Матан

Сергей Григорян

6 декабря 2024 г.

Содержание

1 Лекция 22

Следствие. *Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на $\operatorname{int} I$.*

1) *Ф-ция f выпукла вниз на I $\iff$ $f''(x) \geq 0, x \in \operatorname{int} I$*

2) *Если $f''(x) > 0$ на $\operatorname{int} I$, то f строго выпукла вниз на I.*

Пример. 1) *$y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$, т. к.:*

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

2) *$y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:*

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3) *$y = x^p$ на $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$*

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{ выпукла вниз}$$

При $p \in (0, 1)$ — вогнута.

4) *$\ln(1 + x) < x$, при $x > -1, x \neq 0$:*

$$y = \ln(1 + x) \text{ — строго выпукла вверх (вогнута) на } (-1, +\infty)$$

$$y = x \text{ — касат. к } x \mapsto \ln(1 + x) \text{ в точке } x = 0$$

*По т. **??** получаем заявленное нер-во.*

Определение 1.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \operatorname{int} I$. Если:

1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$

2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$

3) f — непр-на в a.

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f.

Следствие. *Если ф-ция f дважды дифф-ма на $\operatorname{int} I$ и $a \in \operatorname{int} I$ — точка перегиба f, то $f''(a) = 0$:*

Доказательство. Пусть для опр-ти f выпукла вниз на $(a-\delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a+\delta), \delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a-\delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a+\delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f'. По Т. Ферма $f''(a) = 0$ □

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение"на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 1.1 (Лемма о 3-ёх хордах)**.** *Пусть ф-ция f выпукла вниз на (a, b) и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда:*

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \tag{1}$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(t-x_1)+f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1), f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \le \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{\lambda(x)-\lambda(x_1)}{x-x_1}, \frac{\lambda(x_2)-\lambda(x)}{x_2-x} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

□

Задача 1.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

Следствие. *Для любой точки $x \in (a, b)$ ф-ция $\nu\colon (a, b)\setminus\{x\} \to \mathbb{R}$,*

$$\nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

нестрого возрастает на $(a, b)\setminus\{x\}$

Доказательство. $y, z \in (a, b)\setminus\{x\}, y < z$ □

Теорема 1.2. *Если ф-ция f выпукла вниз на (a, b), то f непр-на на (a, b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.*

Доказательство. Зафикс. $x \in (a,b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 1, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, сущ-ют конечные $\nu(x-0) \le \nu(x+0)$, т. е. $\exists$ конечные левая и правая производная f в точке x: $f'_-(x) \le f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x, а значит непр-на в точке x.

Перейдём к пределу в левом нер-ве 1 при $x \to x_1+0$, а также в правом нер-ве 1 при $x \to x_2-0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \le f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возр-ет на (a,b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a,b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непр-ти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \le f'_+(x_0) \le f'_-(x)$, откуда:

$$0 \le f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \le f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f$ дифф-ма в т. x_0 $\square$

Теорема 1.3 (Нер-во Йенсена)**.** *Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I. $x_1, \dots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:*

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\ge)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I.
ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости
- Пусть нер-во верно для n. Установим справедливость для $n+1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

$$y = \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n$$

Т. к. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

$$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\left((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

По предположению инд-ции:

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

$\square$

Пример. *Пусть $x_1, \ldots x_n \geq 0$, тогда:*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

По нер-ву Йенсена:

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$$

$\square$

Пример (Нер-во Гельдера)**.** *Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ и*

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.
$$f = x^p \text{ — выпукла вниз}$$
$$x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{q}{p}}}, \lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$
$$\lambda_k x_k = \frac{a_k b_k^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{a_k b_k}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$
$$\lambda_k f(x_k) = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \frac{a_k^p}{b_k^q} = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$
$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
□

Пример (Нер-во Минковского)**.** *Пусть* $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \geq 0$ *и* $p \geq 1$. *Тогда:*
$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $p = 1$ — верно. $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$:
$$(a_1+b_1)^p + \ldots + (a_n+b_n)^p = (a_1+b_1)(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + (a_n+b_n)(a_n+b_n)^{p-1} =$$
$$= a_1(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + a_n(a_n+b_n)^{p-1} + b_1(a_1+b_1)^{p-1} + \ldots + b_n(a_n+b_n)^{p-1} \underset{\text{нер-во Гельдера}}{\leq} \ldots$$
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_1^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$
Поделим LHS и RHS на $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ и получим желаемый результат.
□

2 Лекция 23

2.1 Неопределённый интеграл

Определение 2.1. Пусть ф-ция f опр-на на пром-ке I.

