

Матан

Сергей Григорян

1 ноября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 13	3
1.0.1	Долг прошлой жизни	3
1.1	Равномерная непр-ть	3
1.2	Показательная и логарифмическая ф-ции	5
2	Лекция 14	8
2.0.1	Ликбез по тригономе	10
2.0.2	Сравнение ф-ций	12
3	Лекция 15	16
3.1	Дифференцируемые ф-ции	16
4	Лекция 16	17
5	Лекция 17	22
5.1	Дифференциал ф-ции	23
5.2	Теоремы о среднем	24
6	Лекция 18	26
6.1	Приложения теореме о среднем	27

1 Лекция 13

1.0.1 Долг прошлой жизни

Теорема 1.1 (О разрывах монот. ф-ции). Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Если f монотонна на (a, b) , то f на (a, b) может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.

Доказательство. Пусть f нестрого возр. на (a, b) . Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т. $c \in (a, b)$ \exists конечные $f(c-0), f(c+0)$, причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на (a, b) разрывы только I рода.

Пусть $c, d \in (a, b), c < d$. Тогда для $\alpha \in (c, d)$. Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c, b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a, d)} f(x) = f(d-0)$$

□

Поэтому если c, d - точки разрыва ф-ции f , то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку $\in \mathbb{Q}$, содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством \mathbb{Q} . Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

1.1 Равномерная непр-ть

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Напомним, что f непр-на на E , если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение 1.1. Ф-ция f наз-ся **равномерно непрерывной** (на E), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Замечание. Если f р. н. (равномерно непр-на) на E , то f непр-на на E

Задача 1.1. Если f и g р. н. на E и огр-ны, то fg - р. н. на E

Определение 1.2. Ф-ция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E (|f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|)$$

Замечание. Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$)

Пример.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

Доказательство.

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

Пример.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, но не р. н.}$$

Замечание. f не р. н. \iff

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E (|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ положим, $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но, f не р. н.

□

Теорема 1.2 (Кантора). Если f непр-на на $[a, b]$, то f - р. н. на $[a, b]$

Доказательство. I) Предположим, что f не явл-ся р. н. Тогда полагая $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, получаем $x_n, x'_n \in [a, b]$, т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В $\{x_n\}$ имеет сх-ся подп-ть $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \rightarrow x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти, f в x_0 :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$

□

Задача 1.2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ р. н. на E . Покажите, что

$$\exists! F : \text{closure}(E) \rightarrow \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

Определение 1.3. Ф-ция $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\exp = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ наз-ся ЭКСПОНЕНТОЙ.

Замечание. Сх-ть $(1 + \frac{x}{n})^n$ устанавливалась ранее для всяк $x \in \mathbb{R}$

Теорема 1.3. Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

Доказательство. Введём об-е $a_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$. Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\begin{aligned} a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y) &= \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n = \\ &= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k \end{aligned}$$

Где:

$$b = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right), a = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$$

П-ть $\{a_n(|x|)\}$, нестрого возрастает, начиная с некот. n_0 (см. док-во сх-ти):

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^p\right| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^p \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|), p = 1, \dots, n$$

Сл-но, каждое слагаемое в $Q(x, y)$ оценивается по модулю $C = \exp |x + y| \exp |x| \exp |y|$. Тогда получаем:

$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)| \leq \frac{|x| |y| C}{n}$$

Переходя к пределу, получаем, что:

$$|\exp(x) \exp(y) - \exp(x + y)| \leq 0$$

Ч. Т. Д. □

Следствие.

$$\exp x > 0 \text{ и } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\exp(x) \exp(-x) = 1$$

□

Лемма 1.4. *a)*

$$\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

b)

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}, \forall x < 1$$

Доказательство. Зафикс. $N \in \mathbb{N}$, т. ч. $\frac{x}{N} \geq -1$. Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N: \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x - \text{пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

Теорема 1.5. Ф-ция \exp непр-на, строго возр. и отображает \mathbb{R} на $(0, +\infty)$

Доказательство. По нер-ву из предыдущей леммы, при $x < 1$ имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при $x \rightarrow 0$, $\exp(x) \rightarrow 1$. Тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \left[\begin{array}{l} t + a = x \\ t = x - a \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(t + a) = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

\Rightarrow ф-ция непр-на на \mathbb{R}

Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x) \exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

