Матан

Сергей Григорян

14 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 4

1.1 §2. Предел последовательности

1.2 Определение предела

Определение 1.1. $a : \mathbb{N} \to A$ - п-ть эл-ов мн-а A. Значение $a(n)$ - наз-ся n-ым членом п-ти. (Обозначается a_n). Сама п-ть обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$

Если $A = \mathbb{R}$ - то $\{a_n\}$ - числовая п-ть.

Пример. *1)*

$$a : \mathbb{N} \to \{c\}, c \in \mathbb{R}$$

Здесь постоянная п-ть ($a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$)

2) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ *- п-ть Фиббоначи.*

Определение 1.2. Число a наз-ся пределом п-ти $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Обозначается, как $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Определение 1.3 (В кванторах)**.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Или, $a_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Замечание.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0, M = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}, M \text{ - конечно}$$

Определение 1.4. Если $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, то $\{a_n\}$ наз-ся **сходящейся п-тью**, иначе - **расходящейся п-тью**

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. *Рассмотрим* $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ *нам подойдёт* $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. *Если* $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *(О единственности предела) Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*, то* $a = b$.

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опред. предела $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ и $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Положим $N = max(N_1, N_2)$:

$$|a-b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_N| + |b - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow$, то $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$ □

Задача 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Определение 1.5. П-ть $\{a_n\}$ наз-ся **ограниченной**, если $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ - ограничено.

Теорема 1.2. *(Об ограниченности сходящейся п-ти) Если* $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. По опред. предела (для $\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < a_n < a + 1)$. Положим $m = min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a - 1\}, M = max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a + 1\}$. Тогда $m \leq a_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Замечание. *Обратное утв.* ***неверно****:*

Пример.

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$$

Предположим, что a_n *сходится:*

По опред. предела($\varepsilon = 1$*)* $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < (-1)^n < a + 1)$

- *При чётном* $n \Rightarrow 1 < a + 1$
- *При нечётном* $n \Rightarrow a - 1 < -1$

$\Rightarrow a < 0 \wedge a > 0!!!$ *- противоречие*

Лемма 1.3. *Для всякого* $m \in \mathbb{N}$ *п-ти* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$*, где* $b_n = a_{n+m}, \forall n \in \mathbb{N}$ *имеют предел одновременно, и если имеют, то пределы равны.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\forall n \geq N_1 \colon (|a_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow (\forall n \geq N_1(|a_{n+m} - a| < \varepsilon))$$

$$(\forall n \geq N_2(|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geq N_2 + m(|a_n - a| < \varepsilon))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

□

Определение 1.6. П-ть $\{b_n\}$ об-ся $\{a_{n+m}\}$ и наз-ся m-ным хвостом $\{a_n\}$

Теорема 1.4 (О пределе в нер-вах)**.** *Если* $a_n \leq b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$*, то* $a \leq b$

Доказательство. От прот. Пусть $b < a$. По опред. предела

$$\exists N_1 \colon \forall n \geq N_1(a - \frac{a-b}{2} < a_n)$$

$$\exists N_2 \colon \forall n \geq N_2(b_n < b + \frac{a-b}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$, тогда:

$$\frac{a+b}{2} < a_N \text{ и } b_N < \frac{a+b}{2} \Rightarrow b_N < a_N!!!$$

□

Замечание.

Пример.

$$0 < \frac{1}{2}, \textit{но } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Следствие. *Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N(a_n < b_n)$

Теорема 1.5 (О зажатой п-ти)**.** *Если* $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$*, то* $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(a - \varepsilon < a_n)$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(b_n < a + \varepsilon)$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Ч. Т. Д. □

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$$

- $q = 0$*: верно*
- $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha, \alpha > 0$

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{n\alpha}(\frac{1}{n\alpha} \to 0) \Rightarrow |q|^n \to 0$$

Теорема 1.6. *(Арифметические операции с пределами) Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) Если $b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) По теор. 2 п-ть $\{a_n\}$ огр., т. е.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leq C)|b| \leq C$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

Тогда $\forall n > N = max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

3) Т. к. $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$, то дост-но д-ть, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, и восп. утв. 2: Т. к. $b \neq 0$, то $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. Поэтому:

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| \leq \frac{|b|}{2} + |b_n|,$$

откуда:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2},$$

а значит: $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall n \geq N_1$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела: $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon)$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при $\forall n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

□

2 Лекция 5

Пример.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq a_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} (\frac{2}{n^2} \to 0, \frac{1}{n} \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

<u>Определение</u> 2.1. Посл-ть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

<u>Замечание</u>.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \textit{где } \alpha_n \textit{ - б. м.}$$

