

АлГем

Сергей Григорян

13 сентября 2024 г.

Содержание

1	Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i	3
2	Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3	5
3	Матрица перехода от одного базиса к другому	7
4	Декартова система коор-т	8
5	Скалярное произведение	11

1 Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i

Утверждение 1.1. а) Пусть $\bar{a} \neq \bar{o}$ и \bar{b} коллинеарен \bar{a} . Тогда $\bar{b} = \lambda \bar{a}$.

б) Пусть \bar{a}_1, \bar{a}_2 не коллин. и \bar{b} компл. \bar{a}_1, \bar{a}_2 . Тогда $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$

в) Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ - не комплан. Тогда всякий вектор представим в виде $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$

Доказательство. а) (**Картинка**)

$$\lambda = \begin{cases} \frac{XZ}{XY}, & \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на одной стороне с } X \\ -\frac{XZ}{XY}, & \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на разных сторонах отн. } X \end{cases} \Rightarrow \bar{b} = \lambda \bar{a}$$

б) Оба вектора \bar{a}_1, \bar{a}_2 - ненулевые. (**Картинка**)

$$\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \overline{XZ_1} + \overline{XZ_2} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$$

в) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ пород. $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$, а вектор b - \overline{XZ} . \bar{a}_1, \bar{a}_2 - не коллин., (**Картинка**) $Z' = l \cap (X_1 Y_1 Y_2)$

$$\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \overline{XZ'} + \overline{Z'Z} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$$

□

Следствие. 1) Система, сост. только из \bar{o} - ЛЗ.

2) Система, сост. из двух коллин. векторов - ЛЗ.

3) Система, сост. из трёх комплан. векторов - ЛЗ.

4) Любая сист., сост. из четырех векторов в пр-ве - ЛЗ.

Доказательство. 1) $1 * \bar{o} = \bar{o}$

2) \bar{a}, \bar{b} - коллин.

Если $\bar{a} = \bar{o}$ - ЛЗ система $\Rightarrow (a, b)$ - надсистема ЛЗ \Rightarrow она ЛЗ

Если $\bar{a} \neq \bar{o} \Rightarrow \bar{b} = \lambda \bar{a} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})$ - ЛЗ

3) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}$ - компл.

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - коллин., то $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ - ЛЗ $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема.

Иначе, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин. $\Rightarrow b = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 + \overline{a_2}$ - ЛЗ

4) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b}$:

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема ЛЗ сист.

Иначе $\Rightarrow \overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$.

□

Утверждение 1.2. Пусть $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ - ЛНЗ сист. вект. и $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \overline{b})$ - ЛЗ. Тогда:

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{a_i}$$

Доказательство. \exists нетрив. ЛК:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} + \beta \overline{b} = \overline{0}$$

Предположим, что $\beta = 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow$:

$$\overline{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \overline{a_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \overline{a_n}$$

□

Определение 1.1. V - лин. пр-во (над \mathbb{R}).

Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - наз-ся базисом в V_i , если:

а) $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - ЛНЗ

б) Каждый вектор $\overline{v} \in V_i$ представим в виде ЛК:

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \overline{e_n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$M_{3 \times 1}(\mathbb{R}): \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \overline{e_i}$$

Замечание.

$$\bar{v} = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{коор-т столбец } \bar{v} \text{ в базисе } \bar{e}$$

Утверждение 1.3. Если в V фикс. базис $G = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n)$, то всякий вектор $\bar{v} \in V$ однозначно раскладывается по одному базису. (т. е. имеет однозначно опред. коор-тный столбец)

Доказательство. См. прошлую лекцию □

Утверждение 1.4. Пусть в пр-ве V фикс. базис G , $\bar{v} \xleftrightarrow{G} \alpha, \bar{w} \xleftrightarrow{G} \beta$. Тогда:

$$\bar{v} + \bar{w} \xleftrightarrow{G} \alpha + \beta,$$

$$\lambda \bar{v} \xleftrightarrow{G} \lambda \alpha$$

Доказательство.

$$\bar{v} = G\alpha$$

$$\bar{w} = G\beta$$

$$\Rightarrow \bar{v} + \bar{w} = G(\alpha + \beta)$$

$$\lambda \bar{v} = \lambda G\alpha = G(\lambda\alpha)$$

□

2 Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3

Теорема 2.1 (О ЛНЗ системах векторов).

