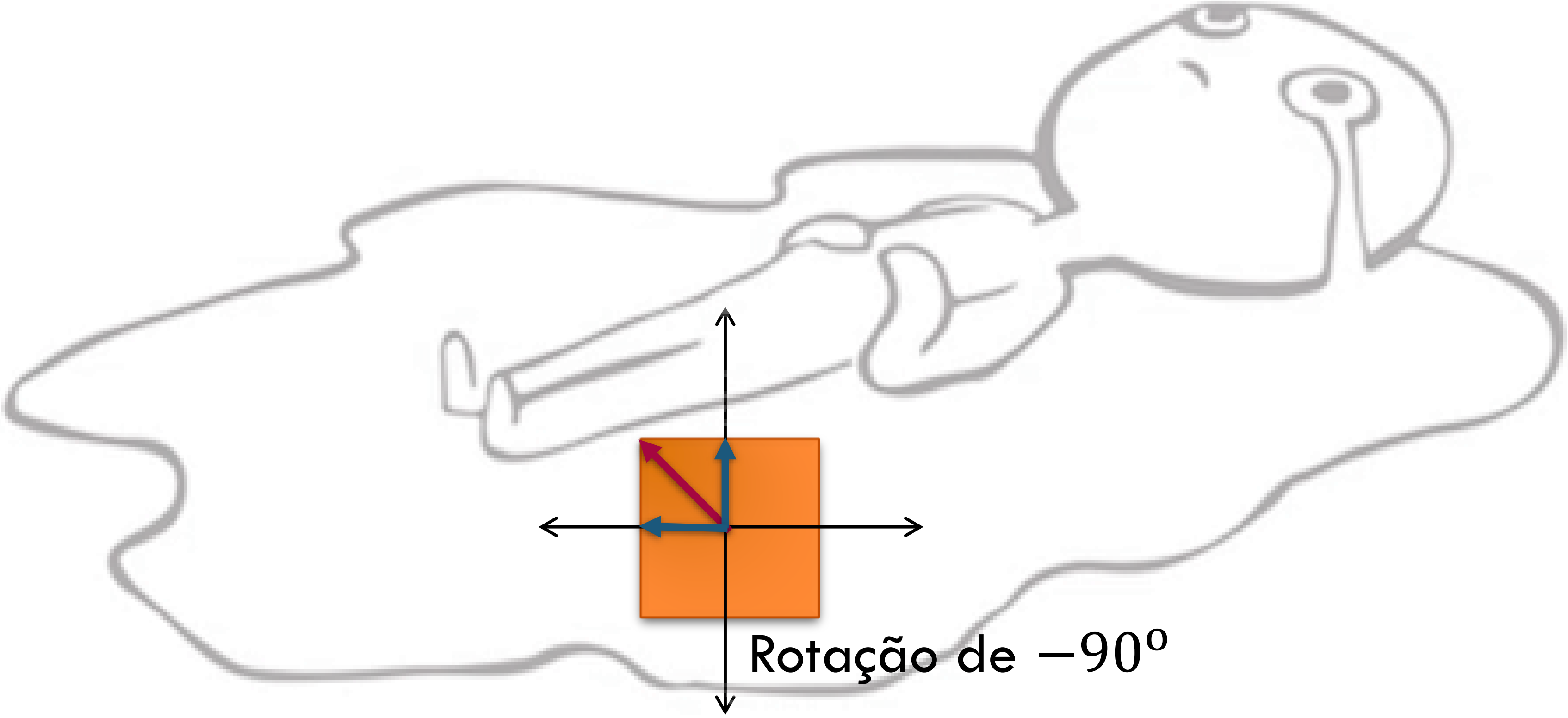
EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = 1, tr\ \boldsymbol{A} = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$\boxed{\nexists \lambda \in \mathbb{R}}$ autovalores



VAMOS TREINAR...

Para matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Qual o *polinômio característico* e sua solução?

EXEMPLO DO NOTEBOOK

Ache os autovalores e autovetores da matriz abaixo,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 7 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

SAIBA QUE...

O traço de um $\boldsymbol{A}$ é igual à soma de seus autovalores,

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

O determinante de $\boldsymbol{A}$ é igual ao produto de seus autovalores,

$$\det \boldsymbol{A} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

O rank de $\boldsymbol{A}$ é igual ao número de autovalores diferentes de zero de $\boldsymbol{A}$.

