Матан

Сергей Григорян

22 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 22

Следствие. *Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на $\operatorname{int} I$.*

1) *Ф-ция f выпукла вниз на $I \iff f''(x) \geq 0, x \in \operatorname{int} I$*

2) *Если $f''(x) > 0$ на $\operatorname{int} I$, то f строго выпукла вниз на I.*

Пример. 1) *$y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$, т. к.:*

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

2) *$y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:*

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3) *$y = x^p$ на $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$*

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{ выпукла вниз}$$

При $p \in (0, 1)$ — вогнута.

4) *$\ln(1 + x) < x$, при $x > -1, x \neq 0$:*

$$y = \ln(1+x) \text{ — строго выпукла вверх (вогнута) на } (-1, +\infty)$$

$$y = x \text{ — касат. к } x \mapsto \ln(1+x) \text{ в точке } x = 0$$

По т. **??** *получаем заявленное нер-во.*

Определение 1.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \operatorname{int} I$. Если:

1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$

2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$

3) f — непр-на в a.

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f.

Следствие. *Если ф-ция f дважды дифф-ма на $\operatorname{int} I$ и $a \in \operatorname{int} I$ — точка перегиба f, то $f''(a) = 0$:*

Доказательство. Пусть для опр-ти f выпукла вниз на $(a-\delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a+\delta), \delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a-\delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a+\delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f'. По Т. Ферма $f''(a) = 0$ □

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение"на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 1.1 (Лемма о 3-ёх хордах)**.** *Пусть ф-ция f выпукла вниз на (a, b) и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда:*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{1}$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(t-x_1)+f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1), f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \leq \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{\lambda(x)-\lambda(x_1)}{x-x_1}, \frac{\lambda(x_2)-\lambda(x)}{x_2-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

□

Задача 1.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

Следствие. *Для любой точки $x \in (a, b)$ ф-ция $\nu\colon (a, b) \backslash \{ x \} \to \mathbb{R}$,*

$$\nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

нестрого возрастает на $(a, b) \backslash \{ x \}$

Доказательство. $y, z \in (a, b) \backslash \{ x \}, y < z$ □

Теорема 1.2. *Если ф-ция f выпукла вниз на (a, b), то f непр-на на (a, b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.*

Доказательство. Зафикс. $x \in (a, b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 1, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, сущ-ют конечные $\nu(x-0) \leq \nu(x+0)$, т. е. $\exists$ конечные левая и правая производная f в точке x: $f'_-(x) \leq f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x, а значит непр-на в точке x.

Перейдём к пределу в левом нер-ве 1 при $x \to x_1 + 0$, а также в правом нер-ве 1 при $x \to x_2 - 0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возр-ет на (a, b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a, b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непр-ти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x)$, откуда:

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f$ дифф-ма в т. x_0 □

Теорема 1.3 (Нер-во Йенсена)**.** *Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I. $x_1, \ldots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\geq)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I.
ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости

- Пусть нер-во верно для n. Установим справедливость для $n+1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

$$y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n$$

Т. к. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

$$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

По предположению инд-ции:

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

$\square$

Пример. *Пусть* $x_1, \dots x_n \geq 0$*, тогда:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$
По нер-ву Йенсена:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$\square$

Пример (Нер-во Гельдера)**.** *Пусть* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ *и*

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.

$$f = x^p \text{ — выпукла вниз}$$

$$x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{q}{p}}}, \lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k x_k = \frac{a_k b_k^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{a_k b_k}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k f(x_k) = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \frac{a_k^p}{b_k^q} = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Пример (Нер-во Минковского)**.** *Пусть* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ *и* $p \geq 1$. *Тогда:*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $p = 1$ — верно. $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$:

$$(a_1+b_1)^p + \ldots + (a_n+b_n)^p = (a_1+b_1)(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + (a_n+b_n)(a_n+b_n)^{p-1} =$$

$$= a_1(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + a_n(a_n+b_n)^{p-1} + b_1(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + b_n(a_n+b_n)^{p-1} \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \ldots$$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_1^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Поделим LHS и RHS на $\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$ и получим желаемый результат.

□

2 Лекция 23

2.1 Неопределённый интеграл

Определение 2.1. Пусть ф-ция f опр-на на пром-ке I.

1) Ф-ция $F\colon I \to \mathbb{R}$ наз-ся **первообразной на** I, если $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

2) Ф-ция $F\colon I \to \mathbb{R}$ наз-ся обобщённой первообразной на I, если F непр-на на I и $F'(x) = f(x), \forall x \in I \backslash A$, причём A не более чем счётно.

