

# Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

14 ноября 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 6</b>	<b>3</b>
1.1	Плотный порядок. Изоморфизм . . . . .	3
1.2	Предпорядки . . . . .	5
1.2.1	Агрегирование предпорядков . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Лекция 7</b>	<b>7</b>
2.1	База . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Лекция 8</b>	<b>9</b>
3.1	Продолжение про тождества . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Лекция 9</b>	<b>12</b>
4.1	Циклические п-ти . . . . .	13
4.2	Формула обращения Мёбиуса . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Лекция 10</b>	<b>15</b>
5.1	Обращение Мёбиуса на чуме (част. уп. мн-во) . . . . .	17
5.1.1	Ф-ция Мёбиуса . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Лекция 11</b>	<b>19</b>
6.1	Линейные рекуррентные соотношения с постоянными ко- эффициентами . . . . .	21

# 1 Лекция 6

## 1.1 Плотный порядок. Изоморфизм

Отношение частичного порядка:

- 1)  $x \leq x$  - рефлексивность
- 2)  $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$  - антисимметричность
- 3)  $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$  - транзитивность

Отношение линейного порядка:

- 4)  $\forall x, y: x \leq y \vee y \leq x$

Упор. мн-во  $(A, \leq_A)$

Наибольший эл-т -  $M: \forall x, x \leq M$ .

Наименьший эл-т -  $m: \forall x, x \geq m$

Максимальный эл-т -  $M: \neg \exists x: x > M$  (или  $\forall x: x \leq M \vee (x$  не сравним с  $M)$ )

Минимальный эл-т  $m: \neg \exists x: x < m$

**Определение 1.1. Плотный порядок:**

$$\forall x, y (x < y \rightarrow \exists z: x < z < y)$$

**Утверждение 1.1.** *Плотный порядок - либо тривиальный (т. е. разл-ные эл-ты не сравнимы), либо опр. на бесконечном мн-ве.*

**Определение 1.2. Изоморфизм** упор. мн-в  $(A, \leq_A)$  и  $(B, \leq_B)$  - это такая биекция  $f: A \rightarrow B$ , что:

$$\forall x, y: (x \leq_A y \iff f(x) \leq_B f(y))$$

**Пример.**

$$(\{n \mid 30 \nmid n\}, :) \text{ и } (2^{\{a,b,c\}}, \subset)$$

**Пример.**

$$(\mathbb{Q} \cap (0, 1), \leq) \text{ и } (\mathbb{Q} \cap (0, +\infty), \leq)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1$$

**Теорема 1.1.** Любые два счётных плотно, линейно упоряд. мн-ва без наиб. и наим. эл-тов изоморфны:

**Пример.**

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_2 = \left\{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \},$$

$\mathbb{A}$  - корни мн-ов с целыми коэфф-ми

*Доказательство.*

$$A = \{ a_0, a_1, \dots \}, B = \{ b_0, b_1, \dots \}$$

Построим **инъекцию**  $f$ :

- 1) Построим  $a_0 \rightarrow b_0$
- 2) Б. О. О.  $a_1 > a_0$ . Т. к. в  $B$  нет наибольшего, то есть  $b_i: b_i > b_0$ . Тогда добавим  $a_1 \rightarrow b_i$
- 3) Пусть для  $a_k, k \leq n-1$  соединения проведены. Проведём для  $a_n$ . Рассм. три случая:
  - I)  $a_n < a_k, \forall k \leq n-1$ . Тогда отобразим его в  $b_p: b_p < b_i, \forall i$  из использованных ранее.
  - II)  $a_n > a_k, \forall k \leq n-1$ . Тогда отобразим его в  $b_p: b_p > b_i, \forall i$  из использованных ранее.
  - III) Иначе у  $a_n$  есть использованные ранее соседи  $a_i$  и  $a_j$ . Т. к.  $A$  и  $B$  - лин. упор.:  $\exists p: f(a_i) < b_p < f(a_j)$ . Добавим  $a_n \rightarrow b_p$

Как добиться, чтобы постр. ф-ция была сюръекцией? Варианты:

- 1) Каждый раз брать эл-т  $B$  с наим номером из подходящих.
- 2) Действовать по очереди: сначала брать эл-т  $A$  с наим. номером, кот. ещё не рассмотрен, и отправлять в  $B$ . Затем эл-т  $B$  с наим. номером, кот. ещё не рассм, и отправлять в  $A$ . И т. д.