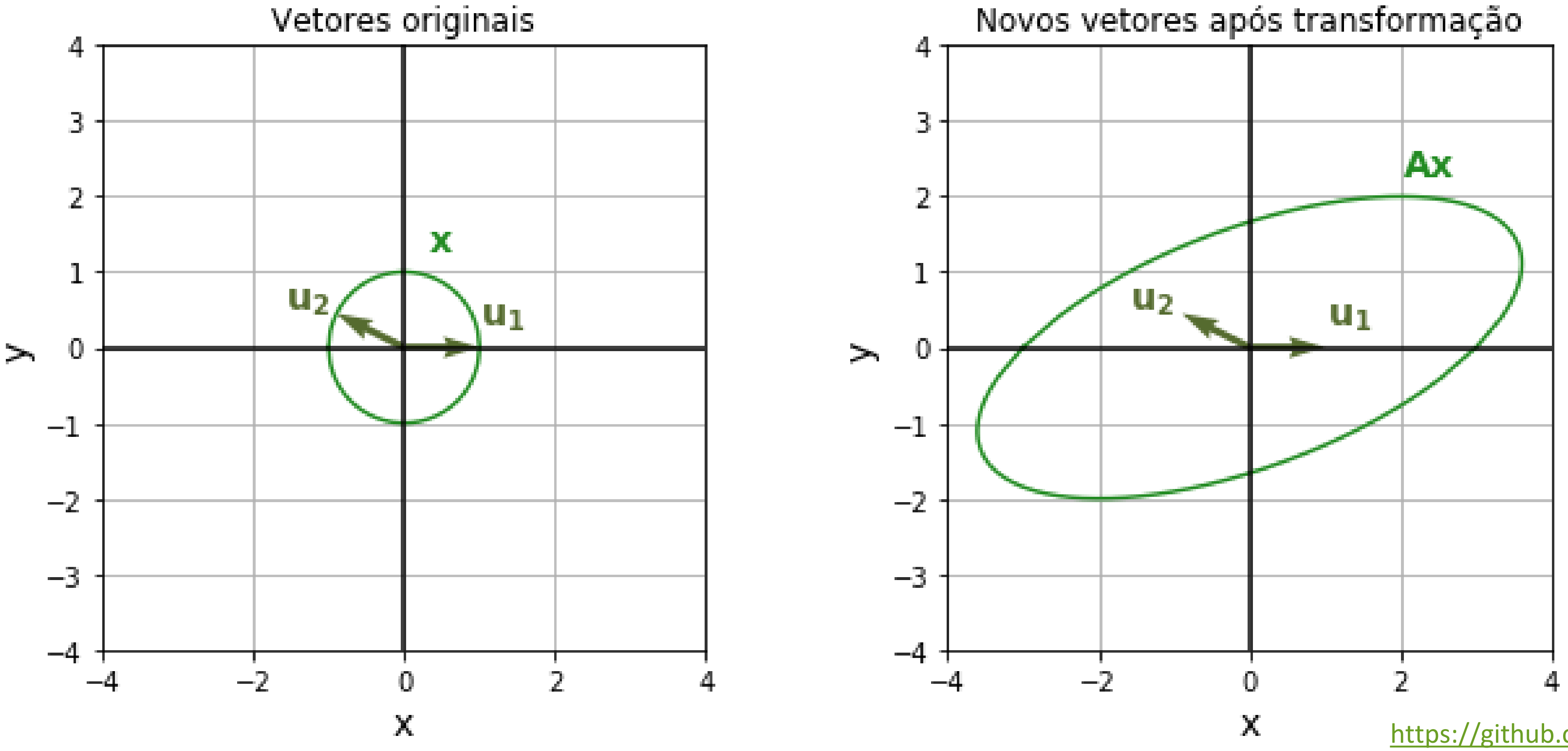
Os autovalores de uma matriz diagonal $\boldsymbol{D} = diag\,(d_1, d_2, \dots, d_n)$ são as entradas diagonais $d_1, d_2, \dots, d_n$.

