Матан

Сергей Григорян

24 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Инфа

Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

1.2 Учебники

- Зорич. В. А. "Мат. анализ";
- Виноградов О. Л. "Мат. анализ".

1.3 §1. Действительные числа

1.3.1 Вспомогательные конструкции

$x \in \{a, b\} \Rightarrow x = a$ или $x = b$ - неуп. пара
$(a, b) -$ уп. пара
$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$
$A, B -$ мн-ва, $A \cdot B = \{(a, b) \colon a \in A \vee b \in B\}$

Определение 1.1. Пусть X, Y - мн-ва. Ф-цией $f \colon X \to Y$ наз-ся ф-ла $P(x, y)$, т. ч. $\forall x \in X$ сущ-ет утв. $y \in Y$,что $P(x, y)$ - истина. Пишут $y = f(x)$ или $f \colon x \Rightarrow y$.

Определение 1.2. Ф-ции $f, g \colon X \to Y$ называются равными, если $\forall x \in X \colon (f(x) = g(x))$. Пишут $f = g$.

Обозначение. *$f : X \to Y$, X - область опред. ф-ции*

1. $A \subset X$

   $f(A) = \{f(x) \colon x \in A\}$, *образ* A.

   $f(X)$ - *мн-во значений* f.

2. $B \subset Y$

   $f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$ - *прообраз* B.

3. $f : X \to Y, g : Z \to X \Rightarrow f \circ g : Z \to Y, f \circ g(z) = f(g(z))$ - *композиция ф-ций f и g.*

Утверждение 1.1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Определение 1.3. Ф-ция $f : X \to Y$ наз-ся **инъекцией**, если $\forall x_1, x_2 \in X(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
сюрьекцией, если $f(X) = Y$
биекцкией $=$ **сюрьекцией** $+$ **инъекция**

Пример.

1. $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 2\}$

   $f(0) = 1, f(1) = f(2) = 2$

   *Это **сюрьекция***

2. $f : \{1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$

   $f(1) = 2, f(2) = 1$

   *Это **инъекция***

Пример. $id : X \to X, \forall x \in X(id(x) = x)$ - *это **тождественная ф-ция**.*

Пример. *Пусть $f : X \to Y$ - биекция*
$\Rightarrow y = f(x)$ *- имеет **1 решение**. Тогда:*
$f^{-1} : Y \to X, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$ *- обратная к f ф-ция.*
$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y$

Задача 1.1.

1. Композиция инъекций (сюрьекций, биекция) яв-ся инъекцией (сюрьекцией, биекцией).

2. Обр-я ф-ция к биек. $f : X \to Y$ - явл. биекцией.

Определение 1.4. Пусть $A, \Lambda \neq \emptyset$
Говорят, что A - **семейство, индексированное эл-ми** Λ, если $\exists \phi : \Lambda \to A$ - сюрьекция.
Пишут $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $a_\lambda = \phi(\lambda)$
$\mathscr{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \colon \exists \lambda \in \Lambda(x \in A_\Lambda)\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \colon \forall \lambda \in \Lambda(x \in A_\lambda)\}$$

Пример.

$A_1 = \{n \in \mathbb{N} \colon n > 1 \text{ и } n \neq 2m \colon \forall m > 1\}$
$A_2 = \{n \in A_1 \colon n \neq 3m \colon \forall m > 1\}$
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n-$ *мн-во простых чисел.*

Теорема 1.1 (Закон Де Моргана)**.** *Для любого мн-ва E верно:*

1.
$$E \backslash \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (E \backslash A_\lambda)$$

2.
$$E \backslash \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E \backslash A_\lambda)$$

Доказательство.

1.
$$x \in E \backslash \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge (\forall \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda))$$

$$\iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \backslash A_\lambda) \iff x \in \bigcap (E \backslash A_\lambda)$$

2.
$$x \in E \backslash \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge \exists \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda).$$

$$\iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \backslash A_\lambda) \iff \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E \backslash A_\lambda).$$

$\square$

1.3.2 Аксиомат. опр-е мн-ва действ. чисел

На мн-ве $\mathbb{R}$ опр-ны операции "+": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, "*": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R})$,удовл. аксиомам.

