Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

12 сентября 2024 г.

Содержание

1 Инфа

Лектор: Даниил Владимирович Мусатов (ему писать по поводу логики) и Райгородский Андрей Михайлович.

`telega: @musatych`

Об отсутствии на КР писать в тг заранее

Задачи на КР:

- Тестовые 0.8 (Или отдельно написано)
- Обычные (можно пересдать (1(на КР)/0.8(На след. КР)/0.5(В ДЗ)))

Задачи на ДЗ:

- Перешедшие с КР (0.5)
- Обычные (1)
- Дополн. (1.5)

Замечание. *Чтобы получить доп. задачу, нужно решить **все** обычные задачи по какой-то теме.*

2 Основные понятия теор. множеств

Обозначение. $x \in A \iff$ ***элемент*** *x принадлежит* ***мн-ву*** *A.*

Определение 2.1. **Пустое мн-во** $\emptyset$ - мн-во, не содержащее ни одного эл-та.

Определение 2.2. A **подмн-во** B $(A \subset B) \iff$

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Замечание. $\forall A \colon \emptyset \subset A$

Замечание.

$$\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A).$$

Свойство отношения подмножества:

- **Рефлексивность**: $A \subset A$
- **Транзитивность**: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ -
- **Антисимметричность**: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$

Определение 2.3 (Равенство мн-в)**.** $A = B \iff$, если A и B содержат одни и те же эл-ты.

Запись конечного мн-ва: $\{a, b, c\}$

Замечание. *Из опр. рав-ва следует, что* ***кратность и порядок записи не важен****:*

Пример. $\{a, b, c\} = \{a, c, b, b, b, a\}$

Замечание. *Отличие* $\in$ *и* $\subset$ *:*

$$A = \{a, \{b\}, c, \{c\}\}.$$

$$\{a\} \subset A, \{a\} \notin A.$$

$$\{b\} \not\subset A, \{b\} \in A, \{\{b\}\} \subset A.$$

$$\{c\} \subset A, \{c\} \in A.$$

$$\{d\} \notin A, \{d\} \notin A.$$

Конструкция нат. чисел на основе мн-в
$0 = \emptyset$
$1 = \{\emptyset\}$
$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$n + 1 = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Операции над мн-вами

1. Объединение: $A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение: $A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность: $A \backslash B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Дополнение: $\overline{A} = \{x\colon x \notin A\}$

5. Симметрическая разность: $A \triangle B = \{x\colon (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

Утверждение 2.1.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. В одну сторону:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow .$$

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ и $A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$
2. $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\square$

3 Упорядоченные пары и кортежи

$$(a, b), a - \text{ 1-ый эл-т}, b - \text{ 2-ой эл-т}$$

Требование: $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

Определение 3.1 (Упрощенное определение Куратовского)**.**

$$(a, b) = \{\{a, b\}, a\}.$$

$$(a, a) = \{\{a\}, a\}.$$

4 Парадокс Рассела

Определим I:

$$\{\{\{\cdots a \cdots\}\}\} = I \Rightarrow I \in I, \text{(беск. кол-во скобок)}.$$

$$(I, I) = \{\{I\}, I\} = I.$$

Рассмотрим: $M = \{x\colon x \notin x\}$

$$M \overset{?}{\in} M.$$

- Пусть $M \in M$. Тогда $x \notin x$ верно для $x = M$. Тогда $M \notin M$. Но тогда $x \notin x$ неверно для $x = M$. Противоречие.
- Аналогично $M \notin M \Rightarrow$ получаем парадокс.

Аксиома 4.1 (Аксиома фундированности)**.** *Не сущ. беск цепочки:*

$$A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \cdots$$

Замечание. *Это запрещает мн-во I и $M \in M$, а также даёт однозначную интерпретацию (a, b)*

Если $\{a, b\} \in a$, то возникает беск. цепочка:

$$\{a, b\} \ni a \ni \{a, b\} \ni a \cdots .$$

Определение 4.1. **Кортежи** - расширение пары на много эл-ов.

Пример. $(a, b, c, d) = (a, (b, (c, d)))$ - *кортеж*

Определение 4.2. **Декартово произведение** мн-в A, B:

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

5 Отображения и соответствия

Определение 5.1. **Соответствие** (или **многозначная ф-ция**, или **точечно-множ. отображение**) - подмн-во декартова произведения мн-в A и B.

