Матан

Сергей Григорян

13 сентября 2024 г.

Содержание

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и ограничено сверху.

Рассм. $B = \{b \in \mathbb{R}\colon b$ - верх. грань $A\}$. Тогда $B \neq \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B (a \leq b)$. По аксиоме непр-ти $\exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A, \forall b \in B (a \leq c \leq b)$.

Из нер-ва $a \leq c \Rightarrow c$ верх. грань A

Из правого нер-ва любое $c' < c\colon c' \notin B$, т.е. c' не явл. верх. гранью A. Сл-но, $c = \sup A$. □

<u>Теорема</u> 0.1 (аксиома Архимеда)**.** *Пусть* $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. *Тогда* $\exists n \in \mathbb{N}$, *т. ч.* $na > b$

Доказательство. Предположим, что $\forall n\colon na \leq b$. Тогда $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ огр. сверху. По теореме 5.1 $\exists c = \sup A$. Число $c - a$ не явл. верх. гранью A (т. к. $a > 0$)

Тогда $\exists n \in \mathbb{N}(na > c - a)$. Откуда:

$$na + a = (n+1)a > (c - a) + a = c$$

т. е. $(n+1)a > c$. Но $(n+1)a \in A$ (противоречие с тем, что c - верх. грань)!!! □

<u>Следствие</u>. *1)* $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}(n > b)$, *(*$a = 1$*)*

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < \varepsilon)$ *(*$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$*)*

<u>Следствие</u>.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists! m \in \mathbb{Z}(m \leq x < m + 1)(m\text{- целая часть } x)$$

Доказательство. (∃) $x \geq 0$. Рассм. $S = \{n \in \mathbb{N}\colon n > x\}$. По аксиоме архимеда, это мн-во непусто. $\Rightarrow \exists p = min(S)$. Положим $m = p - 1$. Тогда $m \leq x$ и $m + 1 > x$

$x < 0$. По предыдущему пункту $\exists m' \in \mathbb{Z}(m' \leq -x < m' + 1)$. Положим:

$$m = \begin{cases} -m', x = -m' \\ -m' - 1, x \neq -m' \end{cases} \Rightarrow m \leq x < m + 1 \tag{1}$$

Единственность:

$$\begin{cases} m' \leq x < m' + 1 \\ m'' \leq x < m'' + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m' - m'' < 1, m' - m'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' - m'' = 0 \Rightarrow m' = m''$$

□

Пример.

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2$$

Следствие.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q}(a < r < b)$$

Доказательство.

$$\exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < b - a)$$

$$r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}.\text{Тогда } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a, r \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

$\square$

Обозначение.

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$$

Определение 0.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$a^0 = 1, a^{n+1} = a^n a$$

Обозначение. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \leq n$, положим:*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} = a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n$$

Если $m > n$.

Теорема 0.2 (Бином Ньютона)**.**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

$$0! = 1, (n + 1)! = n! * (n + 1)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- n = 1: Верно
- Предположим, что утв. верно для n:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} = \left[C_n^k + C_n^{k-1} = \tfrac{n!}{k!(n-k)!} + \tfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \iff \right]$$

$$\left[\iff \tfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \right] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

Ч. Т. Д.

□

<u>Следствие</u>. *Пусть $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Тогда:*

$$(1+a)^n \geq 1 + C_n^k a^k$$

<u>Обозначение</u>.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- расширенная числовая прямая

Считают, что $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x < +\infty)$
Введём допус. операции $x \in \mathbb{R}$

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
- $x - (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
- $x * (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x * (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$

- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Кроме того:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

НЕДОПУСТИМЫЕ операции:

- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $0 * \pm\infty$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглащение: $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

- Если E не огр. сверху, то $\sup E = +\infty$
- Если E не огр. снизу, то $\inf E = -\infty$

Определение 0.2. $I \subset R$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

Лемма 0.3. *Любой промежуток - одно из следующих мн-в:*

- $\emptyset$
- $\mathbb{R}$
- $(a, +\infty)$

- $[a, +\infty)$
- $(-\infty, b)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$

Доказательство. I - промежуток, $I \neq \emptyset$

$$a := \inf I, b := \sup I \Rightarrow a \leq b$$

- Если $a = b$, то $I = \{a\}$
- Если $a < b$ и $a < x < b$. По опр. точных граней $\exists x', x'' \in I \colon (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$

Итак, $(a, b) \subset I \subset [a, b]$

$\square$

1 §2. Предел последовательности

1.1 Определение предела

Определение 1.1. $a : \mathbb{N} \to A$ - п-ть эл-ов мн-а A. Значение $a(n)$ - наз-ся n-ым членом п-ти. (Обозначается a_n). Сама п-ть обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$

Если $A = \mathbb{R}$ - то $\{a_n\}$ - числовая п-ть.

