# Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

4 декабря 2024 г.

# Содержание

# 1 Лекция 5

**Пропозициональные ф-лы**:

- Всегда $=1$ - Тавтологии - Выполнимые
- М. Б. $=0$ и $=1$ - Опровержимые - Выполнимые
- Всегда $=0$ - Опровержимые - Противоречия

"Важные"тавтологии (Логические законы):

1) Закон непротиворечия:
$$\neg(A \land \neg A)$$

2) Закон двойного отрицания:
$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

3) Закон исключённого третьего:
$$A \lor \neg A$$

**Пример.** *Неконструктивное док-во с использованием закона исключённого третьего:*

**Теорема 1.1.** $\exists x, y\colon x \notin Q, y \notin Q, x^y \in Q$

*Доказательство.* Рассм. выр-е: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$:

1) Оно $\in Q \Rightarrow$ нашли пример
2) Оно $\notin Q \Rightarrow x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$:
$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$\square$

4) Контрапозиция:
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

5) Законы Де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

**Задача о выполнимости условий:** даны ф-лы $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$

Вопрос: могут ли они все быть одновременно истинны?

Это эквив. вопросу о выполнимости:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

**Пример.** *Превращение мат. задачи в задачу выполнимости:*
*1976г. - з-ча 4 красок решена комп. перебором.*
*Вершина графа $v \mapsto$ 2 бита. $(p_v, q_v)$ - (область на карте)*
*$u, v$ - соседний области $\Rightarrow$ условие на отличие цветов:*

$$(p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

## 1.1 Логический вывод

**Определение 1.1. Логический вывод** - п-ть формул, в кот. каждая ф-ла либо является аксиомой, либо получается из более ранних по одному из правилу вывода.

**Замечание.**

$(A \to (B \to C))$ *- сл-ие из 2 посылок*

**Схемы аскиом** (Аксиомы - рез-т подстановки конкретных ф-л вместо $A, B, C$)

1) $A \to (B \to A)$

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3) $(A \wedge B) \to A$

4) $(A \wedge B) \to B$

5) $A \to (B \to (A \wedge B))$

6) $A \to (A \vee B)$

7) $B \to (A \vee B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ - "Разбор случаев"

9) $\neg A \to (A \to B)$

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - "Рассуждение от противного"

11) $A \vee \neg A$

**Правило вывода:** modus ponens:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

**Теорема 1.2** (О корректности). *$A$ - выводима $\Rightarrow$ $A$ - тавтология*

*Доказательство.* Акс. 1-11 - тавтологии.

$$\begin{cases} A \text{ - тавтология} \\ A \to B \text{ - тавтология} \end{cases} \Rightarrow B \text{ - тавтология}$$

□

**Теорема 1.3** (О полноте). *$A$ - тавтология $\Rightarrow$ $A$ - выводима*

**Обозначение.**
$\vdash A$ - *$A$ выводима*
$\models A$ - *$A$ тавтология*

**Пример.** $\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$

*1)* $A \to (B \vee A)$ - *акс. 7*

*2)* $B \to (B \vee A)$ - *акс. 6*

*3)* $(A \to (B \vee A)) \to ((B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A)))$ - *акс. 8*

*4)* $(B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A))$ - *modus ponens 1, 3*

*5)* $(A \vee B) \to (B \vee A)$ - *modus ponens 2, 4*

**Пример.** $\vdash (A \to A)$ - *Закон тождества.*

1) $A \to ((A \to A) \to A)$ - *акс. 1*

2) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - *акс. 2*

3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - *modus ponens 1, 2*

4) $A \to (A \to A)$ - *акс. 1*

5) $A \to A$ - *modus ponens 4, 3*

# 2 Лекция 6

**Определение 2.1. Вывод** - п-ть $\phi_1, \ldots, \phi_n$, т. ч. $\forall i$:

- $\phi_i$ - аксиома
- $\phi_i$ - получается по правилам MP из $\phi_i, \phi_k, j < i, k < i$.
  Это значит, что $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$

Ф-ла **выводима** ($\vdash \phi$), если $\phi$ встреч-ся в нек-ром выводе.

**Теорема 2.1.** $\phi$ - *тавтология* $\Rightarrow (\vdash \phi)$

**Пример.**

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

1)
$$\neg A \to (A \to B) \text{ аксиома 9}$$

2)
$$B \to (A \to B) \text{ - аксиома 9}$$

3)
$$(\neg A \to (A \to B)) \to ((B \to (A \to B)) \to ((A \vee B) \to (A \to B)))$$

4)
$$(B \to (A \to B)) \to ((\neg A \vee B) \to (A \to B)) \text{ - MP 1, 3}$$

*5)*

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

**Определение 2.2.** Вывод из мн-ва посылок $\Gamma$ - это п-ть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ при этом $\phi_i$ может быть либо аксиомой, либо эл-т $\Gamma$, либо получается по m. p.

**Лемма 2.2** (О дедукции).

$$\Gamma \vdash A \to B \iff \Gamma \cup \{ A \} \vdash B$$

**Пример** (Силлогизм).

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \iff$$

$$\iff \{ A \to B \} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$$
$$\iff \{ A \to B, B \to C \} \vdash (A \to C)$$
$$\iff \{ A, A \to B, B \to C \} \vdash C$$

*1)* $A$ *- посылка*

*2)* $A \to B$ *- посылка*

*3)* $B$ *по MP 1, 2*

*4)* $B \to C$ *- посылка*

*5)* $C$ *- MP 3, 4*

*Доказательство.* $\Rightarrow$) Если вывели $A \to B$, то из $\Gamma \cup \{ A \}$ можно вывести $B$ по MP

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \cup \{ A \} \vdash B$. Тогда сущю вывод $\phi_1, \ldots, \phi_n = B$ из $\Gamma \cup \{ A \}$

Каждый $\phi_i$ - либо акс., либо $\in \Gamma$, либо $= A$, либо вывод-ся по MP. Мы докажем по инд-ции, что $\Gamma \vdash A \to \phi_i$:

1) $\phi_i$ - акс.

   1) $\phi_i$

   2) $\phi_i \to (A \to \phi_i)$ - A1

3) $A \to \phi_i$, MP 1, 2.

