Матан

Сергей Григорян

15 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 13

1.0.1 Долг прошлой жизни

Теорема 1.1 (О разрывах монот. ф-ции)**.** *Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Если f монотонна на (a, b), то f на (a, b) может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть f нестрого возр. на (a, b). Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т. $c \in (a, b)$ $\exists$ конечные $f(c-0), f(c+0)$, причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на (a, b) разрывы только I рода.

Пусть $c, d \in (a, b), c < d$. Тогда для $\alpha \in (c, d)$. Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a,d)} f(x) = f(d-0)$$

$\square$

Поэтому если c, d - точки разрыва ф-ции f, то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку $\in \mathbb{Q}$, содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

1.1 Равномерная непр-ть

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$
Напомним, что f непр-на на E, если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение 1.1. Ф-ция f наз-ся **равномерно непрерывной** (на E), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Замечание. *Если f р. н. (равномерно непр-на) на E, то f непр-на на E*

Задача 1.1. Если f и g р. н. на E и огр-ны, то fg - р. н. на E

Определение 1.2. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E(|f(x) - f(x')| \leq C\,|x - x'|)$$

Замечание. *Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$)*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

Доказательство.

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, } \textbf{но не р. н.}$$

Замечание. *f не р. н. $\iff$*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E(|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ положим, $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}$. Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но, f не р. н. □

Теорема 1.2 (Кантора)**.** *Если f непр-на на $[a, b]$, то f - р. н. на $[a, b]$*

Доказательство. I) Предположим, что f не явл-ся р. н. Тогда полагая $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, получаем $x_n, x'_n \in [a, b]$, т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В $\{x_n\}$ имеет сх-ся подп-ть $\{x_{n_k}\}, x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \to x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти, f в x_0:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит $\left|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon > 0$

□

Задача 1.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ р. н. на E. Покажите, что

$$\exists! F : closure(E) \to \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

Определение 1.3. Ф-ция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ наз-ся экспонентой.

Замечание. *Сх-ть $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ устанавливалась ранее для всях $x \in \mathbb{R}$*

Теорема 1.3. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо:*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

Доказательство. Введём об-е $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y) = \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k}a^k$$

Где:
$$b = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right), a = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$$
П-ть $\{ a_n(|x|) \}$, нестрого возрастает, начиная с некот. n_0 (см. док-во сх-ти):
$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^p\right| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^p \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|), p = 1, \ldots, n$$
Сл-но, каждое слагаемое в $Q(x,y)$ оценивается по модулю $C = \exp|x+y|\exp|x|\exp|y|$. Тогда получаем:
$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)| \leq \frac{|x|\,|y|\,C}{n}$$
Переходя к пределу, получаем, что:
$$|\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)| \leq 0$$
Ч. Т. Д. □

Следствие.
$$\exp x > 0 \;\; \textit{и} \;\; \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство.
$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp^2(\frac{x}{2})$$
$$\exp(x)\exp(-x) = 1$$
□

Лемма 1.4. *a)*
$$\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$
b)
$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}, \forall x < 1$$

Доказательство. Зафикс. $N \in \mathbb{N}$, т. ч. $\frac{x}{N} \geq -1$. Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N\colon \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x \text{ - пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

Теорема 1.5. *Ф-ция* exp *непр-на, строго возр. и отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Доказательство. По нер-ву из предыдущей леммы, при $x < 1$ имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при $x \to 0$, $\exp(x) \to 1$. Тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \exp(x) = \begin{bmatrix} t + a = x \\ t = x - a \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0} \exp(t + a) = \lim_{t \to 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$ ф-ция непр-на на $\mathbb{R}$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x)\exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ □

2 Лекция 14

Определение 2.1. Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция $\ln\colon (0, +\infty)$, обратная к exp

Замечание. *По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:*

- $\ln$ *непр-на на обл-ти определения.*
- $\ln$ *строго возр.*
- $\ln$ *отображжет* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*, при этом, если* $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Определение 2.2. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Показательной ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция: $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при* $a > 1$ *строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображжает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Замечание. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, n > 1$*. Тогда:*

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) = \exp(\ln a) = a$$

Сл-но, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Определение 2.3. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Логарифмической ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция $\log_a\colon (0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Обратная к показательной ф-ции $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображжает* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*. Кроме того:*

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Определение 2.4. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Степенной ф-цией с показателем α наз-ся ф-ция $x \mapsto x^\alpha, x \in E$, где:

1) $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \} \Rightarrow E = \mathbb{R}$, при этом $x^0 = 1, x^\alpha = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\alpha \text{ раз}}$

2) $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, при этом $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$, при этом $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

Замечание. *Если в последнем случае $\alpha > 0$, то полагаем $0^\alpha = 0$ (т. е. 0 включаем в E), это согласуется с тем, что:*

$$\lim_{x \to +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

Замечание. *Из св-в* $\exp$ *и* $\ln$ *получаем, что степенная ф-ция непр-на на E, на $(0, +\infty)$ строго возрастает на при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$*

Лемма 2.1 (Замечательные пределы)**.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. По пред. лемме при $x < 1$:

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \iff x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y - 1}, y \ne 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$ - непр. в 0. Также $f(x) = \ln(x+1)$ непр-на в 0. Тогда композиция $g \circ f$ непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ непр-на в 0 $\Rightarrow \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$ $\square$

Задача 2.1. Док-те, что $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

Пример.
$$e^\pi \vee \pi^e$$

Доказательство.
$$e^x > 1+x$$
$$x=\frac{\pi}{e}+1$$
$$e^{\frac{\pi}{e}-1}>\frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}}>\pi \Rightarrow e^\pi>\pi^e$$

□

2.0.1 Ликбез по тригономе

Лемма 2.2. *Для всех $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ верно:*
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Picture:
$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

□

Следствие. *Для всех $x\in\mathbb{R}$. Верно $|\sin x|<|x|$, причём рав-во имеет место только при $x=0$*

Доказательство. Если $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, то нер-во следует по лемме.
Если $x\geq\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leq 1<\frac{\pi}{2}\leq x$
Если $x<0$, то $|\sin x|=|\sin(-x)|<|(-x)|=|x|$ □

Следствие. *Ф-ции* $\sin$ *и* $\cos$ *непр-ны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $a\in\mathbb{R}$, тогда:
$$|\sin x-\sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2}=|x-a|\to 0$$

Сл-но, $\sin x$ в точке a равен $\sin a\Rightarrow \sin x$ - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть $\cos x$ или из ф-л тригонометрии:
$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Rightarrow$$

$\cos x$ непр-н как композиция непр. ф-ций. □

Следствие.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (из леммы) В силу чётности, $\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow$ предел $= 1$. □

Определение 2.5. Обратные тригонометрические ф-ции:

1) arcsin:
$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2) $\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$
$$\arccos = (\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$$

3) $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4) $\operatorname{arcctg}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$
$$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$$

Определение 2.6. Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto x^\alpha$
- $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
- $\arcsin, \arccos, \operatorname{arctg}, \operatorname{arcctg}$

Определение 2.7. Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

Пример.