<u>Пример</u>. *Пусть* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *- б. м., а* $\{\beta_n\}_1^\infty$ *- огранич. Тогда:* $\{\alpha_n\beta_n\}_1^\infty$ *- б. м.*

Доказательство. Т. к. $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огр., то $\exists C > 0\colon \forall n(|\beta_n| \leq C)$

$$-C|\alpha_n| \leq \alpha_n\beta_n \leq C|\alpha_n|$$

Крайние части $\to 0 \Rightarrow$ По. т. о двух полицейских $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$ □

2.1 Монотонные п-ти

<u>Определение</u> 2.2. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого возрастающей** (**строго возрастающей**), если

$$a_n \leq a_{n+1} (a_n < a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого убывающей** (**строго убыв.**), если:

$$a_n \geq a_{n+1} (a_n > a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Такие п-ти наз-ся **монотонными**.

<u>Замечание</u>. *Из опр-я следует, что* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает* $\iff$ $\{-a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает.*

<u>Замечание</u>. *Если* $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N \Rightarrow \forall n, m(n < m \to a_n \leq a_m)$

<u>Теорема</u> 2.1 (Теорема о пределе монотонной п-ти). *ПУсть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возрастает и огр. сверху, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходиться и $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$*

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убывает и огр снизу, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходиться и $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$

Доказательство. Док-ем первое утв. По условию $\exists c = \sup\{a_n\}_1^\infty \in \mathbb{R}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. супремума $\forall n(a_n \le c)$, также:

$$\exists N(a_N > c - \varepsilon)$$

Поскольку $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $a_n \ge a_N, \forall n \ge N \Rightarrow$ при всех таких $n \ge N$ имеем:

$$a_N \le a_n$$

$$c - \varepsilon < a_N \le a_n \le c < c + \varepsilon, \text{откуда}$$

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

Второе утв. док-ся аналогично. □

<u>Лемма</u> 2.2 (Нер-во Бернулли). *Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \ge -1$, то:*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Доказательство. **МММ**:

n = 1 Верно.

$n \Rightarrow n+1$ Пусть утв. верно для n. Тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \ge 1+(n+1)x$$

□

<u>Пример.</u> *Для $\forall x \in \mathbb{R}$ п-ть $a_n = (1+\frac{x}{n})^n$ сходится.*

Доказательство. Зафикс. $m \in \mathbb{N}$, что $m \ge |x|$. Тогда при:

$$n \ge m\colon a_n(x) > 0,$$

а также:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Исследуем: $(-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}})$. Она:

$$\begin{cases} > 0, x < 0 \\ \geq -1, x \geq 0 \end{cases}$$

По нер-ву Бернулли:

$$(1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq (1+\frac{x}{n})(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}) = 1$$

Итак, $\{a_n\}_1^\infty(x)$ нестрого возр. при $n \geq m$. По доказанному $a_n(-x) \geq a_m(-x)$, при $n \geq m$.

Т. к.

$$a_n(x)a_n(-x) = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1,$$

то:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{a_n(-x)} \leq \frac{1}{a_m(-x)}, \text{т. е.}$$

$\{a_n\}_1^\infty$ огр. сверху.

Сл-но, по теореме о пределе монот. посл-ти. $\{a_n(x)\}_1^\infty$ сход-ся. □

Определение 2.3.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 2.1. Док-те, что $2 < e < 3$

2.2 Последовательность вложенных отрезков

Определение 2.4. П-ть отрезков $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **вложенной**, если $\forall n \in \mathbb{N}([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$

Если к тому же, $b_n - a_n \to 0$, то п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **стягивающейся**.

Теорема 2.3 (Кантор)**.** *Всякая п-ть вложенных отрезков имеет общую точку. Если п-ть стягивающаяся, то такая точка единственная.*

Доказательство. Пусть задана п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ вложенных отр-ов. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_1 \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le b_1$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и огр. сверху (числом b_1).
П-ть $\{b_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и огр. снизу (числом a_1)
$\Rightarrow \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ сход., $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ и $\alpha \le \beta$.
Итак $\forall n(a_n \le \alpha \le \beta \le b_n)$, т. е.:

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Если п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ - стягив., то $b_n - a_n \to 0$
Пусть $x, y \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$, тогда $|x - y| \le b_n - a_n \Rightarrow x = y$
Т. е. $\bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = x$, где $x = \alpha = \beta$. □

3 Лекция 6

Рассм. $\bigcap_{i=1}^\infty (0, \frac{1}{n})$
По аксиоме Архимеде, заключаем, что $\bigcap_{i=1}^\infty (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

3.1 Бесконечные пределы

Выделим классы п-ть, **расход. особым образом**:

Определение 3.1. Говорят, что $\{a_n\}_1^\infty$ стремится к $+\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \ge N \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$