1) Ф-ция $F\colon I \to \mathbb{R}$ наз-ся **первообразной на** I, если $F'(x) = f(x), \forall x \in I$

2) Ф-ция $F\colon I \to \mathbb{R}$ наз-ся обобщённой первообразной на I, если F непр-на на I и $F'(x) = f(x), \forall x \in I \backslash A$, причём A не более чем счётно.

Пример.

$$f = \operatorname{sign} x, I = [-1, 1]$$

По т. Дарбу, всякая производная дифференцируемой ф-ции принимает все промежуточные значиния $\Rightarrow$ f *не имеет первообразной на отрезке* $[-1, 1]$

Её ***обобщённая*** *первообразная:* $F(x) = |x|$

Теорема 2.1 (Описание класса первообразных)**.** *Если* F *— первообразная (обобщённая)* f *на* I *и* $c \in \mathbb{R}$, *то* $F + c$, *тоже обощённая первообразная* f *на* I.
Если F_1, F_2 *— первообразные (обобщённые)* f *на* I, *то их разность постонна на* I.

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \overset{\text{условие постоянства}}{\Rightarrow} F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$
Для обобщённых первообразных следует из дополнения к теореме 10 $(10')$ $\square$

Определение 2.2. Произвольная первообразная ф-ции f на I наз-ся неопределённым интегралом ф-ции f на I и обозначается:

$$\int f(x)dx \text{ или } \int f dx$$

Замечание. *Операция перехода от ф-ции к её неопр. интегралу наз-ся* ***интегрированием****.*

Замечание. *Формально dx в обозначении не несёт смысловой нагрузки, однако его использование **бывает весьма полезным**, если трактовать fdx как дифференциал. ($f'dx = df$)*

Замечание. *Из неудобств отметим, что в обозначении никак не фигурирует пром-к I.*

Утверждение 2.1. *Неопределённый интеграл имеет следующие св-ва:*

1) *Если $\exists \int fdx$ на I, то $\left(\int fdx\right)' = f$ на I*

2) *Если $\exists \int fdx, \int gdx$ на I, а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то на I сущ-ет:*

$$\int (\lambda f + \mu g)dx = \lambda \int fdx + \mu \int gdx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

3) *Если u, v - дифф-мые ф-ции на I и $\exists \int vu'dx$ на I, то на I сущ-ет:*

$$\int v'udx$$

*А также верна ф-ла (**интегрирование по частям**):*

$$\int vu'dx = vu - \int v'udx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$
Или:

$$\int udv = vu - \int vdu + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

4) *Если F — первообразная f на I, ϕ дифф. на пром-ке $Y, \phi(Y) \subset I$, то сущ-ет:*

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

*для некоторого $C \in \mathbb{R}$ (**ф-ла подстановки**)*

Замечание. *Если дополнительно ϕ строго монотонна на Y, то на $\phi(Y)$*

$$t = \phi^{-1}(x)$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx + C$$

Теорема 2.2 (Таблица неопределённых интегралов)**.** *Смотри талблицу в книжке.*

Задача 2.1. Пусть f дифф-ма на I с $f' \neq 0$ на I. Пусть F — первообразная f на I. Запишите:

$$\int f^{-1}(y)dy$$

через f.

Замечание. *В отличии от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит за пределы элементарных ф-ций, наприме:*

$$\int e^{-x^2}dx$$

Замечание. *Все св-ва переносятся на обобщ. интеграл.*

3 Лекция 24

3.1 Интегралы Римана и его св-ва

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок.