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Теорема 2.3. *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

2.0.2 Сравнение ф-ций

Определение 2.8. Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E и сущ-ет $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

1) Если $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ции f и g эквивалентны (асимптотически равны) при $x \to a$. Пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$

2) Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ция f беск. мала по сравн. с ф-цией g при $x \to a$, пишут $f(x) = o(g(x))$, при $x \to a$

3) Если α - огр-на, то говорят, что ф-ция f ограничена по сравнению с g при $x \to a$. Пишут, что $f(x) = O(g(x)), x \to a$

Замечание. *Если $g(x) \neq 0$ в некот. проколот. окр-ти a, с учётом обл. опр-я, то:*

1)

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \alpha(x) = 1$$

2)

$$f(x) = o(g(x)), x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3)

$$f(x) = O(g(x)), x \to a \iff \exists M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \left(\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \right)$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Следует из опр-я.

$\Leftarrow$) Положим:

$$\alpha\colon E \to \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ \text{что угодно, иначе} \end{cases}$$

□

Задача 2.2. Доказать, что $\sim$ - отн. эквив-ти.

Пример. *1)*

$$x^n = o(x^m), x \to 0 \iff n > m$$

$$x^n = x^{n-m}x^m$$

2)

$$x^n = o(x^m), x \to \pm\infty \Rightarrow m > n$$

3)

$$x = O(\sin x), x \to 0$$

$$x + \cos x = O(x), x \to \pm\infty$$

4)

$$x \sim \sin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x), x \to 0$$

Замечание. *Читаем $f(x) = O(g(x)), f(x) = o(g(x))$ - слева направо!*

Лемма 2.4.

$$x \to a$$

Тогда справедливо:

1)

$$o(f) \pm o(f) = o(f), O(f) \pm O(f) = O(f)$$

2)

$$o(f) = O(f)$$

3)

$$o(O(f)) = o(f), O(o(f)) = o(f)$$

4)

$$o(f)O(g) = o(fg)$$

Доказательство. 3)

$$\begin{cases} u = o(v), x \to a \\ v = O(f), x \to a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \alpha(x)v(x) \\ v(x) = \beta(x)f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\Rightarrow u(x) = \alpha(x)\beta(x)f(x) = \gamma(x)f(x), \gamma \to 0, x \to a$$

$$\Rightarrow u(x) = o(f), x \to a$$

□

<u>Лемма</u> 2.5. *1)*

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to a$$

2)

$$f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x), x \to a \Rightarrow f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$$

Кроме того, если $g_{1,2}(x) \neq 0$ в некот. прок. окр-ти a, то:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, x \to a$$

3)

$$f(x) \sim g(x), x \to a$$

То пределы $f(x), g(x)$ при $x \to a$ сущ-ют одновременно (в $\overline{\mathbb{R}}$), и если сущ-ют, то равны.

Доказательство. 1)

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff f(x) = \alpha(x)g(x), x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a), \alpha(x) \to 1$$

$$f(x) = \alpha(x)g(x) = g(x) + g(x)(\underbrace{\alpha(x) - 1}_{\to 0}) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

2) Пусть $g_1(x) \neq 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$

$$g_2(x) = \alpha(x) g_1(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\alpha(x) \to 1, x \to a$$

Т. к. $\alpha(x)$, то $\exists \delta_1 > 0, \forall \in \overset{\circ}{B}_{\delta_1}(a) \cap E(\alpha(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

$\delta_0 = min(\delta, \delta_1)$. Тогда $g_2(x) \neq 0$ на $\overset{\circ}{B}_{\delta_2}(a) \cap E$

Рассм. $\frac{1}{g_1(x)}, \frac{1}{g_2(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(\frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\alpha(x) g_2(x)}) \Rightarrow \frac{1}{g_1(x)} \sim \frac{1}{g_2(x)}, x \to a$

$\square$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4} - 2)(2^x - 1)^2}$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \sim 2 \cdot x \cdot (\frac{x}{2})^2 \sim \frac{x^3}{2}, x \to 0$$

$$\sqrt{x+4} - 2 = \frac{x}{\sqrt{x+4} + 2} \sim \frac{x}{4}, x \to 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4} - 2)(2^x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{\frac{x}{4} \cdot x^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0 \iff \operatorname{tg} x = x + o(x), x \to 0$$

$$\sin x \sim x, x \to 0 \iff \sin x = x + o(x), x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = o(x), x \to$$

3 Лекция 15

Определение 3.1. Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty$. Пряая $y = kx+b$ наз-ся наклонной асимптотой f при $x \to +\infty$, если:

$$f(x) = kx + b + o(1), x \to +\infty$$

Аналогично опр-ся накл. асимптота при $x \to -\infty$

Теорема 3.1. *Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty, k, b \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота f при $x \to +\infty \iff$*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx)$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $y = kx + b$, накл. асимпт. f при $x \to +\infty$, тогда $f(x) = kx + b + o(1), x \to +\infty \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{1}{x}(b + o(1)) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$$

$\Leftarrow$) Рассм. $\alpha(x) = f(x) - kx - b$, где k, b - пределы из усл-я:

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$$

Сл-но, $f(x) = kx + b + \alpha(x), \alpha(x) \to 0, x \to +\infty$

$\square$

Замечание. *Справедливо аналогичное утв-е при $x \to -\infty$*

Определение 3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Ф-ция f опр-на на (α, a) или (a, β). Прямая $x = a$ наз-ся вертикальной асимптотой ф-ции f, если хотя бы один из $f(a + 0)$ или $f(a - 0)$ равен $+\infty(-\infty)$

3.1 Дифференцируемые ф-ции

Пусть I - невырожд. пром-к в $\mathbb{R}$ (содержит более 1 точки).

Определение 3.3. Пусть $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ - производная ф-ции } f \text{ в точке } a$$

Если предел конечен, то f наз-ся дифференцируемой в a.