Обозначение. *Пишут вот так:* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *или* $a_n \to +\infty$

Определение 3.2. Говорят, что $\{a_n\}_1^\infty$ стремится к $-\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \ge N \Rightarrow a_n < -\frac{1}{e})$

Обозначение. *Пишут, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *или* $a_n \to -\infty$

Определение 3.3. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. большой**, если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

Замечание. *Из опр-ий следует, что* $a_n \to -\infty \iff (-a_n) \to +\infty$

Пример. *1)*

$$a_n = n^2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Возьмём $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq N \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

2)

$$(-n^2) \to -\infty$$

3)

$$(-1)^n n^2 - \text{б. б., но}, (-1)^n n^2 \not\to +\infty, (-1)^n n^2 \not\to -\infty$$

Задача 3.1. Док-ть, что всякая ББ п-ть является неограниченной.

Замечание. *П-ть не может одновременно стремиться к числу и к символу* $+\infty$ *(Т. к. она либо ограничена, либо неогр.), а также к бесконечностям разных знаков. Таким образом, если п-ть имеет предел в* $\mathbb{R}$*, то он единственный.*

Лемма 3.1. *Пусть* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *- ББ* $\iff$ $\{\frac{1}{a_n}\}_1^\infty$ *- БМ*

Доказательство. Это следует из $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ □

3.2 Дополнения к ранним теоремам

Теорема 3.2 (4’)**.** *Пусть* $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$*. Тогда:*

1) *Если* $a_n \to +\infty$*, то* $b_n \to +\infty$

2) *Если* $b_n \to -\infty$*, то* $a_n \to -\infty$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \colon (a_n > \frac{1}{\varepsilon})$. Тогда $b_n \geq a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq N$. Тогда $b_n \to +\infty$

2) Вытекает из (1): $(-b_n) \to +\infty, -b_n \leq -a_n, \forall n \to (-a_n) \to +\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

□

Теорема 3.3 (6’)**.** *1) Если п-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр. и неогр. сверху, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) *Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и неогр. снизу, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Доказательство. 1) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Из неогр. сверху следует, что $\exists N\colon a_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ Тогда $a_n \geq a_N > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) Аналогично (1), или с помощью сведения a_n к $(-a_n)$

□

Следствие. *Всякая монотонная п-ть имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$: *если* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$

Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убыв., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\, a_n \,\}$

Задача 3.2. Д-те, что теорема 5 (арифм. операции с пределами), остаётся верно и для $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допуст. операциями)

Пример. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}, x < 0$, *а* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

Доказательство.

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (a_n < \frac{x}{2})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (b_n > \frac{2}{|x|\,\varepsilon})$$

Возьмём $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n \geq N\colon$

$$a_n b_n < \frac{x}{2}\frac{2}{|x|\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

□

3.3 Подпоследовательности

Определение 3.4. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - п-ть и $\{n_k\}_1^\infty$ строго возрастающая п-ть нат. чисел. П-ть $\{b_k\}_1^\infty$, где $b_k = a_{n_k}, k \in \mathbb{N}$, наз-ся **подпоследовательностью** и об-ся $\{a_{n_k}\}_1^\infty$

Пример.

$$a_n = n, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n_k} = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ - } \textit{подп-ть}$$

Замечание. *1) Подп-ть $\{ a_{n_k} \}$ - это композиция строго возрастающей ф-ции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma(k) = n_k$, и самой п-ти $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*

2) Верно, что $n_k \geq k, \forall k$

$(n_1 \geq 1, n_k \geq k, n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1)$

Лемма 3.4. *Если п-ть $\{ a_n \}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подп-ть имеет тот же предел*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, а $\{ a_{n_k} \}$ - подп-ть $\{ a_n \}$

a) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N, \forall n \geq N(|a_n - a| < \varepsilon)$

   Тогда $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при всех $k \geq N$ (т. к. $n_k \geq k \geq N$)

   Сл-но, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Если $a = +\infty$, получаем результат, если заменить $|a_n - a| < \varepsilon$ на $a_n > \frac{1}{\varepsilon}(a_n < -\frac{1}{\varepsilon})$

$\square$

Теорема 3.5 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Всякая огр. посл-ть имеет сход. подпосл-ть.*

Доказательство. Пусть задана $\{a_n\}_1^\infty$ - ограниченная,

$$\Rightarrow \exists [c, d] \ni a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Определим п-ть отрезков $[c_k, d_k]$ Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$. Если определён отрезок $[c_k, d_k]$, то разделим его пополам $(y = \frac{c_k+d_k}{2})$

$$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{если } \{ k \mid a_k \in [c_k, y] \} \text{ - бесконечно} \\ [y, d_k], \text{иначе} \end{cases}$$