□

2 Лекция 14

Определение 2.1. Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция $\ln: (0, +\infty)$, обратная к \exp

Замечание. По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:

- \ln непр-на на обл-ти определения.
- \ln строго возр.
- \ln отображает $(0, +\infty)$ на \mathbb{R} , при этом, если $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Определение 2.2. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Показательной ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция: $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

Замечание. Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при $a > 1$ строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображает \mathbb{R} на $(0, +\infty)$

Замечание. Пусть $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Тогда:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) = \exp(\ln a) = a$$

Сл-но, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Определение 2.3. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Логарифмической ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция $\log_a: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Обратная к показательной ф-ции $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

Замечание. Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображает $(0, +\infty)$ на \mathbb{R} . Кроме того:

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Определение 2.4. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Степенной ф-цией с показателем α наз-ся ф-ция $x \mapsto x^\alpha, x \in E$, где:

1) $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow E = \mathbb{R}$, при этом $x^0 = 1, x^\alpha = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ раз}}$

2) $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при этом $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$, при этом $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

Замечание. Если в последнем случае $\alpha > 0$, то полагаем $0^\alpha = 0$ (т. е. 0 включаем в E), это согласуется с тем, что:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

Замечание. Из св-в \exp и \ln получаем, что степенная ф-ция непр-на на E , на $(0, +\infty)$ строго возрастает на при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$

Лемма 2.1 (Замечательные пределы).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. По пред. лемме при $x < 1$:

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \iff x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y-1}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$ - непр. в 0. Также $f(x) = \ln(x+1)$ непр-на

в 0. Тогда композиция $g \circ f$ непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ непр-на в 0 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e \quad \square$

Задача 2.1. Док-те, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Пример.

$$e^\pi \vee \pi^e$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^x &> 1 + x \\ x &= \frac{\pi}{e} + 1 \\ e^{\frac{\pi}{e} - 1} &> \frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e \end{aligned}$$

□

2.0.1 Ликбез по тригономе

Лемма 2.2. Для всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ верно:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Picture:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &< S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

□

Следствие. Для всех $x \in \mathbb{R}$. Верно $|\sin x| < |x|$, причём рав-во имеет место только при $x = 0$

Доказательство. Если $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то нер-во следует по лемме.

Если $x \geq \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$

Если $x < 0$, то $|\sin x| = |\sin(-x)| < |(-x)| = |x|$

□

Следствие. Ф-ции \sin и \cos непр-ны на \mathbb{R} .

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} = |x-a| \rightarrow 0$$

Сл-но, $\sin x$ в точке a равен $\sin a \Rightarrow \sin x$ - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть $\cos x$ или из ф-л тригонометрии:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$\cos x$ непр-н как композиция непр. ф-ций.

□

Следствие.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ и $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ (из леммы) В силу чётности, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{предел} = 1$. \square

Определение 2.5. Обратные тригонометрические ф-ции:

1) \arcsin :

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2) $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$$

3) $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\arctg = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4) $\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

$$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)})^{-1}$$

Определение 2.6. Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto x^\alpha$
- $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
- $\arcsin, \arccos, \arctg, \operatorname{arcctg}$

Определение 2.7. Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

Пример.

$$\operatorname{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Теорема 2.3. *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

2.0.2 Сравнение ф-ций

Определение 2.8. Пусть $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка E и существует $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

- 1) Если $\alpha(x) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow a$, то говорят, что ф-ции f и g эквивалентны (асимптотически равны) при $x \rightarrow a$. Пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$
- 2) Если $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$, то говорят, что ф-ция f беск. мала по сравн. с ф-цией g при $x \rightarrow a$, пишут $f(x) = o(g(x))$, при $x \rightarrow a$
- 3) Если α - огр-на, то говорят, что ф-ция f ограничена по сравнению с g при $x \rightarrow a$. Пишут, что $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow a$

Замечание. Если $g(x) \neq 0$ в неkot. проколот. окр-ти a , с учётом обл. опр-я, то:

1)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

2)

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3)

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a \iff \exists M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \left(\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \right)$$

Доказательство. \Rightarrow) Следует из опр-я.

\Leftarrow) Положим:

$$\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ \text{что угодно, иначе} \end{cases}$$

□

Задача 2.2. Доказать, что \sim - отн. эквив-ти.

