Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

2 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 4

1.1 Системы связок

Бывают двух типов:

- Полные (все ф-ции выразимы)

  Пример. – $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$
  - $\{\neg, \wedge\}$
  - $\{\neg, \vee\}$
  - $\{1, \oplus, \wedge\}$
  - $\{\to, 0\}$

    Доказательство. $\neg p = p \to 0$
    $p \vee q = \neg p \to q$ □

- Неполные
  - $\{\to, \wedge, \vee\}$ - сохраняют 1
  - $\{\wedge, \oplus\}$ - сохраняют 0
  - $\{\wedge, \vee, 0, 1\}$ - монотонность
  - $\{\neg, maj_3\}$ - самодвойственные ($f(\neg\overline{p}) = \neg f(\overline{p}); \overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$)
    Иными словами, $f = f^*$: $f^*(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \neg f(\neg p_1, \neg p_2, \ldots, \neg p_n)$

    Пример.

$$\wedge^* = \vee, \vee^* = \wedge$$

$$\neg(\neg p \wedge \neg q) = p \vee q$$

$$\oplus^* = \leftrightarrow$$

$$\neg(\neg p \oplus \neg q) = \neg(p \oplus q) = (p \leftrightarrow q)$$

$$h(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(g_1(p_1, \ldots, p_n), g_2(p_1, \ldots, p_n), \ldots, g_n(p_1, \ldots, p_n))$$

$$h(\neg p_1, \ldots, \neg p_n) = f(g_1(\neg p_1, \ldots, \neg p_2), \ldots, g_n(\neg p_1, \ldots, \neg p_n))$$

$$h(\neg p_1, \ldots, \neg p_n) = f(\neg g_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, \neg g_n(p_1, \ldots, p_n))$$

$$h(\neg p_1, \ldots, \neg p_n) = \neg f(g_1(p_1, \ldots, p_n), \ldots, g_n(p_1, \ldots, p_n)) = \neg h(p_1, \ldots, p_n)$$

– $\{\oplus, 1\}$ - Линейные (Афинные) - ф-ции, задающиеся линейными мн-нами Жегалкина

Теорема 1.1 (Критерий Поста)**.** *Система связок полна* $\iff$ *она не является подмн-вом ни одного из 5-ти классов:*

- P_0 - *сохр. 0*
- P_1 - *сохр. 1*
- M - *монотонные*
- $D(S)$ - *самодвойственные*
- L - *линейные*

$\iff$ *система содержит некот. ф-цию (ф-ции):*

$$f_0 \notin P_0, f_1 \notin P_1, g \notin M, h \notin D, R \notin L$$

Доказательство.

Шаг 1

$$f_0(0,0,\ldots,0) = 1, (\text{т. к. } f_0 \text{ не сохр. } 0)$$

$$f_0(1,1,\ldots,1) = \left[\begin{array}{l} 0 \Rightarrow f_0(p,p,p,\ldots,p) = \neg p \\ 1 \Rightarrow f_0(p,p,p,\ldots,p) = 1 \end{array}\right.$$

Шаг 2

$$f_1(1,\ldots,1) = 0$$

$$f_1(0,\ldots,0) = \left[\begin{array}{l} 0 \Rightarrow f_1(p,\ldots,p) = 0 \\ 1 \Rightarrow f_1(p,\ldots,p) = \neg p \end{array}\right.$$

$f_1 \backslash f_0$	$\neg$	1
$\neg$	шаг 4	$0 = \neg 1$
0	$1 = \neg 0$	шаг 3

0, 1, $\neg \to$ шаг 5

Шаг 3 $0, 1, g \notin M \mapsto \neg$

Пример.

$$\neg p = (p \to 0)$$
$$\neg p = (p \oplus 1)$$
$$\neg p = exact_{1,3}(0, 1, p)$$

Определение 1.1. **Монотонная** ф-ция - ф-ция, т. ч.:

$$\forall p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n \colon (\forall i \colon (p_i \le q_i) \to f(p_1, \ldots, p_n) \le f(q_1, \ldots, q_n))$$

$\Rightarrow$ ф-ция **немонот.** $\iff$:

$\exists p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n(\forall i \colon (p_i \le q_i) \to g(p_1, \ldots, p_n) = 1 \wedge g(q_1, \ldots, q_n) = 0)$

Лемма 1.2. *g немонотонна* $\Rightarrow$

$$\exists i, \exists (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \colon$$
$$g(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 1 \wedge g(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n) = 0$$

Тогда $\neg p = g(a_1, \ldots, a_{i-1}, p, a_{i+1}, \ldots, a_n)$

Шаг 4 $\neg, h \notin D \mapsto 0, 1$

$$h \notin D \Rightarrow \exists (a_1, \ldots, a_n)$$
$$h(a_1, \ldots, a_n) = h(\neg a_1, \ldots, \neg a_n)$$

Пример.

$$\neg, \oplus \Rightarrow p \oplus \neg p = 1$$
$$\neg, \wedge \Rightarrow p \wedge \neg p = 0$$

