Алгебра и геометрия

Григорян Сергей

5 марта 2025 г.

Содержание

1 Лекция 4

1.1 Структура линейного оператора

ОСЛУ:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Характеристический многочлен

$$\chi_A(\lambda) = \det(A_\phi - \lambda E) = 0$$

Утверждение 1.1 (О свойствах характеристического многочлена матрицы A)**.** *а) Корни характеристического многочлена $\chi_A(\lambda)$, принадлежащие $\mathbb{F}$, и только они являются собственными значениями лин. оператора ϕ.*

б) Характеристический многочлен лин. оператора ϕ не зависит от выбора базиса (хотя A_ϕ зависит).

Доказательство. а) Пусть $\chi_A(\lambda_0) = 0$. Тогда существует ненулевое решение x_0, такое что $\phi(x_0) = \lambda_0 x_0 \Rightarrow \lambda_0$ — собственное значение оператора ϕ.
Пусть λ_0 — собственное значение ϕ. $\exists x_0 \neq 0$, т. ч. $\phi(x_0) = \lambda_0 x_0 \Rightarrow$ система (1) имеет при $\lambda = \lambda_0$ имеет ненулевое решение при $\lambda = \lambda_0$ $\Rightarrow \chi_A(\lambda_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0$ — корень.

б) Пусть e, f — базисы в V.

$$B = S^{-1}AS, S = S_{e\to f}$$

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \det(S^{-1}AS - S^{-1}(\lambda E)S) =$$
$$= \underbrace{\det S^{-1}}_{\frac{1}{y}} \cdot \det(A - \lambda E) \cdot \underbrace{\det S}_{y} = \det = \det(A - \lambda E) = \chi_A(\lambda)$$

$\square$

Обозначение.

$$\chi_\phi(\lambda) := \chi_{A_\phi}(\lambda)$$
$$\operatorname{tr}\phi := \operatorname{tr} A_\phi$$
$$\det\phi := \det A_\phi$$

Следствие. *Если V — линейное пр-во над $\mathbb{C}$, $\dim V \geq 1$, то $\forall\phi\colon V \to V$ имеет хотя бы один вектор.*

Доказательство. $\chi_\phi(\lambda)$ по ОТА имеет хотя бы один корень $\in \mathbb{C}$. □

Следствие. *Если V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, а также*

$$\dim V = 2k+1, k \in \mathbb{N}$$

то $\forall\phi\colon V \to V$ имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство. $\chi_\phi(\lambda)$ имеет хотя бы один вещественный корень. □

Замечание. *$\exists$ линейный оператор, не имеющий собственный векторов:*

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \phi \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\chi_{R(\phi)}(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\phi\lambda + 1$$
$$D = 4\cos^2\phi - 4 = -4\sin^2\phi < 0$$

Над $\mathbb{C}$ два корня: $e^{-i\phi}, e^{i\phi}$

$$B = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

Определение 1.1. Линейный оператор $\phi\colon V \to V$, V над $\mathbb{F}$ называется **диагонализируемым**, если в V $\exists$ базис e, в котором A_ϕ диагональна:

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема 1.1 (Критерий Диагонализируемости)**.** *$\phi\colon V \to V$ — лин. оператор и пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — все попарно различные собственные значения ϕ. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *ϕ диагонализируем*

б) *В V $\exists$ базис e, состоящий из собственных векторов для ϕ*

в) $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$

$$V_\lambda = \ker(\phi - \lambda id)$$

Доказательство.

- а) $\Rightarrow$ б):

$$\exists e \colon A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \phi(e_i) = \lambda_i e_i$$

- б) $\Rightarrow$ в): разобъём базисные векторы по группам с собственным значениями:

$$\lambda_1 \colon e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1s_1}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k \colon e_{k1}, e_{k2}, \ldots, e_{ks_k}$$

Тогда верно, что:

$$Q_1 =< e_{11}, \ldots, e_{1s_1} >\leq V_{\lambda 1}$$

$$\vdots$$

$$Q_k =< e_{k1}, \ldots, e_{ks_k} >\leq V_{\lambda_k}$$

Поэтому:

$$Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_k = V$$

Следовательно:

$$V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \ldots + V_{\lambda_k} = V$$

А т. к. λ_i попарно различны, то по теореме о характеризации прямой суммы, т. к. V_{λ_i} — ЛНЗ, то:

$$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$$

А также:

$$Q_i = V_{\lambda_i}$$

- в) $\Rightarrow$ а): пусть:
  $$V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$$
  Пусть $\begin{pmatrix} e_{i1} & \ldots & e_{is_i} \end{pmatrix}$ — базис в V_{λ_i}, а $e = \{ e_{ij} \}$, тогда:
  $$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \ldots & & & & \\ \ldots & \ddots & \ldots & & & & \\ \ldots & \ldots & \lambda_1 & \ldots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \lambda_2 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \lambda_2 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\square$

1.1.1 Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений

Пусть $\phi\colon V \to V$ — лин. оператор V над $\mathbb{F}$:

$$\chi_\phi(t) = \det(A - tE)$$

Пусть λ — корень $\chi_\phi(t)$, т. е. λ — собственное значение оператора ϕ.