AUTOVALORES E MATRIZES SIMÉTRICAS

Duas propriedades importantes surgem quando olhamos para os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica $\boldsymbol{A}_{n\times n}$,

- todos n os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são reais;
- os n autovetores de $\boldsymbol{A}$ são ortonormais, ou seja, a matriz composta dos autovetores é uma matriz ortogonal.

AUTOVETORES



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$$

https://github.com/reza-bagheri/SVD_article

Os vetores $\boldsymbol{u}_i$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}$; os escalares λ_i são chamados autovalores.

SOLUÇÃO

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det \boldsymbol{A} = 6, tr\ \boldsymbol{A} = 5$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = 2$

autovalores

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 2 \\ 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$2u_{2,1} = 0 \rightarrow u_{2,1} = 0, \quad u_{1,1} = t$

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\boldsymbol{u}_1\| = t^2 + 0^2 = 1$

$t = \pm 1$

$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 2 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,2} \\ u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_{1,2} + 2u_{2,2} = 0, u_{2,2} = t$
$u_{1,2} = -2u_{2,2} = -2t$

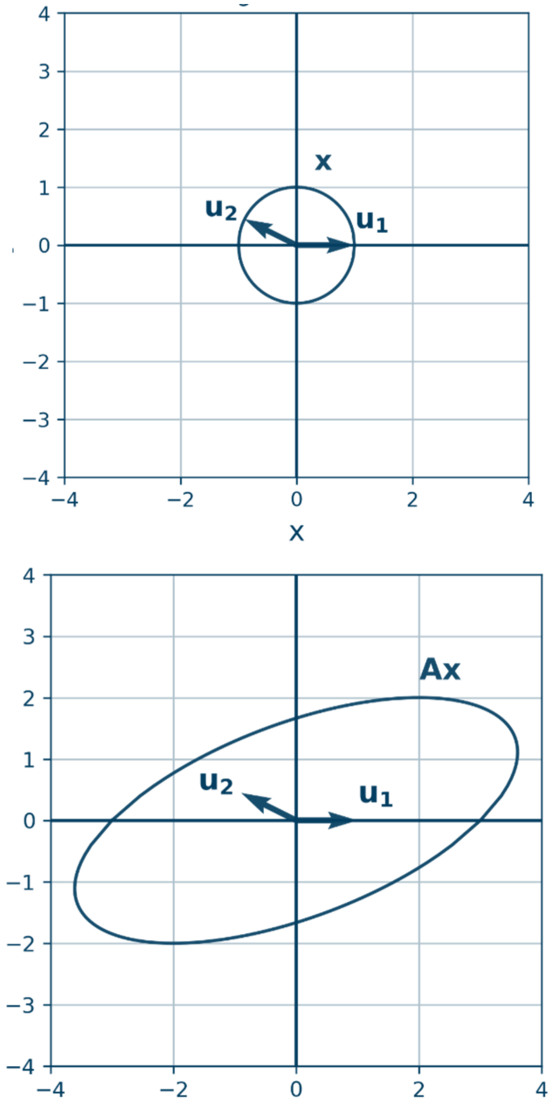
$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$

$\|\boldsymbol{u}_2\| = (-2t)^2 + t^2 = 1$

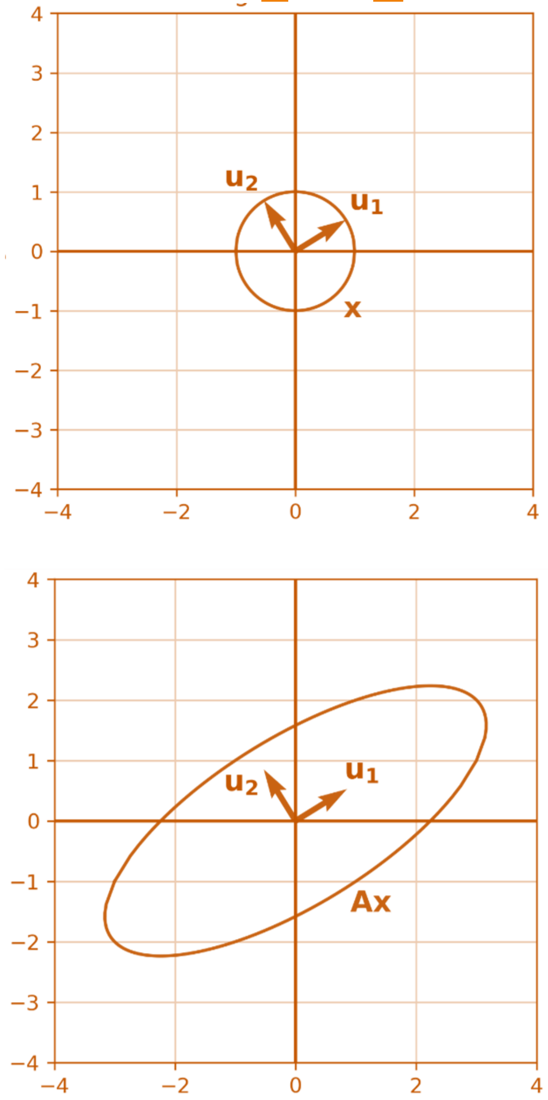
$5t^2 = 1 \rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{pmatrix}$