2) $\phi_i \in \Gamma$, аналогичен (1)

3) $\phi_i = A$. На прошлой лекции выводили $\vdash A \to A$ без $\Gamma$

4) $\phi_i$ по MP: $\exists j, k, < i$:

$$\phi_k = (\phi_j \to \phi_i)$$

По инд-ции: $\Gamma \vdash A \to \phi_j, \Gamma \vdash A \to \phi_k$, т. е. $\Gamma \vdash A \to (\phi_j \to \phi_i)$:

$$(A \to (\phi_j \to \phi_i)) \to ((A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i)) \text{ - A2}$$

$$(A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

$$(A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

□

**Пример.**

$$\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$$

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

*1)* $A \wedge B$ *- посылка*

*2)* $(A \wedge B) \to B$ *- акс. 4*

*3)* $B$ *- MP 1, 2*

*4)* $(A \wedge B) \to A$ *- акс. 3*

*5)* $A$ *- MP 1, 4*

*6)* $(B \to (A \to (B \wedge A)))$ *- акс. 5*

*7)* $A \to (B \wedge A)$ *- MP 3, 6*

*8)* $B \wedge A$ *- MP 5, 7*

**Лемма 2.3** (Правила введения и разбиения конъюнкции)**.**

$$\Gamma \cup \{ A \wedge B \} \vdash C$$

$$\iff \Gamma \cup \{ A, B \} \vdash C$$

*Также:*

$$\Gamma \vdash A \wedge B \iff \begin{cases} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash B \end{cases}$$

**Пример.**

$$(A \to \neg A) \to \neg A$$

*Вывод:*

*1-5)* $A \to A$

*6)* $(A \to A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ - *A10*

*7)* $(A \to \neg A) \to \neg A$ - *MP 5,6*

**Пример.**

$$\vdash A \to \neg\neg A$$

$$\iff A \vdash \neg\neg A$$

$$\vdash \neg A \to (A \to B) \iff$$

$$\neg A \vdash A \to B \iff \neg A, A \vdash B \iff A \vdash \neg A \to B$$

$$\vdash A \to (\neg A \to B)$$

$$A \vdash \neg\neg A$$

*1)* $A \to (\neg A \to B)$

*2)* $A$ - *посылка*

*3)* $\neg A \to B$, *mp 2, 1*

*4)* $A \to (\neg A \to \neg B)$

*5)* $\neg A \to \neg B$, *MP 2, 4*

*6)* $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ - *A10*

*7)* $(\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A$ - *MP 3, 6*

*8)* $\neg\neg A$ - *MP 5, 7*

**Лемма 2.4** (Правило рассуждения от противного)**.**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

*Доказательство.*

$$\begin{cases} \Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B \\ \Gamma, A \vdash \neg B \iff \Gamma \vdash A \to \neg B \end{cases} \iff \Gamma \vdash \neg A, \text{ A10 + MP x2}$$

$\square$

**Пример** (Закон контрапозиции).

$$\cfrac{\cfrac{A \to B, \neg B, A \vdash B \qquad A \to B, \neg B, A, \vdash \neg B}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}\ \textit{Рассуждение от противного}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\ \textit{ЛОД x2}$$

**Пример** (Закон Де Моргана).

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$

$$\iff (\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$$

*1)* $(A \wedge B) \to A$ - *акс. 3*

*2)* $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ - *закон контрапозиции.*

*3)* $(A \wedge B) \to B$ - *акс. 4*

*4)* $\neg B \to \neg(A \wedge B)$ - *контрапозиция*

*5)* $(\neg A \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg B \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)))$

*6)* *MP 2x*

**Лемма 2.5** (Правило контрапозиции). $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$

**Лемма 2.6** (Правило разбора случаев).

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

**Лемма 2.7** (Правило исчерп. разбора случаев).

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

**Пример.**

$$\cfrac{\cfrac{\neg\neg A, A \vdash A \qquad \neg\neg A, \neg A \vdash A}{\neg\neg A \vdash A}}{\vdash \neg\neg A \to A}$$

# 3 Лекция 7

<u>**Теорема**</u> **3.1** (О полноте ИВ)**.** *$\phi$ - тавтология $\Rightarrow$ $\phi$ выводима*

Правило исчерп. разбора случаев: Пусть $\Gamma$ - нек-рое мн-во ф-ул, при это $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$
Тогда: $\Gamma \vdash B$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

<u>**Обозначение**</u>**.**

$$p^{\varepsilon} \rightleftharpoons \begin{cases} p, \varepsilon = 1 \\ \neg p, \varepsilon = 0 \end{cases}$$

<u>**Лемма**</u> **3.2** (Основная)**.** *Пусть $\phi$ - ф-ла от n переменных ($\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$).*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n, \phi(a_1, \ldots, a_n) = a \in \{0, 1\}$$

Тогда:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi^a$$

Рассм. переход:
ОСНОВНАЯ ЛЕММА $\Rightarrow$ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ИВ

$$\phi \text{ - тавтология} \Rightarrow \text{ при всех } (a_1, \ldots, a_n)$$
$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1 \underset{\text{По лемме}}{\Longrightarrow} p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi$$

<u>**Пример.**</u> *$n = 3$: le Picture*

<u>**Лемма**</u> **3.3** (Базовая)**.**
*AND-ы:*

$$A, B \vdash A \wedge B$$
$$\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$

*OR-ы:*

$$A, B \vdash A \vee B$$

$$\neg A, B \vdash A \vee B$$

$$A, \neg B \vdash A \vee B$$

$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$$

*Implication-ы:*

$$A, B \vdash A \to B$$

$$\neg A, B \vdash A \to B$$

$$A, \neg B \vdash \neg(A \vdash B)$$

$$\neg A, \neg B \to A \to B$$

*И ещё:*

$$\neg A \vdash \neg A$$

$$A \vdash \neg(\neg A)$$

*Док-во основной леммы.* Инд-ция по построению ф-лы:

База) Переменная: $p_i^{a_i} \vdash p_i^{a_i}$

Переход) Пусть, например:

$$\phi = (\xi \wedge \eta)$$

$$\xi(a_1, \ldots, a_n) = a, \eta(a_1, \ldots, a_n) = b \Rightarrow \phi(a_1, \ldots, a_n) = a \cdot b$$

По предположению индукции:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \xi^a \text{ и } p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \eta^b$$

По базовой лемме:

$$\xi^a, \eta^b \vdash \phi^{a \cdot b}$$

Запишем эти 3 вывода (**подряд**):

$$p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \phi^{a \cdot b}$$

□

*Другое док-во.* Пусть Γ - мн-во пропозициональных ф-л.

**Определение 3.1.** Γ **совместно**, если при некот. значениях переменных все ф-лы из Γ истинны.

**Определение 3.2.** $\Gamma$ - **противоречиво**, если для некот. ф-лы $\phi$ верно:

$$\begin{cases} \Gamma \vdash \phi \\ \Gamma \vdash \neg\phi \end{cases}$$

**Теорема 3.4.** $\Gamma$ *совместна* $\overset{*}{\iff}$ $\Gamma$ *непротиворечива.*

Рассмотрим связь теоремы о совм. и непрот. с теор. о корр. и полн.:

**Теорема 3.5** (О корректности)**.**

$$\vdash \phi \Rightarrow \{\neg\phi\} \text{ - \textit{противор.}} \overset{*}{\Longrightarrow} \{\neg\phi\} \text{ - \textit{несовм.}} \Rightarrow \forall a, \neg\phi(a) = 0 \iff \phi(a) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi \text{ - \textit{тавтология}}$$

**Теорема 3.6** (О полноте)**.**

$$\phi \text{ - \textit{тавтология}} \Rightarrow \{\neg\phi\} \text{ - \textit{несовм.}} \overset{*}{\Rightarrow} \{\neg\phi\} \text{ - \textit{противоречиво}} \Rightarrow \neg\neg\phi \vdash \phi$$

$$\frac{\neg\phi \vdash B \qquad\qquad \neg\phi \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg\phi}$$

□

*Доказательство.* 1) $\Gamma$ против. $\Rightarrow$ $\Gamma$ несовм.