П-ть $\{ [c_k, d_k] \}$ стягивающаяся:

$$\forall k\colon \begin{cases} [c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k] \\ \qquad d_k - c_k = \dfrac{d-c}{2^k} \end{cases}$$

По т. Кантора $\exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty}[c_k, d_k]$, причём $c_k \to a, d_k \to a$

Определим a_{n_k}:

$$a_{n_1} = a_1, \text{если определён } a_{n_k}, \text{ то положим}$$

$$a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}], n_{k+1} \geq n_k$$

Т. к. $c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$, то по т. о зажатой п-ти (о двух полицейских), то $a_{n_k} \to a$ □

Теорема 3.6. *Если п-ть неограничена сверху (снизу), то она имеет подпосл-ть, стремящуюся к $+\infty$ ($-\infty$)*

Доказательство. Пусть дана п-ть $\{ a_n \}$ - неогр. сверху.

$$a_{n_1} > 1$$

Пусть определён эл-т a_{n_k}, определим:

$$a_{n_{k+1}} > max \{ k+1, a_1, \ldots, a_{n_k} \} \Rightarrow n_{k+1} > n_k$$

Опр-на $\{ a_{n_k} \}$. Т. к. $a_{n_k} > k, \forall k \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty$ (По теореме 4') □

Следствие. *Всякая п-ть имеет подпосл-ть, стремящуюся к некот. эл-ту $\in \overline{\mathbb{R}}$*

4 Лекция 7

4.1 Критерий Коши

Определение 4.1. Посл-ть $\{a_n\}_1^{\infty}$ наз-ся **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма 4.1. *Всякая фундаментальная п-ть огр-на*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_1^{\infty}$ - фундаментальна. По опр-ю:

$$\exists N \colon \forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < 1)$$

В част-ти:

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1$$

для всех $n \geq N$ $(m = N)$

Положим

$$\alpha = min(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$\beta = max(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

. Тогда:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ $\square$

Теорема 4.2 (Коши)**.** *П-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *- сходится* $\iff$ $\{a_n\}_1^\infty$ *- фундаментальна.*

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела:

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при всех $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} * 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) По предыдущей лемме, п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - ограничена $\Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштрасса (Б-В) $\{a_n\}_1^\infty$ имеет сход. подпосл-ть $\{a_{n_k}\}_1^\infty \to a$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю фундаментальности:

$$\exists N, \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Т. к. $\{a_{n_k}\} \to a \Rightarrow$

$$\exists K : \forall k \geq K(|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $M = max(N, K)$. Тогда $n_M \geq M \geq N; n_M \geq M \geq K$

Поэтому при всех $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

Замечание. *Критерий Коши позволяет доказывать существование предела,* ***без явного нахождения его значения***

Кроме того, критерий позволяет ***оценить скорость сходимости к пределу*** *(перейдём к пределу по m в определении фунд-ти):*

$$|a_n - a| \le \varepsilon, \textit{при всех } n \ge N$$

Задача 4.1. Покажите, что если всякая фундаментальная посл-ть сх-ся (сходится), то выполняется аксиома непрерывности. А именно:

Пусть $\mathbb{F}$ - упоряд. поле, на котором выполняется аксиома Архимеда

4.2 Частичные пределы

Определение 4.2. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся частичным пределом числовой посл-ти $\{a_n\}_1^\infty$, если $\exists \{ a_{n_k} \}$ - подпосл-ть $\{ a_n \}$: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$L\{ a_n \} - \text{мн-во частичных пределов } \{ a_n \}$$

Пример. ± 1 - *частичные пределы* $a_n = (-1)^n$

$$a_{2k} \to 1, a_{2k-1} \to -1$$

Пусть задана числовая посл-ть $\{ a_n \}$

Положим

$$M_n = \sup_{k\ge n}\{ a_k \}$$

$$m_n = \inf_{k\ge n}\{ a_k \}$$

Пусть $\{ a_n \}$ огр. сверху. Тогда все $M_n \in \mathbb{R}$

Поскольку при переходе к подмн-ву sup не увеличивается, то $\{ M_n \}$ нестрого убывает

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} M_n$

Пусть $\{ a_n \}$ не огр. сверху. Тогда все $M_n = +\inf$

Положим $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$

Аналогично для $\{ m_n \}$ (Огр./Неогр. снизу).