1) Система, состоящая из одного **ненулевого** вектора \bar{a} - ЛНЗ

2) Система, сост. из двух неколлин. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛНЗ

3) Система, сост. из трёх некомплан. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - ЛНЗ

Доказательство. 1) От. противного, пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \overline{a} = \overline{0}$:

$$|\lambda| |\overline{a}| = 0!!! \text{ Два ненулевых числа в умнож. дают } 0.$$

2) От. противного, пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛЗ. Б. О. О. (без ограничения общности) $\overline{a_2} = \lambda \overline{a_1}$ - противоречие.

3) От. пр., пусть $(\overline{a_1} \ \overline{a_2} \ \overline{a_3})$ - ЛЗ. Б. О. О. $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$ - противоречие.

□

Теорема 2.2 (Об описании базиса в V_i). Система векторов является:

a) базисом в $V_1 \iff$ она состоит из одного вектора $\overline{e} \neq \overline{0}$

b) базисом в $V_2 \iff$ она сост. из двух неколлин. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$

c) базисом в $V_3 \iff$ она сост. из трёх некомпл. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

Доказательство.

a) $V_1: \overline{e} \neq 0$ (ЛНЗ сист.)

$$\forall \overline{b} \in V_1 (\overline{b} = \lambda \overline{e}) \Rightarrow (\overline{e}) - \text{базис в } V_1.$$

Если $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in V_1 \Rightarrow$ они коллин. \Rightarrow ЛЗ и аналогично $(\overline{0})$ - ЛЗ.

b) V_2 - фикс. $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - неколл. \Rightarrow ЛНЗ.

$$\forall \overline{b} \in V_2 \xRightarrow{\text{утв. 1}} \overline{b} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \Rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2}) - \text{базис.}$$

Почему нет других? $(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - компл. \Rightarrow ЛЗ. Если $(\overline{e_1} \ \overline{e_2})$ - коллин. \Rightarrow через них выр-ся только коллин. им вектора.

с) $(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - некомпл. \Rightarrow ЛНЗ:

$$\forall b \in V_3: b = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \overline{e_i} \Rightarrow \text{базис.}$$

Почему нет других?

$(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3} \ \overline{e_4})$ - ЛЗ

$(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - компланарный, то тогда ЛЗ

- $\overline{e_1} \parallel \overline{e_2}$ - очев.

- $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$ - образ. плоскость.

□

3 Матрица перехода от одного базиса к другому

V : два базиса: $G = (\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \dots \ \overline{e_n})$, $G' = (\overline{e'_1} \ \overline{e'_2} \ \dots \ \overline{e'_n})$

$$\overline{e'_1} = S_{11}\overline{e_1} + S_{21}\overline{e_2} + \dots + S_{n1}\overline{e_n}$$

$$\vdots$$

$$\overline{e'_n} = S_{1n}\overline{e_1} + S_{2n}\overline{e_2} + \dots + S_{nn}\overline{e_n}$$

\Rightarrow

$$S' = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} = S_{G \rightarrow G'}$$

- матрица перехода от G к G'

$$(\overline{e'_1} \ \overline{e'_2} \ \dots \ \overline{e'_n}) = (\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \dots \ \overline{e_n}) S_{G \rightarrow G'} \iff$$

$$G' = G S_{G \rightarrow G'}$$

Утверждение 3.1. Пусть в V фикс. G и G' - базисы и $G' = GS$. Пусть $\bar{a} \xleftrightarrow{G} \alpha$ и $\bar{a} \xleftrightarrow{G'} \alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$.

Доказательство.

$$\bar{a} = G\alpha$$

$$\bar{a} = G'\alpha' = GS\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

□

Определение 3.1. \bar{a}, \bar{b} наз-ся ортогональными, если он перпендикулярны друг другу.

Определение 3.2. Базис G наз-ся ортогональным, если все базис. векторы попарно ортогональны.

Определение 3.3. Базис G наз-ся ортонормированным (ОНБ), если он ортогональный и нормированный ($\forall i: |\bar{e}_i| = 1$).

