Матан

Сергей Григорян

9 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 7 **3**
1.1 Критерий Коши . . . 3
1.2 Частичные пределы . . . 4

2 Лекция 8 **7**
2.1 §3: Топология $\mathbb{R}$ . . . 7

3 Лекция 9 **12**
3.1 §4: Непрерывные ф-ции . . . 14
3.1.1 Предел ф-ции в точке . . . 14

4 Лекция 10 **19**
4.1 Критерий Коши для предела ф-ции . . . 19
4.2 Односторонние пределы . . . 20

5 Лекция 11 **23**
5.1 Непрерывность ф-ции в точке . . . 23
5.2 Непрерывность ф-ции на мн-ве . . . 27

1 Лекция 7

1.1 Критерий Коши

Определение 1.1. Посл-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **фундаментальной**, если:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N\colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма 1.1. *Всякая фундаментальная п-ть огр-на*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. По опр-ю:

$$\exists N\colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < 1)$$

В част-ти:

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1$$

для всех $n \geq N$ $(m = N)$

Положим

$$\alpha = min(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$\beta = max(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

. Тогда:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ □

Теорема 1.2 (Коши)**.** *П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - сходится $\iff$ $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна.*

Доказательство. ⇒) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела:

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при всех $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} * 2 = \varepsilon$$

⇐) По предыдущей лемме, п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - ограничена ⇒ по т. Больцано-Вейерштрасса (Б-В) $\{a_n\}_1^\infty$ имеет сход. подпосл-ть $\{a_{n_k}\}_1^\infty \to a$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю фундаментальности:

$$\exists N, \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Т. к. $\{a_{n_k}\} \to a \Rightarrow$

$$\exists K \colon \forall k \geq K(|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $M = max(N, K)$. Тогда $n_M \geq M \geq N; n_M \geq M \geq K$

Поэтому при всех $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Замечание. *Критерий Коши позволяет доказывать существование предела,* ***без явного нахождения его значения***

Кроме того, критерий позволяет ***оценить скорость сходимости к пределу*** *(перейдём к пределу по m в определении фунд-ти):*

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \textit{при всех } n \geq N$$

Задача 1.1. Покажите, что если всякая фундаментальная посл-ть сх-ся (сходится), то выполняется аксиома непрерывности. А именно:

Пусть $\mathbb{F}$ - упоряд. поле, на котором выполняется аксиома Архимеда

1.2 Частичные пределы

Определение 1.2. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся частичным пределом числовой посл-ти $\{a_n\}_1^\infty$, если $\exists \{\, a_{n_k} \,\}$ - подпосл-ть $\{\, a_n \,\} :\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$L\,\{\, a_n \,\} - \text{мн-во частичных пределов } \{\, a_n \,\}$$

Пример. ± 1 - *частичные пределы* $a_n = (-1)^n$

$$a_{2k} \to 1, a_{2k-1} \to -1$$

Пусть задана числовая посл-ть $\{\, a_n \,\}$

Положим

$$M_n = \sup_{k \geq n} \{\, a_k \,\}$$

$$m_n = \inf_{k \geq n} \{ a_k \}$$

Пусть $\{ a_n \}$ огр. сверху. Тогда все $M_n \in \mathbb{R}$
Поскольку при переходе к подмн-ву sup не увеличивается, то $\{ M_n \}$ нестрого убывает
$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} M_n$

Пусть $\{ a_n \}$ не огр. сверху. Тогда все $M_n = +\inf$
Положим $\lim_{n \to \infty} M_n = +\infty$

Аналогично для $\{ m_n \}$ (Огр./Неогр. снизу).

Итак, посл-ти $\{ m_n \}$ и $\{ M_n \}$ имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Определение 1.3. Величина $\lim_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **верхний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\overline{\lim_{n \to \infty}} a_n$

Величина $\lim_{n \to \infty} \inf\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **нижний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\underline{\lim_{n \to \infty}} a_n$

Замечание. *Т. к.* $m_n \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *тогда:*

$$\varliminf_{n \to \infty} a_n \leq \varlimsup_{n \to \infty} a_n$$

Задача 1.2.

$$\varlimsup_{n \to \infty} (-a_n) = - \varliminf_{n \to \infty} a_n$$

Теорема 1.3. *Верхний (нижний) предел - наибольший (наименьший) из част. пределов посл-ти.*

Доказательство.

$$M = \varlimsup_{n \to \infty} a_n, m = \varliminf_{n \to \infty} a_n$$

Нужно показать, что M, m - это ч. п. $\{ a_n \}$ и любой ч. п. лежит между ними.