Итак, посл-ти $\{ m_n \}$ и $\{ M_n \}$ имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

<u>Определение</u> 4.3. Величина $\lim_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} \{ a_k \}$ - **верхний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

Величина $\lim_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} \{ a_k \}$ - **нижний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

<u>Замечание</u>. *Т. к.* $m_n \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$*, тогда:*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

<u>Задача</u> 4.2.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} (-a_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

<u>Теорема</u> 4.3. *Верхний (нижний) предел - наибольший (наименьший) из част. пределов посл-ти.*

Доказательство.

$$M = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, m = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$$

Нужно показать, что M, m - это ч. п. $\{ a_n \}$ и любой ч. п. лежит между ними.

1) Покажем, что есть подп-ть $\{ a_n \}$, сх-ся к M:

   I. $M \in \mathbb{R}$. Имеем

   $$M = \inf \{ M_n \}$$

   По опр-ю $\sup, \exists n_1 \colon (M - 1 < a_{n_1})$

   $$M_{n_1+1} = \sup_{k\geq n_1+1} \{ a_k \} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 \colon (M - \frac{1}{2} < a_{n_2})$$

   и т. д.
   Таким образом, по индукции, будет построена подп-ть $\{ a_{n_k} \}$, т. ч.

   $$M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$$

   Имеем:

   $$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_k}$$

   Края нер-ва сх-ся к $M \Rightarrow$ по т. о зажатой посл-ти, $a_{n_k} \to M$

II. $M = +\infty$, тогда $\{ a_n \}$ неогр. сверху $\Rightarrow$ (по Теореме 8') она имеет под-пть, сх-ся к $+\infty$

III. $M = -\infty$. Т. к. $a_n \le M_n, \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) Для m - док-во аналогично, или сводиться к M по задаче prot-pred

3) Пусть $\{ a_{n_k} \}, a_{n_k} \to a$. Тогда:

$$m_{n_k} \le a_{n_k} \le M_{n_k}, \forall k \Rightarrow m \le a \le M (\text{част. пределы})$$

$\square$

Следствие. $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ *(в* $\overline{\mathbb{R}}$*)* $\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
В этом случае все три предела равны.

Доказательство. $\Rightarrow$) По лемме 4, любая подпосл-ть имеет предел $a \Rightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$\Leftarrow$)

$$m_n \le a_n \le M_n$$

для всех $n \Rightarrow a_n \to a$ (Края $\to a$)

$\square$

Лемма 4.4. *Для* $c \in \mathbb{R}$ *верно:*

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \ge N (a_n < c + \varepsilon) \ (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \ge N (a_n > c - \varepsilon) \ (2) \end{cases}$$

$$c = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \ge N (a_n < c + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \ge N (a_n > c - \varepsilon) \end{cases}$$

Доказательство. Докажем, для верх предела:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n, M_n = \sup_{k \ge n} \{ a_k \}$$

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N (M_N < c + \varepsilon)$$

$$(2) \iff \forall \varepsilon > 0, \forall N (M_n > c - \varepsilon)$$

Напомним, что $\{ M_n \}$ - нестрого убыв.

Тогда $(1) \wedge (2) \iff c = \lim_{n\to\infty} M_n$ $(= \inf \{ M_n \})$ $\square$

5 Лекция 11

5.1 Непрерывность ф-ции в точке

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Ф-ция f наз-ся непрерывной в точке a, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Иначе:

$$x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

Замечание. *Из опр-я следует, что ф-ция не меняет значение* ***резко***

Св-во (отделимость): если $f : E \to \mathbb{R}$ - непр-на в точке a и $f(a) > 0 (< 0)$, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(x) > \frac{f(a)}{2}(< \frac{f(a)}{2}))$$

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$. По непр-ти ф-ции в a, положим $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}) \Rightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}$$

□

Замечание. *В определении непр-ти ф-ции точка $a \in E$ - области определения, но* ***не обязана*** *быть предельной точкой E.*

Определение 5.2. Точка, принадлежащая мн-ву, но не явл-ся его предельной точкой наз-ся **изолированной**.

Пример.

$$E = (1, 2] \cup \{ 5 \}$$

Тогда точка 5 - изолированная точка мн-ва E

Теорема 5.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}, a \in E$. Следующие утв-я эквив-ны:*

1) *f непр-на в a*

2) $\forall \{ x_n \}, x_n \in E(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$

3) Либо a - изолированная точка мн-ва E, либо a - предельная точка мн-ва E и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Рассм. $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in B_\delta(a) \cap E)$, а значит,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Сл-но, $f(x_n) \to f(a)$

$2 \Rightarrow 3)$ Если a - предельная точка мн-ва E, то $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, по опр-ю предела по Гейне.

В противном случае, a - изолированная точка области определения.

$3 \Rightarrow 1)$ Если a - изолированная точка мн-ва E, то $\exists \delta_0 > 0\colon (B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\})$. Тогда определение непр-ти выполняется для $\delta = \delta_0$.