A1: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon (a+b)+c = a+(b+c)$;

A2: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon a+b = b+a$;

A3: $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R} \colon a+0 = a$;

A4: $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} \colon a+(-a) = 0$.

M1: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \colon (a*b)*c = a*(b*c)$,

M2: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon a*b = b*a$,

M3: $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}, a*1 = a$,

M4: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} \colon a*a^{-1} = 1$,

AM: $\forall a, b, c \in R \colon a*(b+c) = ab+ac$

На мн-ве $\mathbb{R}$ введено отношение порядка "$\leq$ удовл. след. аксиомам:

O1: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

(i): $a \leq a$;

(ii): $a \leq b, b \leq a \iff a = b$;

(iii): $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

O2: $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon a \leq b \vee b \leq a$

O3: Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$, то $a+c \leq b+c$;

O4: Если $a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b$ и $0 \leq c$, то $ac \leq bc$;

Аксиома непрерывности: Для любых непустых $A, B \subset \mathbb{R}$, т. ч. $\forall a \in A, b \in B, a \leq b; \exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, b \in B (a \leq c \leq b)$

2 Лекция 2

2.1 Некот. обозначения

- $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$
- $a \geq b \iff b \leq a$
- $a > b \iff b < a$
- $a - b = a + (-b)$
- $\frac{a}{b} = a * b^{-1} (b \neq 0)$

2.2 Чем занимаемся дальше

Все дальнейшее сводим к аксиомам:

Пример. *1.* $\forall a \in R\colon a * 0 = 0$

Доказательство.

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 | - a \cdot 0.$$

$$a * 0 + (-a * 0) = a * 0 + (a * 0 + (-a * 0)).$$

$$0 = a * 0 + 0 = a * 0.$$

□

2. $(-1) * a + 1 * a = ((-1) + 1) * a = 0 * a = 0$

Пример. *1.* $\forall a, b \in R (a \leq b \Rightarrow -b \leq -a)$

$$-b = a - a - b \leq b - a - b = -a.$$

2. $\forall a \in R \backslash \{0\} \colon (a^2 > 0)$

Доказательство. a) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

b) $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow -(-a^2) = a^2$

□

Задача 2.1. $P = \{x \in R\colon 0 < x\}$

Док-те, что :

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y, x * y \in P$

2) $\forall x \in R \backslash \{0\} (x \in P \vee -x \in P)$

Определение 2.1.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Пример. *1. Если $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 0$, то ($|a| \leq M \iff -M \leq a \leq M$)*

Доказательство. $|a| \leq M \Rightarrow -|a| \geq -M$

a) $a \geq 0, -M \leq 0 \leq a = |a| \leq M$

b) $a < 0, -M \leq -|a| = a < 0 \leq M$

□

2. $\forall a, b \in R(|a + b| \leq |a| + |b|)$

Доказательство.

$$\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b|.$$

$$\Rightarrow \pm(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

□

2.3 Множество $\mathbb{N}$

Определение 2.2. Мн-во $S \subset \mathbb{R}$ наз-ся **индуктивным**, если $1 \in S$ и $(x \in S \Rightarrow x + 1 \in S)$

Замечание. $\mathbb{N}$ - *пересечение всех индуктивных мн-в.*

На определении $\mathbb{N}$ основан **принцип мат. индукции.**

Пусть $P(n), n \in \mathbb{N}$. Если $P(1)$ - истина и $(\forall n(P(n)$ - ист. $\Rightarrow P(n+1)$ - ист.)). То $P(n)$ - истина для $\forall n \in N$

$S = \{n \in \mathbb{N}\colon P(n)$ - истина$\} \subset \mathbb{N}$ - индуктивно. $\Rightarrow S = \mathbb{N}$

Замечание. *Если* $x, y \in \mathbb{N}, x < y$, *то* $y - x = n \in N$, *в частности,* $y = x + n \geq x + 1$

Теорема 2.1. *Пусть* $A \subset N$ *- непустое, тогда* $\exists m = min(A)(m \in A \colon \forall n \in A(m \leq n))$

Доказательство.

