Análise Estatística de dados

Inteligência Artificial

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

USP

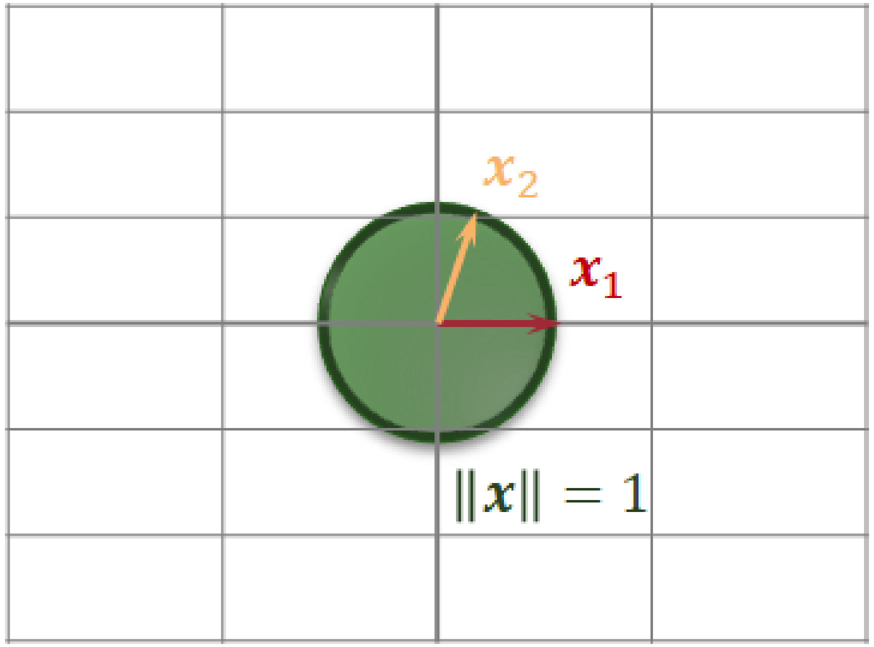
AULA 04 — DECOMPOSIÇÃO DE VALOR SINGULAR

Larissa Driemeier

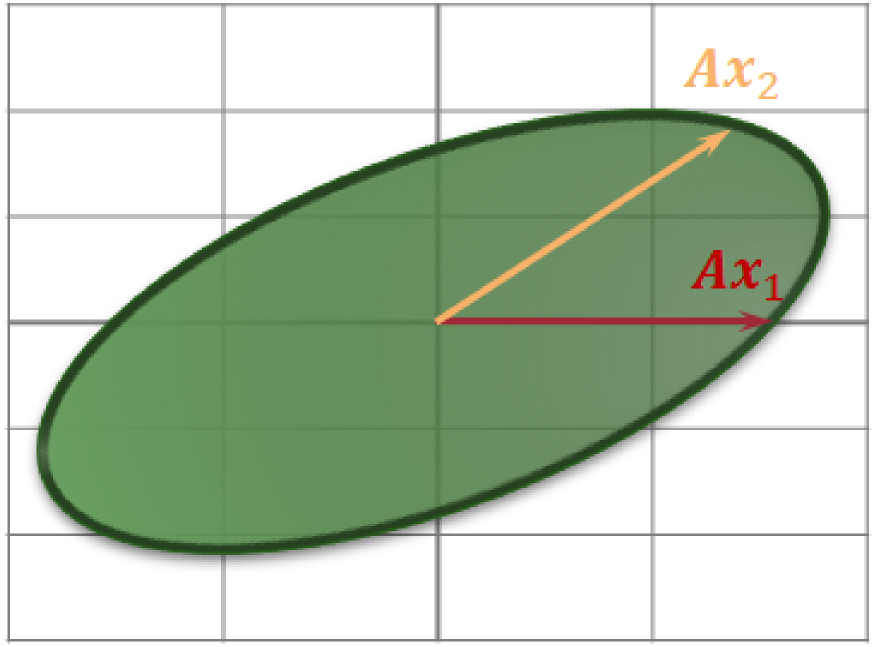
PROGRAMA DO CURSO

Aula	Data	Conteúdo da Aula
01	18/02	Aula Inaugural
02	25/02	Introdução ao Curso. Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte I
03	11/03	Noções de Álgebra Linear , Geometria Analítica Parte II
04	18/03	Decomposição de valor singular (SVD)
05	25/03	Otimização: derivadas, derivadas parciais (operadores gradiente, Jacobiano, Hessiano e Laplaciano), algoritmos de gradiente, noções de algoritmos genéticos
06	01/04	Variáveis independentes e não independentes. Estatística Descritiva e Indutiva. Definições de medidas de dispersão e tendência central.
07	08/04	Probabilidade e Teorema de Bayes
08	15/04	Modelos de probabilidade discretos/contínuos
09	22/04	Intervalo de confiança e teste de hipóteses
10	29/04	Modelo de Markov. Modelo de Markov oculto.

TRANSFORMAÇÃO



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



Suponha que a transformação $T(x) = Ax$ seja aplicada a um círculo de raio unitário centrado na origem.

AUTOVETORES E AUTOVALORES

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{A} = 6, tr\ \boldsymbol{A} = 5$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

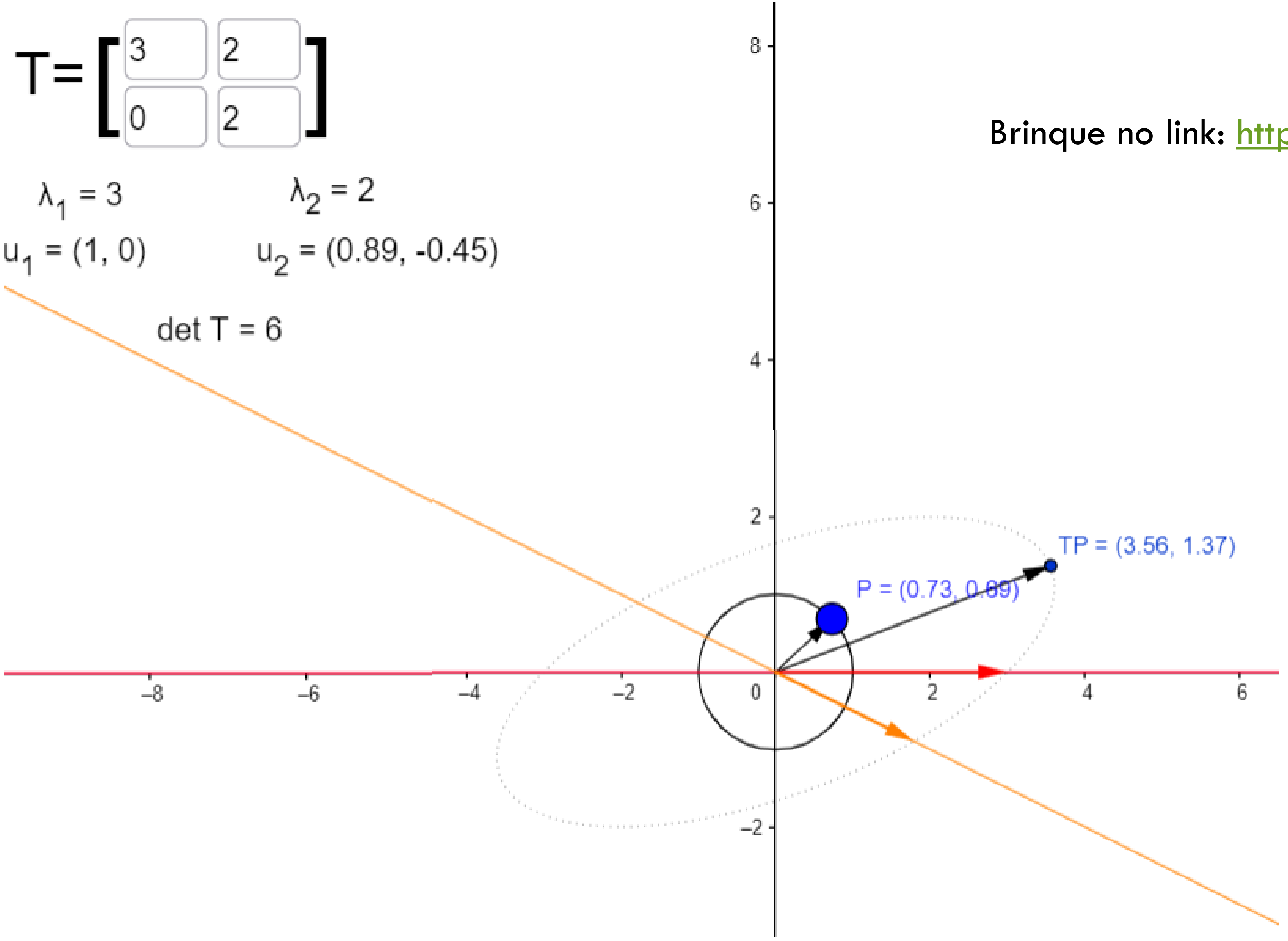
AUTOVALORES

$$\lambda_1 = 3$$
$$\lambda_2 = 2$$

AUTOVETORES

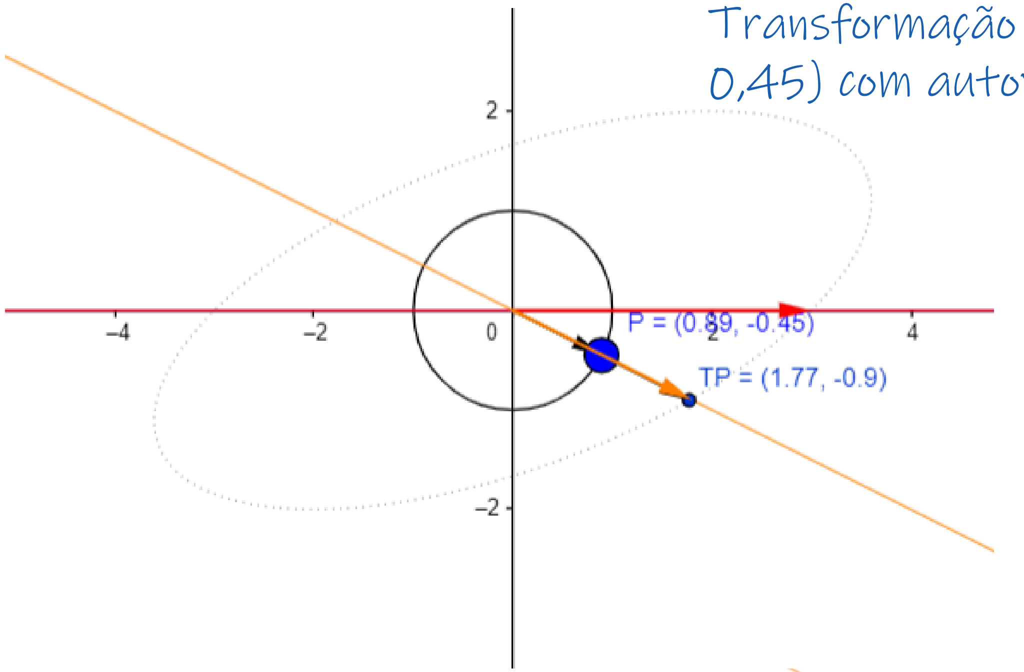
$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{pmatrix}$$

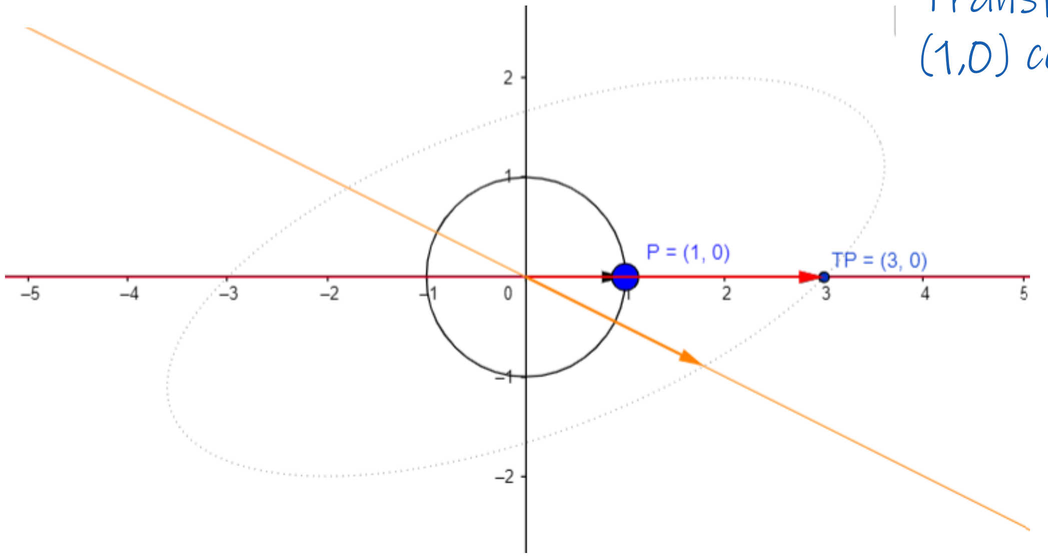


Brinque no link: https://www.geogebra.org/classic/mdvN0HTt

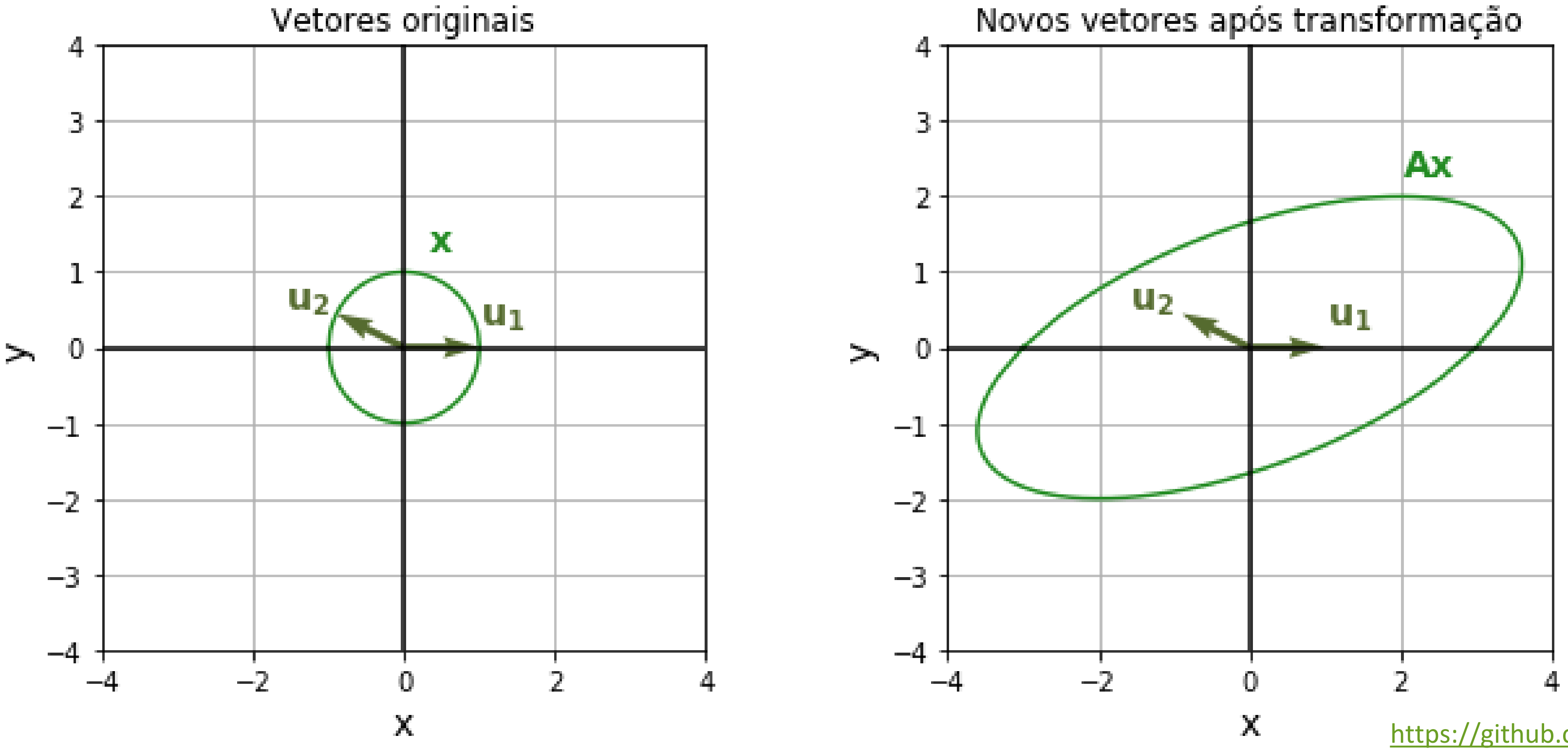
Transformação do autovetor (0,89;-0,45) com autovalor 2.



Transformação do autovetor (1,0) com autovalor 3.



AUTOVETORES



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2$$

https://github.com/reza-bagheri/SVD_article

Os vetores $\boldsymbol{u}_i$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}$; os escalares λ_i são chamados autovalores.

EM PYTHON $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

```
A = np.array([[3,2],[0,2]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
```

```
autovalores=
 [3. 2.]
autovetores=
 [[ 1.      -0.8944]
 [ 0.      0.4472]]
```

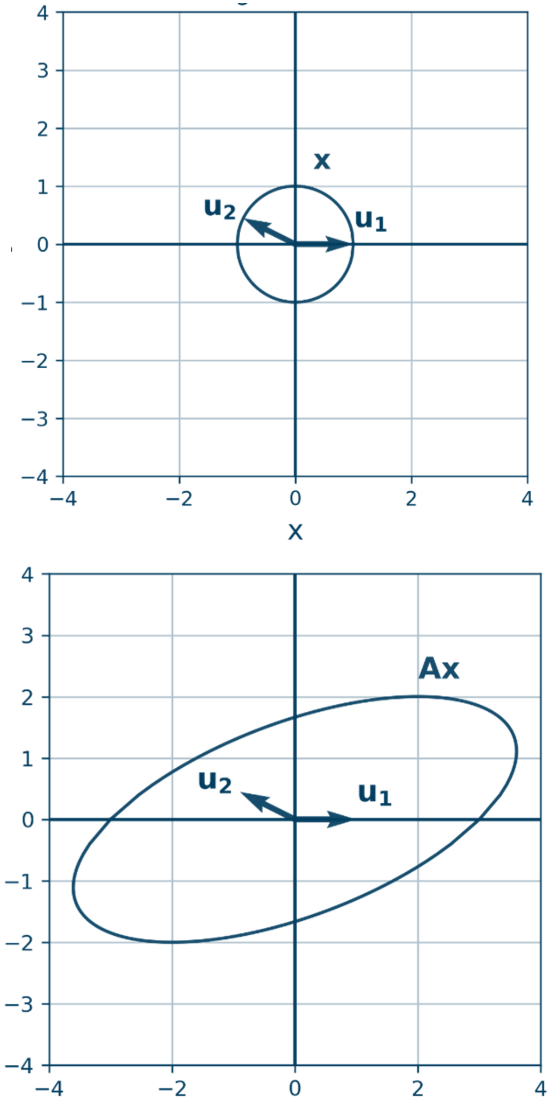
EM PYTHON

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

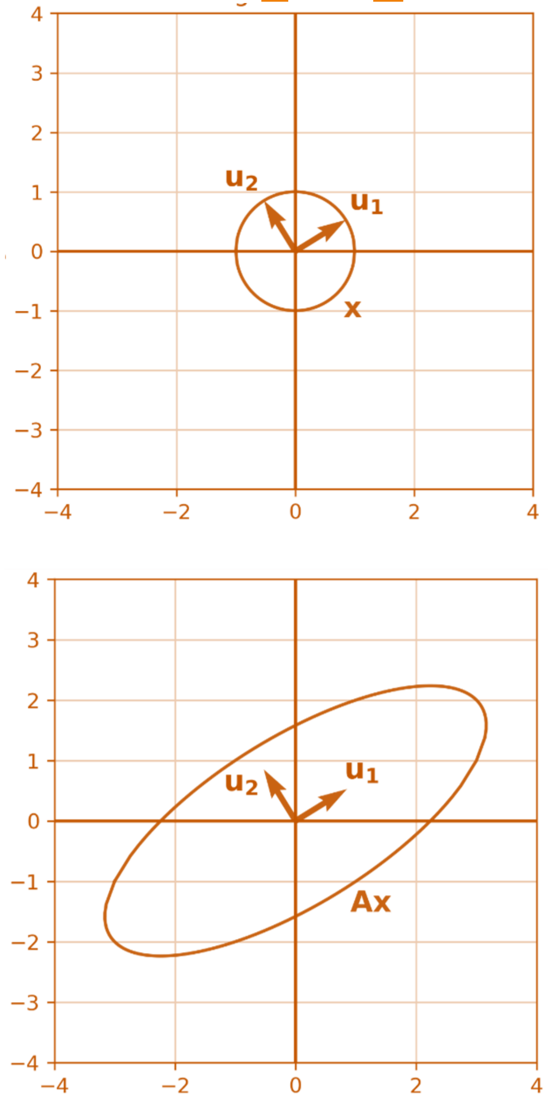
```python
A = np.array([[3,1],[1,2]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
```

```
autovalores=
 [3.618 1.382]
autovetores=
 [[ 0.8507 -0.5257]
 [ 0.5257  0.8507]]
```