Пример. *1)*

$$a : \mathbb{N} \to \{c\}, c \in \mathbb{R}$$

Здесь постоянная п-ть $(a_n = c, \forall n \in \mathbb{N})$

2) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ - *п-ть Фиббоначи.*

Определение 1.2. Число a наз-ся пределом п-ти $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Обозначается, как $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Определение 1.3 (В кванторах)**.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Или, $a_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Замечание.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0, M = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, M \text{ - \textit{конечно}}$$

Определение 1.4. Если $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, то $\{a_n\}$ наз-ся **сходящейся п-тью**, иначе - **расходящейся п-тью**

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. *Рассмотрим* $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ *нам подойдёт* $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. *Если* $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *(О единственности предела) Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*, то* $a = b$.

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опред. предела $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ и $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Положим $N = max(N_1, N_2)$:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_N| + |b - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow$, то $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$ □

Задача 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Определение 1.5. П-ть $\{a_n\}$ наз-ся **ограниченной**, если $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ - ограничено.

Теорема 1.2. *(Об ограниченности сходящейся п-ти) Если $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. По опред. предела (для $\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a-1 < a_n < a+1)$. Положим $m = min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a-1\}, M = max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a+1\}$. Тогда $m \leq a_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание. *Обратное утв.* ***неверно****:*

Пример.

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$$

Предположим, что a_n сходится:

По опред. предела($\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a-1 < (-1)^n < a+1)$

- *При чётном $n \Rightarrow 1 < a+1$*
- *При нечётном $n \Rightarrow a-1 < -1$*

$\Rightarrow a < 0 \wedge a > 0$!!! - *противоречие*

Лемма 1.3. *Для всякого $m \in \mathbb{N}$ п-ти $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $b_n = a_{n+m}, \forall n \in \mathbb{N}$ имеют предел одновременно, и если имеют, то пределы равны.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\forall n \geq N_1\colon (|a_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow (\forall n \geq N_1(|a_{n+m} - a| < \varepsilon))$$

$$(\forall n \geq N_2(|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geq N_2 + m(|a_n - a| < \varepsilon))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$\square$

Определение 1.6. П-ть $\{b_n\}$ об-ся $\{a_{n+m}\}$ и наз-ся m-ным хвостом $\{a_n\}$

Теорема 1.4 (О пределе в нер-вах)**.** *Если $a_n \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $a \leq b$*

Доказательство. От прот. Пусть $b < a$. По опред. предела

$$\exists N_1\colon \forall n \geq N_1(a - \frac{a-b}{2} < a_n)$$

$$\exists N_2\colon \forall n \geq N_2(b_n < b + \frac{a-b}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$, тогда:

$$\frac{a+b}{2} < a_N \text{ и } b_N < \frac{a+b}{2} \Rightarrow b_N < a_N!!!$$

$\square$

Замечание.

Пример.

$$0 < \frac{1}{2}, \textit{но} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Следствие. *Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N(a_n < b_n)$

Теорема 1.5 (О зажатой п-ти)**.** *Если* $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, *то* $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(a - \varepsilon < a_n)$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(b_n < a + \varepsilon)$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Ч. Т. Д. $\square$

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$$

- $q = 0$*: верно*
- $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha, \alpha > 0$

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{n\alpha}(\frac{1}{n\alpha} \to 0) \Rightarrow |q|^n \to 0$$

<u>Теорема</u> 1.6. *(Арифметические операции с пределами) Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) *Если* $b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) По теор. 2 п-ть $\{a_n\}$ огр., т. е.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leq C)|b| \leq C$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

Тогда $\forall n > N = max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

$\square$