Матан

Сергей Григорян

11 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 11

1.1 Непрерывность ф-ции в точке

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E$ и $f : E \to \mathbb{R}$. Ф-ция f наз-ся непрерывной в точке a, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Иначе:

$$x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

Замечание. *Из опр-я следует, что ф-ция не меняет значение* ***резко***

Св-во (отделимость): если $f : E \to \mathbb{R}$ - непр-на в точке a и $f(a) > 0 (< 0)$, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(x) > \frac{f(a)}{2}(< \frac{f(a)}{2}))$$

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$. По непр-ти ф-ции в a, положим $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}) \Rightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}$$

□

Замечание. *В определении непр-ти ф-ции точка $a \in E$ - области определения, но* ***не обязана*** *быть предельной точкой E.*

Определение 1.2. Точка, принадлежащая мн-ву, но не явл-ся его предельной точкой наз-ся **изолированной**.

Пример.

$$E = (1, 2] \cup \{ 5 \}$$

Тогда точка 5 - изолированная точка мн-ва E

Теорема 1.1. *Пусть $f : E \to \mathbb{R}, a \in E$. Следующие утв-я эквив-ны:*

1) f *непр-на в* a

2) $\forall \{ x_n \}, x_n \in E(x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a))$

3) *Либо a - изолированная точка мн-ва E, либо a - предельная точка мн-ва E и $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$*

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Рассм. $\{ x_n \}, x_n \in E, x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти

$$\exists\delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E(|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Т.к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N(x_n \in B_\delta(a) \cap E)$, а значит,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Сл-но, $f(x_n) \to f(a)$

$2 \Rightarrow 3)$ Если a - предельная точка мн-ва E, то $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, по опр-ю предела по Гейне.

В противном случае, a - изолированная точка области определения.

$3 \Rightarrow 1)$ Если a - изолированная точка мн-ва E, то $\exists\delta_0 > 0$: $(B_{\delta_0}(a) \cap E = \{ a \})$. Тогда определение непр-ти выполняется для $\delta = \delta_0$.

Если a - предельная точка мн-ва E, то по опр-ю предела по Коши:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E(0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

При $x = a$, следствие выше выпол-ся (очевидно). Это означает, что f непр-на в a.

$\square$

Следствие. *Если $f, g\colon E \to \mathbb{R}$ - непр-ны в $a \in E$, то в этой точке непр-ны ф-ции:*

1) $f \pm g$

2) $f \cdot g$

3) *При доп. усл-ии $g \neq 0$:* $\frac{f}{g}$

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Т. к. f, g - непр-ны в a, то $f(x_n) \to f(a)$ и $g(x_n) \to g(a)$. Тогда по св-вам предела п-ти имеем:

1) $f(x_n) \pm g(x_n) \to f(a) \pm g(a)$

2) $f(x_n)g(x_n) \to f(a)g(a)$

3) $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(a)}{g(a)}$

По Теореме (1.1), эти ф-ции непрерывны в a. □

Пример.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0, (a_i \in \mathbb{R})$$

Эта ф-ция непр-на в каждой точке $a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$x \mapsto x$$

$$x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$$

Ф-ции выше непрерывны. Тогда по сл-ию (1.1) в a непр-ны:

$$x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}$$

А значит P непр-на в a. □

Теорема 1.2 (Непрерывность композиции)**.** *Если ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в a, $f(E) \subset D, g : D \to \mathbb{R}$ - непр-на в $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ непр-на в т. a.*

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \to a$. Тогда: $f(x_n) \to f(a)$ по непр-ти f в a. Кроме того:

$$g(f(x_n)) \to g(f(a)) \text{ - по непр-ти } g \text{ в } f(a) \iff$$

$$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$$

По Теореме 1.1, ф-ция $g \circ f$ непр-на в т. a. □

Определение 1.3. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$. Если $f|_{[a,+\infty)}$ непр-но в a, то говорят, что f непр-на справа в т. a.

Аналогично: $f|_{(-\infty,a]}$ непр-на в a, то f непр-на слева в a.

