Содержание

1 Некот. обозначения

- $a < b \iff a \leq b \land a \neq b$
- $a \geq b \iff b \leq a$
- $a > b \iff b < a$
- $a - b = a + (-b)$
- $\frac{a}{b} = a * b^{-1}(b \neq 0)$

2 Чем занимаемся дальше

Все дальнейшее сводим к аксиомам:

Пример. *1.* $\forall a \in R\colon a * 0 = 0$

Доказательство.

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0| - a \cdot 0.$$

$$a * 0 + (-a * 0) = a * 0 + (a * 0 + (-a * 0)).$$

$$0 = a * 0 + 0 = a * 0.$$

□

2. $(-1) * a + 1 * a = ((-1) + 1) * a = 0 * a = 0$

Пример. *1.* $\forall a, b \in R(a \leq b \Rightarrow -b \leq -a)$

$$-b = a - a - b \leq b - a - b = -a.$$

2. $\forall a \in R \backslash \{0\}\colon (a^2 > 0)$

Доказательство. a) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

b) $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow -(-a^2) = a^2$

□

__Задача__ **2.1.** $P = \{x \in R\colon 0 < x\}$

Док-те, что :

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y, x * y \in P$

2) $\forall x \in R\backslash\{0\}(x \in P \vee -x \in P)$

__Определение__ **2.1.**

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

__Пример.__ *1. Если $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 0$, то ($|a| \leq M \iff -M \leq a \leq M$)*

Доказательство. $|a| \leq M \Rightarrow -|a| \geq -M$

a) $a \geq 0, -M \leq 0 \leq a = |a| \leq M$

b) $a < 0, -M \leq -|a| = a < 0 \leq M$

□

2. $\forall a, b \in R(|a + b| \leq |a| + |b|)$

Доказательство.

$$\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b|.$$

$$\Rightarrow \pm(a + b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

□

3 Множество $\mathbb{N}$

__Определение__ **3.1.** Мн-во $S \subset \mathbb{R}$ наз-ся **индуктивным**, если $1 \in S$ и $(x \in S \Rightarrow x + 1 \in S)$

__Замечание.__ $\mathbb{N}$ - *пересечение всех индуктивных мн-в.*

На определении $\mathbb{N}$ основан **принцип мат. индукции.**

Пусть $P(n), n \in \mathbb{N}$. Если $P(1)$ - истина и ($\forall n(P(n)$ - ист. $\Rightarrow P(n + 1)$ - ист.)). То $P(n)$ - истина для $\forall n \in N$

$S = \{n \in \mathbb{N}\colon P(n)$ - истина$\} \subset \mathbb{N}$ - индуктивно. $\Rightarrow S = \mathbb{N}$

Замечание. *Если* $x, y \in \mathbb{N}, x < y$, *то* $y - x = n \in N$, *в частности,* $y = x + n \geq x + 1$

Теорема 3.1. *Пусть* $A \subset N$ *- непустое, тогда* $\exists m = min(A)(m \in A\colon \forall n \in A(m \leq n))$

Доказательство.

Предположим, что в A нет мин. эл-та.
Рассм. $M = \{x \in \mathbb{N}\colon \forall n \in A(x < n)\}$
$1 \in M$ $(1 \notin A)$
Пусть $x \in M$. Предпл., что $x + 1 \notin M$:
$x + 1 \notin M \iff \exists m \in A\colon (x + 1 \geq m)$
По опр-ю $x \in M \Rightarrow x < m \Rightarrow x + 1 \leq m \Rightarrow m = min(A)$!!!
Итак $1 \in M(x \in M \Rightarrow x + 1 \in M) \Rightarrow M \subset \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$!!! $\square$

4 Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}\colon m \in \mathbb{Z} \wedge n \in N\}$$

Пример (Применение аксиомы непрерывности).

$$A = \{a \in \mathbb{R}\colon a > 0 \wedge a^2 < 2\} \ni 1.$$
$$B = \{b \in \mathbb{R}\colon b > 0 \wedge b^2 > 2\} \ni 2.$$

Пусть $a \in A, b \in B$

$$0 < b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \Rightarrow 0 < b - a \Rightarrow a < b.$$

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A, b \in B\colon (a \leq c \leq b)$
В част-ти $1 < c < 2$. *Покажем, что* $c^2 = 2$
Предпл. что $c^2 < 2 \iff c \in A$. *Пусть* $\varepsilon \in (0; 1)$ *; тогда:*

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon(2c + \varepsilon) < c^2 + 5\varepsilon.$$
$$\varepsilon \leq \frac{2 - c^2}{5}.$$
$$(c + \varepsilon)^2 < c^2 + 5\varepsilon \leq c^2 + 2 - c^2 = 2 \Rightarrow c + \varepsilon \in A!!!.$$

Аналогичным образом, доказываем, что $c^2 > 2$ *не выполн-ся.*

$$\Rightarrow c^2 = 2$$

5 Точные грани числовых мн-в

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непусто.

Число M наз-ся **верхней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E (x \leq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным сверху**, если $\exists$ хотя бы одна верхняя грань для E.

Число M наз-ся **нижней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E (x \geq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным снизу**, если $\exists$ хотя бы одна нижняя грань для E.

Мн-во E **ограничено**, если E ограничено сверху и снизу.