$F \subset A \times B$ - соответствие между A и B

Замечание. ***Непустозначное соответствие***: $\forall x, \exists y \colon (x, y) \in F$

Картинки графика и двудольного графа

Определение 5.2. **Отображение** - однозначное соотв.

$$\forall x, \exists ! y \colon (x, y) \in F$$

$$\forall\text{- для любого}, \exists - \text{существует единственный}$$

Определение 5.3. **Частично определённая ф-ция**: $\forall x \colon (\neg \exists y \colon (x, y) \in F) \vee \exists ! y \colon (x, y) \in F$

Определение 5.4. Инъекция - отображение, т. ч. $\forall x, y(x \neq y \to f(x) \neq f(y))$

Определение 5.5. $f(x)$ - тот элемент $z\colon (x,z) \in F$

Определение 5.6. $F(x)$ - образ $x \iff F(x) = \{z\colon (x,z) \in F\}$

Определение 5.7. Инъективные соответствия:

$$\forall x, y(x \neq y \to F(x) \cap F(y) = \emptyset)$$

Определение 5.8. Сюрьекция - отображение, т. ч. $\forall y, \exists x(y = f(x))$

Определение 5.9. Сюрьективное соответствие:

$$\forall y, \exists x\colon (x,y) \in F$$

Или по другому: $\forall y, \exists x\colon y \in F(x)$

Определение 5.10. Биекция - отображение, которое одновременно сюрьекция и биекция.

Биекция = отображение + сюрьекция + инъекция

Замечание. *Отдельного понятия биективного соответствия нет.*

Определение 5.11. Обратное соответствие $F \subset A \times B$ - $F^{-1} \subset B \times A$:

$$(x,y) \in F \iff (y,x) \in F^{-1}$$

Теорема 5.1. ***F - Биекция*** $\iff$ ***F - взаимнооднозначное соответствие*** *(т. е. F и F^{-1} - отображения)*

Замечание. *Частично опред. ф-ция + непустознач. соотв = отображение*

Доказательство.

- F явл. инъективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ частично опред. ф-ция.
- F явл. сюрьективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ непустозначное соотв.

$\square$

5.1 Образ и прообраз

Определение 5.12. Пусть $S \subset A$. Тогда образ S:

- Для отображения: $f(S) = \{f(x)|x \in S\}$
- Для соотв.: $F(S) = \bigcup_{x\in S} F(x)$

Определение 5.13. Пусть $T \subset B$. Тогда прообраз T:

- Для отображения: $f^{-1}(T) = \{x|f(x) \in T\}$
- Для соотв.: $F^{-1} = \{x|F(x) \cap T \neq \emptyset\}$

Утверждение 5.1. *$F(S \cap Q) \subset F(S) \cap F(Q)$*

Доказательство. Пусть $y \in F(S \cap Q) \Rightarrow \exists x \in S \cap Q\colon y \in F(x)$:

$$\begin{cases} \exists x \in S\colon y \in F(x) \\ \exists x \in Q\colon y \in F(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow y \in F(S) \cap F(Q)$$

□

Утверждение 5.2 (Обратное.)**.** *Если F - инъективно, то*

$$F(S) \cap F(Q) \subset F(S \cap Q)$$

Доказательство.

$$y \in F(S) \cap F(Q) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in S\colon y \in F(x_1) \\ \exists x_2 \in Q\colon y \in F(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow \text{Нарушает инъективность}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x \Rightarrow \exists x \in S \cap Q\colon y \in F(x)$$

□

5.2 Композиция

Определение 5.14. Композиция отображений $f \circ g$, опр. так:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

<u>Определение</u> 5.15. Композиция соотв. $F \circ G$

$$\begin{cases} F: B \to C \\ G: A \to B \end{cases} \Rightarrow F \circ G(x) = F(G(x))$$

Причём $G(x)$ - это мн-во значений $\Rightarrow F(G(x))$ - образ $G(x)$
Или, эквив.: $(x, z) \in F \circ G \iff \exists y((x, y) \in G \wedge (y, z) \in F)$

Свойства композиции:

1) **Ассоциативность:** $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

2) **Отсутствие** коммутативности (в общем случае): $F \circ G \neq G \circ F$

<u>Обозначение</u>. ***Тождественное отображение:***

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(x) = x$$

$$G : A \to B \Rightarrow G \circ id_A(x) = id_B \circ G(x) = G(x)$$

<u>Утверждение</u> 5.3. *Если $F : A \to A$ - биекция, то:*

$$F \circ F^{-1} = id_A = F^{-1} \circ F$$

<u>Обозначение</u>. ***Мн-во всех отображений из*** A ***в*** B *будем называть* B^A

<u>Утверждение</u> 5.4. *Если $|A| = n$ и $|B| = k$, то $|B^A| = k^n$*

<u>Теорема</u> 5.2. *Пусть A, B, C - мн-ва. Тогда:*

1) $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$

2) $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C, B \cap C \neq \emptyset$

3) $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$

Доказательство. 1)

$$\begin{cases} f : C \to A \\ g : C \to B \end{cases} \longleftrightarrow h : C \to A \times B, h(x) = (f(x), g(x))$$

2)

$$\begin{cases} f : B \to A \\ g : C \to A \end{cases} \longleftrightarrow h : B \cup C \to A \Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x), x \in B \\ g(x), x \in C \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} f : B \times C \to A \\ g : C \to A^B \end{cases} \Rightarrow g(x) : B \to A \Rightarrow g(x)(z) = f(z, x)$$

$\square$