Определение 1.2. Кратность λ, **как корня** $\chi_\phi(t)$, наз-ся **алгебраической кратностью** собсвтенного значения λ.

$$alg(\lambda)$$

Определение 1.3. Размерность собственного подпространства V_λ называется **геометрической кратностью** собственного значения λ.

$$\mathrm{geom}(\lambda)$$

Замечание. *Если λ — собственное значения оператора ϕ, тогда:*

$$\mathrm{alg}(\lambda) \geq 1$$

$$\mathrm{geom}(\lambda) \geq 1$$

Утверждение 1.2. *Пусть $\phi\colon V \to V$ — лин. оператор. $U \leq V$ — инвариантно отн-но ϕ. $\psi = \phi|_U \in \mathcal{L}(U)$. Тогда:*

$$\chi_\phi \vdots \chi_\psi$$

Доказательство. Выберем базис в V, согласованный с инвариантным подпространством U:

$$\underbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_k}_{\text{базис в } U}, e_{k+1}, \dots, e_n}_{\text{базис в } V} = e$$

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \frac{A_\psi}{O} & \frac{B}{C} \end{pmatrix}, k = \dim U$$

$$\chi_\phi(t) = \begin{vmatrix} \frac{A_\psi - tE_k}{O} & \frac{B}{C - tE} \end{vmatrix} = \det(A_\psi - tE)\,|C - tE| = \chi_\psi(t) \cdot \chi_C(t)$$

$$\Rightarrow \chi_\phi(t) \vdots \chi_\psi(t)$$

□

Следствие. *Пусть λ — произв. собственное значение оператора $\phi\colon V \to V$. Тогда* $\mathrm{geom}(\lambda) \leq \mathrm{alg}(\lambda)$

Доказательство. V_λ — инвариантно отн-но ϕ. $\psi = \phi|V_\lambda$

$$\chi_\phi \vdots \chi_\psi$$

$$\chi_\psi = (\lambda - t)^k, k = \dim(V_\lambda)$$

$$\Rightarrow \chi_\phi(t) \vdots (\lambda - t)^k \Rightarrow \mathrm{alg}(\lambda) \geq k = \mathrm{geom}(\lambda)$$

□

Замечание. *Пусть ϕ — диагонализируем, значит $\exists e = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$, т. ч.*

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

Тогда $\phi(e_i) = \lambda_i e_i, \forall i = \overline{1,n}$. Базис, в кот. ϕ диагональная — это базис, состоящий, из собственных векторов, а числа на главной диагонали — собственные значения.

$$\operatorname{tr}\phi = \operatorname{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\det\phi = \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\chi_\phi(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t) \text{ над } \mathbb{F} \text{ — линейно факторизуем}$$

Вывод: *всякий диагонализируемый оператор* ***линейно факторизуем****, т. е. его характеристический многочлен линейно факторизуем.*

Следствие. *Если ϕ не является линейно факторизуем, то он и не диагонализируем.*

Теорема 1.2. *Линейный оператор $\phi\colon V \to V$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ является диагонализируемым $\iff$*

а) ϕ — линейно факторизуем над $\mathbb{F}$ (т. е. $\chi_\phi(t)$ — линейно факторизуем)

б) $\forall i = 1, \ldots, k\colon \operatorname{alg}(\lambda_i) = \operatorname{geom}(\lambda_i)$

Доказательство. а) Необх.: пусть ϕ — диагонализируем по Th (1.1)

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{geom}(\lambda_i) = \deg\chi_\phi \geq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{alg}(\lambda_i)$$

Но $\forall i = \overline{1,n}\colon \operatorname{geom}(\lambda_i) \leq \operatorname{alg}(\lambda_i)$

$$\Rightarrow \forall i = \overline{1,n}\colon \operatorname{geom}(\lambda_i) = \operatorname{alg}(\lambda_i)$$

б) Дост.: пусть а) и б) выполнены:

$$\dim(\underbrace{V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}}_{\text{т. к. } \lambda_i \text{ попарно различны}}) = \sum_{i=1}^{k} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{geom}\lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{alg}(\lambda_i) = \deg\chi_\phi = \dim V$$