Предположим, что в A нет мин. эл-та.
Рассм. $M = \{x \in \mathbb{N} \colon \forall n \in A(x < n)\}$
$1 \in M$ $(1 \notin A)$
Пусть $x \in M$. Предпл., что $x + 1 \notin M$:
$x + 1 \notin M \iff \exists m \in A \colon (x + 1 \geq m)$
По опр-ю $x \in M \Rightarrow x < m \Rightarrow x + 1 \leq m \Rightarrow m = min(A)$!!!
Итак $1 \in M(x \in M \Rightarrow x + 1 \in M) \Rightarrow M \subset \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$!!! $\square$

2.4 Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z} \wedge n \in N\}$$

Пример (Применение аксиомы непрерывности)**.**

$$A = \{a \in \mathbb{R} \colon a > 0 \wedge a^2 < 2\} \ni 1.$$
$$B = \{b \in \mathbb{R} \colon b > 0 \wedge b^2 > 2\} \ni 2.$$

Пусть $a \in A, b \in B$

$$0 < b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \Rightarrow 0 < b - a \Rightarrow a < b.$$

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, b \in B \colon (a \leq c \leq b)$
В част-ти $1 < c < 2$. *Покажем, что* $c^2 = 2$
Предпл. что $c^2 < 2 \iff c \in A$. *Пусть* $\varepsilon \in (0; 1)$ *; тогда:*

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon(2c + \varepsilon) < c^2 + 5\varepsilon.$$
$$\varepsilon \leq \frac{2 - c^2}{5}.$$
$$(c + \varepsilon)^2 < c^2 + 5\varepsilon \leq c^2 + 2 - c^2 = 2 \Rightarrow c + \varepsilon \in A!!!.$$

Аналогичным образом, доказываем, что $c^2 > 2$ *не выполн-ся.*

$$\Rightarrow c^2 = 2$$

2.5 Точные грани числовых мн-в

Определение 2.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непусто.

Число M наз-ся **верхней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E(x \leq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным сверху**, если $\exists$ хотя бы одна верхняя грань для E.

Число M наз-ся **нижней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E(x \geq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным снизу**, если $\exists$ хотя бы одна нижняя грань для E.

Мн-во E **ограничено**, если E ограничено сверху и снизу.

Задача 2.2. Док-ть: E - огранич. $\iff \exists C > 0\colon \forall x \in E(|x| \leq C)$

Определение 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непустое числовое мн-во. Наименьшая из верхних граней мн-ва E наз-ся **точной верхней гранью (супремумом)** мн-ва E ($\sup E$)

Наибольшая из нижних граней мн-ва E наз-ся **точной нижней гранью (инфимумом)** мн-ва E ($\inf E$)

Замечание. *Определение точных граней можно записать на языке нер-ств:*

$$c = \sup E \iff . \tag{1}$$

1) $\forall x \in E(x \leq c)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E(x > c - \varepsilon)$

$$b = \inf E \iff . \tag{2}$$

1) $\forall x \in E(x \geq b)$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E(x' < b + \varepsilon)$

Действ-но, 1) *в* (1) *означает, что* c *- верх. грань* E. 2) *в* (1) *означ, что любое* $c' < c$ *не явл. верх. гр.* E. *Сл-но,* c *- точная верхняя грань* E. *Аналогично для* (2).

Теорема 2.2 (Принцип полноты Вейерштрасса)**.** *Всякое непустое огр. сверху (снизу) мн-во имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и ограничено сверху.

Рассм. $B = \{b \in \mathbb{R} \colon b$ - верх. грань $A\}$. Тогда $B \neq \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B (a \le b)$. По аксиоме непр-ти $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, \forall b \in B (a \le c \le b)$.