Определение 3.1. Разбиение T отр-ка $[a, b]$ наз-ся конечный набор точек $\{ x_i \}_{i=0}^{n}$, т. ч. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Введём обозн-я:

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}, |T| = \max_{1 \leq i \leq n} \triangle x_i$$

j

Пусть ф-ция f опр-на на $[a, b]$ и T — разбиение $[a, b]$. Положим:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Сумма:

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \triangle x_i$$

$$s_T(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \triangle x_i$$

Эти суммы наз-ся верхней и нижней суммами Дарбу ф-ции f, отвеч. разбиению T

Лемма 3.1. *Пусть T, T' — разбиения $[a,b]$: $T \subset T'$, тогда:*

$$s_T(f) \le s_{T'}(f) \le S_{T'}(f) \le S_T(f)$$

Доказательство. Пусть $T = \{ x_i \}_{i=1}^{n}$. Рассм. сначала случай, когда:

$$T' = T \cup \{ c \}, c \notin T$$

Сущ-ет такое k, что:

$$c \in (x_{k-1}, x_k)$$

Положим:

$$m'_k = \inf_{[x_{k-1},c]} f(x), m''_k = \inf_{[c,x_k]} f(x)$$

Тогда:

$$m''_k, m'_k \ge m_k$$

$$\Rightarrow s_{T'}(f) = \sum_{i-1}^{k-1} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) \ge$$

$$\ge \sum_{i-1}^{k-1} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i + m_k(\underbrace{c - x_{k-1} + x_k - c}_{\triangle x_k}) = s_T(f)$$

Аналогично док-ся правое нер-во. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $|f| \le M$ и T' получена из T добавлением m точек, тогда:*

$$s'_T f - s_T f \le 2Mm\,|T|$$

$$S_T f - S_{T'}(f) \le 2Mm\,|T|$$

Доказательство. Пусть $T' = T \cup \{ c \}$, тогда:

$$S_{T'}(f) - S_T(f) = (\underbrace{m'_k - m_k}_{\leq 2M})(c - x_{k-1}) + (\underbrace{m''_k - m_k}_{\leq 2M})(x_k - c) \leq$$

$$\leq 2M(\underbrace{c - x_{k-1} + x_k - c}_{\leq |T|}) \leq 2M\,|T|$$

Общий результат получается индукцией по M. Для верхний сумм — аналогично. ☐

Из леммы (3.1) получаем утв-е:

Следствие. *Для любых разбиений T_1, T_2 отр-ка $[a, b]$ вып-но:*

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

Доказательство. Рассм. $T = T_1 \cup T_2$, тогда по лемме (3.1):

$$s_{T_1}(f) \leq s_T(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_2}(f)$$

☐

Определение 3.2. Величины:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup s_T(f)$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf S_T(f)$$

Наз-ся соотв. верхними и нижними интегралами Дарбу.

Следствие. *Переходя в нер-ве следствия* 3.1 *к* inf *по всем разбиемниям T_1 при фикс T_2, и к* sup *по всем разбиениям T_2 при фикс. T_1, получаем:*

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S_T(f)$$

Определение 3.3. Пусть ф-ция f опр-на на отр-ке $[a, b]$, ф-ция f наз-ся **интегрируемой (по Риману)**, если:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \text{ — конечны}$$

Число $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ наз-ся определённым интегралом ф-ции f по $[a, b]$. Мн-во всех интегрируемых по Риману на $[a, b]$ ф-ций будем обозначать, как $\mathcal{R}$

<u>Пример</u>. *$f = 1$ на $[a, b] \Rightarrow$ для любых разбиений $T = \{ x_i \}_{i=0}^n$:*

$$s_T(f) = S_T(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = b - a$$

<u>Лемма</u> 3.3. *Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f огр-на на $[a, b]$*

Доказательство. Пусть f не огр. сверху на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T ф-ция f не огр. сверху на $[x_{i-1}, x_i]$ для некот. i, а значит:

$$M_i = +\infty \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = +\infty$$