□

## 1.2 Предпорядки

**Определение 1.3. Предпорядок (Предпочтения)** - отношение, обладающее рефлексивностью и транзитивностью.

**Определение 1.4. Полный предпорядок (Рациональные предпочтения)** - предпорядок + любые два сравнимы. (или полн. + транз.)

**Обозначение.**

$a \succsim b$  - *предпор.*

$a \sim b \iff (a \succsim b \wedge b \succsim a)$  - *отношение безразличия*

$a \succ b \iff (a \succsim b \wedge \neg(b \succ a))$  - *строгий предпорядок*

*Нетранзитивно:  $a \succ b \succ c \succ a$*

**Теорема 1.2** (Структурная теорема о предпорядке на мн-ве  $A$ ).

1) *Отношение безразличия - это отношение эквив-ти на  $A$*

2) *На эл-ах  $A/\sim$  можно ввести отношение  $S \leq T$ , если  $\exists x \in S, y \in T: x \prec y$   
Это отнош. будет част. пор. на  $A/\sim$*

3)  *$\leq$  лин. пор.  $\iff \prec$  - полон.*

*Доказательство.*

- 1) Рефл.:  $a \prec a \Rightarrow (a \prec a \wedge a \prec a) \Rightarrow a \sim a$
- 2) Симм.:

$$a \sim b \iff (a \prec b \wedge b \prec a) \iff (b \prec a \wedge a \prec b) \iff b \sim a$$

3) Транзитивность:

$$\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \iff \begin{cases} a \prec b \wedge b \prec a \\ b \prec c \wedge c \prec b \end{cases} \iff \begin{cases} a \prec c \\ c \prec a \end{cases} \Rightarrow a \sim c$$

- 1) Рефл  $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S \Rightarrow$  т. к.  $x \prec x \Rightarrow S \leq S$

2) Транз.  $R \leq S \leq T$ :

$$\begin{cases} x \in R \\ y, z \in S \\ t \in T \\ x \precsim y \\ z \precsim t \end{cases} \Rightarrow y \precsim z \Rightarrow x \precsim t \Rightarrow R \leq T$$

3) Антисимм.:

$$S \leq T, T \leq S$$

$$\begin{cases} x \in S, y \in T \Rightarrow x \precsim y \\ z \in T, t \in S \Rightarrow z \precsim t \\ x \sim t \\ y \sim z \end{cases} \Rightarrow y \sim z \precsim t \sim x \Rightarrow y \precsim x \Rightarrow x \sim y \Rightarrow S = T$$

•  $\Leftarrow$ )  $S, T$  - классы

$$x \in S, y \in T:$$

$$\text{Если } x \precsim y \Rightarrow S \leq T$$

$$\text{Если } y \precsim x \Rightarrow T \leq S$$

$\Rightarrow$ ) Даны  $x, y$ :

$$x \in S, y \in T, \text{ б. о. о. } S \leq T$$

$$\Rightarrow \exists z \in S, t \in T: z \precsim t$$

$$x \sim z \precsim t \sim y \Rightarrow x \precsim y$$

$S$  - класс эквив.,  $T$  - класс эквив.

□

### 1.2.1 Агрегирование предпорядков

$A$  - мн-во,  $\precsim_1, \dots, \precsim_n$  - препорядки  $\Rightarrow$

$$F: (\precsim_1, \precsim_2, \dots, \precsim_n) \mapsto \precsim$$

Определение 1.5. Агрегирование по больш-ву:

$$x \trianglelefteq y, \text{ если } \# \{i \mid x \precsim_i y\} \leq \# \{i \mid y \precsim_i x\}$$

Парадокс Кондорсе:

$$\begin{cases} a \succsim_1 b \succsim_1 c \\ b \succsim_2 c \succsim_2 a \\ c \succsim_3 a \succsim_3 b \end{cases} \Rightarrow a \trianglelefteq b \trianglelefteq c \trianglelefteq a$$

**Теорема 1.3.** Любое полное отношение может быть реализовано как результат агрегирования предпорядков

*Доказательство.* Эл-ты  $x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ . Также есть два предпорядка  $\prec$  и  $\prec'$ , т. ч.:

$$\begin{aligned} x \prec y \prec a_1 \prec \dots \prec a_{n-2} \\ a_{n-2} \prec' a_{n-3} \dots a_2 \prec a_1 \prec x \prec y \end{aligned}$$

□

## 2 Лекция 7

### 2.1 База

Сложение, умножение.