Пример. *1)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = kx + b$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{k(x-a)}{x-a} = k$$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sign(x)$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sign(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Геометрический смысл производной: Пусть f дифф. в a:

$$l\colon y = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) + f(a) \text{ - прямая, проход. через } (a, f(a)), (t, f(t))$$

Тогда:

$$K_{\text{сек.}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \to f'(a) = K_{\text{кас.}}, t \to a$$

4 Лекция 16

Теорема 4.1 (О линейной апроксимации)**.** *Ф-ция f дифф-ма в a $\iff$ $\exists A \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + o(x-a), x \to a \tag{1}$$

Доказательство. Положим $A = f'(a)$:

$\Rightarrow$) Опр-м

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), x \neq a \\ \text{произв.}, x = a \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ и:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \alpha(x)(x-a), \text{ т. е. вып-но при } A = f'(a)$$

$\Leftarrow$) ... см. учебник.

$\square$

Следствие. *Если f дифф-ма в a, то она непр-на в a.*

Замечание. *Обратное неверно.*

Определение 4.1. Пусть $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$, Тогда:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Соотв. правая и левая производные.

Замечание. *Если $a \in (int)I \Rightarrow \exists f'(a) \iff \exists f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$. Если a - концевая точка I, то производная равна соотв. одност. пределу.*

Задача 4.1. Док-ть, что если $\exists f'_+(a), f'_-(a)$, то f непр-на в a.

Теорема 4.2. *Пусть $f, g \colon I \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если f, g дифф-мы в a, то:*

1) $\exists(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2) $\exists(fg)' = f'g + fg'$

3) *Если $g \neq 0$ на I, то* $\exists(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. 2)

$$fg(x) - fg(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$

$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Перейдём к пределу $x \to a$, учитывая непр-ть в т. a ф-ции g:

$$(fg)'(a) = f'g(a) + fg'(a)$$

3) Перейдём к пределу при $x \to a$ в рав-ве:

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{1}{x-a} \to -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Тогда п. 3. следует из п. 2.

□

Теорема 4.3 (Производная композиции)**.** *Пусть I, G - пром-ки в $\mathbb{R}$. Если ф-ция $f : I \to G$ диф-ма в т. a, ф-ция $g : G \to \mathbb{R}$ диф-ма в b и $b = f(a)$, то композиция $g \circ f \colon I \to \mathbb{R}$ диф. в a, причём:*

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Рассм. $h \colon I \to \mathbb{R}, h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, y \neq b \\ g'(b), y = b \end{cases}$ Тогда h непр-на в $y = b$. Покажем, что при $x \in I, x \neq a$, верно:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \tag{2}$$

При $f(x) = f(a)$, обе части обнуляются. Иначе, если $f(x) \neq f(a)$, то 2 верно в силу определения h.
Т. к. h непр-на в $y = b$, то $\lim_{x \to a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$, по т. о пределе композиции. Поэтому существует:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = g'(b) f'(a) = g'(f(a)) f'(a)$$

□

Теорема 4.4 (Предел обратной ф-ции)**.** *Пусть ф-ция $f : I \to \mathbb{R}$ непр-на и строго монотонна на пром-ке I. Если f дифф-ма в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обр. ф-ция $f^{-1} \colon f(I) \to I$ - дифф-ма в т. $f(a) = b$ причём:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. По т. об обр. ф-ции на $f(I)$ опр-на ф-ция f^{-1}, кот. там непр-на и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \to a, t \to b$ и $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$. Поэтому по св-ву предела композиции:

$$\lim_{t\to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t-b} = \lim_{t\to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1})(t) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(Заменили $f(x) = t, x = f^{-1}(t)$)
Следовательно f^{-1} дифф-ма в т. b. □

Замечание. *Если при вып-нии остальных условий, $f'(a) = 0$, то обратная ф-ция не дифф-ма в точке b. Иначе, при дифф-нии получаем:*

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(b) f'(a) = 1$$

Теорема 4.5 (Таблица производных). *1)*

$$c' = 0, c \in \mathbb{R}$$

2)

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

3)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$$

4)

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

5)

$$(\sin x)' = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

8)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

9)

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10)

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Доказательство. 2)

$$(e^x)' = \lim_{t \to x} \frac{e^t - e^x}{t - x} = e^x \lim_{t \to x} \frac{e^{t-x} - 1}{t - x} = e^x$$

$$(a^x)' = e^{x \ln a} = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a$$

3) По т. о производной обр. ф-ции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}, y = \log_a x$$

$$\Rightarrow a^y = x \Rightarrow \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

4)

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

5) По первому зам. пределу и непр-ти cos:

$$\lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \to x} \frac{2 \sin \frac{t-x}{2} \cos \frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = (\sin\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big))' = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - x\Big) \cdot (-1) = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8)

$\operatorname{ctg} x$ - аналогично

9)
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}, = \frac{1}{\cos y}, y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

Т. к. $x \in (-1, 1) \Rightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$
$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

10)
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y =$$

□

5 Лекция 17

Определение 5.1. Пусть $\phi, \psi : T \to \mathbb{R}, E = \phi(T)$. Говорят, что ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ параметрически задана системой уравнений:
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$$

Если для $\forall t_1, t_2 \in T \, (\phi(t_1) = \phi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2))$ и $f(x) = \psi(t)$ при $x = \phi(t)$
В част-ти, если ϕ обратима, то $f = \psi \circ \phi^{-1}$

Следствие. *Пусть T - это пром-к, ϕ непр-на, строго монотонна на T, ϕ и ψ дифф-мы в т. t и $\phi'(t) \neq 0$. Тогда параметрически заданная ф-ция $f = \psi \circ \phi^{-1}$ дифф-ма в т. $x = \phi(t)$, причём:*
$$f'(x) = (\psi \circ \phi^{-1})' = (\psi')(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Определение 5.2. Говорят, что ф-ция f дифф-ма на мн-ве D, если f дифф-ма в каждой точке из D.
Ф-ция $x \mapsto f'(x), x \in D$, также наз-ся производной и обозн-ся в f'

5.1 Дифференциал ф-ции

Определение 5.3. Пусть $f : \underset{\text{пром.}}{I} \to \mathbb{R}$ - дифф-ма в т. a. Линейная ф-ция $h \mapsto f'(a) \cdot h, h \in \mathbb{R}$, наз-ся дифференциалом f в т. a и обозн-ся df_a. Для ф-ции $x \mapsto x$ дифф. в каждой точке, $dx(h) = 1 \cdot h$, поэтому значение дифф-ла $df_a(h) = f'(a)dx(h), h \in \mathbb{R}$ или в функциональной записи:

$$df_a = f'(a)dx$$

Следствие. *В условиях теоремы (4.2) (арифметические оп-ции с пределами):*

- $$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)_a = \alpha \,\mathrm{d}f_a + \beta \,\mathrm{d}g_a$$
- $$\mathrm{d}f \cdot g_a = g(a) \,\mathrm{d}f_a + f(a) \,\mathrm{d}g_a$$
- $$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a) \,\mathrm{d}f_a - f(a) \,\mathrm{d}g_a}{g^2(a)}$$

