Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

10 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 5

1.1 Отношения эквивалентности (∼)

Определение 1.1. Отношение эквив. - отношение с св-вами:

1) Рефлексивность: $x \sim x$

2) Симметричность: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3) Транзит.: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Определение 1.2. Класс эквив.: $K_x = \{\, y \mid y \sim x \,\}$

Теорема 1.1 (О разбиении на классы эквив.). Если задано отн. экв. $\sim$ на A, то A можно представить как:

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

т. ч.:

1) Каждая A_i - K_x для некот. x

2) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

3) $y, z \in A_i \Rightarrow y \sim z$

4) $y \in A_i, z \in A_j, i \neq j \Rightarrow y \nsim z$

Доказательство. Рассм. всевозм. мн-ва, явл-ся классами эквив-ти. Докажем выполн. св-в для них. Для этого докажем леммы I-IV

Лемма 1.2 (I). $x \in K_x$

Доказательство.

$$x \sim x \Rightarrow x \in \{\, y \mid y \sim x \,\} \Rightarrow x \in K_x$$

□

Следствие.

$$\bigsqcup_{x \in A} K_x = A$$

Лемма 1.3 (II).

$$y \in K_x, z \in K_x \Rightarrow y \sim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow y \sim x \\ z \in K_x \Rightarrow x \sim z \text{ - симметричность} \end{cases} \Rightarrow y \sim z \text{ - транзитивность}$$

$\square$

Лемма 1.4 (III).

$$K_x \neq K_t \Rightarrow K_x \cap K_t = \emptyset$$

Доказательство. Докажем контрапозицию:

$$K_x \cap K_t \ni w \Rightarrow K_x = K_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ w \sim t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ t \sim w \end{cases} \Rightarrow t \sim x$$

Если $y \in K_t \Rightarrow y \sim t \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \in K_x$, т. е. $K_t \subset K_x$. Аналогично, получаем $K_x \subset K_t \Rightarrow K_x = K_t$ $\square$

Лемма 1.5 (IV).

$$K_x \neq K_t, y \in K_x, z \in K_t \Rightarrow y \nsim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow x \sim y \\ y \in K_t \Rightarrow z \sim t \end{cases}$$

Из $y \sim z$, то, по транзитивности, $x \sim t \Rightarrow K_x = K_t$!!!. Т. к. это противоречие, то $y \nsim z$ $\square$

$\square$

Определение 1.3. Факторможество $A/_\sim$ - мн-во классов эквив.

Теорема 1.6. Если $\sim$ - отн. эквив. на A, то сущ. B и $f : A \to B$, т. ч.:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Доказательство.

$$B = A/_\sim$$
$$f(x) = K_x$$

$\square$

1.2 Отношение порядка ($\leq$)

Определение 1.4. Отношение порядка - отношение со св-вами:

- Нестрогий порядок $\leq$:
  1) Рефлекивность: $x \leq x$
  2) Антисимм.: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
  3) Транзтивность: $x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z$
  4) (Для линейных порядков) Полнота: $(x \leq y \vee y \leq x)$
- Строгий порядок $<$:
  1) Антирефлексивность: $\neg(x < x)$
  2) Антисимметричность: $\neg(x < y \wedge y < x)$
  3) Транзитивность: $(x < y \wedge y < z) \to x < z$
  4) (Для линейных порядков) Трихотомичность:

$$x < y \vee y < x \vee x = y$$

Пример. 1) Стандартный числовой порядок в $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

2) $\vdots$ на $\mathbb{N}$ (в том числе включая 0)

$$x \vdots y \iff \exists z : x = y \cdot z$$

3) $\subset$ на 2^A

4) $\sqsubset, \sqsupset, (substring)$ на $\{ 0, 1 \}^n$

5) Асимптот. порядок на ф-циях $f < g$, если $\exists N \forall n > N : f(n) < g(n)$

6) Пор-ки на $\mathbb{R}^2$:

   a) Лексикографический:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \end{array}\right.$$

b) Покоординатный:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \le x_2 \\ y_1 \le y_2 \end{cases}$$

Диаграмма Хассе: граф на пл-ти, т. ч. вершины, соед. рёрбрами, не находятся на одном уровне (Picture)
Рассм. : $(\{ 0, 1, \dots, 9 \}, \vdots)$
$x \le y \iff$ Есть восходящий путь из x в y

Определение 1.5. Наибольший эл-т - Больше всех

$$x \text{ - наиб.} \iff \forall y : y \le x$$

Определение 1.6. Макс. эл-т - больше него нет

$$x \text{ - макс.} \iff \neg \exists y : y > x$$

Для лин. порядка - это одно и то же

Для част. порядка - может быть разное, т. е.:

$$\forall y (y \le x \lor y \text{ не сравним с } x)$$

- макс. эл-т для част. порядка.