Если f не огр. снизу, то $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. □

<u>Замечание</u>. *Ограниченность ф-ции является* ***необходимым, но не достаточным условием интегрируемости.***

<u>Пример</u>. *Ф-ция Дирихле:*

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Для произвольного отр-ка $[a, b]$, имеем:

$$s_T(\mathcal{D}) = 0, S_T(\mathcal{D}) = b - a$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0, \overline{\int_a^b} f = b - a$$

<u>Следствие</u> (Аддитивность подотрезков)**.** *Пусть $a < c < b$. Ф-ция f интегрируема по Риману на $[a, b] \iff f$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, при этом справ-ва формула:*

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

Доказательство. Покажем, что:

$$\underline{\int_a^b f\,dx} = \underline{\int_a^c f\,dx} + \underline{\int_c^b f\,dx}$$

Пусть $T_1 = \{\, x_i \,\}_{i=0}^{k}$ — разбиение $[a, c]$, $T_2 = \{\, x_i \,\}_{i=k+1}^{n}$ — разбиение $[c, b]$, тогда $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение $[a, b]$, причём:

$$s_T(f) = \sum_{i=0}^{k} m_i \triangle x_i + \sum_{i=k+1}^{n} m_i \triangle x_i =$$

$$= s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \tag{2}$$

Сл-но, $\underline{\int_a^b f} \geq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f)$
Переходя в последнем нер-ве к sup сначала по всем разбиениям T_2 отр-ка $[c, b]$, затем по всем разбиениям T_1 отр-ка $[a, c]$ получим:

$$\underline{\int_a^b f} \geq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

С другой стороны, из (2) следует:

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

Рассм. произв. разбиение $\tilde{T}$ отр-ка $[a, b]$ и $T = \tilde{T} \cup \{\, c \,\}$:

$$s_{\tilde{T}}(f) \leq s_T(f) \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b f} \leq \underline{\int_a^c f} + \underline{\int_c^b f}$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$$

Аналогично для верхнего интеграла Дарбу.
Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \le \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x)\,dx$$

Сл-но $\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c f}, \underline{\int_c^b f} = \overline{\int_c^b f}$
Пусть $\overline{f} \in \mathcal{R}$ □

4 Лекция 25

Следствие. *Если $f \in R[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, тогда $f \in R[c, d]$*

Замечание.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\inf_a^b f(x)\,dx$$

Задача 4.1. Проверить, что аддитивность верна при любом расположении точек a, b, c

Следствие. *Пусть $f, g \in R[a, b]$, и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\lambda f + \mu g \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\,dx = \lambda \int_a^b f\,dx + \mu \int_a^b f\,dx$$

Доказательство.

Замечание. $\lambda \ge 0, A, B \subset \mathbb{R}$:

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

$$\lambda(\sup A + \sup B) = \sup A + \sup B$$

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Пусть $\lambda \geq 0$. Т. к. $\inf\limits_{x\in E}\lambda f(x) = \lambda\inf\limits_{x\in E} f(x)$, для любого $E \subset [a,b]$, то $s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f)$ для произвольного разб-я T отр-к $[a,b]$. По опр-ю:

$$\underline{\int_a^b \lambda f\,dx} = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \underline{\int_a^b f\,dx}$$

Аналогично устанавливается, что верхний интеграл Дарбу обладает таким св-вом (св-вом однородности).
Т. к. $\inf\limits_E - f = -\sup\limits_E f, \forall E \subset [a,b]$, то

$$\underline{\int_a^b (-f)} = -\overline{\int_a^b f}, \overline{\int_a^b (-f)} = -\underline{\int_a^b f}$$

Сл-но, $(-f) \in R[a,b], \int_a^b (-f) = -\int_a^b f, \lambda < 0 \Rightarrow \lambda = (-1)\,|\lambda|$
Т. к.

