АлГем

Сергей Григорян

17 сентября 2024 г.

Содержание

1 Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i

Утверждение 1.1. *a) Пусть $\overline{a} \neq \overline{o}$ и $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$. Тогда $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.*

b) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ не коллин. и $\overline{b}$ компл. $\overline{a_1}, \overline{a_2}$. Тогда $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$

c) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - не компклан. Тогда всякий вектор представим в виде $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$\lambda = \begin{cases} \frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на одной стороне с } X \\ -\frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на разных сторонах отн. } X \end{cases} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a}$$

b) Оба вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ненулевые. (***Картинка***)

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ_1} + \overline{XZ_2} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$$

c) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ порожд. $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$, а вектор b - $\overline{XZ}$. $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин., (***Картинка***) $Z' = l \cap (X_1Y_1Y_2)$

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ'} + \overline{Z'Z} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$$

□

Следствие. *1) Система, сост. только из $\overline{o}$ - ЛЗ.*

2) Система, сост. из двух колин. векторов - ЛЗ.

3) Система, сост. из трёх компклан. векторов - ЛЗ.

4) Любая сист., сост. из четырех векторов в пр-ве - ЛЗ.

Доказательство. 1) $1 * \overline{o} = \overline{o}$

2) $\overline{a}, \overline{b}$ - коллин.

Если $\overline{a} = \overline{o}$ - ЛЗ система $\Rightarrow (a, b)$- надсистема ЛЗ $\Rightarrow$ она ЛЗ

Если $\overline{a} \neq \overline{o} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})$ - ЛЗ

3) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}$ - компл.

   Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - коллин., то $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ - ЛЗ $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема.

   Иначе, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин. $\Rightarrow b = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 + \overline{a_2}$ - ЛЗ

4) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b}$:

   Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема ЛЗ сист.

   Иначе $\Rightarrow \overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$.

□

Утверждение 1.2. *Пусть* $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$ *- ЛНЗ сист. вект. и* $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{b})$ *- ЛЗ. Тогда:*

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i}$$

Доказательство. $\exists$ нетрив. ЛК:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n} + \beta \overline{b} = \overline{o}$$

Предположим, что $\beta = 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow$:

$$\overline{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \overline{a_1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta} \overline{a_n}$$

□

Определение 1.1. V - лин. пр-во (над $\mathbb{R}$).

Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - наз-ся базисом в V_i, если:

a) $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - ЛНЗ

b) Каждый вектор $\overline{v} \in V_i$ представим в виде ЛК:

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \ldots + \alpha_n \overline{e_n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$M_{3*1}(\mathbb{R})\colon \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i}$$

Замечание.

$$\overline{v} = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} \text{ - коор-т столбец } \overline{v} \text{ в базисе } \overline{e}$$

Утверждение 1.3. *Если в V фикс. базис $G = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n}\end{pmatrix}$, то всякий вектор $\overline{v} \in V$ однозначно раскладывается по одному базису. (т. е. имеет однозначно опред. коор-тный столбец)*

Доказательство. См. прошлую лекцию □

Утверждение 1.4. *Пусть в пр-ве V фикс. базис G, $\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha, \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$\overline{v} + \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha + \beta,$$

$$\lambda\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \lambda\alpha$$

Доказательство.

$$\overline{v} = G\alpha$$

$$\overline{v} = G\beta$$

$$\Rightarrow \overline{v} + \overline{w} = G(\alpha + \beta)$$

$$\lambda\overline{v} = \lambda G\alpha = G(\lambda\alpha)$$

□

2 Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3

Теорема 2.1 (О ЛНЗ системах векторов)**.**

1) *Система, состоящая из одного* ***ненулевого*** *вектора $\overline{a}$ - ЛНЗ*

2) Система, сост. из двух неколлин. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛНЗ

3) Система, сост. из трёх некомплан. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$- ЛНЗ

Доказательство. 1) От. противного, пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda\overline{a} = \overline{o}$:

$$|\lambda||\overline{a}| = 0!!! \text{ Два ненулевых числа в умнож. дают } 0.$$

2) От. противного, пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛЗ. Б. О. О. (без ограничения общности) $\overline{a_2} = \lambda\overline{a_1}$ - противоречие.

3) От. пр., пусть $\begin{pmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3}\end{pmatrix}$ - ЛЗ. Б. О. О. $\overline{a_3} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$ - противоречие.