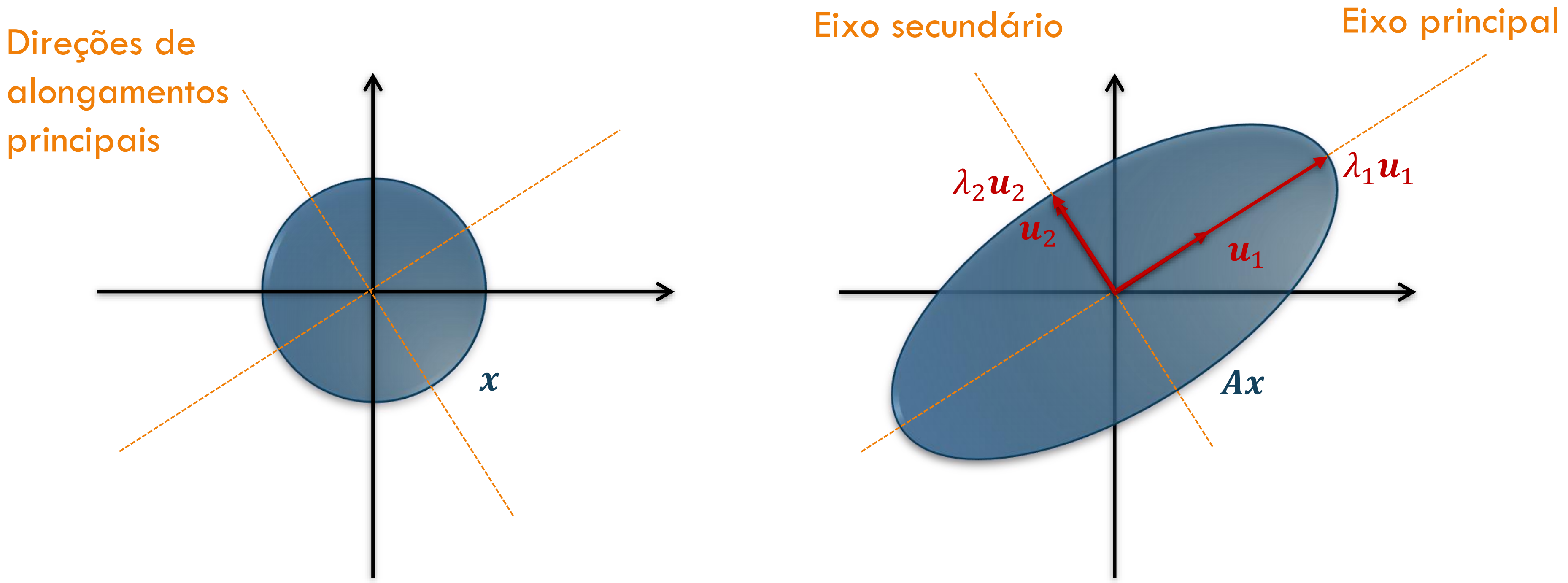
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



INTUIÇÃO GEOMÉTRICA PARA MATRIZ 2X2 SIMÉTRICA QUADRADA



PROBLEMA DE AUTOVALORES E MATRIZES SIMÉTRICAS

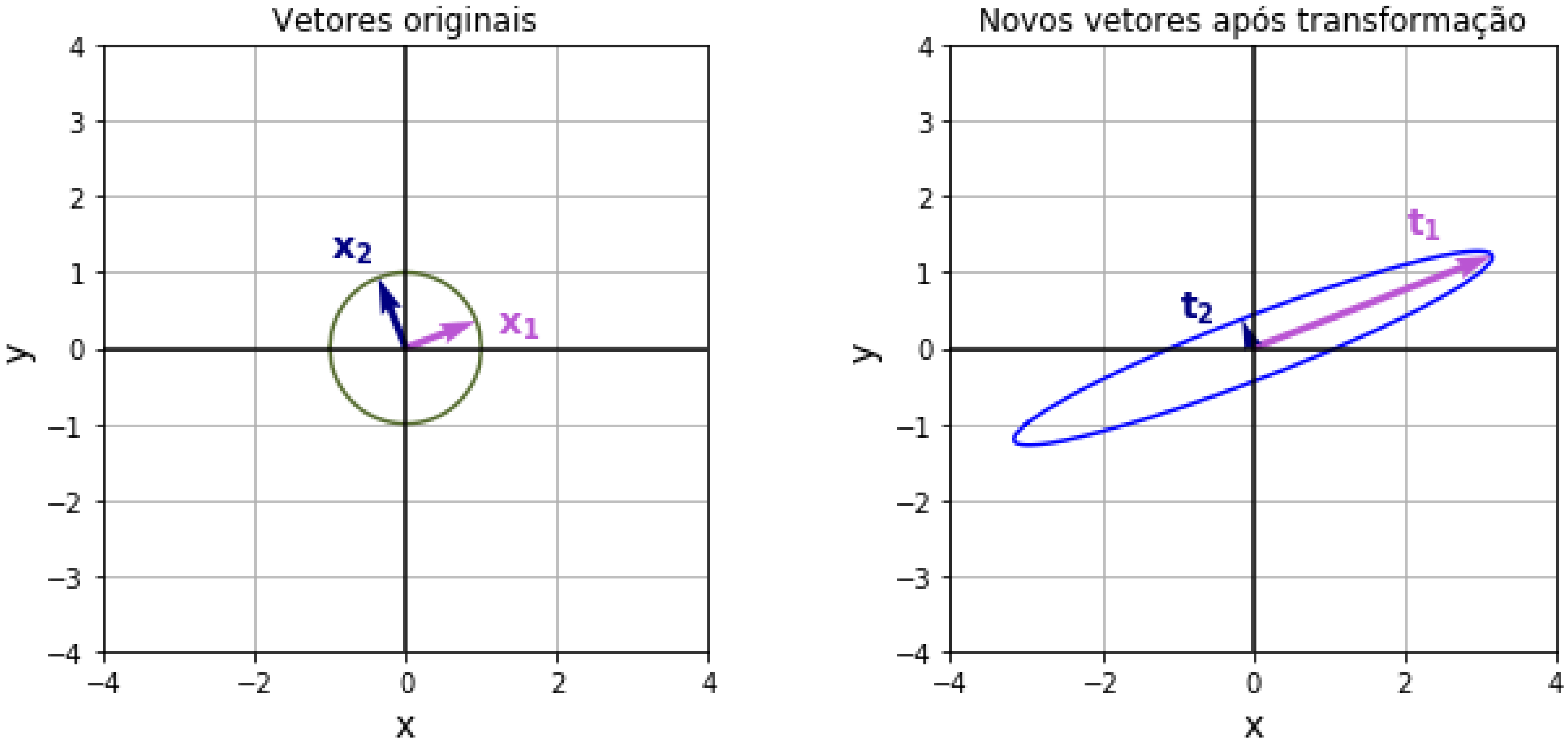
Duas propriedades importantes surgem quando olhamos para os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica $\boldsymbol{A}_{n \times n}$,

- todos n os autovalores de $\boldsymbol{A}$ são reais;
- os n autovetores de $\boldsymbol{A}$ são ortonormais, ou seja, a matriz composta dos autovetores é uma matriz ortogonal.

```python
A = np.array([[3, 1],
              [1, 0.8]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
```

```
autovalores=
[3.3866 0.4134]
autovetores=
[[ 0.9327 -0.3606]
[ 0.3606 0.9327]]
```

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0{,}8 \end{bmatrix}$$



DECOMPOSIÇÃO EM AUTOVALORES

Toda matriz **simétrica quadrada** pode ser decomposta em,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ - & \boldsymbol{u}_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \boldsymbol{u}_n^T & - \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

onde $\boldsymbol{u}_i$ são n LI autovetores de $\boldsymbol{A}$ e λ_i são os autovalores de $\boldsymbol{A}$

POR EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \boldsymbol{A} = -16, tr\ \boldsymbol{A} = 6$

$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0$

```
A = np.array([[7,3],[3,-1]])
# Cálculo de autovalores e autovetores
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
```

```
autovalores=
[ 8. -2.]
autovetores=
[[ 0.9487 -0.3162]
[ 0.3162 0.9487]]
```

$\lambda_1 = 8$ $\qquad u_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9487 \\ 0{,}3162 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -2$ $\qquad u_2 = \begin{pmatrix} -0{,}3162 \\ 0{,}9487 \end{pmatrix}$

POR EXEMPLO...

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_1 = 8 \quad \rightarrow \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0{,}9487 \\ 0{,}3162 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \quad \rightarrow \quad u_2 = \begin{pmatrix} -0{,}3162 \\ 0{,}9487 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ - & \boldsymbol{u}_2^T & - \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0{,}9487 & -0{,}3162 \\ 0{,}3162 & 0{,}9487 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9487 & -0{,}3162 \\ 0{,}3162 & 0{,}9487 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9487 & 0{,}3162 \\ -0{,}3162 & 0{,}9487 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}9487 \times 8 + (-0{,}3162) \times 0 & 0{,}9487 \times 0 + (-0{,}3162) \times (-2) \\ 0{,}3162 \times 8 + 0{,}9487 \times 0 & 0{,}3162 \times 0 + 0{,}9487 \times (-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9487 & 0{,}3162 \\ -0{,}3162 & 0{,}9487 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 7{,}5896 & 0{,}6324 \\ 2{,}5296 & -1{,}8974 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}9487 & 0{,}3162 \\ -0{,}3162 & 0{,}9487 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7{,}0002 & 2{,}9998 \\ 2{,}9998 & -1{,}0002 \end{pmatrix}}$$

```
A = np.array([[3, 1],
              [1, 2]])
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
S=np.array([[lam[0], 0],
              [0, lam[1]]])
u1 = np.array(u[:,0])
u2 =np.array(u[:,1])
P=np.array([u1,u2]).T

t = P @ S @ P.T
print("Recupera-se a matriz A\n",t)
```

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

```
autovalores=
[3.618 1.382]
autovetores=
[[ 0.8507 -0.5257]
[ 0.5257 0.8507]]
Recupera-se a matriz
A [[3. 1.]
[1. 2.]]
```

REPARE QUE...

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T \qquad \boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u_1}^T \\ \mathbf{u_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{u_n}^T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 u_{11} & \lambda_1 u_{12} & \dots & \lambda_1 u_{1n} \\ \lambda_2 u_{21} & \lambda_2 u_{22} & \dots & \lambda_2 u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n u_{n1} & \lambda_n u_{n2} & \dots & \lambda_n u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{u_1}^T \\ \lambda_2 \mathbf{u_2}^T \\ \vdots \\ \lambda_n \mathbf{u_n}^T \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ - & \boldsymbol{u}_2^T & - \end{pmatrix}$$

PORTANTO...

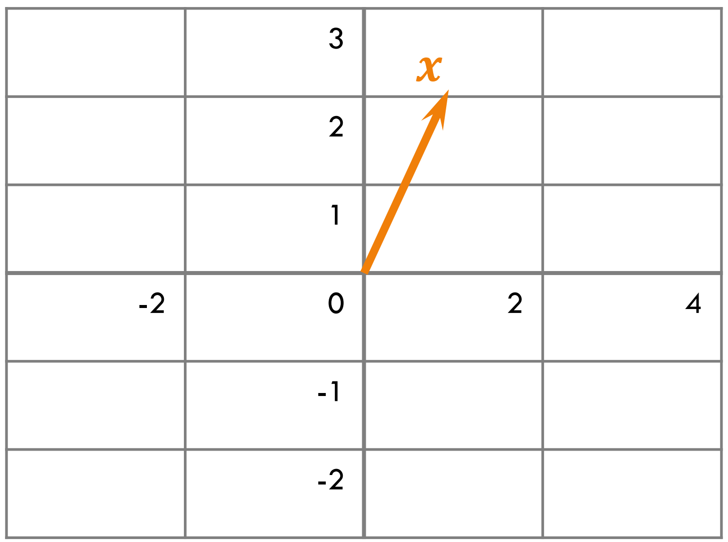
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} & \ldots & \mathbf{u_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{u_1}^T \\ \lambda_2 \mathbf{u_2}^T \\ \vdots \\ \lambda_n \mathbf{u_n}^T \end{bmatrix} =$$

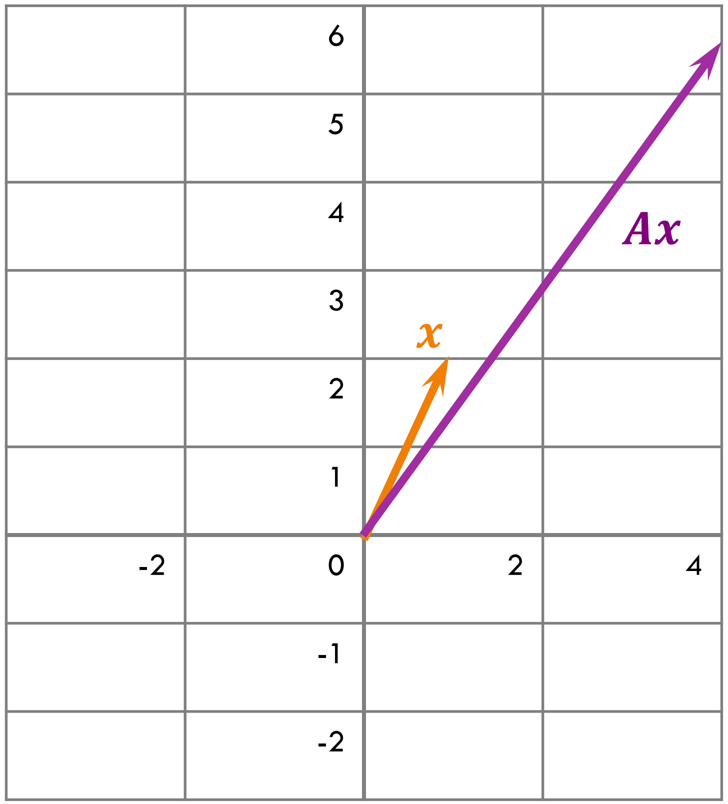
$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T$$

Portanto, a matriz $\boldsymbol{A}$ pode ser decomposta em $\boldsymbol{n}$ matrizes $\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$ $n \times n$ ponderadas de λ_i

VAMOS DEVAGAR PARA ENTENDER...



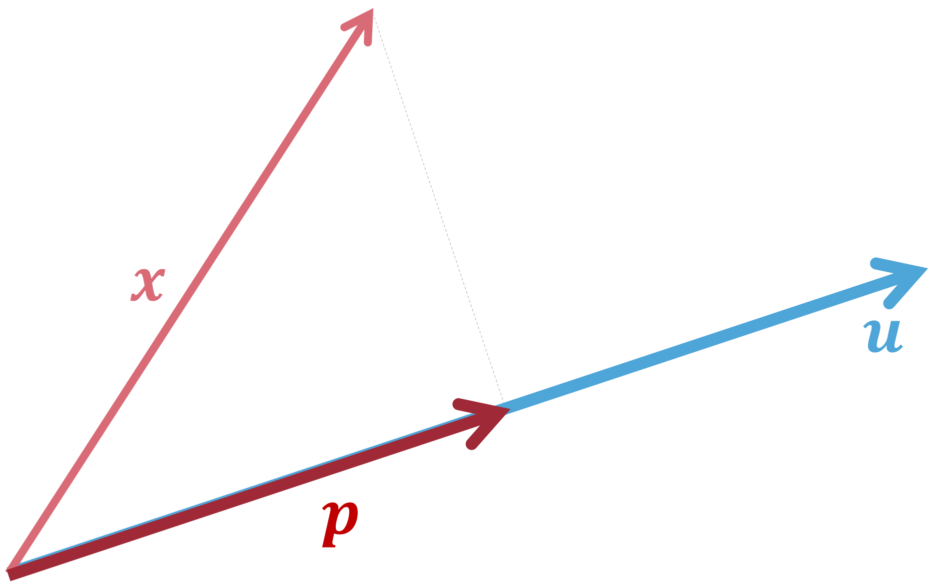
Suponha um vetor x qualquer, e aplicamos uma matriz $\boldsymbol{A}$ de transformação, simétrica $n \times n$.



https://towardsdatascience.com/understanding-singular-value-decomposition-and-its-application-in-data-science-388a54be95d

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{x}$$

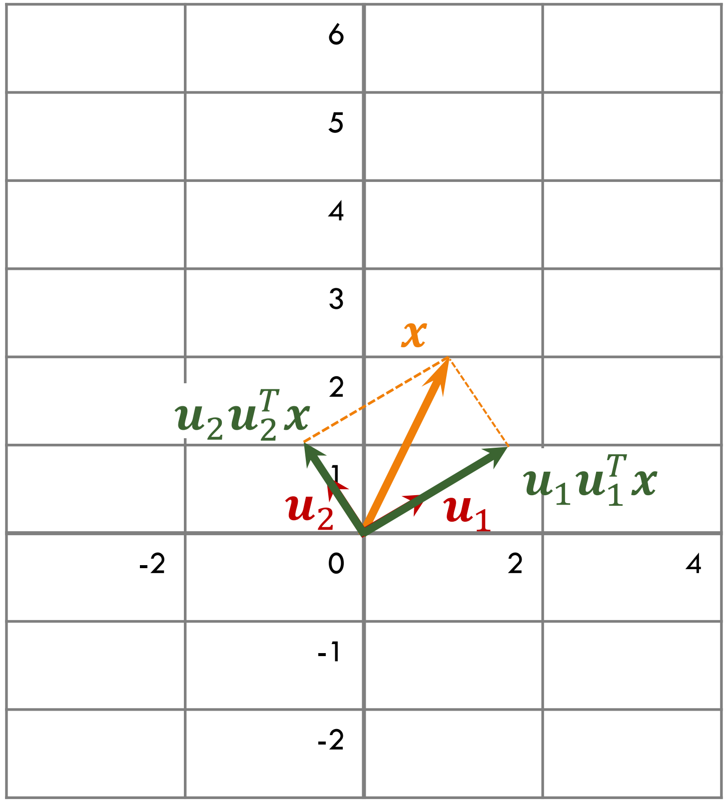
PROJEÇÃO



Dimensão da componente de x ao longo de u

$$p = \frac{u}{u^T u} u^T x$$

Vetor u normalizado dá a direção de p

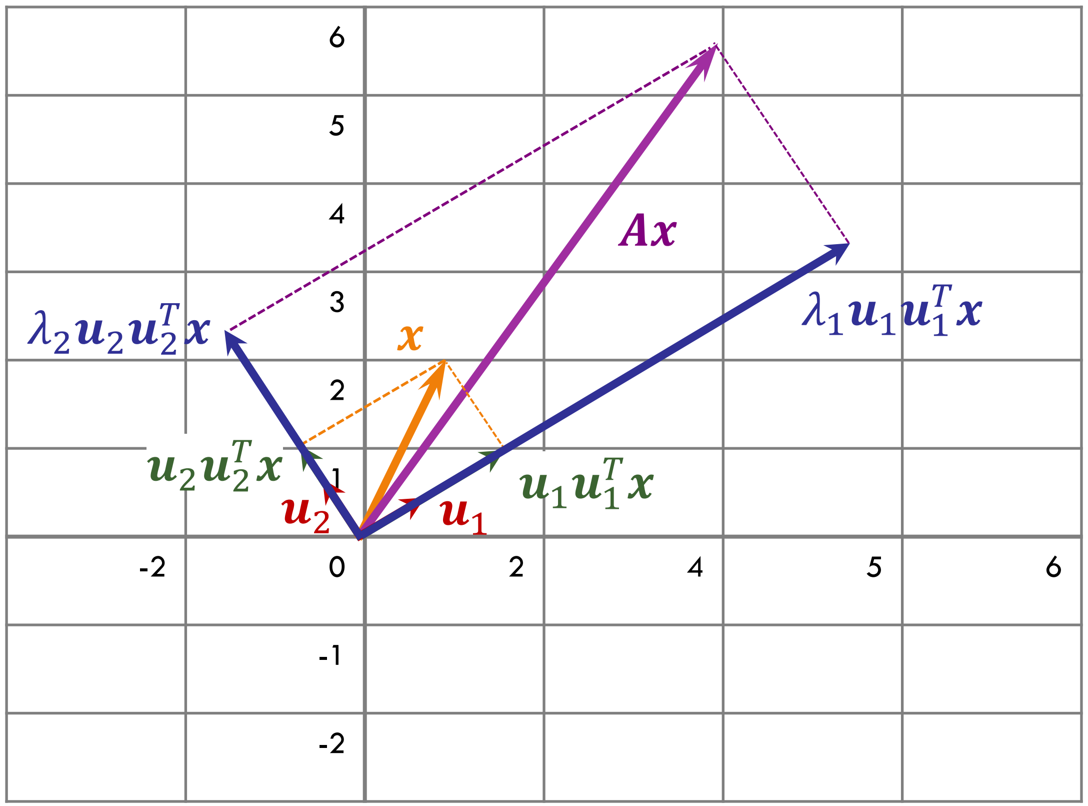


$$Ax = \lambda_1 u_1 u_1^T x + \lambda_2 u_2 u_2^T x + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T x$$

$u_i u_i^T x \rightarrow$ Projeta o vetor x na i−ésima direção principal!!!

$$Ax = \lambda_1 u_1 u_1^T x + \lambda_2 u_2 u_2^T x$$

$$\boldsymbol{Ax} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{x} + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{x}$$



Uma matriz simétrica transforma um vetor alongando-o ou encolhendo-o ao ***longo de seus autovetores***.