Из нер-ва $a \le c \Rightarrow c$ верх. грань A

Из правого нер-ва любое $c' < c \colon c' \notin B$, т.е. c' не явл. верх. гранью A. Сл-но, $c = \sup A$. ☐

3 Лекция 3

Теорема 3.1 (аксиома Архимеда)**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. *Тогда* $\exists n \in \mathbb{N}$, *т. ч.* $na > b$

Доказательство. Предположим, что $\forall n \colon na \le b$. Тогда $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ огр. сверху. По принципу полноты Вейерштрасса $\exists c = \sup A$. Число $c - a$ не явл. верх. гранью A (т. к. $a > 0$)

Тогда $\exists n \in \mathbb{N} (na > c - a)$. Откуда:

$$na + a = (n+1)a > (c - a) + a = c$$

т. е. $(n+1)a > c$. Но $(n+1)a \in A$ (противоречие с тем, что c - верх. грань)!!! ☐

Следствие. *1)* $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} (n > b)$, *(*$a = 1$*)*

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} (\frac{1}{n} < \varepsilon)$ *(*$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$*)*

Следствие.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! m \in \mathbb{Z} (m \le x < m + 1) (m\text{- \textit{целая часть} } x)$$

Доказательство. ($\exists$) $x \ge 0$. Рассм. $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n > x\}$. По аксиоме архимеда, это мн-во непусто. $\Rightarrow \exists p = min(S)$. Положим $m = p - 1$. Тогда $m \le x$ и $m + 1 > x$

$x < 0$. По предыдущему пункту $\exists m' \in \mathbb{Z} (m' \le -x < m' + 1)$. Положим:

$$m = \begin{cases} -m', x = -m' \\ -m' - 1, x \neq -m' \end{cases} \Rightarrow m \le x < m + 1 \tag{3}$$

Единственность:

$$\begin{cases} m' \leq x < m' + 1 \\ m'' \leq x < m'' + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m' - m'' < 1, m' - m'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' - m'' = 0 \Rightarrow m' = m''$$

$\square$

Пример.

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2$$

Следствие.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q}(a < r < b)$$

Доказательство.

$$\exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < b - a)$$

$$r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}.\text{Тогда } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a, r \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

$\square$

Обозначение.

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$$

Определение 3.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$a^0 = 1, a^{n+1} = a^n a$$

Обозначение. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \leq n$, положим:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n$$

Если $m > n$.

Теорема 3.2 (Бином Ньютона)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\colon$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},\ \textit{где}\ C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1, (n+1)! = n! * (n+1)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- n = 1: Верно
- Предположим, что утв. верно для n:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} = \Big[C_n^k + C_n^{k-1} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \iff \Big]$$

$$\Big[\iff \tfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k\Big] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

Ч. Т. Д.

$\square$

Следствие. *Пусть $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Тогда:*

$$(1+a)^n \geq 1 + C_n^k a^k$$

Обозначение.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- расширенная числовая прямая

Считают, что $\forall x \in \mathbb{R}(-\infty < x < +\infty)$
Введём допус. операции $x \in \mathbb{R}$

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
- $x - (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
- $x * (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x * (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$
- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Кроме того:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

НЕДОПУСТИМЫЕ операции:

- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $0 * \pm\infty$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглашение: $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

- Если E не огр. сверху, то $\sup E = +\infty$
- Если E не огр. снизу, то $\inf E = -\infty$

Определение 3.2. $I \subset R$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

Лемма 3.3. *Любой промежуток - одно из следующих мн-в:*

- $\emptyset$
- $\mathbb{R}$
- $(a, +\infty)$
- $[a, +\infty)$
- $(-\infty, b)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$

Доказательство. I - промежуток, $I \neq \emptyset$

$$a := \inf I, b := \sup I \Rightarrow a \leq b$$

- Если $a = b$, то $I = \{a\}$
- Если $a < b$ и $a < x < b$. По опр. точных граней $\exists x', x'' \in I \colon (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$

Итак, $(a, b) \subset I \subset [a, b]$

□

4 Лекция 4

4.1 §2. Предел последовательности

4.2 Определение предела

Определение 4.1. $a : \mathbb{N} \to A$ - п-ть эл-ов мн-а A. Значение $a(n)$ - наз-ся n-ым членом п-ти. (Обозначается a_n). Сама п-ть обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$

Если $A = \mathbb{R}$ - то $\{a_n\}$ - числовая п-ть.

