АлГем

Сергей Григорян

18 сентября 2024 г.

Содержание

1 Декартова система коор-т

$$G = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2}\end{pmatrix}$$

- ОНБ

$$G'\text{- } G \text{ повёрнутый на } \alpha$$
$$\overline{e_1}' = \cos\alpha\overline{e_1} + \sin\alpha\overline{e_2}$$
$$\overline{e_2}' = -\sin\alpha\overline{e_1} + \cos\alpha\overline{e_2}$$
$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} = R(\alpha) \text{ - Rotation - поворот.}$$

Утверждение 1.1. *Пусть* $S = S_{G\to G'}$. *Пусть* $T = S_{G'\to G''}$. *Тогда:*

$$ST = S_{G\to G''}$$

Доказательство.

$$G' = GS, G'' = G'T \Rightarrow G'' = G'T = GST$$

□

Утверждение 1.2. *Пусть* S *- матрица перехода от* G *к* G'. T *- матр. перехода от* G' *к* G. *Тогда:*

$$ST = TS = E \text{ - единичная матрица}$$

Доказательство.

$$G'' = G \Rightarrow ST \text{ - матрица перехода от } G \text{ к } G \Rightarrow ST = E$$

$$TS \text{ - матрица перехода от } G' \text{ к } G' \Rightarrow TS = E$$

□

Обозначение. ***Единичная матрица*** E *- диагональная матрица с единицами на главной диагонали.*

$$E = \begin{pmatrix}1 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

<u>Определение</u> 1.1. Если выполняется рав-во $ST = TS = E$, то матрица T называется **обратной** к S.

<u>Определение</u> 1.2. Матрица наз-ся **обратимой**, если у неё есть обратная матрица.

<u>Утверждение</u> 1.3. *Если обратная матрица сущ-ет, то она единственная.*

Доказательство. От. прот. Пусть $A^{-1}, \overline{A}^{-1}$ - обратные матрицы к матр. A.

$$A^{-1} = EA^{-1} = (\overline{A}^{-1}A)A^{-1} = \overline{A}^{-1}(AA^{-1}) = \overline{A}^{-1}E = \overline{A}^{-1}$$

□

<u>Следствие</u>. *Матрица перехода от одного базиса к другому* ***всегда обратима.***

<u>Задача</u> 1.1. Док-ть, что $R(\alpha)$ обладает св-вами:

1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$

2) $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^T$

<u>Задача</u> 1.2. Пусть $\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ (отн. ОНБ G) - вектор, выход. из нач. коор-т. $\overline{b}$ - вектор $\overline{a}$ повернутый на α, тогда:

$$\overline{b} = R(\alpha), \overline{a} = R(\alpha)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

<u>Определение</u> 1.3. Пусть т. O - фикс. точка, начало коор-т. G базис в V_i. Тогда: (O, G) - ДСК

<u>Определение</u> 1.4. ДСК наз-ся **прямоугольной**, если G - ОНБ.

<u>Определение</u> 1.5. A - точка. Тогда коор-ты вектора $\overline{OA}$ наз-ся коор-тами точки A в ДСК (O, G):

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha \iff \overline{OA} = G\alpha = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.4. $A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = G\beta - G\alpha = G(\beta - \alpha)$$

Итого: чтобы найти вектор по его концам, нужно из коор-ты конца вычесть коор-ту начала.

Утверждение 1.5 (О делении отрезка в данном соотношении)**.**

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta$$

Пусть т. C делит отрезок $[A, B]$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда:

$$C \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \frac{\mu\alpha + \lambda\beta}{\lambda + \mu} \iff$$

$$\iff \overline{c} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b} \text{ - выпуклая ЛК}$$

Доказательство.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\overline{b} - \overline{a})$$

$$\overline{c} = \alpha + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\overline{b} - \overline{a}) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu})\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b}$$

□

Теорема 1.1 (Об изменении коор-т точки при замене ДСК)**.** *Пусть в V_i фикс.: (O, G) (I ДСК) и (O', G') (II ДСК).*

Пусть $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \alpha$ и $A \underset{(O',G')}{\longleftrightarrow} \alpha'$ и пусть $S = S_{G \to G'}$

*(***Картинка***)*

Тогда $\alpha = S\alpha' + \gamma$

Доказательство.