Além disso, sabemos que as matrizes transformam um autovetor ***multiplicando seu comprimento (ou magnitude) pelo autovalor correspondente***.

https://towardsdatascience.com/understanding-singular-value-decomposition-and-its-application-in-data-science-388a54be95d

INSIGHT...

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_n^T + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^T$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

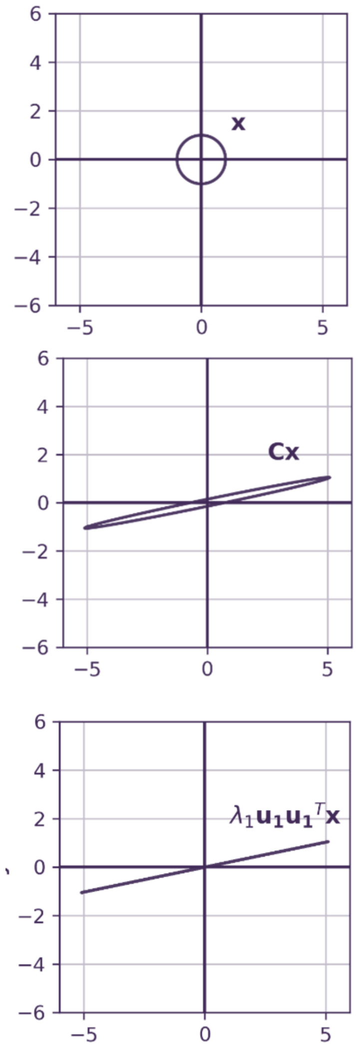
Quanto maior o autovalor, maior o comprimento do vetor resultante $\lambda_i \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$ e mais peso é dado à sua matriz correspondente $\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^T$.

Assim, podemos aproximar nossa matriz simétrica original $\boldsymbol{A}$ somando os termos que têm os maiores autovalores,

$$\boldsymbol{A} \approx \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{u}_n^T$$
$$\boldsymbol{A} \approx \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \cdots + \boldsymbol{A}_k$$

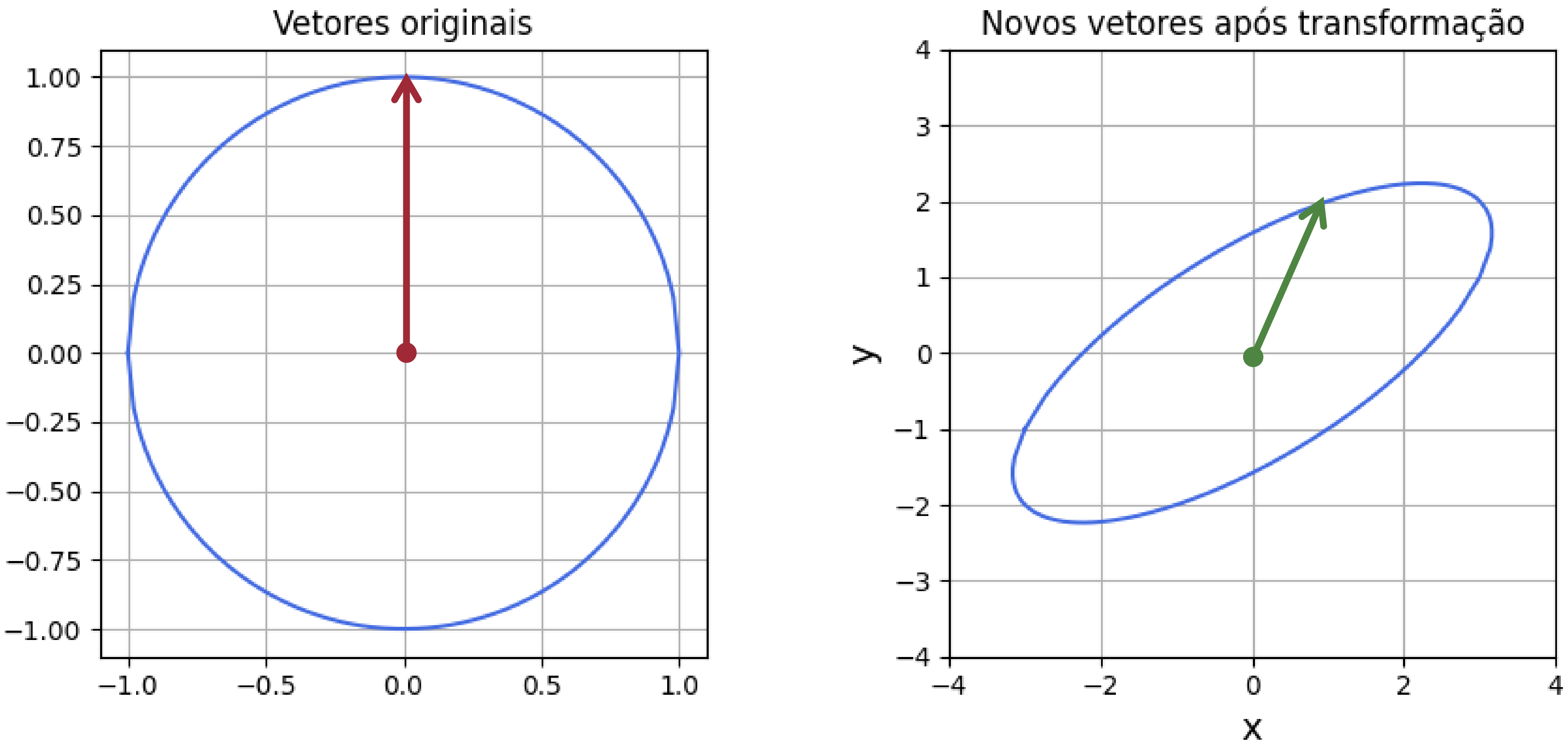
onde $\boldsymbol{A}_i$ é uma matriz de projeção e deve projetar tudo em $\boldsymbol{u}_i$.

https://github.com/reza-bagheri/SVD_article



DECOMPONHA A E ACHE A PROJEÇÃO A_1

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



AUTOVALORES E AUTOVETORES DE A

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 3.618$$

$$\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 1.382$$

```python
# Cálculo de autovalores e autovetores
#A = np.array([[3, 2],
#                [0, 2]])
A = np.array([[3, 1],
              [1, 2]])
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=", np.round(lam, 4))
print("autovetores=", np.round(u, 4))

```

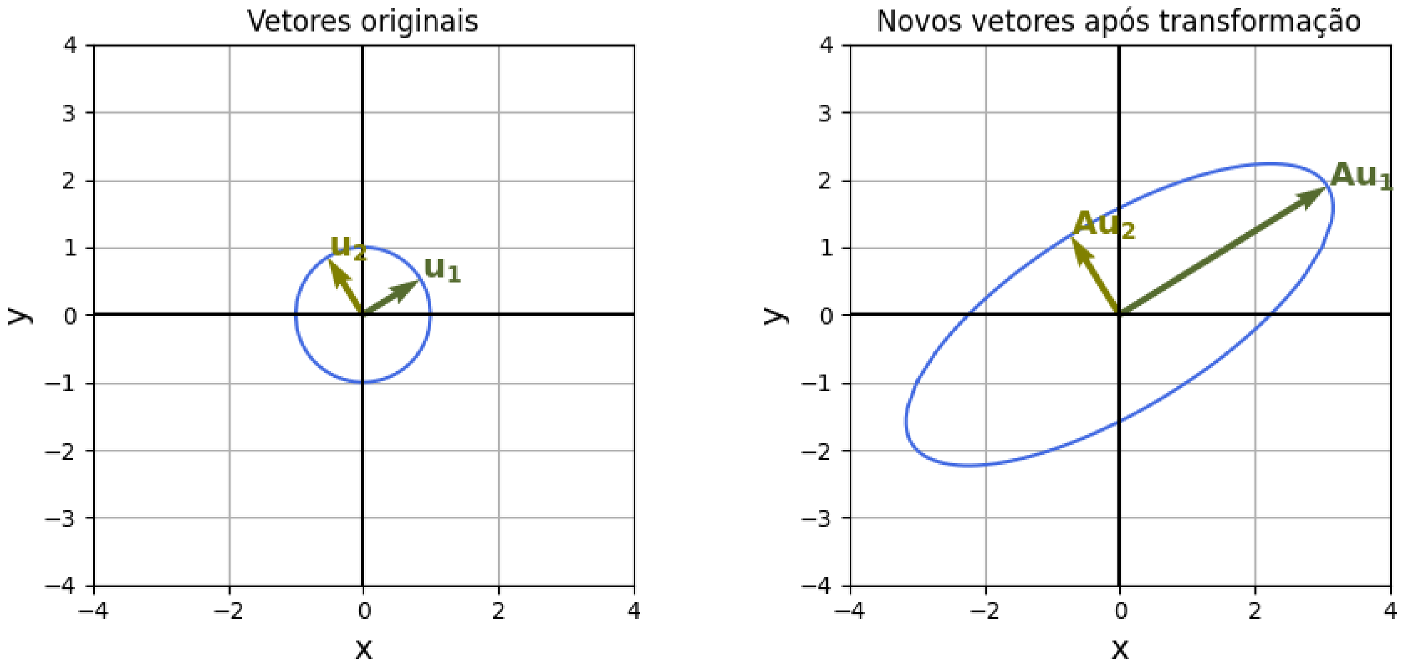
```
autovalores= [3.618 1.382]
autovetores= [[ 0.8507 -0.5257]
 [ 0.5257  0.8507]]
```

AUTOVALORES E AUTOVETORES DE A

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 3.618$$

$$\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 1.382$$



$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \\ | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{u}_1^T & - \\ - & \boldsymbol{u}_2^T & - \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 3.618$$

$$\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 1.382$$

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.618 & 0 \\ 0 & 1.382 \end{bmatrix}$$

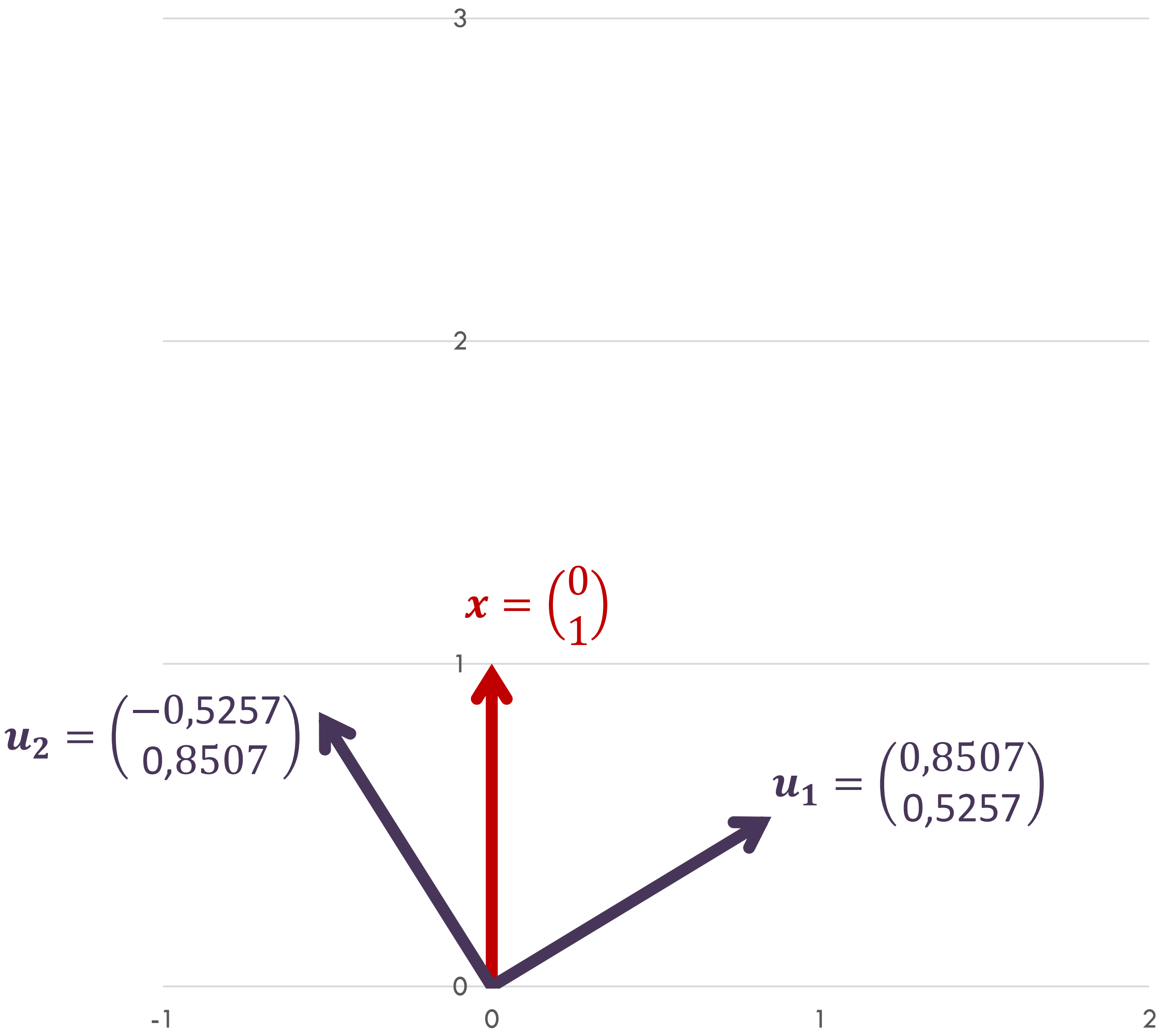
$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 0.8507 & -0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

DECOMPOSIÇÃO

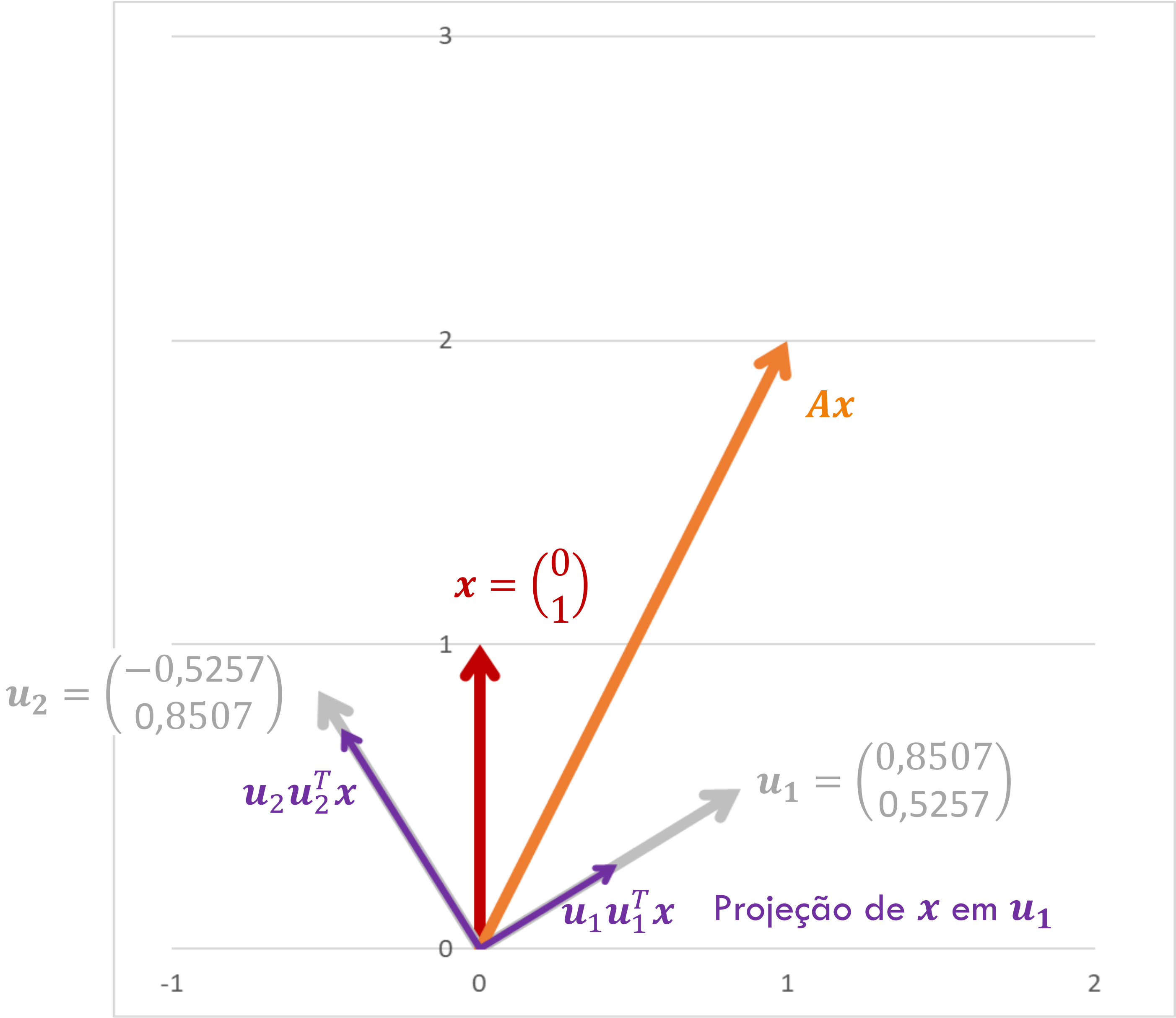
$$\boldsymbol{U}^T = [\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2}]^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1^T} \\ \boldsymbol{u_2^T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8507 & 0.5257 \\ -0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8507 & -0.5257 \\ 0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.618 & 0 \\ 0 & 1.382 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8507 & 0.5257 \\ -0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

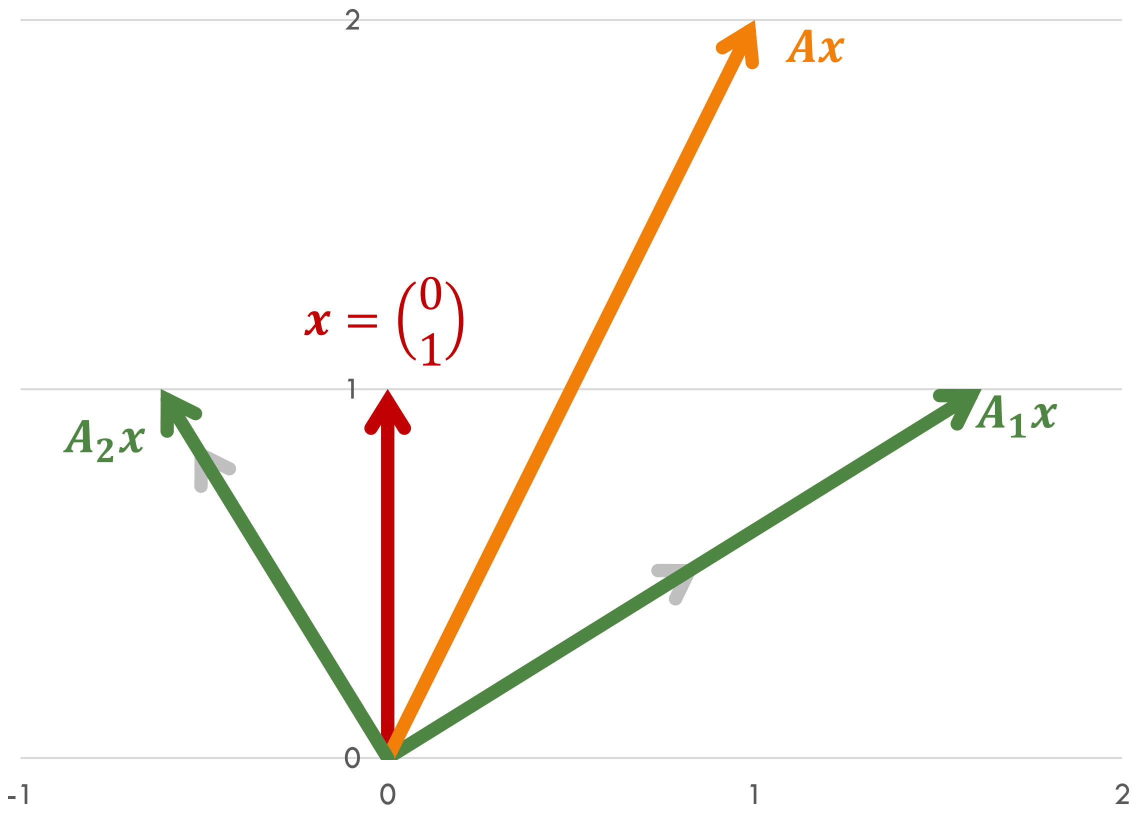


$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\boldsymbol{A_1} = \lambda_1 \boldsymbol{u_1 u_1^T} = 3.61 \begin{bmatrix} 0.8507 \\ 0.5257 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8507 & 0.5257 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.618 & 1.618 \\ 1.618 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A_2} = \lambda_2 \boldsymbol{u_2 u_2^T} = 1.382 \begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.8507 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5257 & 0.8507 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.382 & -0.618 \\ -0.618 & 1 \end{bmatrix}$$