Пример. *1)*
$$a : \mathbb{N} \to \{c\}, c \in \mathbb{R}$$

Здесь постоянная п-ть ($a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$)

2) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ *- п-ть Фиббоначи.*

Определение 4.2. Число a наз-ся пределом п-ти $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Обозначается, как $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Определение 4.3 (В кванторах)**.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Или, $a_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Замечание.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0, M = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, M \text{ - \textit{конечно}}$$

Определение 4.4. Если $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, то $\{a_n\}$ наз-ся **сходящейся п-тью**, иначе - **расходящейся п-тью**

Пример.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Зафикс. $\varepsilon > 0$. *Рассмотрим* $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ *нам подойдёт* $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. *Если* $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

Теорема 4.1. *(О единственности предела) Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*, то* $a = b$*.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опред. предела $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ и $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Положим $N = max(N_1, N_2)$:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_N| + |b - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow$, то $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$ $\square$

Задача 4.1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Определение 4.5. П-ть $\{a_n\}$ наз-ся **ограниченной**, если $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ - ограничено.

Теорема 4.2. *(Об ограниченности сходящейся п-ти) Если $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. По опред. предела (для $\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < a_n < a + 1)$. Положим $m = min\{a_1, \dots, a_{N-1}, a - 1\}, M = max\{a_1, \dots, a_{N-1}, a + 1\}$. Тогда $m \leq a_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Замечание. *Обратное утв.* ***неверно****:*

Пример.

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$$

Предположим, что a_n сходится:

По опред. предела($\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < (-1)^n < a + 1)$

- *При чётном $n \Rightarrow 1 < a + 1$*
- *При нечётном $n \Rightarrow a - 1 < -1$*

$\Rightarrow a < 0 \wedge a > 0$!!! - *противоречие*

Лемма 4.3. *Для всякого $m \in \mathbb{N}$ п-ти $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $b_n = a_{n+m}, \forall n \in \mathbb{N}$ имеют предел одновременно, и если имеют, то пределы равны.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\forall n \geq N_1 : (|a_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow (\forall n \geq N_1(|a_{n+m} - a| < \varepsilon))$$

$$(\forall n \geq N_2(|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geq N_2 + m(|a_n - a| < \varepsilon))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

□

Определение 4.6. П-ть $\{b_n\}$ об-ся $\{a_{n+m}\}$ и наз-ся m-ным хвостом $\{a_n\}$

Теорема 4.4 (О пределе в нер-вах)**.** *Если $a_n \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $a \leq b$*

Доказательство. От прот. Пусть $b < a$. По опред. предела

$$\exists N_1 \colon \forall n \geq N_1 (a - \frac{a-b}{2} < a_n)$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geq N_2 (b_n < b + \frac{a-b}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$, тогда:

$$\frac{a+b}{2} < a_N \text{ и } b_N < \frac{a+b}{2} \Rightarrow b_N < a_N!!!$$

$\square$

Замечание.