Замечание. *Если a - предел. точка мн-ва $[a,+\infty)\cap E$, то f непр. справа в т. $a \iff f(a+0) = f(a)$*

Определение 1.4. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $a \in E$.
Если f не явл. непрерывной в т. a, то говорят, что f разрывна (имеет разрыв) в т. a, а саму т. a наз-ют точкой разрыва f.
Классифицируем точки разрыва:

1) Пусть ф-ция f определена в некот. проколотой окр-ти т. a. Если сущ-ют конечные односторонние пределы $f(a-0), f(a+0)$ и среди трёх чисел $f(a+0), f(a-0), f(a)$ не все равны, то т. a наз-ся точкой разрыва I рода ф-ции f

2) В противном случае т. a наз-ся точкой разрыва II рода ф-ции f

Если a - т. разрыва I рода и $f(a+0) = f(a-0)$, то точка a наз-ся точкой устранимого разрыва.

Пример. *1)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign(x) :=\begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

$$f(0+0) = 1, f(0-0) = -1$$

Т. $x = 0$ - т. разрыва I рода.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *:*

$$f(x) = sign^2(x)$$

Тогда $x = 0$ - т. устранимого разрыва.

3)

$$f : \mathbb{R}\setminus\{\,0\,\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$$

$f(0+0) = +\infty, f(0-0) = -\infty \Rightarrow x = 0$ *- точка разрыва II рода.*

4)

$$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Покажем, что D - разрывна в каждой точке.

Доказательство. a) $a \in \mathbb{Q}$:

$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, a_n > a, D(x_n) = 1 \to 1$$

$$x'_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 0 \to 0$$

Получаем, что правого предела в a не сущ-ет

b) $a \notin \mathbb{Q}$:

$$x_n = a + \frac{1}{n} \to a, x_n > a, D(x_n) = 0 \to 0$$

$$x'_n = \frac{[na] + 1}{n} \to a, x'_n > a, D(x'_n) = 1 \to 1$$

Сл-но, не сущ-ет $D(a + 0)$.

Таким образом, a - т. разрыва II рода. □

1.2 Непрерывность ф-ции на мн-ве

Определение 1.5. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся непрерывной (на E), если f непр-на на каждой точке $a \in E$

Если $D \subset E$, то f непр-на на D, если $f|_D$ непр-на.

Пример. $x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ *- рациональная ф-ция.*
Она непр-на на $E = \{ s \colon Q(x) \neq 0 \}$. (по сл-ию 1.1)

Замечание. *Чарльз. Лью курс по мат. анализу "Скелет мат. анализа"*

Лемма 1.3. *Если ф-ция f непр-на на $[a, b]$, то f огр. на $[a, b]$*

Доказательство. Предположим, что f не огр-на. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]\colon (|f(x_n)| > n)$$

По инд-ции опр-на $\{ x_n \} \subset [a, b]$. По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в:

$$a \leq x_{n_k} \leq b$$

получаем, что $x_0 \in [a, b]$. По непр-ти $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$!!! Но ведь,

$$(|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \to +\infty)$$

$\square$

Теорема 1.4 (Теорема Вейерштрасса)**.** *Если f - непр-на на $[a, b]$, то $\exists x_m, x_M \in [a, b]$, в кот. вып-но:*

$$f(x_M) = \sup_{[a,b]} f(x), f(x_m) = \inf_{[a,b]} f(x)$$

Доказательство. По лемме (1.3) мн-во значений $f([a, b])$ ограничено, поэтому опр-ны числа $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.
По опр-ю sup, $\forall n \in N, \exists x_n \in [a, b](M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M)$. По инд-ции опр-на п-ть $\{ x_n \} \subset [a, b]$, причём $f(x_n) \to M$.
По т. Больцано-Вейерштрасса $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}$:

$$x_{n_k} \to x_M \in [a, b]$$

Тогда по непр-ти:

$$f(x_{n_k}) \to f(x_M)$$

С другой стороны, $f(x_{n_k}) \to M \Rightarrow f(x_M) = M$ в силу ед-ти предела.
Случай inf док-ся аналогично. $\square$

Замечание. *Утв-я, аналогичные лемме* (1.3) *и теореме* 1.4 *неверны для интервалов.*