FAÇA VOCÊ: ENCONTRE A PROJEÇÃO A_1

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{bmatrix} 0.9239 \\ 0.3287 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 5.8284$$

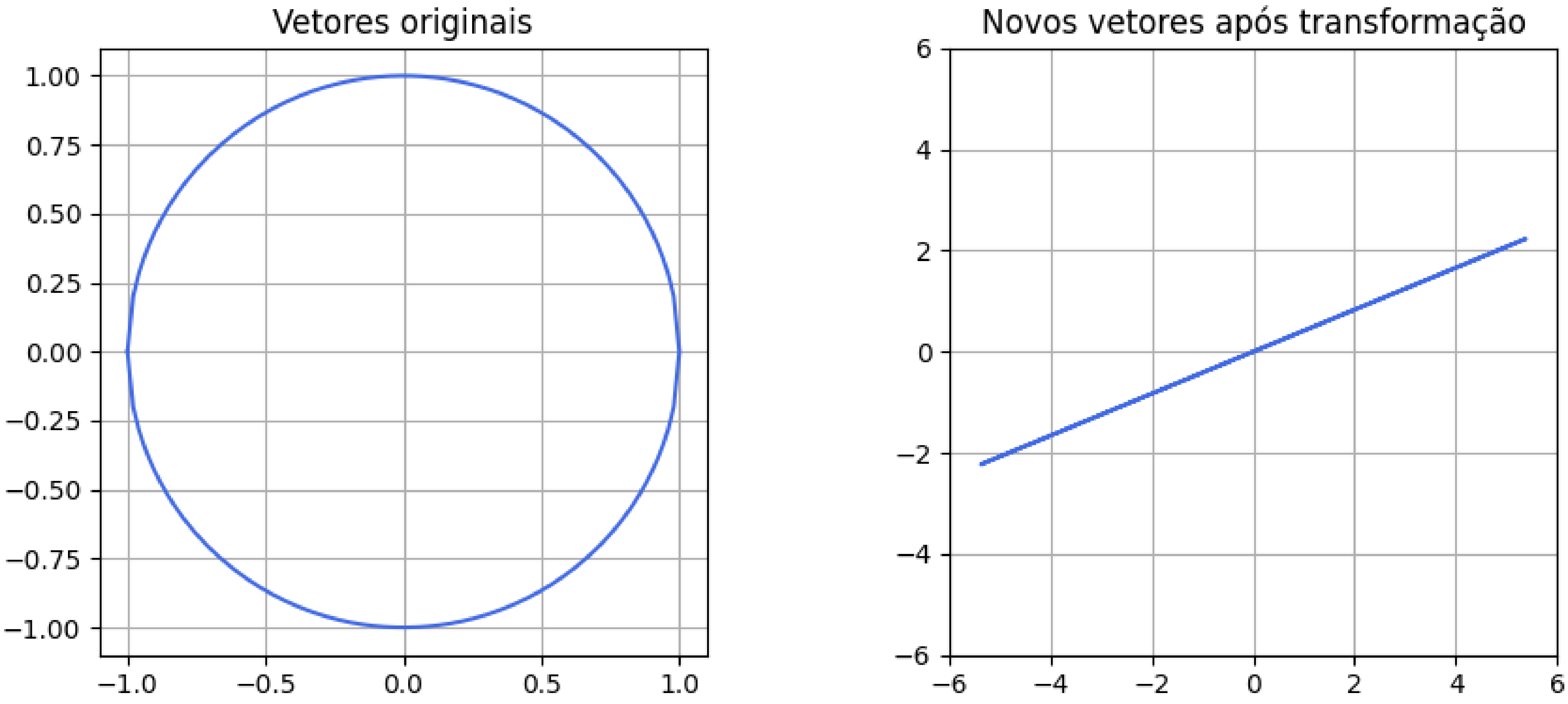
$$\boldsymbol{u_2} = \begin{bmatrix} -0.3827 \\ 0.9239 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 0.1716$$

$$\boldsymbol{A_1} = \lambda_1 \boldsymbol{u_1} \boldsymbol{u_1^T} = \begin{bmatrix} 4.9749 & 2.0607 \\ 2.0606 & 0.8535 \end{bmatrix}$$

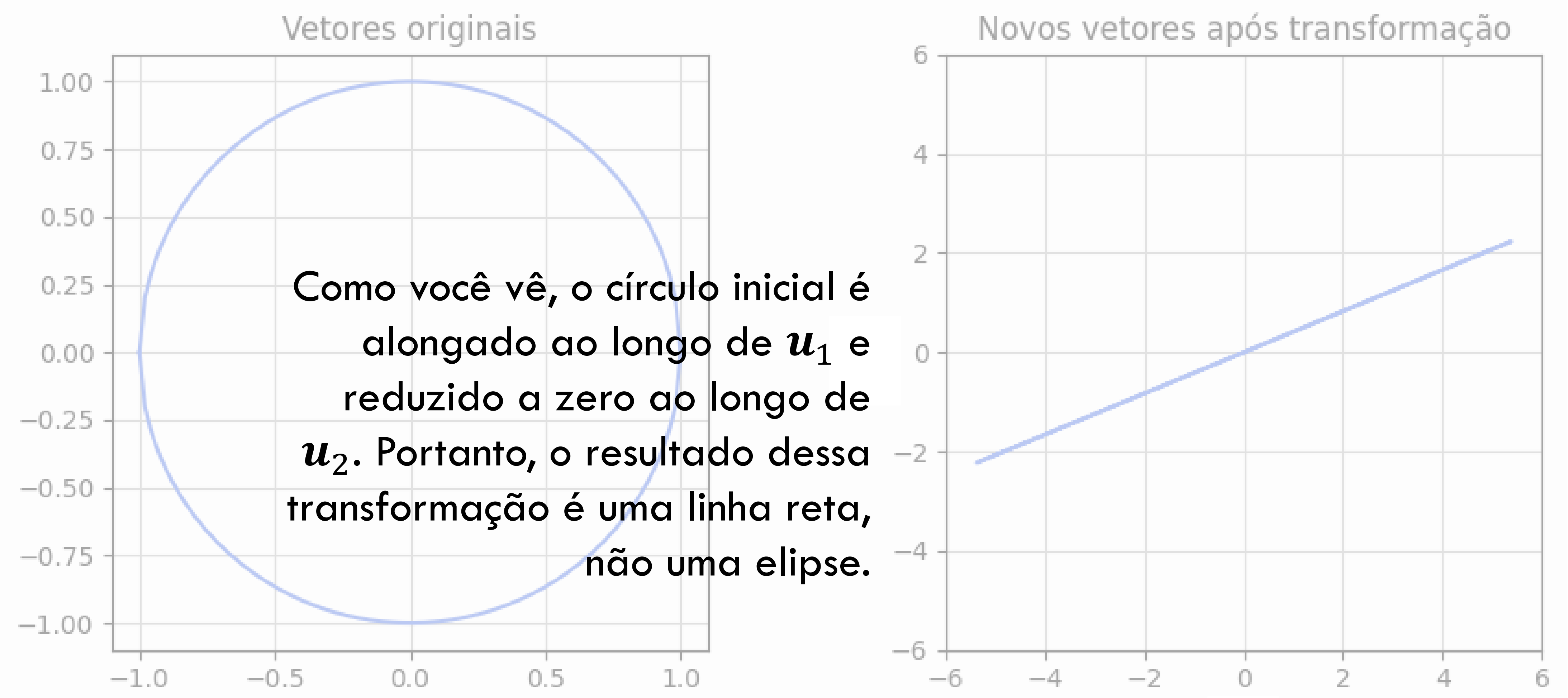
```python
A = np.array([[5, 2],
              [2,1]])
lam, u = linalg.eig(A)
print("autovalores=\n", np.round(lam, 4))
print("autovetores=\n", np.round(u, 4))
S=np.array([[lam[0], 0],
              [0, lam[1]]])
u1 = np.array(u[:,0])
u2 =np.array(u[:,1])
P=np.array([u1,u2]).T


t = P @ S @ P.T
print("Recupera-se a matriz A\n",t)
```

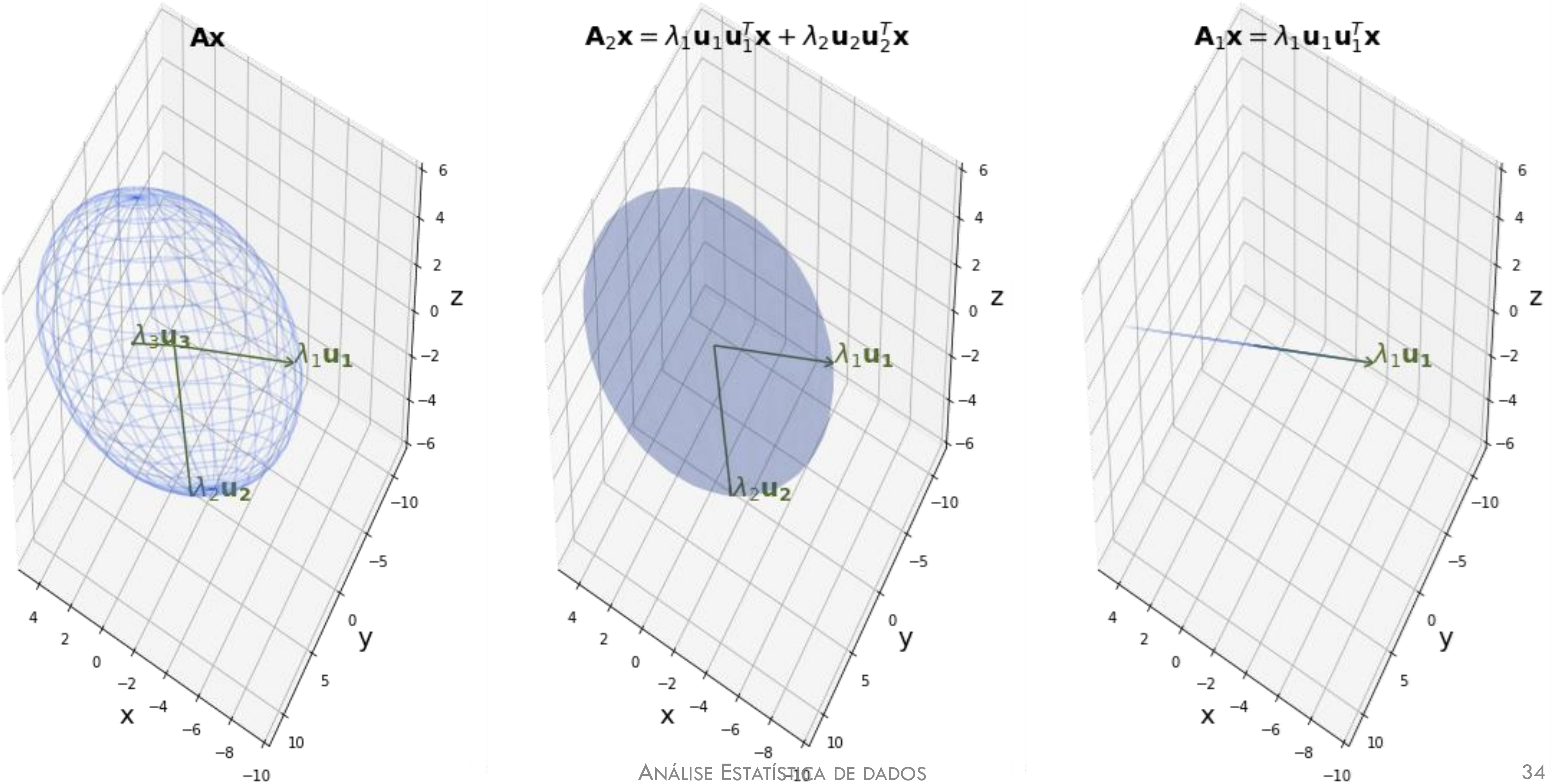
```
autovalores=
 [5.8284 0.1716]
autovetores=
 [[ 0.9239 -0.3827]
 [ 0.3827  0.9239]]
Recupera-se a matriz A
 [[5. 2.]
 [2. 1.]]
```



Vetores originais
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
Novos vetores após transformação
6
4
2
0
−2
−4
−6
−6
−4
−2
0
2
4
6



Como você vê, o círculo inicial é alongado ao longo de $\boldsymbol{u}_1$ e reduzido a zero ao longo de $\boldsymbol{u}_2$. Portanto, o resultado dessa transformação é uma linha reta, não uma elipse.


$\mathbf{Ax}$
$\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \mathbf{x} + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{u}_2^T \mathbf{x}$
$\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \mathbf{x}$
$\lambda_1 \mathbf{u_1}$
$\lambda_2 \mathbf{u_2}$
$\lambda_3 \mathbf{u_3}$
x
y
z

Se você tiver não uma matriz quadrada simétrica, não poderá usar o método de composição por autovalores para aproximar matrizes...

E a maioria das matrizes que você irá trabalhar não são nem quadradas e nem simétricas...

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

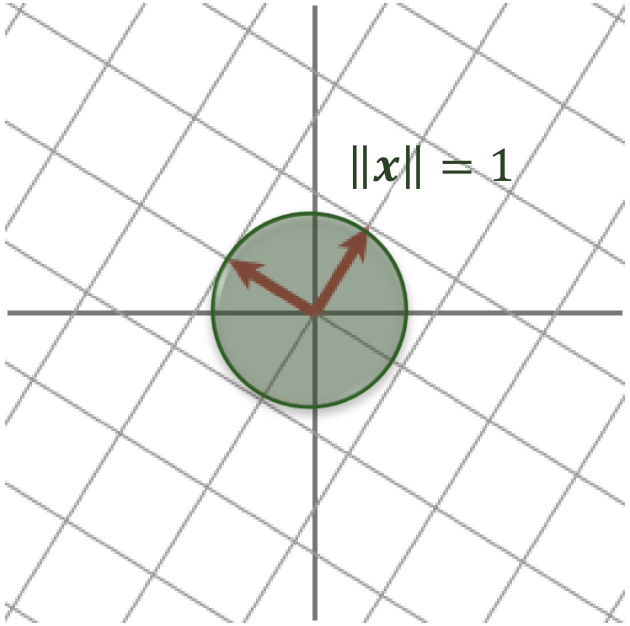
VALORES SINGULARES

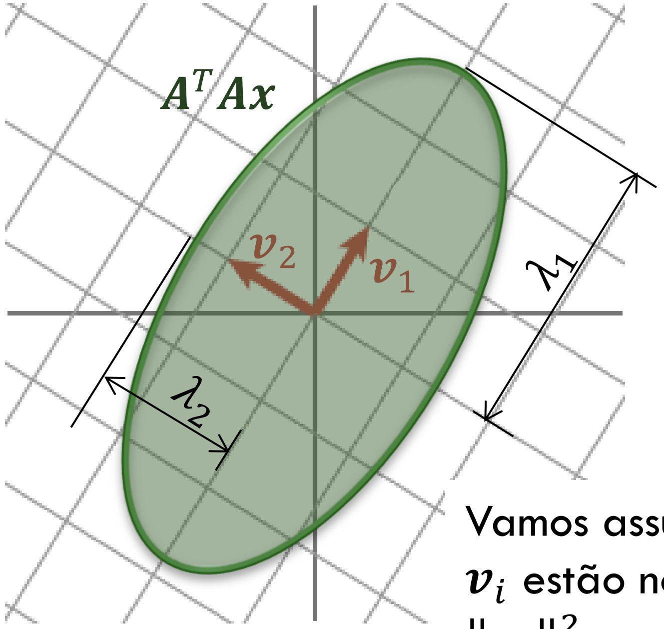
Antes de falar em SVD devemos encontrar uma maneira de calcular as direções de alongamento para uma matriz não simétrica.

MATRIZ $A^T A$

$\boldsymbol{A}$ é uma matriz $m \times n$ e não necessariamente simétrica.

A matriz $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ é quadrada $(n \times n)$ e simétrica e possui autovetores $\boldsymbol{v}_i$ ortogonais e autovalores λ_i





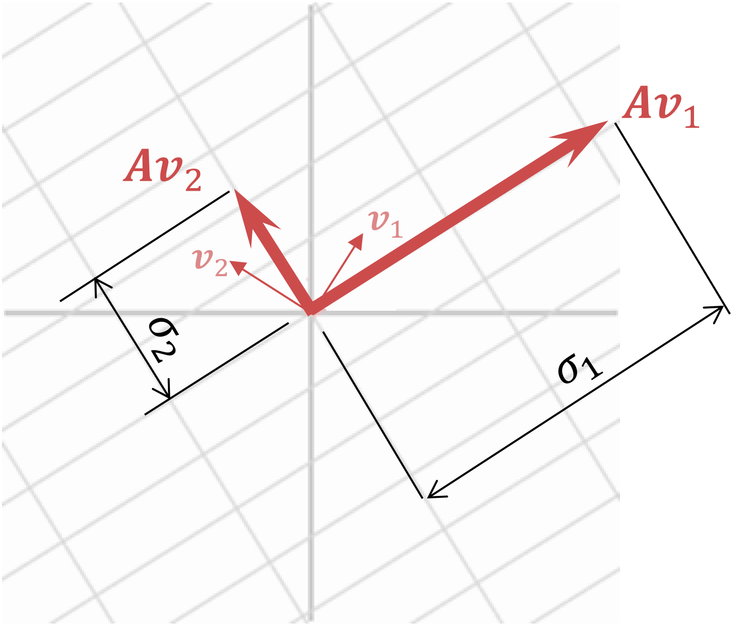
Vamos assumir que os vetores $\boldsymbol{v}_i$ estão normalizados, ie, $\|\boldsymbol{v}_i\|^2 = \boldsymbol{v}_i^T\boldsymbol{v}_i = 1$

Av_i

$$\|Av_i\|^2 = (Av_i)^T Av_i = v_i^T \boxed{A^T A v_i}$$

Lembre-se que v_i são autovetores de $A^T A$. Portanto,

$$A^T A v_i = \lambda_i v_i$$



$$\|Av_i\|^2 = v_i^T \boxed{\lambda_i v_i} = \lambda_i \boxed{v_i^T v_i}$$

$$v_i^T v_i = 1$$

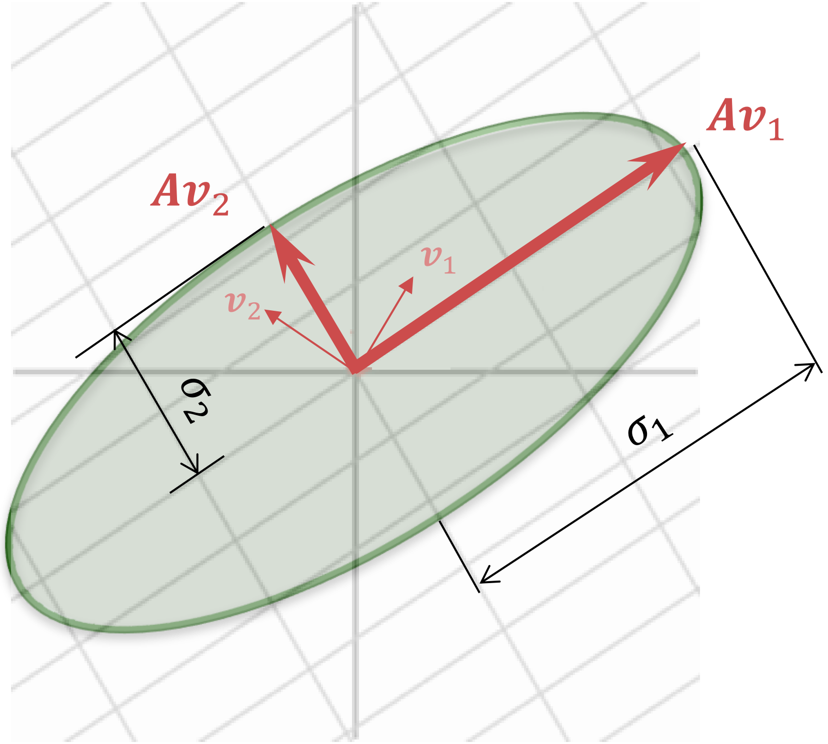
$$\|Av_i\|^2 = \lambda_i$$

Veja que daqui se pode deduzir que todos os autovetores de $A^T A$ são positivos

$$\|Av_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$

σ_i são os comprimentos dos vetores Av_i e são chamados de valores singulares de A.