Пример. 1)

$$\begin{aligned} x^n = o(x^m), x \rightarrow 0 &\iff n > m \\ x^n &= x^{n-m} x^m \end{aligned}$$

2)

$$x^n = o(x^m), x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow m > n$$

3)

$$\begin{aligned} x &= O(\sin x), x \rightarrow 0 \\ x + \cos x &= O(x), x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

4)

$$x \sim \sin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), x \rightarrow 0$$

Замечание. Читаем $f(x) = O(g(x)), f(x) = o(g(x))$ - слева направо!

Лемма 2.4.

$$x \rightarrow a$$

Тогда справедливо:

1)

$$o(f) \pm o(f) = o(f), O(f) \pm O(f) = O(f)$$

2)

$$o(f) = O(f)$$

3)

$$o(O(f)) = o(f), O(o(f)) = o(f)$$

4)

$$o(f)O(g) = o(fg)$$

Доказательство. 3)

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = o(v), x \rightarrow a \\ v = O(f), x \rightarrow a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u(x) = \alpha(x)v(x) \\ v(x) = \beta(x)f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ &\Rightarrow u(x) = \alpha(x)\beta(x)f(x) = \gamma(x)f(x), \gamma \rightarrow 0, x \rightarrow a \\ &\Rightarrow u(x) = o(f), x \rightarrow a \end{aligned}$$

□

Лемма 2.5. 1)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \iff f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$$

2)

$$f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x), x \rightarrow a \Rightarrow f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$$

Кроме того, если $g_{1,2}(x) \neq 0$ в некоем прок. окр-ти a , то:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, x \rightarrow a$$

3)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$$

То пределы $f(x), g(x)$ при $x \rightarrow a$ суц-ют одновременно (в $\overline{\mathbb{R}}$), и если суц-ют, то равны.

Доказательство. 1)

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x), x \rightarrow a &\iff f(x) = \alpha(x)g(x), x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a), \alpha(x) \rightarrow 1 \\ f(x) = \alpha(x)g(x) &= g(x) + g(x)(\alpha(x) - 1) \underset{\rightarrow 0}{\iff} f(x) = g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

2) Пусть $g_1(x) \neq 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$

$$g_2(x) = \alpha(x)g_1(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\alpha(x) \rightarrow 1, x \rightarrow a$$

Т. к. $\alpha(x)$, то $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_{\delta_1}(a) \cap E (\alpha(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

$\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$. Тогда $g_2(x) \neq 0$ на $\overset{\circ}{B}_{\delta_0}(a) \cap E$

Рассм. $\frac{1}{g_1(x)}, \frac{1}{g_2(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (\frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\alpha(x)g_2(x)}) \Rightarrow$
 $\frac{1}{g_1(x)} \sim \frac{1}{g_2(x)}, x \rightarrow a$

□

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4}-2)(2^x-1)^2}$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) = \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \sim 2 \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sim \frac{x^3}{2}, x \rightarrow 0$$

$$\sqrt{x+4}-2 = \frac{x}{\sqrt{x+4}+2} \sim \frac{x}{4}, x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4}-2)(2^x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{x}{4} \cdot x^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0 \iff \operatorname{tg} x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sim x, x \rightarrow 0 \iff \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = o(x), x \rightarrow 0$$

3 Лекция 15

Определение 3.1. Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty$. Прямая $y = kx + b$ наз-ся наклонной асимптотой f при $x \rightarrow +\infty$, если:

$$f(x) = kx + b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

Аналогично опр-ся накл. асимптота при $x \rightarrow -\infty$

Теорема 3.1. Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty$, $k, b \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота f при $x \rightarrow +\infty \iff$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

Доказательство. \Rightarrow Пусть $y = kx + b$, накл. асимпт. f при $x \rightarrow +\infty$, тогда $f(x) = kx + b + o(1), x \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{1}{x}(b + o(1)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

\Leftarrow Рассм. $\alpha(x) = f(x) - kx - b$, где k, b - пределы из усл-я:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$$

Сл-но, $f(x) = kx + b + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$

□

Замечание. Справедливо аналогичное утв-е при $x \rightarrow -\infty$

Определение 3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Ф-ция f опр-на на (α, a) или (a, β) . Прямая $x = a$ наз-ся вертикальной асимптотой ф-ции f , если хотя бы один из $f(a + 0)$ или $f(a - 0)$ равен $+\infty(-\infty)$

3.1 Дифференцируемые ф-ции

Пусть I - невырожд. пром-к в \mathbb{R} (содержит более 1 точки).