Если a - предельная точка мн-ва E, то по опр-ю предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

При $x = a$, следствие выше выпол-ся (очевидно). Это означает, что f непр-на в a.

$\square$

Следствие. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ - непр-ны в $a \in E$, то в этой точке непр-ны ф-ции:*

1) $f \pm g$

2) $f \cdot g$

3) При доп. усл-ии $g \neq 0$: $\frac{f}{g}$

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Т. к. f, g - непр-ны в a, то $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$. Тогда по св-вам предела п-ти имеем:

1) $f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a)$

2) $f(x_n)g(x_n) \to f(a)g(a)$

3) $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$

По Теореме (5.1), эти ф-ции непрерывны в a. □

Пример.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0, (a_i \in \mathbb{R})$$

Эта ф-ция непр-на в каждой точке $a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$x \mapsto x$$

$$x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$$

Ф-ции выше непрерывны. Тогда по сл-ию (5.1) в a непр-ны:

$$x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}$$

А значит P непр-на в a. □

Теорема 5.2 (Непрерывность композиции)**.** *Если ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в a, $f(E) \subset D, g : D \to \mathbb{R}$ - непр-на в $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в т. a.*

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Тогда: $f(x_n) \to f(a)$ по непр-ти f в a. Кроме того:

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)) \text{ - по непр-ти } g \text{ в } f(a) \iff$$

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$$

По Теореме 5.1, ф-ция $g \circ f$ непр-на в т. a. □

Определение 5.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. Если $f|_{[a,+\infty)}$ непр-но в a, то говорят, что f непр-на справа в т. a.

Аналогично: $f|_{(-\infty,a]}$ непр-на в a, то f непр-на слева в a.

Замечание. *Если a - предел. точка мн-ва $[a,+\infty) \cap E$, то f непр. справа в т. $a \iff f(a+0) = f(a)$*

Определение 5.4. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$.
Если f не явл. непрерывной в т. a, то говорят, что f разрывна (имеет разрыв) в т. a, а саму т. a наз-ют точкой разрыва f.
Классифицируем точки разрыва:

1) Пусть ф-ция f определена в некот. проколотой окр-ти т. a. Если сущ-ют конечные односторонние пределы $f(a-0), f(a+0)$ и среди трёх чисел $f(a+0), f(a-0), f(a)$ не все равны, то т. a наз-ся точкой разрыва I рода ф-ции f

2) В противном случае т. a наз-ся точкой разрыва II рода ф-ции f

Если a - т. разрыва I рода и $f(a+0) = f(a-0)$, то точка a наз-ся точкой устранимого разрыва.

Пример. *1)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign(x) := \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$$f(0+0) = 1, f(0-0) = -1$$

Т. $x = 0$ - т. разрыва I рода.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign^2(x)$$

Тогда $x = 0$ - т. устранимого разрыва.

3)

$$f : \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$f(0+0) = +\infty, f(0-0) = -\infty \Rightarrow x = 0$ - *точка разрыва II рода.*

4)
$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Покажем, что D - разрывна в каждой точке.

Доказательство. a) $a \in \mathbb{Q}$:

$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, a_n > a, D(x_n) = 1 \to 1$$

$$x'_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 0 \to 0$$

Получаем, что правого предела в a не сущ-ет

b) $a \notin \mathbb{Q}$:
$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, x_n > a, D(x_n) = 0 \to 0$$
$$x'_n = \frac{[na] + 1}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 1 \to 1$$

Сл-но, не сущ-ет $D(a + 0)$.

Таким образом, a - т. разрыва II рода. □

5.2 Непрерывность ф-ции на мн-ве

Определение 5.5. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся непрерывной (на E), если f непр-на на каждой точке $a \in E$

Если $D \subset E$, то f непр-на на D, если $f|_D$ непр-на.

Пример. $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ *- рациональная ф-ция.*
Она непр-на на $E = \{ s \colon Q(x) \neq 0 \}$*. (по сл-ию 5.1)*

Замечание. *Чарльз. Лью курс по мат. анализу "Скелет мат. анализа"*

Лемма 5.3. *Если ф-ция f непр-на на $[a, b]$, то f огр. на $[a, b]$*

Доказательство. Предположим, что f не огр-на. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b] \colon (|f(x_n)| > n)$$

По инд-ции опр-на $\{ x_n \} \subset [a,b]$. По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в:

$$a \leq x_{n_k} \leq b$$

получаем, что $x_0 \in [a,b]$. По непр-ти $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$!!! Но ведь,

$$(|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \to +\infty)$$

$\square$

<u>Теорема</u> 5.4 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Если f - непр-на на $[a,b]$, то $\exists x_m, x_M \in [a,b]$, в кот. вып-но:*

$$f(x_M) = \sup_{[a,b]} f(x), f(x_m) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