**Теорема 3.7** (Обобщённая теорема о корректности)**.** *Если* $\Gamma \vdash A$ *и все ф-лы из* $\Gamma$ *верны на* $(a_1, \ldots, a_n)$*, то и* $A$ *верна на том же наборе.*

Д-во: индукция по номеру ф-лы в выводе.

$$\Gamma \text{ - совм.} \Rightarrow \text{ Все ф-лы из } \Gamma \text{ верны на нек-ром наборе.}$$

$$\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi \text{ верно на том же наборе}$$

$$\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\phi \Rightarrow -----|| -----$$

Но $\phi$ и $\neg\phi$ не м. б. верны одновременно. Противор.

2) $\Gamma$ непрот. $\Rightarrow$ $\Gamma$ совм.
Пусть $\triangle$ непрот. Будем говорить, что $\triangle$ - полное, если для $\forall\phi$ верно $\triangle \vdash \phi$ или $\triangle \vdash \neg\phi$.

**<u>Лемма</u> 3.8** (I)**.** *$\Gamma$ непрот $\Rightarrow \Gamma \subset \triangle$ для некот. полного непрот. $\triangle$*

**<u>Лемма</u> 3.9** (II)**.** *$\triangle$ полное, непрот. $\Rightarrow \triangle$ - совм.*

*Док-во леммы I для счётного мн-ва перемен.* Если переменных сч. мн-во то и ф-лы тоже.
Пусть $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ - все ф-лы.
Опр. $\Gamma_i$ по инд-ции:

$$\Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\}, \text{ - если это непрот.} \\ \Gamma_{i-1} \cup \{\, \neg\phi_i \,\} \text{ - иначе} \end{cases}$$

**<u>Утверждение</u> 3.1.** *Все $\Gamma_i$ - непрот.*

*Доказательство.*

$$\begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\phi_i \\ \Gamma \cup \{\, \neg\phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\neg\phi_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma_{i-1}$ - прот. $\Rightarrow$ пришли к противоречию.

□

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$$
$$\triangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \text{ - тоже непрот.}$$

Если $\triangle$ прот., то прот. использ. кон. число ф-л из $\triangle$. Каждое $\delta_j$ лежит в $\Gamma_{k_j}$. Тогда прот. выв-ся из $\Gamma_{max\{\,k_j\,\}}$. Но все конечные $\Gamma_i$ непрот.

*Док-во леммые II.* $\triangle$ - полн. $\Rightarrow$ для перем. $p_i$, $\triangle \vdash p_i \vee \triangle \vdash \neg p_i$.
Набор. значений:

$$p_i = \begin{cases} 1, \triangle \vdash p_i \\ 0, \triangle \vdash \neg p_i \end{cases} \tag{1}$$

Д-м, что ф-лы из $\triangle$ верны на системе (1). Ф-ла - перем. $\Rightarrow$ согл. опр. системы (1):

$$\phi = \neg\psi$$

□

Более общ утв.:

$$\begin{cases} \triangle \vdash \phi \Rightarrow \phi \text{ верна на системе } (1) \\ \triangle \nvdash \phi \Rightarrow \phi \text{ - неверна на системе } (1) \end{cases}$$

$\square$

$\square$

# 4 Лекция 8

Ф-лы

| Выполнимые | Невыполнимые |
|---|---|

## 4.1 Выр-ем задачи через вып-ть ф-л

1) **Раскраски:**
Дан граф $G = (V, E)$. Цель, построить 3-раскраску

$$V \to \{1, 2, 3\} : (v, u) \in E \Rightarrow col(u) \neq col(v)$$

Вершина $u \mapsto (p_u, q_u)$

| цвет | знач перем |
|---|---|
| не сущ | 00 |
| 1 | 01 |
| 2 | 10 |
| 3 | 11 |

Усл-ие на ребро:

$$(v, u) \mapsto (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Итоговая ф-ла:

$$\bigcap_{(v,u) \in E} (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Вып-ма т. и т. т., когда граф раскрашен в 3 цвета.

2) **Расстановка ферзей**:

$$n \times n\colon p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{на клетке } (i,j) \text{ стоит ферзь} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - в i-ой строке} > 1 \text{ Ф.}$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{ik}) \text{ - в i-ой строке} \leq 1 \text{ Ф}$$

$$(\neg p_{ik} \vee \neg p_{jk}) \text{ - в i-ой вертикали} \leq 1 \text{ Ф}$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на диагонали} \leq 1 \text{ Ф}$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на побочной диагонали} \leq 1 \text{ Ф}$$

Вся ф-ла - конкатенация всех условий.

3) **З-ча о клике**:
Дан граф $G, q_{uv} = 1 \iff (u,v) \in E$
Вопрос: $\exists?$ клика из $k$ вершин.

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k)\colon \forall i \neq j, (v_i, v_j) \in E$$

$$\bigvee_{(v_1,v_2,\ldots,v_k)} \bigwedge_{i \neq j} q_{v_i,v_j} \text{ - длина} \sim C_n^k =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{(n-k)^k}{k!} > \left(\frac{n-k}{k}\right)^k \underset{k=\frac{n}{10}}{=} 9^{\frac{n}{10}}$$

Можно ли понимать $v_1, v_2, \ldots, v_k$ как перемен. и написать ф-лу:

$$\bigwedge_{i \neq j} (v_i \neq v_j \wedge q_{v_i,v_j})?$$

Это не булева ф-ла, т. к. перем. встреч. в индексе.

$$p_u = \begin{cases} 1, & \text{u в клике} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_u \wedge p_v) \to q_{uv}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geq k$$

Или: $(u,v) \notin E \Rightarrow (\neg p_u \wedge \neg p_v)$.

Будем делать так:

$$p_{iu} \text{ - вершина } u \text{ - } i\text{-ая в клике}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - под каждым номером есть вершина, } i \in \{1, \ldots, k\}$$

$$i \neq j \Rightarrow (\neg p_{iv} \vee \neg p_{jv}) \text{ - у одной верш. не м. б. 2 номеров.}$$

$$(u, v) \notin E \Rightarrow (\neg p_{iu} \vee \neg p_{jv}) \text{ - антиребро не м. б. внутри клики.}$$

### 4.1.1 Обобщаем. Метод резолюций

Ф-ла - конъюнкция всех усл. - КНФ.

