Матан. Лекция 2

Сергей Григорян

6 сентября 2024 г.

1 Некот. обозначения

- $a < b \iff a \leq b \land a \neq b$
- $a \geq b \iff b \leq a$
- $a > b \iff b < a$
- $a - b = a + (-b)$
- $\frac{a}{b} = a * b^{-1}(b \neq 0)$

2 Чем занимаемся дальше

Все дальнейшее сводим к аксиомам:

Пример. *1.* $\forall a \in R\colon a * 0 = 0$

Доказательство.

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0| - a \cdot 0.$$

$$a * 0 + (-a * 0) = a * 0 + (a * 0 + (-a * 0)).$$

$$0 = a * 0 + 0 = a * 0.$$

□

2. $(-1) * a + 1 * a = ((-1) + 1) * a = 0 * a = 0$

Пример. *1.* $\forall a, b \in R(a \leq b \Rightarrow -b \leq -a)$

$$-b = a - a - b \leq b - a - b = -a.$$

2. $\forall a \in R \backslash \{0\}\colon (a^2 > 0)$

Доказательство. a) $a > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

b) $a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow (-a)(-a) > 0 \Rightarrow -(-a^2) = a^2$

□

Задача 2.1. $P = \{x \in R\colon 0 < x\}$

Док-те, что :

1) $x, y \in P \Rightarrow x + y, x * y \in P$

2) $\forall x \in R \backslash \{0\} (x \in P \vee -x \in P)$

Определение 2.1. $|x| = x \iff x \geq 0$ или $-x \iff x < 0$

Пример. *1. Если $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 0$, то ($|a| \leq M \iff -M \leq a \leq M$)*

Доказательство. $|a| \leq M \Rightarrow -|a| \geq M$

a) $a \geq 0, -M \leq 0 \leq a = |a| \leq M$

b) $a < 0, -M \leq -|a| = a < 0 \leq M$

□

2. $\forall a, b \in R(|a + b| \leq |a| + |b|)$

Доказательство.

$$-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|.$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

todo □

3 Множество $\mathbb{N}$

Определение 3.1. Мн-во $S \subset \mathbb{R}$ наз-ся **индуктивным**, если $1 \in S$ и $(x \in S \Rightarrow x + 1 \in S)$

Замечание. $\mathbb{N}$ - *пересечение всех индуктивных мн-в.*

На определении $\mathbb{N}$ основан **принцип мат. индукции.**

Пусть $P(n), n \in \mathbb{N}$. Если $P(1)$ - истина и $(\forall n(P(n)$ - ист. $\Rightarrow P(n+1)$ - ист.)). То $P(n)$ - истина для $\forall n \in N$

$S = \{n \in \mathbb{N}\colon P(n)$ - истина$\} \subset \mathbb{N}$ - индуктивно. $\Rightarrow S = \mathbb{N}$

Замечание. *Если $x, y \in \mathbb{N}, x < y$, то $y - x = n \in N$, в частности, $y = x + n \geq x + 1$*

Теорема 3.1. *Пусть $A \subset N$ - непустое, тогда* $\exists m = min(A)(m \in A \colon \forall n \in A(m \leq n))$

Доказательство.

Предположим, что в A нет мин. эл-та.
Рассм. $M = \{x \in \mathbb{N} \colon \forall n \in A(x < n)\}$
$1 \in M$ $(1 \notin A)$
Пусть $x \in M$. Предпл., что $x + 1 \notin M$:
$x + 1 \notin M \iff \exists m \in A \colon (x + 1 \geq m)$
По опр-ю $x \in M \Rightarrow x < m \Rightarrow x + 1 \leq m \Rightarrow m = min(A)$!!!
Итак $1 \in M(x \in M \Rightarrow x + 1 \in M) \Rightarrow M \subset \mathbb{N} \Rightarrow M = \mathbb{N} \Rightarrow A = \emptyset$!!! □

4 Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Z} = -\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$$
$$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \colon m \in \mathbb{Z} \wedge n \in N\}$$

Пример (Применение аксиомы непрерывности).

$$A = \{a \in \mathbb{R} \colon a > 0 \wedge a^2 < 2\} \ni 1.$$

$$B = \{b \in \mathbb{R} \colon b > 0 \wedge b^2 > 2\} \ni 2.$$

Пусть $a \in A, b \in B$

$$0 < b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) \Rightarrow 0 < b - a \Rightarrow a < b.$$

По аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A, b \in B \colon (a \leq c \leq b)$
В част-ти $1 < c < 2$. *Покажем, что* $c^2 = 2$
Предпл. что $c^2 < 2 \iff c \in A$. *Пусть* $\varepsilon \in (0; 1)$ *; тогда:*

$$(c + \varepsilon)^2 = c^2 + \varepsilon(2c + \varepsilon) < c^2 + 5\varepsilon.$$

$$\varepsilon \leq \frac{2 - c^2}{5}.$$

$$(c + \varepsilon)^2 < c^2 + 5\varepsilon \leq c^2 + 2 - c^2 = 2 \Rightarrow c + \varepsilon \in A!!!.$$

Аналогичным образом, доказываем, что $c^2 > 2$ *не выполн-ся.*

$$\Rightarrow c^2 = 2$$

5 Точные грани числовых мн-в

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непусто.

Число M наз-ся **верхней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E(x \leq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным сверху**, если $\exists$ хотя бы одна верхняя грань для E.

Число M наз-ся **нижней гранью** мн-ва E, если $\forall x \in E(x \geq M)$

Мн-во E наз-ся **ограниченным снизу**, если $\exists$ хотя бы одна нижняя грань для E.

Мн-во E **ограничено**, если E ограничено сверху или снизу.

Задача 5.1. Док-ть: E - огранич. $\iff \exists C > 0 \colon \forall x \in E(|x| \leq C)$

Определение 5.2. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - непустое числовое мн-во. Наименьшая из верхних граней мн-ва E наз-ся **точной верхней гранью (супремумом)** мн-ва E ($\sup E$)

Наибольшая из нижних граней мн-ва E наз-ся **точной нижней гранью (инфимумом)** мн-ва E ($\inf E$)

Замечание. *Определение точных граней можно записать на языке нерств:*

$$c = \sup E \iff . \tag{1}$$

1) $\forall x \in E(x \leq c)$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in E(x > c - \varepsilon)$

$$b = \inf E \iff . \tag{2}$$

1) $\forall x \in E(x \geq b)$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in E(x' < b + \varepsilon)$

Действ-но, 1) *в* (1) *означает, что c - верх. грань E.* 2) *в* (1) *означ, что любое $c' < c$ не явл. верх. гр. E. Сл-но, c - точная верхняя грань E. Аналогично для* (2).

Теорема 5.1 (Принцип полноты Вейрштрасса)**.** *Всякое непустое огр. сверху (снизу) мн-во имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство. Пусть E - мн-во, огр. сверху. Тогда пусть C - мн-во верхних граней E. Если у него есть минимум, то он, очевидно, и является $\sup E$. Покажем, что он есть.

По опр. $C = \{x \in R\colon \forall y \in E(x \geq y)\} \iff$ мн-во C лежит правее мн-ва E. Сл-но, для мн-в C, E выполняется аксиома непрерывности, т. е.:

$$\exists x\colon \forall c \in C, e \in E\colon e \leq x \leq c.$$

$\square$