Матан

Сергей Григорян

4 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 9

Определение 1.1. Семейство $\{ G_\lambda \}$ наз-ся покрытием мн-ва E, если $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Покрытие наз-ся открытым, если все G_λ открыты.

Пример. $\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right) \}_{n \in \mathbb{N}}$ - *открытое покр-е* $(0, 1)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

Теорема 1.1 (Лемма Гейне-Бореля)**.** *Если* $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ *образует открытое покр-е отрезка* $[a, b]$*, то:*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda\colon ([a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Предположим, что из открытого покр-я $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ отрезка $[a, b]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разделим $[a, b]$ пополам и обозначим за $[a_1, b_1]$ ту его половину, кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ.

Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим за $[a_2, b_2]$ ту его половину, кот. не покр-ся конечным набором G_λ

...

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть отрезков, каждый из кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ

По т. Кантора о вложенных отрезках, найдётся т. $c \in \bigcap_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Т. к.

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (c \in G_\lambda \text{ - открытое})$$
$$\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$$

Выберем k так, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$

Сл-но, $c - a_k < \varepsilon$ и $b_k - c < \varepsilon$. Откуда:

$$[a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0} !!! (\text{с построением п-ти } \{ [a_n, b_n] \})$$

□

Следствие. *Если F - замкнутое огр. мн-во в $\mathbb{R}$ и $\{ G_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ - откр. покр-е F, то:*

$$\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda\colon (F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Т. к. F - огр., то $\exists[a,b]\colon F \subset [a,b]$. Сем-во $\{ G_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{ \mathbb{R}\backslash F \}$ отк-е покр-е $[a,b]$, т. к. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \cup (\mathbb{R}\backslash F) = \mathbb{R}$

По т. Гейне-Бореля $\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \Lambda$:

$$[a,b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n} \cup (\mathbb{R}\backslash F)$$

$$\Rightarrow F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n}$$

□

Введм следующее обозначение:

Обозначение.

$$B_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty) \cup \{ +\infty \} \text{ - } \varepsilon\text{-}\textit{окр-ть } +\infty$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ - } \textit{проколотая } \varepsilon\text{-}\textit{окр-ть } +\infty$$

$$B_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup \{ -\infty \}$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$$

Поскольку все определения этого параграфа давались на языке окр-тей, то всё это верно и для $\overline{\mathbb{R}}$

$E \subset \overline{\mathbb{R}}$. В част-ти $+\infty(-\infty)$ - предел. точка мн-ва $E \subset \overline{\mathbb{R}} \iff E\backslash \{ +\infty \}$ неогр. сверху ($E\backslash \{ -\infty \}$ - неогр. снизу).

На языке окр-ти можно дать общее определение предела:

Определение 1.2. Точка в $b \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся **пределом** числовой п-ти $\{ a_n \}$, если:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n \geq N (a_n \in B_\varepsilon(b))$$

1.1 §4: Непрерывные ф-ции

1.1.1 Предел ф-ции в точке

Пусть $\exists \in \mathbb{R}$, задана ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$.
Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Определение 1.3 (по Коши)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в т. a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $b = \lim_{x\to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$

$$(f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b))$$

Замечание. *Если для ф-ции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - положить $a = +\infty$: дост-но положить $N = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1$*

Определение 1.4. Число b наз-ся пределом ф-ции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Определение 1.5 (по Гейне)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в точке a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \} (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Замечание. *Поскольку a - предельная точка мн-ва E, то*

$$\forall \delta > 0 \colon \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \neq \emptyset$$

и сущ-ет $\{ x_n \} \subset E \setminus \{ a \}, x_n \to a$

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ - } \textit{предельная точка } \mathbb{R}$$

Покажем, что:

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$ *и пусть* $\delta \leq 1$*:*

$$0 < |x-a| < \delta \leq 1$$

$$|x+a| = |x-a+2a| < |x-a| + 2\,|a| \leq 1 + 2\,|a|$$

Возьмем $\delta = min\,\{\,1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\,\}$*:*

$$0 < |x-a| < \delta \iff 0 < |x-a| < \frac{\varepsilon}{2\,|a|+1} \iff \left|x^2 - a^2\right| < |x-a|\,(2\,|a|{+}1) < \varepsilon$$

Рассм. по Гейне:

$$x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow x_n^2 \to a^2 \iff f(x_n) \to f(a)$$

Теорема 1.2. *Определения по Коши и по Гейне* ***равносильны****.*

Доказательство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка мн-ва E.

