Содержание

АлГем

Сергей Григорян

11 сентября 2024 г.

1 Упражняемся

$A \in M_{m*n}$ Произвольную i-ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1. Линейная комбинация (ЛК) строк $A_{1*}, \cdots, A_{m*}$ наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

Утверждение 1.1. *a) Пусть $A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A*

b) Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B.

Доказательство. **b)** Пусть $C = AB \in M_{m*k}$

$$C_{*j} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{sj} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} b_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}.$$

□

2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i-ого измерения. $(i = 1, 2, 3)$

Определение 2.1. Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

$$\overline{XY} \text{ - направленный отрезок.}$$

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

Обозначение.

$\overline{0}$ - *нулевой напр. отр..*

Определение 2.2. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

a) $XY = X'Y'$

b) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны ($\exists$ прямая, $||$ им обоим)

c) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 2.3. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

Утверждение 2.1. *Два напр. отр. $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ определяют (порождают) один и тот же вектор т. и т. т., когда они равны.*

Доказательство.

a) Необходимое: Пусть $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \overline{a}$

b) Достаточное: Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\overline{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. $\square$

Определение 2.4. $\overline{XY} = \overline{a} \iff$ он порождает вектор a

3 Операции с векторами

3.1 I. Сложение

Замечание. *При данном векторе $\overline{a}$ и фикс. точке X, то найдётся напр. отр. $\overline{XY} = \overline{a}$*

Определение 3.1. Пусть напр. отр. $\overline{XY}$ опр. $\overline{a}$, $\overline{YZ}$ опр. $\overline{b}$:

Сумма векторов: вектором $\overline{a} + \overline{b}$ назыв. вектор, порожд. $\overline{XZ}$

Замечание. *Данное опр.* ***корректно****, и не зависит от начальной точки X*

Доказательство. ***Рисунок*** $\square$

3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\overline{a} = \overline{XY}$ и $\overline{XZ}$:

a) $XZ = |\lambda| * XY$

b) $\overline{XZ}$ - коллинеарен $\overline{XY}$

c) $\overline{XZ}$ сонаправлен $\overline{XY}$, при $\lambda > 0$
$\overline{XZ}$ прот. направлен. $\overline{XY}$ при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемы напр. отр. $\overline{XZ}$, наз-ся вектором $\lambda\overline{a}$

Доказательство. to do by yourself □

Теорема 3.1. *Операции "+"и "*λ"удовл. след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-в параллелограмма):*
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$

2. *Ассоциативность сложения:*
$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$

3. $\exists\overline{o}$: $\overline{o} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{o} = \overline{a}, \forall\overline{a} \in V_i$

4. $\forall\overline{a} \in V_i$ $\exists(-\overline{a}) \in V_i$: $\overline{a} + (-\overline{a}) = (\overline{-a}) + \overline{a} = \overline{o}$

5. *Унитарность:*
$$1 * \overline{a} = \overline{a}, \forall\overline{a} \in V_i.$$

6. $$(\lambda * \mu) * \overline{a} = \lambda * (\mu * \overline{a}).$$

7. $$(\lambda + \mu) * \overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu * \overline{a}.$$

8. $$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}.$$

Замечание. *Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва $\mathbb{R}$.*

4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$
$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n} \in V_i$

<u>Обозначение</u>.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} \text{ - наз-ся ЛК векторов.}$$

*Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \cdots n$, то такая ЛК наз-ся **тривиальной**.*
*Если $\exists i\colon \alpha_i \neq 0$, то ЛК **нетривиальная**.*

<u>Определение</u> 4.1 (ЛЗ система векторов)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если $\exists$ **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{o}$

<u>Определение</u> 4.2 (ЛНЗ сис. вект.)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если $\nexists$ **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{o}$

<u>Пример</u>.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ - ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: предствить, что есть коэф-ты, дающие ЛК $= \overline{o}$, и показать, что она тривиальная.

<u>Утверждение</u> 4.1. *Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛЗ $\iff$ хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.*

Доказательство. a) **Необх:** пусть $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК } : \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \cdots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{o}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} + \cdots + \overline{v_i} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n} = \overline{o}.$$

$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\overline{v_i} = \lambda_1 \overline{v_1} + \cdots + \lambda_n \overline{v_n}$

$$\Rightarrow \lambda_1 \overline{v_1} + \cdots + \lambda_n \overline{v_n} - \overline{v_i} = \overline{o}.$$

□

Замечание. ***НЕВЕРНО*** *было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.*

Пример.

$$\overline{a}, \overline{b} \text{ - неколлин..}$$

$\Rightarrow$ *Для* $\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix}$ *- это неверно, т. к. b не выразим через a.*