□

Теорема 2.2 (Об описании базиса в V_i). *Система векторов является:*

a) базисом в $V_1 \iff$ она состоит из одного вектора $\overline{e} \neq \overline{o}$

b) базисом в $V_2 \iff$ она сост. из двух неколин. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$

c) базисом в $V_3 \iff$ она сост. из трёх некомпл. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

Доказательство.

a) V_1: $\overline{e} \neq 0$ (ЛНЗ сист.)

$$\forall\overline{b} \in V_1(\overline{b} = \lambda\overline{e}) \Rightarrow (\overline{e}) \text{ - базис в } V_1.$$

Если $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in V_1 \Rightarrow$ они коллин. $\Rightarrow$ ЛЗ и аналогично $(\overline{o})$ - ЛЗ.

b) V_2 - фикс. $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - неколл. $\Rightarrow$ ЛНЗ.

$$\forall b \in V_2 \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} \overline{b} = \lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_2} \Rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2})\text{- базис.}$$

Почему нет других? $\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3}\end{pmatrix}$ - компл. $\Rightarrow$ ЛЗ. Если $\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2}\end{pmatrix}$ - коллин. $\Rightarrow$ через них выр-ся только коллин. им вектора.

c) $\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3}\end{pmatrix}$ - некомпл. $\Rightarrow$ ЛНЗ:

$$\forall b \in V_3\colon b = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i} \Rightarrow \text{ базис.}$$

Почему нет других?

$$\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} & \overline{e_4}\end{pmatrix} \text{ - ЛЗ}$$

$\begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3}\end{pmatrix}$ - компланарный, то тогда ЛЗ

- $\overline{e_1} || \overline{e_2}$ - очев.
- $\overline{e_1 \not|| \overline{e_2}}$ - образ. плоскость.

$\square$

3 Матрица перехода от одного базиса к другому

$V\colon$ два базиса: $G = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \ldots & \overline{e_n}\end{pmatrix}, G' = \begin{pmatrix}\overline{e_1}' & \overline{e_2}' & \ldots & \overline{e_n}'\end{pmatrix}$

$$\overline{e_1}' = S_{11}\overline{e_1} + S_{21}\overline{e_2} + \ldots + S_{n1}\overline{e_n}$$

$$\vdots$$

$$\overline{e_n} = S_{1n}\overline{e_1} + S_{2n}\overline{e_2} + \ldots + S_{nn}\overline{e_n}$$

$\Rightarrow$

$$S' = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \ldots & S_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} = S_{G \to G'}$$

- матрица перехода от G к G'

$$\begin{pmatrix}\overline{e_1}' & \overline{e_2}' & \ldots & \overline{e_n}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \ldots & \overline{e_n}\end{pmatrix} S_{G \to G'} \iff$$

$$G' = G S_{G \to G'}$$

Утверждение 3.1. *Пусть в V фикс. G и G' - базисы и $G' = GS$. Пусть $\overline{a} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha$ и $\overline{a} \underset{G'}{\Longleftrightarrow} \alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$.*

Доказательство.

$$\overline{a} = G\alpha$$

$$\overline{a} = G'\alpha' = GS\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

□

Определение 3.1. $\overline{a}, \overline{b}$ наз-ся ортогональными, если он перпендикулярны друг другу.

Определение 3.2. Базис G наз-ся ортогональным, если все базис. векторы попарно ортогональны.

Определение 3.3. Базис G наз-ся ортонормированным (ОНБ), если он ортогональный и нормированный ($\forall i \colon |\overline{e_i}| = 1$).

4 Декартова система коор-т

$$G = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} \end{pmatrix}$$

- ОНБ

$$G' \text{- } G \text{ повёрнутый на } \alpha$$

$$\overline{e_1}' = \cos\alpha \overline{e_1} + \sin\alpha \overline{e_2}$$

$$\overline{e_2}' = -\sin\alpha \overline{e_1} + \cos\alpha \overline{e_2}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha) \text{ - Rotation - поворот.}$$

Утверждение 4.1. *Пусть $S = S_{G \to G'}$. Пусть $T = S_{G' \to G''}$. Тогда:*

$$ST = S_{G \to G''}$$

Доказательство.