Пусть дана КНФ, будем рассм. её как набор дизъюнктов.

Правило Res:

$$\frac{A \vee x \qquad\qquad\qquad\qquad B \vee \neg x}{A \vee B \text{ - } \textbf{резольвента}}$$

**Утверждение 4.1.** *Если на данном наборе вып.* $A \vee x$ *и* $B \vee \neg x$*, то вып-мо и* $A \vee B$

**Следствие.** *Если исх. ф-ла вып-ма, то и все резольвенты тоже.*

Пустой дизъюинкт: $\perp$

$$\frac{x \qquad \neg x}{\perp}$$

$$\frac{x \vee y \qquad\qquad \neg x \vee \neg y}{y \vee \neg y}$$

$$\frac{p \vee x \qquad\qquad p \vee r \vee \neg x}{p \vee r}$$

Метод резолюций: строим всё новые резольвенты, пока либо не будет выведен $\perp$, либо не прекратится появление новых дизъюнктов.

**Теорема 4.1** (О корректности метода резол.)**.** *Если исх. ф-ла вып., то* $\perp$ *нельзя вывести.*

*Доказательство.* Если можно вывести, то $\perp$ будет ист., но он $\equiv 0$ □

**Пример.** *Ферзи 2 x 2*

| | |
|---|---|
| $p$ | $q$ |
| $r$ | $s$ |

*Усл-ие:*

$$p \lor q$$

$$r \lor s$$

$$\neg p \lor \neg q$$

$$\neg r \lor \neg q$$

$$\neg p \lor \neg s$$

$$\neg q \lor \neg r$$

$$\frac{p \lor q \qquad\qquad \neg p \lor \neg s}{q \lor \neg s}$$

*Picture*

**Теорема 4.2.** *(О полноте) Если $\perp$ нельзя вывести, то ф-ла выполнима.*

*Доказательство.* Все выводимые дизъюнкты разобъём на классы.

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_k$$

$C_i$ - дизъюнкты, зависящ. только от переменных $p_1, \ldots, p_i$ ($C_0 = \emptyset$, т. к. $\perp$ - невыводим).

Будем док-ть по инд-ции, что одновр. вып. все дизъюнкты из $C_i$. ММИ:

- База: $C_0 = \emptyset \Rightarrow$ очев.

- Переход: пусть все ф-лы из $C_{i-1}$ вып-ны на знач. $a_1, \dots a_{i-1}$. Рассм. ф-лы из $C_i$, кот. ещё не выполнены за счёт этих значений.
  Предположим, что среди них есть ф-ла с $p_i$ и ф-ла с $\neg p_i$:

  $$p_i \vee D_0 \text{ и } \neg p_i \vee D_1$$

  Раз эти ф-лы остались, то $D_0(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$ и $D_1(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$.
  Но $D_0 \vee D_1$ явл-ся резольвентой: $(p_i \vee D_0), (\neg p_i \vee D_1)$. Тогда $D_0 \vee D_1 \in C_{i-1}$, и тогда должно быть: $D_0 \vee D_1 = 1$!!!
  Следовательно, все оставшиеся ф-лы либо с $p_i \Rightarrow p_i = 1$, либо с $\neg p_i \Rightarrow p_i = 0$

□

Как это связано с тафтологиями? А это уже совсем другая история.

# 5 Лекция 10

## 5.1 Напоминание

$\sigma$ - сигнатура, сост. из функц. и пред. символов. и им соотв. валентности.

$$\mu = (M, I_M), I_M \text{ - соотв. символам } \sigma \text{ функций и предикатов}$$

$$\pi \colon Var \to M$$

$$[\phi]_M(\pi) - ?$$

Рекурсия по постр.$\phi$:

1)
$$\phi = P(t_1, \dots, t_n)$$
$$[\phi]_M(\pi) = [P]_M([t_1]_M(\pi), \dots, [t_n]_M(\pi))$$

2)
$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge,\vee,\to}{(operation)} \psi_1), \phi = \neg\psi \text{ - аналогично.}$$
$$[\phi]_M(\pi) = \underset{OR,IMPL}{AND}([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi))$$

3)
$$\phi = \exists x, \psi$$
$$[\phi]_M(\pi) = 1 \iff \text{найдётся } a \in M, \text{ т. ч. } [\phi]_M(\pi_{x \to a}) = 1$$
$$[\phi]_M(\pi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a})$$
$$\pi_{x \to a}(y) = \begin{cases} \pi(y), y \neq x \\ a, y = x \end{cases}$$

4) Аналогично (3), но с $\bigwedge$ вместо $\bigvee$

**<u>Определение</u> 5.1. Параметры** терма $t$:

1)
$$t = x \in Var \Rightarrow Par(t) = \{ x \}$$

2)
$$t = c \text{ - константа из } \sigma \Rightarrow Par(t) = \emptyset$$

3)
$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ - функциональный символ вал-ти } n \Rightarrow Par(t) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

**<u>Определение</u> 5.2.** Параметры формулы $\phi$:

1)
$$\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow Par(\phi) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

2)
$$\phi = \neg\psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi)$$

3)
$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge, \vee, \to}{(operation)} \psi_1) \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi_0) \cup Par(\psi_1)$$

4)
$$\phi = (\exists / \forall) x, \psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi) \{ x \}$$

**Теорема 5.1.** *a) Если* $\pi, \pi'$ *— оценки и для любой пер.* $x \in Par(t), \pi(x) = \pi'(x)$*, то* $[t]_M(\pi) = [t]_M(\pi')$

*b) Если* $\pi, \pi'$ *- оценки, т. ч. для* $\forall x \in Par(\phi), \pi(x) = \pi'(x)$ *то* $[\phi]_M(\pi) = [\phi]_M(\pi')$

*Доказательство.* a) Индукция по пост. $t$:

1)
$$t = x \Rightarrow [t]_M(\pi) = \pi(x) = \pi'(x) = [t]_M(\pi')$$

2)
$$t = c \Rightarrow [t]_M(\pi) = [c]_M = [t]_M(\pi')$$

3)
$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ — функциональный символ вал-ти } n$$
$$Par(t_i) \subset Par(t)$$
$$[t]_M(\pi) = [f]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M(\pi)) =$$
$$= [f]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [t]_M(\pi')$$

b) Индукция по построению $\phi$:

1) $\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow [\phi]_M(\pi) =$
$$= [P]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M[\pi]) = [P]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi'))$$

2) $\phi = (\psi_0 \wedge \psi_1) \Rightarrow [\phi]_M[\pi] = AND([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi)]) = And([\psi_0]_M(\pi'), [\psi_1]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi')$ Аналогично для других операций и для отрицания.