1) Покажем, что есть подп-ть $\{ a_n \}$, сх-ся к M:

I. $M \in \mathbb{R}$. Имеем

$$M = \inf \{ M_n \}$$

По опр-ю $\sup, \exists n_1 \colon (M - 1 < a_{n_1})$

$$M_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} \{ a_k \} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 \colon (M - \frac{1}{2} < a_{n_2})$$

и т. д.
Таким образом, по индукции, будет построена подп-ть $\{ a_{n_k} \}$, т. ч.

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$$

Имеем:

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_k}$$

Края нер-ва сх-ся к $M \Rightarrow$ по т. о зажатой посл-ти, $a_{n_k} \to M$

II. $M = +\infty$, тогда $\{ a_n \}$ неогр. сверху $\Rightarrow$ (по Теореме 8') она имеет под-пть, сх-ся к $+\infty$

III. $M = -\infty$. Т. к. $a_n \leq M_n, \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) Для m - док-во аналогично, или сводиться к M по задаче prot-pred

3) Пусть $\{ a_{n_k} \}, a_{n_k} \to a$. Тогда:

$$m_{n_k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_k}, \forall k \Rightarrow m \leq a \leq M (\text{част. пределы})$$

$\square$

Следствие. $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ *(в $\overline{\mathbb{R}}$)* $\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
В этом случае все три предела равны.

Доказательство. $\Rightarrow$) По лемме 4, любая подпосл-ть имеет предел $a \Rightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$\Leftarrow$)

$$m_n \leq a_n \leq M_n$$

для всех $n \Rightarrow a_n \to a$ (Края $\to a$)

$\square$

Лемма 1.4. *Для $c \in \mathbb{R}$ верно:*

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N(a_n < c+\varepsilon) \textit{ (1)} \\ \forall\varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N(a_n > c-\varepsilon) \textit{ (2)} \end{cases}$$

$$c = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N(a_n < c+\varepsilon) \\ \forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N(a_n > c-\varepsilon) \end{cases}$$

Доказательство. Докажем, для верх предела:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n, M_n = \sup_{k\geq n}\{\, a_k \,\}$$

$$(1) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N(M_N < c+\varepsilon)$$

$$(2) \iff \forall\varepsilon > 0, \forall N(M_n > c-\varepsilon)$$

Напомним, что $\{\, M_n \,\}$ - нестрого убыв.

Тогда $(1) \wedge (2) \iff c = \lim_{n\to\infty} M_n$ $(= \inf\{\, M_n \,\})$ □

2 Лекция 8

2.1 §3: Топология $\mathbb{R}$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

Обозначение.

- $B_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ - *ε-окрестность a*
- $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{\, a \,\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ - *проколотая ε-окр-ть т. a*

Определение 2.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

1) Точка x наз-ся внутренней точкой мн-ва E, если $\exists\varepsilon > 0(B_\varepsilon(x) \subset E)$

   $(int)E$ - мн-во всех внут. точек E

2) Точка x наз-ся внешней точкой мн. E, если $\exists\varepsilon > 0(B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}\setminus E)$
   $(ext)E$ - мн-во внешних точек E

3) Точка x наз-ся граничной точкой мн-ва E, если

$$\forall\varepsilon > 0(B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R}\backslash E) \neq \emptyset)$$

σE - мн-во всех граничных точек E

Замечание. *Из опр-я следует:*

$$\mathbb{R} = (int)E \sqcup (ext)E \sqcup \sigma E$$

Пример.

$$E = (0,1], (int)E = (0;1), (ext)E = (-\infty;0) \cup (1;+\infty), \sigma E = \{\,0,1\,\}$$

Определение 2.2. Мн-во $G \subset \mathbb{R}$ наз-ся **открытым**, если все его точки яв-ся внутренними (т. е. $G = (int)G$)

Определение 2.3. Мн-во $F \subset \mathbb{R}$ наз-ся **замкнутым**, если $\mathbb{R}\backslash F$ - открыто.