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Th 1.1}} \phi \text{ — диагонализируем}$$

□

Пример (Одной лишь лин. факторизуемости ϕ, даже в случае алг. замкнутого поля не достаточно, чтобы утверждать его диагонализируемост)**.**

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & \lambda \end{pmatrix} \text{ — \textit{Жорданова клетка порядка } } n\text{\textit{, отвеч.} } \lambda$$

$$\chi_{J_n(\lambda)}(t) = \begin{vmatrix} \lambda - t & 1 & & & \\ 0 & \lambda - t & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda - t \end{vmatrix} = (\lambda - t)^n$$

$$\mathrm{geom}(\lambda) := \dim V_\lambda = \dim \ker(\phi - \lambda id) = \dim \ker(A - \lambda E) =$$

$$= n - \mathrm{rk}(A - \lambda E) = n - \mathrm{rk}(A_\lambda)$$

$$\mathrm{geom}(\lambda) = n - \mathrm{rk}\, J_n(\lambda) = n - (n-1) = 1 < n$$

1.2 Приведение линейно факторизуемого лин. оператора к верхнетреугольному виду

Утверждение 1.3. *Пусть* $\phi\colon V \to V$ *— лин. оператор:*

$$\phi_\lambda = \phi - \lambda id$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- *а)* *Подпространство* $U \leq V$ *инвариантно отн-но* ϕ
- *б)* $\exists \lambda \in \mathbb{F}\colon U$ *— инвариантно отн-но* ϕ_λ
- *в)* $\forall \lambda \in \mathbb{F}\colon U$ *— инвариатно отн-но* ϕ_λ

Доказательство. а) $\Rightarrow$ в) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{очев.}}$ б) $\Rightarrow$ а)

- а) $\Rightarrow$ в): $x \in U, \phi_\lambda(x) := (\phi - \lambda id)(x) = \underbrace{\phi(x)}_{\in U} - \underbrace{\lambda x}_{\in U} \in U$
- б) $\Rightarrow$ а): $\exists \lambda$, т. ч. U — инвариантно отн-но $\phi - \lambda id$. Покажем, что U инвариантно относительно ϕ.
$$x \in U\colon \phi(x) = (\phi - \lambda id + \lambda id)(x) = \underbrace{(\phi - \lambda id)(x)}_{\in U} + \underbrace{(\lambda id)(x)}_{\in U} \in U$$

□

Утверждение 1.4. *Пусть $\phi\colon V \to V$ — лин. оператор и $\chi_\phi(t)$ раскладывается на линейные множители (т. е. лин. факторизуем). $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Тогда у ϕ найдётся $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.*

Доказательство.
$$\chi_\phi(t) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - t) \Rightarrow \exists \lambda_n \in \mathbb{F}, \text{ кот. явл-ся собств. знач.}$$
$$V_{\lambda_n} = \ker(\phi - \lambda_n id) \neq \{\,0\,\} \Rightarrow \dim \operatorname{Im}(\phi - \lambda_n id) \leq n-1$$
Пусть $U \leq V$, т. ч. $\operatorname{Im}(\phi - \lambda_n id) \leq U$, $\dim U = n-1$
$$(\phi - \lambda_n id)(U) \subseteq \operatorname{Im}(\phi - \lambda_n id) \subseteq U \Rightarrow U \text{ — инв. отн-но } \phi - \lambda id$$
$$\Rightarrow U \text{ — инвариатно отн-но } \phi$$

□

Замечание. ***Условие утв-я можно ослабить*** *(необходимо наличие хотя бы одного собств. знач-я у ϕ)*

Теорема 1.3. *Пусть $\phi\colon V \to V$ — лин. факторизуем над $\mathbb{F}$. Тогда $\exists e = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix}$ в V, в котором:*
$$A_\phi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Доказательство. Покажем, что в V, $\exists$ цепочка вложенных подпространств, которые инв. отн-но ϕ

$$\underbrace{\{\,0\,\} < U_1 < U_2 < \ldots < U_n = V, \dim U_i = i}_{\text{флаг. подпространств}}$$

Докажем $\exists$-ие флага индукцией по $\dim V$:

- База: $\{\,0\,\} < V_1 = V$ — флаг
- Переход: пусть для $\phi\colon W \to W$, $\dim W < n$, утв-е доказано. (ϕ линейно факторизуем).
  По утверждению (1.4) в V найдётся U_{n-1}, инвариантное отн-но ϕ:

$$\psi = \phi|U_{n-1} \text{ — линейно факторизуем (?)}$$

$$\chi_\phi \vdots \chi_\psi$$

$$\chi_\phi(t) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - t) \Rightarrow \chi_\psi(t) = \prod_{i\neq j}(\lambda_i - t)$$

  По предположению индукции $\exists$ флаг ψ – инв, поэтому:

$$\underbrace{\{\,0\,\} < U_1 < U_2 < \ldots < U_{n-1} < U_n = V}_{\phi\text{ — инв.}}$$

  Тогда в базисе e, согласов. с флагом, $\begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_k \end{pmatrix}$ — базис в U_k.