CHEGAMOS AO PONTO CHAVE DO MÉTODO SVD



Fazendo papel de $\boldsymbol{u}_i$ da matriz simétrica.

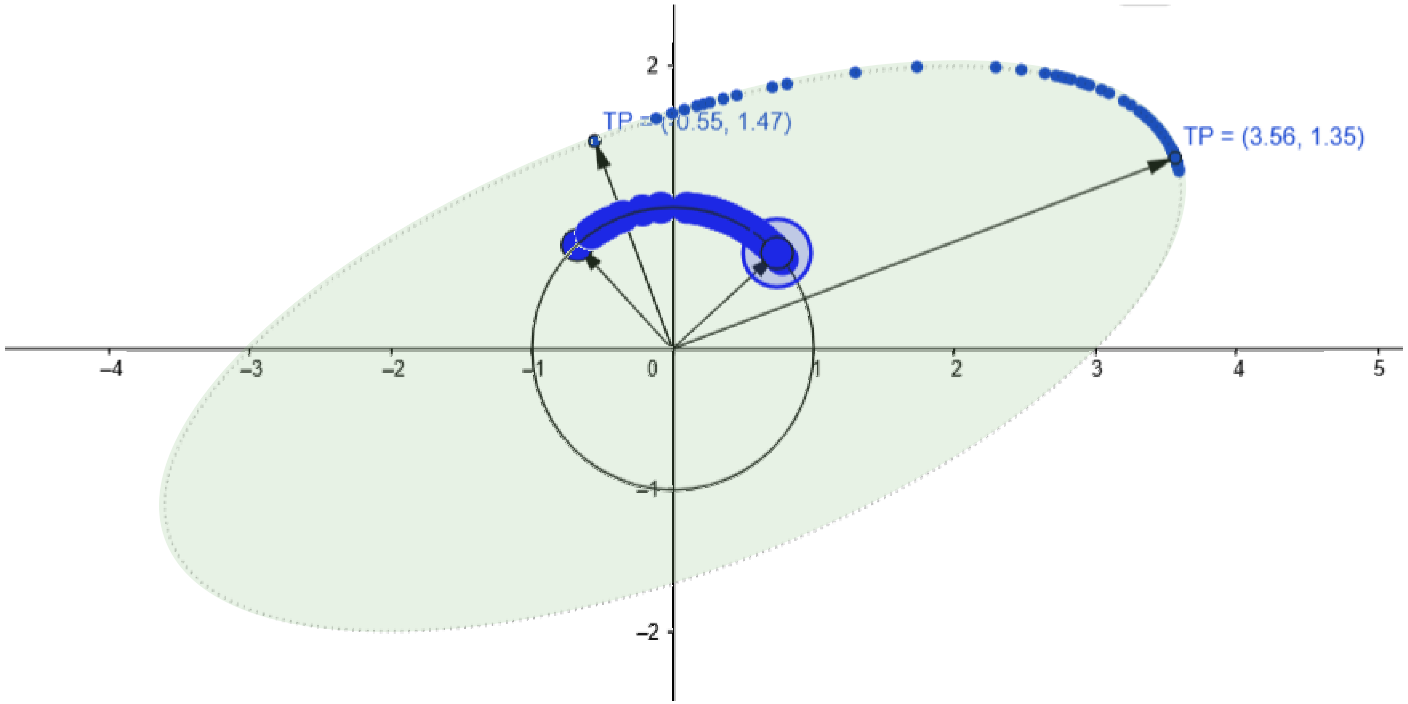
Pode-se provar que $\boldsymbol{Av}_i$ são ortogonais e representam as direções principais de alongamento da transformação $\boldsymbol{A}$ sobre $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, de comprimento

$$\|\boldsymbol{Av}_i\| = \sigma_i$$

Já calculamos anteriormente.

EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

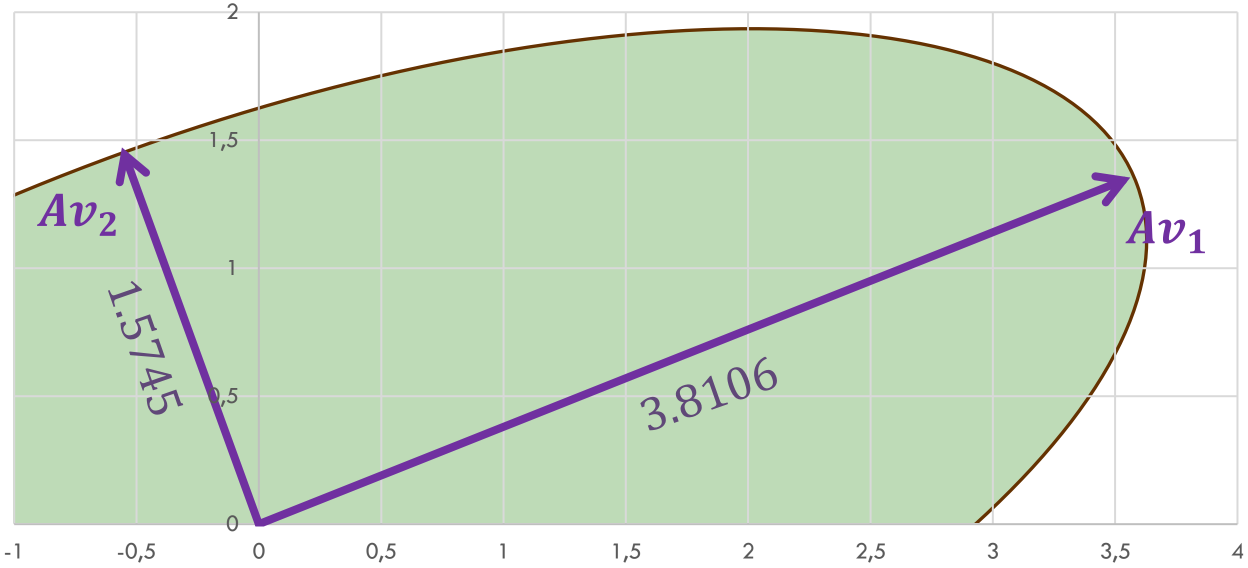


https://www.geogebra.org/classic/mdvN0HTt

EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$



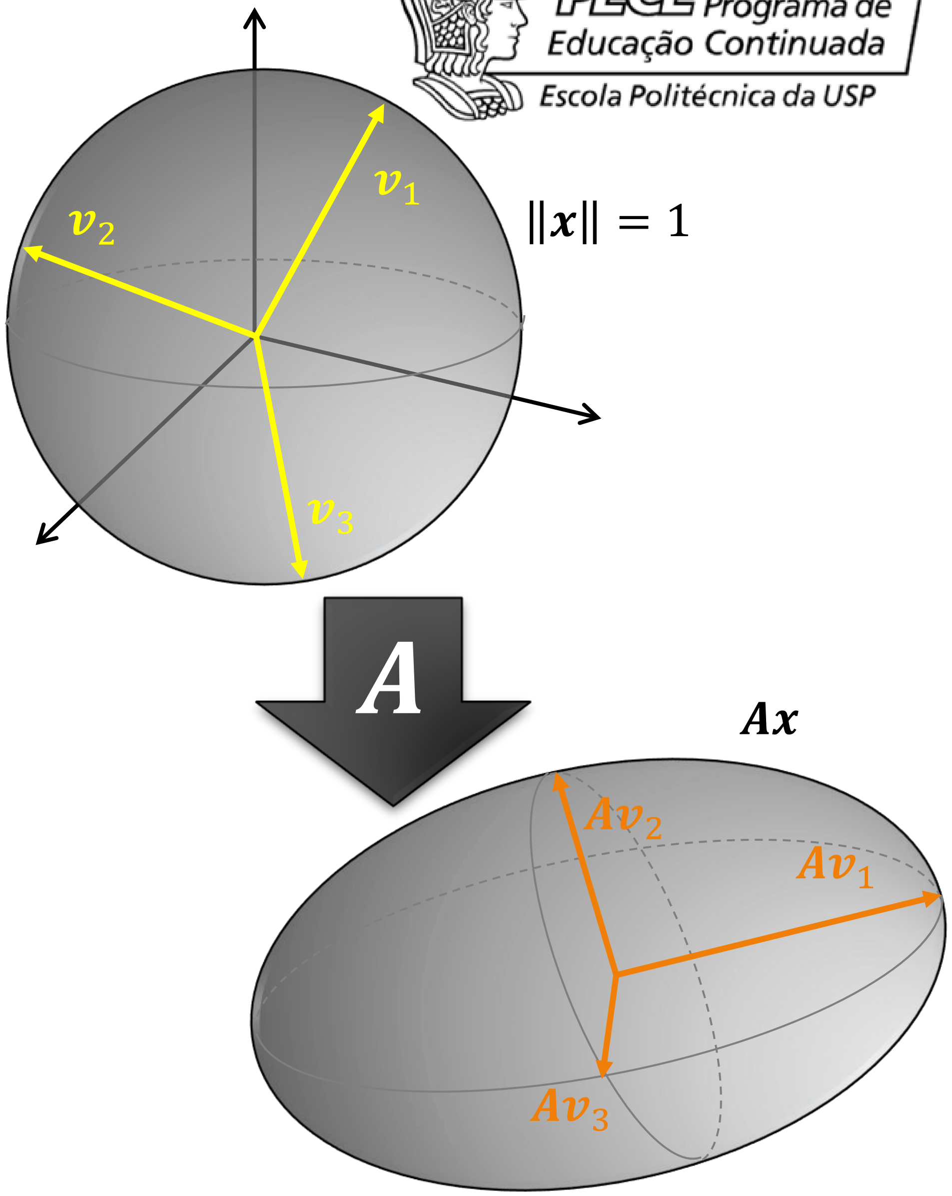
$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 0.7359 \\ 0.6771 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 14.5208$$

$$\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -0.6771 \\ 0.7359 \end{bmatrix}, \lambda_2 = 2.4792$$

$$\boldsymbol{Av_1} = \begin{bmatrix} 3.5619 \\ 1.3542 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Av_2} = \begin{bmatrix} -0.5596 \\ 1.4718 \end{bmatrix}$$

RANK DE $\boldsymbol{A}$



Suponha que o número de valores singulares diferentes de zero seja r. Eles são todos positivos e podemos ordená-los em forma decrescente, como

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$$

que correspondem a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$$

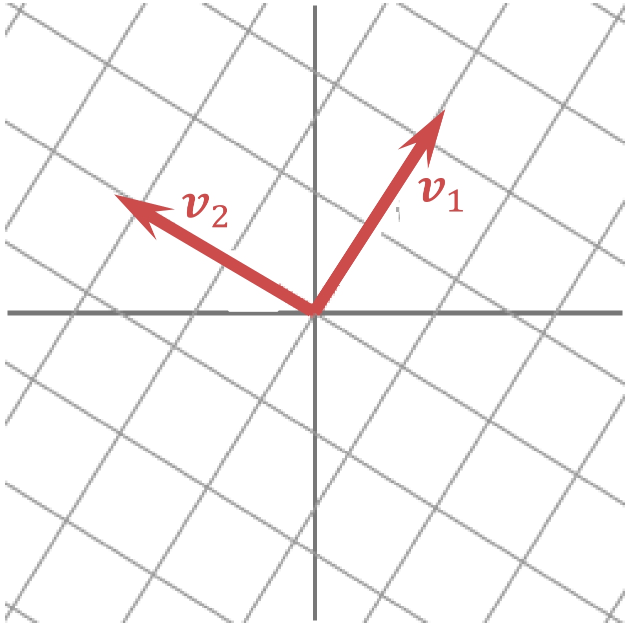
e cada λ_i é o autovalor correspondente de $\boldsymbol{v}_i$.

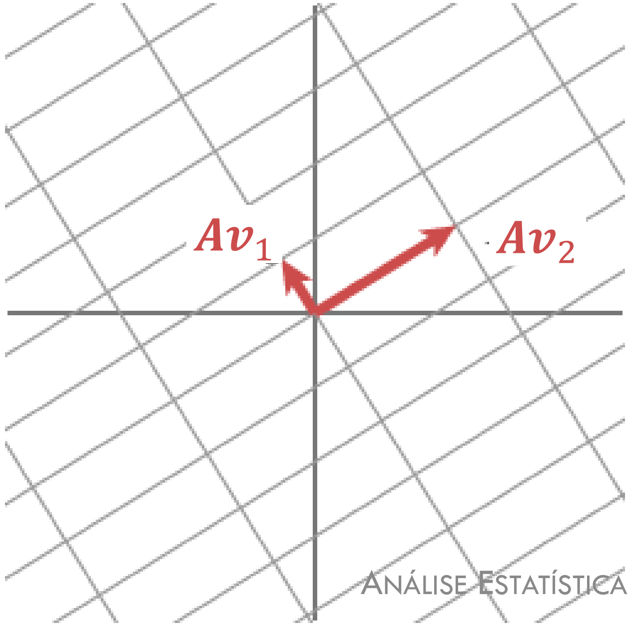
Então pode-se mostrar que o rank de $\boldsymbol{A}$, que é o número de vetores que formam a base de $\boldsymbol{Ax}$, é r. Pode-se mostrar também que o conjunto $\boldsymbol{Av}_i$, $\{\boldsymbol{Av}_1, \boldsymbol{Av}_2, \cdots, \boldsymbol{Av}_r\}$ é uma base ortogonal para $\boldsymbol{Ax}$.

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

SVD

QUAL A IDEIA DA DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES???



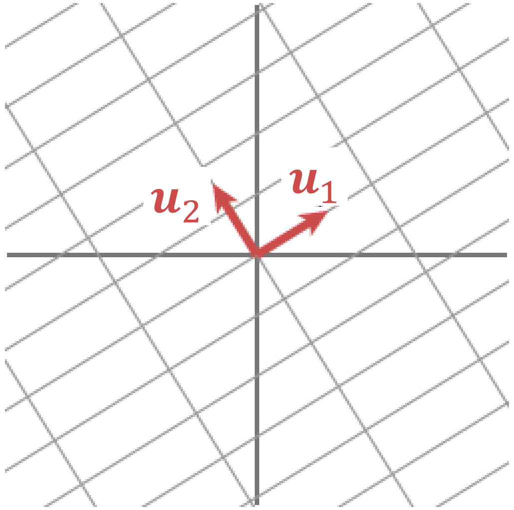


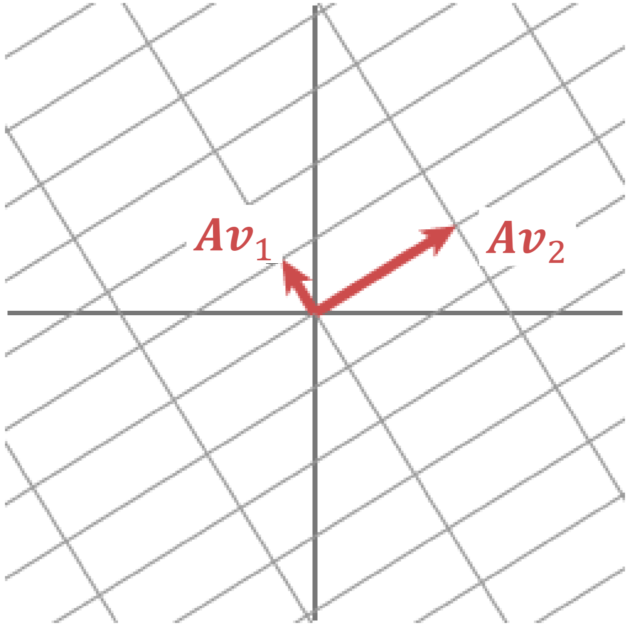
Define-se:

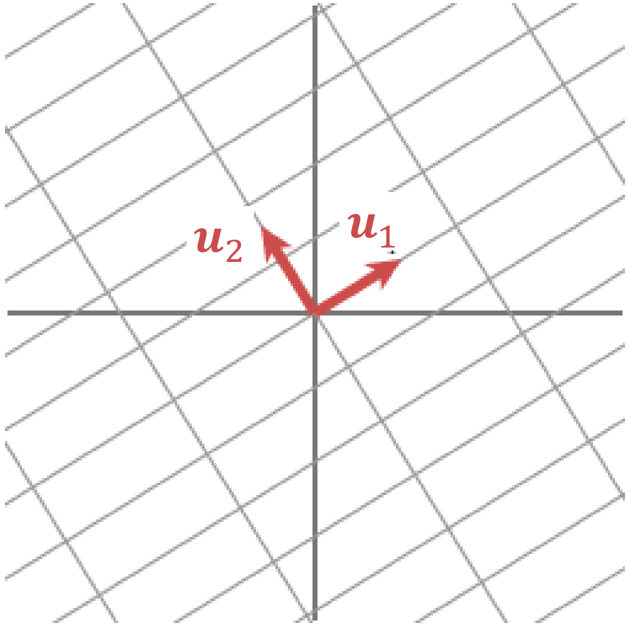
$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1}{\|\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1}{\sigma_1}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2}{\|\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2}{\sigma_2}$$

como versores nas direções de $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1$ e $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2$.





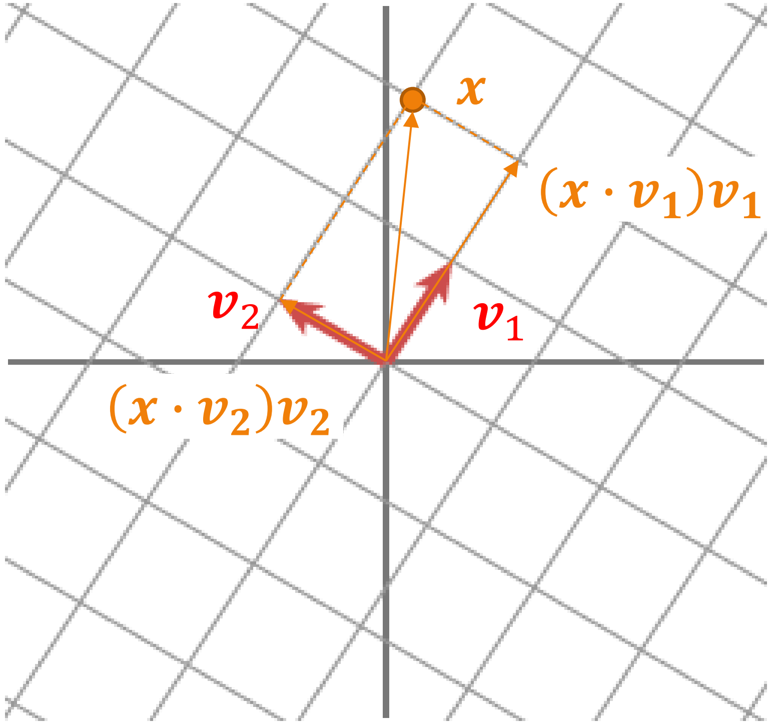


$$\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1$$
$$\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \sigma_2 \boldsymbol{u}_2$$

Os comprimentos de $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1$ e $\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2$, que são σ_1 e σ_2, descrevem a dimensão das transformações que ocorrem, respectivamente, nas direções $\boldsymbol{u}_1$ oe $\boldsymbol{u}_2$.

E SE APLICARMOS $\boldsymbol{A}$ EM UM VETOR $\boldsymbol{x}$ QUALQUER?

$$\boldsymbol{Ax} = ?$$



$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_1})\boldsymbol{v_1} + (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_2})\boldsymbol{v_2}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{Av_1}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_1}) + \boldsymbol{Av_2}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v_2})$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1$$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{v}_2 = \sigma_2 \boldsymbol{u}_2$$

$$\boldsymbol{Ax} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_1) + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{v}_2)$$

$$\boldsymbol{Ax} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{x} + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{Ax} = (\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T)\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T$$

E $\boldsymbol{u}_i$ E $\boldsymbol{v}_i$? O QUE PODEMOS CONCLUIR DELES?