$$G' = GS, G'' = G'T \Rightarrow G'' = G'T = GST$$

□

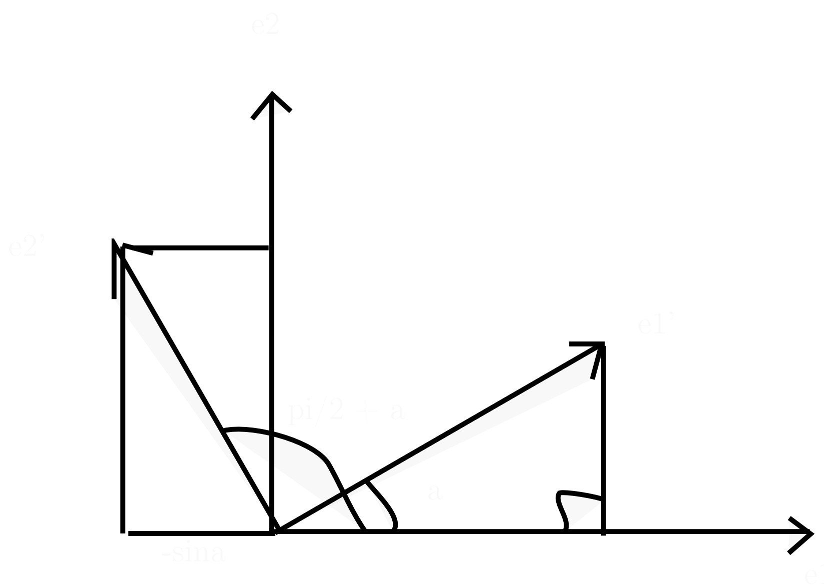

Рис. 1: Rotation by α

<?xml version="1.0"encoding="UTF-8"standalone="no"?> <!– Created with Inkscape (http://www.inkscape.org/) –>
<svg width="240mm"height="120mm"viewBox="0 0 240 120"version="1.1"id="svg8"inkscape:version="1.3.2 (091e20ef0f, 2023-11-25, custom)"sodipodi:docname="nice.pdf$_t$ex"xmlns : inkscape = "http : //www.inkscape.org/namespaces/inkscape"xmlns : sodipodi = "http : //sodipodi.sourceforge.net/DTD/sodipodi − 0.dtd"xmlns = "http : //www.w3.org/2000/svg"xmlns : svg = "http : //www.w3.org/2000/svg"xmlns : rdf = "http : //www.w3.org/1999/02/22 − rdf − syntax − ns"xmlns : cc = "http : //creativecommons.org/ns"xmlns : dc = "http : //purl.org/dc/elements/1.1/ < defsid = "defs2"/ >< sodipodi : namedviewid = "base"pagecolor = "ffffff"bordercolor = "666666"borderopacity = "1.0"inkscape : pageopacity = "0.0"inkscape : pageshadow = "2"inkscape : zoom = "0.99437388"inkscape : cx = "405.28015"inkscape : cy = "302.70304"inkscape : document − units = "mm"inkscape : current − layer = "layer1"showgrid = "false"showborder = "true"width = "200mm"showguides = "true"inkscape : guide − bbox = "true"inkscape : window − width = "1918"inkscape : window − height = "1044"inkscape : window − x = "0"inkscape : window − y = "0"inkscape : window − maximized = "1"inkscape : showpageshadow = "2"inkscape : pagecheckerboard = "0"inkscape : deskcolor = "d1d1d1 < inkscape : gridtype = "xygrid"id = "grid815"units = "mm"spacingx = "10"spacingy = "10"empspacing = "4"dotted = "false"originx = "0"originy = "0"visible = "false"/ >< /sodipodi : namedview >< metadataid = "metadata5 < rdf : RDF >< cc : Workrdf : about =>< dc : format > image/svg + xml < /dc : format >< dc : typerdf : resource = "http : //purl.org/dc/dcmitype/StillImage"/ >< /cc : Work >< /rdf : RDF >< /metadata >< ginkscape : label = "Layer1"inkscape : groupmode = "layer"id = "layer1"transform = "translate(0, −177) < pathstyle = "fill : 000000; fill − opacity : 0.027451; fill − rule : evenodd; stroke : 000000; stroke − width : 1"d =
"m59.755822, 242.3934c1.327664, −5.016382.531404, −10.042714.003678, −15.016912.081361, −7.03
3.299129, 17.816752.774095, 20.558861.387457, 0.626453.25228, 1.408474.845571, 0.885557.922506, −
0.08022, −1.71686 − 1.73772, −4.19362 −
0.307655, −5.1471.645264, −1.096849.468199, 0.2613310.857329, 0.459412.26767, 0.323354.75631, 0.5
3.67854, 9.90545 − 4.31133, 10.5663 − 3.50799, 3.66356 − 38.431862, 27.112 −
25.264118, 33.8587217.498678, 8.9657646.472718, −8.5755151.068718, −26.452120.57124, −2.2219−
0.0282, −7.6351 − 0.84398, −10.04973 − 0.32552, −0.96355 −
1.49203, −1.62463 − 1.52788, −2.64106 −
0.0371, −1.052062.11989, 0.09933.1358, 0.375222.03847, 0.553715.99081, 2.494935.2239, 5.16674−
3.08386, 10.74378 − 15.19131, 10.50088 −
8.14143, 26.12161.77838, 3.940433.15014, 4.63517.07191, 5.649016.99174, 1.8076111.35659, −3.87001
"path1"/ >< /g >< /svg >