4 Декартова система коор-т

$$G = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2)$$

- ОНБ

G' - G повёрнутый на α

$$\bar{e}_1' = \cos \alpha \bar{e}_1 + \sin \alpha \bar{e}_2$$

$$\bar{e}_2' = -\sin \alpha \bar{e}_1 + \cos \alpha \bar{e}_2$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R(\alpha) - \text{Rotation} - \text{поворот.}$$

Утверждение 4.1. Пусть $S = S_{G \rightarrow G'}$. Пусть $T = S_{G' \rightarrow G''}$. Тогда:

$$ST = S_{G \rightarrow G''}$$

Доказательство.

$$G' = GS, G'' = G'T \Rightarrow G'' = G'T = GST$$

□

Утверждение 4.2. Пусть S - матрица перехода от G к G' . T - матрица перехода от G' к G . Тогда:

$$ST = TS = E - \text{единичная матрица}$$

Доказательство.

$$G'' = G \Rightarrow ST - \text{матрица перехода от } G \text{ к } G \Rightarrow ST = E$$

$$TS - \text{матрица перехода от } G' \text{ к } G' \Rightarrow TS = E$$

□

Обозначение. *Единичная матрица* E - диагональная матрица с единицами на главной диагонали.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 4.1. Если выполняется рав-во $ST = TS = E$, то матрица T называется **обратной** к S .

Определение 4.2. Матрица наз-ся **обратимой**, если у неё есть обратная матрица.

Утверждение 4.3. Если обратная матрица суц-ет, то она единственная.

Доказательство. От. прот. Пусть A^{-1}, \bar{A}^{-1} - обратные матрицы к матрице A .

$$A^{-1} = EA^{-1} = (\bar{A}^{-1}A)A^{-1} = \bar{A}^{-1}(AA^{-1}) = \bar{A}^{-1}E = \bar{A}^{-1}$$

□

Следствие. Матрица перехода от одного базиса к другому **всегда обратима**.

Задача 4.1. Док-ть, что $R(\alpha)$ обладает св-вами:

$$1) \quad R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$$

$$2) \quad R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^T$$

Задача 4.2. Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ (отн. ОНБ G) - вектор, выход. из нач. коор-т. \bar{b} - вектор \bar{a} повернутый на α , тогда:

$$\bar{b} = R(\alpha)\bar{a} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Определение 4.3. Пусть т. O - фикс. точка, начало коор-т. G базис в V_i . Тогда: (O, G) - ДСК

Определение 4.4. ДСК наз-ся **прямоугольной**, если G - ОНБ.

Определение 4.5. A - точка. Тогда коор-ты вектора \overline{OA} наз-ся коор-тами точки A в ДСК (O, G) :

$$A \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \alpha \Longleftrightarrow \overline{OA} = G\alpha = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Утверждение 4.4. $A \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \beta \Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = G\beta - G\alpha = G(\beta - \alpha)$$

Итого: чтобы найти вектор по его концам, нужно из коор-ты конца вычесть коор-ту начала.

Утверждение 4.5 (О делении отрезка в данном соотношении).

$$A \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \beta$$

Пусть т. C делит отрезок $[A, B]$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда:

$$\begin{aligned} C \underset{(O,E)}{\Longleftrightarrow} \frac{\mu\alpha + \lambda\beta}{\lambda + \mu} &\Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \bar{c} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\bar{b} &- \text{выпуклая ЛК} \end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{OA} + \overline{AC} \\ \overline{AC} &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overline{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\bar{b} - \bar{a}) \\ \bar{c} &= \alpha + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\bar{b} - \bar{a}) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}) \bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{b} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \bar{b}\end{aligned}$$

□

Теорема 4.1 (Об изменении коор-т точки при замене ДСК). Пусть в V_i фикс.: (O, G) (I ДСК) и (O', G') (II ДСК).

Пусть $A \xleftrightarrow{(O, G)} \alpha$ и $A \xleftrightarrow{(O', G')} \alpha'$ и пусть $S = S_{G \rightarrow G'}$

(***Картинка***)

Тогда $\alpha = S\alpha' + \gamma$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OO'} + \overline{O'A} \\ \overline{OA} &= G\alpha \\ \overline{OO'} + \overline{O'A} &= G\lambda + G'\alpha' = G\lambda + GS\alpha' = G(S\alpha' + \gamma)\end{aligned}$$

□

5 Скалярное произведение

Определение 5.1. V_i . Скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} обозначаем (\bar{a}, \bar{b}) (в физике $\bar{a} \cdot \bar{b}$). Это число, равное:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скал. произ. = 0.

