

Матан

Сергей Григорян

18 сентября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 1	3
1.1	Инфа	3
1.2	Учебники	3
1.3	§1. Действительные числа	3
1.3.1	Вспомогательные конструкции	3
1.3.2	Аксиомат. опр-е мн-ва действ. чисел	6
2	Лекция 2	7
2.1	Некот. обозначения	7
2.2	Чем занимаемся дальше	7
2.3	Множество \mathbb{N}	8
2.4	Множества \mathbb{Z} и \mathbb{Q}	9
2.5	Точные грани числовых мн-в	10
3	Лекция 3	11
4	Лекция 4	15
4.1	§2. Предел последовательности	15
4.2	Определение предела	15
5	Лекция 5	20
5.1	Монотонные п-ти	21
5.2	Последовательность вложенных отрезков	23

1 Лекция 1

1.1 Инфа

Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

1.2 Учебники

- Зорич. В. А. "Мат. анализ";
- Виноградов О. Л. "Мат. анализ".

1.3 §1. Действительные числа

1.3.1 Вспомогательные конструкции

$x \in \{a, b\} \Rightarrow x = a$ или $x = b$ - неуп. пара

(a, b) - уп. пара

$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$

A, B - мн-ва, $A \cdot B = \{(a, b) : a \in A \vee b \in B\}$

Определение 1.1. Пусть X, Y - мн-ва. Ф-цией $f: X \rightarrow Y$ наз-ся ф-ла $\overline{P(x, y)}$, т. ч. $\forall x \in X$ сущ-ет утв. $y \in Y$, что $P(x, y)$ - истина. Пишут $y = f(x)$ или $f: x \Rightarrow y$.

Определение 1.2. Ф-ции $f, g: X \rightarrow Y$ называются равными, если $\forall x \in X: (f(x) = g(x))$. Пишут $f = g$.

Обозначение. $f: X \rightarrow Y$, X - область опред. ф-ции

1. $A \subset X$

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, образ A .

$f(X)$ - мн-во значений f .

2. $B \subset Y$

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ - прообраз B .

3. $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow X \Rightarrow f \circ g : Z \rightarrow Y, f \circ g(z) = f(g(z))$ - композиция ф-ций f и g .

Утверждение 1.1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Определение 1.3. Ф-ция $f : X \rightarrow Y$ наз-ся **инъекцией**, если $\forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

сюръекцией, если $f(X) = Y$

биекцией = сюръекцией + инъекция

Пример. 1. $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$

$$f(0) = 1, f(1) = f(2) = 2$$

Это **сюръекция**

2. $f : \{1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

$$f(1) = 2, f(2) = 1$$

Это **инъекция**

Пример. $id : X \rightarrow X, \forall x \in X (id(x) = x)$ - это **тождественная ф-ция**.

Пример. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - биекция

$\Rightarrow y = f(x)$ - имеет **1 решение**. Тогда:

$f^{-1} : Y \rightarrow X, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$ - обратная к f ф-ция.

$$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y$$

Задача 1.1. 1. Композиция инъекций (сюръекций, биекция) яв-ся инъекцией (сюръекцией, биекцией).

2. Обр-я ф-ция к биек. $f : X \rightarrow Y$ - явл. биекцией.

Определение 1.4. Пусть $A, \Lambda \neq \emptyset$

Говорят, что A - **семейство, индексированное эл-ми** Λ , если $\exists \phi : \Lambda \rightarrow A$ - сюръекция.

Пишут $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $a_\lambda = \phi(\lambda)$

$$\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \exists \lambda \in \Lambda (x \in A_\lambda)\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \forall \lambda \in \Lambda (x \in A_\lambda)\}$$

Пример.

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}: n > 1 \text{ и } n \neq 2m: \forall m > 1\}$$

$$A_2 = \{n \in A_1: n \neq 3m: \forall m > 1\}$$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ — *множество простых чисел.*

Теорема 1.1 (Закон Де Моргана). *Для любого мн-ва E верно:*

1.

$$E \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

2.

$$E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

Доказательство.