Рис. 2:

Утверждение 4.2. *Пусть S - матрица перехода от G к G'. T - матр. перехода от G' к G. Тогда:*

$$ST = TS = E \text{ - единичная матрица}$$

Доказательство.

$$G'' = G \Rightarrow ST \text{ - матрица перехода от } G \text{ к } G \Rightarrow ST = E$$

$$TS \text{ - матрица перехода от } G' \text{ к } G' \Rightarrow TS = E$$

□

Обозначение. ***Единичная матрица*** *E - диагональная матрица с единицами на главной диагонали.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 4.1. Если выполняется рав-во $ST = TS = E$, то матрица T называется **обратной** к S.

Определение 4.2. Матрица наз-ся **обратимой**, если у неё есть обратная матрица.

Утверждение 4.3. *Если обратная матрица сущ-ет, то она единственная.*

Доказательство. От. прот. Пусть $A^{-1}, \overline{A}^{-1}$ - обратные матрицы к матр. A.

$$A^{-1} = EA^{-1} = (\overline{A}^{-1}A)A^{-1} = \overline{A}^{-1}(AA^{-1}) = \overline{A}^{-1}E = \overline{A}^{-1}$$

□

Следствие. *Матрица перехода от одного базиса к другому* ***всегда обратима.***

Задача 4.1. Док-ть, что $R(\alpha)$ обладает св-вами:

1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$

2) $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^T$

Задача 4.2. Пусть $\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ (отн. ОНБ G) - вектор, выход. из нач. коор-т. $\overline{b}$ - вектор $\overline{a}$ повернутый на α, тогда:

$$\overline{b} = R(\alpha), \overline{a} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Определение 4.3. Пусть т. O - фикс. точка, начало коор-т. G базис в V_i. Тогда: (O, G) - ДСК

Определение 4.4. ДСК наз-ся **прямоугольной**, если G - ОНБ.

Определение 4.5. A - точка. Тогда коор-ты вектора $\overline{OA}$ наз-ся коор-тами точки A в ДСК (O, G):

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha \iff \overline{OA} = G\alpha = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Утверждение 4.4. $A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = G\beta - G\alpha = G(\beta - \alpha)$$

Итого: чтобы найти вектор по его концам, нужно из коор-ты конца вычесть коор-ту начала.

Утверждение 4.5 (О делении отрезка в данном соотношении)**.**

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta$$

Пусть т. C делит отрезок $[A, B]$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда:

$$C \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \frac{\mu\alpha + \lambda\beta}{\lambda + \mu} \iff$$

$$\iff \overline{c} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b} \text{ - \textit{выпуклая ЛК}}$$

Доказательство.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{AB} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\overline{b} - \overline{a})$$

$$\overline{c} = \alpha + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\overline{b} - \overline{a}) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu})\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{b} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overline{b}$$

□

<u>Теорема</u> 4.1 (Об изменении коор-т точки при замене ДСК)**.** *Пусть в <u>V_i фикс.:</u> (O, G) (I ДСК) и (O', G') (II ДСК).*

Пусть $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \alpha$ *и* $A \underset{(O',G')}{\longleftrightarrow} \alpha'$ *и пусть* $S = S_{G \to G'}$

*(***Картинка***)*

Тогда $\alpha = S\alpha' + \gamma$

Доказательство.