Доказательство. По лемме (5.3) мн-во значений $f([a,b])$ ограничено, поэтому опр-ны числа $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.
По опр-ю sup, $\forall n \in N, \exists x_n \in [a,b](M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M)$. По инд-ции опр-на п-ть $\{ x_n \} \subset [a,b]$, причём $f(x_n) \to M$.
По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}$:

$$x_{n_k} \to x_M \in [a,b]$$

Тогда по непр-ти:

$$f(x_{n_k}) \to f(x_M)$$

С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M \Rightarrow f(x_M) = M$ в силу ед-ти предела.
Случай inf док-ся аналогично. $\square$

<u>Замечание</u>. *Утв-я, аналогичные лемме* (5.3) *и теореме* 5.4 *неверны для интервалов.*

<u>Пример</u>. *$f(x) = x$. f непр-на на $(0,1)$. f - огр-на, но $\nexists$ минимального и максимального значения.*

$$\sup_{(0,1)} f(x) = 1 \neq f(x) \forall x \in (0,1)$$

6 Лекция 12

Лемма 6.1. *Если f - непр-на на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то*

$$\exists c \in [a,b] \colon f(c) = 0$$

Доказательство. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. В противном случае заменим f на $(-f)$.
Построим п-ть отр-ов $\{\,[a_n, b_n]\,\}$ по индукции:

$$[a_1, b_1] \colon = [a,b] \text{ и если } [a_k, b_k] \text{ - построен, положим}$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq 0 \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0 \end{cases}$$

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть вложенных отр-ов $\{\,[a_n, b_n]\,\}$, т. ч.:

$$f(a_n) \leq 0 f(b_n) > 0$$

По т. Кантора о вложенных отр-ах, сущ-ет $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём $a_n \to c$ и $b_n \to c$. По непр-ти в точке c, переходя в нер-ве к пределу:

$$f(a_n) \leq 0 < f(b_n) \Rightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

□

Определение 6.1. Будем говорить, что число s лежит строго между числа α и β, если $max(a,b) > s > min(a,b)$.

Теорема 6.2 (Больцано-Коши о промежуточных значениях)**.** *Если ф-ция f непр-на на $[a,b]$ и число s лежит строго между $f(a)$ и $f(b)$, то:*

$$\exists c \in (a,b) \colon f(c) = s$$

Доказательство. Рассм. $g = f - s$. Тогда g непр-на на $[a,b]$. Сл-но, $g(a)g(b) < 0$. Тогда по лемме (6.1)

$$\exists c \in (a,b) \colon g(c) = 0 \iff f(c) = s$$

□

Задача 6.1. Приведите пример разрывной ф-ции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, т. ч. $\forall [a,b] \subset [0,1]$, f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$

Напомним, что $I \subset \mathbb{R}$ - промежуток $\iff$

$$\forall x, y \in I([x, y] \subset I)$$

Следствие. *Если ф-ция f непр-на на промеж. I, то $f(I)$ - промежуток.*

Доказательство. Выберем $y_1, y_2 \in f(I)$ $(y_1 < y_2) \Rightarrow$

$$\exists x_1, x_2 \in I\colon (f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2)$$

Если $y_1 < y < y_2$, то, по теореме (6.2) $\exists x \in (x_1, x_2)\colon f(x) = y$. Т. к. I - промежуток, $x_1, x_2 \in I$, то $x \in I$, а значит $y \in f(I)$, т. е. $f(I)$ - промежуток. □

Задача 6.2. Док-те, что если f - непр-на на $[a, b]$, то $f([a, b])$ - отрезок

Лемма 6.3. *Пусть f монотонна на пром-ке I. Если $f(I)$ - это пром-к, то f - непр-на на I.*

Доказательство.

Пусть f нестрого возрастает на I. Если f разрывна в точке $c \in I$. То $f(c-0) \le f(c) \le f(c+0)$ и хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ непуст.

(Если c - концевая точка I, то сущ-ет только один из пределов, для кот. и проводим рассуждение.)
Пусть $Y = (f(c), f(c+0)) \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall t \in I, t \le c(f(t) \le f(c))$$

Также

$$\forall t \in I, t > c(f(t) \ge \inf_{(c, \sup I)} f(x) = f(c+0))$$

Сл-но, $f(I)$ не явл. пром-ом. □

Теорема 6.4 (об обратной ф-ции)**.** *Пусть f непр-на и строго монотонна на пром. I, тогда:*

1) *$f(I)$ - пром-ок*

2) $f : I \to f(I)$ *- биекция*

3) $f^{-1} : f(I) \to I$ *- непр-на и строго монотонна на* $f(I)$

Доказательство. По следствию (6), $Y = f(I)$ явл-ся пром-ом. Ф-ция f инъективна в силу строгой монотонности.