Принцип Дирихле.

$\{a_1, \dots, a_n\}$

Сочетания: без и с повторениями.

Размещения: без и с повторениями.

$C_n^k$  - число сочет. без повтор. (или  $\binom{n}{k}$ )

$\overline{C}_n^k$  - число сочет. с повт.

**Теорема 2.1.**

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

*Доказательство.* Для док-ва последнего, сделаем биекцию:

$k$ -сочет с повтор.  $\longleftrightarrow$  п-сть из 0 и 1 длины  $n + k - 1$  с  $k$  ед-цами.

Пример.

$$n = 26, \{a, b, c, \dots\}, k = 4, \{m, a, m, a\}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & c & & & & & m & & & & y & z \end{array}$$

$$V = \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_8) : \forall i, x_i \in \{-1, 0, 1\}, x_1^2 + \dots x_8^2 = 4 \}$$

$$|V| = C_8^4 \cdot 2^4 = 1120$$

$$(\overline{x}, \overline{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_8 y_8$$

Рассм. произв.  $W \subset V: \forall \bar{x}, \bar{y} \in W: (\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

**Утверждение 2.1.**  $\forall W: |W| \leq 140$

**Задача 2.1.**  $\{1, 2, \dots, 30\}$

$\overline{M_1, \dots, M_{15}}$  - различные 5-сочет.

Можно ли покрасить числа  $1, \dots, 30$  в 2 цвета, чтобы все  $M_i$  были неоднородными?

Решение. Всего раскрасок:  $2^{30}$

Кол-во раскрасок, в кот-ых  $M_i$  закрашено в один цвет:  $2^{26}$

Кол-во раскрасок, в кот-ых хотя бы одно  $M_i$  закрашено в один цвет:

$$\kappa_{OL-BO} \leq 2^{26} \cdot 15 < 2^{30}$$

Тождества:

1)

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

2)

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$



### 3 Лекция 8

#### 3.1 Продолжение про тождества

3)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

4)

$$(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

*Доказательство.* 4) Рассм.  $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$

Выберем из этого мн-ва все возм.  $n$ -сочетания без повторений.

Их  $C_{2n}^n$

$$\left\{ \begin{array}{cc} a_1, \dots, a_n & a_{n+1}, \dots, a_{2n} \\ k \text{ объектов} & n-k \text{ объектов} \end{array} \right\}$$

Из левой половины выбираем  $k$  объектов, из правой соотв.  $n-k$ . Кол-во способов так сделать:

$$C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$$

Складывая по всем  $k$ :

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

□

Вопрос:  $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^4$

5) Рассм.  $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ . Выберем из этого мн-ва все возможные  $m$ -сочетания с повторениями. Их:

$$\overline{C_{n+1}^m} = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$$

Для  $k = 0, 1, \dots, m$  рассм. по отдельности все  $m$ -сочет. с повторениями, в каждом из которых ровно  $k$  объектов  $a_1$ . Их:

$$\overline{C_n^{m-k}} = C_{n+m-k-1}^{m-k} = C_{n+m-k-1}^{m-1}$$

Получаем тождество:

$$\sum_{k=0}^m C_{n-1+m-k}^{m-1} = C_{n+m}^m$$

Следствие.

$$n = 1: 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = C_{m+1}^1$$

$$n = 2: (m+1) + (m) + \dots + 1 = C_{m+2}^2 = \frac{(m+2)!}{2!m!} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$n = 3: \text{ Сумма квадратов :)} \\ \text{и т.д.}$$

6) Полиномиальная ф-ла:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_k) \dots (x_1 + \dots + x_k)}_{n \text{ раз}}$$

Задача 3.1. Комбинаторная задача: посчитать кол-во способов получить из слова КОМБИНАТОРИКА перестановкой букв разные слова.

Решение. Всего букв: 13.

$\kappa - 2$
$o - 2$
$m - 1$
$\delta - 1$
$u - 2$
$a - 2$
$n - 1$
$m - 1$
$p - 1$

$$\Rightarrow C_{13}^2 C_{11}^2 C_9^1 \dots C_1^1 = \frac{13!}{2!2!1!1! \dots 1!}$$

Задача 3.2. Даны  $n_1$  объектов  $a_1$ ,  $n_2$  объектов  $a_2$ ,  $\dots$   $n_k$  объектов  $a_k$ . Сколько способов сформировать п-ти из этих объектов.

