АлГем

Сергей Григорян

2 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 8

1.1 Пучок прямых на пл-ти

V_2, с фикс. ДСК

Определение 1.1. Пучком пересекающихся прямых на пл-ти наз-ся мн-во всех прямых на пл-ти, проходящих через. фикс. точку.

Определение 1.2. Пучком параллельных прямых на пл-ти наз-ся мн-во всех прямых пл-ти, параллельных некоторой фикс. прямой.

Теорема 1.1. *Пусть даны две различные прямые l_1, l_2 на пл-ти:*

$$l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = f_1(x,y) = 0$$

$$l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = f_2(x,y) = 0$$

Тогда пучок прямых, задаваемый (порождаемый) прямыми l_1 и l_2 состоит из тех и только тех прямых, коор-ты точек которых удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0 \tag{1}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

Выр-е $\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) \not\equiv 0$

Доказательство. a) Пусть $l_1 \cap l_2 = \{\, x_0 \,\}$

Покажем, что всякая прямая l, коор-ты точек кот. удовл. ур-ю (1), принадлежит пучку, порождаемому l_1, l_2

По усл.:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0$$

$\Rightarrow l$ проходит через x_0

Пусть l такова, что она принадлежит пучку, порожд. l_1, l_2. Покажем, что $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, такие, что l задаётся ур-ем (1)

Пусть $X \in l, X \neq x_0$:

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$

$$f_2(X)f_1(x,y) - f_1(X)f_2(x,y) = 0 \tag{2}$$

Если подставим X:

$$f_2(X)f_1(X) - f_1(X)f_2(X) = 0$$

прямая (2) проходит через X_0 и $X \Rightarrow$ это прямая l.

b) Пусть $l_1 || l_2 \iff \overline{n_1} || \overline{n_2}$

Пусть прямая l такова, что её коорд. удовл. усл. (1) $\Rightarrow$

$$\overline{n_l} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2}, \overline{n_l} || n_1, n_2$$

Обратно: пусть l принадлежит пучку параллельных прямых, порожд. l_1 и l_2

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$

$$\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0$$

$$f_2(X)f_1(x,y) - f_1(X)f_2(x,y) = 0, \text{ (при } X \text{ равно } 0)$$

$$\Rightarrow \overline{n} || \overline{n_1}, \overline{n_2}$$

Определение 1.3. Ур-е (1) наз-ся ур-ем пучка прямых, порожд. l_1 и l_2

□

1.2 Приложения в планиметрии

1.2.1 Расстояние от точки до прямой

Обозначение. *Расстояние от точки до прямой* $(p(X,l))$

Утверждение 1.1. *Пусть прямая* l *в ПДСК задана общим ур-ем* $Ax + By + C = 0$. *Пусть* $X \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. *Тогда:*

$$p(X,l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство. Пусть $\overline{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$

(Picture 2.1)

$$p(X, l) = h = \frac{S_{\overline{a} \times \overline{X_0 X}}}{|\overline{a}|}$$

$$S_{\overline{a} \times \overline{X_0 X}} = S = \left| \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} \right| = |A(x - x_0) + B(y - y_0)| = |Ax + By - (Ax_0 + By_0)| = |Ax + By$$

$$\Rightarrow p(X, l) = \frac{S}{|\overline{a}|} = \frac{|Ax + By + C|}{A^2 + B^2}$$

□

1.2.2 Вычисление угла между пересекающимися прямыми

Определение 1.4. Углом между двумя пересекающимися прямыми наз-ся наименьший из двух смежных углов, порождённый пересечением прямых.

Picture(2.2) **Вычисление**:

$$l_i \colon A_i x + B_i y + C_i = 0, i = 1, 2$$

$$\overline{n_1} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \overline{n_2} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \angle(\overline{n_1}, \overline{n_2})$$

$$\phi = \begin{cases} \psi, \text{ если } \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \psi, \text{ если } \psi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos\phi = |\cos\phi| = |\cos\psi| =$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \colon |\cos(\pi - \phi)| = |-\cos\psi| = |\cos\psi| = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}|\,|\overline{n_2}|} =$$

$$\frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Утверждение 1.2. *Косинус угла между двумя пересек. прямыми:*

$$l_i \colon A_i x + B_i y + C_i = 0$$

Может быть вычислен по формуле:

$$\cos\phi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

1.3 Пл-ть в пр-ве

V_3, с фикс. ДСК (O, G)

Определение 1.5. Направляющий векторы пл-ти - это пара неколлинеарных векторов, задающих эту пл-ть.