Пример. *$f(x) = x$. f непр-на на $(0, 1)$. f - огр-на, но $\nexists$ минимального и максимального значения.*

$$\sup_{(0,1)} f(x) = 1 \neq f(x) \forall x \in (0, 1)$$

2 Лекция 12

Лемма 2.1. *Если f - непр-на на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то*

$$\exists c \in [a, b] \colon f(c) = 0$$

Доказательство. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. В противном случае заменим f на $(-f)$.
Построим п-ть отр-ов $\{\,[a_n, b_n]\,\}$ по индукции:

$$[a_1, b_1] \colon = [a, b] \text{ и если } [a_k, b_k] \text{ - построен, положим}$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq 0 \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0 \end{cases}$$

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть вложенных отр-ов $\{\,[a_n, b_n]\,\}$, т. ч.:

$$f(a_n) \leq 0 f(b_n) > 0$$

По т. Кантора о вложенных отр-ах, сущ-ет $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём $a_n \to c$ и $b_n \to c$. По непр-ти в точке c, переходя в нер-ве к пределу:

$$f(a_n) \leq 0 < f(b_n) \Rightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

□

Определение 2.1. Будем говорить, что число s лежит строго между числа α и β, если $max(a, b) > s > min(a, b)$.

Теорема 2.2 (Больцано-Коши о промежуточных значениях)**.** *Если ф-ция f непр-на на $[a, b]$ и число s лежит строго между $f(a)$ и $f(b)$, то:*

$$\exists c \in (a, b) \colon f(c) = s$$

Доказательство. Рассм. $g = f - s$. Тогда g непр-на на $[a, b]$. Сл-но, $g(a)g(b) < 0$. Тогда по лемме (2.1)

$$\exists c \in (a, b) \colon g(c) = 0 \iff f(c) = s$$

□

Задача 2.1. Приведите пример разрывной ф-ции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, т. ч. $\forall [a, b] \subset [0, 1]$, f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$

Напомним, что $I \subset \mathbb{R}$ - промежуток $\iff$

$$\forall x, y \in I([x, y] \subset I)$$

Следствие. *Если ф-ция f непр-на на промеж. I, то $f(I)$ - промежуток.*

Доказательство. Выберем $y_1, y_2 \in f(I)$ $(y_1 < y_2) \Rightarrow$

$$\exists x_1, x_2 \in I\colon (f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2)$$

Если $y_1 < y < y_2$, то, по теореме (2.2) $\exists x \in (x_1, x_2)\colon f(x) = y$. Т. к. I - промежуток, $x_1, x_2 \in I$, то $x \in I$, а значит $y \in f(I)$, т. е. $f(I)$ - промежуток. $\square$

Задача 2.2. Док-те, что если f - непр-на на $[a, b]$, то $f([a, b])$ - отрезок

Лемма 2.3. *Пусть f монотонна на пром-ке I. Если $f(I)$ - это пром-к, то f - непр-на на I.*

Доказательство.

Пусть f нестрого возрастает на I. Если f разрывна в точке $c \in I$. То $f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$ и хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ непуст.

(Если c - концевая точка I, то сущ-ет только один из пределов, для кот. и проводим рассуждение.)
Пусть $Y = (f(c), f(c+0)) \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall t \in I, t \leq c(f(t) \leq f(c))$$

Также

$$\forall t \in I, t > c(f(t) > \inf_{(c, \sup I)} f(x) \geq f(c+0))$$

Сл-но, $f(I)$ не явл. пром-ом. $\square$

Теорема 2.4 (об обратной ф-ции)**.** *Пусть f непр-на и строго монотонна на пром. I, тогда:*

1) $f(I)$ - *пром-ок*

2) $f : I \to f(I)$ *- биекция*

3) $f^{-1} : f(I) \to I$ *- непр-на и строго монотонна на* $f(I)$

Доказательство. По следствию (2), $Y = f(I)$ явл-ся пром-ом. Ф-ция f инъективна в силу строгой монотонности.

Сл-но, $f : I \to Y$ - биекция, и сущ-ют $f^{-1} : Y \to I$

Б. О. О. пусть f строго возрастает на I

Пусть $y_1, y_2 \in Y, y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I\colon f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

Если $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - в силу возрастания $f \Rightarrow y_1 \geq y_2$!!!

