Содержание

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и ограничено сверху.

Рассм. $B = \{b \in \mathbb{R} \colon b$ - верх. грань $A\}$. Тогда $B \neq \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B(a \leq b)$. По аксиоме непр-ти $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, \forall b \in B(a \leq c \leq b)$.

Из нер-ва $a \leq c \Rightarrow c$ верх. грань A

Из правого нер-ва любое $c' < c \colon c' \notin B$, т.е. c' не явл. верх. гранью A. Сл-но, $c = \sup A$. □

Теорема 0.1 (аксиома Архимеда)**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. *Тогда* $\exists n \in \mathbb{N}$, *т. ч.* $na > b$

Доказательство. Предположим, что $\forall n \colon na \leq b$. Тогда $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ огр. сверху. По теореме 5.1 $\exists c = \sup A$. Число $c - a$ не явл. верх. гранью A (т. к. $a > 0$)

Тогда $\exists n \in \mathbb{N}(na > c - a)$. Откуда:

$$na + a = (n+1)a > (c - a) + a = c$$

т. е. $(n+1)a > c$. Но $(n+1)a \in A$ (противоречие с тем, что c - верх. грань)!!! □

Следствие. *1)* $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}(n > b)$, *(a = 1)*

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < \varepsilon)$ $(\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon})$

Следствие.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! m \in \mathbb{Z}(m \leq x < m+1)(m\text{- целая часть } x)$$

Доказательство. ($\exists$) $x \geq 0$. Рассм. $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n > x\}$. По аксиоме архимеда, это мн-во непусто. $\Rightarrow \exists p = min(S)$. Положим $m = p - 1$. Тогда $m \leq x$ и $m + 1 > x$

$x < 0$. По предыдущему пункту $\exists m' \in \mathbb{Z}(m' \leq -x < m' + 1)$. Положим:

$$m = \begin{cases} -m', x = -m' \\ -m' - 1, x \neq -m' \end{cases} \Rightarrow m \leq x < m + 1 \tag{1}$$

Единственность:

$$\begin{cases} m' \leq x < m' + 1 \\ m'' \leq x < m'' + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m' - m'' < 1, m' - m'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' - m'' = 0 \Rightarrow m' = m''$$

□

Пример.

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2$$

Следствие.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q}(a < r < b)$$

Доказательство.

$$\exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < b - a)$$

$$r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}. \text{Тогда } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a, r \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

□

Обозначение.

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$$

Определение 0.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$a^0 = 1, a^{n+1} = a^n a$$

Обозначение. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \leq n$, положим:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n$$

Если $m > n$.

Теорема 0.2 (Бином Ньютона)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1, (n + 1)! = n! * (n + 1)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- n = 1: Верно
- Предположим, что утв. верно для n:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} = \left[C_n^k + C_n^{k-1} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \iff \right]$$

$$\left[\iff \tfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \right] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

Ч. Т. Д.

□

Следствие. *Пусть $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Тогда:*

$$(1+a)^n \geq 1 + C_n^k a^k$$

Обозначение.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- расширенная числовая прямая

Считают, что $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x < +\infty)$
Введём допус. операции $x \in \mathbb{R}$

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
- $x - (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
- $x * (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x * (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$

- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Кроме того:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

НЕДОПУСТИМЫЕ операции:

- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $0 * \pm\infty$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглащение: $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

- Если E не огр. сверху, то $\sup E = +\infty$
- Если E не огр. снизу, то $\inf E = -\infty$

Определение 0.2. $I \subset R$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

Лемма 0.3. *Любой промежуток - одно из следующих мн-в:*

- $\emptyset$
- $\mathbb{R}$
- $(a, +\infty)$

- $[a, +\infty)$
- $(-\infty, b)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$

Доказательство. I - промежуток, $I \neq \emptyset$

$$a := \inf I, b := \sup I \Rightarrow a \leq b$$

- Если $a = b$, то $I = \{a\}$
- Если $a < b$ и $a < x < b$. По опр. точных граней $\exists x', x'' \in I \colon (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$

Итак, $(a, b) \subset I \subset [a, b]$

□