3) $\phi = \exists x, \psi$
$$Par(\phi) = Par(\psi) \setminus \{ x \}$$
$[\phi]_M(\psi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a}) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi'_{x \mapsto a}) = [\phi]_M(\pi')$

4) $\phi = \forall x, \psi$ - аналогично 3)

$\square$

# 6 Лекция 11

**Определение 6.1.** Предварённая нормальная формула :

$$\underbrace{\exists\forall\exists\exists\forall\ldots}_{\text{Кванторы}}\underbrace{\qquad(\ldots)\qquad}_{\text{Бескванторная формула}}$$

**Теорема 6.1.** *У любой ф-лы 1-ого порядка $\exists$ эквив. ей формула в предв. нормальной форме.*

*Доказательство.* Будем проводить эквив-ные преобразования:

1) $\neg\exists x\phi \sim \forall x\neg\phi$

$$\neg\forall x\phi \sim \exists x\neg\phi$$

2) $(\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \sim \forall x(\phi \wedge \psi)$

$$(\exists x\phi \vee \exists x\psi) \sim \exists x(\phi \vee \psi)$$

3)

$$\exists x(\phi \wedge \psi) \to (\exists x\phi \wedge \exists x\psi)$$

**Это не эквивалентность! Поэтому нельзя применять**

$$(\forall x\phi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$$

Нужно сделать замену переменной.

$$\exists x\phi \sim \exists y\underline{\phi(y/x)}$$

Получили ф-лу $\phi$ с подстановкой $y$ вместо $x$.

$\phi(y/x)$ — **все свободные вхожд.** $x$ **замен-ся на** $y$

! При этом, эти вхождения не должны подпадать под д-ие кванторов по $y$, и $y$ не входит свободно в ф-лу $\phi$.
**Рассм. примеры некорректных подстановок:**

1) $\exists x\forall yA(x,y) \not\to \exists y\forall yA(y,y)$
2) $\exists xA(x,y) \not\to \exists yA(y,y)$

Иначе, замена на новую переменную корректна.

4) $(\exists x \phi) \wedge \psi \sim \exists x(\phi \wedge \psi)$, причём $x \notin Params(\psi)$

$(\exists x \phi \wedge \psi) \sim \exists y \phi(y/x) \wedge \psi \sim \exists y(\phi(y/x) \wedge \psi)$, если $x \in Params(\psi)$, $y$ не встречается в $\phi$ и $\psi$

$\exists \phi \vee \psi \sim \exists x(\phi \vee \psi), \forall$ — аналог.

$(\exists x \phi \to \psi) \sim \forall x(\phi \to \psi)$

$(\psi \to \exists x \phi) \sim \exists x(\psi \to \phi)$

$\square$

**Замечание.** *Значение ф-лы зависит только от значения её параметров. $\Rightarrow$ Ф-ла с $k$ пар-рами при фикс. интерпретации задаёт $k$-местный предикат.*

**Определение 6.2.** Предикат наз-ся **выразимым** в данной интерпретации, если его можно задать ф-лой 1-ого порядка.

**Пример.** $(\mathbb{N}, S, =), S(n) = n + 1$. *Тогда:*

$$x = 0 \iff \neg \exists y \colon x = S(y)$$

$$x = 1 \iff \exists y \colon (x = S(y) \wedge \underbrace{y = 0}_{\textit{Здесь подставляем строчку выше}})$$

**Пример.** $(\mathbb{N}, \cdot, =)$
$x = 0 \iff \forall y \cdot x = x$
$x = 1 \iff \forall y \cdot x = y$

$$x \vdots y \iff \exists z(x = y \cdot z)$$

$$p - \textit{простое} \iff (p \neq 1 \wedge \forall q(p \vdots q \to (q = 1 \vee q = p)))$$

$$d = gcd(x, y) \iff (x \vdots d \wedge y \vdots d \wedge \forall k((x \vdots k \wedge y \vdots k) \to d \vdots k))$$

$$d = lcm(x, y) \iff (c \vdots x \wedge c \vdots y \wedge \forall k((k \vdots x \wedge k \vdots y) \to k \vdots c))$$

**Пример.** $(2^A, \subset)$

$$x = y \iff (x \subset y \land y \subset x)$$

$$x = \emptyset \iff \forall y\colon x \subset y$$

$$|x| = 1 \iff (\neg(x = \emptyset) \land \forall y(y \subset x \to (y = \emptyset \lor y = x)))$$

$$z = x \cup y \iff (x \subset z \land y \subset z \land \forall t((x \subset t \land y \subset t) \to (z \subset t)))$$

**Пример.** *Метрическая геометрия:*

$(\mathbb{R}^2, E), E(x, y)$ — *значит, что* $|x - y| = 1$, *т. е. расстояние от точки* $x$ *до* $y = 1$

$$x = y \iff \forall z(E(x, z) \to E(y, z))$$

$$|x - y| = 2 \iff \exists! z(E(x, z) \land E(y, z))$$

*Или:*

$$\exists z((E(x, z) \land E(y, z)) \land \forall t((E(x, t) \land E(y, t)) \to t = z))$$

$$|x - y| = \sqrt{3}$$

*Рисуем прямоугольный треугольник с гипотенузой длины* $= 2$ *и катетом длины* $= 1$. *Тогда катет от* $x$ *до* $y$ *имеет длину* $\sqrt{3}$

$$\exists z \exists t(E(x, z) \land E(z, t) \land E(x, t) \land E(y, t) \land |y - z| = 2)$$

**Пример.** $(\mathbb{N}, S, =)$

$$y = x + k, k \text{ — } \textit{параметр}$$

$$y = S(S(\underset{k \textit{ раз}}{S}(\ldots(S(x))))))$$

$$y = x + k \iff \exists z(y = z + \frac{k}{2} \land z = x + \frac{k}{2})$$

$$\iff \exists z \forall u \forall v \left(((u = y \land v = z) \lor (u = z \land v = x)) \to u = v + \frac{k}{2}\right)$$

$$len(k) = len(\frac{k}{2}) + C$$

$$k = 1 \text{ — } \textit{база индукции}, y = x + 1 \iff y = S(x)$$

*Общая длина:* $C \log_2 k$

$$k \text{ — } \textit{нечётно} \Rightarrow y = x + k \iff \exists z(y = S(z) + \frac{k-1}{2} \land z = x + \frac{k-1}{2})$$

# 7 Лекция 12

$$< \mathbb{Z}, S, = >$$

$$x = 0 \iff x + x = x$$

$$< \mathbb{N}, \cdot, = >$$

## 7.1 Метод автоморфизма

Аддитивная ф-ция:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Лин. ф-ция:

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Мультипликативная ф-ция:

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$$

Монотонная ф-ция:

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

Задана сигнатура $(P, \ldots, f, \ldots)$. Интерпретации с носит. $A$ и $B$:

$$[P]_A, \ldots, [f]_A \text{ и } [P]_B, \ldots, [f]_B$$

$$\gamma\colon A \to B \text{ — гомоморфизм, если}$$

1) При всех $x_1, \ldots, x_k \in A$.

$$[P]_A(x_1, \ldots, x_k) \iff [P]_B(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_k))$$

"Предикаты сохраняются"

2) При всех $x_1, \ldots x_k \in A$:

$$\gamma([f]_A(x_1, \ldots, x_k)) = [f]_B(\gamma(x_1), \ldots, \gamma(x_k))$$

Для конст. симв.:

$$\gamma([c]_A) = [c]_B$$

**<u>Определение</u> 7.1.** Автоморфизм:

1) $A = B$

2) $\gamma$ - биекция

**Теорема 7.1** (Об автоморфизмах)**.** *Пусть $A$ — интерпр. сигнатуры $(P, \ldots, f, \ldots)$, $\alpha$ — автоморфизм, $Q$ — выразимый предикат. Тогда при всех $x_1, \ldots, x_k \in A$:*

$$Q(x_1, \ldots, x_k) \iff Q(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)) \tag{2}$$

*Сл-ие, если при некот-ром автоморфизме $\alpha$ эквиваленция (2) неверна, то $Q$ невыразим:*

**Пример.** $(\mathbb{Z}, S, =)$

$$\alpha(x = x + C)$$

$$Q(x) \iff x \mathrel{\vdots} 2$$

**Пример.** $(\mathbb{Z}, +, =)$

$$\alpha(x) = -x$$

$$Q(x, y) \iff x > y$$

**Пример.**

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot k, k \not\mathrel{\vdots} 2, k \not\mathrel{\vdots} 3$$

$$\alpha(2^a \cdot 3^b \cdot k) = 2^b \cdot 3^a \cdot k$$

$$\alpha(0) = 0$$

$$Q(x, y) \iff x > y$$

*Доказательство теоремы:* Докажем индукцией по построению:

1) $t$ — терм $\Rightarrow$ при всех $x_1, \ldots, x_k \in A$:

$$[t](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)) = \alpha([t](x_1, \ldots, x_k))$$

2) $\phi$ — ф-ла $\Rightarrow$ При всех $x_1, \ldots, x_k \in A$:

$$[\phi](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)) \iff [\phi](x_1, \ldots, x_k)$$

3) Переменная $\alpha(x) = \alpha(x)$, конст. символ $[c] = \alpha([c])$
Конст. символ: $[c] = \alpha([c])$
Сост. терм:

$$[f(t_1, \ldots, t_m)](\alpha(x_1), \ldots \alpha(x_k)) = [f]([t_1](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k)), [t_m]) =$$

$$= [f](\alpha([t_1](x_1, \ldots, x_k)), \ldots, \alpha([t_m](x_1, \ldots, x_k))) =$$
$$= \alpha([f]([t_1](x_1, \ldots, x_k), [t_m](x_1, \ldots, x_k))) =$$
$$= \alpha([f(t_1, \ldots, t_m)](x_1, \ldots, x_k))$$

Атом. формулы — аналогично термам

$$\bigwedge_y [\phi](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k), y) = \bigwedge_y [\phi](\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_k), \alpha(y)) =$$

$$= \bigwedge_y (x_1, \ldots, x_k, y) = [\forall y, \phi](x_1, \ldots, x_k)$$

□

**Пример.**

$$< \mathbb{N}, S, => \text{ — нет автоморфизма, } \leq \text{ — невыраз.}$$

$0$ — *выразим:* $x = 0 \iff \neg\exists y\colon x = S(y)$

**Следствие.** *Выразим в* $< \mathbb{N}, S, => \iff$ *выразим в* $< \mathbb{N}, S, 0, =>$

**Теорема 7.2** (Об элиминации кванторов)**.** *Любая ф-ла в* $< \mathbb{N}, S, 0, =>$ *равна некот. бесквант. ф-ле*

**Следствие.** $x \leq y$ *не выраз. в* $< \mathbb{N}, S, =>$

*Доказательство.* $x \leq y$ выразима в $< \mathbb{N}, S, => \Rightarrow x \leq y$ выразима в $< \mathbb{N}, S, 0, =>$ бескванторной ф-лой, т. е. пропозиц. формулой, в к-рую, вместо переменных подставл. атомарн. формулы.
Ат. формулы:

$$S(S(\ldots S(U))) = S(S(\ldots S(v)))$$

$u$ — переменная или $0, v$ — тоже

Значит $u = v + d, d \in \mathbb{Z}$ (ф-ла-комбинация кон. числа усл-ий)

$$d_1, \ldots, d_n \text{ — все числа из усл.}$$

$$M = max\{\, d_1, \ldots, d_n \,\} + 1$$

Рассм $x = m, y = 2M$ и $x = 2M, y = M$
Все атом. ф-лы, кроме тожд. истины, будут ложны $\Rightarrow$ комбинация приним. одинаковые значения:
Но $x \leq y$ верно для $x = M, y = 2M$ и неверно для $x = 2M, y = M \Rightarrow$ наша ф-ла не выр-ет $x \leq y$ ☐

*Доказательство теоремы об элиминации.* 1) Ат. ф-лы бескв.

2) $\phi \wedge \phi' \Rightarrow \neg\phi \wedge \neg\phi'$, аналог. для $\wedge, \vee, \to$

3) $\forall x\phi \sim \neg\exists x\neg\phi$

4) $\exists x\phi \sim \exists x \underset{\text{бескванторный}}{\phi'}$
   Атомарные ф-лы, зависящие от $x$: $T, \perp, x = t_i$

☐

# 8 Лекция 13

## 8.1 Элиминация кванторов

$< N, S, O, =>$, $S$ - successor

**Теорема 8.1.** *Любая ф-ла в сигнатуре $(S, O, =)$ эквив-на в вышеуказанной интерпретации нек-рой бескванторной ф-ле.*
*(Т. е. булевой комбинации атомарных формул.)*

*Доказательство.* Инд-ция по построению ф-лы.

1) База: атомарная ф-лы — бескванторная

2) Переход:

   – $\phi \eqcirc \neg\psi \Rightarrow$ по предположению индукции, $\psi \sim \psi', \psi'$ — бескванторная $\Rightarrow \phi \sim \neg\psi'$ — бесквант.