1.

$$x \in E \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge (\forall \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda))$$

$$\iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \setminus A_\lambda) \iff x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

2.

$$x \in E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge \exists \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda).$$

$$\iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \setminus A_\lambda) \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda).$$

□

1.3.2 Аксиомат. опр-е мн-ва действ. чисел

На мн-ве \mathbb{R} опр-ны операции "+": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, "*": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, удовл. аксиомам.

$$A1: \forall a, b \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$A2: \forall a, b \in \mathbb{R}: a + b = b + a ;$$

$$A3: \exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}: a + 0 = a ;$$

$$A4: \forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}: a + (-a) = 0.$$

$$M1: \forall a, b, c \in \mathbb{R}: (a * b) * c = a * (b * c),$$

$$M2: \forall a, b \in \mathbb{R}: a * b = b * a,$$

$$M3: \exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}, a * 1 = a,$$

$$M4: \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}: a * a^{-1} = 1,$$

$$AM: \forall a, b, c \in R: a * (b + c) = ab + ac$$

На мн-ве \mathbb{R} введено отношение порядка " \leq " удовл. след. аксиомам:

$$O1: \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(i): a \leq a;$$

$$(ii): a \leq b, b \leq a \iff a = b ;$$

$$(iii): a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$O2: \forall a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \vee b \leq a$$

$$O3: \text{Если } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ и } a \leq b, \text{ то } a + c \leq b + c ;$$

$$O4: \text{Если } a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ и } 0 \leq c, \text{ то } ac \leq bc ;$$

Аксиома непрерывности: Для любых непустых $A, B \subset \mathbb{R}$, т. ч. $\forall a \in A, b \in B, a \leq b; \exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, b \in B (a \leq c \leq b)$

2 Лекция 2

2.1 Некот. обозначения

- $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$
- $a \geq b \iff b \leq a$
- $a > b \iff b < a$
- $a - b = a + (-b)$
- $\frac{a}{b} = a * b^{-1} (b \neq 0)$

2.2 Чем занимаемся дальше

Все дальнейшее сводим к аксиомам:

Пример. 1. $\forall a \in R: a * 0 = 0$

Доказательство.

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 \mid - a \cdot 0.$$

$$a * 0 + (-a * 0) = a * 0 + (a * 0 + (-a * 0)).$$

$$0 = a * 0 + 0 = a * 0.$$

□

$$2. (-1) * a + 1 * a = ((-1) + 1) * a = 0 * a = 0$$

Пример. 1. $\forall a, b \in R (a \leq b \Rightarrow -b \leq -a)$

$$-b = a - a - b \leq b - a - b = -a.$$

$$2. \forall a \in R \setminus \{0\}: (a^2 > 0)$$

Доказательство. а) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

$$\text{б) } a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow -(-a^2) = a^2$$

□

Задача 2.1. $P = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$

Док-те, что :

- 1) $x, y \in P \Rightarrow x + y, x * y \in P$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} (x \in P \vee -x \in P)$

Определение 2.1.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Пример. 1. Если $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 0$, то $(|a| \leq M \iff -M \leq a \leq M)$

Доказательство. $|a| \leq M \Rightarrow -|a| \geq -M$

- a) $a \geq 0, -M \leq 0 \leq a = |a| \leq M$
- b) $a < 0, -M \leq -|a| = a < 0 \leq M$

□

2. $\forall a, b \in \mathbb{R} (|a + b| \leq |a| + |b|)$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \pm a &\leq |a|, \pm b \leq |b|. \\ \Rightarrow \pm(a + b) &\leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b| \end{aligned}$$

□

2.3 Множество \mathbb{N}

Определение 2.2. Мн-во $S \subset \mathbb{R}$ наз-ся **индуктивным**, если $1 \in S$ и $(x \in S \Rightarrow x + 1 \in S)$

Замечание. \mathbb{N} - пересечение всех индуктивных мн-в.