$\square$

Следствие. *В условиях Th (1.3),* $\forall k = \overline{0, n-1}$ *справедливо утв-е:*

$$(\phi - \lambda_{k+1} id) \ldots (\phi - \lambda_n id) V \subseteq U_k$$

Доказательство. Индукцией по количеству скобок слева:

$$(\phi - \lambda_n id) V \overset{?}{\subseteq} U_{n-1}$$

$$A - \lambda_n E = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_n & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in U_{n-1} = < e_1, \ldots, e_{n-1} >$$

Предположение индукции:

$$(\phi - \lambda_{k+2}id)\dots(\phi - \lambda_n id)V \subseteq U_{k+1}$$

$$(\phi - \lambda_{k+1})U_{k+1} \subseteq U_k$$

$$\overbrace{\{0\} < U_1 < U_2 < \ldots < U_n}^{\text{инв. отн. } \phi} = V$$

$$U_{k+1} = U_k \oplus < e_{k+1} >$$

$$(\phi - \lambda_{k+1}id)(U_k) \subseteq U_k \text{ — т. к. } \phi \text{ — инв.}$$

$$(\phi - \lambda_{k+1}id)(e_{k+1}) = \phi(e_{k+1}) - \lambda_{k+1}e_{k+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_{ik+1}e_i + \lambda_{k+1}e_{k+1} - \lambda_{k+1}e_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} e_{ik+1}e_i \in U_k$$

□

Теорема 1.4 (Гамильтона, Кэли)**.** *Пусть $\phi\colon V \to V$ — лин. факторизуем над $\mathbb{F}$ (лин. оператор). $\chi_\phi(t)$ — его характеристический многочлен. Тогда:*

$$\chi_\phi(\phi) = O \text{ — нулевой оператор}$$

Эквив. формулировка в терминах матрицы: пусть $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\chi_A(t)$ — характ. многочлен матрицы A, и он лин. фактор. над $\mathbb{F}$, тогда:

$$\chi_A(A) = 0$$

Доказательство.

$$k = 0 \Rightarrow (\phi - \lambda_1 id)\dots(\phi - \lambda_n id)V \subset U_0 = \{0\}$$

$$\forall x\colon \prod_{i=1}^{n}(\phi - \lambda_i id)(x) = (-1)^n \chi_\phi(\phi)(x) = 0$$

$$\Rightarrow \chi_\phi(\phi)(x) = 0$$

□

Замечание. *Гамильтон и Кэли, независимо друг от друга, доказали это утв-е только для $\dim_{\mathbb{C}} V \leq 4$. Современное доказательство для общего случая принадлежит Фробениусу (1878 г.).*

Замечание. *В теореме Гамильтона-Кэли можно отказаться от линейной факторизуемости. Пусть* $\mathbb{F}$ *не алгебраически замкнуто и* $\chi_\phi(t)$ *не раскладывается на линейные множители над* $\mathbb{F}$.

$$F \subset K$$

$$\chi_\phi(\phi) = O, \phi \text{ — в лин. пр-ве над } K$$
$$\chi_\phi(t) \in F(t) \text{ — в лин. пр-ве над } \mathbb{F}$$

2 Лекция 5

2.1 Аннулирующие многочлены

$\phi\colon V \to V$ — линейный оператор V над $\mathbb{F}$, P — ненулевой многочлен из $\mathbb{F}[t]$

Определение 2.1. Многочлен P называется **аннулирующим** для $\phi \iff P(\phi) = 0$

Пример.

$$id(x) = x$$

$$P = t - 1 \Rightarrow P(\phi) = \phi - 1 \cdot id = id - id = 0$$

Теорема 2.1 (Гамильтон-Кэли)**.**

$$\chi_\phi(\phi) = 0$$

Т. о. аннулирующий многочлен всегда существует.

$$\dim \mathcal{L}(V) = \dim^2 V = n^2$$

$$id, \phi, \phi^2, \ldots, \phi^{n^2} \in \mathcal{L}(V) \Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{F}\colon \alpha_0 \cdot id + \alpha_1 \cdot \phi + \ldots + \alpha_{n^2}\phi^{n^2} = 0$$