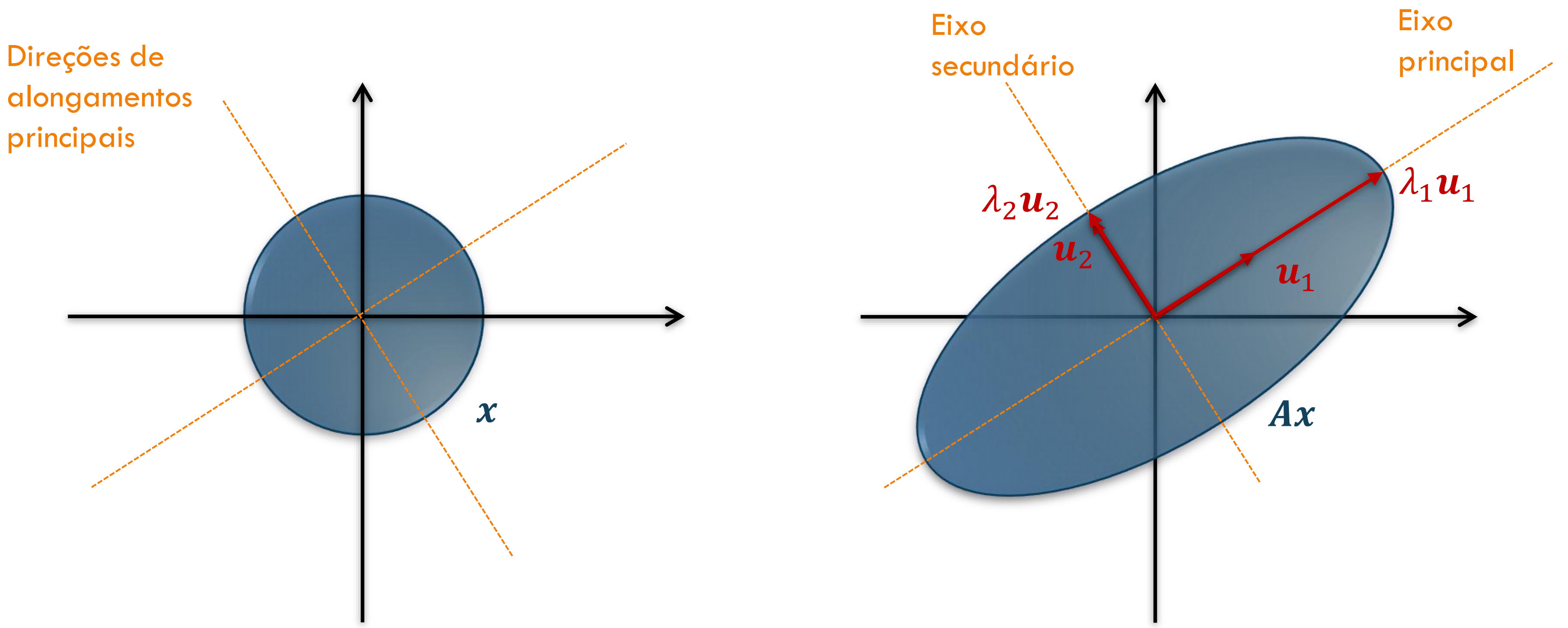
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



