АлГем

Сергей Григорян

22 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 21 (СКИП))

2 Лекция 22

2.1 Сопряжённое пр-во

V - ЛП над F

$$f : V \to F$$

Определение 2.1. f — **линейный функционал** (ЛФ), если соблюдаются:

1) Аддитивность:

$$\forall x, y \in V\colon f(x+y) = f(x) + f(y)$$

2) Однородность:

$$\forall \lambda \in F, \forall x \in V\colon f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Определение 2.2. V^* —

3 Лекция 24(вроде)

Утверждение 3.1. *ЛО $\phi : U \to V$ — инъективно $\iff \ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$*

Доказательство.

- Необх.: пусть ϕ - инъективно $\Rightarrow \forall x \neq \overline{0} \hookrightarrow$

$$\phi(x) \neq \phi(\overline{0}) = \overline{0} \Rightarrow \ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$$

- Дост.: пусть $\ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$. Покажем, что ϕ - инъективно. Пусть $\exists x_1, x_2 \in V\colon \phi(x_1) = \phi(x_2)$

$$\hookrightarrow \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2) = \overline{0} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\square$

Следствие 3.1. *Пусть $\phi\colon V \to W$ — ЛО, кот. удовл. одному из двух условий экв-ных условий утв-я* (3.1)*. Тогда ϕ переводит ЛНЗ в ЛНЗ.*

Доказательство. Пусть система $x_1, \ldots, x_n$ — ЛНЗ. От прот., пусть:

$$\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n) \text{ — ЛЗ}$$

Тогда $\exists$ нетрив. ЛК:

$$\lambda_1\phi(x_1) + \lambda_2\phi(x_2) + \ldots + \lambda_n\phi(x_n) = \overline{0}$$

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \overline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \overline{0} \in \ker\phi, \exists i\colon \lambda_i \neq 0$$

Прот. с тем, что $x_1, \ldots, x_n$ — ЛНЗ. □

Теорема 3.1 (Теорема о гомоморфизмах ЛП)**.** *Пусть $\phi\colon V \to W$ - ЛО. Пусть $V = \ker\phi \oplus U$. Тогда $\exists$ канонический изоморфизм пр-в U на $\operatorname{Im}\phi$. Более того, если:*

$$\phi|_U\colon U \to \operatorname{Im}\phi \text{ — \textit{изоморфизм}}$$

Доказательство. $\phi(U) \subseteq \operatorname{Im}\phi$. ...??? □

Теорема 3.2 (О ядре и образе ЛО)**.** *$\phi\colon V \to W$ — ЛО. Тогда справ-во:*

$$\dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi = \dim V$$

Доказательство. Пусть, как в теореме (3.1), $V = \ker\phi \oplus U$:

$$\phi|_U\colon U \to \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \dim V = \dim\operatorname{Im}\phi$$

По т. (3.1):

$$\dim V = \dim\ker V + \dim V = \dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi$$

□

Замечание. *Верно ли, что если $\phi\colon V \to V$, то $\hookrightarrow V = \ker\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$. Нет, это не так.*

Определение 3.1 (Матрицы ЛО)**.** $\phi\colon V \to W$. Пусть

$$G = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \text{ — базис } V$$

$$G' = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} \text{ — базис } W$$

$$W \ni \phi(e_1) = a_{11}f_1 + \ldots a_{m1}f_m$$

$$\vdots$$

$$\phi(e_n) = a_{n1}f_1 + \ldots + a_{nm}f_m$$

$$A_\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F)$$

Можно записать иначе:

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \vdots \\ \phi(e_n) \end{pmatrix} = A_\phi^T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) & \ldots & \phi(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_n \end{pmatrix} A_\phi$$

$$\phi(G) = f \cdot A_\phi$$

Определение 3.2. Построенная матрица A_ϕ наз-ся матрицей ЛО ϕ отн-но базисов G и G'

$$\phi \underset{(G,G')}{\longleftrightarrow} A_\phi$$

Утверждение 3.2.

$$\phi\colon V \to W$$

Пусть G — базис в V, f — базис в W

$$\phi \underset{(G,G')}{\longleftrightarrow} A_\phi, V \ni x \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \phi(x) \underset{f}{\longleftrightarrow} \beta$$

Тогда $\beta = A_\phi\alpha$

Доказательство.

$$x = G\alpha, \phi(x) = f\beta$$

$$\phi(x) = \phi(G\alpha) = \phi(G)\cdot\alpha = f \cdot A_\phi \cdot \alpha \Rightarrow \beta = A_\phi\alpha$$

□

3.1 Операции над ЛО

Пусть $\mathcal{L}(V, W)$ — мн-во всех ЛО из V в W. (или $\hom(V, W)$)

$$\phi, \psi \in \mathcal{L}(V, W)$$

$$\Rightarrow (\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$
$$(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$$

Покажем аддитивность:

$$(\phi + \psi)(x + y) = \phi(x + y) + \psi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) + \psi(x) + \psi(y) =$$

$$= (\phi + \psi)(x) + (\phi + \psi)(y)$$

Замечание. *Легко проверить выполнение аксиом ЛП для $\mathcal{V}, \mathcal{W}$, причём в кач-ве нулевого вектора выступет нулевое отображение.*