Определение 2.2. Минимальным многочленом (μ_ϕ) линейного оператора $\phi\colon V \to V$ называется **аннулирующим многочленом минимальной степени.**

$$\deg \mu_\phi \leq \deg P, P \text{ — аннулирующий мн-н}$$

Утверждение 2.1. *$\phi\colon V \to V$, μ_ϕ — минимальный многочлен ϕ, P — произвольный аннулирующий многочлен, тогда:*

$$P \,\vdots\, \mu_\phi$$

Доказательство.

$$P(t) = \mu_\phi(t) \cdot Q(t) + R(t)$$

Покажем, что либо $R(t) \equiv 0$, либо $\deg P < \deg \mu_\phi$. Действительно:

$$R(\phi) = \underbrace{P(\phi)}_{0} - \underbrace{\mu_\phi(\phi)}_{0} \cdot Q(\phi) = 0$$

□

Следствие. *μ_ϕ определён с точностью до ассоциированности.*

Доказательство.

$$\mu_\phi, \mu'_\phi \text{ — мин. мн-ны } \phi \Rightarrow \mu_\phi \,\vdots\, \mu'_\phi \wedge \mu'_\phi \,\vdots\, \mu_\phi \Rightarrow \text{ они ассоциированы.}$$

□

Следствие.

$$\chi_\phi \,\vdots\, \mu_\phi$$

Следствие. *Корни $\chi_\phi(t)$, принадлежащие полю $\mathbb{F}$, являются корнями μ_ϕ и наоборот.*

Доказательство. **Необ.:** λ — корень $\chi_\phi(t) \Rightarrow \lambda$ — собств. значение ϕ $\Rightarrow \exists x \neq 0$, т. ч. $\phi(x) = \lambda x \Rightarrow \phi^n(x) = \lambda^n x$

$$0 = \mu_\phi(\phi)(x) = \left(\sum_i \alpha_i t^i\right)\Big|_{t=\phi}(x) =$$

$$= \left(\sum_i \alpha_i \lambda^i\right)(x) = \mu_\phi(\lambda) \cdot x = 0$$

Поэтому λ — корень μ_ϕ □

Теорема 2.2 (О взаимнопростых делителях аннулирующего многочлена)**.** *$\phi\colon V \to V$, f — аннулирующий многочлен ϕ.*

$$f = f_1 \cdot f_2, \text{ где } f_1, f_2 \text{ — взаимнопросты.}$$

Тогда, если $V_i = \ker f_i(\phi)$, то:

$$V = V_1 \oplus V_2$$

Причём V_1 и V_2 — инвариантны относительно ϕ.

Доказательство. а) ϕ — инв-ть?

$$f_i(\phi) \cdot \phi = \phi \cdot f_i(\phi) \Rightarrow V_i = \ker f_i(\phi)$$

$\ker f_i(\phi)$ — ϕ инвариантно по утв. о коммутирующих операторах.

б)

$$\exists u_1, u_2 \in F(t)\colon$$

$$u_1(t) f_1(t) + u_2(t) f_2(t) = 1$$

Покажем, что $\operatorname{Im} f_1(\phi) \subset V_2$ и $\operatorname{Im} f_2(\phi) \subset V_1$.

$$y \in \operatorname{Im} f_1(\phi)\colon \exists x \in V : y = f_1(\phi)(x)$$

$$f_2(y) = \underbrace{f_1(\phi) \circ f_2(\phi)}_{f(\phi)}(x) = 0$$

в) Покажем, что $x \in V \stackrel{?}{=} V_1 + V_2$

$$x = id \cdot x = (f_1(\phi) \cdot u_1(\phi) + f_2(\phi) \cdot u_2(\phi))(x) =$$

$$= \underbrace{f_1(\phi)(x')}_{x_2} + \underbrace{f_2(\phi)(x'')}_{x_1} = x_1 + x_2$$

г) Проверим, что $V_1 \cap V_2 = \{ 0 \}$. Пусть $x \in V_1 \cap V_2$, т. е.:

$$f_1(\phi)(x) = f_2(\phi)(x) = 0$$

$$x = id \cdot x = (u_1(\phi) f_1(\phi) + u_2(\phi) \cdot f_2(\phi))(x) = 0 + 0 = 0$$

□

Следствие.

$$\phi\colon V \to V \text{ — \textit{лин. оп.}}, f \text{ — \textit{аннул.} } \phi$$

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \ldots \cdot f_s, f_i \text{ – \textit{причём} } f_i \text{ \textit{попарно взаимнопросты.}}$$

$$V_i = \ker f_i(\phi_i) \Rightarrow V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_s$$

Доказательство. ММИ по s:

- База: $s = 2$ — доказано в теореме (2.2)
- Переход: пусть для $s-1$ взаимнопростых делителей утверждение доказано, докажем для s:

$$f = \underbrace{(f_1 \cdot \ldots \cdot f_{s-1})}_{p} \cdot \underbrace{f_s}_{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ взаимнопросты.}$$

$$\overset{\text{по теореме (2.2)}}{\Rightarrow} V = \underbrace{\ker(f_1(\phi) \cdot \ldots \cdot f_{s-1}(\phi))}_{V'} \oplus V_s$$

Рассмотрим $\phi|_{V'}$, $f_1 \cdot \ldots \cdot f_{s-1}$ — аннулирует $\phi|_{V'}$, тогда по предположению индукции:

$$V' = \ker(f_1(\phi)|_{V'}) \oplus \ldots \oplus \ker(f_{s-1}(\phi)|_{V'})$$

Покажем, что:

$$\ker(f_i(\phi)|_{V'}) = \ker(f_i(\phi))$$

  - $\subseteq$: $x \in \ker(f_i(\phi)|_{V'}) \Rightarrow x \in V'$ на V' ϕ и $\phi|_{V'}$ совпадают $\Rightarrow$ включение доказано.
  - $\supseteq$: пусть $x \in \ker f_i(\phi)$, т. е. $f_i(\phi)(x) = 0$

$$(f_1(\phi) \cdot \ldots \cdot f_i(\phi) \cdot \ldots \cdot f_{s-1}(\phi))(x) =$$

$$(f_1(\phi) \cdot \ldots \cdot f_{i-1}(\phi) \cdot f_{i+1}(\phi) \cdot \ldots f_{s-1}(\phi)) \cdot f_i(\phi)(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in \ker(f_1(\phi) \cdot \ldots \cdot f_i(\phi) \cdot \ldots \cdot f_{s-1}(\phi)) \Rightarrow x \in V' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker f_i(\phi) \subseteq \ker(f_i(\phi|_{V'}))$$

□

2.2 Корневые подпространства

$$\phi\colon V \to V \text{ — лин. оператор.}$$

Определение 2.3. Вектор x называется **корневым** для ϕ_i отвечающим $\lambda \in \mathbb{F}$, если $\exists k \in \mathbb{N}$:

$$(\phi - \lambda id)^k(x) = 0 \tag{2}$$

Наименьшее k, удовлетворяющее (2) называется **высотой корневого вектора**.

Замечание. *Будем считать, что* 0 *— корневой, высоты* 0

Корневые векторы высоты 1, отвечающие λ — это собственные векторы ϕ, отвеч. λ, и только они.

Пример.

$$\phi = D = \frac{d}{dx}$$

$$V = \mathbb{R}_n[x] = \{\, f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f \leq n \,\}$$

$$x^n \text{ — наибольший вектор и } n+1 \text{ — его высота}$$

$$\Rightarrow D^{n+1}(V) = 0$$

$\Rightarrow V$ *— корневое для* D*, отвечающее* $\lambda = 0$

$$\underbrace{x^n}_{n+1} \overset{D}{\mapsto} \underbrace{nx^{n-1}}_{n} \mapsto \ldots \mapsto \underbrace{n! \cdot 1}_{1} \mapsto \underbrace{0}_{0}$$

(Вектора и их высоты)

Утверждение 2.2. *Множество всех корневых векторов для оператора* ϕ*, отвечающее* λ*, является подпространством в* V*.*

Доказательство. Пусть x — корневое высторы m, y — корневое высоты l, $k = \max\{\, m, l \,\}$

$$(\phi - \lambda id)^k(x+y) = (\phi - \lambda id)^k(x) + (\phi - \lambda id)^k(y) = 0 + 0 = 0$$

$\square$

Обозначение. V^λ *— корневое для* ϕ*, отвечающее* λ*.*

Утверждение 2.3. *Подпространство* $V^\lambda \neq \{0\} \iff \lambda$ *— собсвтенное значение оп.* ϕ.

Доказательство.

- $\Rightarrow$ Пусть $V^\lambda \neq \{0\}$, т. е. $\exists y \neq 0, y \in V^\lambda$

$$\exists k \in \mathbb{N}\colon \begin{cases} (\phi - \lambda id)^k(y) = 0 \\ x = (\phi - \lambda id)^{k-1}(y) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\phi - \lambda id)(x) = 0$$

$$\phi(x) = \lambda x \Rightarrow \lambda \text{ — собств. знач. } \phi$$

- $\Leftarrow \lambda$...

□

Теорема 2.3 (О свойствах корневых подпространств.)**.** $\phi\colon V \to V$ *— лин. оп.,* V^λ *— его корневое подпространство, отвечающее собственному значению* λ*. Тогда:*

а) V^λ *— инвариантное относительно* ϕ

б) На V^λ *оператор* ϕ *имеет единственное собственное значение, которое равно* λ.