Опр. 1 $\Rightarrow$ **Опр. 2**) Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Коши

Рассм. произвольную п-ть $\{\,x_n\,\}\,, x_n \in E \setminus \{\,a\,\}$ и $x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E\colon\, (f(x) \in B_\varepsilon(b))$

Т. к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in B_\delta(a))$. Имеем $x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geq N$, а значит, $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N$. Сл-но, $f(x_n) \to b$. Опр. 2 выполн-ся.

Опр. 2 $\Rightarrow$ **Опр. 1**) Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что Опр. 1 не выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ и соотв. знач-е x обозначим через x_n. По индукции будет построена посл-ть $\{\,x_n\,\}$, т. ч. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E$.

Имеем $\{\,x_n\,\} \subset E \setminus \{\,a\,\}$ и по т. о зажатой п-ти $x_n \to a$, а значит $f(x_n) \to b$

По опр-ю предела посл-ти $\exists N, \forall n \geq N(f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$!!!

Сл-но опр. 2 не выполняется !!!

$\square$

Замечание. *Опр-е предела по Гейне можно ослабить, считая, что* $\{x_n\}$ *монотонна. (Задача !)*

Св-ва предела ф-ции:

Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ и a - предел. точка E:

С1: **(Единственность предела)** Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$

Доказательство. Рассм. произвольую п-ть $\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}$ и $x_n \to a$

По опр-ю Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. Т. к. предел посл-ти единственнен, то $b = c$ $\square$

С2: **(Предел по подмн-ву)** Если a - предел. точка мн-ва $D \subset E$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Тогда $\lim_{x\to a}(f|_D) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a$. Тогда:

$$(f|_D)(x_n) = f(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x\to a}(f|_D)(x)$ $\square$

С3: **(Предел зажатой ф-ции)** Если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \colon (f(x) \le h(x) \le g(x))$$

и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x\to a} h(x) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}, x_n \to a$. Тогда $\exists N, \forall n \ge N(x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n), \forall n \ge N$$

По т. о зажатой п-ти:

$$\begin{cases} f(x_n) \to b \\ g(x_n) \to b \end{cases} \Rightarrow h(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x\to a} h(x)$ $\square$

С4: **(Свойство локализации)** Если f и g совпадают на $\mathring{B}_\delta(a) \cap E$ и $\lim_{x\to a} f(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x\to a} g(x) = b$

С5: **(Арифм. операции с пределами)** Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{x\to a} g(x) = c$. Тогда:

1)
$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

2)
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = bc$$

3) Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ на E, то:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Следствие. *Если сущ-ет величина справа, то сущ-ет величина слева и рав-во выполняется*

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть:

$$\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$$

Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По св-вам предела п-ти:

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$$

$$f(x_n)g(x_n) \to bc$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c}$$

$\Rightarrow$ По опр. предела ф-цию по Гейне:

$$(f \pm g)(x) \to b \pm c$$

$$(fg)(x) \to bc$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \to \frac{b}{c}$$

При $x \to a$. ☐

C6: **(Лок. огр-ть)** Если сущ. конечный $\lim_{x\to a} f(x)$, то

$$\exists\delta > 0, \exists C > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x)| \le C)$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Тода

$$\exists\delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(b - 1 < f(x) < b + 1)(\varepsilon = 1)$$

Положим тогда $C = |b| + 1$. ☐

C7: **(Предел композиции)** Пусть заданы ф-ции:

$$f : E \to \mathbb{R}, f(E) \subset D, g : D \to \mathbb{R}:$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Пусть вып-но хотя бы одно из условий:

1) $f(x) \ne b$ в некот. проколотой окр-ти a
2) $g(b) = c$

Тогда $\lim_{x\to a} g(f(c)) = c = \lim_{y\to b} g(y)$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции:

$$\exists\sigma > 0, \forall y \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b) \cap D(g(y) \in B_\varepsilon(c))$$
$$\exists\delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(f(x) \in B_\sigma(b))$$

1) Уменьшая $\delta > 0$, если необ-мо, можно считать, что $f(x) \ne b$ для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$.

   Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b)$, а - ...,

   $$g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$$

   Сл-но, $c = \lim_{x\to a}(g \circ f)(x)$

2) Если $f(x) = b$, для некот. т. $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$, то

$$g(f(x)) = g(b) = c \in B_\varepsilon(c)$$

Сл-но, $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$, для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$. Так что $c = \lim_{x\to a}(g \circ f)(x)$

$\square$

Замечание. *Выполнение хотя бы одного из условий* ***существенно*** *для $\exists$ предела.*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

$$g = f$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{y\to 0} g(y) = 0, g(f(x)) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \pm \lim_{y\to 0} g(y)$$