Решение.  $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$  - кол-во способов сформировать п-ть из наших объектов.

**Теорема 3.1.**

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Тогда:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = (x_1 + \dots + x_k) \underset{n \text{ раз}}{\dots} (x_1 + \dots + x_k) = \dots + P(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

$P(n_1, \dots, n_k)$  - полиномиальный коэфф.

$n_1$  - кол-во скобок, из кот. взяли  $x_1$

$n_2$  - ...  $x_2$

$\vdots$

$n_k$  - ...  $x_k$

$$n_1 + \dots + n_k = n, \forall i, n_i \geq 0 \Rightarrow x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

6)

$$\sum_{n_1 + \dots + n_k = n} P(n_1, \dots, n_k) = k^n$$

7) Ф-ла включений-исключений: есть  $N$  объектов и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  - св-ва:

**Теорема 3.2.**

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) =$$

*Доказательство.* Индукция по числу свойств:

– База:

$$n = 1: N(\alpha'_1) = N - N(\alpha_1)$$

– Переход:

$$\forall N, \forall a_1, \dots, a_N, \forall k \leq n - 1, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{выполнена теорема.}$$

Берём произв.  $N, a_1, \dots, a_N, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Рассм. св-ва  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ :

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad (1)$$

Выберем из  $a_1, \dots, a_N$  те объекты, кот. обладают св-вом  $\alpha_n$ .

Их  $N(\alpha_n) = M$ , обозначим их, как:  $b_1, \dots, b_M$ :

$$\begin{aligned} M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) &= M - M(\alpha_1) - M(\alpha_2) - \dots - M(\alpha_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1} (M(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})) \\ &= N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_n) - \dots - N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + \dots + (-1)^{n-1} (N(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)) \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, чтобы получить  $N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$ , вычислим (1) - (2):

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

□

## 4 Лекция 9

7)

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

8) Рассм.  $A = \{a_1, \dots, a_n\}, m < n, m > 0$ . Выберем из  $A$  все возм.  $m$ -разм. с повтор. Их  $n^m$ .  $N = n^m, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Размещ. обладает св-вом  $\alpha_i \iff \alpha_i \notin$  размещению.

$$N(\alpha_i) = (n-1)^m, N(\alpha_i, \alpha_j) = (n-2)^m$$

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$$

По формуле вкл.-искл.:

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = n^m - n(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

**Задача 4.1.** Задача о беспорядках:

**Определение 4.1.** Беспорядок - перестановка, при кот.  $\sigma_i \neq i, \forall i = \overline{1, n}$

Найдём кол-во беспорядков для  $n = 100$ : . Пусть  $\alpha_i$  - св-во, при кот.  $\sigma_i = i$ , посчитаем:

$$N = 100!$$

$$N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = 100! - 99! * 100 + C_{100}^2 \cdot 98! - \dots = \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k)! = !n$$

При раскрытии  $C$ -шек, получаем:

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!} \approx \frac{1}{e}$$

"Физической интуицией" получаем:

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx \frac{1}{e}$$

## 4.1 Циклические п-ти

Алфавит:  $X = \{b_1, \dots, b_r\}$ . Из  $b$ -шек составляем слова длины  $n$ .

$$a_1 a_2 \dots a_n, \forall i, a_i \in X$$

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_n \rightarrow a_1$$

Т. е.  $a_1 \dots a_n$  отождествляется с  $a_2 \dots a_n a_1, a_3 \dots a_n a_1 a_2, \dots$

Однако  $r^n$  - кол-во обычных слов, т. е.  $n$  не всегда делит  $r^n$ .

**Пример.**

$$r = 3, X = \{C, O, H\}, n = 4:$$

Следующие слова нужно поделить на 4:

$COCH$

$OCHC$

$CHCO$

$HCOC$

Эти на 2:

$COCO$

ОСОС

А это на 1:

СССС

Для решение этой задачи, для начала, изучим следующий мощный инструмент:

## 4.2 Формула обращения Мёбиуса

Теорема 4.1 (ОТА).

$$\forall n \geq 2, \exists! \{ p_1, \dots, p_s \}, \{ a_1, \dots, a_s \} :$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

(Это наз-ся **каноническим разложением**  $n$ )