$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T$$

Sabemos que $\boldsymbol{v}_i$ são autovetores de $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{A}^T[\sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T]\boldsymbol{v}_1$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{A}^T\sigma_1 \boldsymbol{u}_1$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = [\sigma_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{u}_2^T]\sigma_1 \boldsymbol{u}_1$$
$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\boldsymbol{v}_1 = \sigma_1^2 \boldsymbol{v}_1$$

Analogamente,

$$\mathbf{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2\boldsymbol{v}_2 = \sigma_2^2\boldsymbol{v}_2$$

Opa!!!! $\boldsymbol{u}_i$ são autovetores de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T \mathbf{A}^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T \mathbf{A}^T$$
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T \sigma_1 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T \sigma_2 \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{u}_2^T$$
$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \sigma_1^2 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T + \sigma_2^2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_1 = \sigma_1^2 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{u}_1 + \sigma_2^2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_2^T \boldsymbol{u}_1$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_1 = \sigma_1^2 \boldsymbol{u}_1$$

Analogamente,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u}_2 = \lambda_2\boldsymbol{u}_2 = \sigma_2^2\boldsymbol{u}_2$$

EM RESUMO

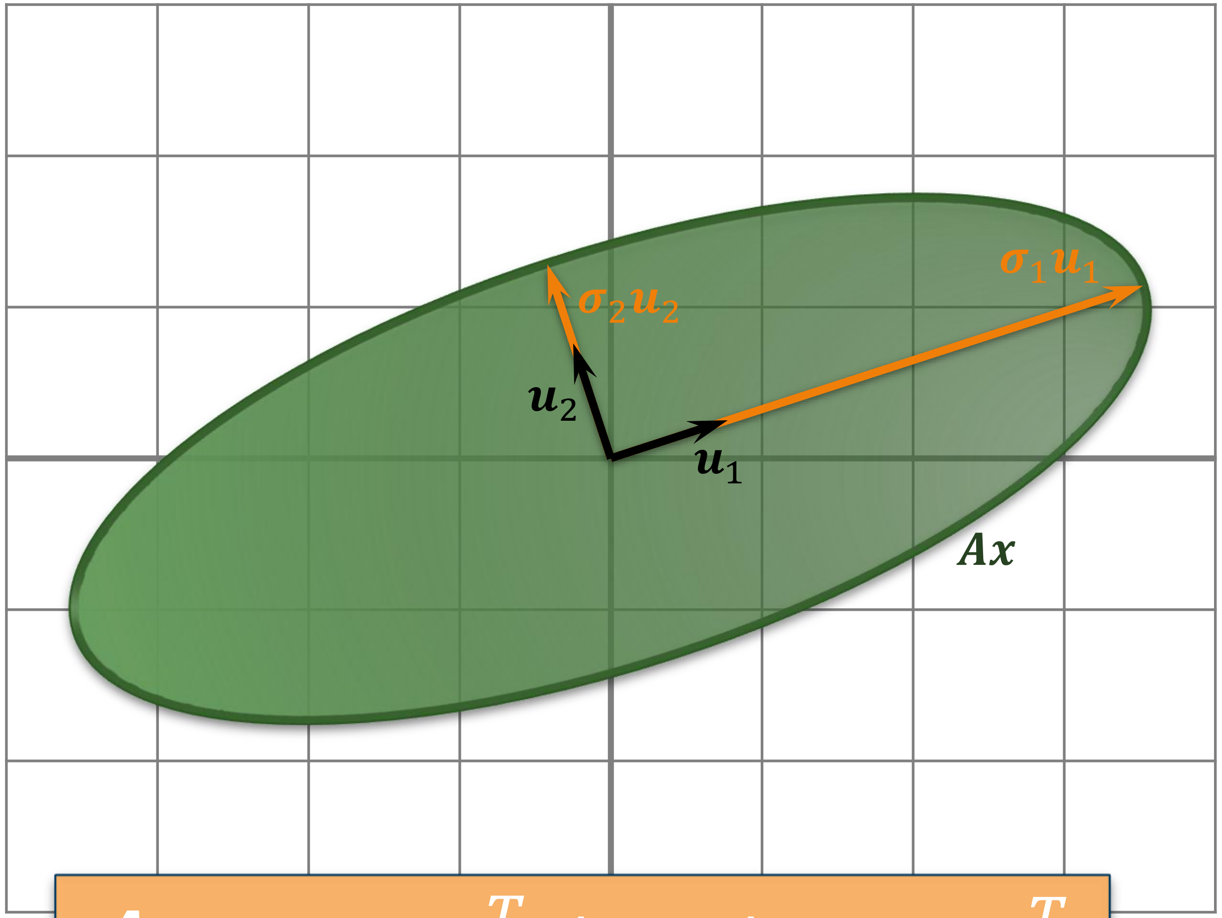
$\boldsymbol{v}_i$ são autovetores da transformação $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$; $\boldsymbol{u}_i$ são autovetores da transformação $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$

σ_i é a raiz quadrada dos autovalores da transformação $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ ou $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$

$\boldsymbol{u}_i$ são os vetores unitários na direção $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i$, de forma que $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i/\sigma_i$

O primeiro vetor $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1/\sigma_1$ aponta para a direção mais importante dos dados.

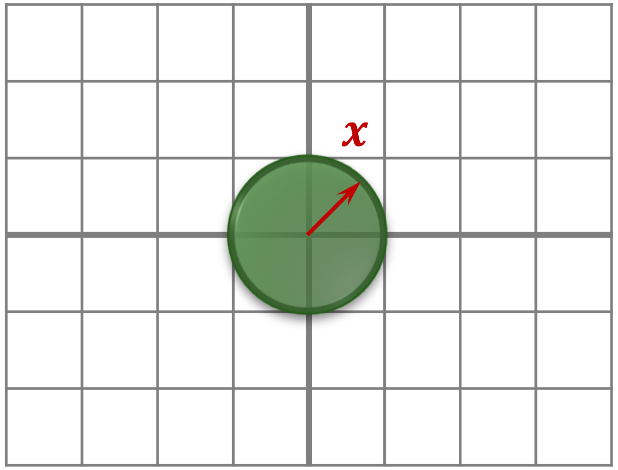
σ_i é usado para dar um peso à direção $\boldsymbol{u}_i \rightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \sigma_1\boldsymbol{u}_i$

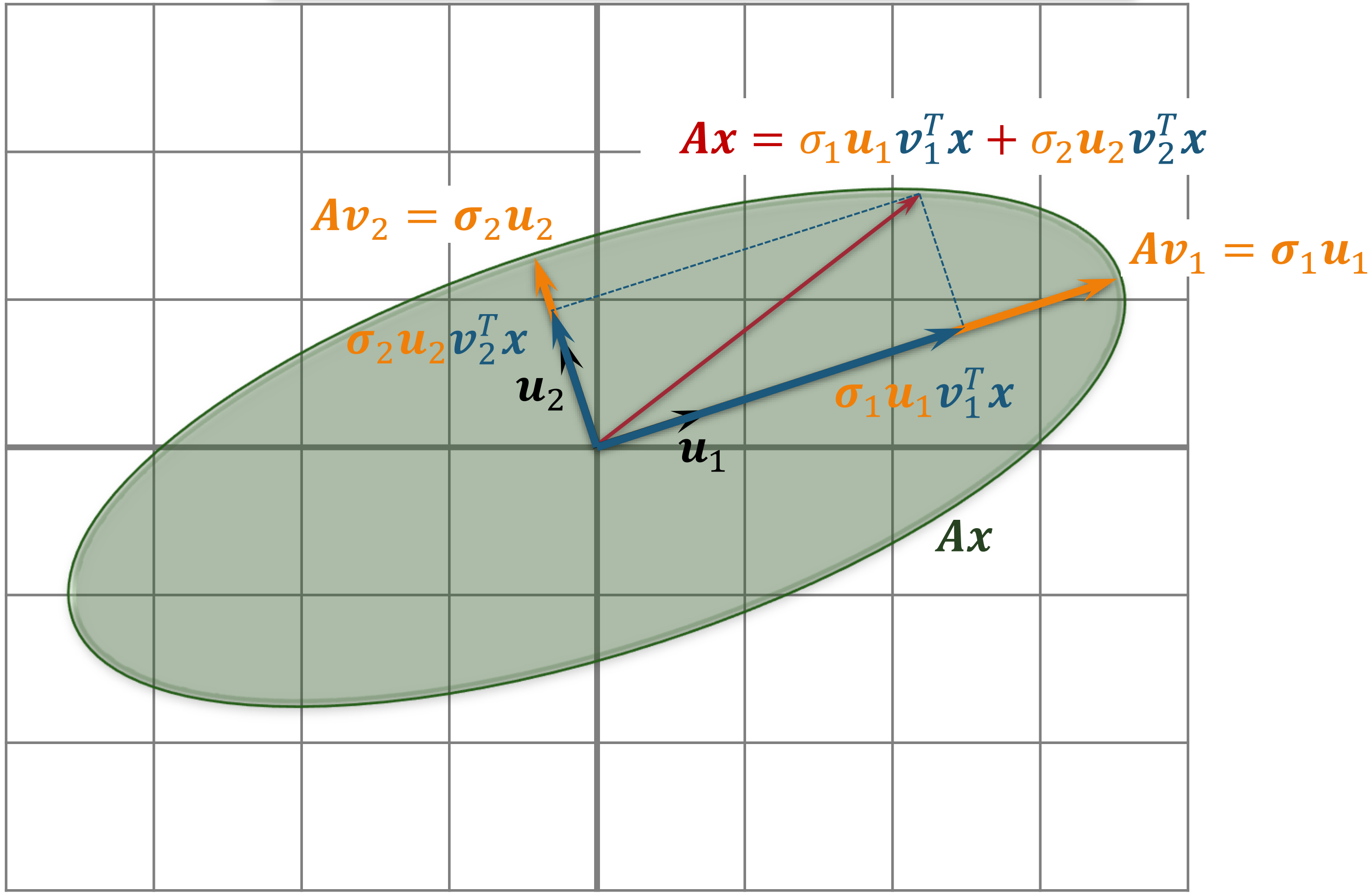


$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^T$$

INTERPRETAÇÃO FINAL

$$A\boldsymbol{x} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T \boldsymbol{x} + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T \boldsymbol{x}$$





VETORES E VALORES SINGULARES

Definição final

VETORES E VALORES SINGULARES

Dada uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, as matrizes à esquerda e à direita de $\boldsymbol{A}$ são, respectivamente,

$$\underset{m \times m}{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T} \text{ e } \underset{n \times n}{\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}}.$$

As matrizes $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ e $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ têm os mesmos autovalores não nulos.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ e $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ são simétricas, reais e quadradas. Portanto, autovalores $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ ou $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ são reais não negativos, iguais ou distintos.

VALORES SINGULARES DE UMA MATRIZ

Chamamos de **valores singulares** da matriz $\boldsymbol{A}$, as r raízes quadradas dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ não nulos de $\boldsymbol{AA}^T$ ou $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$;

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Os ***vetores singulares*** $\boldsymbol{u}_i$ à esquerda da matriz $\boldsymbol{A}$ são os autovetores de $\boldsymbol{AA}^T, m \times m$.

Os ***vetores singulares*** $\boldsymbol{v}_i$ à direita da matriz $\boldsymbol{A}$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}, n \times n$.

MATRIZES $\boldsymbol{U}$ E $\boldsymbol{V}$

Os autovetores de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ formam as colunas da matriz $\boldsymbol{U}$ e os autovetores de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ formam as colunas da matriz $\boldsymbol{V}$. Como são simétricos, os autovetores são perpendiculares entre si e podem ser definidos com comprimento unitário, de forma que:

$$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U} = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$$

POR EXEMPLO...

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 2 \\ 12 & 13 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$$

$$\lambda^3 - 34\lambda^2 + 225\lambda = \lambda(9-\lambda)(25-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 25, \qquad \lambda_2 = 9, \qquad \lambda_3 = 0$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \lambda\boldsymbol{I}| = 0$$

$$\lambda^2 - 34\lambda + 225 = (25-\lambda)(9-\lambda)$$

$$\lambda_1 = 25, \qquad \lambda_2 = 9$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{9} = 3$$

AUTOVETORES...

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para $\lambda = 25$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T - 25\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 17-25 & 8 \\ 8 & 17-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Analogamente: $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

Por exemplo, para $\lambda = 25$,

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - 25\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 13-25 & 12 & 2 \\ 12 & 13-25 & -2 \\ 2 & -2 & 8-25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -12 & 12 & 2 \\ 12 & -12 & -2 \\ 2 & -2 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} v_{1,1} \\ v_{2,1} \\ v_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-6v_{1,1} + 6v_{2,1} + v_{3,1} = 0$$
$$2v_{1,1} - 2v_{2,1} - 17v_{3,1} = 0$$
$$v_{1,1}^2 + v_{2,1}^2 + v_{3,1}^2 = 1$$

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \end{bmatrix}$$

MATRIZES ORTOGONAIS $\boldsymbol{U}$ E $\boldsymbol{V}$

$$\boldsymbol{V} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{n \times n} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}_{m \times m}$$

onde $\boldsymbol{v}_i$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{u}_i$ são os autovetores de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_m$$

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

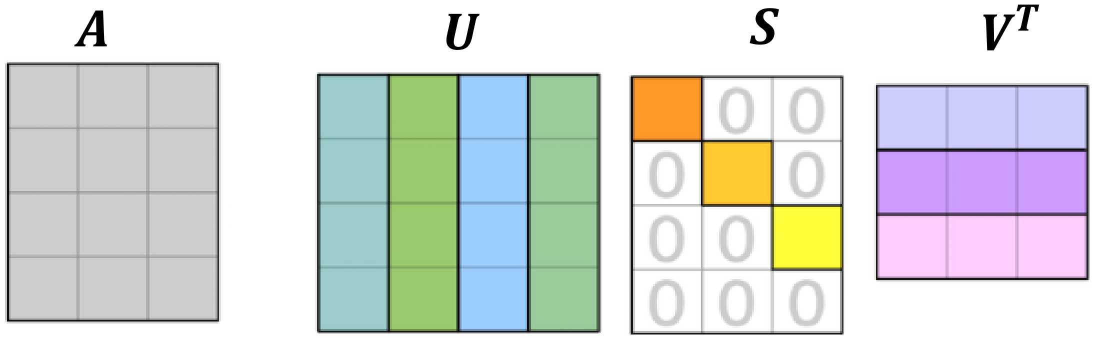
SVD

Definição

SVD

$$A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^T$$

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{U}_{m\times m}\boldsymbol{S}_{m\times n}\boldsymbol{V}^T_{n\times n}$$



$\boldsymbol{A}_{m\times n}$ é uma matriz de valores reais
$\boldsymbol{U}_{m\times m}$ é uma matriz ortogonal
$\boldsymbol{S}_{m\times n}$ é uma matriz diagonal
$\boldsymbol{V}^T_{n\times n}$ é uma matriz ortogonal

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

O **SVD (Singular Value Decomposition)** é um método para fatorar matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{USV}^T = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{r\times r} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{m\times n} \boldsymbol{V}^T$$

onde $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ são as matrizes ortogonais que definimos e $\boldsymbol{S}$ é diagonal.

Os valores da matriz diagonal $\boldsymbol{S}$ são os valores singulares σ_i que acabamos de aprender, e por isso a decomposição recebe este nome.

O número de valores singulares diferentes de zero é igual ao rank da matriz $\boldsymbol{A}$.

MATRIZ DIAGONAL $\boldsymbol{S}$

Se $\boldsymbol{A}$ tem r valores singulares não nulos, $\boldsymbol{S}$ é uma matriz da forma:

$\boldsymbol{D}_{r\times r}$

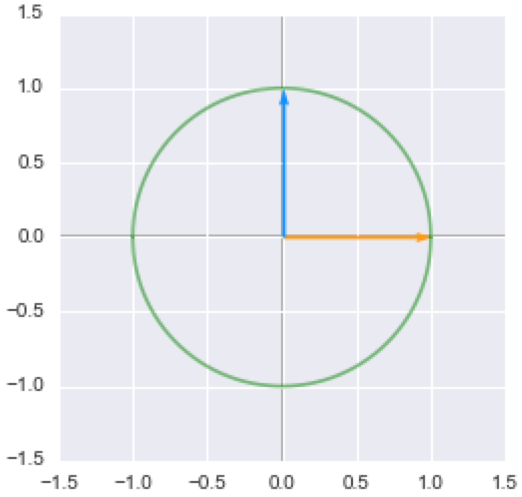
$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Em SVD , os elementos diagonais da matriz $\boldsymbol{S}$, ié, os valores singulares σ_i, são computados em ordem decrescente $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$

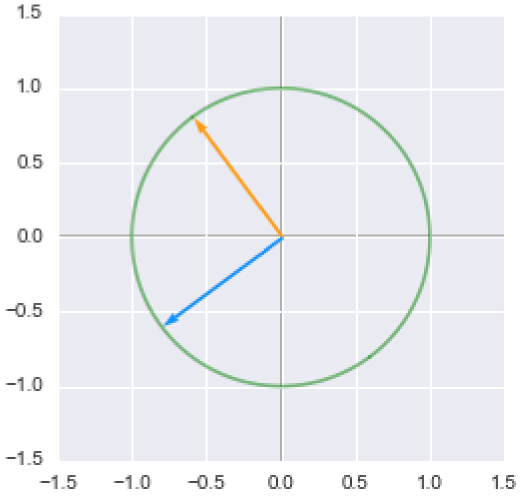
OU SEJA...

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = USV^T = \begin{bmatrix} -0{,}8506 & -0{,}52573 \\ -0{,}52573 & 0{,}8506 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8{,}7134 & 0 \\ 0 & 3{,}3282 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}5945 & -0{,}8040 \\ 0{,}8040 & -0{,}5945 \end{bmatrix}$$

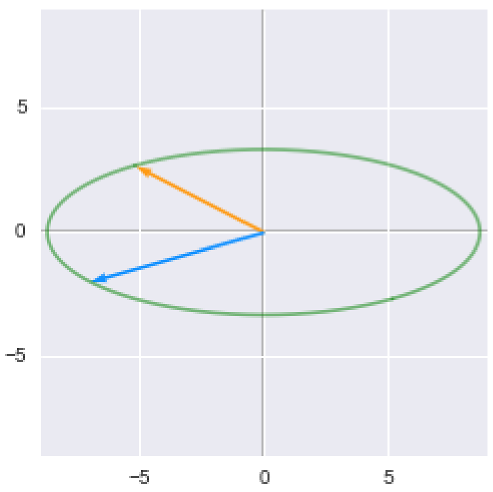
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



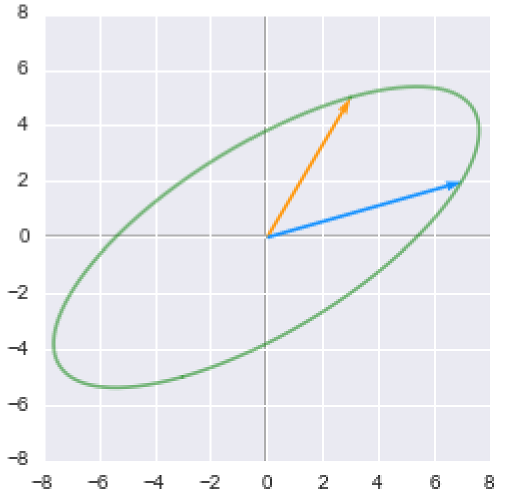
Círculo inicial



Rodado pela matriz $\boldsymbol{V}$

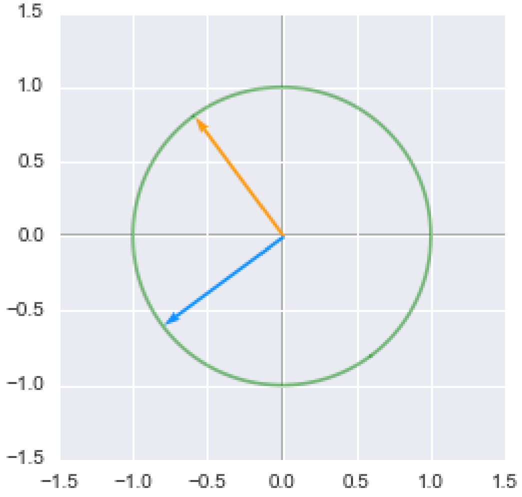


Escalonado pela matriz $\boldsymbol{S}$

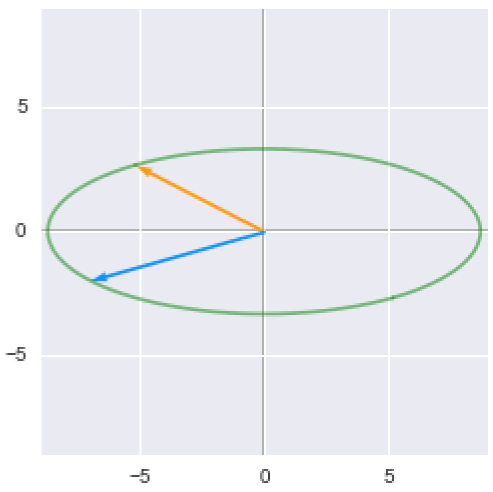


Rodado pela matriz $\boldsymbol{U}$

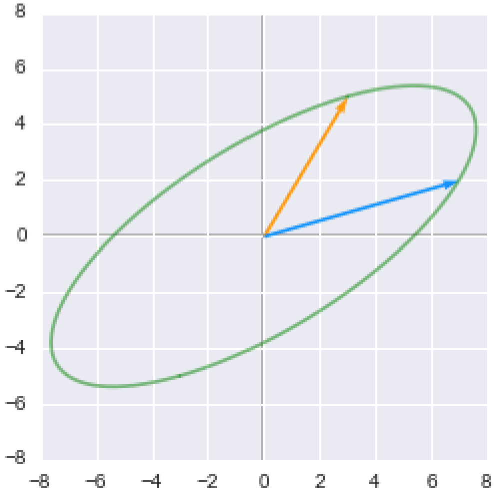
PORTANTO...