Но $1 * \overline{a} + (-1) * \overline{a} + 0 * \overline{b} = \overline{o}$ *- нетривиальная ЛК.*

Утверждение 4.2. *a) Если система* $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ *- ЛЗ* $\Rightarrow$ *всякая её* ***надсистема*** *тоже ЛЗ*

b) Если система $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ *- ЛНЗ* $\Rightarrow$*, то всякая её подсистема ЛНЗ.*

Доказательство. a) $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n,$- не все равны $\overline{o}$, тогда $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} = \overline{o}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \overline{v_j} = \overline{o}$

b) Пусть подсистема $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_k} \end{pmatrix}$ - ЛЗ (от прот.), тогда по a), $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ **Противоречие**

□

Утверждение 4.3. *Пусть* $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$ *- ЛНЗ сист. векторов в* V_i*. Тогда каждый вектор* $\overline{w} \in V_i$ *выражется через* $\begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$ *не более чем одним способом.*

Доказательство.

$$\overline{w} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \overline{V} \alpha = \overline{V} \beta$$

$$\Rightarrow \overline{o} = \overline{V}(\alpha - \beta).$$

□

5 Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i

Утверждение 5.1. *a) Пусть $\overline{a} \neq \overline{o}$ и $\overline{b}$ коллинеарен $\overline{a}$. Тогда $\overline{b} = \lambda\overline{a}$.*

b) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ не коллин. и $\overline{b}$ компл. $\overline{a_1}, \overline{a_2}$. Тогда $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$

c) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - не комплан. Тогда всякий вектор представим в виде $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$\lambda = \begin{cases} \frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на одной стороне с } X \\ -\frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на разных сторонах отн. } X \end{cases} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a}$$

b) Оба вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ненулевые. (***Картинка***)

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ_1} + \overline{XZ_2} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$$

c) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ порожд. $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$, а вектор b - $\overline{XZ}$. $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин., (***Картинка***) $Z' = l \cap (X_1Y_1Y_2)$

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ'} + \overline{Z'Z} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$$

□

Следствие. *1) Система, сост. только из $\overline{o}$ - ЛЗ.*

2) Система, сост. из двух колин. векторов - ЛЗ.

3) Система, сост. из трёх комплан. векторов - ЛЗ.

4) Любая сист., сост. из четырех векторов в пр-ве - ЛЗ.

Доказательство. 1) $1 * \overline{o} = \overline{o}$

2) $\overline{a}, \overline{b}$ - коллин.

Если $\overline{a} = \overline{o}$ - ЛЗ система $\Rightarrow$ (a, b)- надсистема ЛЗ $\Rightarrow$ она ЛЗ

Если $\overline{a} \neq \overline{o} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})$ - ЛЗ

3) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}$ - компл.

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - коллин., то $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ - ЛЗ $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема.

Иначе, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин. $\Rightarrow b = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 + \overline{a_2}$ - ЛЗ

4) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b}$:

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема ЛЗ сист.

Иначе $\Rightarrow \overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$.

$\square$

Утверждение 5.2. *Пусть* $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$ *- ЛНЗ сист. вект. и* $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{b})$ *- ЛЗ. Тогда:*

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i}$$

Доказательство. $\exists$ нетрив. ЛК:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_n \overline{a_n} + \beta \overline{b} = \overline{o}$$

Предположим, что $\beta = 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow$:

$$\overline{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \overline{a_1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta} \overline{a_n}$$

$\square$

Определение 5.1. V - лин. пр-во (над $\mathbb{R}$).

Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - наз-ся базисом в V_i, если:

a) $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - ЛНЗ

b) Каждый вектор $\overline{v} \in V_i$ представим в виде ЛК:

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \ldots + \alpha_n \overline{e_n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$M_{3*1}(\mathbb{R})\colon \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i}$$

Замечание.

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ - \textit{коор-т столбец} } \overline{v} \text{ \textit{в базисе} } \overline{e}$$

Утверждение 5.3. *Если в V фикс. базис $G = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n} \end{pmatrix}$, то всякий вектор $\overline{v} \in V$ однозначно раскладывается по одному базису. (т. е. имеет однозначно опред. коор-тный столбец)*

Доказательство. См. прошлую лекцию ☐

Утверждение 5.4. *Пусть в пр-ве V фикс. базис G, $\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha, \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$\overline{v} + \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha + \beta,$$

$$\lambda\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \lambda\alpha$$

Доказательство.

$$\overline{v} = G\alpha$$

$$\overline{v} = G\beta$$

$$\Rightarrow \overline{v} + \overline{w} = G(\alpha + \beta)$$

$$\lambda\overline{v} = \lambda G\alpha = G(\lambda\alpha)$$

☐

6 Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3

Теорема 6.1 (О ЛНЗ системах векторов).