Задача 5.1. Док-ть: E - огранич. $\iff \exists C > 0 \colon \forall x \in E (|x| \leq C)$

Определение 5.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непустое числовое мн-во. Наименьшая из верхних граней мн-ва E наз-ся **точной верхней гранью (супремумом)** мн-ва E ($\sup E$)

Наибольшая из нижних граней мн-ва E наз-ся **точной нижней гранью (инфимумом)** мн-ва E ($\inf E$)

Замечание. *Определение точных граней можно записать на языке нер-ств:*

$$c = \sup E \iff . \tag{1}$$

1) $\forall x \in E (x \leq c)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E (x > c - \varepsilon)$

$$b = \inf E \iff . \tag{2}$$

1) $\forall x \in E (x \geq b)$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E (x' < b + \varepsilon)$

Действ-но, 1) *в* (1) *означает, что c - верх. грань E.* 2) *в* (1) *означ, что любое $c' < c$ не явл. верх. гр. E. Сл-но, c - точная верхняя грань E. Аналогично для* (2).

Теорема 5.1 (Принцип полноты Вейерштрасса)**.** *Всякое непустое огр. сверху (снизу) мн-во имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и ограничено сверху.

Рассм. $B = \{b \in \mathbb{R} \colon b$ - верх. грань $A\}$. Тогда $B \neq \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B(a \leq b)$. По аксиоме непр-ти $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, \forall b \in B(a \leq c \leq b)$.

Из нер-ва $a \leq c \Rightarrow c$ верх. грань A

Из правого нер-ва любое $c' < c \colon c' \notin B$, т.е. c' не явл. верх. гранью A. Сл-но, $c = \sup A$. □

Теорема 5.2 (аксиома Архимеда). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$, т. ч. $na > b$*

Доказательство. Предположим, что $\forall n \colon na \leq b$. Тогда $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ огр. сверху. По теореме 5.1 $\exists c = \sup A$. Число $c - a$ не явл. верх. гранью A (т. к. $a > 0$)

Тогда $\exists n \in \mathbb{N}(na > c - a)$. Откуда:

$$na + a = (n+1)a > (c-a) + a = c$$

т. е. $(n+1)a > c$. Но $(n+1)a \in A$ (противоречие с тем, что c - верх. грань)!!! □

Следствие. *1)* $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}(n > b)$, *(a = 1)*

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < \varepsilon)$ $(\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon})$

Следствие.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! m \in \mathbb{Z}(m \leq x < m+1)(m\text{- \textit{целая часть} } x)$$

Доказательство. (∃) $x \geq 0$. Рассм. $S = \{n \in \mathbb{N} \colon n > x\}$. По аксиоме архимеда, это мн-во непусто. $\Rightarrow \exists p = min(S)$. Положим $m = p - 1$. Тогда $m \leq x$ и $m + 1 > x$

$x < 0$. По предыдущему пункту $\exists m' \in \mathbb{Z}(m' \leq -x < m' + 1)$. Положим:

$$m = \begin{cases} -m', x = -m' \\ -m' - 1, x \neq -m' \end{cases} \Rightarrow m \leq x < m + 1 \tag{3}$$

Единственность:

$$\begin{cases} m' \leq x < m' + 1 \\ m'' \leq x < m'' + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m' - m'' < 1, m' - m'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' - m'' = 0 \Rightarrow m' = m''$$

□

Пример.

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2$$

Следствие.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q}(a < r < b)$$

Доказательство.

$$\exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < b - a)$$

$$r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}.\text{Тогда } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a, r \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

□

Обозначение.

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$$

Определение 5.3. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$a^0 = 1, a^{n+1} = a^n a$$

Обозначение. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \leq n$, положим:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n$$

Если $m > n$.

Теорема 5.3 (Бином Ньютона)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1, (n + 1)! = n! * (n + 1)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- n = 1: Верно
- Предположим, что утв. верно для n:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} = \left[C_n^k + C_n^{k-1} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \iff \right]$$

$$\left[\iff \tfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \right] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

Ч. Т. Д.

□

<u>Следствие</u>. *Пусть* $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. *Тогда:*

$$(1+a)^n \geq 1 + C_n^k a^k$$

<u>Обозначение</u>.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- *расширенная числовая прямая*

Считают, что $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x < +\infty)$
Введём допус. операции $x \in \mathbb{R}$

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
- $x - (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
- $x * (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x * (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$

- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Кроме того:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

НЕДОПУСТИМЫЕ операции:

- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $0 * \pm\infty$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглащение: $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

- Если E не огр. сверху, то $\sup E = +\infty$
- Если E не огр. снизу, то $\inf E = -\infty$

Определение 5.4. $I \subset R$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

Лемма 5.4. *Любой промежуток - одно из следующих мн-в:*

- $\emptyset$
- $\mathbb{R}$
- $(a, +\infty)$

- $[a, +\infty)$
- $(-\infty, b)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$

Доказательство. I - промежуток, $I \neq \emptyset$

$$a := \inf I, b := \sup I \Rightarrow a \leq b$$

- Если $a = b$, то $I = \{a\}$
- Если $a < b$ и $a < x < b$. По опр. точных граней $\exists x', x'' \in I \colon (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$

Итак, $(a, b) \subset I \subset [a, b]$

$\square$