Наименьший и минимальный - аналогично.

В конечном непустом мн-ве всегда есть макс. и мин.

В конечном мн-ве единственный макс. является наибольшим.

Для беск. мн-в всё, что выше, конечно неверно. (picture)

Определение 1.7. Упорядоченное мн-во - пара из мн-ва и порядка на нём.

Обозначение. Пишут так: $(A, \le_A)$, сокращённо УМ

Операции над УМ:

1) Сложение:

$$(A, \leq_A) + (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \sqcup B$$

$$x \leq y \iff \left[\begin{array}{l} x, y \in A : \ x \leq_A y \\ x, y \in B : \ x \leq_B y \\ x \in A, y \in B \end{array}\right.$$

При этом оно:

- Ассоциативно: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Некоммутативно: $A + B \neq B + A$

2) Умножение:

$$(A, \leq_A) \cdot (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \times B$$

$$(a_1, b_1) \leq_C (a_2, b_2) \iff \left[\begin{array}{l} b_1 <_B b_2 \\ b_1 = b_2, a_1 \leq_A a_2 \end{array}\right.$$

2 Лекция 6

2.1 Плотный порядок. Изоморфизм

Отношение частичного порядка:

1) $x \leq x$ - рефлексивность

2) $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ - антисимметричность

3) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ - транзитивность

Отношение линейного порядка:

4) $\forall x, y : \ x \leq y \vee y \leq x$

Упор. мн-во $(A, \leq_A)$
Наибольший эл-т - $M : \forall x, x \leq M$.
Наименьший эл-т - $m : \forall x, x \geq m$
Максимальный эл-т - $M : \neg\exists x : \ x > M$ (или $\forall x : \ x \leq M \vee (x$ не сравним с $M))$
Минимальный эл-т $m : \neg\exists x : \ x < m$

Определение 2.1. Плотный порядок:

$$\forall x, y (x < y \to \exists z : x < z < y)$$

Утверждение 2.1. Плотный порядок - либо тривиальный (т. е. разл-ные эл-ты не сравнимы), либо опр. на бесконечном мн-ве.

Определение 2.2. Изоморфизм упор. мн-в $(\boldsymbol{A}, \leq_A)$ и $(\boldsymbol{B}, \leq_B)$ - это такая биекция $f : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, что:

$$\forall x, y : (x \leq_A y \iff f(x) \leq_B f(y))$$

Пример.

$$(\{ n \mid 30 \vdots n \}, \vdots) \text{ и } (2^{\{ a,b,c \}}, \subset)$$

Пример.

$$(\mathbb{Q} \cap (0,1), \leq) \text{ и } (\mathbb{Q} \cap (0,+\infty), \leq)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1$$

Теорема 2.1. Любые два счётных плотно, линейно упоряд. мн-ва без наиб. и наим. эл-тов изоморфны:

Пример.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_2 = \{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \},$$

$\mathbb{A}$ - корни мн-ов с целыми коэфф-ми

Доказательство.

$$\boldsymbol{A} = \{ a_0, a_1, \dots \}, \boldsymbol{B} = \{ b_0, b_1, \dots \}$$

Построим инъекцию f:

1) Построим $a_0 \to b_0$

2) Б. О. О. $a_1 > a_0$. Т. к. в $\boldsymbol{B}$ нет наибольшего, то есть $b_i : b_i > b_0$. Тогда добавим $a_1 \to b_i$

3) Пусть для $a_k, k \leq n-1$ соединения проведены. Проведём для a_n. Рассм. три случая:

I) $a_n < a_k, \forall k \leq n{-}1$. Тогда отобразим его в $b_p: b_p < b_i, \forall i$ из использованных ранее.

II) $a_n > a_k, \forall k \leq n-1$. Тогда отобразим его в $b_p: b_p > b_i, \forall i$ из использованных ранее.

III) Иначе у a_n есть использованные ранее соседи a_i и a_j. Т. к. A и B - лин. упор.: $\exists p: f(a_i) < b_p < f(a_j)$. Добавим $a_n \to b_p$

Как добиться, чтобы постр. ф-ция была сюрьекцией? Варианты:

1) Каждый раз брать эл-т B с наим номером из подходящих.