Следствие. *В условиях теоремы о производной сложной ф-ции:*

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a \,, b = f(a)$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a (h) = g'(f(a))f'(a) \,\mathrm{d}x \,(h) = g'(b) \,\mathrm{d}f_a \,(h) = \mathrm{d}g_b \,(\mathrm{d}f_a \,(h)), h \in \mathbb{R}$$

□

Замечание. *Ф-ла* $\mathrm{d}f_x = f'(x)dx$ *верна, как в случае с независимой переменной* x*, так и в случае* $x = \phi(t)$ *(независимость формы 1-ого дифференциала).*

Следствие. *В условиях теоремы о дифференицровании обратной ф-ции верно:*

$$\mathrm{d}(f^{-1})_b = (\mathrm{d}f_a)^{-1}, b = f(a)$$

Доказательство. Следует из того, что:

$$k \mapsto \frac{1}{f'(a)} \cdot k \text{ - обратная ф-ция к линейной } h \mapsto f'(a)h$$

□

5.2 Теоремы о среднем

Определение 5.4. Пусть f опр-на на интервале, содержащем т. a. Точка a наз-ся **точкой локального максимума** ф-ции f, если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)\,(f(x) \leq f(a))$$

Т. е. $f(a) = \underset{x \in B_\delta(a)}{max} f(x)$.

Если ", то a - **точка строгого лок. максимума.**

Аналогично определяется **точка (строгого) лок. минимума**.

Точки локального максимума (минимума) наз-ся **точками экстремума** ф-ции.

Теорема 5.1 (Ферма (необх. усл-ие экстремума))**.** *Пусть f опр-на в некот. окр-ти точки a. Если a - точка лок. экстремума ф-ции f и в этой точке $\exists f'(a)$, то $f'(a) = 0$*

Доказательство. Пусть, для опр-ти, a - точка лок. максимума, тогда:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\,(f(x) \leq f(a))$$

Имеем:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(a) = 0$$

□

Геометрический смысл: касательная горизонтальна.
В дальнейшем, отрезок $[a, b]$ предполагается невырожденным.

Теорема 5.2 (Ролля)**.** *Если f непр-на на $[a, b]$, дифф-ма на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то:*

$$\exists c \in (a, b)\colon f'(c) = 0$$

Доказательство. Если f постоянна на $[a,b]$, то $f'(c)=0, \forall c \in (a,b)$
Пусть f непостоянна на $[a,b] \Rightarrow \exists d \in (a,b)\colon f(d) \neq f(a)$
Если $f(d) > f(a)$, то $\exists c \in [a,b]\colon f(c) = \underset{[a,b]}{max} f(x) \geq f(d) > f(a)$. По т. Ферма $f'(c)=0$
Иначе, если $f(d) < f(a)$ - заменяем max на min □

Геом. смысл: Есть точка, кас. к которой - горизонтальна.

Следствие. *Пусть f - дифф-ма на пром-ке I, тогда между любыми двумя различными нулями ф-ции f найдётся хотя бы один нуль производной.*

Теорема 5.3 (Лагранжа). *Если f - непр-на на $[a,b]$, дифф-ма на (a,b), то:*

$$\exists c \in (a,b)\colon f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Доказательство. Рассм. ф-цию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(a)$$

Ф-ция h непр-на на $[a,b]$, дифф-ма на (a,b), $h(a)=0=h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a,b)\colon h'(c)=0$$

Т. е.

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Ч. Т. Д. □

Геометрический смысл: интерпретируя $f'(c)$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ как угловые коэфф-ты.

Задача 5.1. Пусть f непр-на на $[a,b)$ и дифф-ма на (a,b). Покажите, что если $\exists f'(a+0)$, то $\exists f'_+(a) = f'(a+0)$

Следствие (Оценка приращений). *Пусть f непр-на на пром-ке I и дифф-ма на $int(I)$. Если:*

$$\exists M > 0, \forall x \in int(I)\, |f'(x)| \leq M$$

То:

$$\forall x,y \in (|f(y)-f(x)| \leq M \cdot |y-x|)$$

Т. е. f - липшицева.

Доказательство. Пусть $x, y \in I, x \neq y$. Тогда, по Т. Лагранжа, между x и y найдётся т. c, что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Т. к. $c \in int(I)$, то $|f(c)| \leq M$. Отсюда следует заявленная оценка. $\square$

6 Лекция 18

Теорема 6.1 (Коши)**.** *Если f, g - непр-ны на $[a, b]$, дифф-мы на (a, b) и $g \neq 0$ на (a, b), то*

$$\exists c \in (a, b) \colon \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$ (исходя из т. Ролля: $\exists \xi \in (a, b) \colon g'(\xi) = 0$). Рассм. ф-цию:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Тогда h непр-на на $[a, b]$, диф-ма на (a, b) и $h(a) = f(a) = h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b) \colon h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

Поскольку $g'(c) \neq 0$, получаем то, что хотели:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\square$

Геом. смысл: такой же, как в т. Лагранжа. Для парам. заданной ф-ции:

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Замечание. *В теореме Ферма требуется лишь сущ-е производной, поэтому в опир-ся на неё теоремах Ролля, Лагранжа и Коши остаются справедливыми при замене условия дифференцируемости ф-ции на (a, b) существованием там производной в $\overline{\mathbb{R}}$*

Пример.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

Однако не сущ-ет $f'(\pm 0)$, т. е. f' разрывна в нуле.

Теорема 6.2 (Дарбу)**.** *Если f дифф-ма на $[a,b]$. то для s, лежащего строго между $f'(a), f'(b)$, верно:*

$$\exists c\in(a,b)\colon f'(c)=s$$

Доказательство. Пусть для определённости $f'(a)<s<f'(b)$. Положим $\phi(x)=f(x)-sx$. Тогда ϕ дифф-ма на $[a,b]$:

$$\phi'(a)=f'(a)-s<0<f'(b)-s=\phi'(b)$$

Пусть $\phi(c)=\inf\limits_{[a,b]}\phi(x)$ (сущ-ет по т. Вейерштрасса).
При $c=a$ получаем:

$$\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a}\geq 0, \forall x\in(a,b]\Rightarrow\phi'(a)\geq 0!!!\Rightarrow c\neq a$$

Аналогично показ-ся, что $c\neq b\Rightarrow c\in(a,b)\Rightarrow\phi'(c)=0$, (По т. Ферма) т. е. $f'(c)=s$. □

6.1 Приложения теореме о среднем

Теорема 6.3 (Условия монотонности)**.** *Пусть ф-ция f непр-на на пром-ке I и дифф-ма на $int(I)$.*