Определение 3.3. Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ - производная ф-ции } f \text{ в точке } a$$

Если предел конечен, то f наз-ся дифференцируемой в a .

Пример. 1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = kx + b$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x - a)}{x - a} = k$$

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sign}(x)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Геометрический смысл производной: Пусть f дифф. в a :

$l: y = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) + f(a)$ - прямая, проход. через $(a, f(a)), (t, f(t))$

Тогда:

$$K_{\text{сек.}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \rightarrow f'(a) = K_{\text{кас.}}, t \rightarrow a$$

4 Лекция 16

Теорема 4.1 (О линейной аппроксимации). Ф-ция f дифф-ма в $a \iff \exists A \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a \quad (1)$$

Доказательство. Положим $A = f'(a)$:

\Rightarrow) Опр-м

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), x \neq a \\ \text{произв.}, x = a \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ и:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a), \text{ т. е. вып-но при } A = f'(a)$$

\Leftarrow) ... см. учебник.

□

Следствие. Если f дифф-ма в a , то она непр-на в a .

Замечание. Обратное неверно.

Определение 4.1. Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$, Тогда:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Соотв. правая и левая производные.

Замечание. Если $a \in (\text{int})I \Rightarrow \exists f'(a) \iff \exists f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$.

Если a - концевая точка I , то производная равна соотв. одност. пределу.

Задача 4.1. Док-ть, что если $\exists f'_+(a), f'_-(a)$, то f непр-на в a .

Теорема 4.2. Пусть $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если f, g дифф-мы в a , то:

1) $\exists (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2) $\exists (fg)' = f'g + fg'$

3) Если $g \neq 0$ на I , то $\exists \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. 2)

$$fg(x) - fg(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$

$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Перейдём к пределу $x \rightarrow a$, учитывая непр-ть в т. a ф-ции g :

$$(fg)'(a) = f'g(a) + fg'(a)$$

3) Перейдём к пределу при $x \rightarrow a$ в рав-ве:

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{1}{x - a} \rightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Тогда п. 3. следует из п. 2.

□

Теорема 4.3 (Производная композиции). Пусть I, G - пром-ки в \mathbb{R} . Если ф-ция $f : I \rightarrow G$ диф-ма в т. a , ф-ция $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ диф-ма в b и $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ диф. в a , причём:

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Рассм. $h : I \rightarrow \mathbb{R}, h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}, y \neq b \\ g'(b), y = b \end{cases}$ Тогда h непр-на в $y = b$.

Покажем, что при $x \in I, x \neq a$, верно:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

При $f(x) = f(a)$, обе части обнуляются. Иначе, если $f(x) \neq f(a)$, то 2 верно в силу определения h .

Т. к. h непр-на в $y = b$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$, по т. о пределе композиции. Поэтому существует:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

□

Теорема 4.4 (Предел обратной ф-ции). Пусть ф-ция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ непр-на и строго монотонна на пром-ке I . Если f дифф-ма в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обр. ф-ция $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ - дифф-ма в т. $f(a) = b$ причём:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. По т. об обр. ф-ции на $f(I)$ опр-на ф-ция f^{-1} , кот. там непр-на и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \rightarrow a, t \rightarrow b$ и $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$. Поэтому по св-ву предела композиции:

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(t)) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(Заменили $f(x) = t, x = f^{-1}(t)$)

Следовательно f^{-1} дифф-ма в т. b . □

Замечание. Если при вып-нии остальных условий, $f'(a) = 0$, то обратная ф-ция не дифф-ма в точке b . Иначе, при дифф-нии получаем:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(b)f'(a) = 1$$

Теорема 4.5 (Таблица производных). 1)

$$c' = 0, c \in \mathbb{R}$$

2)

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

3)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$$

4)

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

5)

$$(\sin x)' = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

8)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

9)

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10)

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Доказательство. 2)

$$(e^x)' = \lim_{t \rightarrow x} \frac{e^t - e^x}{t - x} = e^x \lim_{t \rightarrow x} \frac{e^{t-x} - 1}{t - x} = e^x$$

$$(a^x)' = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$$

3) По т. о производной обр. ф-ции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}, y = \log_a x$$

$$\Rightarrow a^y = x \Rightarrow \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