На определении \mathbb{N} основан **принцип мат. индукции**.

Пусть $P(n), n \in \mathbb{N}$. Если $P(1)$ - истина и $(\forall n (P(n) - \text{ист.} \Rightarrow P(n + 1) - \text{ист.}))$. То $P(n)$ - истина для $\forall n \in \mathbb{N}$
 $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) - \text{истина}\} \subset \mathbb{N}$ - индуктивно. $\Rightarrow S = \mathbb{N}$

Замечание. Если $x, y \in \mathbb{N}, x < y$, то $y - x = n \in \mathbb{N}$, в частности, $y = x + n \geq x + 1$

Теорема 2.1. Пусть $A \subset \mathbb{N}$ - непустое, тогда $\exists m = \min(A)$ ($m \in A: \forall n \in A(m \leq n)$)

Доказательство.

Предположим, что в A нет мин. эл-та.

Рассм. $M = \{x \in \mathbb{N}: \forall n \in A(x < n)\}$

$1 \in M$ ($1 \notin A$)

Пусть $x \in M$. Предпл., что $x + 1 \notin M$:

$x + 1 \notin M \iff \exists m \in A: (x + 1 \geq m)$

По опр-ю $x \in M \Rightarrow x < m \Rightarrow x + 1 \leq m \Rightarrow m = \min(A)!!!$

Итак $1 \in M(x \in M \Rightarrow x + 1 \in M) \Rightarrow M \subset \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset!!! \quad \square$

2.4 Множества \mathbb{Z} и \mathbb{Q}

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

Пример (Применение аксиомы непрерывности).

$$A = \{a \in \mathbb{R}: a > 0 \wedge a^2 < 2\} \ni 1.$$

$$B = \{b \in \mathbb{R}: b > 0 \wedge b^2 > 2\} \ni 2.$$

Пусть $a \in A, b \in B$

$$0 < b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \Rightarrow 0 < b - a \Rightarrow a < b.$$

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, b \in B: (a \leq c \leq b)$

В част-ти $1 < c < 2$. Покажем, что $c^2 = 2$

Предпл. что $c^2 < 2 \iff c \in A$. Пусть $\varepsilon \in (0; 1)$; тогда:

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon(2c + \varepsilon) < c^2 + 5\varepsilon.$$

$$\varepsilon \leq \frac{2 - c^2}{5}.$$

$$(c + \varepsilon)^2 < c^2 + 5\varepsilon \leq c^2 + 2 - c^2 = 2 \Rightarrow c + \varepsilon \in A!!!.$$

Аналогичным образом, доказываем, что $c^2 > 2$ не выполн-ся.

$$\Rightarrow c^2 = 2$$

2.5 Точные грани числовых мн-в

Определение 2.3. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непусто.

Число M наз-ся **верхней гранью** мн-ва E , если $\forall x \in E (x \leq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным сверху**, если \exists хотя бы одна верхняя грань для E .

Число M наз-ся **нижней гранью** мн-ва E , если $\forall x \in E (x \geq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным снизу**, если \exists хотя бы одна нижняя грань для E .

Мн-во E **ограничено**, если E ограничено сверху и снизу.

Задача 2.2. Док-ть: E - огранич. $\iff \exists C > 0: \forall x \in E (|x| \leq C)$

Определение 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непустое числовое мн-во. Наименьшая из верхних граней мн-ва E наз-ся **точной верхней гранью (супремумом)** мн-ва E ($\sup E$)

Наибольшая из нижних граней мн-ва E наз-ся **точной нижней гранью (инфимумом)** мн-ва E ($\inf E$)

Замечание. Определение точных граней можно записать на языке нер-ств:

$$c = \sup E \iff . \quad (1)$$

$$1) \quad \forall x \in E (x \leq c);$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in E (x > c - \varepsilon)$$

$$b = \inf E \iff . \quad (2)$$

$$1) \quad \forall x \in E (x \geq b);$$

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E (x' < b + \varepsilon)$$

Действ-но, 1) в (1) означает, что c - верх. грань E . 2) в (1) означ, что любое $c' < c$ не явл. верх. гр. E . Сл-но, c - точная верхняя грань E . Аналогично для (2).

