АлГем

Сергей Григорян

9 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 9 **3**

1.1 Пучок пл-тей 4

1.2 Связка пл-тей 5

1.3 Приложение к задачам стереометрии 5

1.3.1 Прямая в пр-ве 7

1.3.2 Формула угла между прямыми 8

1.3.3 Расстояние от точки до прямой в пр-ве 9

1.3.4 Формула расстояния между двумя скрещ. прямыми 9

2 Лекция 10 **10**

2.1 Многочлены от нескольких переменных 10

2.1.1 Основные понятия 10

2.1.2 Мономиальное упорядочение 12

2.2 Алгебраические кривые 14

3 Лекция 11 **15**

3.1 Ортогональная классификация алг. кривых II порядка . . . 15

3.2 Инвариант кривых II пор. 20

1 Лекция 9

Утверждение 1.1. *(ДСК)*

$$\pi_i\colon A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$

$$\overline{n_i} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix} \text{ - \textit{сопутствующий вектор для} } \pi_i$$

Пусть $\pi_1 \cap \pi_2 = l$

Тогда за напр. вектор прямой l можно взять вектор:

$$\overline{u} \longleftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Доказательство. a) Вектор $\overline{u} \neq \overline{o}$. По утв. из пред. лекции $\overline{n_1} \not\parallel \overline{n_2}$

$$\left[\overline{n_1} || \overline{n_2} \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \right]$$

b) Покажем, что $\overline{u} || \pi_i, \forall i = 1, 2$:

$$\begin{cases} \overline{u} || \pi_i, \forall i = 1, 2 \\ A_i u_1 + B_i u_2 + C_i u_3 \stackrel{?}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u} || l$$

$$A_i \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_i \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_i \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = V(\overline{n_i}, \overline{n_1}, \overline{n_2}) = \begin{vmatrix} A_i & A_1 & A_2 \\ B_i & B_1 & B_2 \\ C_i & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \cdot V(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_i & A_1 & A_2 \\ B_i & B_1 & B_2 \\ C_i & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ч. Т. Д.

□

Замечание. *В ПДСК:* $\overline{u} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}]$

1.1 Пучок пл-тей

<u>Определение</u> 1.1. Пучком пересекающихся пл-тей в пр-ве наз-ся мн-во пл-тей в пр-ве, проходящих через фикс. прямую.

<u>Определение</u> 1.2. Пучком параллельных пл-тей в пр-ве наз-ся мн-во всех пл-тей в пр-ве, параллельных фикс. пл-ти.

<u>Теорема</u> 1.1 (Об уравнении пучка пл-тей)**.** *Пусть две <u>различные</u> пл-ти π_i заданы своими общими ур-ями:*

$$\pi_1\colon f_1(x,y,z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2\colon f_2(x,y,z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда пучок, порождённые π_1, π_2 состоит из тех, и только тех пл-тей π, коор-ты точек кот. удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) = 0, (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0) \tag{1}$$

Доказательство. a) Пусть пл-ть π зад-ся ур-ем 1 с $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Пусть $\pi_1 \cap \pi_2 = l$.

$$f_1(l) = f_2(l) = 0$$
$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z)|_l = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \pi$ принадлежит пучку, порожд. π_1, π_2.
Пусть $\pi_1 || \pi_2 \Rightarrow \overline{n_1} || \overline{n_2}$.

Тогда $\overline{n_\pi} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2} || \overline{n_1} || \overline{n_2} \Rightarrow \pi$ принадлежит пучку, порожд. π_1, π_2

b) Пусть π принадлежит пучку, порожд. π_1 и π_2. Покажем, что π можно задать в виде 1

Пусть $X \in \pi, X \notin \pi_1, X \notin \pi_2$:

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$

$f_2(X)f_1(x,y,z) - f_1(X)f_2(x,y,z) = 0$ - ур-е π', проход. через точку X, т. к.:

$$f_2(X)f_1(X) - f_1(X)f_2(X) = 0$$

π' - также принадлежит пучку, порожд. пл-тями π_1, π_2

$$\pi \equiv \pi', \text{ т. к. } \pi' \text{ проходит через } l \text{ и содержит т. } X$$

□

1.2 Связка пл-тей

Определение 1.3. Мн-во всех пл-тей в пр-ве, проходящих через фикс. точку наз-ся **связкой пл-тей**, а сама эта фикс. точка наз-ся **центром связки**.