1) *Система, состоящая из одного* ***ненулевого*** *вектора $\overline{a}$ - ЛНЗ*

2) Система, сост. из двух неколлин. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛНЗ

3) Система, сост. из трёх некомплан. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$- ЛНЗ

Доказательство. 1) От. противного, пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \overline{a} = \overline{o}$:

$$|\lambda||\overline{a}| = 0\text{!!! Два ненулевых числа в умнож. дают 0.}$$

2) От. противного, пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛЗ. Б. О. О. (без ограничения общности) $\overline{a_2} = \lambda \overline{a_1}$ - противоречие.

3) От. пр., пусть $\begin{pmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3} \end{pmatrix}$ - ЛЗ. Б. О. О. $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$ - противоречие.

□

Теорема 6.2 (Об описании базиса в V_i)**.** *Система векторов является:*

a) базисом в $V_1 \iff$ она состоит из одного вектора $\overline{e} \neq \overline{o}$

b) базисом в $V_2 \iff$ она сост. из двух неколин. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$

c) базисом в $V_3 \iff$ она сост. из трёх некомпл. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

Доказательство.

a) V_1: $\overline{e} \neq 0$ (ЛНЗ сист.)

$$\forall \overline{b} \in V_1 (\overline{b} = \lambda \overline{e}) \Rightarrow (\overline{e}) \text{ - базис в } V_1.$$

Если $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in V_1 \Rightarrow$ они коллин. $\Rightarrow$ ЛЗ и аналогично $(\overline{o})$ - ЛЗ.

b) V_2 - фикс. $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - неколл. $\Rightarrow$ ЛНЗ.

$$\forall b \in V_2 \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} \overline{b} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \Rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2})\text{- базис.}$$

Почему нет других? $\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix}$ - компл. $\Rightarrow$ ЛЗ. Если $\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} \end{pmatrix}$ - коллин. $\Rightarrow$ через них выр-ся только коллин. им вектора.

c) $\left(\overline{e_1} \quad \overline{e_2} \quad \overline{e_3}\right)$ - некомпл. $\Rightarrow$ ЛНЗ:

$$\forall b \in V_3 \colon b = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i} \Rightarrow \text{ базис.}$$

Почему нет других?

$$\left(\overline{e_1} \quad \overline{e_2} \quad \overline{e_3} \quad \overline{e_4}\right) \text{- ЛЗ}$$

$\left(\overline{e_1} \quad \overline{e_2} \quad \overline{e_3}\right)$ - компланарный, то тогда ЛЗ

- $\overline{e_1} || \overline{e_2}$ - очев.
- $\overline{e_1 \not|| \overline{e_2}}$ - образ. плоскость.

$\square$

7 Матрица перехода от одного базиса к другому

$V \colon$ два базиса: $G = \left(\overline{e_1} \quad \overline{e_2} \quad \ldots \quad \overline{e_n}\right), G' = \left(\overline{e_1}' \quad \overline{e_2}' \quad \ldots \quad \overline{e_n}'\right)$

$$\overline{e_1}' = S_{11}\overline{e_1} + S_{21}\overline{e_2} + \ldots + S_{n1}\overline{e_n}$$

$$\vdots$$

$$\overline{e_n} = S_{1n}\overline{e_1} + S_{2n}\overline{e_2} + \ldots + S_{nn}\overline{e_n}$$

$\Rightarrow$

$$S' = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \ldots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \ldots & S_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \ldots & S_{nn} \end{pmatrix} = S_{G \to G'}$$

- матрица перехода от G к G'

$$\begin{pmatrix} \overline{e_1}' \\ \overline{e_2}' \\ \vdots \\ \overline{e_n}' \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} \overline{e_1} \\ \overline{e_2} \\ \vdots \\ \overline{e_n} \end{pmatrix}$$

Утверждение 7.1. *Пусть в V фикс. G и G' - базисы и $G' = GS$. Пусть $\overline{a} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha$ и $\overline{a} \underset{G'}{\Longleftrightarrow} \alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$.*

Доказательство.

$$\overline{a} = G\alpha$$

$$\overline{a} = G'\alpha' = GS\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

□

Определение 7.1. $\overline{a}, \overline{b}$ наз-ся ортогональными, если он перпендикулярны друг другу.

Определение 7.2. Базис G наз-ся ортогональным, если все базис. векторы попарно ортогональны.

Определение 7.3. Базис G наз-ся ортонормированным (ОНБ), если он ортогональный и нормированный ($\forall i\colon |\overline{e_i}| = 1$).