Утверждение 3.3. *Соответствие:*

$$\phi \underset{(G, G')}{\longleftrightarrow} A_\phi$$

явл-ся изоморфизмом пр-ва $\mathcal{L}(V, W)$ на пр-во $M_{m \times n}(F)$

Доказательство. a) Сохранение " + "?

$$(\phi + \psi)(G) = \big((\phi + \psi)(e_1) \quad \dots \quad (\phi + \psi)(e_n))\big) =$$

$$= \big(\phi(e_1) + \psi(e_1) \quad \dots \quad \phi(e_n) + \psi(e_n)\big)$$
$$= \big(\phi(e_1) \quad \dots \quad \phi(e_n)\big) + \big(\psi(e_1) \quad \dots \quad \psi(e_n)\big) = f \cdot A_\phi + f \cdot A_\psi =$$
$$= f(A_\phi + A_\psi)$$

b) Биективность? Инъективность возникает из того, что только 0 имеет нулевую матрицу.
Сюрьективность? $\forall A \in M_{m \times n}(F) \exists!$ ЛО, со столбцами вида $\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)$

$\square$

Следствие 3.2.

$$\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M_{m \times n} = m \cdot n = \dim W \cdot \dim V$$

3.2 Ранг лин. отображения

Определение 3.3. $\phi\colon V \to W$ — ЛО. Ранг $\phi(\operatorname{rk}\phi)$ наз-ся размерностью пр-во $\operatorname{Im}\phi$

Теорема 3.3 (О ранге лин. отображения)**.** *$\phi : V \to W$ — ЛО. Тогда $\operatorname{rk}\phi$ равен $\operatorname{rk} A_\phi$ не зависимо от выбора базисов в V и W.*

Доказательство. Вспомним рав-во:

$$\operatorname{Im}\phi =< \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) >, \text{ где } E \text{ — базис } V$$

$$\forall i\colon \phi(e_i) \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \supseteq$$

$\subseteq$? Пусть $y \in \operatorname{Im}\phi$. Тогда $\exists x \in V : y = \phi(x) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) =$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) \in < \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) >$$

$$\operatorname{rk}\phi = \dim \operatorname{Im}\phi = \dim < \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) >= \operatorname{rk} A_\phi$$

□

3.3 Изменение матр. ЛО при замене базисов

Теорема 3.4. *Пусть $\phi : V \to W$ — ЛО. Пусть G, G' — базисы V, $G' = GS$, (т. е. $S = S_{G \to G'}$)*
Пусть F, F' - базисы W, $F' = FT$
Пусть $\phi \underset{(G,F)}{\longleftrightarrow} A_\phi$ и $\phi \underset{(G',F')}{\longleftrightarrow} A'_\phi$
Тогда:

$$A'_\phi = T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

Доказательство.

$$\phi(G) = F \cdot A_\phi \text{ и } \phi(G') = F' \cdot A'_\phi$$

$$F = F' \cdot T^{-1}$$

Имеем:

$$\phi(G') = \phi(GS) = \phi(G) \cdot S = F \cdot A_\phi \cdot S = F' \cdot T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

$$\Rightarrow A'_\phi = T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

□

Следствие 3.3. *Пусть T и S невырожденные матрицы, т. ч.:*

$$T^{-1} \cdot A \cdot S \text{ — имеет смысл}$$

Тогда:

$$\operatorname{rk}(T^{-1} \cdot A \cdot S) = \operatorname{rk} A$$

Доказательство.

$$A = A_\phi, \phi\colon V \to W$$

$$\operatorname{rk}(A_\phi) = \operatorname{rk}(T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S)$$

Т. к. ранг не зависит от выбранных базисов. □

К какому наиболее простому виду можно привести матрицу отображения подоходящей заменой базиса? Ответ: к единичному диагональному виду.

Теорема 3.5. *Пусть $\phi\colon V \to W$ — ЛО. Тогда в V и W $\exists G, F$ — базисы, т. ч.:*

$$\phi \underset{(G,F)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \operatorname{rk} \phi$$

Доказательство. Пусть $V = U \oplus \ker \phi$, U — прямое дополнение к $\ker \phi$

$$\phi|_U \colon U \to \operatorname{Im} \phi$$

Выберем в пр-ве V базис, согласованный с разл. в $\oplus$, т. е.:

$$e_1, \dots e_r \text{ — базис в } U, e_{r+1}, \dots, e_n \text{ — базис в } \ker \phi$$

$$f_1 = \phi(e_1), \dots, f_r = \phi(e_r) \text{ — базис в } \operatorname{Im} \phi$$

И дополним его до базиса в W

$$f_{r+1}, \dots, f_n$$

Покажем, что пара базисов (E, F) — искомая пара базисов.

$$\phi(e_1) = f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + \cdot 0 \cdot f_n$$

$$\phi(e_2) = f_2 = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + \ldots + 0 \cdot f_n$$

$$\vdots$$

$$\phi(e_r) = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + 0 \cdot f_{r-1} + 1 \cdot f_r + 0 \cdot f_{r+1} + \ldots + 0 \cdot f_n$$

$$\phi(e_{r+i}) = \overline{0}, \forall i > 0$$

□