4)

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

5) По первому зам. пределу и непр-ти \cos :

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \sin \frac{t-x}{2} \cos \frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8)

$\operatorname{ctg} x$ - аналогично

9)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)',} = \frac{1}{\cos y}, y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

$$\text{Т. к. } x \in (-1, 1) \Rightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

10)

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\text{ctg } y)'} = -\sin^2 y =$$

□

5 Лекция 17

Определение 5.1. Пусть $\phi, \psi : T \rightarrow \mathbb{R}, E = \phi(T)$. Говорят, что ф-ция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ параметрически задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$$

Если для $\forall t_1, t_2 \in T (\phi(t_1) = \phi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2))$ и $f(x) = \psi(t)$ при $x = \phi(t)$

В част-ти, если ϕ обратима, то $f = \psi \circ \phi^{-1}$

Следствие. Пусть T - это пром-к, ϕ непр-на, строго монотонна на T , ϕ и ψ дифф-мы в т. t и $\phi'(t) \neq 0$. Тогда параметрически заданная ф-ция $f = \psi \circ \phi^{-1}$ дифф-ма в т. $x = \phi(t)$, причём:

$$f'(x) = (\psi \circ \phi^{-1})' = (\psi')(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Определение 5.2. Говорят, что ф-ция f дифф-ма на мн-ве D , если f дифф-ма в каждой точке из D .

Ф-ция $x \mapsto f'(x), x \in D$, также наз-ся производной и обозн-ся в f'

5.1 Дифференциал ф-ции

Определение 5.3. Пусть $f : I \xrightarrow{\text{пром.}} \mathbb{R}$ - дифф-ма в т. a . Линейная ф-ция $h \mapsto f'(a) \cdot h, h \in \mathbb{R}$, наз-ся дифференциалом f в т. a и обозн-ся df_a . Для ф-ции $x \mapsto x$ дифф. в каждой точке, $dx(h) = 1 \cdot h$, поэтому значение дифф-ла $df_a(h) = f'(a)dx(h), h \in \mathbb{R}$ или в функциональной записи:

$$df_a = f'(a)dx$$

Следствие. В условиях теоремы (4.2) (арифметические оп-ции с пределами):

•

$$d(\alpha f + \beta g)_a = \alpha df_a + \beta dg_a$$

•

$$df \cdot g_a = g(a) df_a + f(a) dg_a$$

•

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a) df_a - f(a) dg_a}{g^2(a)}$$

Следствие. В условиях теоремы о производной сложной ф-ции:

$$d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a, b = f(a)$$

Доказательство.

$$d(g \circ f)_a(h) = g'(f(a))f'(a)dx(h) = g'(b)df_a(h) = dg_b(df_a(h)), h \in \mathbb{R}$$

□

Замечание. Ф-ла $df_x = f'(x)dx$ верна, как в случае с независимой переменной x , так и в случае $x = \phi(t)$ (независимость формы 1-ого дифференциала).

Следствие. В условиях теоремы о дифференцировании обратной ф-ции верно:

$$d(f^{-1})_b = (df_a)^{-1}, b = f(a)$$

Доказательство. Следует из того, что:

$$k \mapsto \frac{1}{f'(a)} \cdot k - \text{обратная ф-ция к линейной } h \mapsto f'(a)h$$

□

5.2 Теоремы о среднем

Определение 5.4. Пусть f опр-на на интервале, содержащем т. a . Точка a наз-ся **точкой локального максимума** ф-ции f , если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) (f(x) \leq f(a))$$

$$\text{Т. е. } f(a) = \max_{x \in B_\delta(a)} f(x).$$

Если ”, то a - **точка строгого лок. максимума**.

Аналогично определяется **точка (строгого) лок. минимума**.

Точки локального максимума (минимума) наз-ся **точками экстремума** ф-ции.

Теорема 5.1 (Ферма (необх. усл-ие экстремума)). Пусть f опр-на в неkot. окр-ти точки a . Если a - точка лок. экстремума ф-ции f и в этой точке $\exists f'(a)$, то $f'(a) = 0$

Доказательство. Пусть, для опр-ти, a - точка лок. максимума, тогда:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) (f(x) \leq f(a))$$

Имеем:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(a) = 0$$

□

Геометрический смысл: касательная горизонтальна.