Picture (2.3)

Пусть α - наша пл-ть, $X_0 \in \alpha$, $\overline{a}, \overline{b}$ - напр. векторы α

$$\overline{X_0X}, \overline{a}, \overline{b} \text{ - коллинеарны} \iff X \in \alpha$$
$$\Rightarrow \overline{X_0X} = s\overline{a} + t\overline{b}; s, t \in \mathbb{R}$$
$$\overline{r} - \overline{r_0} = s\overline{a} + t\overline{b}$$
$$\overline{r} = \overline{r_0} + s\overline{a} + t\overline{b} \tag{3}$$

- векторное ур-е прямой

$$\overline{a} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$\overline{b} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \tag{4}$$

- координатное ур-е прямой

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}, \overline{b}) = 0 \tag{5}$$

$$\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Если раскроем определитель по соотв. формуле:

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \text{ (т. к. иначе } \overline{a} || \overline{b}) \tag{7}$$

- общее ур-е пл-ти

Утверждение 1.3. *Пусть* $X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *принадлежит пл-ти, заданной общ. ур-ем (7). Тогда т.* $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *принадлежит пл-ти* π

$$\iff A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = 0$$

Доказательство. Аналогично прямой □

Следствие 1.1. *Вектор* $\overline{c} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *- направляющий вектор пл-ти* $\pi \iff A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Доказательство. Т. пл-ти X_0 - начало $\overline{c}$, а X_1 - конец $\overline{c}$

$$\overline{c} || \pi \iff X_1 \in \pi \iff A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \iff$$

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

□

Следствие 1.2. *Пусть, для определённости,* $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$. $A \neq 0$ *(Б. О. О.) Тогда векторы:*

$$\begin{pmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$

Ненулевые, неколлинеарны и параллельны пл-ти π, *т. е. они могут быть выбраны в кач-ве напр. векторов* π

В кач-ве нач. точки X_0 *можно взять точки с коор-т* $\begin{pmatrix} -\frac{D}{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Следствие 1.3. *Все указанные методы задания пл-ти эквивалентны*

Пусть теперь (O, G) - прямоугольная (ПДСК)

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \iff \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}A \\ B \\ C\end{pmatrix} = (\overline{c}, \overline{n}) = 0$$

Где $\overline{n} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}A \\ B \\ C\end{pmatrix}$

Определение 1.6. $\overline{n}$ наз-ся вектором нормали к пл-ти π

Утверждение 1.4. *В ПДСК вектор нормали $\overline{n}$ к π ортогонале любому вектору, параллельному π*

Пусть теперь (O, G) - произвольная ДСК.

Определение 1.7. Тогда вектор, сопоставленный пл-ти $Ax + By + Cz + D = 0$, с коор-тами $\begin{pmatrix}A \\ B \\ C\end{pmatrix}$ наз-ся **сопутствующим вектором пл-ти**.

Утверждение 1.5. *Плоскости $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = 1, 2$, с сопутствующими векторами, соотв. $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ параллельны тогда и только тогда, когда:*

$$\overline{n_1} || \overline{n_2}$$

Пл-ти π_1, π_2 совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны

Доказательство.

a) Усли ур-я пропорциональны $\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$

b) Пусть $\overline{n_1} || \overline{n_2}$ и при этом ур-я не пропорциональны, покажем, что $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \not\equiv \pi_2$

Доказательство.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda, \text{ но } \frac{D_1}{D_2} \neq \lambda \iff D_1 - \lambda D_2 \neq 0$$

$$\lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = (A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + (\lambda D_2 - D_1)$$

$\Rightarrow \nexists X_0 \colon X_0 \in \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \pi_1 || \pi_2$ $\square$

c) Пусть $\overline{n_1} \not\parallel \overline{n_2}$

Покажем, что пл-ти пересекаются:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists! X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ удовл. системе}$$

При этом пл-ти π_1 и π_2 не совпадают:

Доказательство. Пусть $\pi_1 \equiv \pi_2$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ПРОТИВОРЕЧИЕ}$$

$\square$

$\square$

2 Лекция 9

<u>Утверждение</u> 2.1. *(ДСК)*

$$\pi_i \colon A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$$

$$\overline{n_i} = \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix} \text{ - \textit{сопутствующий вектор для} } \pi_i$$

Пусть $\pi_1 \cap \pi_2 = l$

Тогда за напр. вектор прямой l можно взять вектор:

$$\overline{u} \longleftrightarrow \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

Доказательство. a) Вектор $\overline{u} \neq \overline{o}$. По утв. из пред. лекции $\overline{n_1} \not\parallel \overline{n_2}$

$$\left[\overline{n_1}||\overline{n_2} \iff \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}\right]$$

b) Покажем, что $\overline{u}||\pi_i, \forall i = 1,2$:

$$\begin{cases} \overline{u}||\pi_i, \forall i = 1,2 \\ A_i u_1 + B_i u_2 + C_i u_3 \overset{?}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{u}||l$$

$$A_i \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_i \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_i \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \overset{?}{=} 0$$

$$0 = V(\overline{n_i}, \overline{n_1}, \overline{n_2}) = \begin{vmatrix} A_i & A_1 & A_2 \\ B_i & B_1 & B_2 \\ C_i & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \cdot V(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_i & A_1 & A_2 \\ B_i & B_1 & B_2 \\ C_i & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ч. Т. Д.