Как задать?

1) Задать центр связки

2) Задать 3 пл-ти в V_3, не принадл. одному пучку.

Теорема 1.2. *Пусть связка пл-тей в пр-ве задаётся набором 3-ёх пл-тей:*

$$\pi_i\colon f_i(x,y,z) = A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, i = 1,2,3$$

пересекающихся в одной точке X.

Тогда связка состоит из тех и только тех пл-тей, коор-ты точек кот-ых удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) + \gamma f_3(x,y,z) = 0, (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0)$$

Идея док-ва:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x_2 + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \quad \text{СЛУ имеет ед. решение} \overset{\text{Т. Крамера}}{\iff} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff$$

$$\iff (\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}) \neq 0 \Rightarrow (\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}) \text{ - некомпл.} \Rightarrow \text{ базис в } V_3$$

π принадлежит связке, $\overline{n} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2} + \gamma\overline{n_3}$

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) + \gamma f_3(x,y,z) = 0 \text{ верно для центра связки}$$

$\Rightarrow$ это ур-е пл-ти π

1.3 Приложение к задачам стереометрии

Задача 1.1 (Формула расстояния от точки до пл-ти (ПДСК)).

$$X \to \overline{r_X}, \pi\colon (\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}) = 0$$

1)

$$p(X,\pi) = \left|pr_{\overline{n}}(\overline{X_0X})\right| = \left|\frac{(\overline{X_0X},\overline{n})}{|\overline{n}|^2}\cdot\overline{n}\right| = \left|\frac{(\overline{X_0X},\overline{n})}{|\overline{n}|}\right| = \frac{|(\overline{r_X}-\overline{r_0},\overline{n})|}{|\overline{n}|}$$

2) Пусть $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$:

$$X \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$X_0 \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{r_X}-\overline{r_0} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{r_X}-\overline{r_0},\overline{n}) = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0) =$$

$$= Ax+By+Cz+D$$

$$\Rightarrow p(X,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Определение 1.4. Углом между пл-тями α и β наз-ся линейный угол между прямыми, кот. образ. при пересечении α и β пл-тью γ, кот. перпендикулярна прямой пересечения α,β

Задача 1.2 (Ф-ла угла между двумя пл-тями (ПДСК))**.**

$$\pi_i\colon A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \overline{n_i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix}$$

$$l_i \subset \pi_i$$

$$\cos\phi = |\cos\angle(\overline{n_1},\overline{n_2})| = \frac{|(\overline{n_1},\overline{n_2})|}{|\overline{n_1}|\,|\overline{n_2}|}$$

1.3.1 Прямая в пр-ве

Прямая задаётся точкой ($X_0 \in l$) и направл. вектором ($\overline{a}||l$).

Точка $X \in l \iff \overline{X_0X} = \overline{a}t, t \in \mathbb{R}$:

$$\iff \overline{r} - \overline{r_0} = \overline{a}t$$

$$\iff \overline{r} = \overline{r_0} + \overline{a}t \tag{2}$$

- векторное праметрическое ур-е

ДСК:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases} \tag{3}$$

- коорд-ое параметрическое ур-е

Исключаем t:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3} \tag{4}$$

- каноническое ур-е прямой

Если $\alpha_1 = 0$, то:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \text{ (пл-ть)} \\ \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3} \text{ (пл-ть)} \end{cases}$$

Утверждение 1.2. *Прямая $\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}$ лежит в пл-ти:*

$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0 \iff$$

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \mathit{(1)} \\ A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0, \mathit{(2)} \end{cases}$$

Доказательство. а) Пусть прямая $l \subset \pi \Rightarrow (1)$, т. к. $X_0 \in \pi$

$$\overline{a}||\pi \Rightarrow (2)$$

b) Пусть вып-ся усл. $(1), (2)$:

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow X_0 \in \pi \\ (2) \Rightarrow \overline{a} || \pi \end{cases} \Rightarrow l \subset \pi$$

□

Утверждение 1.3. *Прямая $l_i \colon \overline{r} = \overline{r_i} + \overline{a_i} t, i = 1, 2$ лежат в одной пл-ти $\iff$ векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_2} - \overline{r_1}$ - компланарны.*

Доказательство. a) Необходимость очевидна

b) Достаточность: пусть такие векторы компланарны. Если $\overline{a_1} || \overline{a_2} \Rightarrow l_1, l_2 \subset \pi$ (т. к. $l_1 || l_2$)