Пример. *1)* (a,b) *- открытое.*

2) $[a,b]$ *- замкнутое.*

Лемма 2.1. *a) Объединение любого семейства открытых мн-в открыто.*

b) Пересечение конечного сем-ва открытых мн-в открыто.

c) $\mathbb{R}, \emptyset$ *- открыты*

Доказательство. a) Пусть $\{\,G_\lambda\,\}_{\lambda\in\Lambda}$ - семейство открытых мн-в.

$$G = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \text{ и } x \in G$$

По опр-ю:

$$\exists\lambda_0 \in \Lambda(x \in G_\lambda \text{ - открыто}) \iff \exists\varepsilon > 0\colon B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda \subset G$$

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset G$, т. е. x - внут. точка G

b) ПУсть $\{ G_k \}_{k=1}^m$ - семейство открытых мн-в, $G = \bigcap_{k=1}^m G_k, x \in G$. По опр. пересечения:

$$\forall k, x \in G_k \Rightarrow \forall k, \exists \varepsilon_k > 0 \colon B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$$

$$\varepsilon = \min_{1 \le k \le m} \{ \varepsilon_k \}$$

Тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k, \forall k \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^m$, т. е. x - внут. точка G

c) Открытость $\mathbb{R}, \emptyset$ следует из опр-я.

□

Лемма 2.2. *a) Объединение конечного семейства замкнутых мн-в замкнуто*

b) Пересечение любого семейства замкнутых мн-в замкнуто

c) $\mathbb{R}, \emptyset$ *- замкнуты*

Доказательство. a, b)

$$\mathbb{R} \backslash (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \backslash F_\lambda).$$

$$\mathbb{R} \backslash (\bigcup_{k=1}^m F_k) = \bigcap_{k=1}^m (\mathbb{R} \backslash F_k)$$

c) Очев.

□

Определение 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Точка x наз-ся предельной точкой мн-ва E, если:

$$\forall \varepsilon > 0 (\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset)$$

Лемма 2.3. *Точка x - предельная точка* $\iff$

$$\exists \{ x_n \}_{x_n \neq x} \subset E \colon (x_n \to x)$$

Доказательство. =>)

$$x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E, \forall n \Rightarrow x_n \neq x \text{ и } x_n \in E \Rightarrow x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$$

<=) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N\colon \forall n \geq N (x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon))$
Сл-но, $x_N \in \overset{\circ}{B}_{\varepsilon}(x) \cap E$

□

Теорема 2.4 (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утв. эквивалентны:*

1) *E - замкнуто;*

2) *E содержит все свои граничные точки;*

3) *E содержит все свои предельные точки;*

4) *Если п-ть $\{x_n\}$ точек из E сходится к x, то $x \in E$*

Доказательство.

1 => 2) Пусть $x \in \mathbb{R} \backslash E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_{\varepsilon}(x) \subset \mathbb{R} \backslash E$, т. е. x - внешняя точка E. Тогда $\sigma E \subset E$

2 => 3) E содержит все свои граничные точки. Рассм. 2 случая:

a) x - внутренняя точка $\Rightarrow x \in E$

b) x - граничная точка $E \Rightarrow x \in E$ - по усл. 2)

3 => 4) Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \to x$

Предположим, что $x \notin E \overset{\text{Л2}}{\Rightarrow} x$ - предельная точка E

4 => 1) $x \in R \backslash E$. Предположим, что x - не внутренняя точка E. Тогда:

$$\forall n\colon B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset$$

Пусть $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Имеем $\{x_n\} \subset E \Rightarrow x_n \to x \in E$!!!!!!

□

Пример. *Пусть L - мн-во част. пределов числовой п-ть $\{ a_n \}$. Покажем, что L - замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{ x_n \} \subset L$, $x_n \to x$

По опр-ю част. предела, найдётся строго возрастающая п-ть номеров $\{ n_k \}$, что $|a_{n_k} - x_k| < \frac{1}{k}$

Сл-но:

$$|a_{n_k} - x| \leq |a_{n_k} - x_k| + |x_k - x| < \frac{1}{k} + |x_k - x|$$

Т. е. $x \in L$, по эквив. п.1 и п. 4 (Теоремы 2.4) заключаем, что L - замкнуто. $\square$

Определение 2.5. $\overline{E} = E \cup \sigma E$ - замыкание мн-ва E

Лемма 2.5. *Мн-во $\overline{E}$ является замкнутым.*
Кроме того, $\overline{E} = E \cup \{ x \colon x$ - предельная точка $E \}$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R} \backslash \overline{E} \Rightarrow x$ - внешн. точка E, т. е.

$$\exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash E$$

Если $B_\varepsilon(x) \cap \sigma E \neq \emptyset$, то $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$!!!

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash \overline{E}$, т. е. x - внут. точка $\mathbb{R} \backslash \overline{E}$

Вторая часть следует из наблюдений:

(1) любая предельная точка E либо внутренняя, любо граничная.

