Алгем.
Лекция 2

Сергей Григорян

10 сентября 2024 г.

1 Упражняемся

$A \in M_{m*n}$ Произвольную i-ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

<u>**Определение**</u> **1.1. Линейная комбинация (ЛК)** строк $A_{1*}, \cdots, A_{m*}$ наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

<u>**Утверждение**</u> **1.1.** *a) Пусть $A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A*

b) Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B.

Доказательство. **b)** Пусть $C = AB \in M_{m*k}$

$$C_{*j} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{sj} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} b_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}.$$

□

2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i-ого измерения. $(i = 1, 2, 3)$

<u>**Определение**</u> **2.1.** Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

$$\overline{XY} \text{ - направленный отрезок.}$$

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

<u>**Обозначение**</u>**.**

$\overline{0}$ - *нулевой напр. отр..*

Определение 2.2. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

a) $XY = X'Y'$

b) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны ($\exists$ прямая, $||$ им обоим)

c) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 2.3. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

Утверждение 2.1. *Два напр. отр.* $\overline{XY}$ *и* $\overline{X'Y'}$ *определяют (порождают) один и тот же вектор т. и т. т., когда они равны.*

Доказательство.

a) Необходимое: Пусть $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \overline{a}$

b) Достаточное: Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\overline{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. □

Определение 2.4. $\overline{XY} = \overline{a} \iff$ он порождает вектор a

3 Операции с векторами

3.1 I. Сложение

Замечание. *При данном векторе* $\overline{a}$ *и фикс. точке* X*, то найдётся напр. отр.* $\overline{XY} = \overline{a}$

Определение 3.1. Пусть напр. отр. $\overline{XY}$ опр. $\overline{a}$, $\overline{YZ}$ опр. $\overline{b}$:

Сумма векторов: вектором $\overline{a} + \overline{b}$ назыв. вектор, порожд. $\overline{XZ}$

Замечание. *Данное опр.* ***корректно****, и не зависит от начальной точки* X

Доказательство. ***Рисунок*** □

3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\overline{a} = \overline{XY}$ и $\overline{XZ}$:

a) $XZ = |\lambda| * XY$

b) $\overline{XZ}$ - коллинеарен $\overline{XY}$

c) $\overline{XZ}$ сонаправлен $\overline{XY}$, при $\lambda > 0$
$\overline{XZ}$ прот. направлен. $\overline{XY}$ при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемы напр. отр. $\overline{XZ}$, наз-ся вектором $\lambda\overline{a}$

Доказательство. to do by yourself □

Теорема 3.1. *Операции "+"и "*λ"удовл. след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-в параллелограмма):*
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

2. *Ассоциативность сложения:*
$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

3. $\exists \overline{o}\colon \overline{o} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{o} = \overline{a}, \forall \overline{a} \in V_i$

4. $\forall \overline{a} \in V_i\ \exists (-\overline{a}) \in V_i\colon \overline{a} + (-\overline{a}) = (\overline{-a}) + \overline{a} = \overline{o}$

5. *Унитарность:*
$$1 * \overline{a} = \overline{a}, \forall \overline{a} \in V_i.$$

6. $$(\lambda * \mu) * \overline{a} = \lambda * (\mu * \overline{a}).$$

7. $$(\lambda + \mu) * \overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu * \overline{a}.$$

8. $$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

Замечание. *Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва $\mathbb{R}$.*

4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n} \in V_i$

Обозначение.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} \text{ - наз-ся ЛК векторов.}$$

Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \cdots n$, то такая ЛК наз-ся ***тривиальной****.*

Если $\exists i \colon \alpha_i \neq 0$, то ЛК ***нетривиальная****.*

Определение 4.1 (ЛЗ система векторов)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если $\exists$ **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{o}$

Определение 4.2 (ЛНЗ сис. вект.)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если $\nexists$ **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{o}$

Пример.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ - ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: предствить, что есть коэф-ты, дающие ЛК $= \overline{o}$, и показать, что она тривиальная.

Утверждение 4.1. *Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛЗ $\iff$ хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.*

Доказательство. a) **Необх:** пусть $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК } : \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \cdots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{o}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} + \cdots + \overline{v_i} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n} = \overline{o}.$$

$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\overline{v_i} = \lambda_1\overline{v_1} + \cdots + \lambda_n\overline{v_n}$

$$\Rightarrow \lambda_1\overline{v_1} + \cdots + \lambda_n\overline{v_n} - \overline{v_i} = \overline{o}.$$

□

Замечание. ***НЕВЕРНО*** *было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.*

Пример.

$$\overline{a}, \overline{b} \text{ - неколлин..}$$

$$\Rightarrow \text{Для } \begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{a} & \overline{b}\end{pmatrix} \text{ - это неверно, т. к. } b \text{ не выразим через } a.$$

$$\text{Но } 1 * \overline{a} + (-1) * \overline{a} + 0 * \overline{b} = \overline{o} \text{ - нетривиальная ЛК.}$$

Утверждение 4.2. *a) Если система $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛЗ $\Rightarrow$ всякая её **надсистема** тоже ЛЗ*

b) Если система $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$, то всякая её подсистема ЛНЗ.

Доказательство. a) $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n,$- не все равны $\overline{o}$, тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{v_i} = \overline{o}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i\overline{v_i} + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \overline{v_j} = \overline{o}$

b) Пусть подсистема $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_k}\end{pmatrix}$ - ЛЗ (от прот.), тогда по а), $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ **Противоречие**

□

Утверждение 4.3. *Пусть $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ - ЛНЗ сист. векторов в V_i. Тогда каждый вектор $\overline{w} \in V_i$ выражется через $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ не более чем одним способом.*

Доказательство.

$$\overline{w} = \begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \overline{V}\alpha = \overline{V}\beta$$

$$\Rightarrow \overline{o} = \overline{V}(\alpha - \beta).$$

□