Таким образом, если $y_1, y_2 \in Y(y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$ - т. е. f^{-1} строго возрастает на Y.

$f^{-1}(Y) = I$ - пром-к $\Rightarrow f^{-1}$ - непр-на на Y □

Пример. *Для* $\forall x \geq 0, n \in \mathbb{N} \exists! y \geq 0\colon y^n = x$. *Пишут, что:*

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Кроме того, $f(x)\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ *- непр-на и строго монотонна.*

Доказательство. Рассм. ф-цию $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}, g(y) = y^n$

Ф-ция g - непр-на и строго возрастает на $[0; +\infty)$, причём:

$$g(0) = 0, \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$$

По теореме (2.4) $\exists f = g^{-1}\colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

□

2.1 Счётные и несчётные мн-ва

Определение 2.2. Мн-во A наз-ся счётным если $\exists f : \mathbb{N} \to A$ - биекция.

Замечание.

$$A = \{ a_1, a_2, \dots \}$$
$$\forall i, j (i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$$

Пример.

$$\mathbb{Z} \text{ - } \textit{счётно}$$
$$\dots \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$$
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ - } \textit{нечётно} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ - } \textit{чётно} \end{cases}$$

Лемма 2.5. *Всякое бесконечное мн-во $A \subset \mathbb{N}$ - счётно.*

Доказательство. Пусть $n_1 = min(A)$. Если $n_1 \dots n_k$ - определена, то по инд-ции определим:

$$n_{k+1} = min(A \setminus \{ n_1 \dots n_k \})$$

Поскольку при переходе к подмн-ву минимум не уменьшается и $n_{k+1} \notin \{ n_1, \dots n_k \}$, то $n_{k+1} > n_k$

Предположим, что $\exists m \in A$ и $m \neq n_k, \forall k$. Тогда по инд-ции

$$n_k < m, \forall k \Rightarrow m > n_m \geq m!!!$$

Сл-но, $\sigma : \mathbb{N} \to A, \sigma(k) = n_k$ - строго возр. биекция. □

Определение 2.3. Мн-во не более чем счётно, если оно конечно или счётно.

Следствие. *Всякое подмн-во счётного мн-ва не более чем счётно.*

Доказательство. Рассм. конечное подмн-ва A счётного мн-ва X. $g : X \to \mathbb{N}$ - биекция $\Rightarrow$

$$g \colon A \to g(A) \text{ - биекция мн-ва } A \text{ и } g(A) \subset \mathbb{N}$$

□

Теорема 2.6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - *счётно*

Доказательство. Идея: Сделаем таблицу и рассматриваем её подиагонально, затем нумеруем эл-ты в диагоналях.

(k, m)	1	2	3	
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	...
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	...
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	...
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	...

$$p \in \mathbb{N}$$
$$M_p = \{\, (k, m)\colon 1 \le m \le p, k = p + 1 - m \,\}$$
$$g(p) = 1 + 2 + \ldots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$$
$$N_p = \{\, n\colon g(p) + 1 \le n \le g(p) + p = g(p+1) \,\}$$
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(k, m) = g(k + m - 1) + m$$

□

Следствие. *Мн-во $\mathbb{Q}$ - счётно.*

Доказательство. Любое рац. число можно записать в виде несокр. дроби $\frac{p}{q}$, т. е.:

$$f_1\colon r \to (p, q) \text{ - инъекция}$$
$$\mathbb{Q} \to \underset{(p,q)}{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, F = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \text{ - инъекция}$$
$$\Rightarrow F(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ - не более чем счётно и беск} \Rightarrow \text{счётно}$$

□

Теорема 2.7. $\mathbb{R}$ *несчётно*

Доказательство. Пред-м, что $\mathbb{R} = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$
Рассм. $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Разобъём $[a, b]$ на три отр-ка и обозн. $[a_1, b_1]$ тот из ни, который не сод-т x_1. По инд-ции построим п-ть влож. отр-ов $\{\, [a_k, b_k] \,\}$, не содержащую $x_k, \forall k$. Однако сущ-ет точка, общая для всех отр-ов $\Rightarrow$ $\forall n x \in [a, b], x_n \notin x_n \Rightarrow \forall n\colon x_n \neq x$ □