□

Замечание. *В ПДСК:* $\overline{u} = [\overline{n_1}, \overline{n_2}]$

2.1 Пучок пл-тей

Определение 2.1. Пучком пересекающихся пл-тей в пр-ве наз-ся мн-во пл-тей в пр-ве, проходящих через фикс. прямую.

Определение 2.2. Пучком параллельных пл-тей в пр-ве наз-ся мн-во всех пл-тей в пр-ве, параллельных фикс. пл-ти.

Теорема 2.1 (Об уравнении пучка пл-тей). *Пусть две различные пл-ти π_i заданы своими общими ур-ями:*

$$\pi_1\colon f_1(x,y,z) = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2\colon f_2(x,y,z) = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда пучок, порождённые π_1, π_2 состоит из тех, и только тех пл-тей π, коор-ты точек кот. удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) = 0, (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0) \tag{8}$$

Доказательство. a) Пусть пл-ть π зад-ся ур-ем 8 с $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$. Пусть $\pi_1 \cap \pi_2 = l$.

$$f_1(l) = f_2(l) = 0$$

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z)|_l = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \pi$ принадлежит пучку, порожд. π_1, π_2.
Пусть $\pi_1 || \pi_2 \Rightarrow \overline{n_1} || \overline{n_2}$.

Тогда $\overline{n_\pi} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2} || \overline{n_1} || \overline{n_2} \Rightarrow \pi$ принадлежит пучку, порожд. π_1, π_2

b) Пусть π принадлежит пучку, порожд. π_1 и π_2. Покажем, что π можно задать в виде 8

Пусть $X \in \pi, X \notin \pi_1, X \notin \pi_2$:

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$

$f_2(X)f_1(x,y,z) - f_1(X)f_2(x,y,z) = 0$ - ур-е π', проход. через точку X, т. к.:

$$f_2(X)f_1(X) - f_1(X)f_2(X) = 0$$

π' - также принадлежит пучку, порожд. пл-тями π_1, π_2

$$\pi \equiv \pi', \text{ т. к. } \pi' \text{ проходит через } l \text{ и содержит т. } X$$

□

2.2 Связка пл-тей

Определение 2.3. Мн-во всех пл-тей в пр-ве, проходящих через фикс. точку наз-ся **связкой пл-тей**, а сама эта фикс. точка наз-ся **центром связки**.

Как задать?

1) Задать центр связки
2) Задать 3 пл-ти в V_3, не принадл. одному пучку.

Теорема 2.2. *Пусть связка пл-тей в пр-ве задаётся набором 3-ёх пл-тей:*

$$\pi_i\colon f_i(x,y,z) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, i = 1,2,3$$

пересекающихся в одной точке X.

Тогда связка состоит из тех и только тех пл-тей, коор-ты точек кот-ых удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) + \gamma f_3(x,y,z) = 0, (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}, \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0)$$

Идея док-ва:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x_2 + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \quad \text{СЛУ имеет ед. решение} \overset{\text{Т. Крамера}}{\iff} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \iff$$

$$\iff (\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}) \neq 0 \Rightarrow (\overline{n_1}, \overline{n_2}, \overline{n_3}) \text{ - некомпл.} \Rightarrow \text{ базис в } V_3$$

π принадлежит связке, $\overline{n} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2} + \gamma\overline{n_3}$

$$\alpha f_1(x,y,z) + \beta f_2(x,y,z) + \gamma f_3(x,y,z) = 0 \text{ верно для центра связки}$$

$\Rightarrow$ это ур-е пл-ти π

2.3 Приложение к задачам стереометрии

Задача 2.1 (Формула расстояния от точки до пл-ти (ПДСК)).

$$X \to \overline{r_X}, \pi\colon (\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}) = 0$$

1)

$$p(X,\pi) = \left|pr_{\overline{n}}(\overline{X_0X})\right| = \left|\frac{(\overline{X_0X},\overline{n})}{|\overline{n}|^2}\cdot\overline{n}\right| = \left|\frac{(\overline{X_0X},\overline{n})}{|\overline{n}|}\right| = \frac{|(\overline{r_X}-\overline{r_0},\overline{n})|}{|\overline{n}|}$$

2) Пусть $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$:

$$X \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$X_0 \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{r_X}-\overline{r_0} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

$$(\overline{r_X}-\overline{r_0},\overline{n}) = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0) =$$

$$= Ax+By+Cz+D$$

$$\Rightarrow p(X,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Определение 2.4. Углом между пл-тями α и β наз-ся линейный угол между прямыми, кот. образ. при пересечении α и β пл-тью γ, кот. перпендикулярна прямой пересечения α,β

Задача 2.2 (Ф-ла угла между двумя пл-тями (ПДСК)).

$$\pi_i\colon A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, \overline{n_i} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{pmatrix}$$

$$l_i \subset \pi_i$$

$$\cos\phi = |\cos\angle(\overline{n_1},\overline{n_2})| = \frac{|(\overline{n_1},\overline{n_2})|}{|\overline{n_1}|\,|\overline{n_2}|}$$

2.4 Прямая в пр-ве

Прямая задаётся точкой ($X_0 \in l$) и направл. вектором ($\overline{a}||l$).