Пример.

$$0 < \frac{1}{2}, \textit{но} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Следствие. *Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N(a_n < b_n)$

Теорема 4.5 (О зажатой п-ти)**.** *Если* $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, *то* $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (a - \varepsilon < a_n)$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (b_n < a + \varepsilon)$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Ч. Т. Д. $\square$

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$$

- $q = 0$*: верно*

- $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha, \alpha > 0$

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{n\alpha}(\frac{1}{n\alpha} \to 0) \Rightarrow |q|^n \to 0$$

Теорема 4.6. *(Арифметические операции с пределами) Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) Если $b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall n \geq N:$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) По теор. 2 п-ть $\{a_n\}$ огр., т. е.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leq C)|b| \leq C$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

Тогда $\forall n > N = max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

3) Т. к. $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$, то дост-но д-ть, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, и восп. утв. 2: Т. к. $b \neq 0$, то $\exists N_1, \forall n \geq N_1 (|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. Поэтому:

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| \leq \frac{|b|}{2} + |b_n|,$$

откуда:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2},$$

а значит: $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall n \geq N_1$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела: $\exists N_2, \forall n \geq N_2 (|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon)$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при $\forall n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

□

5 Лекция 5

Пример.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq a_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} (\frac{2}{n^2} \to 0, \frac{1}{n} \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Определение 5.1. Посл-ть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Замечание.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \textit{где } \alpha_n \textit{ - б. м.}$$

Пример. *Пусть* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *- б. м., а* $\{\beta_n\}_1^\infty$ *- огранич. Тогда:* $\{\alpha_n\beta_n\}_1^\infty$ *- б. м.*

Доказательство. Т. к. $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огр., то $\exists C > 0\colon \forall n(|\beta_n| \le C)$

$$-C|\alpha_n| \le \alpha_n\beta_n \le C|\alpha_n|$$

Крайние части $\to 0 \Rightarrow$ По. т. о двух полицейских $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$ □

5.1 Монотонные п-ти

Определение 5.2. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого возрастающей** (**строго возрастающей**), если

$$a_n \le a_{n+1} (a_n < a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого убывающей** (**строго убыв.**), если:

$$a_n \ge a_{n+1} (a_n > a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Такие п-ти наз-ся **монотонными**.

Замечание. *Из опр-я следует, что* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает* $\iff$ $\{-a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает.*

Замечание. *Если* $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N \Rightarrow \forall n, m(n < m \to a_n \le a_m)$

Теорема 5.1 (Теорема о пределе монотонной п-ти)**.** *ПУсть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает и огр. сверху, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *сходиться и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает и огр снизу, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *сходиться и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$

Доказательство. Док-ем первое утв. По условию $\exists c = \sup\{a_n\}_1^\infty \in \mathbb{R}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. супремума $\forall n(a_n \le c)$, также:

$$\exists N(a_N > c - \varepsilon)$$

Поскольку $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $a_n \ge a_N, \forall n \ge N \Rightarrow$ при всех таких $n \ge N$ имеем:

$$a_N \le a_n$$

$$c - \varepsilon < a_N \le a_n \le c < c + \varepsilon, \text{откуда}$$
$$|a_n - c| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

Второе утв. док-ся аналогично. $\square$

Лемма 5.2 (Нер-во Бернулли)**.** *Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \ge -1$, то:*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Доказательство. **МММ**:

n = 1 Верно.

$n \Rightarrow n+1$ Пусть утв. верно для n. Тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \ge 1+(n+1)x$$

$\square$

Пример. *Для $\forall x \in \mathbb{R}$ п-ть $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ сходится.*

Доказательство. Зафикс. $m \in \mathbb{N}$, что $m \ge |x|$. Тогда при:

$$n \ge m\colon a_n(x) > 0,$$

а также:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Исследуем: $(-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}})$. Она:

$$\begin{cases} > 0, x < 0 \\ \ge -1, x \ge 0 \end{cases}$$

По нер-ву Бернулли:

$$(1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \ge (1+\frac{x}{n})(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}) = 1$$

Итак, $\{a_n\}_1^\infty(x)$ нестрого возр. при $n \geq m$. По доказанному $a_n(-x) \geq a_m(-x)$, при $n \geq m$.

Т. к.

$$a_n(x)a_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq 1,$$

то:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{a_n(-x)} \leq \frac{1}{a_m(-x)}, \text{т. е.}$$

$\{a_n\}_1^\infty$ огр. сверху.