Пусть $\overline{a_1} \not|| \overline{a_2}$. Тогда построим пл-ть π, проходящую через X_1 с напр. векторами $\overline{a_1}, \overline{a_2} \Rightarrow \overline{X_1 X_2}$ лежит в $\pi \Rightarrow X_2 \in \pi \Rightarrow l_1, l_2 \subset \pi$

□

Следствие 1.1. *Прямые $\overline{r} = \overline{r_i} + \overline{a_i} t, i = 1, 2$ лежат в одной пл-ти $\iff$:*

$$(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_2} - \overline{r_1}) = \overline{o}$$

Следствие 1.2. *Прямые l_1 и l_2 скрещиваются $\iff$ $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_2} - \overline{r_1}) \neq \overline{o}$*

Следствие 1.3. *Прямые l_1 и l_2 пересекаются (по точке) $\iff$*

$$\begin{cases} (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_2} - \overline{r_1}) = 0 \\ \overline{a_1} \not|| \overline{a_2} \end{cases} \iff \begin{cases} (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{r_2} - \overline{r_1}) = 0 \\ [\overline{a_1}, \overline{a_2}] \neq \overline{o} \end{cases}$$

Следствие 1.4. *Прямые l_1, l_2 параллельны $\iff$ $\overline{a_1} || \overline{a_2}$ $\iff$ $[\overline{a_1}, \overline{a_2}] = \overline{o}$*

Следствие 1.5. *Прямые l_1 и l_2 совпадают $\iff$ $\overline{a_1} || \overline{a_2} || \overline{r_2} - \overline{r_1}$*

Определение 1.5. Углом между пересекающимися прямыми l_1, l_2 наз-ся наименьший из двух смежных углов, образ. ими

1.3.2 Формула угла между прямыми

$$l_i \colon \overline{r} = \overline{r_i} + \overline{a_i} t, i = 1, 2$$

Возьмём X_3 и проведём через неё $l'_1 || l_1, l'_2 || l_2$, тогда:

$$\cos\phi = \frac{|(\overline{a_1}, \overline{a_2})|}{|\overline{a_1}| \cdot |\overline{a_2}|}$$

1.3.3 Расстояние от точки до прямой в пр-ве

<u>Задача</u> **1.3.** Есть т. X с рад.-вектором r_X и прямая l в пр-ве $l\colon \overline{r} = \overline{r_0} + \overline{a}t$.

<u>Решение</u>.

$$p(X,1) = \frac{\left|S(\overline{X_0X}, \overline{a})\right|}{|\overline{a}|} = \frac{|[\overline{r_x} - \overline{r_0}, \overline{a}]|}{|\overline{a}|}$$

<u>Пример</u>.

$$[\overline{r}, \overline{a}] = \overline{b}, \overline{a} \neq \overline{o}, \overline{b} \perp \overline{a}$$

В кач-ве упр-я, можно найти представление этой прямой в векторном парам. виде.:

$$[\overline{r_x} - \overline{r_0}, \overline{a}] = [\overline{r_x}, \overline{a}] - \overline{b}$$

1.3.4 Формула расстояния между двумя скрещ. прямыми

<u>Задача</u> **1.4.** Дано:

$$l_i\colon \overline{r} = \overline{r_i} + \overline{a_i}t, t \in \mathbb{R}, \overline{a_1} \not\parallel \overline{a_2}$$

Всегда сущ-ют π_1, π_2:

a) $\pi_1 || \pi_2$

b) $l_1 \subset \pi_1, l_2 \subset \pi_2$

Тогда:

$p(l_1, l_2) = p(\pi_1, \pi_2) = h$ - высота параллелипипеда, построенного на векторах $\overline{X_1X_2}, \overline{a_1}, \overline{a_2}$

$$h = \frac{|V(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a_1}, \overline{a_2})|}{\left|S(\overline{a_1}, \overline{a_2})\right|} = \left|\frac{(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a_1}, \overline{a_2})}{[\overline{a_1}, \overline{a_2}]}\right|$$

<u>Замечание</u>. *Прямые в пр-ве пересекаются* $\iff$ $(\overline{r_2} - \overline{r_1}, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = 0$

2 Лекция 10

2.1 Многочлены от нескольких переменных

2.1.1 Основные понятия

<u>Определение</u> **2.1. Многочленом (Полиномом) над $\mathbb{R}$ с переменными** x, y, z наз-ся формальное алгебраическое выр-е:

$$P(x,y,z) = \sum_{i_1,i_2,i_3} a_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}$$

Эта сумма **конечна**. $a_{i_1 i_2 i_3} \in \mathbb{R}$

При этом $a_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}$ - **моном (или одночлен)**.