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$$

$$\overline{OA} = G\alpha$$

$$\overline{OO'} + \overline{O'A} = G\gamma + G'\alpha' = G\gamma + GS\alpha' = G(S\alpha' + \gamma)$$

□

2 Скалярное произведение

Определение 2.1. V_i. **Скалярное произведение векторов** $\overline{a}$ **и** $\overline{b}$ обозначаем $(\overline{a},\overline{b})$ (в физике $\overline{a}\cdot\overline{b}$). Это число, равное:

$$(\overline{a},\overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\alpha$$

$$\alpha = \angle(\overline{a},\overline{b})$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скал. произ. = 0.

Обозначение.

$$(\overline{a},\overline{a}) = |\overline{a}|^2 \text{ - } \textit{скалярный квадрат } \overline{a}$$

Замечание.

$$(\overline{a},\overline{b}) = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$$

Определение 2.2. (***Картинка***)

Вектор, порождаемые напр. отр-ом $\overline{OA'}$ наз-ся проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$:

$$pr_{\overline{b}}\overline{a} = \overline{OA'}$$

$$(pr_{\overline{b}}\overline{a} = 0 \Rightarrow (\overline{a},\overline{b}) = 0)$$

Утверждение 2.1. *(Линейность векторной проекции)*

a) $pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}) = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})(\overline{b}\neq\overline{o})$ - *ассоциативность*

b) $\forall\lambda\in\mathbb{R}\colon pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$ - *однородность*

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}) = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_1} + \overline{A'_1A'_2} = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})$$

b) Для $\lambda > 0$: (****Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \overline{OA'} = \lambda\overline{OA'} = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$$

□

Утверждение 2.2. *Пусть $\overline{b} \neq \overline{o}$. Тогда:*

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство.

$$\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \phi.$$

- Если $\phi = \frac{\pi}{2}$ - рав-во верно.
- Если $\overline{a} = \overline{o}$ - рав-во верно
- Пусть $\phi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$.

$$|pr_{\overline{b}}(\overline{a})| = |\overline{a}||\cos\phi| = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * 1, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * (-1), \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases} = (\overline{a}, \overline{b})$$

□

Теорема 2.1 (О св-вах скалярного произведения). *1. Симметричность* $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

2. Аддитивность по I арг-ту: $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$

3. Однородность по I арг-ту: $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$

4. Положс. определённость: $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0, \forall\overline{a}$ *и* $(\overline{a}, \overline{a}) \iff \overline{a} = \overline{o}$

Доказательство. 3) При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ очев. При $\lambda > 0$:

$$\angle(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$

$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}) := |\lambda\overline{a}||\overline{b}|\cos(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

2)

$$(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}), \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{bmatrix} pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) = \lambda_1\overline{b} \\ pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}) = \lambda_2\overline{b} \end{bmatrix} =$$

$$= ((\lambda_1 + \lambda_2)\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda_1(\overline{b}, \overline{b}) + \lambda_2(\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1\overline{b}, \overline{b}) + (\lambda_2\overline{b}, \overline{b}) =$$
$$= (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}), \overline{b}) + (pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}), \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$$

□

<u>**Утверждение**</u> **2.3.** *Пусть* $\overline{b} \neq \overline{o}$. *Тогда:*

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2} * \overline{b}$$

Доказательство.

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \lambda \overline{b} \mid \cdot \overline{b}$$

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda |\overline{b}|^2$$

$$\lambda = \frac{(pr_{\overline{b}}(\overline{a}))}{|\overline{b}|^2} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2}$$

□