   – $\phi \eqcirc (\psi \wedge \eta) \Rightarrow \psi \sim \psi', \eta \sim \eta', \phi \sim (\psi' \wedge \eta')$ — аналогично, $\vee, \to$

–

$$\forall x\phi \sim \neg\exists x\neg\phi$$

В случае с $\exists x\phi$ нужны содержательные рассуждения, т. е. цель:

$$\exists \mapsto \text{ конечная дизъюнкция}$$

$$\exists x\phi \sim \exists x\phi', \phi' \text{ — бесквант.}$$

Рассмотрим атомарные формулы:

$$S(S(\ldots(S(u)))) = S(S(S(\ldots(S(v)))))$$

$u, v$ — либо переменные, либо 0

$$u = v = x \Rightarrow \text{ф-ла } \perp \text{ или } T$$

Рассм., что может быть в $\phi$:

$$S(S(\ldots(S(0)))) = x \text{ — задано значение } x$$

$$S(S(\ldots(S(x)))) = 0 \text{ — тождественная ложь, т. к. } \mathbb{N}$$

$$S(S(\ldots(S(y)))) = x, x = y + c$$

$$S(S(\ldots(S(x)))) = y$$

Итог: $\exists x\phi, \phi$ — бул. комбинация $\perp, T$ и равенств вида $x = d, x = y + c, x = y - c$, а также некот. кол-во $t_1, \ldots, t_k$ — все правые части. Опять же, рассм несколько случаев:

I) $x \notin \{t_1, \ldots, t_k\} \Rightarrow$ все рав-ва $x = t_i$ ложны $\Rightarrow \phi(x)$ не зависит от конкретного значения $x$.

II) Иначе:

$$\exists x\phi \sim \phi|_{\text{все } x = t_i \text{ ложны}} \vee \bigvee_i \phi[t_i/x]$$

**Замечание.** *Выражения с вычет. преобразуются, в сложение с другой части.*

□

**Определение 8.1.** Две интерпретации одной сигнатуры элемент. эквив., если в них верны один и те же ф-лы 1-ого порядка.

**Теорема 8.2.** $<\mathbb{R}, \leq>, <\mathbb{Q}, \leq>$ — *элементарно эквив-ны.*

*Доказательство.* В обеих интерпретациях верна теорема об элиминации кванторов, причём она происходит одинаково.
Отличие предыдущих в формуле $\exists x\phi$. Заменим $\phi$ на эквив. ДНФ.

$$x = y \iff (x \leq y \wedge y \leq x)$$

$$x < y \iff (x \leq y \wedge \neg(y \leq x))$$

$$\phi = C_1 \vee \ldots \vee C_k$$

где $C_i$ — конъюнкция $x_j \leq y_j$ или $\neg(x_j \leq y_j)$:

$$(x_j \leq y_j) \mapsto (x_j < y_j) \vee (x_j = y_j)$$

$$\neg(x_j \leq y_j) \mapsto y_j < x_j$$

Рассмотрим по дистриб. $\Rightarrow \phi = C_1' \vee \ldots \vee C_m'$
$C_i'$ — конъюнкция ф-ул вида $x_j = y_j$ или $x_j < y_j$

$$\exists x\phi \sim \exists x(C_1' \vee \ldots \vee C_m') \sim \exists x C_1' \vee \ldots \vee \exists x C_m'$$

$$\exists x((x > a_1) \wedge \ldots \wedge (x > a_o) \wedge (x < b_1) \wedge \ldots \wedge (x < b_q)) \wedge$$
$$\wedge (x = c_1) \wedge \ldots \wedge (x = c_r) \wedge (\text{возможно.}) \wedge x = x \wedge x < x \wedge y < z$$

**Пример.**

$$\exists x(x > a \wedge x > b \wedge x < c \wedge x < d) \iff a < c \wedge a < d \wedge b < c \wedge b < d$$

□

### 8.1.1 Игра Эренфойхтаsа

**Теорема 8.3.** *Интерпретации. элем. эквив-ны* $\iff$

*В некот-рой игре есть выигр. страт. у нек-рого игрока.*

*Правила: заданы 2 интерпретации A и B, сигнат. которых сост. только из предикатных символов.* $(P_1, \ldots, P_n)$

*2 игрока: новатор и консерватор*

*Цель новатора (Н): показать, что A и B отличаются*

*Цель консерватора (К): показать, что $A = b$*

*Подготовка: (Н) фиксир. число ходов $m$*

*На $i$-ой стадии: отмечено $a_1, \dots, a_{i-1} \in A$, $b_1, \dots, b_{i-1} \in B$*

*Н выбирает $a_i \in A$ или $b_i \in B$, К отмечает. наоборот, $b_i \in B$ или $a_i \in A$ соотв.*

*Итог игры:*

*$P_j$ — предикат вал-сти $l$*

$$P_j(a_{i_1}, \dots a_{i_l}) \neq P_j(b_{i_1}, \dots b_{i_l}) \Rightarrow \text{ выиграл } H$$

**Пример.** $< \mathbb{N}, \leq >, < \mathbb{Z}, \leq >$

$$\exists x \forall y, x \leq y \text{ — верно в } \mathbb{N}, \text{ но не в } \mathbb{Z}$$

*Н выигравает за 2 хода:*

1) $H : 0 \in \mathbb{N}, K : b \in \mathbb{Z}$

2) $H : (b-1) \in \mathbb{Z}, K : a \in \mathbb{N}$

*Но $a \geq 0$ — верно, а $b - 1 \geq b$ — ложно.*

**Пример.** $< \mathbb{Z}, \leq >, < \mathbb{Q}, \leq >$

$$\forall y \forall z (y < z \to \exists v (y < v < z))$$

*Н выигрывает за 3 хода:*

1) $H : 0 \in \mathbb{Z}, K : b_0 \in \mathbb{Q}$

2) $H : 1 \in \mathbb{Z}, K : b_1 \in \mathbb{Q}$

$$b_0 \geq b_1 \Rightarrow H \text{ — выиграл}$$

$$b_0 < b_1 \Rightarrow H : \frac{b_0 - b_1}{2}, K : a \in \mathbb{Z}, \text{ причём: } a \leq 0 \vee a \geq 1 \Rightarrow H \text{ — выиграл}$$

__**Пример.**__ $<\mathbb{Q},\leq>$ *и* $<\mathbb{R},\leq>$
*Выигрывает $K$, даже если не фиксировать число ходов.*
*Н ставит точку, либо совпадающую с уже выбранной, либо больше всех, либо меньше всех, либо внутри интервала.*

__**Пример.**__ $\mathbb{Z}$ *и* $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$
*Заметим, что в $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ есть есть беск. интервалы.*
*Поэтому выигр. $K$, __если__ кол-во ходов фикс.*
*Разделим все интервалы на большие (бесконечные или кон. $\geq 2^l$, где $l$ - число ходов до конца игры) и малые ($< 2^l$)*
*Новатор не может поделить большой интервал на два маленьких*

# 9 Лекция 14

Расшир. ИВ на ф-лы 1-ого порядка.

| { Вывод. ф-лы } | $=$ | { Общезнач. ф-лы } |
|---|---|---|
| | $\subset$ | Теор. о корр. |
| | $\supset$ | Теор. о полноте |

Новый список аксиом:

- Аксиомы 1-11

- Аксиомы 12: $\forall x\phi \to \phi(^t/_x), t$ — терм, подстановка $^t/_x$ — корректна.