Rodado pela matriz $\boldsymbol{V}$



Escalonado pela matriz $\boldsymbol{S}$



Rodado pela matriz $\boldsymbol{U}$

$\boldsymbol{A}$ é uma matriz que pode ser vista como uma transformação linear. Essa transformação pode ser decomposta em três sub-transformações: rotação, escalonamento, rotação. Esses três passos correspondem às três matrizes: $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{V}$.

VEJA QUE ...

$$\boldsymbol{A}_{m\times n} \qquad \boldsymbol{U}_{m\times m} \qquad \boldsymbol{S}_{m\times n} \qquad \boldsymbol{V}^T_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \boldsymbol{a}_{12} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \boldsymbol{a}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \dots & \boldsymbol{u}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \boldsymbol{v}_1^T & - \\ - & \boldsymbol{v}_2^T & - \\ - & \vdots & - \\ - & \boldsymbol{v}_n^T & - \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \sigma_r \boldsymbol{v}_r^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T = (\boldsymbol{u}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 \boldsymbol{v}_1^T \\ \vdots \\ \sigma_r \boldsymbol{v}_r^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}_1)(\sigma_1 \boldsymbol{v}_1^T) + \cdots + (\boldsymbol{u}_r)(\sigma_r \boldsymbol{v}_r^T)$$

$$\boxed{A = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \cdots + \sigma_r \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{v}_r^T}$$

INTERPRETAÇÃO

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

Os valores singulares são ordenados por ordem decrescente. Eles correspondem a um novo conjunto de características que são uma combinação linear dos características originais. A primeira característica explica a maior parte da variância dos dados.

VOLTEMOS AO NOSSO EXEMPLO...

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{A}$ é 2×3 e possui 2 autovalores não nulos $(r = 2)$.

$\boldsymbol{U}$ tem dimensão 2×2, $\boldsymbol{S}$ tem dimensão 2×3 e $\boldsymbol{V}^T$ tem dimensão 3×3,

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{V}^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \overset{\sigma_1}{\boxed{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \overset{\sigma_2}{\boxed{3}} & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{V}^T = \begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1^T \\ \boldsymbol{v}_2^T \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \overset{\sigma_1}{5} \overset{\boldsymbol{u}_1}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{v}_1^T}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}} + \overset{\sigma_2}{3} \overset{\boldsymbol{u}_2}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}} \overset{\boldsymbol{v}_2^T}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \end{pmatrix}}$$

VEJA O EXEMPLO DO NOTEBOOK

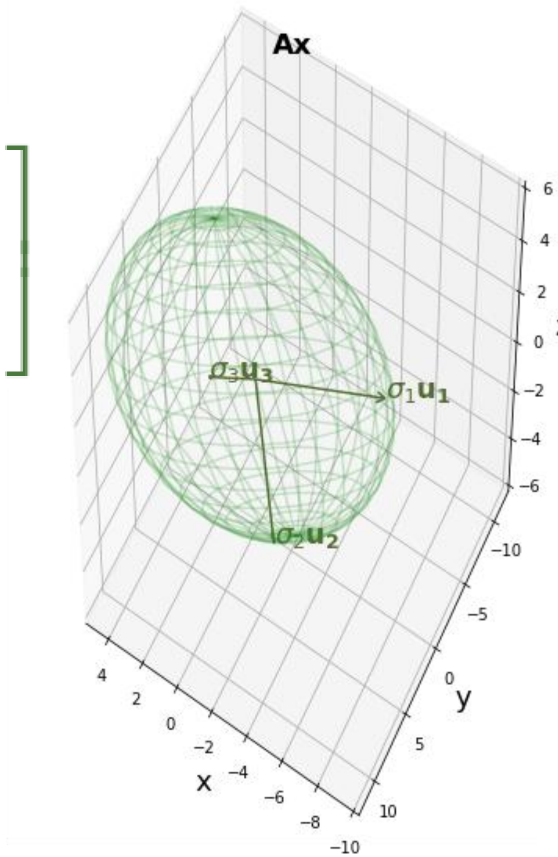
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Os valores singulares são

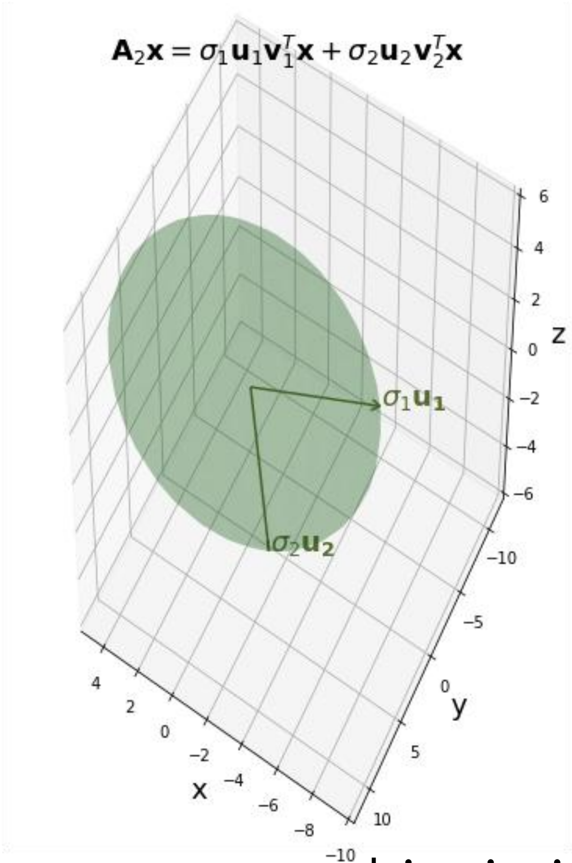
$\sigma_1 = 11{,}97$

$\sigma_2 = 5{,}57$

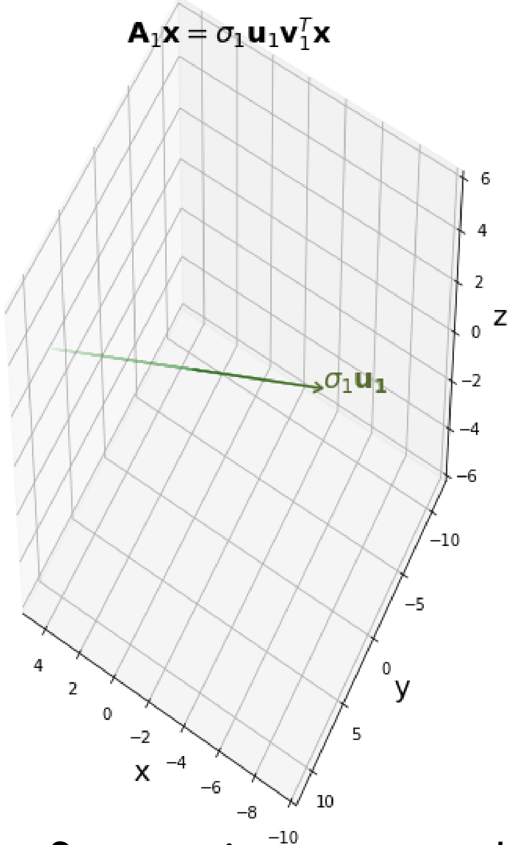
$\sigma_3 = 3{,}25$



O rank de $\boldsymbol{A}_k$ é 3. Então $\boldsymbol{Ax}$ é um elipsóide no espaço 3-d.



Se usarmos apenas os dois primeiros valores singulares, o rank de $\boldsymbol{A}_k$ será 2 e $\boldsymbol{A}_k$ multiplicado por $\boldsymbol{x}$ será um plano.



Se aproximarmos usando o primeiro valor singular, o rank de $\boldsymbol{A}_k$ será 1 e $\boldsymbol{A}_k$ multiplicado por $\boldsymbol{x}$ será uma linha

DIFERENÇAS ENTRE SVD E DECOMPOSIÇÃO EM AUTOVALORES

The singular value decomposition (SVD) provides another way to factorize a matrix, into singular vectors and singular values. The SVD allows us to discover some of the same kind of information as the eigendecomposition. However, the SVD is more generally applicable.
— Ian Goodfellow, Yoshua Bengio, Aaron Courville, *Deep Learning (Adaptive Computation and Machine Learning series)*, pags. 44-45, 2016.

- Nem todas as matrizes possuem uma decomposição em autovalores, porém toda matriz tem uma decomposição em valores singulares.

SVD: O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ANÁLISE DE DADOS COM MÚLTIPLAS VARIÁVEIS

A decomposição em valor singular é uma técnica fundamental para análise de dados multivariados. Por exemplo, SVD é usado para cálculo de **Pseudo inversa.**

Um objetivo comum da análise de dados multivariada é reduzir a dimensão do problema, escolhendo um pequeno subespaço que captura propriedades importantes dos dados.

Dado que os elementos diagonais da matriz (chamados de valores singulares) no SVD são calculados em ordem decrescente, usa-se SVD para uma **aproximação por matriz de baixo rank**, i.é, redução de dimensão:

- **Análise de componentes principais**

INVERSA E DADOS REAIS

$$Ax = b$$
$$x = A^{-1}b$$

Mas nem todas as matrizes são inversíveis.

PSEUDOINVERSA MOORE-PENROSE

Pseudo inversa de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{+}$$

de forma que

$$\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}) \leftarrow svd(\boldsymbol{A})$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{USV}^{T}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{USV}^{T}\right)^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \left(\boldsymbol{V}^{T}\right)^{-1}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{U}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{+} = \mathbf{V}\boldsymbol{S}^{+}\boldsymbol{U}^{T}$$

onde $\boldsymbol{S}^{+}$ é o recíproco $\frac{1}{x_i}$ dos elementos não nulos de $\boldsymbol{S}$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{+} = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ (singular, inversa não existe)

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{USV}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{VS}^+\boldsymbol{U}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

APROXIMAÇÃO POR MATRIZ DE BAIXO RANK

Eliminação de ruídos,PCA, compactação de arquivos, etc...

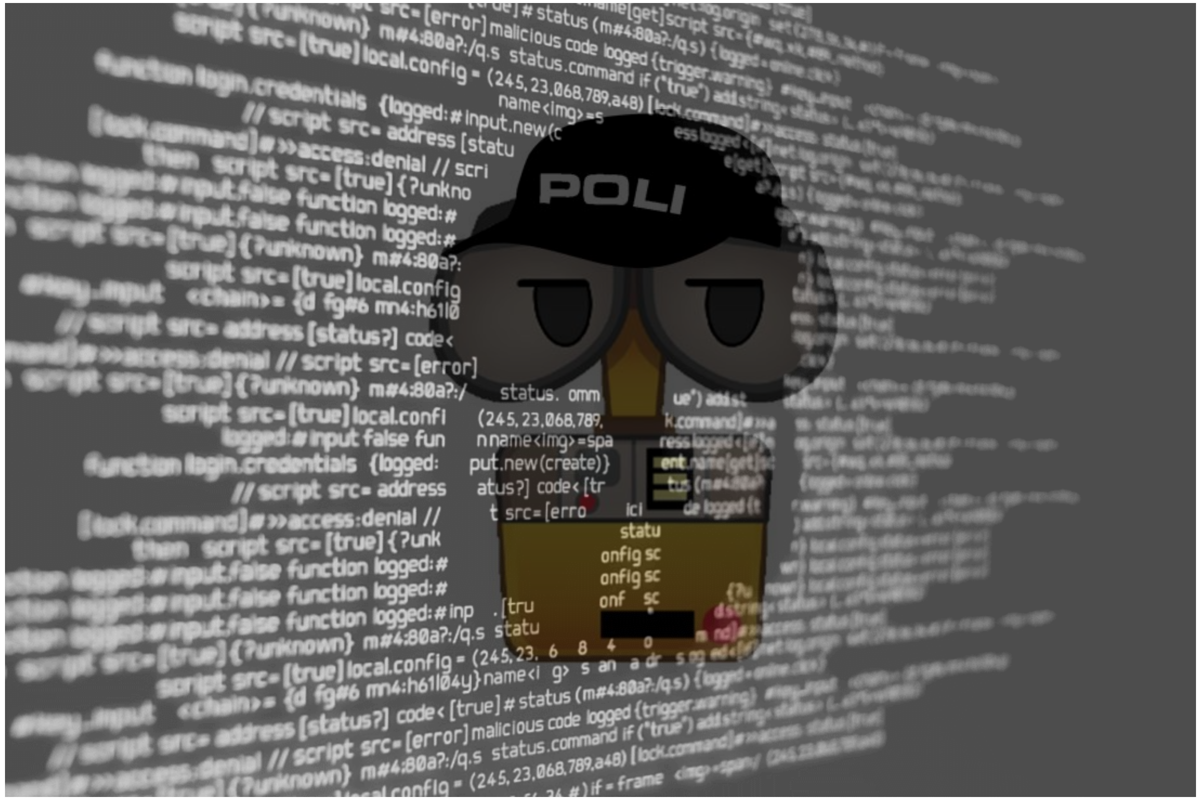
PECE Programa de Educação Continuada
Escola Politécnica da USP

PCA

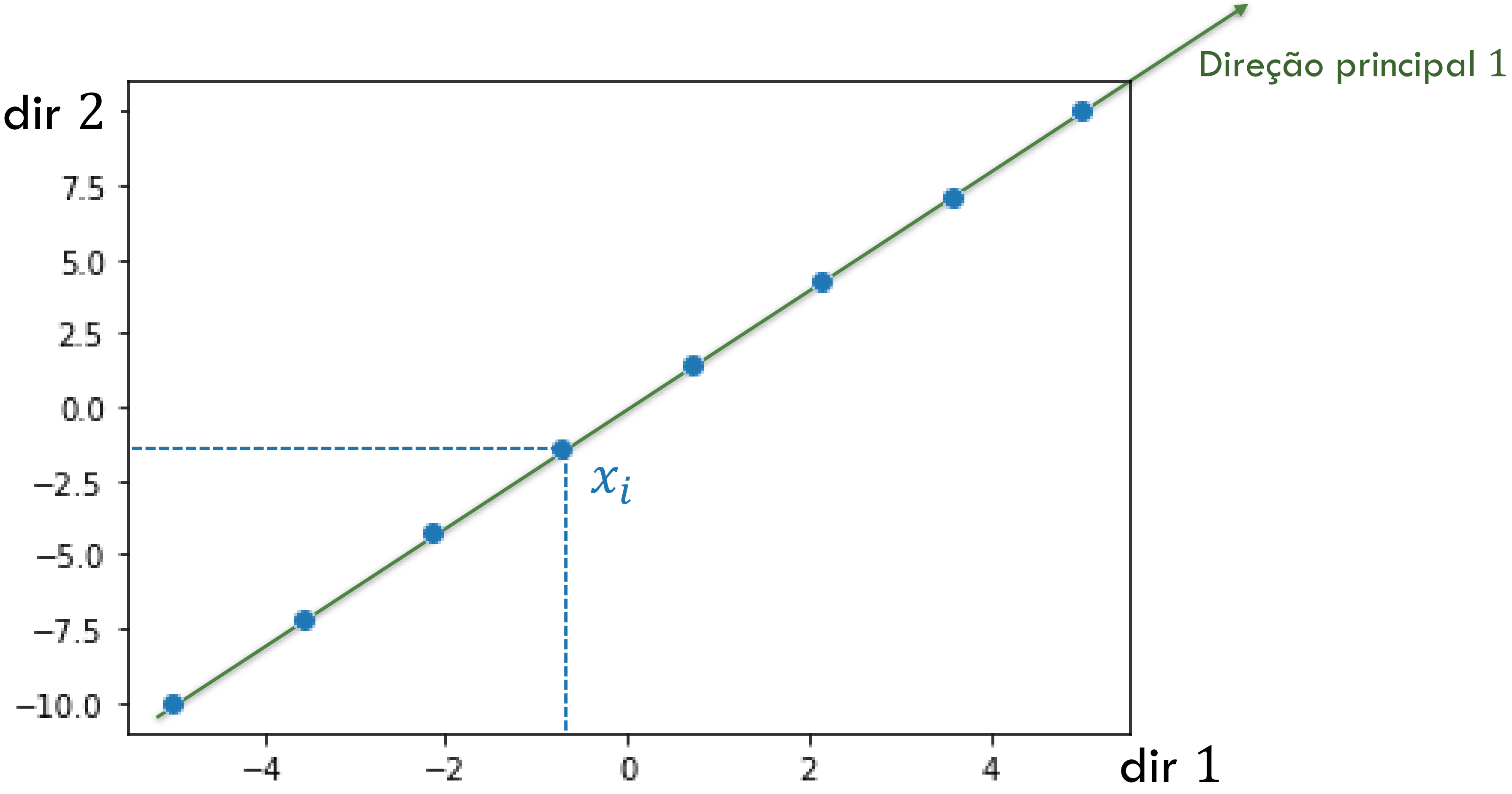
Qual a ideia?

ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

A Análise de Componentes Principais ou PCA (Principal Component Analysis) tem como objetivo **encontrar um meio de condensar a informação contida em várias variáveis originais em um conjunto menor de variáveis estatísticas (componentes) com uma perda mínima de informação.**



Uma questão-chave na análise de dados é descobrir **quais variáveis são responsáveis pela maior parte da variação nos dados** – essas podem não ser as variáveis que você mediu, mas podem ser uma combinação linear das variáveis medidas!