(2) граничная точка E, не принадлежащая E, является предельной. $\square$

Задача 2.1. 1) $x \in \overline{E} \iff \exists \{ x_n \} \subset E (x_n \to x)$

2) $\overline{E} = \bigcap \{ F \colon F$ - замкнуто или $F \supset E \}$

3 Лекция 9

Определение 3.1. Семейство $\{ G_\lambda \}$ наз-ся покрытием мн-ва E, если $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Покрытие наз-ся открытым, если все G_λ открыты.

Пример. $\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right) \}_{n \in \mathbb{N}}$ - *открытое покр-е* $(0,1)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

Теорема 3.1 (Лемма Гейне-Бореля)**.** *Если* $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ *образует открытое покр-е отрезка* $[a,b]$*, то:*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \colon ([a,b] \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Предположим, что из открытого покр-я $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ отрезка $[a,b]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разделим $[a,b]$ пополам и обозначим за $[a_1, b_1]$ ту его половину, кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ.

Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим за $[a_2, b_2]$ ту его половину, кот. не покр-ся конечным набором G_λ

...

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть отрезков, каждый из кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ

По т. Кантора о вложенных отрезках, найдётся т. $c \in \bigcap_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$. Т. к.

$$c \in [a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (c \in G_\lambda \text{ - открытое})$$

$$\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$$

Выберем k так, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$

Сл-но, $c - a_k < \varepsilon$ и $b_k - c < \varepsilon$. Откуда:

$$[a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}!!!(\text{с построением п-ти } \{ [a_n, b_n] \})$$

□

Следствие. *Если F - замкнутое огр. мн-во в $\mathbb{R}$ и $\{ G_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda}$ - откр. покр-е F, то:*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \colon (F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Т. к. F - огр., то $\exists [a, b] \colon F \subset [a, b]$. Сем-во $\{ G_\lambda \}_{\lambda\in\Lambda} \cup \{ \mathbb{R} \backslash F \}$ отк-е покр-е $[a, b]$, т. к. $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \cup (\mathbb{R} \backslash F) = \mathbb{R}$

По т. Гейне-Бореля $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$:

$$[a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n} \cup (\mathbb{R} \backslash F)$$

$$\Rightarrow F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n}$$

□

Введм следующее обозначение:

Обозначение.

$$B_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty) \cup \{ +\infty \} \text{ - } \varepsilon\text{-}окр\text{-}ть\ +\infty$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ - } проколотая\ \varepsilon\text{-}окр\text{-}ть\ +\infty$$

$$B_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup \{ -\infty \}$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$$

Поскольку все определения этого параграфа давались на языке окр-тей, то всё это верно и для $\overline{\mathbb{R}}$

$E \subset \overline{\mathbb{R}}$. В част-ти $+\infty(-\infty)$ - предел. точка мн-ва $E \subset \overline{\mathbb{R}} \iff E \backslash \{ +\infty \}$ неогр. сверху ($E \backslash \{ -\infty \}$ - неогр. снизу).

На языке окр-ти можно дать общее определение предела:

Определение 3.2. Точка в $b \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся **пределом** числовой п-ти $\{ a_n \}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n \geq N (a_n \in B_\varepsilon(b))$$

3.1 §4: Непрерывные ф-ции

3.1.1 Предел ф-ции в точке

Пусть $E \in \mathbb{R}$, задана ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$.
Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Определение 3.3 (по Коши)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в т. a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $b = \lim_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$

$$(f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b))$$

Замечание. *Если для ф-ции* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *- положить* $a = +\infty$*: дост-но положить* $N = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1$

Определение 3.4. Число b наз-ся пределом ф-ции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Определение 3.5 (по Гейне)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в точке a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \} (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Замечание. *Поскольку* a *- предельная точка мн-ва* E*, то*

$$\forall \delta > 0\colon \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \neq \emptyset$$

и сущ-ет $\{ x_n \} \subset E \setminus \{ a \}, x_n \to a$

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ - } \textit{предельная точка } \mathbb{R}$$

Покажем, что:

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$ *и пусть* $\delta \leq 1$*:*

$$0 < |x - a| < \delta \leq 1$$

$$|x + a| = |x - a + 2a| < |x - a| + 2\,|a| \leq 1 + 2\,|a|$$

Возьмем $\delta = min\,\{\, 1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1}\,\}$*:*

$$0 < |x - a| < \delta \iff 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{2\,|a| + 1} \iff \left|x^2 - a^2\right| < |x - a|\,(2\,|a|{+}1) < \varepsilon$$

Рассм. по Гейне:

$$x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow x_n^2 \to a^2 \iff f(x_n) \to f(a)$$

Теорема 3.2. *Определения по Коши и по Гейне* ***равносильны****.*

Доказательство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка мн-ва E.

