Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

7 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 5

Пропозициональные ф-лы:

- Всегда $=1$ - Тавтологии - Выполнимые
- М. Б. $=0$ и $=1$ - Опровержимые - Выполнимые
- Всегда $=0$ - Опровержимые - Противоречия

"Важные"тавтологии (Логические законы):

1) Закон непротиворечия:
$$\neg(A \wedge \neg A)$$

2) Закон двойного отрицания:
$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

3) Закон исключённого третьего:
$$A \vee \neg A$$

Пример. *Неконструктивное док-во с использованием закона исключённого третьего:*

Теорема 1.1. $\exists x, y \colon x \notin Q, y \notin Q, x^y \in Q$

Доказательство. Рассм. выр-е: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$:

1) Оно $\in Q \Rightarrow$ нашли пример
2) Оно $\notin Q \Rightarrow x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$:

$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$\square$

4) Контрапозиция:
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

5) Законы Де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Задача о выполнимости условий: даны ф-лы $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$

Вопрос: могут ли они все быть одновременно истинны?

Это эквив. вопросу о выполнимости:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

Пример. *Превращение мат. задачи в задачу выполнимости:*
1976г. - з-ча 4 красок решена комп. перебором.
Вершина графа $v \mapsto 2$ бита. (p_v, q_v) - (область на карте)
u, v - соседний области $\Rightarrow$ условие на отличие цветов:

$$(p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

1.1 Логический вывод

Определение 1.1. Логический вывод - п-ть формул, в кот. каждая ф-ла либо является аксиомой, либо получается из более ранних по одному из правилу вывода.

Замечание.

$(A \to (B \to C))$ *- сл-ие из 2 посылок*

Схемы аскиом (Аксиомы - рез-т подстановки конкретных ф-л вместо A, B, C)

1) $A \to (B \to A)$
2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
3) $(A \wedge B) \to A$
4) $(A \wedge B) \to B$
5) $A \to (B \to (A \wedge B))$

6) $A \to (A \lor B)$

7) $B \to (A \lor B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \lor B) \to C))$ - "Разбор случаев"

9) $\neg A \to (A \to B)$

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - "Рассуждение от противного"

11) $A \lor \neg A$

Правило вывода: modus ponens:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Теорема 1.2 (О корректности). *A - выводима $\Rightarrow$ A - тавтология*

Доказательство. Акс. 1-11 - тавтологии.

$$\begin{cases} A \text{ - тавтология} \\ A \to B \text{ - тавтология} \end{cases} \Rightarrow B \text{ - тавтология}$$

$\square$

Теорема 1.3 (О полноте). *A - тавтология $\Rightarrow$ A - выводима*

Обозначение.
$\vdash A$ - *A выводима*
$\models A$ - *A тавтология*

Пример. $\vdash (A \lor B) \to (B \lor A)$

1) $A \to (B \lor A)$ - *акс. 7*

2) $B \to (B \lor A)$ - *акс. 6*

3) $(A \to (B \lor A)) \to ((B \to (B \lor A)) \to ((A \lor B) \to (B \lor A)))$ - *акс. 8*

4) $(B \to (B \lor A)) \to ((A \lor B) \to (B \lor A))$ - *modus ponens 1, 3*

5) $(A \lor B) \to (B \lor A)$ - *modus ponens 2, 4*

Пример. $\vdash (A \to A)$ - *Закон тождества.*

1) $A \to ((A \to A) \to A)$ - *акс. 1*

2) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - *акс. 2*

3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - *modus ponens 1, 2*

4) $A \to (A \to A)$ - *акс. 1*

5) $A \to A$ - *modus ponens 4, 3*