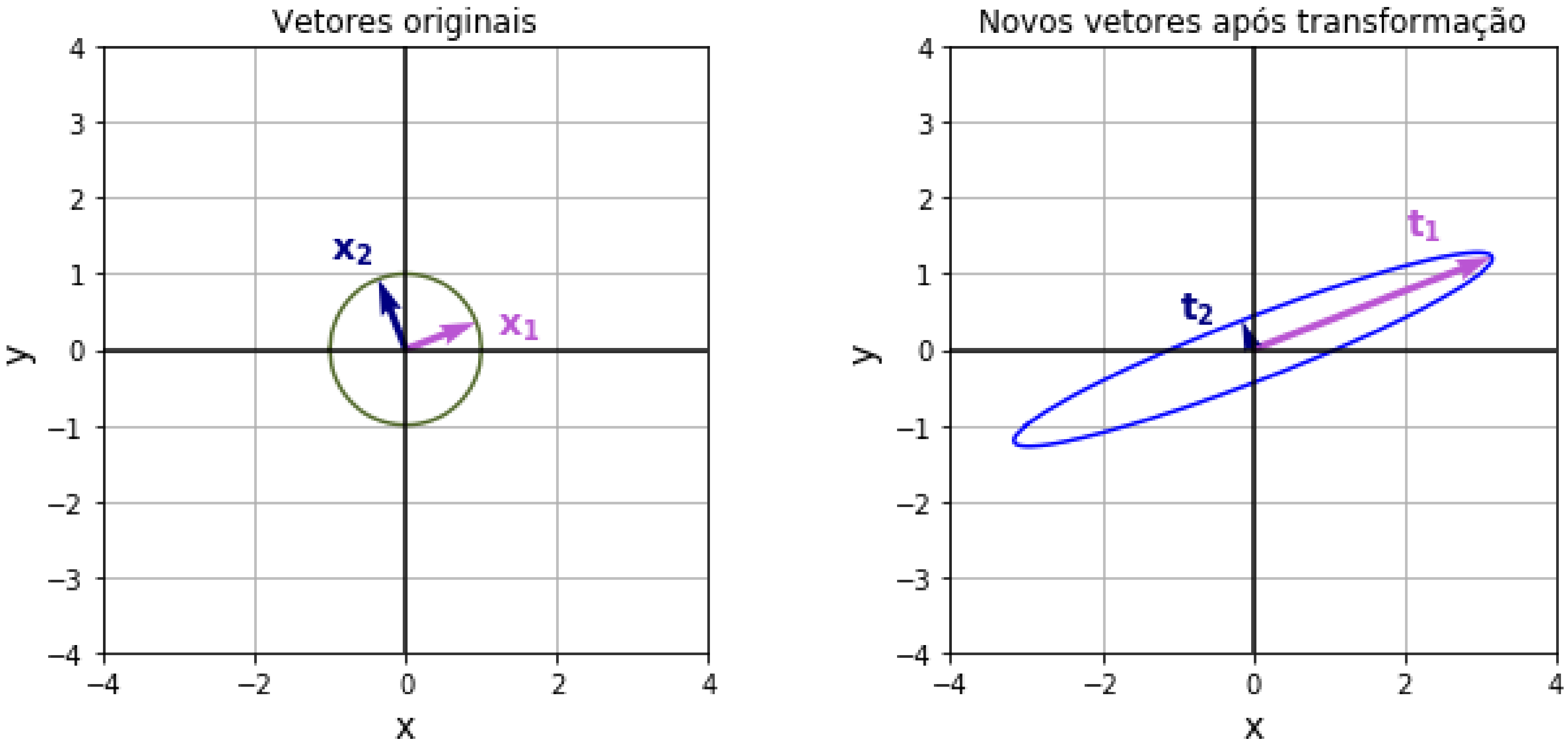
INTUIÇÃO GEOMÉTRICA PARA MATRIZ 2X2 SIMÉTRICA QUADRADA



```python
A = np.array([[3, 1],
              [1, 0.8]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=", np.round(lam, 4))
print("autovetores=", np.round(u, 4))
```

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$

```
autovalores= [3.3866 0.4134]
autovetores= [[ 0.9327 -0.3606]
 [ 0.3606  0.9327]]
```



Mas... Tudo isso é assunto para nossa próxima aula...

SVD

Decomposição de valor singular

ACABOU...

Revejam o material disponibilizado em aula.
Refaçam exercícios.
Até a próxima semana!!!