2) Действовать по очереди: сначала брать эл-т A с наим. номером, кот. ещё не рассмотрен, и отправлять в B. Затем эл-т B с наим. номером, кот. ещё не рассм, и отправлять в A. И т. д.

□

2.2 Предпорядки

Определение 2.3. Предпорядок (Предпочтения) - отношение, обладающее рефлексивностью и транзитивностью.

Определение 2.4. Полный предпорядок (Рациональные предпочтения) - предпорядок + любые два сравнимы. (или полн. + транз.)

Обозначение.

$$a \gtrsim b \text{ - предпор.}$$

$$a \sim b \iff (a \gtrsim b \wedge b \gtrsim) \text{ - отношение безразличия}$$

$$a \succ \iff (a \succ b \wedge \neg(b \succ a)) \text{ - строгий предпорядок}$$

Нетранзитивно: $a \succ b \succ c \succ a$

Теорема 2.2 (Структурная теорема о предпорядке на мн-ве A).

1) Отношение безразличия - это отношение эквив-ти на A

2) На эл-ах $A/_\sim$ можно ввести отношение
$S \leq T$, если $\exists x \in S, y \in T: x \lesssim y$
Это отнош. будет част. пор. на $A/_\sim$

3) $\leq$ лин. пор. $\iff$ $\precsim$ - полон.

Доказательство.

- 1) Рефл.: $a \precsim a \Rightarrow (a \precsim a \wedge a \precsim a) \Rightarrow a \sim a$

  2) Симм.:

  $$a \sim b \iff (a \precsim b \wedge b \precsim a) \iff (b \precsim a \wedge a \precsim b) \iff b \sim a$$

  3) Транзитивность:

  $$\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \iff \begin{cases} a \precsim b \wedge b \precsim a \\ b \precsim c \wedge c \precsim b \end{cases} \iff \begin{cases} a \precsim c \\ c \precsim a \end{cases} \Rightarrow a \sim c$$

- 1) Рефл $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S \Rightarrow$ т. к. $x \precsim x \Rightarrow S \leq S$

  2) Транз. $R \leq S \leq T$:

  $$\begin{cases} x \in R \\ y, z \in S \\ t \in T \\ x \precsim y \\ z \precsim t \end{cases} \Rightarrow y \precsim z \Rightarrow x \precsim t \Rightarrow R \leq T$$

  3) Антисимм.:

  $$S \leq T, T \leq S$$

  $$\begin{cases} x \in S, y \in T \Rightarrow x \precsim y \\ z \in T, t \in S \Rightarrow z \precsim t \\ x \sim t \\ y \sim z \end{cases} \Rightarrow y \sim z \precsim t \sim x \Rightarrow y \precsim x \Rightarrow x \sim y \Rightarrow S = T$$

- $\Leftarrow$) S, T - классы

  $$x \in S, y \in T:$$

  Если $x \precsim y \Rightarrow S \leq T$
  Если $y \precsim x \Rightarrow T \leq S$

$\Rightarrow$) Даны x, y:

$$x \in S, y \in T, \text{ б. о. о. } S \leq T$$

$$\Rightarrow \exists z \in S, t \in T : z \precsim t$$

$$x \sim z \precsim t \sim y \Rightarrow x \precsim y$$

S - класс эквив., T - класс эквив.

□

2.2.1 Агрегирование предпорядков

A - мн-во, $\precsim_1, \ldots, \precsim_n$ - препорядки $\Rightarrow$
$F : (\precsim_1, \precsim_2, \ldots, \precsim_n) \mapsto \precsim$

Определение 2.5. Агрегирование по больш-ву:

$$x \trianglelefteq y, \text{ если } \#\{\, i \mid x \precsim_i y \,\} \leq \#\{\, i \mid y \precsim_i x \,\}$$

Парадокс Кондорсе:

$$\begin{cases} a \precsim_1 b \precsim_1 c \\ b \precsim_2 c \precsim_2 a \\ c \precsim_3 a \precsim_3 b \end{cases} \Rightarrow a \trianglelefteq b \trianglelefteq c \trianglelefteq a$$

Теорема 2.3. Любое полное отношение может быть реализовано как результат агрегирование предпорядков

Доказательство. Эл-ты $x, y, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$. Также есть два предпорядка $\prec$ и $\prec'$, т. ч.:

$$x \prec y \prec a_1 \prec \ldots \prec a_{n-2}$$

$$a_{n-2} \prec' a_{n-3} \ldots a_2 \prec a_1 \prec x \prec y$$

□