Опр. 1 $\Rightarrow$ **Опр. 2**) Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Коши

Рассм. произвольную п-ть $\{\, x_n \,\}\,, x_n \in E \setminus \{\, a \,\}$ и $x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E\colon\, (f(x) \in B_\varepsilon(b))$

Т. к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in B_\delta(a))$. Имеем $x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geq N$, а значит, $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N$. Сл-но, $f(x_n) \to b$. Опр. 2 выполн-ся.

Опр. 2 $\Rightarrow$ **Опр. 1**) Пусть $b = \lim_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что Опр. 1 не выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E(x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ и соотв. знач-е x обозначим через x_n. По индукции будет построена посл-ть $\{\, x_n \,\}$, т. ч. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E$.

Имеем $\{\, x_n \,\} \subset E \setminus \{\, a \,\}$ и по т. о зажатой п-ти $x_n \to a$, а значит $f(x_n) \to b$

По опр-ю предела посл-ти $\exists N, \forall n \geq N(f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$!!!

Сл-но опр. 2 не выполняется !!!

$\square$

<u>**Замечание.**</u> *Опр-е предела по Гейне можно ослабить, считая, что* $\{ x_n \}$ *монотонна. (Задача !)*

Св-ва предела ф-ции:

Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ и a - предел. точка E:

С1: **(Единственность предела)** Если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{x\to a} f(x) = c$, то $b = c$

Доказательство. Рассм. произвольую п-ть $\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}$ и $x_n \to a$

По опр-ю Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. Т. к. предел посл-ти единственнен, то $b = c$ $\square$

С2: **(Предел по подмн-ву)** Если a - предел. точка мн-ва $D \subset E$ и

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Тогда $\lim_{x\to a}(f|_D) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{ x_n \}, x_n \in D \setminus \{ a \}, x_n \to a$. Тогда:

$$(f|_D)(x_n) = f(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x\to a}(f|_D)(x)$ $\square$

С3: **(Предел зажатой ф-ции)** Если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \colon (f(x) \leq h(x) \leq g(x))$$

и $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x\to a} h(x) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$. Тогда $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n), \forall n \geq N$$

По т. о зажатой п-ти:

$$\begin{cases} f(x_n) \to b \\ g(x_n) \to b \end{cases} \Rightarrow h(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x \to a} h(x)$ $\square$

C4: **(Свойство локализации)** Если f и g совпадают на $\mathring{B}_\delta(a) \cap E$ и $\lim_{x \to a} f(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x \to a} g(x) = b$

C5: **(Арифм. операции с пределами)** Пусть $\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{x \to a} g(x) = c$. Тогда:

1)
$$\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

2)
$$\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = bc$$

3) Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ на E, то:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Следствие. *Если сущ-ет величина справа, то сущ-ет величина слева и рав-во выполняется*

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть:

$$\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$$

Тогда $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$. По св-вам предела п-ти:

$$f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$$

$$f(x_n)g(x_n) \to bc$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c}$$

$\Rightarrow$ По опр. предела ф-цию по Гейне:

$$(f \pm g)(x) \to b \pm c$$

$$(fg)(x) \to bc$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \to \frac{b}{c}$$

При $x \to a$. □

C6: **(Лок. огр-ть)** Если сущ. конечный $\lim_{x\to a} f(x)$, то

$$\exists \delta > 0, \exists C > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x)| \leq C)$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Тода

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(b - 1 < f(x) < b + 1)(\varepsilon = 1)$$

Положим тогда $C = |b| + 1$. □

C7: **(Предел композиции)** Пусть заданы ф-ции:

$$f : E \to \mathbb{R}, f(E) \subset D, g : D \to \mathbb{R}:$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = c$$

Пусть вып-но хотя бы одно из условий:

1) $f(x) \neq b$ в некот. проколотой окр-ти a
2) $g(b) = c$

Тогда $\lim_{x\to a} g(f(c)) = c = \lim_{y\to b} g(y)$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции:

$$\exists \sigma > 0, \forall y \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b) \cap D(g(y) \in B_\varepsilon(c))$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(f(x) \in B_\sigma(b))$$

1) Уменьшая $\delta > 0$, если необ-мо, можно считать, что $f(x) \neq b$ для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$.