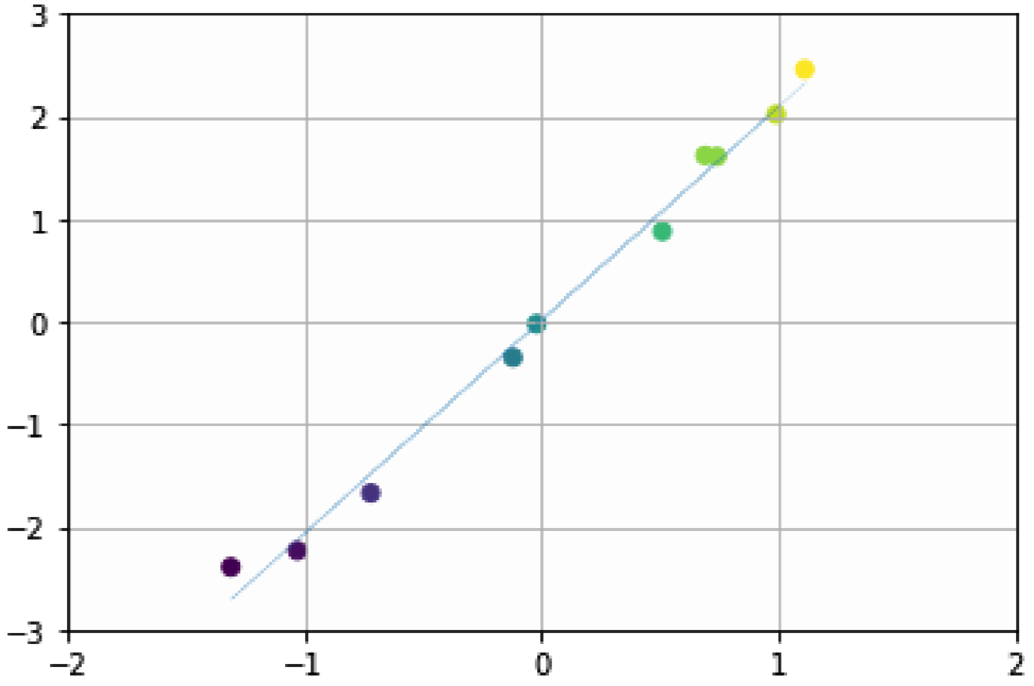
EXEMPLO

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1{,}03 & 0{,}74 & -0{,}02 & 0{,}51 & -1{,}31 & 0{,}99 & 0{,}69 & -0{,}12 & -0{,}72 & 1{,}11 \\ -2{,}23 & 1{,}61 & -0{,}02 & 0{,}88 & -2{,}39 & 2{,}02 & 1{,}62 & -0{,}35 & -1{,}67 & 2{,}46 \end{bmatrix}$$

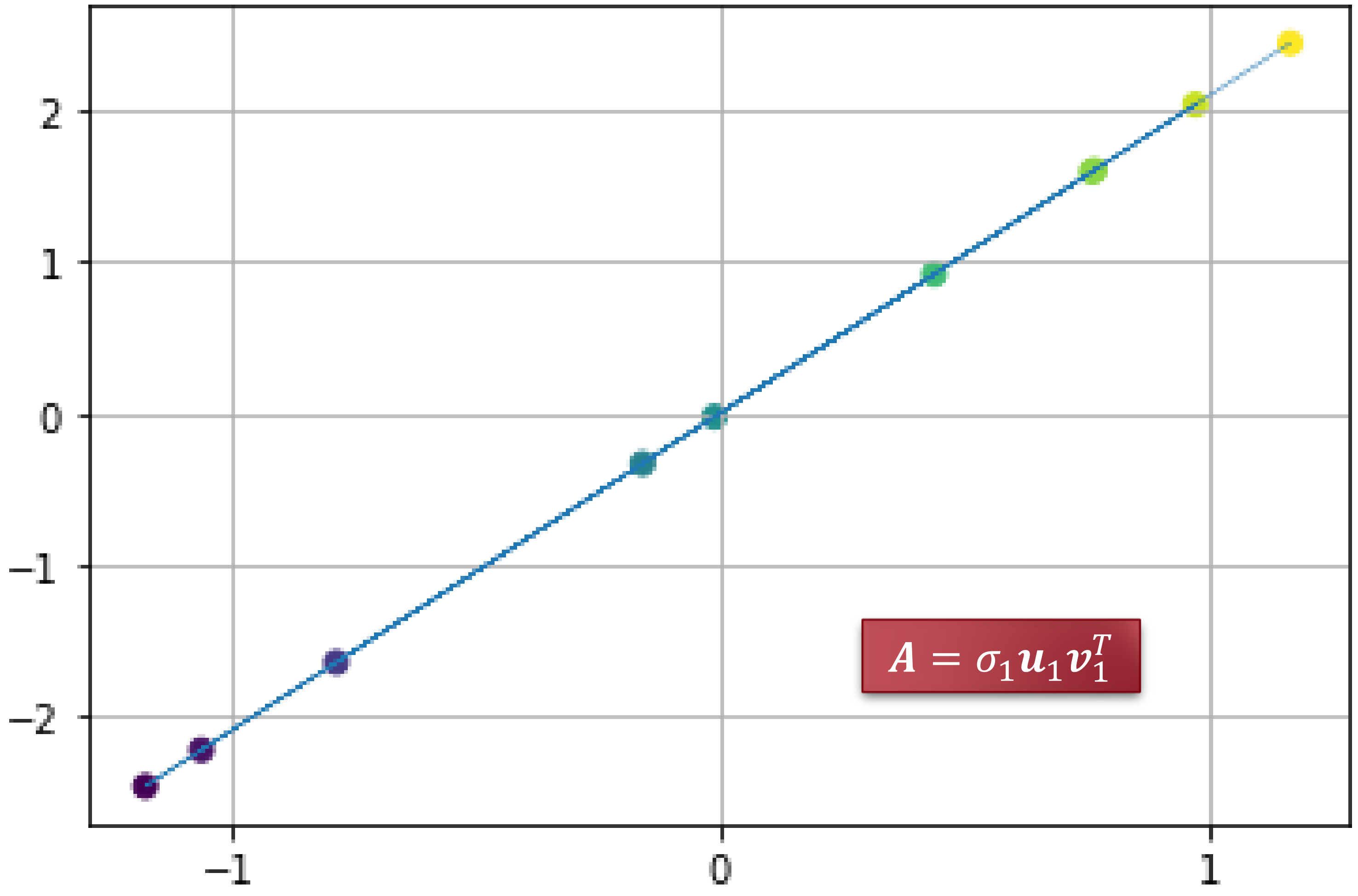
SVD:

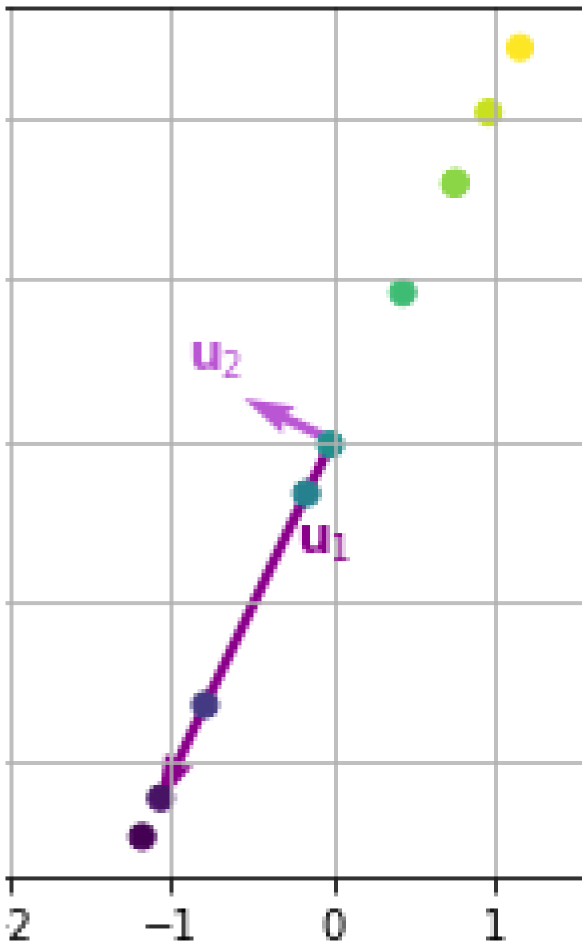
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 6{,}040 & 0 \\ 0 & 0{,}218 \end{bmatrix}$$

Com um valor singular muito maior que o outro, pode-se assumir que o pequeno valor de σ_2 é devido ao ruído nos dados e que esse valor singular seria idealmente zero.



Nesse caso, a matriz teria uma classificação, o que significa que todos os dados estão na linha definida por $\boldsymbol{u}_1$.





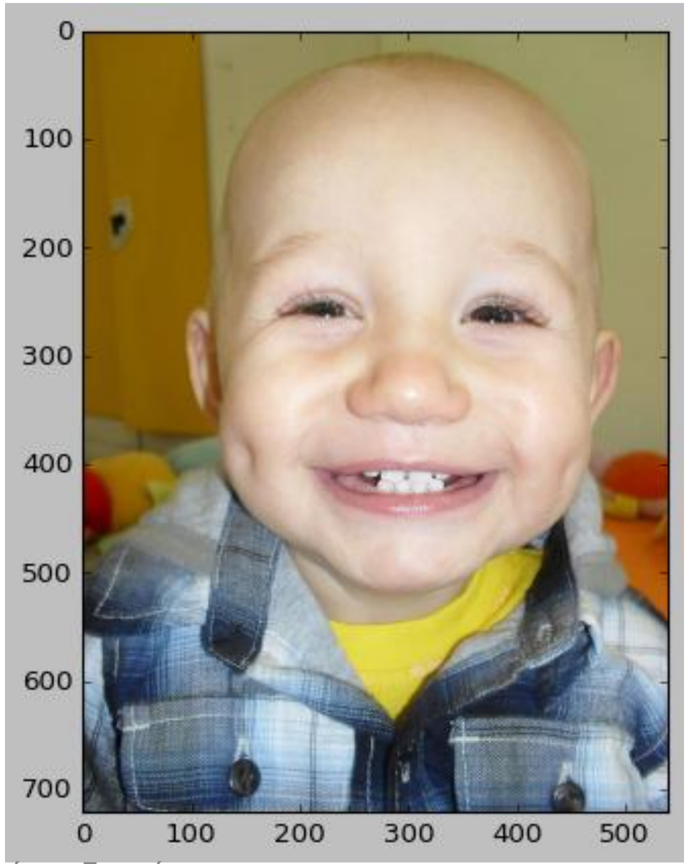
FAÇA VOCÊ

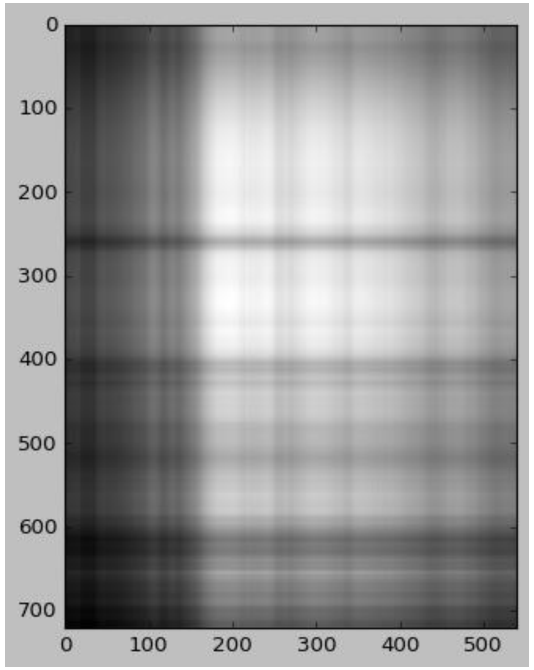
$$A = \begin{bmatrix} 2.9 & -1.5 & 0.1 & -1.0 & 2.1 & -4.0 & -2.0 & 2.2 & 0.2 & 2.0 & 1.5 & -2.5 \\ 4.0 & -0.9 & 0.0 & -1.0 & 3.0 & -5.0 & -3.5 & 2.6 & 1.0 & 3.5 & 1.0 & -4.7 \end{bmatrix}$$

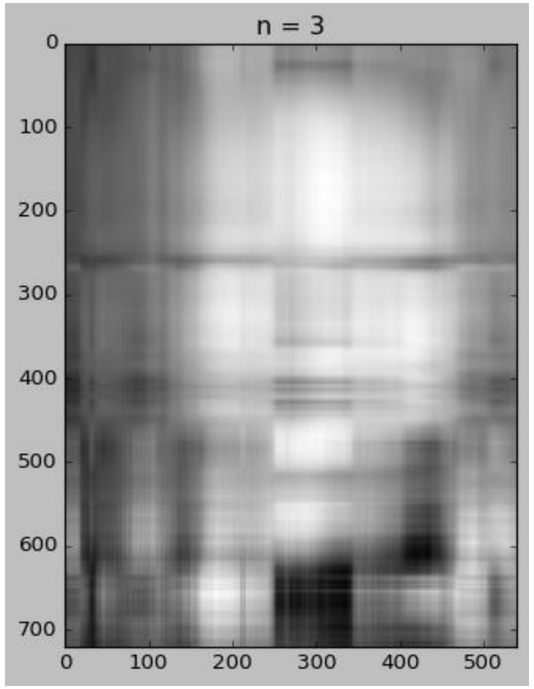
COMPACTAÇÃO DE IMAGEM (720, 540)

Compactação da imagem feita utilizando SVD.

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$




0 100 200 300 400 500 600 700
0 100 200 300 400 500


n = 3
0 100 200 300 400 500 600 700
0 100 200 300 400 500

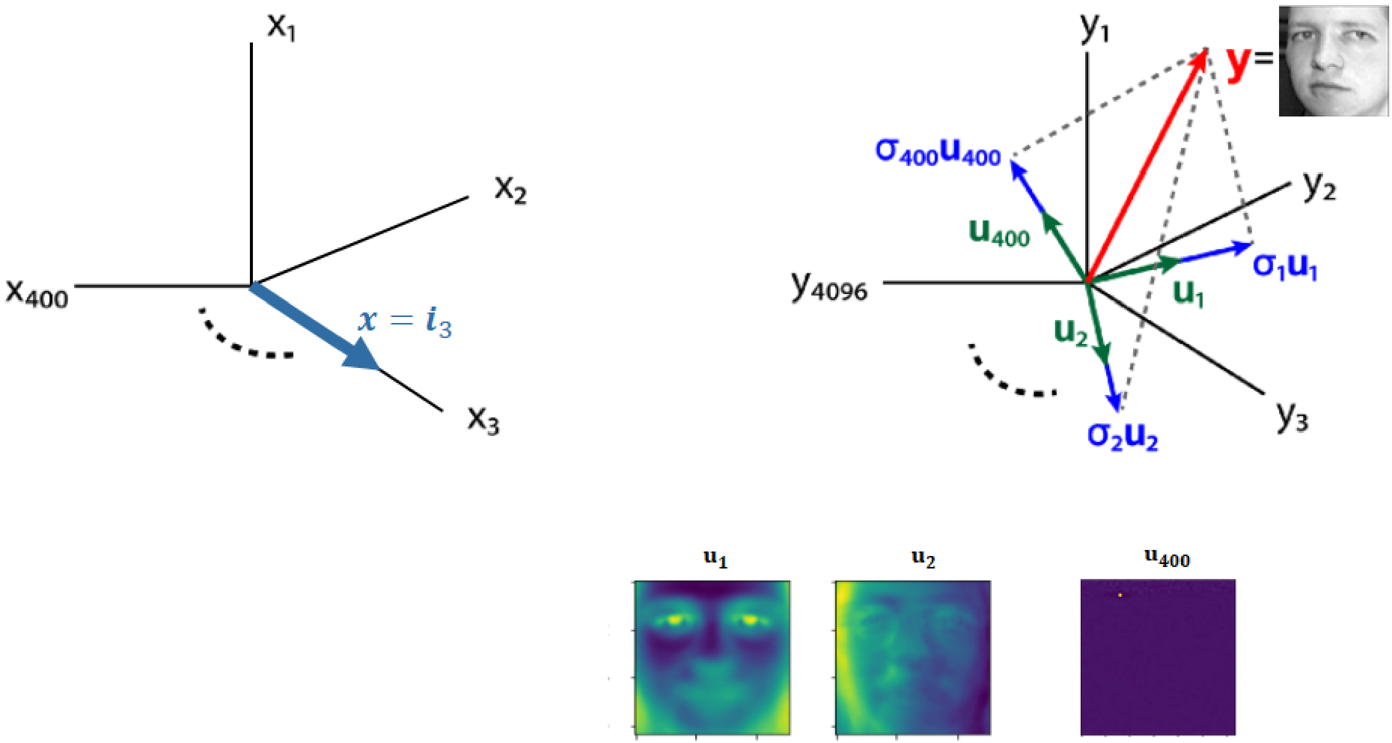

n = 25
0 100 200 300 400 500 600 700
0 100 200 300 400 500


n = 50
0 100 200 300 400 500 600 700
0 100 200 300 400 500

EIGENFACES

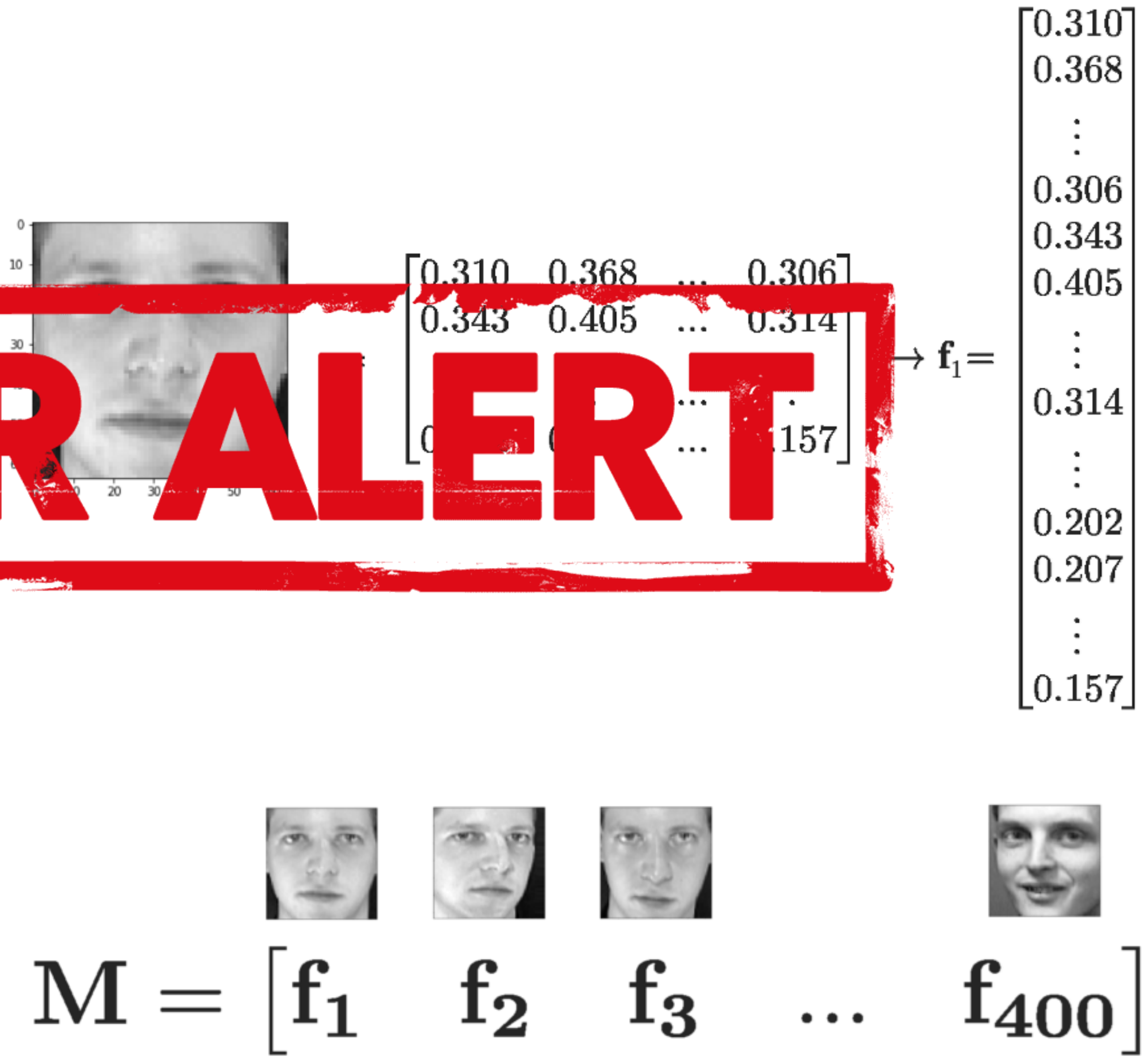
O termo *Eigenfaces* refere-se, basicamente, a um conjunto de características que definem a variação global entre as imagens faciais. O objetivo é **representar uma imagem que retrata o rosto de uma pessoa como uma combinação linear de um conjunto de imagens básicas chamadas de eigenfaces.**

$$i_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad y = Mi_3 \qquad y = \begin{bmatrix} 0.19835 \\ 0.19421 \\ \vdots \\ 0.75207 \\ 0.73967 \end{bmatrix}$$



MATRIZ M

O termo *Eigenfaces* refere-se, basicamente, a um conjunto de características que definem a variação global entre as imagens faciais. O objetivo é **representar uma imagem que retrata o rosto de uma pessoa como uma combinação linear de um conjunto de imagens básicas chamadas de eigenfaces.**



ENTREGA NO MOODLE ATÉ 24/03, 23:59

Antes de fazer a lição, estude a aula. Responda às questões manualmente:

1. Encontre os valores singulares das matrizes abaixo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Construa o SVD de cada matriz abaixo:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OPCIONAL

1. Com os dados de altura e peso de homens e mulheres, que você pode retirar do link* ,
   - Ache a matriz $\boldsymbol{A}$;
   - Ache os valores singulares;
   - Ache $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{V}^T$;
   - Escreva a matriz na forma aproximada,

$$\boldsymbol{A}_k = \sigma_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{v}_1^T + \sigma_2 \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{v}_2^T + \cdots + \sigma_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^T;$$

   - Discuta suas conclusões, analisando a matriz $\boldsymbol{A}_k$.

*https://www.kaggle.com/datasets/mustafaali96/weight-height

ATÉ A PRÓXIMA SEMANA!!!

Revejam o material disponibilizado em aula. NÃO PERCAM A PRÓXIMA AULA.