1) *Ф-ция f нестрого возр-ет (убывает) на $I \iff f'(x)\geq 0\,(\leq 0)\,, \forall x\in int(I)$*

2) *Если $f'(x)<0\,(>0)\,, \forall x\in int(I)$, то ф-ция f строго убывает (возрастает).*

3) *Ф-ция f постоянна на $I \iff f'(x)=0, \forall x\in int(I)$*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на I, $x \in int(I)$. Тогда $f(y) \geq f(x), \forall y \in (x, \sup I)$. Поэтому $f'(x) = f'(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

$\Leftarrow$) Пусть $x, y \in I$ и $x < y$. По т. Лагранжа

$$\exists c \in (x, y)\colon f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Т. к. $c \in int(I) \Rightarrow f'(c) \geq 0$, а значит, что $f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Замечание. *При замене $\geq$ на $>$ в $\Rightarrow$ получаем док-во п. 2.*

Замечание. *Док-во убыв. может быть сведено к рассм. $-f(x)$, где f - убыв.*

Замечание. *Обратное утв. к п. 2* ***неверно****. Рассм. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Она строго возрастает, но $f'(0) = 0$*

□

Пример. *Найти все дифф-мые ф-цие, удовл. в усл-ию:*

$$f'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Решение. *Рассм. $g(x) = f(x)e^{-x}$. Тогда:*

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0, x \in I \text{ т. к. } f(x) = f'(x), x \in I$$

По т. об условии монотонности, получаем, что $\exists c \in \mathbb{R}, g(x) = c, \forall x \in I$

Следствие (Достаточные условия экстремума)**.** *Пусть f опр-на на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифф-ма на $(\alpha, \beta) \setminus \{ a \}$ и непр-на в a. Справ-вы след. утв-я:*

1) *Если $f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a, \beta)$, то a — точка лок. максимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).*

2) *Если $f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, \beta)$, то a - точка лок. минимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).*

Доказательство. 1) По теореме об условии монотонности, ф-ция f нестрого возр. на $(\alpha, a]$ и нестрого убывает на $[a, \beta)$. Поэтому $f(x) \leq f(a), \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a$ — точка лок. максимума. Если нер-ва для производной строгие, то возр-е/убыв-е строгое $\Rightarrow$ нер-ва строгие $\Rightarrow a$ — точка строгого лок. максимума.

□

Следствие (О доказательстве нер-в)**.** *Пусть* f, g *- непр-ны на* $[a, b)$ *и дифф-мы на* $(a, b), f(a) \leq g(a)$ *и* $f'(x) \leq g'(x)$ *(<),* $\forall x \in (a, b)$*. Тогда* $f(x) \leq g(x)(<), \forall x \in (a, b)$

Доказательство. Рассм. $h(x) = g(x) - f(x)$

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow h \text{ — нестрого возрастает}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b)$$

□

Пример.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, x > 0$$

Доказательство. ММИ:

- $n = 1$ — очев.
- Пусть утв. верно для $n - 1$. Док-ем для n. Рассм.:

$$f(x) = e^x, g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, x \in [0; +\infty)$$

$$f(0) = g(0), f'(x) = e^x > 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x)$$

Тогда $f(x) > g(x)$ по предыдущему следствию.

□

Теорема 6.4 (Усиление условия монотонности)**.** *Пусть ф-ция* f *непр-на на* $[a, b]$ *и* A *не более чем счётное мн-во,* $A \subset [a, b]$*. Если* f *дифф-ма на* $[a, b] \backslash A$*.* $f'(x) \geq 0$ *и на* $[a, b] \backslash A$*, то* f *нестрого возр.*

Доказательство. Дост-но установить, что $f(a) \leq f(b)$.

Рассм. сначала случай $f'(x) > 0$ на $[a, b] \backslash A$. Предположим, что $f(a) > f(b)$. $f(A)$ не более чем счётно $\rightarrow \exists d \notin f(A)$ и $f(a) > d > f(b)$. Рассм. $B = \{\, x \in [a, b] \colon f(x) = d \,\}$.
Положим $c = \sup B$. Т. к. B - замкнуто, то $c \in B$. В част-ти,

$$f'(c) > 0, \text{ т. к. } c \notin A, c \in (a, b)$$

С другой стороны:

$$\forall x \in (c,b), f(x) < d \text{ (по т. о пром. значениях)}$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0!!!$$

$\square$

Следствие. *Пусть f - непр-на на $[a,b]$ и дифф-ма на $[a,b]\backslash A$, где $A \subset [a,b]$ - не более чем счётно. Если $m \leq f' \leq M$ на $[a,b]\backslash A$, то:*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Доказательство. Дост-но применить предыдущую теорему для ф-ций:

$$\phi(x) = f(x) - mx$$

$$\psi(x) = Mx - f(x)$$

На $[a,b]$ $\square$

7 Лекция 19

Важным приложением теоремы Коши о среднем, явл-ся правило Лопиталя:

Теорема 7.1 (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{0}{0}$)**.** *Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ф-ции f, g опр-ны на (a,b) и дифф-мы, причём $g' \neq 0$ на (a,b). Пусть:*

1)

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

2)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда:

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Простое. $a \in \mathbb{R}$. Сущ-е предела установим по Гейне. Рассм. $\{ x_n \} \subset (a,b)\colon x_n \to a$. Доопределим по непр-ни ф-ций f, g в т. a, положив $f(a) = g(a) = 0$. По т. Коши о среднем:

$$[a, x_n]\colon \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \text{ для некот. т. } c_n \in (a, x_n)$$

Т. к. $a < c_n < \underset{\to a}{x_n} \Rightarrow c_n \to a$. Поэтому:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

По опр-ю Гейне $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ □

Замечание. *Рассм. отдельно случай $a = -\infty$. Можно считать, что $b < 0$. Рассм. ф-ции:*

$$\phi(t) = f\left(-\frac{1}{t}\right), \psi(t) = g\left(-\frac{1}{t}\right), t \in (0, -\frac{1}{b})$$

$$\lim_{t\to+0} \phi(t) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t\to+0} \psi(t) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}}{g'\left(-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

По доказанному, $\exists \lim_{t\to+0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Лемма 7.2. *Пусть $\{ a_n \}, \{ b_n \}$ - числ. п-ти, причём $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Тогда:*

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n b_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n b_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

Доказательство. Введём обоз-я:

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n b_n = c, \varlimsup_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\exists \{ n_k \}, n_k \text{ - строго возр.: } a_{n_k} b_{n_k} \to c \Rightarrow a_{n_k} = \frac{a_{n_k} b_{n_k}}{b_{n_k}} \to \frac{c}{1} \le a$$

$$\exists \{ m_k \}, m_k \text{ - строго возр. } : a_{m_k} \to a, b_{m_k} \to 1 \Rightarrow a_{m_k} b_{m_k} \to a \le c$$
$$\Rightarrow a = c$$

Док-во для нижнего предела аналогично. □

Теорема 7.3 (Правило Лопиталя для неопр. $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Всё то же самое, но в* (1)*:*

$$\lim_{x \to a+0} |f(x)| = \lim_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$$

Доказательство. 1) $L \in \mathbb{R}, (L = +\infty)$. Рассм. $\{ x_n \} \subset (a, b), x_n \to a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По усл-ию (2), $\exists y \in (a, b), \forall c \in (a, y), \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$. Можно считать, что все $x_n \in (a, y), f \neq 0, g \neq 0$ на (a, y). По т. Коши о среднем $\frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$, для некот. $c_n \in (x_n, y)$. Т. к.:

$$\left| \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} - L \right| < \varepsilon, \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} > M \right)$$

Тогда:

$$L - \varepsilon < \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} < L + \varepsilon, \left(\frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} > M \right)$$

$$\iff L - \varepsilon < \frac{f(x_n) \left(1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \right)}{g(x_n) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)} \right)} < L + \varepsilon, \left(\frac{f(x_n) \left(1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \right)}{g(x_n) \left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)} \right)} > M \right)$$

Однако $1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \to 1$ (аналогично с g).
Воспользуемся леммой и получим:

$$(M <)\, L - \varepsilon \le \varliminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le \varlimsup_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \le L + \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - произвольное, то:

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \varliminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

След-но:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

Тогда по Гейне $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

□

Замечание. *Правило Лопиталя остётся верным и для $x \to b-0$, (достно сделать замену $x \to -x$). А значит, оно верно и для $x \to x_0$.*

Задача 7.1. Докажите, что в правиле Лопиталя для $\frac{\infty}{\infty}$ можно снять условие $\lim_{x\to+\infty}|f(x)| = +\infty$

Пример. *1)*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \alpha > 0, a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{a^x\ln a} = 0$$

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{\frac{x}{a}}}\right)^\alpha, \lim_{y\to 0} y^\alpha = 0$$

Задача 7.2. Доказать:

$$\exists \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

Замечание. *Здесь* ***не применимо*** *правило Лопиталя.*

7.1 Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно.

Определение 7.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $f^{(1)} = f'$. Если $n > 1$, $f^{(n-1)}$ - определена в некот. окр-ти точки a и дифф-ма в т. a, то f **наз-ся дифф-мой n раз в точке** a и $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$

Также считаем, что $f^{(0)} = f$

Замечание. *Сущ-е производной n-го порядка f в т. a влечёт при $n > 1$ существование производной $(n-1)$-го порядка в некот. окр-ти точки a.*

Замечание. *Т. к. операция взятия производной линейна, справедливо следующее:*

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))^{(n)}=\alpha f^{(n)}(x)+\beta g^{(n)}(x)$$

Теорема 7.4 (Ф-ла Лейбница)**.** *Если f, g дифф-ма n раз в точке x, то их произведение также дифф-мо n раз в точке x, причём справедлива ф-ла:*

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство. Док-во проведем через ММИ по n:

- База $n=1$ - проверяли
- Предположим утв-е верно для n. Тогда покажем, что утв-е верно для $n+1$. Тогда:

$$(fg)^{(n+1)}=((fg)^{(n)})'=\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)}+f^{(k)} g^{(n-k+1)})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1}\left(f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right)+\sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)} g^{(n+1-k)})=$$

$$=f^{(0)} g^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)}_{=C_{n+1}^k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}+f^{(n+1)} g^{(0)}=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$\square$

Определение 7.2. Ф-ция f наз-ся n раз дифф-мой на мн-ве D, если f дифф-ма n раз в каждой точке из D. Если при этом ф-ция $x \mapsto f^{(n)}(x)$ - непр-на, то f наз-ся n раз непрерывно дифф-мой на D.

Обозначение. *$C^n(D)$ - мн-во n раз непр-но дифф-мой на D ф-ций.*

$$C^{\infty}(D)=\bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(D)$$

8 Лекция 20

8.1 Формула Тейлора

Определение 8.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и ф-ция f дифф-ма в n раз в т. a. Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x)$$

Наз-ся **ф-лой Тейлора порядка n ф-ции f в т.** a. При этом

$$P_n(x) = P_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

наз-ся **многочленом Тейлора**, а $r_n(x) = r_{n,f,a}(x)$ — **остаточным членом.**

Пример. *Если $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ и $0 \le m \le n$, то:*

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{n} c_k \frac{k!}{(k-m)!}(x-a)^{k-m}$$

поэтому:

$$P_n^{(m)}(a) = m!c_m$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

— ф-ла Тейлора для мн-на P_n.

Теорема 8.1 (Остаточный член в форме Пеано)**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и ф-ция f дифф-ма n раз в a. Тогда*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^k), x \to a$$

Доказательство. Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Тогда

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}$$

Поэтому для ост. члена $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Выполнено:

$$r_n(a) = r'_n(a) = \ldots = r_n^{(n)}(a) = 0$$

По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{r'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Этот предел сущ-ет по опр-ю пр-й:

$$\lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{n-1}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} r_n^{(n)}(a) = 0$$

□

Следствие. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, ф-ция f дифф-ма n раз в т. a и $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, но $f^{(n)}(a)! = 0$. Тогда:*

1) *Если n чётно и $f^{(n)}(a) > 0, (f^{(n)}(a) < 0)$, то a явл-ся точкой лок. минимума ф-ции f (точкой лок. максимума).*

2) *Если n нечётно, то a не явл-ся точкой лок. экстремума ф-ции f.*

Доказательство. По пред. теореме имеем:

$$f(x) = f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), x \to a$$

или:

$$f(x) - f(a) = \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \right)(x-a)^n$$

Где, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Из стрем-я к 0:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \left(|\alpha(x)| < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \right)$$

Тогда $\forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \left(sign(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)) = sign f^{(n)}(a) \right)$

$$\Rightarrow sign(f(x) - f(a)) = sign(f^{(n)}(a)(x-a)^n)$$

Откуда следует, заявленное утв-е. □

Теорема 8.2 (Единственность). *Пусть для ф-ции f найдутся мн-ны $p_1(x)$ и $p_2(x)$ степени $\leq n$, т. ч.*

$$f(x) - p_1(x) = o((x-a)^n)$$

$$f(x) - p_2(x) = o((x-a)^n), x \to a$$

Тогда $p_1(x) = p_2(x)$:

Доказательство. Положим $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$. Тогда

$$q(x) = o((x-a)^n), x \to a$$

Покажем, что $q(x) \equiv 0$.