Определение 4.2. Функция Мёбиуса  $\mu(n)$ :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ (-1)^s, n = p_1 \cdot \dots \cdot p_s \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Лемма 4.2.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

*Доказательство.* Пусть  $n \geq 2 \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$$(d|n) \Rightarrow (d = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}, \forall i, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \mu(p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}) = \sum_{\beta_1=0}^1 \dots \sum_{\beta_k=0}^1 \mu(p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}) \\ &= \mu(1) + C_k^1(-1) + C_k^2(-1)^2 + \dots + C_k^k(-1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i = 0 \end{aligned}$$

□

**Теорема 4.3** (Формула обращения Мёбиуса). Пусть  $f = f(n)$  -  $\phi$ -ция  $n \in \mathbb{N}$ . Пусть  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ . Тогда:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} f(d') &= \sum_{(d,d'): d \cdot d'|n} \mu(d) f(d') = \sum_{d|n} f(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = \\ &= f(n) \cdot \sum_{d'|1} \mu(d') + \sum_{d|n, d < n} f(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = f(n) \cdot 1 + \sum_{d|n, d < n} f(d) \cdot 0 = f(n) \end{aligned}$$

□

## 5 Лекция 10

Вспоминаем задачу:

$$X = \{b_1, \dots, b_r\} \text{ - алфавит}$$

$$n, a_1, \dots, a_n \text{ — линейная последовательность}$$

П-ть  $r^n$ :

$$(a_1, \dots, a_n)$$

Циклический сдвиг  $a_1, \dots, a_n \rightarrow a_2, a_3, \dots, a_n, a_1$

**Определение 5.1.** Обозначаем как  $d$  — **период линейной п-ти**, т. е.  $\min$  кол-во циклических сдвигов, переводящих её в себя.

**Лемма 5.1.**  $d|n$

*Доказательство.* Предположим, что  $n = kd + r, 1 \leq r < d$ . Тогда, сдвинув  $a_1, \dots, a_n$  на  $d, k$  раз, получим исходную п-ть. Сдвинув на  $n$  1 раз, тоже получаем исх. п-ть. Отсюда, получаем, что сдвигая  $a_1, \dots, a_n$  на  $n - k \cdot d = r$ , тоже получ. исх. п-ть. Но  $r < d$  — противоречие. □

**Лемма 5.2.**  $a_1, \dots, a_n$  - периода  $d$ , то она представляется, как  $\frac{n}{d}$  одинаковых кусков длины  $d$ :

$$a_1, \dots, a_n = a_1, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots, a_{2d}, a_{2d+1}, \dots$$

*Доказательство.* Очев. □

Пусть  $V$  - мн-во всех линейных п-тей сост. из нашего алфавита (т. е.  $|V| = r^n$ )

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 \dots < d_s = n - \text{все делители числа } n$$

$$V_i = \{ \{ a_n \} \in V \mid \{ a_n \} - \text{имеет период } d_i \}$$

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3 \sqcup \dots \sqcup V_s$$

$$\Rightarrow r^n = |V_1| + \dots + |V_s|$$

Пусть  $W_i$  - мн-во лин п-тей длины  $d_i$  и периода  $d_i$

$$|W_i| = |V_i|$$

$$\Rightarrow r^n = |W_1| + \dots + |W_s|$$

Обозначим  $U_i$  - мн-во различных цикл. п-тей, кот. отвечают лин. п-тям из  $W_i$ . Тогда очевидно, что:

$$\frac{|W_i|}{d_i} = |U_i|$$

Введём обозначение:

$$M(d_i) = |U_i|$$

Получаем:

$$r^n = d_1 M(d_1) + d_2 M(d_2) + \dots + d_s M(d_s)$$

$$r^n = \sum_{d|n} d M(d)$$

Напомним ф-лу обращения Мёбиуса:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Получаем:

$$nM(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot r^{\frac{n}{d}}$$

$$M(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot r^{\frac{n}{d}}$$

Тогда ответ, т. е. кол-во циклических п-тей длины  $n$ , представим как теорему:

**Теорема 5.3.**

$$T_r(n) = \sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \left( \sum_{d'|d} \mu(d') r^{\frac{d}{d'}} \right)$$