2 Лекция 10

2.1 Критерий Коши для предела ф-ции

Теорема 2.1 (Критерий Коши сущ-е предела ф-ции)**.** *Пусть:*

$$f : E \to \mathbb{R}$$

a предельная точка мн-ва E

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \colon \forall x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(x')| < \varepsilon) \tag{1}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Заф. $\varepsilon > 0$. Пусть предел ф-ции $= b$. По опр. предела ф-ции:

$$\exists\delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда для любых $x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) Пусть для f выполнено (1). Покажем, что f удов-ет опр-ю предела по Гейне. Заф. $\varepsilon > 0$ и выберем соотв. $\delta > 0$ из (1).рассм. произ. п-ть:

$$\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$$

Тогда $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$$

Так что п-ть $\{ f(x_n) \}$ - фундаментальна $\Rightarrow$ по критерию Коши для п-тей $f(x_n) \to b \in \mathbb{R}$.
Рассм. ещё п-ть $\{ y_n \}, y_n \in E \setminus \{ a \}, y_n \to a$. Тогда:

$$\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0(x_n, y_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$$

Значит:

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Сл-но, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, откуда $f(y_n) \to b$. По Гейне,

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

$\square$

2.2 Односторонние пределы

Определение 2.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

Если a - предельная точка мн-ва $(a; +\infty) \cap E$, то:

$$\lim_{x \to a} f|_{(a;+\infty) \cap E}(x)$$

наз-ся **пределом справа** ф-ции f в т. a.

Если a предельная точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$, то:

$$\lim_{x \to a} f|_{(-\infty;a)\cap E}(x)$$

наз-ся **пределом слева** ф-ции f

Обозначение.

$$f(a+0) \ \text{или} \ \lim_{x \to a+0} f(x)$$

$$f(a-0) \ \text{или} \ \lim_{x \to a-0} f(x)$$

По опр-ю:

$$f(+\infty - 0) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$f(-\infty + 0) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Лемма 2.2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и задана $f : E \to \mathbb{R}$*

Пусть a - предел. точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$ и $(a; +\infty) \cap E$. Тогда:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x)(\text{в } \mathbb{R}) \iff f(a+0) = f(a-o)$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Это вытекает из св-ва предела по подмножеству.

$\Leftarrow$ $f(a=0) = b = f(a-0)$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю одност. пределов:

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in (a - \delta_1, a) \cap E(f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in (a, a + \delta_2) \cap E(f(x \in B_\varepsilon(a))$$

Положим $\delta = min(d_1, d_2)$. Тогда:

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Сл-но, $\exists \lim_{x \to a} f(x) = b$

$\square$

Определение 2.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $D \subset E$.

Ф-ция f наз-ся нестрого возрастающей (убывающей) на D, если:

$$\forall x_1, x_2 \in D(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))(\text{ соотв. } (f(x_1) \geq f(x_2)) \ )$$

Теорема 2.3 (О пределе монотонной ф-ции). *Пусть* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}; a < b$. *Если ф-ция* f *нестрого возрастает на* (a, b)*, то:*

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$$

Если f *нестрого убыв., то* $\sup$ *и* $\inf$ *меняются местами.*

Доказательство. Пусть f нестрого возрастает на (a, b). Положим $s = \sup\limits_{(a,b)} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. По опр-ю sup:

$$\forall r < s, \exists x_r \in (a, b) \colon (f(x_r) > r)$$

Откуда в силу возрастания вып-но:

$$r < f(x) \leq s, \forall x \in (x_r, b)$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. Положим $s - \varepsilon = r$, если $s \in \mathbb{R}$, и $\frac{1}{\varepsilon} = r$, если $s = +\infty$. Тогда:

$$f(x) \in B_\varepsilon(s), \forall x \in (x_r, b)$$

Если $b \in \mathbb{R}$, то $\delta = b - x_2 \Rightarrow (b - \delta, b) \subset (x_r, b)$

Если $b = +\infty$, то $\delta = \frac{1}{|x_r|+1} \Rightarrow (\frac{1}{\delta}, +\infty) \subset (x_2, b)$ □

Следствие. *Если ф-ция* f *монотонна на* (a, b) *и* $c \in (a, b)$*, то сущ-ют конечные* $f(c - 0)$ *и* $f(c + 0)$*, причём*

$$f(c - 0) \leq f(c) \leq f(c + 0), \text{ - если } f \text{ нестрого возр-ет;}$$

$$f(c - 0) \geq f(c) \geq f(c + 0) \text{ - если } f \text{ нестрого убыв-ет.}$$

Доказательство. Для опред-ти, пусть f нестрого возр-ет на (a, b). Тогда:

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in (a, c) \Rightarrow f(c - 0) = \sup_{(a,c)} f(x) \leq f(c)$$

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in (c, b) \Rightarrow f(c + 0) = \inf_{(b,c)} f(x) \geq f(c)$$

□