Теорема 2.2 (Принцип полноты Вейерштрасса). *Всякое непустое огр. сверху (снизу) мн-во имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и ограничено сверху.

Рассм. $B = \{b \in \mathbb{R} : b - \text{верх. грань } A\}$. Тогда $B \neq \emptyset$ и $\forall a \in A \forall b \in B(a \leq b)$. По аксиоме непр-ти $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B(a \leq c \leq b)$.

Из нер-ва $a \leq c \Rightarrow c$ верх. грань A

Из правого нер-ва любое $c' < c : c' \notin B$, т.е. c' не явл. верх. гранью A .
Сл-но, $c = \sup A$. \square

3 Лекция 3

Теорема 3.1 (аксиома Архимеда). Пусть $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$, т. ч. $na > b$

Доказательство. Предположим, что $\forall n : na \leq b$. Тогда $A = \{na; n \in \mathbb{N}\}$ огр. сверху. По принципу полноты Вейерштрасса $\exists c = \sup A$. Число $c - a$ не явл. верх. гранью A (т. к. $a > 0$)

Тогда $\exists n \in \mathbb{N}(na > c - a)$. Откуда:

$$na + a = (n + 1)a > (c - a) + a = c$$

т. е. $(n + 1)a > c$. Но $(n + 1)a \in A$ (противоречие с тем, что c - верх. грань)!!! \square

Следствие. 1) $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}(n > b), (a = 1)$

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}(\frac{1}{n} < \varepsilon) (\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon})$

Следствие.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{Z}(m \leq x < m + 1) (m - \text{целая часть } x)$$

Доказательство. $(\exists) x \geq 0$. Рассм. $S = \{n \in \mathbb{N} : n > x\}$. По аксиоме архимеда, это мн-во непусто. $\Rightarrow \exists p = \min(S)$. Положим $m = p - 1$. Тогда $m \leq x$ и $m + 1 > x$

$x < 0$. По предыдущему пункту $\exists m' \in \mathbb{Z}(m' \leq -x < m' + 1)$. Положим:

$$m = \begin{cases} -m', x = -m' \\ -m' - 1, x \neq -m' \end{cases} \Rightarrow m \leq x < m + 1 \quad (3)$$

Единственность:

$$\begin{cases} m' \leq x < m' + 1 \\ m'' \leq x < m'' + 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m' - m'' < 1, m' - m'' \in \mathbb{Z} \Rightarrow m' - m'' = 0 \Rightarrow m' = m''$$

□

Пример.

$$\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1, \left\lfloor -\frac{3}{2} \right\rfloor = -2$$

Следствие.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} (a < r < b)$$

Доказательство.

$$\exists n \in \mathbb{N} \left(\frac{1}{n} < b - a \right)$$

$$r = \frac{\lfloor na \rfloor + 1}{n}. \text{ Тогда } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a, r \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

□

Обозначение.

$$n \in \mathbb{N} \cup \{0\} =: \mathbb{N}_0$$

Определение 3.1. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$a^0 = 1, a^{n+1} = a^n a$$

Обозначение. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $m \leq n$, положим:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\prod_{k=m}^n = a_m * a_{m+1} * \dots * a_n$$

Если $m > n$.

Теорема 3.2 (Бином Ньютона).

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}:$$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$0! = 1, (n+1)! = n! * (n+1)$$

Доказательство. Докажем по индукции:

- $n = 1$: Верно
- Предположим, что утв. верно для n :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} = \\ &= C_n^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) a^k b^{n+1-k} + C_n^n a^{n+1} = \left[C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \iff \right] \\ &\quad \left[\iff \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \right] = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Ч. Т. Д.