Все подобные слагаемые полинома приведены, то получается **несократимая запись мн-на.**:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

<u>Замечание</u>. ***Пустой многочлен*** *(мн-н без одночленов)* $\equiv 0$

Может ли мн-н от n переменных с ненулевой несокр. записью быть тождественно равным нулю?

<u>Утверждение</u> **2.1.** *Мн-н $P(x_1, \ldots, x_n)$ <u>над $\mathbb{R}$</u> с ненулевой несокр. записью $\not\equiv 0$*

Доказательство. МММ:

- База: $n = 1$

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m, a_0 \neq m$$

$$\deg P = m$$

<u>Лемма</u> **2.1.** *Мн-н $P(x), \deg P = m$, не может иметь более чем m различных корней.*

Доказательство. МММ:

- База: $m = 1$:
$$P(x) = a_0 x + a_1$$
Корень: $\alpha = -\frac{a_1}{a_0}$

- Переход: пусть для $Q(x), \deg Q = m - 1$ лемма доказана. Докажем для $P(x), \deg P = m$.
От противного: пусть P имеет более чем m различных корней (в поле $\mathbb{R}$):
$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s; s > m$$
$$\overset{\text{По т. Безу}}{\Rightarrow} P(x) = (x - \alpha_1)Q(x), \text{где } \deg Q = m - 1$$
Тогда $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$ - корни $Q(x)$. Покажем это:
$$P(\alpha_i) = (\alpha_i - \alpha_1)Q(\alpha_i)$$
$$0 = (\alpha_i - \alpha_1)Q(\alpha_i)$$
$$\alpha_i \neq \alpha_1 \Rightarrow Q(\alpha_i) = 0$$
Такми. образом, у Q имеется более чем $m - 1$ различных корней!!!
$\Rightarrow$ **Лемма доказана.**

□

Переход: пусть для мн-на $Q(x_1, \ldots, x_{n-1})$ - утв. верно. Д-ем для $P(x_1, \ldots, x_n)$:

$P(x_1, \ldots, x_n) = Q_0(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^0 + Q_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^1 + Q_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^2 + \ldots$

Тогда среди множителей $Q_0, \ldots, Q_i, \ldots$ тоже найдётся мн-н с ненулевой несокр. записью. Пусть этот мн-н $Q_i \Rightarrow$

$$\exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \colon Q_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) \neq 0$$

Сл-но:

$P(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) = Q_0(q_1, \ldots, a_{n-1}) x_n^0 + Q_1(a_1, \ldots, a_{n-1}) x_n^1 + \ldots + Q_i(a_1, \ldots, a_n - 1) x_n^i + \ldots$

По доказанной лемме: $\exists b \in \mathbb{R} \colon P(a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \neq 0$ □

Утверждение 2.2. *Для всякого мн-на P, отличного от нуля, его несокр. запись единственна.*

Доказательство. Пусть у мн-на есть две несокр. записи:

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

$$P(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} b_{i_1 i_2 \ldots i_n} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

Тогда:

$$\sum (a_{i_1 i_2 \ldots i_n} - b_{i_1 i_2 \ldots i_n}) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i} \equiv 0 \text{ - несокр. запись.}$$

Сл-но, по утв. 2.1, $a_{i_1 \ldots i_n} = b_{i_1 \ldots i_n}$ □

2.1.2 Мономиальное упорядочение

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ - упоряд. набор}$$

$$\alpha_i \geq 0, \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Множество таких наборов:

$$\{\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\} = \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$$

Определение 2.2. Упорядочение на мн-ве мономов (им соотв. наборов) наз-ся линейным, если

$$\forall x^\alpha, x^\beta, \text{ вып-ся одно из условий: } x^\alpha < x^b \vee x^\alpha = x^\beta \vee x^\alpha > x^\beta$$

Обозначение.

$$x^\alpha =: x_1^\alpha x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Если $x^\alpha > x^\beta$, то $\forall x^\gamma \hookrightarrow x^\alpha x^\gamma > x^\beta x^\gamma$