Пусть $q(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n$. Предположим, что не все его коор-ты $= 0$. Пусть $j --- min$: $c_j \neq 0$. Сделаем преобразования:

$$q(x) = o((x-a)^n), x \to a$$

$$c_j(x-a)^j + \ldots + c_n(x-a)^n = ((x-a)^n), x \to a$$

$$c_j + c_{j+1}(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^{n-j} = ((x-a)^{n-j}), x \to a$$

Перейдя к пределу, получим $c_j = 0!!! \Rightarrow q(x) \equiv 0$ □

Теорема 8.3 (Единственность представления ф-лой Тейлора). *Если ф-ция f дифф-ма n раз в a и*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n), x \to a$$

Тогда $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = \overline{0, n}$

Следствие. *Пусть f дифф-ма $(n+1)$ раз в т. a и*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o((x-a)^n), x \to a$$

Тогда:

$$f(x) =$$

Доказательство. Из пред-я f' имеем по т. 8.3:

$$c_k = \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \Rightarrow f^{(k+1)}(a) = k!c_k, k = \overline{0, n}$$

□

<u>Определение</u> 8.2. Формула Тейлора в т. $a = 0$ — **ф-ла Маклорена**.

Основные разложения:

I) Если $f(x) = e^x$, то $f^k(0) = e^0 = 1$, для $k \in \mathbb{N}_0$, тогда:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \to 0$$

II) Если $f(x) = \sin x$, то по инд-ции проверяется, что $f^{(m)}(x) = \sin\big(x + \frac{\pi}{2}m\big), m \in \mathbb{N}_0$. Значит, $f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k, k \in \mathbb{N}_0$. След-но:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), x \to 0$$

III) Если $f(x) = \cos x$, то по инд-ции уст-ся, что $f^{(n)}(x) = \cos\big(x + \frac{\pi}{2}m\big), m \in \mathbb{N}_0$. Поэтому $f^{(2k+1)}(0) = 0, f^{(2k)} = (-1)^k, k \in \mathbb{N}_0$. Получаем:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \to 0$$

IV) Если $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, то

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, k \in \mathbb{N}_0$$

Положим:

$$C_\alpha^0 = 1, C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n), x \to 0$$

В част-ти, $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n), x \to 0$

V) Если $f(x) = \ln(1+x)$, то $f(0) = 0$:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k \in \mathbb{N}$$

Получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), x \to 0$$

Задача 8.1. Представить ф-лой Маклорена ф-цию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ до $o(x^{2n+2})$

Задача 8.2. До $o(x^3)$, представить ф-лой Маклорена:

$$f(x) = \ln(1+\sin x)$$

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + o(w^3)$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{\ln(1+w) - p(w)}{w^3} = 0, w = \sin x$$

$$\ln(1+\sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x)$$

$$\sin x \sim x \Rightarrow o(\sin^3 x) = o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), x \to 0$$

$$\sin^2 = x^2 + 2xo(x^2) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

$$\sin^3 = (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+\sin x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{3}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

9 Лекция 21

Теорема 9.1 (Остаточный член в форме Лагранжа)**.** *Пусть f дифф-ма $n+1$ раз на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Тогда:*

$$\forall x \in (\alpha, \beta), x \neq a \exists c \in (a, x)\colon f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Доказательство. Пусть для опр-ти $x > a$. Рассм. ф-ции:

$$\phi(t) = f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\psi(t) = (x-t)^{n+1}$$

Ф-ции ϕ, ψ дифф-мы на $[a, x]$. Продифф-ем (по t):

$$\phi'(t) = f'(t) + (-f'(t) + f''(t)(x-t)) + \ldots$$

После сокращений, получаем:

$$\phi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

При этом, $\psi'(t) \neq 0$ на $(a, x) \Rightarrow$ По т. Коши о среднем:

$$\exists c \in (a, x)\colon \frac{\phi(x) - \phi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}$$

$$\iff \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k}{-(x-a)^{n+1}} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n}$$

Откуда следует:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

□

Замечание. *Если в док-ве теоремы положить $\psi(t) = x - t$, то получим $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)(x-a)^n$*

Пример. *Покажем, что числе e — иррационально*

Доказательство. Формула Маклорена ф-ции $f(x) = e^x$ с остаточным членом в форме Лагранжа. $\exists\theta \in (0,1)$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Пусть $e = \frac{p}{q}$:

$$n!(\frac{p}{q} - (1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!})) = \frac{e^\theta}{n+1}$$

$$\Rightarrow \exists N\colon \forall n \geq N(0 < \frac{e^\theta}{n+1} < 1)$$

Положим $n = max\,\{\,N, q\,\}$. Тогда $LHS \in \mathbb{Z}, RHS \in (0,1)$!!! $\square$

Определение 9.1. Пусть f опр-на на пром-ке I. Ф-ция f наз-ся **выпуклой вниз** (**выпуклой**) на I, если $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2 \forall t \in (0,1)$

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Ф-ция f наз-ся **выпкулой вверх** (**вогнутая**) на I, если $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2, \forall t \in (0,1)$. Если нер-ва строгие, то приходим к определению строгой выпуклости (вогнутости).

Геометрический смысл:

Пусть $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$. рассмотрим прямую, проходящую через точки $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$:

$$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

Пусть $t \in (0,1)$, тогда:

$$x = (1-t)x_1 + tx_2$$

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \in (x_1, x_2)$$

По опр-ю выпуклости вниз:

$$f(x) \leq \lambda(x)$$

Т. е. выпуклость означает, что **график ф-ции лежит не выше любой своей хорды**. (для строгой выпуклости — строго ниже, за исключением концов)

Замечание. *Из опр-я следует, что f вогнута $\iff -f$ выпукла.*

Далее будем рассматривать только случай выпуклости:

Пример. *1) Ф-ция $f(x) = kx + b$*

2) $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ — выпукла вниз.