   Тогда $f(x) \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b)$, а - ...,

   $$g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$$

   Сл-но, $c = \lim_{x\to a}(g \circ f)(x)$

2) Если $f(x)=b$, для некот. т. $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$, то

$$g(f(x)) = g(b) = c \in B_\varepsilon(c)$$

Сл-но, $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$, для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$. Так что $c = \lim_{x\to a}(g \circ f)(x)$

$\square$

Замечание. *Выполнение хотя бы одного из условий **существенно** для $\exists$ предела.*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

$$g = f$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \lim_{y\to 0} g(y) = 0, g(f(x)) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \pm \lim_{y\to 0} g(y)$$

4 Лекция 10

4.1 Критерий Коши для предела ф-ции

Теорема 4.1 (Критерий Коши сущ-е предела ф-ции)**.** *Пусть:*

$$f : E \to \mathbb{R}$$

a предельная точка мн-ва E

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon \forall x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(x')| < \varepsilon) \tag{1}$$

Доказательство.

$\Rightarrow$) Заф. $\varepsilon > 0$. Пусть предел ф-ции $= b$. По опр. предела ф-ции:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда для любых $x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$:

$$|f(x) - f(x')| \le |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) Пусть для f выполнено (1). Покажем, что f удов-ет опр-ю предела по Гейне. Заф. $\varepsilon > 0$ и выберем соотв. $\delta > 0$ из (1).рассм. произ. п-ть:

$$\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$$

Тогда $\exists N, \forall n \ge N(x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \forall n, m \ge N$$

Так что п-ть $\{ f(x_n) \}$ - фундаментальна $\Rightarrow$ по критерию Коши для п-тей $f(x_n) \to b \in \mathbb{R}$.
Рассм. ещё п-ть $\{ y_n \}, y_n \in E \setminus \{ a \}, y_n \to a$. Тогда:

$$\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \ge n_0(x_n, y_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$$

Значит:

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Сл-но, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, откуда $f(y_n) \to b$. По Гейне,

$$b = \lim_{x \to a} f(x)$$

$\square$

4.2 Односторонние пределы

Определение 4.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

Если a - предельная точка мн-ва $(a; +\infty) \cap E$, то:

$$\lim_{x \to a} f|_{(a;+\infty) \cap E}(x)$$

наз-ся **пределом справа** ф-ции f в т. a.

Если a предельная точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$, то:

$$\lim_{x \to a} f|_{(-\infty;a)\cap E}(x)$$

наз-ся **пределом слева** ф-ции f

Обозначение.

$$f(a+0) \text{ } \textit{или} \lim_{x \to a+0} f(x)$$

$$f(a-0) \text{ } \textit{или} \lim_{x \to a-0} f(x)$$

По опр-ю:

$$f(+\infty - 0) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$$f(-\infty + 0) = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Лемма 4.2. *Пусть $a \in \mathbb{R}$ и задана $f : E \to \mathbb{R}$*

Пусть a - предел. точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$ и $(a; +\infty) \cap E$. Тогда:

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) (\textit{в } \mathbb{R}) \iff f(a+0) = f(a-o)$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Это вытекает из св-ва предела по подмножеству.

$\Leftarrow$ $f(a=0) = b = f(a-0)$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю одност. пределов:

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in (a - \delta_1, a) \cap E(f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in (a, a + \delta_2) \cap E(f(x \in B_\varepsilon(a))$$

Положим $\delta = min(d_1, d_2)$. Тогда:

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Сл-но, $\exists \lim_{x \to a} f(x) = b$

□

Определение 4.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $D \subset E$.

Ф-ция f наз-ся нестрого возрастающей (убывающей) на D, если:

$$\forall x_1, x_2 \in D(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2))(\text{ соотв. } (f(x_1) \ge f(x_2)) \text{ })$$

Теорема 4.3 (О пределе монотонной ф-ции). *Пусть* $a, b \in \overline{\mathbb{R}}; a < b$. *Если ф-ция* f *нестрого возрастает на* (a, b), *то:*