Сл-но, $f : I \to Y$ - биекция, и сущ-ют $f^{-1} : Y \to I$

Б. О. О. пусть f строго возрастает на I

Пусть $y_1, y_2 \in Y, y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I \colon f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

Если $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - в силу возрастания $f \Rightarrow y_1 \geq y_2$!!!

Таким образом, если $y_1, y_2 \in Y(y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$ - т. е. f^{-1} строго возрастает на Y.

$f^{-1}(Y) = I$ - пром-к $\Rightarrow f^{-1}$ - непр-на на Y □

Пример. *Для* $\forall x \geq 0, n \in \mathbb{N} \exists! y \geq 0 \colon y^n = x$. *Пишут, что:*

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Кроме того, $f(x) \colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ *- непр-на и строго монотонна.*

Доказательство. Рассм. ф-цию $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}, g(y) = y^n$

Ф-ция g - непр-на и строго возрастает на $[0; +\infty)$, причём:

$$g(0) = 0, \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$$

По теореме (6.4) $\exists f = g^{-1} \colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

□

6.1 Счётные и несчётные мн-ва

Определение 6.2. Мн-во A наз-ся счётным если $\exists f : \mathbb{N} \to A$ - биекция.

Замечание.

$$A = \{ a_1, a_2, \dots \}$$

$$\forall i, j (i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$$

Пример.

$$\mathbb{Z} \text{ - счётно}$$

$$\dots\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ - нечётно} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ - чётно} \end{cases}$$

Лемма 6.5. *Всякое бесконечное мн-во $A \subset \mathbb{N}$ - счётно.*

Доказательство. Пусть $n_1 = min(A)$. Если $n_1 \dots n_k$ - определена, то по инд-ции определим:

$$n_{k+1} = min(A \setminus \{ n_1 \dots n_k \})$$

Поскольку при переходе к подмн-ву минимум не уменьшается и $n_{k+1} \notin \{ n_1, \dots n_k \}$, то $n_{k+1} > n_k$

Предположим, что $\exists m \in A$ и $m \neq n_k, \forall k$. Тогда по инд-ции

$$n_k < m, \forall k \Rightarrow m > n_m \geq m!!!$$

Сл-но, $\sigma : \mathbb{N} \to A, \sigma(k) = n_k$ - строго возр. биекция. $\square$

Определение 6.3. Мн-во не более чем счётно, если оно конечно или счётно.

Следствие. *Всякое подмн-во счётного мн-ва не более чем счётно.*

Доказательство. Рассм. конечное подмн-ва A счётного мн-ва X. $g : X \to \mathbb{N}$ - биекция $\Rightarrow$

$$g \colon A \to g(A) \text{ - биекция мн-ва } A \text{ и } g(A) \subset \mathbb{N}$$

$\square$

Теорема 6.6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - *счётно*

Доказательство. Идея: Сделаем таблицу и рассматриваем её подиагонально, затем нумеруем эл-ты в диагоналях.

(k,m)	1	2	3	
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$\ldots$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$\ldots$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$\ldots$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$\ldots$

$$p \in \mathbb{N}$$
$$M_p = \{\, (k,m)\colon 1 \le m \le p, k = p+1-m \,\}$$
$$g(p) = 1 + 2 + \ldots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$$
$$N_p = \{\, n\colon g(p)+1 \le n \le g(p)+p = g(p+1) \,\}$$
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(k,m) = g(k+m-1) + m$$

$\square$

Следствие. *Мн-во* $\mathbb{Q}$ *- счётно.*

Доказательство. Любое рац. число можно записать в виде несокр. дроби $\frac{p}{q}$, т. е.:

$$f_1\colon r \to (p,q) \text{ - инъекция}$$
$$\mathbb{Q} \to \underset{(p,q)}{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, F = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \text{ - инъекция}$$
$$\Rightarrow F(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ - не более чем счётно и беск} \Rightarrow \text{счётно}$$

$\square$

Теорема 6.7. $\mathbb{R}$ *несчётно*

Доказательство. Пред-м, что $\mathbb{R} = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$
Рассм. $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Разобъём $[a,b]$ на три отр-ка и обозн. $[a_1, b_1]$ тот из ни, который не сод-т x_1. По инд-ции построим п-ть влож. отр-ов $\{\, [a_k, b_k] \,\}$, не содержащую $x_k, \forall k$. Однако сущ-ет точка, общая для всех отр-ов $\Rightarrow$ $\forall n x \in [a,b], x_n \notin x_n \Rightarrow \forall n\colon x_n \neq x$ $\square$