Сл-но, по теореме о пределе монот. посл-ти. $\{a_n(x)\}_1^\infty$ сход-ся. □

Определение 5.3.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 5.1. Док-те, что $2 < e < 3$

5.2 Последовательность вложенных отрезков

Определение 5.4. П-ть отрезков $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **вложенной**, если $\forall n \in \mathbb{N}([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$

Если к тому же, $b_n - a_n \to 0$, то п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **стягивающейся**.

Теорема 5.3 (Кантор). *Всякая п-ть вложенных отрезков имеет общую точку. Если п-ть стягивающаяся, то такая точка единственная.*

Доказательство. Пусть задана п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ вложенных отр-ов. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и огр. сверху (числом b_1).

П-ть $\{b_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и огр. снизу (числом a_1)

$\Rightarrow \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ сход., $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ и $\alpha \leq \beta$.

Итак $\forall n(a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n)$, т. е.:

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$$

Если п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ - стягив., то $b_n - a_n \to 0$

Пусть $x, y \in \bigcap_{n=1}^\infty[a_n, b_n]$, тогда $|x - y| \leq b_n - a_n \Rightarrow x = y$

Т. е. $\bigcap_{n=1}^\infty[a_n, b_n] = x$, где $x = \alpha = \beta$. □

6 Лекция 6

Рассм. $\bigcap_{i=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$

По аксиоме Архимеде, заключаем, что $\bigcap_{i=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

6.1 Бесконечные пределы

Выделим классы п-ть, **расход. особым образом**:

Определение 6.1. Говорят, что $\{a_n\}_1^{\infty}$ стремится к $+\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$

Обозначение. *Пишут вот так:* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *или* $a_n \to +\infty$

Определение 6.2. Говорят, что $\{a_n\}_1^{\infty}$ стремится к $-\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow a_n < -\frac{1}{e})$

Обозначение. *Пишут, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *или* $a_n \to -\infty$

Определение 6.3. П-ть $\{a_n\}_1^{\infty}$ наз-ся **беск. большой**, если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

Замечание. *Из опр-ий следует, что* $a_n \to -\infty \iff (-a_n) \to +\infty$

Пример. *1)*

$$a_n = n^2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Возьмём $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq N \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

2)

$$(-n^2) \to -\infty$$

3)

$$(-1)^n n^2 - \text{б. б., но}, (-1)^n n^2 \not\to +\infty, (-1)^n n^2 \not\to -\infty$$

Задача 6.1. Док-ть, что всякая ББ п-ть является неограниченной.

Замечание. *П-ть не может одновременно стремиться к числу и к символу* $+\infty$ *(Т. к. она либо ограничена, либо неогр.), а также к бесконечностям разных знаков. Таким образом, если п-ть имеет предел в* $\mathbb{R}$*, то он единственный.*

Лемма 6.1. *Пусть* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, тогда* $\{a_n\}_1^{\infty}$ *- ББ* $\iff$ $\{\frac{1}{a_n}\}_1^{\infty}$ *- БМ*

Доказательство. Это следует из $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ □

6.2 Дополнения к ранним теоремам

Теорема 6.2 (4'). *Пусть* $a_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1) *Если* $a_n \to +\infty$, *то* $b_n \to +\infty$

2) *Если* $b_n \to -\infty$, *то* $a_n \to -\infty$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N \colon (a_n > \frac{1}{\varepsilon})$. Тогда $b_n \ge a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \ge N$. Тогда $b_n \to +\infty$

2) Вытекает из (1): $(-b_n) \to +\infty, -b_n \le -a_n, \forall n \to (-a_n) \to +\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

□

Теорема 6.3 (6'). *1) Если п-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр. и неогр. сверху, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) *Если п-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убыв. и неогр. снизу, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Доказательство. 1) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Из неогр. сверху следует, что $\exists N \colon a_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ Тогда $a_n \ge a_N > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \ge N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) Аналогично (1), или с помощью сведения a_n к $(-a_n)$

□

Следствие. *Всякая монотонная п-ть имеет предеел в* $\overline{\mathbb{R}}$: *если* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$

Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убыв., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\, a_n \,\}$

Задача 6.2. Д-те, что теорема 5 (арифм. операции с пределами), остаётся верно и для $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допуст. операциями)

Пример. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}, x < 0$, *а* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

Доказательство.

$$\exists N_1, \forall n \ge N_1 (a_n < \frac{x}{2})$$

$$\exists N_2, \forall n \ge N_2 (b_n > \frac{2}{|x|\,\varepsilon})$$

Возьмём $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n \geq N:$

$$a_n b_n < \frac{x}{2} \frac{2}{|x|\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\square$

6.3 Подпоследовательности

Определение 6.4. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - п-ть и $\{n_k\}_1^\infty$ строго возрастающая п-ть нат. чисел. П-ть $\{b_k\}_1^\infty$, где $b_k = a_{n_k}, k \in \mathbb{N}$, наз-ся **подпоследовательностью** и об-ся $\{a_{n_k}\}_1^\infty$

Пример.

$$a_n = n, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n_k} = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ - } \textit{подп-ть}$$

Замечание. *1) Подп-ть $\{\, a_{n_k} \,\}$ - это композиция строго возрастающей ф-ции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma(k) = n_k$, и самой п-ти $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*

2) Верно, что $n_k \geq k, \forall k$

$(n_1 \geq 1, n_k \geq k, n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1)$

Лемма 6.4. *Если п-ть $\{\, a_n \,\}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подп-ть имеет тот же предел*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, а $\{\, a_{n_k} \,\}$ - подп-ть $\{\, a_n \,\}$

a) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N, \forall n \geq N(|a_n - a| < \varepsilon)$

   Тогда $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при всех $k \geq N$ (т. к. $n_k \geq k \geq N$)

   Сл-но, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Если $a = +\infty$, получаем результат, если заменить $|a_n - a| < \varepsilon$ на $a_n > \frac{1}{\varepsilon} (a_n < -\frac{1}{\varepsilon})$

$\square$

Теорема 6.5 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Всякая огр. посл-ть имеет сход. подпосл-ть.*

Доказательство. Пусть задана $\{a_n\}_1^\infty$ - ограниченная,

$$\Rightarrow \exists [c,d] \ni a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Определим п-ть отрезков $[c_k, d_k]$ Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$. Если определён отрезок $[c_k, d_k]$, то разделим его пополам ($y = \frac{c_k+d_k}{2}$)

$$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{если } \{\, k \mid a_k \in [c_k, y] \,\} \text{ - бесконечно} \\ [y, d_k], \text{иначе} \end{cases}$$

П-ть $\{\, [c_k, d_k] \,\}$ стягивающаяся:

$$\forall k\colon \begin{cases} [c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k] \\ \qquad d_k - c_k = \dfrac{d-c}{2^k} \end{cases}$$

По т. Кантора $\exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$, причём $c_k \to a, d_k \to a$

Определим a_{n_k}:

$$a_{n_1} = a_1, \text{если определён } a_{n_k}, \text{ то положим}$$

$$a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}], n_{k+1} \geq n_k$$

Т. к. $c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$, то по т. о зажатой п-ти (о двух полицейских), то $a_{n_k} \to a$ □

Теорема 6.6. *Если п-ть неограничена сверху (снизу), то она имеет подпосл-ть, стремящуюся к $+\infty$ ($-\infty$)*

Доказательство. Пусть дана п-ть $\{\, a_n \,\}$ - неогр. сверху.

$$a_{n_1} > 1$$

Пусть определён эл-т a_{n_k}, определим:

$$a_{n_{k+1}} > max \{\, k+1, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k} \,\} \Rightarrow n_{k+1} > k$$

Опр-на $\{\, a_{n_k} \,\}$. Т. к. $a_{n_k} > k, \forall k \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty$ (По теореме 4') □

Следствие. *Всякая п-ть имеет подпосл-ть, стремящуюся к некот. эл-ту $\in \overline{\mathbb{R}}$*