В дальнейшем, отрезок $[a, b]$ предполагается невырожденным.

Теорема 5.2 (Ролля). Если f непр-на на $[a, b]$, дифф-ма на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то:

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$

Доказательство. Если f постоянна на $[a, b]$, то $f'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$
 Пусть f непостоянна на $[a, b] \Rightarrow \exists d \in (a, b): f(d) \neq f(a)$
 Если $f(d) > f(a)$, то $\exists c \in [a, b]: f(c) = \max_{[a, b]} f(x) \geq f(d) > f(a)$. По т.
 Ферма $f'(c) = 0$
 Иначе, если $f(d) < f(a)$ - заменяем \max на \min □

Геом. смысл: Есть точка, кас. к которой - горизонтальна.

Следствие. Пусть f - дифф-ма на пром-ке I , тогда между любыми двумя различными нулями ф-ции f найдётся хотя бы один нуль производной.

Теорема 5.3 (Лагранжа). Если f - непр-на на $[a, b]$, дифф-ма на (a, b) , то:

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Рассм. ф-цию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a)$$

Ф-ция h непр-на на $[a, b]$, дифф-ма на (a, b) , $h(a) = 0 = h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = 0$$

Т. е.

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Ч. Т. Д. □

Геометрический смысл: интерпретируя $f'(c)$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ как угловые коэфф-ты.

Задача 5.1. Пусть f непр-на на $[a, b]$ и дифф-ма на (a, b) . Покажите, что если $\exists f'(a+0)$, то $\exists f'_+(a) = f'(a+0)$

Следствие (Оценка приращений). Пусть f непр-на на пром-ке I и дифф-ма на $\text{int}(I)$. Если:

$$\exists M > 0, \forall x \in \text{int}(I) |f'(x)| \leq M$$

То:

$$\forall x, y \in I (|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y - x|)$$

Т. е. f - липшицева.

Доказательство. Пусть $x, y \in I, x \neq y$. Тогда, по Т. Лагранжа, между x и y найдётся т. c , что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Т. к. $c \in \text{int}(I)$, то $|f'(c)| \leq M$. Отсюда следует заявленная оценка. \square

6 Лекция 18

Теорема 6.1 (Коши). *Если f, g - непр-ны на $[a, b]$, дифф-мы на (a, b) и $g' \neq 0$ на (a, b) , то*

$$\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$ (исходя из т. Ролля: $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$). Рассм. ф-цию:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Тогда h непр-на на $[a, b]$, диф-ма на (a, b) и $h(a) = f(a) = h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

Поскольку $g'(c) \neq 0$, получаем то, что хотели:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

\square

Геом. смысл: такой же, как в т. Лагранжа. Для парам. заданной ф-ции:

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Замечание. В теореме Ферма требуется лишь суц-е производной, поэтому в опир-ся на неё теоремах Ролля, Лагранжа и Коши остаются справедливыми при замене условия дифференцируемости ф-ции на (a, b) существованием там производной в \mathbb{R}

Пример.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Однако не существует $f'(\pm 0)$, т. е. f' разрывна в нуле.

Теорема 6.2 (Дарбу). Если f дифф-ма на $[a, b]$. то для s , лежащего строго между $f'(a), f'(b)$, верно:

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = s$$

Доказательство. Пусть для определённости $f'(a) < s < f'(b)$. Положим $\phi(x) = f(x) - sx$. Тогда ϕ дифф-ма на $[a, b]$:

$$\phi'(a) = f'(a) - s < 0 < f'(b) - s = \phi'(b)$$

Пусть $\phi(c) = \inf_{[a, b]} \phi(x)$ (существует по т. Вейерштрасса).

При $c = a$ получаем:

$$\frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a} \geq 0, \forall x \in (a, b] \Rightarrow \phi'(a) \geq 0!!! \Rightarrow c \neq a$$

Аналогично показ-ся, что $c \neq b \Rightarrow c \in (a, b) \Rightarrow \phi'(c) = 0$, (По т. Ферма) т. е. $f'(c) = s$. \square

6.1 Приложения теореме о среднем

Теорема 6.3 (Условия монотонности). Пусть ϕ -ция f непр-на на проме I и дифф-ма на $\text{int}(I)$.