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$$

Если f *нестрого убыв., то* $\sup$ *и* $\inf$ *меняются местами.*

Доказательство. Пусть f нестрого возрастает на (a, b). Положим $s = \sup_{(a,b)} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. По опр-ю sup:

$$\forall r < s, \exists x_r \in (a, b) \colon (f(x_r) > r)$$

Откуда в силу возрастания вып-но:

$$r < f(x) \leq s, \forall x \in (x_r, b)$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. Положим $s - \varepsilon = r$, если $s \in \mathbb{R}$, и $\frac{1}{\varepsilon} = r$, если $s = +\infty$. Тогда:

$$f(x) \in B_\varepsilon(s), \forall x \in (x_r, b)$$

Если $b \in \mathbb{R}$, то $\delta = b - x_2 \Rightarrow (b - \delta, b) \subset (x_r, b)$

Если $b = +\infty$, то $\delta = \frac{1}{|x_r|+1} \Rightarrow (\frac{1}{\delta}, +\infty) \subset (x_2, b)$ □

Следствие. *Если ф-ция* f *монотонна на* (a, b) *и* $c \in (a, b)$, *то сущ-ют конечные* $f(c - 0)$ *и* $f(c + 0)$, *причём*

$$f(c - 0) \leq f(c) \leq f(c + 0), \text{ - если } f \text{ нестрого возр-ет;}$$

$$f(c - 0) \geq f(c) \geq f(c + 0) \text{ - если } f \text{ нестрого убыв-ет.}$$

Доказательство. Для опред-ти, пусть f нестрого возр-ет на (a, b). Тогда:

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in (a, c) \Rightarrow f(c - 0) = \sup_{(a,c)} f(x) \leq f(c)$$

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in (c, b) \Rightarrow f(c + 0) = \inf_{(b,c)} f(x) \geq f(c)$$

□

5 Лекция 11

5.1 Непрерывность ф-ции в точке

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Ф-ция f наз-ся непрерывной в точке a, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Иначе:

$$x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

Замечание. *Из опр-я следует, что ф-ция не меняет значение* ***резко***

Св-во (отделимость): если $f : E \to \mathbb{R}$ - непр-на в точке a и $f(a) > 0 (< 0)$, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(x) > \frac{f(a)}{2}(< \frac{f(a)}{2}))$$

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$. По непр-ти ф-ции в a, положим $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}) \Rightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}$$

$\square$

Замечание. *В определении непр-ти ф-ции точка $a \in E$ - области определения, но* ***не обязана*** *быть предельной точкой E.*

Определение 5.2. Точка, принадлежащая мн-ву, но не явл-ся его предельной точкой наз-ся **изолированной**.

Пример.

$$E = (1, 2] \cup \{ 5 \}$$

Тогда точка 5 - изолированная точка мн-ва E

Теорема 5.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}, a \in E$. Следующие утв-я экв-ны:*

1) *f непр-на в a*
2) $\forall \{ x_n \}, x_n \in E(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$

3) Либо a - изолированная точка мн-ва E, либо a - предельная точка мн-ва E и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Рассм. $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти

$$\exists\delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in B_\delta(a) \cap E)$, а значит,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Сл-но, $f(x_n) \to f(a)$

$2 \Rightarrow 3)$ Если a - предельная точка мн-ва E, то $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, по опр-ю предела по Гейне.

В противном случае, a - изолированная точка области определения.

$3 \Rightarrow 1)$ Если a - изолированная точка мн-ва E, то $\exists\delta_0 > 0\colon (B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\})$. Тогда определение непр-ти выполняется для $\delta = \delta_0$.

Если a - предельная точка мн-ва E, то по опр-ю предела по Коши:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

При $x = a$, следствие выше выпол-ся (очевидно). Это означает, что f непр-на в a.

$\square$

Следствие. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ - непр-ны в $a \in E$, то в этой точке непр-ны ф-ции:*

1) $f \pm g$

2) $f \cdot g$

3) При доп. усл-ии $g \neq 0$: $\frac{f}{g}$

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Т. к. f, g - непр-ны в a, то $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$. Тогда по св-вам предела п-ти имеем:

1) $f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a)$

2) $f(x_n) g(x_n) \to f(a) g(a)$

3) $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$

По Теореме (5.1), эти ф-ции непрерывны в a. □

Пример.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0, (a_i \in \mathbb{R})$$

Эта ф-ция непр-на в каждой точке $a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$x \mapsto x$$

$$x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$$

Ф-ции выше непрерывны. Тогда по сл-ию (5.1) в a непр-ны:

$$x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}$$

А значит P непр-на в a. □

Теорема 5.2 (Непрерывность композиции)**.** *Если ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в a, $f(E) \subset D, g : D \to \mathbb{R}$ - непр-на в $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в т. a.*

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Тогда: $f(x_n) \to f(a)$ по непр-ти f в a. Кроме того:

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)) \text{ - по непр-ти } g \text{ в } f(a) \iff$$

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$$

По Теореме 5.1, ф-ция $g \circ f$ непр-на в т. a. □

Определение 5.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. Если $f|_{[a,+\infty)}$ непр-но в a, то говорят, что f непр-на справа в т. a.