в) Если W *— дополнительные к* V^λ*, т. е.* $V = V^\lambda \oplus W$*; тогда:*

$$(\phi - \lambda id)|_W \text{ — невырожден}$$

Доказательство.

а) Пусть m — максимальная высота векторов из V^λ:

$$V^\lambda = \ker(\phi - \lambda id)^m, (\phi - \lambda id)^m \phi = \phi(\phi - \lambda id)^m$$

По утв. о коммут. операторах V^λ — инв. относительно ϕ.

б) От противного, пусть $\mu \neq \lambda$ и μ тоже явл. собственным значением V^λ

$$\exists x \in V^\lambda\colon \phi(x) = \mu x \Rightarrow (\phi - \lambda id)(x) = \mu x - \lambda x = (\mu - \lambda)x$$

$$(\phi - \lambda id)^m(x) = (\mu - \lambda)^m x = 0 \Rightarrow (\mu - \lambda)^m = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \lambda \Rightarrow \perp$$

в) Выберем базим в V, согласованный с разлложением:

$$V = V^{\lambda} \oplus W$$

$$(\phi - \lambda id)_e = \begin{pmatrix} \frac{A-\lambda E}{O} & \frac{O}{B-\lambda E} \end{pmatrix}$$

$$B - \lambda E = (\phi - \lambda id)|_W$$

От противного, пусть $\deg(B - \lambda E) = 0 \Rightarrow \ker(\phi - \lambda id)|_W \neq \{ 0 \}$

$$\Rightarrow \exists x \neq 0 \in W \colon (\phi - \lambda id)(x) = 0 \Rightarrow x \in V^{\lambda}$$

□

Теорема 2.4 (О разложении пространства V, в котором действует лин. факт. оп. ϕ, в прямую сумму корневых)**.** *$\phi \colon V \to V$, V — над $\mathbb{F}$*

$$\chi_{\phi} \text{ — лин. факт. над } \mathbb{F}$$

Тогда, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — все попарно различные собств. знач.:

$$\Rightarrow V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$$

Доказательство.

$$\chi_{\phi}(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{m_i}$$

$$m_i = \operatorname{alg}(\lambda_i)$$

$$(t-\lambda_1)^{m_1}, (t-\lambda_2)^{m_2}, \ldots, (t-\lambda_s)^{m_s} \text{ — попарно взаимнопросты.}$$

$$\overset{\text{по теореме (2.3)}}{\Rightarrow} V = \ker(\phi - \lambda_1 id)^{m_1} \oplus \ldots \oplus \ker(\phi - \lambda_s id)^{m_s}$$

$$x \in V \Rightarrow x = x_1 + \ldots + x_s, x_i \in V^{\lambda_i}$$

Покажем, что $V^{\lambda_i} \subseteq \ker(\phi - \lambda_i id)^{m_i}$.
От противного, пусть $0 \neq x \in V^{\lambda_i}$, но $x \notin \ker(\phi - \lambda_i id)^{m_i}$, т. е. x — корневое для ϕ, но высота x равна $M > m_i$:

$$\chi_{\phi}(\phi)(x) = \left((-1)^n \prod_{i=1}^{s} (\phi - \lambda_i id)^{m_i} \right)(x) =$$

$$= (-1)^n \left(\prod_{j \neq i} (\phi - \lambda_j id)^{m_j} \right) \underbrace{(\phi - \lambda_i id)^{m_i} x}_{\neq 0} \neq 0$$

$$(\phi - \lambda_j id)|_{V^{\lambda_i}} \text{ — невырожд.}$$

Однако, это противоречит теореме Гамильтона-Кэли. $\Rightarrow V^{\lambda_i} = \ker(\phi - \lambda_i id)^{m_i}$, Ч. Т. Д. $\square$

Следствие. *Пусть* ϕ *— лин. факториз. оператора* $: V \to V$*:*

$$\chi_\phi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{m_i}, \lambda_i \text{ — попарно разл. } m_i = \operatorname{alg}(\lambda_i)$$