Определение 2.3. Мономиальным упорядочением на мн-ве мономов (или на мн-ве $\mathbb{Z}_{\geq 0}$) наз-ся такое биномиальное отношение " т. ч.:

1) " - линейно

2) Всякий раз, когда $x^\alpha > x^\beta \hookrightarrow x^\alpha x^\gamma > x^\beta x^\gamma, \forall x^\gamma$ (усл. сохранение порядка)

Пример. *Лексикографическое упорядочение (LEX - упоряд.)*

Определение 2.4. $\alpha > \beta$ если первая коор-ты, не равная 0, положительна, т. е.:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

$$\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \ldots, \alpha_n - \beta_n)$$

$$(\alpha_i - \beta_i = 0, i < k) \wedge \alpha_k - \beta_k \neq 0 \Rightarrow (\alpha > \beta \iff \alpha_k - \beta_k > 0)$$

Пример. *Градуированное лекс-ое упоряд.* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *и* $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\textit{степень набора})$$

$$\alpha \underset{grlex}{>} \beta, \ \textit{если:}$$

a) $|\alpha| > |\beta|$

b) *Если* $|\alpha| = |\beta|$, *то* $\alpha \underset{lex}{>} \beta$

Пример. $(1,3,5) \underset{grlex}{>} (3,4,0)$

Для упорядочения мн-нов будем пользоваться **градуированным лекс. упоряд.**.

Определение 2.5. Член ax^α наз-ся старшим членом мн-на $P = P(x_1, \ldots, x_n)$, если:

$$\forall x^\beta \colon x^\alpha > x^\beta, \text{ причём } ax^\alpha, bx^\beta \text{ присутствуют в } P$$

Утверждение 2.3. *Пусть P имеет старший слен ax^α. Q имеет старший член bx^β. Тогда старший член PQ это $abx^\alpha x^\beta$*

Доказательство.

$$x^\alpha > x^{\alpha'}, x^{\alpha'} \text{ входит в член } P$$

$$x^\beta > x^{\beta'}, x^{\beta'} \text{ входит в член } Q$$

$$\Rightarrow x^\alpha x^\beta > x^{\alpha'} x^{\beta'}$$

$\square$

Определение 2.6. Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ имеет старший член ax^α, тогда $\deg P = |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$

Следствие 2.1.

$$\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$$

Доказательство. Пусть $P \neq 0$ и $Q \neq 0$. Пусть ax^α - ст. член P, bx^β - ст. член Q:

$$abx^\alpha x^\beta \text{ - ст. член } PQ$$

$$\deg(PQ) = |\alpha + \beta| = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^n \beta_i = |\alpha| + |\beta| = \deg P + \deg Q$$

□

Следствие 2.2.

$$\deg(P + Q) \leq max(\deg P, \deg Q)$$

Доказательство. Среди мономов $P + Q$ нет мономов, кот. нет в P и Q □

Замечание.

$$\deg 0 = -\infty$$

2.2 Алгебраические кривые

V_2, с фикс. ДСК

Определение 2.7. **Алгебраическая кривая** в V_2 наз-ся мн-во M, коор-ты всех точек кот-ых удовл ур-ю:

$$P(x, y) = 0, \text{ где } P \text{ - мн-н } \not\equiv 0$$

Определение 2.8. **Алгебраическая п-ть** в V_3 наз-ся мн-во M:

$$P(x, y, z) = 0, P \text{ - ненулевой мн-н.}$$

Пример.

- *Порядок 1:*

$$Ax + By + C = 0 \text{ - } \textit{прямая}$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ - } \textit{пл-ть}$$

Утверждение 2.4. *Объединение и пересечение алг-их п-тей (кривых) является алг-ой п-тью (кривой).*

Доказательство. M, N - алг-ие п-ти

$$M\colon P(x,y,z)=0$$
$$N\colon Q(x,y,z)=0$$
$$M\cup N\colon P(x,y,z)\cdot Q(x,y,z)=0$$
$$M\cap N\colon P^2(x,y,z)+Q^2(x,y,z)=0$$

$\square$

Задача 2.1. Д-ть, что если M - алг-я п-ть в V_3, а π - пл-ть : $M\cap\pi\neq\emptyset$, то $M\cap\pi$ - алг-я кривая в пл-ти π.

