Многомерный Анализ, интегралы и ряды

Григорян Сергей

18 марта 2025 г.

Содержание

§5. Метрические пространства

5. 1. Метрики и нормы

Обобщим понятие расстояния:

Определение. Пусть $X \neq \emptyset$. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой** (на X), если $\forall x, y, z \in X$:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (Неравенство треугольника)

Пара (X, ρ) называется **метрическим пространством** (МП)

Пример.

$$X \neq \emptyset, \rho(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что (X, ρ) — МП.

Обобщим понятие длины вектора:

Определение. Пусть V — линейное пространство (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Функция $||\cdot||\colon V \to \mathbb{R}$ называется **нормой** (на V), если $\forall x, y \in V, \forall \alpha$:

1. $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Неравенство треугольника)

Пара $(V, ||\cdot||)$ называется **нормированным пространством** (НП).

Лемма 1. *Всякое нормированное пр-во является метрическим пространством относительно $\rho(x, y) = ||x - y||$*

Доказательство. Проверим неравенство треугльника:

$$\rho(x,z) = ||x - z||$$

$$\rho(z,y) = ||z - y||$$

Тогда, действительно:

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

$\square$

Пример.

$$X = \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n)^T, \forall i, x_i \in \mathbb{R}$$
$$y = (y_1, \ldots, y_n)^T$$

1. $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ *(евклидова норма),* $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2}$
2. $||x||_p = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{\frac{1}{p}}, \rho_p(x,y) = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p)^{\frac{1}{p}}, p > 1$
3. $||x||_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \rho_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$

Доказательство. Докажем, что $||\cdot||_p$ удовлетворяет нер-ву треугольника. Действительно, вспомним неравенство Минковского:

$$(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n), p > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

при $a_k = |x_k|, b_k = |y_k|$:

$$||x + y||_k \leq ||x||_k + ||y||_k$$

Для $||\cdot||_p$ непосредственная проверка свойств очевидна. $\square$

Определение. Пусть (X, ρ) — МП, $a \in X, r > 0$:

$$B_r(a) = \{\, x \in X \colon \rho(x,a) \leq r \,\}$$

называется **открытым шаром** с центром в a и радиусом r.

$$\overline{B}_r(a) = \{\, x \in X \colon \rho(x,a) \leq r \,\}$$

называется **замкнутым шаром** с центром в a и радиусом r.

Определение. Множество $E \subset X$ называется **ограниченным**, если:

$$\exists a \in X, r > 0 (E \subset B_r(a))$$

Пример.

$$X = \mathbb{R}^2, (x, y), B_1(0, 0)$$

При норме $||\cdot||_1 (||x|| = |x|)$*, это ромб с точками* $(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (0, -1)$
При норме $||\cdot||_p$*, форма фигуры приближается к кругу.*
При $||\cdot||_\infty$ *— это квадрат.*