- 1) ϕ -ция f нестрого возр-ет (убывает) на $I \iff f'(x) \geq 0 (\leq 0), \forall x \in \text{int}(I)$
- 2) Если $f'(x) < 0 (> 0), \forall x \in \text{int}(I)$, то ϕ -ция f строго убывает (возрастает).
- 3) ϕ -ция f постоянна на $I \iff f'(x) = 0, \forall x \in \text{int}(I)$

Доказательство. 1) \Rightarrow) Пусть f нестрого возрастает на I , $x \in \text{int}(I)$. Тогда $f(y) \geq f(x), \forall y \in (x, \sup I)$. Поэтому $f'(x) = f'(x) = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

\Leftarrow) Пусть $x, y \in I$ и $x < y$. По т. Лагранжа

$$\exists c \in (x, y): f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Т. к. $c \in \text{int}(I) \Rightarrow f'(c) \geq 0$, а значит, что $f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Замечание. При замене \geq на $>$ \Rightarrow получаем док-во п. 2.

Замечание. Док-во убыв. может быть сведено к рассм. $-f(x)$, где f - убыв.

Замечание. Обратное утв. к п. 2 **неверно**. Рассм. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Она строго возрастает, но $f'(0) = 0$

□

Пример. Найти все дифф-мые ф-ции, удовл. в усл-ию:

$$f'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Решение. Рассм. $g(x) = f(x)e^{-x}$. Тогда:

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0, x \in I \text{ т. к. } f(x) = f'(x), x \in I$$

По т. об условии монотонности, получаем, что $\exists c \in \mathbb{R}, g(x) = c, \forall x \in I$

Следствие (Достаточные условия экстремума). Пусть f опр-на на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифф-ма на $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ и непр-на в a . Справ-вы след. утв-я:

- 1) Если $f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a, \beta)$, то a — точка лок. максимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).
- 2) Если $f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, \beta)$, то a — точка лок. минимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).

Доказательство. 1) По теореме об условии монотонности, ф-ция f нестрого возр. на $(\alpha, a]$ и нестрого убывает на $[a, \beta)$. Поэтому $f(x) \leq f(a), \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a$ — точка лок. максимума. Если нер-ва для производной строгие, то возр-е/убыв-е строгое \Rightarrow нер-ва строгие $\Rightarrow a$ — точка строгого лок. максимума.

□

Следствие (О доказательстве нер-в). Пусть f, g - непр-ны на $[a, b]$ и дифф-мы на (a, b) , $f(a) \leq g(a)$ и $f'(x) \leq g'(x)$ ($<$), $\forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \leq g(x)$ ($<$), $\forall x \in (a, b)$

Доказательство. Рассм. $h(x) = g(x) - f(x)$

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow h - \text{нестрого возрастает}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b)$$

□

Пример.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x > 0$$

Доказательство. ММИ:

- $n = 1$ — очев.
- Пусть утв. верно для $n - 1$. Док-ем для n . Рассм.:

$$f(x) = e^x, g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x \in [0; +\infty)$$

$$f(0) = g(0), f'(x) = e^x > 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x)$$

Тогда $f(x) > g(x)$ по предыдущему следствию.

□

Теорема 6.4 (Усиление условия монотонности). Пусть f -ция f непр-на на $[a, b]$ и A не более чем счётное мн-во, $A \subset [a, b]$. Если f дифф-ма на $[a, b] \setminus A$. $f'(x) \geq 0$ и на $[a, b] \setminus A$, то f нестрого возр.

Доказательство. Дост-но установить, что $f(a) \leq f(b)$. Рассм. сначала случай $f'(x) > 0$ на $[a, b] \setminus A$. Предположим, что $f(a) > f(b)$. $f(A)$ не более чем счётно $\rightarrow \exists d \notin f(A)$ и $f(a) > d > f(b)$. Рассм. $B = \{x \in [a, b]: f(x) = d\}$.

Положим $c = \sup B$. Т. к. B - замкнуто, то $c \in B$. В част-ти,

$$f'(c) > 0, \text{ т. к. } c \notin A, c \in (a, b)$$

С другой стороны:

$$\forall x \in (c, b), f(x) < d \text{ (по т. о пром. значениях)}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0!!!$$

□