Пример.

$$f = \operatorname{sign} x, I = [-1, 1]$$

По т. Дарбу, всякая производная дифференцируемой ф-ции принимает все промежуточные значиния $\Rightarrow$ f не имеет первообразной на отрезке $[-1, 1]$

*Её **обобщённая** первообразная:* $F(x) = |x|$

Теорема 2.1 (Описание класса первообразных)**.** *Если F — первообразная (обобщённая) f на I и $c \in \mathbb{R}$, то $F + c$, тоже обощённая первообразная f на I.*
Если F_1, F_2 — первообразные (обобщённые) f на I, то их разность постонна на I.

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \overset{\text{условие постоянства}}{\Rightarrow} F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$
Для обобщённых первообразных следует из дополнения к теореме 10 $(10')$ $\square$

Определение 2.2. Произвольная первообразная ф-ции f на I наз-ся неопределённым интегралом ф-ции f на I и обозначается:

$$\int f(x)dx \text{ или } \int f dx$$

Замечание. *Операция перехода от ф-ции к её неопр. интегралу наз-ся **интегрированием**.*

Замечание. *Формально dx в обозначении не несёт смысловой нагрузки, однако его использование* ***бывает весьма полезным****, если трактовать fdx как дифференциал. ($f'dx = df$)*

Замечание. *Из неудобств отметим, что в обозначении никак не фигурирует пром-к I.*

Утверждение 2.1. *Неопределённый интеграл имеет следующие св-ва:*

1) *Если $\exists \int fdx$ на I, то $\left(\int fdx\right)' = f$ на I*

2) *Если $\exists \int fdx, \int gdx$ на I, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то на I сущ-ет:*

$$\int (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int fdx + \mu \int gdx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

3) *Если u, v - дифф-мые ф-ции на I и $\exists \int vu'dx$ на I, то на I сущ-ет:*

$$\int v'udx$$

*А также верна ф-ла (**интегрирование по частям**):*

$$\int vu'dx = vu - \int v'udx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$
Или:

$$\int udv = vu - \int vdu + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

4) *Если F — первообразная f на I, ϕ дифф. на пром-ке $Y, \phi(Y) \subset I$, то сущ-ет:*

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

*для некоторого $C \in \mathbb{R}$ (**ф-ла подстановки**)*

Замечание. *Если дополнительно ϕ строго монотонна на Y, то на $\phi(Y)$*

$$t = \phi^{-1}(x)$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx + C$$

Теорема 2.2 (Таблица неопределённых интегралов)**.** *Смотри талблицу в книжке.*

Задача 2.1. Пусть f дифф-ма на I с $f' \neq 0$ на I. Пусть F — первообразная f на I. Запишите:

$$\int f^{-1}(y)dy$$

через f.

Замечание. *В отличии от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит за пределы элементарных ф-ций, наприме:*

$$\int e^{-x^2}dx$$

Замечание. *Все св-ва переносятся на обобщ. интеграл.*

3 Лекция 24

3.1 Интегралы Римана и его св-ва

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок.

Определение 3.1. Разбиение T отр-ка $[a, b]$ наз-ся конечный набор точек $\{ x_i \}_{i=0}^{n}$, т. ч. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Введём обозн-я:

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}, |T| = \max_{1 \leq i \leq n} \triangle x_i$$

j

Пусть ф-ция f опр-на на $[a, b]$ и T — разбиение $[a, b]$. Положим:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Сумма:

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$$

$$s_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

Эти суммы наз-ся верхней и нижней суммами Дарбу ф-ции f, отвеч. разбиению T

<u>Лемма</u> 3.1. *Пусть T, T' — разбиения $[a, b]$: $T \subset T'$, тогда:*

$$s_T(f) \leq s_{T'}(f) \leq S_{T'}(f) \leq S_T(f)$$

Доказательство. Пусть $T = \{\, x_i \,\}_{i=1}^{n}$. Рассм. сначала случай, когда:

$$T' = T \cup \{\, c \,\}, c \notin T$$

Сущ-ет такое k, что:

$$c \in (x_{k-1}, x_k)$$

Положим:

$$m_k' = \inf_{[x_{k-1}, c]} f(x), m_k'' = \inf_{[c, x_k]} f(x)$$

Тогда:

$$m_k'', m_k' \geq m_k$$

$$\Rightarrow s_{T'}(f) = \sum_{i-1}^{k-1} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i + m_k'(c - x_{k-1}) + m_k''(x_k - c) \geq$$

$$\geq \sum_{i-1}^{k-1} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i + m_k(\underbrace{c - x_{k-1} + x_k - c}_{\triangle x_k}) = s_T(f)$$