## 5.1 Обращение Мёбиуса на чуме (част. уп. мн-во)

$$\mathcal{P} = (A, \preceq)$$

Локально конечный:  $\forall y \in A$

$$|\{x \preceq y\}| < \infty$$

$$(\mathbb{N}, \leq), (\mathbb{N}, |)$$

$$(2^{\{1,2,\dots,n\}}, \subseteq)$$

### 5.1.1 Ф-ция Мёбиуса

$$x, y \in \mathbb{A}, x \preceq y$$

$$\mu(x, x) = 1$$

$$x \prec y: \mu(x, y) = - \sum_{z: x \preceq z \prec y} \mu(x, z)$$

**Теорема 5.4.** Если  $\mu(x, y)$  - это ф-ция Мёбиуса на  $(\mathbb{N}, |)$ , а  $\mu(n)$  - обратная ф-ция Мёбиуса, тогда:

$$\mu(x, y) = \mu\left(\frac{y}{x}\right)$$

*Доказательство.*

$$\mu(x, x) = \mu\left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

Индукция по величине  $\frac{y}{x}$ :

$$\mu(x, y) = - \sum_{z: x \preceq z \prec y} \mu(x, z) = - \sum_{z: x \preceq z \prec y} \mu\left(\frac{z}{x}\right)$$

Распишем  $y = x \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$ . Тогда:

$$\frac{z}{x} = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}, \exists i: \beta_i < \alpha_i$$

Рассм. несколько случаев:

1)  $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 1$ . Тогда:

$$- \sum_{\dots} \mu\left(\frac{z}{x}\right) = - \sum_{\beta_1=0}^1 \dots \sum_{\beta_s=0}^1 \mu\left(p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\beta_s}\right) + \mu(p_1 \cdot \dots \cdot p_s)$$

В рамках док-ва ф-лы обращ. Мёбиуса, страшная сумма слева = 0.  
Получаем:

$$= \mu(p_1 \cdot \dots \cdot p_s)$$

2)  $\exists i: \alpha_i > 1$ . Тогда всё то же самое, как и в случае 1 (по опр. ф-ции Мёбиуса)

□

**Теорема 5.5** (Ф-ла обращения Мёбиуса). Пусть  $g(y) = \sum_{x \preceq y} f(x)$ . Тогда:

$$f(y) = \sum_{x \preceq y} \mu(x, y) g(x)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \sum_{x \preceq y} \mu(x, y) \cdot g(x) &= \sum_{x \preceq y} \mu(x, y) \cdot \sum_{z \preceq x} f(z) = \sum_{(x, z): z \preceq x \preceq y} \mu(x, y) \cdot f(z) = \\ &= \sum_{z \preceq y} f(z) \left( \sum_{x: z \preceq x \preceq y} \mu(x, y) \right) = f(y) + \sum_{z \prec y} f(z) \left( \sum_{x: z \preceq x \preceq y} \mu(x, y) \right) \end{aligned}$$

Док-во сводится к лемме:

Лемма 5.6.

$$\forall z, y: z \prec y$$

$$\sum_{x: z \preceq x \preceq y} \mu(x, y) = I_{z=y}$$

□

## 6 Лекция 11

Лемма 6.1.

$$\sum_{x \preceq y \preceq z} \mu(z, y) = I_{x=y}$$

*Доказательство.*  $x \prec y$

Докажем индукцией по длине самой длинной цепочки вида:

$$x \prec x_1 \prec x_2 \prec \dots \prec x_k \prec y$$

- База индукции:  $x \prec y$ , а между ними ничего нет.

$$\begin{aligned} \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(z, y) &= \mu(y, y) + \sum_{x \preceq z \prec y} \mu(z, y) = 1 + \mu(x, y) = 1 - \sum_{x \preceq z \prec y} \mu(x, z) = \\ &= 1 - \mu(x, x) = 0 \end{aligned}$$

- Шаг индукции:

$$\begin{aligned} \sum_{x \preceq z \preceq y} \mu(z, y) &= 1 + \sum_{x \preceq z \prec y} \mu(z, y) = 1 - \sum_{x \preceq z \prec y} \sum_{z \preceq u \prec y} \mu(z, u) = \\ &= 1 - \sum_{x \preceq u \prec y} \sum_{x \preceq z \prec u} \mu(z, u) = 1 - \sum_{x \preceq u \prec y} I_{x=u} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 6.2. *Формула обращения Мёбиуса:*

$$g(y) = \sum_{x \preceq y} f(x) \Rightarrow f(y) = \sum_{x \preceq y} \mu(x, y) g(x)$$