Точка $X \in l \iff \overline{X_0X} = \overline{a}t, t \in \mathbb{R}$:

$$\iff \overline{r} - \overline{r_0} = \overline{a}t$$

$$\iff \overline{r} = \overline{r_0} + \overline{a}t \tag{9}$$

- векторное праметрическое ур-е

ДСК:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \\ z = z_0 + \alpha_3 t \end{cases} \tag{10}$$

- коорд-ое параметрическое ур-е

Исключаем t:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3} \tag{11}$$

- каноническое ур-е прямой

Если $\alpha_1 = 0$, то:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \text{ (пл-ть)} \\ \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3} \text{ (пл-ть)} \end{cases}$$

Утверждение 2.2. *Прямая* $\frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\alpha_2} = \frac{z-z_0}{\alpha_3}$ *лежит в пл-ти:*

$$\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0 \iff$$

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \textit{(1)} \\ A\alpha_1 + B\alpha_2 + C\alpha_3 = 0, \textit{(2)} \end{cases}$$

Доказательство. а) Пусть прямая $l \subset \pi \Rightarrow (1)$, т. к. $X_0 \in \pi$

$$\overline{a}||\pi \Rightarrow (2)$$

b) Пусть вып-ся усл. $(1),(2)$:

$$\begin{cases}(1)\Rightarrow X_0\in\pi\\(2)\Rightarrow \overline{a}||\pi\end{cases}\Rightarrow l\subset\pi$$

$\square$

<u>Утверждение</u> 2.3. *Прямая $l_i\colon \overline{r}=\overline{r_i}+\overline{a_i}t, i=1,2$ лежат в одной пл-ти $\iff$ векторы $\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{r_2}-\overline{r_1}$ - компланарны.*

Доказательство. a) Необходимость очевидна

b) Достаточность: пусть такие векторы компланарны. Если $\overline{a_1}||\overline{a_2}\Rightarrow l_1,l_2\subset\pi$ (т. к. $l_1||l_2$)

Пусть $\overline{a_1}\not||\overline{a_2}$. Тогда построим пл-ть π, проходящую через X_1 с напр. векторами $\overline{a_1},\overline{a_2}\Rightarrow\overline{X_1X_2}$ лежит в $\pi\Rightarrow X_2\in\pi\Rightarrow l_1,l_2\subset\pi$

$\square$

<u>Следствие</u> 2.1. *Прямые $\overline{r}=\overline{r_i}+\overline{a_i}t, i=1,2$ лежат в одной пл-ти $\iff$:*

$$(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{r_2}-\overline{r_1})=\overline{o}$$

<u>Следствие</u> 2.2. *Прямые l_1 и l_2 скрещиваются* $\iff(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{r_2}-\overline{r_1})\neq\overline{o}$

<u>Следствие</u> 2.3. *Прямые l_1 и l_2 пересекаются (по точке)* $\iff$

$$\begin{cases}(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{r_2}-\overline{r_1})=0\\\overline{a_1}\not||\overline{a_2}\end{cases}\iff\begin{cases}(\overline{a_1},\overline{a_2},\overline{r_2}-\overline{r_1})=0\\ [\overline{a_1},\overline{a_2}]\neq\overline{o}\end{cases}$$

<u>Следствие</u> 2.4. *Прямые l_1,l_2 параллельны* $\iff\overline{a_1}||\overline{a_2}\iff[\overline{a_1},\overline{a_2}]=\overline{o}$

<u>Следствие</u> 2.5. *Прямые l_1 и l_2 совпадают* $\iff\overline{a_1}||\overline{a_2}||\overline{r_2}-\overline{r_1}$

<u>Определение</u> 2.5. Углом между пересекающимися прямыми l_1,l_2 наз-ся наименьший из двух смежных углов, образ. ими

2.5 Формула угла между прямыми

$$l_i\colon\overline{r}=\overline{r_i}+\overline{a_i}t, i=1,2$$

Возьмём X_3 и проведём через неё $l_1'||l_1, l_2'||l_2$, тогда:

$$\cos\phi=\frac{|(\overline{a_1},\overline{a_2})|}{|\overline{a_1}|\cdot|\overline{a_2}|}$$