Обозначение.

$$(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2 - \text{скалярный квадрат } \bar{a}$$

Замечание.

$$(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \iff \bar{a} \perp \bar{b}$$

Определение 5.2. (**Картинка**)

Вектор, порождаемые напр. отр-ом $\overline{OA'}$ наз-ся проекцией вектора \bar{a} на вектор \bar{b} :

$$pr_{\bar{b}}\bar{a} = \overline{OA'}$$
$$(pr_{\bar{b}}\bar{a} = 0 \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = 0)$$

Утверждение 5.1. (Линейность векторной проекции)

- a) $pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1) + pr_{\bar{b}}(\bar{a}_2)$ ($\bar{b} \neq \bar{o}$) - ассоциативность
b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}: pr_{\bar{b}}(\lambda \bar{a}) = \lambda pr_{\bar{b}}(\bar{a})$ - однородность

Доказательство. а) (**Картинка**)

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_1} + \overline{A'_1A'_2} = pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1) + pr_{\bar{b}}(\bar{a}_2)$$

- б) Для $\lambda > 0$: (****Картинка***)

$$pr_{\bar{b}}(\lambda \bar{a}) = \overline{OA'} = \lambda \overline{OA'} = \lambda pr_{\bar{b}}(\bar{a})$$

□

Утверждение 5.2. Пусть $\bar{b} \neq \bar{o}$. Тогда:

$$(pr_{\bar{b}}(\bar{a}), \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b})$$

Доказательство.

$$\angle(\bar{a}, \bar{b}) = \phi.$$

- Если $\phi = \frac{\pi}{2}$ - рав-во верно.
- Если $\bar{a} = \bar{o}$ - рав-во верно
- Пусть $\phi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$.

$$|pr_{\bar{b}}(\bar{a})| = |\bar{a}| |\cos \phi| = \begin{cases} |\bar{a}| \cos \phi, & \text{если } pr_{\bar{b}}(\bar{a}) \uparrow \bar{b} \\ -|\bar{a}| \cos \phi, & \text{если } pr_{\bar{b}}(\bar{a}) \updownarrow \bar{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (pr_{\bar{b}}(\bar{a}), \bar{b}) = \begin{cases} |\bar{a}| \cos \phi |\bar{b}| * 1, & \text{если } pr_{\bar{b}}(\bar{a}) \uparrow \bar{b} \\ -|\bar{a}| \cos \phi |\bar{b}| * (-1), & \text{если } pr_{\bar{b}}(\bar{a}) \updownarrow \bar{b} \end{cases} = (\bar{a}, \bar{b})$$

□

Теорема 5.1 (О св-вах скалярного произведения). 1. *Симметричность*

$$(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$$

$$2. \text{ Аддитивность по } I \text{ арг-ту: } (\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b})$$

$$3. \text{ Однородность по } I \text{ арг-ту: } (\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$$

$$4. \text{ Полож. определённости: } (\bar{a}, \bar{a}) \geq 0, \forall \bar{a} \text{ и } (\bar{a}, \bar{a}) \iff \bar{a} = \bar{o}$$

Доказательство. 3) При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ очев. При $\lambda > 0$:

$$\angle(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = \angle(\bar{a}, \bar{b})$$

$$(\lambda \bar{a}, \bar{b}) := |\lambda \bar{a}| |\bar{b}| \cos(\angle(\lambda \bar{a}, \bar{b})) = \lambda |\bar{a}| |\bar{b}| \cos \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$$

2)

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2, \bar{b}) &= (pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2), \bar{b}) = (pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1) + pr_{\bar{b}}(\bar{a}_2), \bar{b}) = \begin{bmatrix} pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1) = \lambda_1 \bar{b} \\ pr_{\bar{b}}(\bar{a}_2) = \lambda_2 \bar{b} \end{bmatrix} = \\ &= ((\lambda_1 + \lambda_2) \bar{b}, \bar{b}) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\bar{b}, \bar{b}) = \lambda_1(\bar{b}, \bar{b}) + \lambda_2(\bar{b}, \bar{b}) = (\lambda_1 \bar{b}, \bar{b}) + (\lambda_2 \bar{b}, \bar{b}) = \\ &= (pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1), \bar{b}) + (pr_{\bar{b}}(\bar{a}_2), \bar{b}) = (\bar{a}_1, \bar{b}) + (\bar{a}_2, \bar{b}) \end{aligned}$$

□

Утверждение 5.3. Пусть $\bar{b} \neq \bar{o}$. Тогда:

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|^2} * \bar{b}$$

Доказательство.

$$pr_{\bar{b}}(\bar{a}) = \lambda \bar{b} \mid \cdot \bar{b}$$

$$(pr_{\bar{b}}(\bar{a}), \bar{b}) = \lambda(\bar{b}, \bar{b}) = \lambda |\bar{b}|^2$$

$$\lambda = \frac{(pr_{\bar{b}}(\bar{a}))}{|\bar{b}|^2} = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|^2}$$

□