Решение. *Выбрать* $(O,\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})\colon(\overline{e_1},\overline{e_2})$ *- напр. векторы пл-ти* π *и далее очев.*

3 Лекция 11

3.1 Ортогональная классификация алг. кривых II порядка

Определение 3.1. Алг. кривой (п-тью) наз-ся мн-во всех точек V_2 (V_3), удовл. ур-ию:

$$P(x,y)=0(P(x,y,z)=0)$$

Определение 3.2. Наименьшая из степеней мн-ов, задающих кривую (пов-ть) наз-ся её **порядком**.

Утверждение 3.1. *Порядок алг. кривой (п-ти) не зависит от выбора ДСК.*

Доказательство. $(O,\overline{e_1},\overline{e_2})$ и $(O',\overline{e_1'},\overline{e_2'})$

$$S=S_{G\to G'}\iff G'=GS$$
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix},O'\underset{(O,G)}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$
$$\Gamma\colon P(x,y)=0\mapsto Q(x',y')=0$$

пор. $P(x,y)\geq$ пор. $Q(x',y')$

<u>Замечание</u>. *Каждый моном мн-на Q получается из соотв. монома мн-на P*

В то же время $\exists$ обратная замена коор-т:

$$\alpha = S\alpha' + \gamma$$

$$\alpha - \gamma = S\alpha'$$

$$\alpha' = S^{-1}(\alpha - \gamma) = S^{-1}\alpha - S^{-1}\gamma$$

пор. $Q(x', y') \geq$ пор. $P(x, y)$ $\square$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \qquad (5)$$

Б. О. О. система коор-т - ПДСК. Будем упрощать, переходя к новой ПДСК (O', G')

I) Можно избавиться от слагаемого $2Bxy$ подходящим поворотом системы коор-т.

$$G' = GS = G\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}$$

После перехода в новую ПДСК:

$$A(x'\cos\phi - y'\sin\phi)^2 + 2B(x'\cos\phi - y'\sin\phi)(x'\sin\phi + y'\cos\phi) + C(x'\sin\phi + y'\cos\phi)^2 + \ldots =$$

$$= A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$$

$$2B' = -2A\sin\phi\cos\phi + 2B(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + 2C\sin\phi\cos\phi = (C - A)\sin 2\phi + 2B\cos 2\phi$$

a) Пусть $A \neq C$:

$$B' = 0 \iff (C - A)\operatorname{tg} 2\phi + 2B = 0 \iff \operatorname{tg} 2\phi = \frac{2B}{A - C}$$

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2\operatorname{tg}\phi}{1 - \operatorname{tg}^2\phi}$$

b) Пусть $A = C$:

$$B' = 0 \iff \cos 2\phi = 0$$

Можем взять $\phi = \frac{\pi}{4}$

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{6}$$

II)

<u>Лемма</u> 3.1. *Если хотя бы один из коэф-ов при квадратах коор-т (т. е. A' или C') - ненулевой, то подходящим параллельным переносом начала коор-т вдоль соотв. оси можно избавиться от линейного члена по соотв. коор-те. [Если $A' \neq 0$, то можно избавиться от члена $2D'x'$; $C' \neq 0 \to 2E'y'$]*

Доказательство. Пусть $A' \neq 0$:

$$A'(x'^2 + \frac{2D'}{A'}x' + \frac{D'}{A'}) + C'y'^2 + 2E'y' + F' - \frac{(D')^2}{A'} = 0$$

Замена коор-т:

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{D'}{A'} \\ y'' = y' \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'x''^2 + C'y'^2 + 2E'y' + F'' = 0$$

Применение леммы никак не меняет коэф-ти квадратичной части ур-я. □

Получили:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{7}$$

3 случая:

1) $AC > 0$ - эллиптический тип кривых (E)
2) $AC < 0$ - гиперболический тип (H)
3) $A = 0$ или $C = 0$ - параболлический тип (P)

E) Эллиптический случай: $AC > 0$: применяя лемму приведём ур-е к виду:

$$Ax^2 + Cy^2 = -F \tag{8}$$

При необходимости домножаем ур-е (8) на (-1), далее считаем, что $A > 0, C > 0$
Пусть $F' \neq 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1, \ (1) \\ -1, \ (2) \\ 0, \ (3) \end{cases}$$

Где $a^2 = \frac{F}{A}, b^2 = -\frac{F}{C}$. В ур-ях (1)-(3) м. считать, что $a \geq b > 0$. Иначе, если $a < b$, то применим $R(\frac{\pi}{2})$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{X^2}{b^2} + \frac{Y^2}{a^2}, b > a$$

Определение 3.3. Ур-ие (1) наз-ся каноническим ур-ем эллипса, а соотв. кривая - эллипс.