Общий подход:

$$h(0, 1, 1, 0, 1, 0) = h(1, 0, 0, 1, 0, 1) = 1$$
$$\Rightarrow h(\neg p, p, p, \neg p, p, \neg p) = 1, p = \overline{0, 1}$$

Шаг 5

$$\neg, 0, 1, k \notin L$$

Б. О. О. в мн-не Жегалкина ф-ции k есть слагаемое с x_1x_2

$k(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 \cdot A(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_1 \cdot B(x_3, \ldots, x_n) \oplus x_2 \cdot C(x_3, \ldots, x_n) + D(x_3, \ldots, x_n)$

Мн-н A непустой $\Rightarrow \exists (a_3, \ldots, a_n)\colon A(a_3, \ldots, a_n) = 1$
Тогда $k(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) = x_1x_2 \oplus x_1 \cdot B \oplus x_2 \cdot C \oplus D$

Использование орицания позволяет менять 1

- $B = C = 0 \Rightarrow$ выразили x_1, x_2, т. е. $\wedge$. $\wedge, \neg \mapsto$ ВСЁ
- $B = C = 1 \Rightarrow x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2$, т. е. $\vee$. $\vee, \neg \mapsto$ ВСЁ
- $B = 0, C = 1 \Rightarrow 1 \oplus x_1 \oplus x_1x_2$, т. е. $\rightarrow$. $\rightarrow, \neg \mapsto$ ВСЁ

$\square$

2 Лекция 5

Пропозициональные ф-лы:

- Всегда = 1 - Тавтологии - Выполнимые
- М. Б. = 0 и = 1 - Опровержимые - Выполнимые
- Всегда = 0 - Опровержимые - Противоречия

"Важные"тавтологии (Логические законы):

1) Закон непротиворечия:
$$\neg(A \wedge \neg A)$$

2) Закон двойного отрицания:
$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

3) Закон исключённого третьего:
$$A \vee \neg A$$

Пример. *Неконструктивное док-во с использованием закона исключённого третьего:*

Теорема 2.1. $\exists x, y \colon x \notin Q, y \notin Q, x^y \in Q$

Доказательство. Рассм. выр-е: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$:

1) Оно $\in Q \Rightarrow$ нашли пример
2) Оно $\notin Q \Rightarrow x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$:

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$\square$

4) Контрапозиция:

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

5) Законы Де Моргана:

$$\neg(A \land B) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg B)$$

$$\neg(A \lor B) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$$

Задача о выполнимости условий: даны ф-лы $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$

Вопрос: могут ли они все быть одновременно истинны?

Это эквив. вопросу о выполнимости:

$$\phi_1 \land \phi_2 \land \ldots \land \phi_n$$

Пример. *Превращение мат. задачи в задачу выполнимости:*
1976г. - з-ча 4 красок решена комп. перебором.
Вершина графа $v \mapsto 2$ бита. (p_v, q_v) - (область на карте)
u, v - соседний области $\Rightarrow$ условие на отличие цветов:

$$(p_u \neq p_v) \lor (q_u \neq q_v)$$

2.1 Логический вывод

Определение 2.1. Логический вывод - п-ть формул, в кот. каждая ф-ла либо является аксиомой, либо получается из более ранних по одному из правилу вывода.

Замечание.

$$(A \to (B \to C)) \text{ - } \textit{сл-ие из 2 посылок}$$

Схемы аскиом (Аксиомы - рез-т подстановки конкретных ф-л вместо A, B, C)

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3) $(A \land B) \to A$
4) $(A \land B) \to B$
5) $A \to (B \to (A \land B))$
6) $A \to (A \lor B)$
7) $B \to (A \lor B)$
8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B) \to C)$ - "Разбор случаев"
9) $\neg A \to (A \to B)$
10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - "Рассуждение от противного"
11) $A \lor \neg A$

Правило вывода: modus ponens:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Теорема 2.2 (О корректности). *A - выводима $\Rightarrow$ A - тавтология*

Доказательство. Акс. 1-11 - тавтологии.

$$\begin{cases} A \text{ - тавтология} \\ A \to B \text{ - тавтология} \end{cases} \Rightarrow B \text{ - тавтология}$$

$\square$

Теорема 2.3 (О полноте)**.** *A - тавтология $\Rightarrow$ A - выводима*

Обозначение.
$\vdash A$ - *A выводима*
$\models A$ - *A тавтология*

Пример. $\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$

1) $A \to (B \vee A)$ - *акс. 7*

2) $B \to (B \vee A)$ - *акс. 6*

3) $(A \to (B \vee A)) \to ((B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A)))$ - *акс. 8*

4) $(B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A))$ - *modus ponens 1, 3*

5) $(A \vee B) \to (B \vee A)$ - *modus ponens 2, 4*

Пример. $\vdash (A \to A)$ - *Закон тождества.*

1) $A \to ((A \to A) \to A)$ - *акс. 1*

2) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - *акс. 2*

3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - *modus ponens 1, 2*

4) $A \to (A \to A)$ - *акс. 1*

5) $A \to A$ - *modus ponens 4, 3*