□

Следствие. Пусть $a \geq 0, n, k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n$. Тогда:

$$(1 + a)^n \geq 1 + C_n^k a^k$$

Обозначение.

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

- расширенная числовая прямая

Считают, что $\forall x \in \mathbb{R} (-\infty < x < +\infty)$

Введём допус. операции $x \in \mathbb{R}$

- $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$
- $x - (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$
- $x * (\pm\infty) = \pm\infty, x > 0$
- $x * (\pm\infty) = \mp\infty, x < 0$
- $\frac{x}{\pm\infty} = 0$

Кроме того:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

НЕДОПУСТИМЫЕ операции:

- $(+\infty) - (+\infty)$
- $(+\infty) + (-\infty)$
- $(-\infty) - (-\infty)$
- $(-\infty) + (+\infty)$
- $0 * \pm\infty$
- $\pm\infty * 0$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Соглашение: $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.

- Если E не огр. сверху, то $\sup E = +\infty$
- Если E не огр. снизу, то $\inf E = -\infty$

Определение 3.2. $I \subset \mathbb{R}$ называется промежутком, если $\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}(a \leq x \leq b \Rightarrow x \in I)$

Лемма 3.3. *Любой промежуток - одно из следующих мн-в:*

- \emptyset
- \mathbb{R}
- $(a, +\infty)$
- $[a, +\infty)$
- $(-\infty, b)$
- $(-\infty, b]$
- $[a, b]$
- (a, b)
- $[a, b)$
- $(a, b]$

Доказательство. I - промежуток, $I \neq \emptyset$

$$a := \inf I, b := \sup I \Rightarrow a \leq b$$

- Если $a = b$, то $I = \{a\}$
- Если $a < b$ и $a < x < b$. По опр. точных граней $\exists x', x'' \in I: (x' < x < x'') \Rightarrow x \in I$

Итак, $(a, b) \subset I \subset [a, b]$

□

4 Лекция 4

4.1 §2. Предел последовательности

4.2 Определение предела

Определение 4.1. $a : \mathbb{N} \rightarrow A$ - п-ть эл-ов мн-а A . Значение $a(n)$ - наз-ся n -ым членом п-ти. (Обозначается a_n). Сама п-ть обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$

Если $A = \mathbb{R}$ - то $\{a_n\}$ - числовая п-ть.

Пример. 1)

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \{c\}, c \in \mathbb{R}$$

Здесь постоянная п-ть ($a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$)

2) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ - п-ть Фиббоначи.

Определение 4.2. Число a наз-ся пределом п-ти $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N , что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$.
Обозначается, как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Определение 4.3 (В кванторах).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$

Или, $a_n \rightarrow a$ (при $n \rightarrow \infty$)

Замечание.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0, M = \{n \in \mathbb{N}: a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, M - \text{конечно}$$

Определение 4.4. Если $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, то $\{a_n\}$ наз-ся **сходящейся п-тью**, иначе - **расходящейся п-тью**

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ нам подойдёт $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$. Если $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

Теорема 4.1. (О единственности предела) Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, то $a = b$.

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опред. предела $\exists N_1, \forall n \geq N_1 (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ и $\exists N_2, \forall n \geq N_2 (|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Положим $N = \max(N_1, N_2)$:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое \Rightarrow , то $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$

□

Задача 4.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$$

Определение 4.5. П-ть $\{a_n\}$ наз-ся **ограниченной**, если $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ - ограничено.

Теорема 4.2. (Об ограниченности сходящейся п-ти) Если $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. По опред. предела (для $\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N (a - 1 < a_n < a + 1)$. Положим $m = \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, a - 1\}$, $M = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, a + 1\}$. Тогда $m \leq a_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. \square

Замечание. Обратное утв. **неверно**:

Пример.