Определение 3.4. Ур-ие (2) наз-ся каноническим ур-ем мнимого эллипса, а кривая - мнимый эллипс.

Определение 3.5. Ур-ие (3) наз-ся канонический ур-ем пары пересекающихся мнимых прямых, а кривая - пара пересекающихся мнимых прямых.

H) Гиперболический случай: $AC < 0$:
Применяя лемму, получим:

$$A'x^2 + C'y^2 = -F''$$

1) $F'' \neq 0$. При необходимости , применяя поворот на $R(\frac{\pi}{2})$, получим:

$$\text{знак}(A') = \text{знак}(-F'')$$

$$\text{знак}(C') = -\text{знак}(F'') = \text{знак}(F'')$$

Разделим на $(-F'')$:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

$$a^2 = -\frac{F''}{A'} > 0, b^2 = \frac{F''}{C'} > 0$$

$a \vee b$ не имеет значения.

Определение 3.6. Ур-ие 9 наз-ся канон. ур-ем гиперболы, а кривая - гипербола.

2) $F'' = Q$:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0 \tag{10}$$

Определение 3.7. Ур-ие 10 наз-ся ур-ем пары действительных прямых, а кривая - пара действительных прямых.

P) $A' = 0$ либо $C' = 0$. При необходимости применяя $R(\frac{\pi}{2})$, можно считать, что $A' = 0$. Применяя лемму, аннулируем линейную часть:

$$C'y'^2 + 2D'x' + F' = 0$$

1) Пусть $D' \neq 0$:

$$C'y'^2 + 2D'(x' + \frac{F'}{2D'}) = 0$$

Замена:

$$\begin{cases} x' + \frac{F''}{2D''} = x* \\ y* = y' \end{cases}$$

$$C'y*^2 + 2D'x* = 0$$

$$y*^2 = 2px^*, p = -\frac{D'}{C'}$$

Замечание. *Параметр p м. считать полож. $p > 0$. Иначе применим поворот $R(\pi)$:*

$$\begin{cases} X* = -X \\ Y* = -y \end{cases}$$

$$y*^2 = 2px \tag{11}$$

Определение 3.8. Ур-е (11) наз-ся канон. ур-ем параболы.

2) Пусть $D = 0$:

$$y'^2 = \begin{cases} a^2, \ (7) \\ -a^2, \ (8) \\ 0, \ (9) \end{cases}$$

Определение 3.9. Ур-ем (7) наз-ся кан. ур-е пары действ. параллельных прямых

Определение 3.10. Ур-ем (8) наз-ся кан. ур-е пары мнимых. параллельных прямых

Определение 3.11. …пара действ. совпад. прямых.

Замечание. *ПДСК $\to$ ПДСК - и все указ. преобразования сохр. ориент. пл-ти.*

Теорема 3.2. *Всякую кривую второго порядка можно привести к одному из 9 канон. видов.*

3.2 Инвариант кривых II пор.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Определение 3.12. Инвариантом ур-я кривой, наз-ся непостоянная ф-ция от её коэф-ов, которая не меняется при переходе от ПДСК к ПДСК.

Теорема 3.3. *Следующие 3 ф-ции являются инвариантами кривой:*

$$\triangle = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, \delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}, I = A + C$$

Доказательство. Запишем ур-е в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, (z = 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & \alpha \\ \sin\phi & \cos\phi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

В новой ПДСК:

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & \alpha \\ \sin\phi & \cos\phi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} |_{z'=1} = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & \alpha \\ \sin\phi & \cos\beta & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\triangle' = det \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \end{pmatrix} \triangle \cdot det \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & \alpha \\ \sin\phi & \cos\phi & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \triangle$$

$$\delta' = detR(-\phi)\delta \cdot detR(\phi) \Rightarrow \delta' = \delta$$

Определение 3.13. След квадратной матрицы trA - сумма чисел, стоящих на главной диагонали.

Замечание.

$$tr(AB) = tr(BA)$$

$$I' = tr(R(-\phi)\delta R(\phi)) = tr(\delta \cdot R(\phi)R(-\phi)) = tr(\delta) = I \qquad \square$$