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$$

$$\overline{OA} = G\alpha$$

$$\overline{OO'} + \overline{O'A} = G\gamma + G'\alpha' = G\gamma + GS\alpha' = G(S\alpha' + \gamma)$$

□

5 Скалярное произведение

<u>Определение</u> 5.1. V_i. **Скалярное произведение векторов** $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ обозначаем $(\overline{a}, \overline{b})$ (в физике $\overline{a} \cdot \overline{b}$). Это число, равное:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скал. произ. = 0.

<u>Обозначение</u>.

$$(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \text{ - \textit{скалярный квадрат} } \overline{a}$$

<u>Замечание</u>.

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$$

Определение 5.2. (***Картинка***)

Вектор, порождаемые напр. отр-ом $\overline{OA'}$ наз-ся проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$:

$$pr_{\overline{b}}\overline{a} = \overline{OA'}$$

$$(pr_{\overline{b}}\overline{a} = 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = 0)$$

Утверждение 5.1. *(Линейность векторной проекции)*

a) $pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})(\overline{b} \neq \overline{o})$ *- ассоциативность*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}\colon pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$ *- однородность*

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_1} + \overline{A'_1A'_2} = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})$$

b) Для $\lambda > 0$: (****Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \overline{OA'} = \lambda\overline{OA'} = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$$

□

Утверждение 5.2. *Пусть* $\overline{b} \neq \overline{o}$*. Тогда:*

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство.

$$\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \phi.$$

- Если $\phi = \frac{\pi}{2}$ - рав-во верно.
- Если $\overline{a} = \overline{o}$ - рав-во верно
- Пусть $\phi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$.

$$|pr_{\overline{b}}(\overline{a})| = |\overline{a}||\cos\phi| = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * 1, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * (-1), \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases} = (\overline{a}, \overline{b})$$

□

Теорема 5.1 (О св-вах скалярного произведения). *1. Симметричность* $(\overline{a},\overline{b}) = (\overline{b},\overline{a})$

2. Аддитивность по I арг-ту: $(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}) = (\overline{a_1},\overline{b}) + (\overline{a_2},\overline{b})$

3. Однородность по I арг-ту: $(\lambda\overline{a},\overline{b}) = \lambda(\overline{a},\overline{b})$

4. Полож. определённость: $(\overline{a},\overline{a}) \geq 0, \forall\overline{a}$ *и* $(\overline{a},\overline{a}) \iff \overline{a} = \overline{o}$

Доказательство. 3) При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ очев. При $\lambda > 0$:

$$\angle(\lambda\overline{a},\overline{b}) = \angle(\overline{a},\overline{b})$$

$$(\lambda\overline{a},\overline{b}) := |\lambda\overline{a}||\overline{b}|\cos(\lambda\overline{a},\overline{b}) = \lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a},\overline{b}) = \lambda(\overline{a},\overline{b})$$

2)

$$(\overline{a_1}+\overline{a_2},\overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}),\overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1})+pr_{\overline{b}}(\overline{a}),\overline{b}) = \begin{bmatrix} pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) = \lambda_1\overline{b} \\ pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}) = \lambda_2\overline{b} \end{bmatrix} =$$

$$= ((\lambda_1+\lambda_2)\overline{b},\overline{b}) = (\lambda_1+\lambda_2)(\overline{b},\overline{b}) = \lambda_1(\overline{b},\overline{b})+\lambda_2(\overline{b},\overline{b}) = (\lambda_1\overline{b},\overline{b})+(\lambda_2\overline{b},\overline{b}) =$$
$$= (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}),\overline{b}) + (pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}),\overline{b}) = (\overline{a_1},\overline{b}) + (\overline{a_2},\overline{b})$$

□

Утверждение 5.3. *Пусть* $\overline{b} \neq \overline{o}$. *Тогда:*

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{b}|^2} * \overline{b}$$

Доказательство.

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \lambda\overline{b} \mid \cdot\overline{b}$$
$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}),\overline{b}) = \lambda(\overline{b},\overline{b}) = \lambda|\overline{b}|^2$$
$$\lambda = \frac{(pr_{\overline{b}}(\overline{a}))}{|\overline{b}|^2} = \frac{(\overline{a},\overline{b})}{|\overline{b}|^2}$$

□