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$$

Предположим, что a_n сходится:

По опред. предела ($\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N (a - 1 < (-1)^n < a + 1)$

- При чётном $n \Rightarrow 1 < a + 1$
- При нечётном $n \Rightarrow a - 1 < -1$

$\Rightarrow a < 0 \wedge a > 0!!!$ - противоречие

Лемма 4.3. Для всякого $m \in \mathbb{N}$ п-ти $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, где $b_n = a_{n+m}, \forall n \in \mathbb{N}$ имеют предел одновременно, и если имеют, то пределы равны.

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N_1: (|a_n - a| < \varepsilon) &\Rightarrow (\forall n \geq N_1 (|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) \\ (\forall n \geq N_2 (|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) &\Rightarrow (\forall n \geq N_2 + m (|a_n - a| < \varepsilon)) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \end{aligned}$$

\square

Определение 4.6. П-ть $\{b_n\}$ об-ся $\{a_{n+m}\}$ и наз-ся m -ным хвостом $\{a_n\}$

Теорема 4.4 (О пределе в нер-вах). Если $a_n \leq b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $a \leq b$

Доказательство. От прот. Пусть $b < a$. По опред. предела

$$\exists N_1: \forall n \geq N_1 (a - \frac{a-b}{2} < a_n)$$

$$\exists N_2: \forall n \geq N_2 (b_n < b + \frac{a-b}{2})$$

Положим $N = \max(N_1, N_2)$, тогда:

$$\frac{a+b}{2} < a_N \text{ и } b_N < \frac{a+b}{2} \Rightarrow b_N < a_N!!!$$

□

Замечание.

Пример.

$$0 < \frac{1}{2}, \text{ но } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N (a_n < b_n)$

Теорема 4.5 (О зажатой п-ти). Если $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (a - \varepsilon < a_n)$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (b_n < a + \varepsilon)$$

Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. Ч. Т. Д.

□

Пример.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$$

- $q = 0$: верно

$$\bullet \quad q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha, \alpha > 0$$

$$\frac{1}{|q|^n} = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{n\alpha} \left(\frac{1}{n\alpha} \rightarrow 0 \right) \Rightarrow |q|^n \rightarrow 0$$

Теорема 4.6. (Арифметические операции с пределами) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогда:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

$$3) \quad \text{Если } b \neq 0 \text{ и } b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ то}$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, n \geq N_1 (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, n \geq N_2 (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) По теор. 2 п-ть $\{a_n\}$ огр., т. е.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N} (|a_n| \leq C) |b| \leq C$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

Тогда $\forall n > N = \max(N_1, N_2)$:

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < C \frac{\varepsilon}{2C} + C \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

3) Т. к. $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$, то дост-но д-ть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, и восп. утв. 2: Т. к. $b \neq 0$, то $\exists N_1, \forall n \geq N_1 (|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. Поэтому:

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| \leq \frac{|b|}{2} + |b_n|,$$

откуда:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2},$$

а значит: $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall n \geq N_1$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела: $\exists N_2, \forall n \geq N_2 (|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} \varepsilon)$

Положим $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда при $\forall n \geq N$:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{2}{|b|^2} \frac{|b|^2}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

□

5 Лекция 5

Пример.

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + n} \leq a_n \leq \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq a_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n^2}} \left(\frac{2}{n^2} \rightarrow 0, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Определение 5.1. Посл-ть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. малой**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

Замечание.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \alpha_n - \text{б. м.}$$

Пример. Пусть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ - б. м., а $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огранич. Тогда: $\{\alpha_n\beta_n\}_1^\infty$ - б. м.

Доказательство. Т. к. $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огр., то $\exists C > 0: \forall n (|\beta_n| \leq C)$

$$-C|\alpha_n| \leq \alpha_n\beta_n \leq C|\alpha_n|$$

Крайние части $\rightarrow 0 \Rightarrow$ По. т. о двух полицейских $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n\beta_n = 0$ \square

5.1 Монотонные п-ти

Определение 5.2. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого возрастающей** (строго возрастающей), если

$$a_n \leq a_{n+1} (a_n < a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого убывающей** (строго убыв.), если:

$$a_n \geq a_{n+1} (a_n > a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Такие п-ти наз-ся **монотонными**.