Аналогично док-ся правое нер-во. $\square$

<u>Лемма</u> 3.2. *Пусть $|f| \leq M$ и T' получена из T добавлением m точек, тогда:*

$$s_T' f - s_T f \leq 2Mm\,|T|$$

$$S_T f - S_{T'}(f) \leq 2Mm\,|T|$$

Доказательство. Пусть $T' = T \cup \{ c \}$, тогда:

$$S_{T'}(f) - S_T(f) = (\underbrace{m'_k - m_k}_{\leq 2M})(c - x_{k-1}) + (\underbrace{m''_k - m_k}_{\leq 2M})(x_k - c) \leq$$

$$\leq 2M(c - \underbrace{x_{k-1} + x_k}_{\leq |T|} - c) \leq 2M\,|T|$$

Общий результат получается индукцией по M. Для верхний сумм — аналогично. $\square$

Из леммы (3.1) получаем утв-е:

Следствие. *Для любых разбиений T_1, T_2 отр-ка $[a, b]$ вып-но:*

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

Доказательство. Рассм. $T = T_1 \cup T_2$, тогда по лемме (3.1):

$$s_{T_1}(f) \leq s_T(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_2}(f)$$

$\square$

Определение 3.2. Величины:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup s_T(f)$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf S_T(f)$$

Наз-ся соотв. верхними и нижними интегралами Дарбу.

Следствие. *Переходя в нер-ве следствия* 3.1 *к* inf *по всем разбиемниям T_1 при фикс T_2, и к* sup *по всем разбиениям T_2 при фикс. T_1, получаем:*

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S_T(f)$$

Определение 3.3. Пусть ф-ция f опр-на на отр-ке $[a, b]$, ф-ция f наз-ся **интегрируемой (по Риману)**, если:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \text{ — конечны}$$

Число $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b f}$ наз-ся определённым интегралом ф-ции f по $[a, b]$. Мн-во всех интегрируемых по Риману на $[a, b]$ ф-ций будем обозначать, как $\mathcal{R}$

Пример. *$f = 1$ на $[a, b] \Rightarrow$ для любых разбиений $T = \{ x_i \}_{i=0}^n$:*

$$s_T(f) = S_T(f) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b} f = b - a$$

Лемма 3.3. *Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f огр-на на $[a, b]$*

Доказательство. Пусть f не огр. сверху на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T ф-ция f не огр. сверху на $[x_{i-1}, x_i]$ для некот. i, а значит:

$$M_i = +\infty \Rightarrow \overline{\int_a^b f} = +\infty$$

Если f не огр. снизу, то $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. □

Замечание. *Ограниченность ф-ции является **необходимым, но не достаточным условием интегрируемости.***

Пример. *Ф-ция Дирихле:*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Для произвольного отр-ка $[a, b]$, имеем:

$$s_T(\mathcal{D}) = 0, S_T(\mathcal{D}) = b - a$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0, \overline{\int_a^b f} = b - a$$

<u>Следствие</u> (Аддитивность подотрезков)**.** *Пусть $a < c < b$. Ф-ция f интегрируема по Риману на $[a, b] \iff f$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, при этом справ-ва формула:*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Доказательство. Покажем, что:

$$\underline{\int_a^b f\,dx} = \underline{\int_a^c f\,dx} + \underline{\int_c^b f\,dx}$$

Пусть $T_1 = \{\, x_i \,\}_{i=0}^{k}$ — разбиение $[a, c]$, $T_2 = \{\, x_i \,\}_{i=k+1}^{n}$ — разбиение $[c, b]$, тогда $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение $[a, b]$, причём:

$$\begin{aligned} s_T(f) = \sum_{i=0}^{k} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i = \\ = s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \end{aligned} \tag{2}$$

Сл-но, $\underline{\int_a^b f} \geq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f)$
Переходя в последнем нер-ве к sup сначала по всем разбиениям T_2 отр-ка $[c, b]$, затем по всем разбиениям T_1 отр-ка $[a, c]$ получим:

$$\underline{\int_a^b f} \geq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

С другой стороны, из (2) следует:

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

Рассм. произв. разбиение $\tilde{T}$ отр-ка $[a, b]$ и $T = \tilde{T} \cup \{\, c \,\}$:

$$s_{\tilde{T}}(f) \leq s_T(f) \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

Аналогично для верхнего интеграла Дарбу.
Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \le \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x)\,dx$$

Сл-но $\underline{\int_a^c f} = \overline{\int_a^c f}, \underline{\int_c^b f} = \overline{\int_c^b f}$
Пусть $f \in \mathcal{R}$ $\square$