Доказательство.

$$((1-t)x_1 + tx_2)^2 \leq (1-t)x_1^2 + tx_2^2$$

$$(1-t)^2x_1^2 + 2(1-t)tx_1x_2 + t^2x_2^2 \leq (1-t)x_1^2 + tx_2^2$$
$$2(1-t)tx_1x_2 \leq (1-t)(1-1+t)x_1^2 + t(1-t)x_2^2$$
$$2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2$$

□

3)

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1) \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

— выпуклая вниз ф-ция на $[0,1]$

Замечание. *Чаще всего, по опр-ю док-ть трудно. Если ф-ция дифф-ма, то можно задать эквив-ное опр-е.*

Теорема 9.2. *Пусть f нерп-ны на невырожд. пром-ке I и дифф-ма на $\operatorname{int} I$. Тогда след. утв-я эквив-ны:*

1) f выпукла вниз

2) $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in I, x_0 \in \operatorname{int} I$

3) f' нестрого возр. на $\operatorname{int} I$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2)$ Пусть $x \in I, x_0 \in \operatorname{int} I$. Положим $h = x - x_0$, тогда опр-е вып-ти даёт.

$$f(x_0+th) \leq (1-t)f(x_0)+tf(x) \text{ или } f(x_0+th)-f(x_0) \leq t(f(x)-f(x_0))$$

$$f'(x_0)th + o(th) \leq t(f(x) - f(x_0))$$
$$f'(x_0)h + o(h) \leq f(x) - f(x_0)$$

Перейдём к пределу по $h \to 0$:

$$f'(x_0)h \leq f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ч. Т. Д.

$2 \Rightarrow 3)$ Пусть $x, y \in \operatorname{int} I, x < y$, тогда:

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x)$$

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y)$$
$$0 \geq (f'(x) - f'(y))(y - x)$$

$y > x \Rightarrow f'(x) - f'(y) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq f'(y)$

$3 \Rightarrow 1)$ Заф. $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, t \in (0, 1)$. Положим $x = (1 - t)x_1 + tx_2$. По т. Лагранжа о среднем:

$$\exists c_1 \in (x_1, x)\colon f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1)$$

$$\exists c_2 \in (x, x_2)\colon f(x_2) - f(x) = f'(c_2)(x_2 - x)$$

Т. к. $c_1 < c_2 \Rightarrow f'(c_1) \leq f'(c_2) \Rightarrow$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1)$$
$$x_2 - x = (1 - t)(x_2 - x_1)$$
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{t} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{1 - t}$$
$$(f(x) - f(x_1))(1 - t) \leq t(f(x_2) - f(x))$$
$$f(x) \leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Т. е. f выпукла вниз на I.

□

Геометрический смысл (2):
График выпуклой вниз ф-ции лежит не ниже любой своей касательной на I.

Теорема 9.3 (Строгая версия пред. теоремы.)**.** *Пусть f нерп-ны на невырожд. пром-ке I и дифф-ма на* $\operatorname{int} I$*. Тогда след. утв-я эквив-ны:*

1) *f строго выпукла вниз*
2) $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in I, x_0 \in \operatorname{int} I$
3) *f' строго возр. на* $\operatorname{int} I$

Доказательство. Док-ва: импликаций ($2 \Rightarrow 3$) и ($3 \Rightarrow 1$) переносятся заменой нестрогих нерав-в на строгие. ($1 \Rightarrow 2$) придётся док-ть снова: Запишем нер-во ($\geq$) теоремы 9.2 для $z = x_0 + th$:

$$f(z) \geq f(x_0) + f'(x_0)(z - x_0)$$

В силу строгой вып-ти:

$$f(z) < (1-t)f(x_0) + tf(x)$$

$$\Rightarrow f(x_0 + th)????????$$

□

10 Лекция 22

Следствие. *Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на* $\operatorname{int} I$*.*

1) *Ф-ция f выпукла вниз на I* $\iff f''(x) \geq 0, x \in \operatorname{int} I$
2) *Если $f''(x) > 0$ на $\operatorname{int} I$, то f строго выпукла вниз на I.*

Пример. 1) *$y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$, т. к.:*

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

2) *$y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:*

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3) $y = x^p$ *на* $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{ выпукла вниз}$$

При $p \in (0,1)$ *— вогнута.*

4) $\ln(1+x) < x$*, при* $x > -1, x \neq 0$*:*

$$y = \ln(1+x) \text{ — строго выпукла вверх (вогнута) на } (-1, +\infty)$$

$$y = x \text{ — касат. к } x \mapsto \ln(1+x) \text{ в точке } x = 0$$

По т. 9.3 *получаем заявленное нер-во.*

Определение 10.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \operatorname{int} I$. Если:

1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$
2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$
3) f — непр-на в a.

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f.

Следствие. *Если ф-ция* f *дважды дифф-ма на* $\operatorname{int} I$ *и* $a \in \operatorname{int} I$ *— точка перегиба* f*, то* $f''(a) = 0$*:*

Доказательство. Пусть для опр-ти f выпукла вниз на $(a-\delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a+\delta), \delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a-\delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a+\delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f'. По Т. Ферма $f''(a) = 0$ □

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение"на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 10.1 (Лемма о 3-ёх хордах)**.** *Пусть ф-ция* f *выпукла вниз на* (a, b) *и* $a < x_1 < x < x_2 < b$*. Тогда:*

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \tag{3}$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(t-x_1)+f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1), f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \leq \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{\lambda(x)-\lambda(x_1)}{x-x_1}, \frac{\lambda(x_2)-\lambda(x)}{x_2-x} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$\square$

<u>Задача</u> 10.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

<u>Следствие</u>. *Для любой точки $x \in (a,b)$ ф-ция $\nu\colon (a,b)\setminus\{\,x\,\} \to \mathbb{R}$,*

$$\nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

нестрого возрастает на $(a,b)\setminus\{\,x\,\}$

Доказательство. $y, z \in (a,b)\setminus\{\,x\,\}, y < z$ $\square$

<u>Теорема</u> 10.2. *Если ф-ция f выпукла вниз на (a,b), то f непр-на на (a,b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.*

Доказательство. Зафикс. $x \in (a,b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 10, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, сущ-ют конечные $\nu(x-0) \leq \nu(x+0)$, т. е. $\exists$ конечные левая и правая производная f в точке x: $f'_-(x) \leq f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x, а значит непр-на в точке x.

Перейдём к пределу в левом нер-ве 3 при $x \to x_1+0$, а также в правом нер-ве 3 при $x \to x_2 - 0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возр-ет на (a,b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a, b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непр-ти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x)$, откуда:

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f$ дифф-ма в т. x_0 □

Теорема 10.3 (Нер-во Йенсена)**.** *Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I. $x_1, \dots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\geq)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I.
ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости
- Пусть нер-во верно для n. Установим справедливость для $n+1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

  $$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$$

  Т. к. $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

  $$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

  $$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1 - \lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) f(y) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

  По предположению инд-ции:

  $$f(y) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_i)$$

  Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

□

Пример. *Пусть* $x_1, \dots x_n \geq 0$*, тогда:*

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$
По нер-ву Йенсена:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

□

Пример (Нер-во Гельдера)**.** *Пусть* $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ *и*

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$