Замечание. Из опр-я следует, что $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возрастает $\iff \{-a_n\}_1^\infty$ нестрого убывает.

Замечание. Если $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n, m (n < m \rightarrow a_n \leq a_m)$

Теорема 5.1 (Теорема о пределе монотонной п-ти). Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возрастает и огр. сверху, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убывает и огр. снизу, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$

Доказательство. Док-ем первое утв. По условию $\exists c = \sup\{a_n\}_1^\infty \in \mathbb{R}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. супремума $\forall n (a_n \leq c)$, также:

$$\exists N (a_N > c - \varepsilon)$$

Поскольку $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $a_n \geq a_N, \forall n \geq N \Rightarrow$ при всех таких $n \geq N$ имеем:

$$a_N \leq a_n$$

$c - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq c < c + \varepsilon$, откуда

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

Второе утв. док-ся аналогично. □

Лемма 5.2 (Нер-во Бернулли). Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \geq -1$, то:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Доказательство. МММ:

$n = 1$ Верно.

$n \Rightarrow n+1$ Пусть утв. верно для n . Тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

□

Пример. Для $\forall x \in \mathbb{R}$ n -ть $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ сходится.

Доказательство. Зафикс. $m \in \mathbb{N}$, что $m \geq |x|$. Тогда при:

$$n \geq m: a_n(x) > 0,$$

а также:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(1 + \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{x}{n})^n} = (1 + \frac{x}{n}) \left(\frac{1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n} + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1} = (1 + \frac{x}{n}) \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1}$$

Исследуем: $(-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}})$. Она:

$$\begin{cases} > 0, x < 0 \\ \geq -1, x \geq 0 \end{cases}$$

По нер-ву Бернулли:

$$(1 + \frac{x}{n}) \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1 + \frac{x}{n}} \right)^{n+1} \geq (1 + \frac{x}{n}) (1 - \frac{\frac{x}{n}}{1 + \frac{x}{n}}) = 1$$

Итак, $\{a_n\}_1^\infty(x)$ нестрого возр. при $n \geq m$. По доказанному $a_n(-x) \geq a_m(-x)$, при $n \geq m$.
Т. к.

$$a_n(x)a_n(-x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq 1,$$

то:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{a_n(-x)} \leq \frac{1}{a_m(-x)}, \text{ т. е.}$$

$\{a_n\}_1^\infty$ огр. сверху.

Сл-но, по теореме о пределе монот. посл-ти. $\{a_n(x)\}_1^\infty$ сход-ся. \square

Определение 5.3.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 5.1. Док-те, что $2 < e < 3$

5.2 Последовательность вложенных отрезков

Определение 5.4. П-ть отрезков $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **вложенной**, если $\forall n \in \mathbb{N} ([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$

Если к тому же, $b_n - a_n \rightarrow 0$, то п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **стягивающейся**.

Теорема 5.3 (Кантор). *Всякая п-ть вложенных отрезков имеет общую точку. Если п-ть стягивающаяся, то такая точка единственная.*

Доказательство. Пусть задана п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ вложенных отр-ов. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и огр. сверху (числом b_1).

П-ть $\{b_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и огр. снизу (числом a_1)

$\Rightarrow \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ сход., $a_n \rightarrow \alpha, b_n \rightarrow \beta$ и $\alpha \leq \beta$.

Итак $\forall n (a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n)$, т. е.:

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Если п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ - стягив., то $b_n - a_n \rightarrow 0$

Пусть $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, тогда $|x - y| \leq b_n - a_n \Rightarrow x = y$

Т. е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = x$, где $x = \alpha = \beta$. \square