Аналогично: $f|_{(-\infty,a]}$ непр-на в a, то f непр-на слева в a.

Замечание. *Если a - предел. точка мн-ва $[a, +\infty) \cap E$, то f непр. справа в т. $a \iff f(a+0) = f(a)$*

Определение 5.4. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$.
Если f не явл. непрерывной в т. a, то говорят, что f разрывна (имеет разрыв) в т. a, а саму т. a наз-ют точкой разрыва f.
Классифицируем точки разрыва:

1) Пусть ф-ция f определена в некот. проколотой окр-ти т. a. Если сущ-ют конечные односторонние пределы $f(a-0), f(a+0)$ и среди трёх чисел $f(a+0), f(a-0), f(a)$ не все равны, то т. a наз-ся точкой разрыва I рода ф-ции f

2) В противном случае т. a наз-ся точкой разрыва II рода ф-ции f

Если a - т. разрыва I рода и $f(a+0) = f(a-0)$, то точка a наз-ся точкой устранимого разрыва.

Пример. *1)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign(x) := \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$$f(0+0) = 1, f(0-0) = -1$$

Т. $x = 0$ - т. разрыва I рода.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign^2(x)$$

Тогда $x = 0$ - т. устранимого разрыва.

3)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(0+0) = +\infty, f(0-0) = -\infty \Rightarrow x = 0 \text{ - \textit{точка разрыва II рода.}}$$

4)

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

Покажем, что D - разрывна в каждой точке.

Доказательство. a) $a \in \mathbb{Q}$:

$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, a_n > a, D(x_n) = 1 \to 1$$

$$x'_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 0 \to 0$$

Получаем, что правого предела в a не сущ-ет

b) $a \notin \mathbb{Q}$:

$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, x_n > a, D(x_n) = 0 \to 0$$

$$x'_n = \frac{[na] + 1}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 1 \to 1$$

Сл-но, не сущ-ет $D(a + 0)$.

Таким образом, a - т. разрыва II рода. □

5.2 Непрерывность ф-ции на мн-ве

Определение 5.5. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся непрерывной (на E), если f непр-на на каждой точке $a \in E$

Если $D \subset E$, то f непр-на на D, если $f|_D$ непр-на.

Пример. $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ *- рациональная ф-ция.*
Она непр-на на $E = \{\, s\colon Q(x) \neq 0 \,\}$. (по сл-ию 5.1)

Замечание. *Чарльз. Лью курс по мат. анализу "Скелет мат. анализа"*

Лемма 5.3. *Если ф-ция f непр-на на $[a, b]$, то f огр. на $[a, b]$*

Доказательство. Предположим, что f не огр-на. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b]\colon (|f(x_n)| > n)$$

По инд-ции опр-на $\{ x_n \} \subset [a,b]$. По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в:

$$a \leq x_{n_k} \leq b$$

получаем, что $x_0 \in [a,b]$. По непр-ти $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$!!! Но ведь,

$$(|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \to +\infty)$$

$\square$

Теорема 5.4 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Если f - непр-на на $[a,b]$, то $\exists x_m, x_M \in [a,b]$, в кот. вып-но:*

$$f(x_M) = \sup_{[a,b]} f(x), f(x_m) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

Доказательство. По лемме (5.3) мн-во значений $f([a,b])$ ограничено, поэтому опр-ны числа $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.
По опр-ю sup, $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b](M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M)$. По инд-ции опр-на п-ть $\{ x_n \} \subset [a,b]$, причём $f(x_n) \to M$.
По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}$:

$$x_{n_k} \to x_M \in [a,b]$$

Тогда по непр-ти:

$$f(x_{n_k}) \to f(x_M)$$

С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M \Rightarrow f(x_M) = M$ в силу ед-ти предела.
Случай inf док-ся аналогично. $\square$

Замечание. *Утв-я, аналогичные лемме* (5.3) *и теореме* 5.4 *неверны для интервалов.*

Пример. *$f(x) = x$. f непр-на на $(0,1)$. f - огр-на, но $\nexists$ минимального и максимального значения.*

$$\sup_{(0,1)} f(x) = 1 \neq f(x) \forall x \in (0,1)$$