- $\phi(^t/_x) \to \exists x\phi$
  $\phi(^t/_x)$ — результат замены своб. вхожд. $x$ на $t$, при этом своб. переменные из $t$ не попадают под д-ие кванторов $\phi$

Подстановка точно корректна, если:

1) $t$ — замкн. терм (сост. только из констант)

2) $t = x$

Примеры вывод ф-л:

0) Все тавтологии (с подст. формул вместо переменных)

1) $\forall x\phi \to \exists x\phi$
Вывод:

1. $\forall x\phi \to \phi$ — $A12$

2. $\phi \to \exists x\phi$ $A13$

3. $\forall x\phi \to \exists x\phi$ — силлогизм.

**Правила Бёрнайса:**

– $\Sigma$-правило:

$$\frac{\phi \to \psi}{\exists x\phi \to \psi}$$

<u>**Замечание**</u>**.** ***Условие применимости:*** *$x$ не параметр $\psi$!*

– $\prod$-правило:

$$\frac{\psi \to \phi}{\psi \to \forall x\phi}$$

Опять же: $x$ не параметр $\psi$

2) $\exists x\forall y\phi \to \forall y\exists x\phi$
Вывод:

1. $\forall y\phi \to \phi$ $A12$

2. $\phi \to \exists x\phi$ $A13$
3. $\forall y\phi \to \exists x\phi$ — силлогизм
4. $\exists x\forall y\phi \to \exists x\phi$ — $\Sigma$ — Бёрн., 3
5. $\exists x\forall y\phi \to \forall y\exists x\phi$ — $\prod$— Бёрн., 4

**Правило обобщения (Gen):**

$$\frac{\phi}{\forall x\phi}$$

$$\phi \text{ общезн. } \Rightarrow \forall x\phi \text{ общезн.}$$

При этом $(\phi \to \forall x\phi)$ — необщезн.

3) Вывод **Gen**:

$$\vdash \phi \Rightarrow \vdash \forall x \phi$$

1. $\phi$ — выводима

2. $\psi$ (любая замкн. акс.)
3. $\phi \to (\psi \to \phi)$ A1
4. $\psi \to \phi$ MP 1, 3
5. $\psi \to \forall x \phi$ — $\prod$-Бёрн., 4
6. $\forall x \phi$ MP 2, 5

4) $\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi$

$$\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi$$

$$\forall x \neg \phi \to \neg \phi$$

$$\phi \to \neg \forall x \neg \phi$$

$$\exists x \phi \to \neg \forall x \neg \phi$$

$$\forall x \neg \phi \to \neg \exists x \phi \text{ — контрапоз.}$$

5) Лемма о дедукции для ИП:
В кач-ве посылок используются только замкн. ф-лы (посылки также наз-ют аксиомами)
Теория — любое мн-во замкн. ф-л
Модель теории — интерпретация, в кот-рой все ф-лы теории истины.
Лемма о дедукции: Пусть $\Gamma$ — теория, $A$ — замкн. ф-ла, $B$ — произв. ф-ла.
Тогда: $\Gamma \vdash (A \to B) \iff \Gamma \cup \{ A \} \vdash B$

*Доказательство.* $\Rightarrow$) 1. $A \to B$ (вывод)
2. $A$ — посылка
3. $B$ (MP 1, 2)

$\Leftarrow$) Инд-ция $C_1, \ldots, C_n$ — вывод $B$ из $\Gamma \cup \{ A \}$. По инд-ции докажем $\Gamma \vdash A \to C_i$:

$C_i$ — акс., эл-т $\Gamma$, ф-ла $A$ или получ. по MP — аналог. д-ву для ИВ.

$$C_i \text{ — получ. по } \Sigma\text{-прав.}$$

$$C_i \equiv (\exists x\phi \to \psi), C_j \equiv (\phi \to \psi), j < i$$

По предположению инд-ции: $\Gamma \vdash (A \to (\phi \to \psi))$
Тавтология: $(A \to (\phi \to \psi)) \leftrightarrow (\phi \to (A \to \psi))$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (\phi \to (A \to \psi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (\exists x\phi \to (A \to \psi)) \text{ — } \Sigma\text{-Бёрн}$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (A \to (\exists x\phi \to \psi)) \Rightarrow \Gamma \vdash (A \to C_i)$$

$C_i$ — получ. по $\prod$-правилу:

$$\Gamma \vdash (A \to (\psi \to \phi)) \Rightarrow \Gamma \vdash (A \to (\psi \to \forall x\phi))$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash ((A \wedge \psi) \to \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash ((A \wedge \psi) \to \forall x\phi)$$

$\square$

**Слабая форма.:**
Теперь перейдём к теоремам:
Теор. о корр. ИП: $\vdash \phi \Rightarrow \phi$ — общезначима.
Теор. о полн. ИП: $\phi$ — общезнач. $\Rightarrow \vdash \phi$
**Сильная форма:**
У любой непротиворечивой теории существует модель
**Сильная форма $\Rightarrow$ слабая форма**.

$$\phi \text{ — общ. } \Rightarrow \forall x\phi \text{ — общ.} \Rightarrow \{\neg\forall x\phi\} \text{ — не имеет модели} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\neg\forall x\phi\} \text{ — против.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{\neg\forall x\phi\} \vdash A \\ \{\neg\forall x\phi\} \vdash \neg A \end{cases} = \begin{cases} \vdash \neg\forall x\phi \to A \\ \vdash \neg\forall x\phi \to \neg A \end{cases}$$

$$\Gamma \text{ — непротив. теория} \Rightarrow \text{ Есть модель.}$$

Строим модель из замкн. термов.
Проблема: может не быть конст. символов или функц. симв. Неясно, как опред. пред. симв.

**Определение 9.1.** $\Gamma$ — полная теория, если для любой замкн. $\phi$ верно $\Gamma \vdash \phi$ или $\Gamma \vdash \neg\phi$

**<u>Лемма</u> 9.1.** *Любая непрот. теория вложена в нек-рую полную.*

Проблема: если $\Gamma \vdash \exists x\phi$, то $\psi$ должна быть ист. для нек-рого эл-та модели.

**<u>Определение</u> 9.2.** Теория $\Gamma$ наз-ся экзистенциально полной, если из $\Gamma \vdash \exists x\phi$ следует $\Gamma \vdash \phi({}^{t}/_{x})$ для некоторого замкн. терма $t$

**<u>Лемма</u> 9.2.** *Если $\Gamma$ — непрот. теория в сигнатуре $\sigma \Rightarrow \exists \tau \supset \sigma, \triangle \supset \Gamma$: $\triangle$ — непрот. теория в сигн. $\tau$ и $\triangle$ — экзистенциально полная.*