Тогда $\dim V^{\lambda_i} = m_i$

Доказательство. Пусть e — базис в V, согласов. с теоремой(2.4). Тогда:

$$\phi = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{pmatrix}$$

где $A_i = \phi|_{V^{\lambda_i}}$

$$\chi_\phi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} \chi_{\phi|_{V^{\lambda_i}}}$$

$$\Rightarrow \chi_{\phi|_{V^{\lambda_i}}} \text{ — тоже лин. факт.}$$

$$\Rightarrow \chi_{\phi|_{V^{\lambda_i}}} = (t - \lambda_i)^{n_i}, n_i \le m_i$$

$$\Rightarrow \sum_i \chi_{\phi|_{V^{\lambda_i}}} = \sum_i n_i = \deg \chi_\phi = n = \sum_i m_i \Rightarrow \forall i, n_i \le m_i$$

$$\Rightarrow n_i = \dim V^{\lambda_i} = m_i$$

$\square$

Следствие. *Корневое подпространство* V^λ *— это наибольшее (по включению) подпространство в* V_i*, на котором оператор* ϕ *имеет* λ *единственным собственным значением.*

Доказательство.

$$V^\lambda \subset U \text{ — такое подпр-во} \Rightarrow \text{кратность } \lambda \text{ больше } \operatorname{alg}(\lambda) \Rightarrow \perp$$

$\square$

2.3 Нильпотентные операторы

Определение 2.4. $\phi\colon V \to V$ — называется нильпотентным, если

$$\exists k \in \mathbb{N}\colon \phi^k = 0$$

Наименьшее k, для которого выполняется это условие называется **индексом нильпотнентности** ϕ

Пример. $V^\lambda, \exists m\colon \forall x \in V^\lambda \Rightarrow (\phi - \lambda id)^m(x) = 0$

$$\Rightarrow \phi - \lambda id \text{ — нильпонтен на } V^\lambda$$

Вопрос: какие бывают собств. знач. у нильп. оператора?

$$\phi(x) = \lambda x \Rightarrow \phi^k(x) = \lambda^k x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Замечание. *Всякий нильпотентным оператор не имеет собственных значений, кроме* 0.

Определение 2.5. Пусть ϕ — нильпотентный оператор с инд. нильпотентности k, тогда

$$\exists x \in V\colon \phi^k(x) = 0, \phi^{k-1}(x) \neq 0$$

Тогда лин. оболочка:

$$U = < x, \phi(x), \ldots, \phi^{k-1}(x) >$$

называется **циклическим пространством** для ϕ, порожд. вектором x.

Замечание. *Циклическое пространство инв. отн-но* ϕ.

Утверждение 2.4. *Векторы* $x, \phi(x), \ldots, \phi^{k-1}(x)$ *образуют базис цикл. подпр-ва* U:

Доказательство. Проверим ЛНЗ. От прот.:

$$\alpha_0 x + \alpha_1 \phi(x) + \ldots + \alpha_{k-1}\phi^{k-1}(x) = 0$$

Пусть α_j — лидер (т. е. не равен 0, но для $i < j$ $\alpha_i = 0$). Умножим рав-во на ϕ^{k-1-j}

$$\alpha_j \phi^{k-1}(x) + \phi_{j+1}\underbrace{\phi^k(x)}_{0} + \underbrace{\ldots}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \Rightarrow \perp$$

□

$$\underbrace{\phi^{k-1}(x)}_{e_1}, \underbrace{\phi^{k-2}(x)}_{e_2}, \dots, \underbrace{x}_{e_k}$$

$$\phi(e_1) = 0$$

$$\phi(e_2) = e_1$$

$$\phi(e_k) = e_{k-1}$$

$$A_\phi^e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_k(0)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = J_k(\lambda)$$

Теорема 2.5. *(О нильпотентном операторе) $\phi\colon V \to V$ — нильпотентный оператора (инд. нильпотнентности $= k$). Пусть x — вектор высоты k, т. е.*

$$\phi^k(x) = 0, \phi^{k-1}(x) \neq 0$$

$$U = < x, \phi(x), \dots, \phi^{k-1}(x) >$$

Тогда в V найдётся W — дополнительное к U ϕ инвариантное подпр-во.

$$V = U \oplus W$$

Доказательство. Идея:

$$\begin{cases} U \cap W = \{\, 0 \,\} \\ V = U + W \end{cases}$$

Первому условию (и ϕ инвариатности) удовлетворяет $\{\, 0 \,\}$. Далее надо выбрать максимальное по размерности ϕ инвариатное подпространство, удовл. этому условию. Пусть W — такое подпр-во. Покажем, что если второе условие не удовл., то всегда существует большее подпространство.

а) Пусть для W, макс. размерность, не выполняется второе условие, т. е. $U + W < V \iff \exists a \in V$, т. ч. $a \notin U + W$.

$$< a, \phi(a), \phi^2(a), \ldots, \underbrace{\phi^k(a)}_{0 \in U+W} >$$

Пусть $z \notin U + W$, а $\phi(z) \in U + W$:

$$\phi(z) = \underbrace{\sum_{s=0}^{k-1} \alpha_s \phi^s(x)}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W}$$

$\square$