**Пример.** *Рассм. чум:*

$$(2^{\{1,2,\dots,n\}}, \subseteq)$$

Пусть есть ещё некоторые мн-ва  $A_1, \dots, A_n$ . Определим также ф-ции:

$$I \in 2^{\{1,2,\dots,n\}}$$

$f(I)$  — кол-во эл-ов мн-в  $A_1, \dots, A_n$ , к-рые принадлежат всем таким  $A_i$ , что  $i \notin I$ , т. е.:

$$f(I) = \left| \bigcap_{i \notin I} A_i \right|$$

$$f(\{1, 2, \dots, n\}) = \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right|$$

$g(I)$  — кол-во эл-ов мн-в  $A_1, \dots, A_n$ , к-рые принадлежат таким  $A_i$ , что  $i \notin I$ , и не принадлежит всем остальным  $A_i$ .

$$f(I) = \sum_{I' \subseteq I} g(I')$$

$$n = 4: A_1, \dots, A_4$$

$$I = \{1, 2\}, f(I) = |A_3 \cap A_4|$$

$$(I' \subseteq I) \iff (I' \in \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\})$$

$$g(\{1, 2\}) = |A_3 \cap A_4 \setminus A_1 \setminus A_2|$$

$$g(\{1\}) = |A_2 \cap A_3 \cap A_4 \setminus A_1|$$

$$g(\{2\}) = |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \setminus A_2|$$

$$g(\emptyset) = |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$

$$g(\{1, 2, \dots, n\}) = 0$$

Применим ФОМ (ф-лу обращения Мёбиуса):

$$g(I) = \sum_{I' \subseteq I} \mu(I', I) f(I')$$

$$I = \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow g(I) = 0 = \sum_{I' \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \mu(I', \{1, 2, \dots, n\}) \cdot f(I') =$$

**Лемма 6.3.**

$$\mu(I', \{1, 2, \dots, n\}) = (-1)^{|I| - |I'|}$$

*Доказательство.* Индукция по  $|I| - |I'|$ :

- Шаг:

$$I' \subset I: \mu(I', I) = - \sum_{I' \subseteq I'' \subset I} \mu(I', I'') = - \sum_{I' \subseteq I'' \subset I} (-1)^{|I''| - |I'|}$$

$$|I''| = |I'|, |I'| - 1, \dots, |I| - 1$$

$$\Rightarrow \text{Кол-во } I'' \text{ мощности } k: C_{|I| - |I'|}^{k - |I'|}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow - \sum_{I' \subseteq I'' \subset I} (-1)^{|I''| - |I'|} &= - \sum_{k=|I'|}^{|I| - 1} C_{|I| - |I'|}^{k - |I'|} (-1)^{k - |I'|} = [l = |I'|] = - \sum_{l=0}^{|I| - |I'| - 1} C_{|I| - |I'|}^l (-1)^l = (0) \\ &= (-1)^{|I| - |I'|} \end{aligned}$$

□

$$= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| + \sum_{I' \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{n - |I'|} \cdot \left| \bigcap_{i \notin I'} A_i \right|$$

## 6.1 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, F_0 = 0, F_1 = 1$$

Последовательность  $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$  удовл. лин. рек. соотношению  $k$ -ого порядка с коэф.  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ , если  $\forall n$ :

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

$$k = 1: a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0 \Rightarrow y_n = \left( -\frac{a_0}{a_1} \right) y_0$$

$$k = 2: a_2 y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0$$

Алгоритм:

1) Составим ур-е:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$a_2(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = 0$$

I)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

**Теорема 6.4.** 1)  $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$   $n$ -ть, задающая  $\phi$ -лой  $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$  удовл. рекурсии.

2) Если  $\{y_n\}_{n=0}^\infty$  удовл. рек. соотнош., то  $\exists c_1, c_2$ :

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

*Доказательство.* 1)

$$\begin{aligned} & a_2(c_1\lambda_1^{n+2} + c_2\lambda_2^{n+2}) + a_1(c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1}) + a_0(c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n) = \\ & = c_1\lambda_1^n(a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0) + c_2\lambda_2^n(a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

2) Сост. систему:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1 \end{cases}$$

$$y_n^* = c_1^*\lambda_1^n + c_2^*\lambda_2^n, c_1^*, c_2^* - \text{решение системы}$$

По п. 1, это соотнош. удовл. рек. соотнош.  $\Rightarrow y_n = y_n^* \Rightarrow$   
Победа.

□