$$\inf_{x\in E}(f(x)+g(x)) \geq \inf_{x\in E} f(x) + \inf_{x\in E} g(x)$$

То для произвольного разб-я T отр-ка $[a,b]$ имеем

$$s_T(f+g) \geq s_T(f) + s_T(g)$$

Сл-но, $\underline{\int_a^b (f+g)\,dx} \geq \underline{\int_a^b f\,dx} + \underline{\int_a^b g\,dx}$
Аналогично:

$$\overline{\int_a^b (f+g)\,dx} \leq \overline{\int_a^b f\,dx} + \overline{\int_a^b g\,dx}$$

Вычтем из нер-ва для верхнего интеграла нер-во для нижнего:

$$0 \leq \overline{\int_a^b (f+g)\,dx} - \underline{\int_a^b (f+g)\,dx} \leq \left(\overline{\int_a^b f\,dx} - \underline{\int_a^b f\,dx}\right) +$$

$$+\left(\overline{\int_a^b g\,dx} - \underline{\int_a^b g\,dx}\right) = 0$$

Т. к. $f, g \in R[a,b]$, то $\overline{\int_a^b (f+g)\,dx}$, т. е. $f+g \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b (f+g)\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx$$

$\square$

Следствие. *Пусть* $f, g \in R[a,b]$ *и* $f \le g$ *на* $[a,b]$. *Тогда:*

$$\int_a^b f\,dx \le \int_a^b g\,dx$$

Доказательство. Для произвольного разбиения T имеем $f(x) \le g(x), \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$

$$s_T(f) \le s_T(g) \Rightarrow$$

□

4.1 Мн-во интегрируемых ф-ций

Определение 4.1. Пусть f опр-на на $E \subset \mathbb{R}$. **Колебание (осциляцией)** ф-ции f на E наз-ся

$$\omega(f, E) = \sup_{x,y \in E} |f(x) - f(y)|$$

Замечание. *Перепишем в более удобном виде:*

$$\omega(f,E) = \sup_{x,y\in E}(f(x) - f(y)) = \sup_{x,y\in E}(f(x) + (-f(y))) = \sup_{x\in E} f(x) + \sup_{y\in E} f(y) =$$

$$= \sup_{x\in E} f(x) - \inf_{y\in E} f(y)$$

Пусть f опр-на на $[a,b]$ и $T = \{\, x_i \,\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a,b]$, тогда:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n w(f, [x_{i-1}, x_i])\triangle x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\triangle x_i$$

Отметим, что $SZ_T(f)$ конечно $\iff$ f ограничена на $[a,b]$. В этом случае:

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$$

Теорема 4.1.

$$f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists T - \textit{разб-е, } [a,b] \hookrightarrow \Omega_T f < \varepsilon$$

Доказательство. $\Rightarrow$)
$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю интеграла Дарбу: $\exists T_1, T_2$ — разб-я $[a, b]$:

$$s_{T_1}(f) > I - \frac{\varepsilon}{2}, S_{T_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$T = T_1 \cup T_2 \text{ — разб. } [a, b]$$

Тогда:
$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f) \leq S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$) Т. к. $\Omega(f)$ конечна, то f огр-на на $[a, b]$, тогда ввиду нер-в:

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq S_T(f) - s_T(f) = \Omega_T(f) < \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ — любое, то $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, т. е. $f \in R[a, b]$

$\square$

Следствие. *Если f непр-на на $[a, b]$, то f интегр. на $[a, b]$*

Доказательство. Заф. $\varepsilon > 0$. По т. Кантора, f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому

$$\exists \delta > 0 \colon \forall x', x'' \in [a, b](|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b - a})$$

Рассм. разб. $T = \{ x_i \}_{i=0}^n : |T| < \delta$
По т. Вей-са $\exists x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i] \colon M_i = f(x_i'), m_i = f(x_i'')$
Т. к. $|x_i'' - x_i'| \leq \triangle x_i < \delta$, то $|f(x_i'') - f(x_i')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i') - f(x_i''))\triangle x_i < \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^n \triangle x_i = \varepsilon$$

По теореме 4.1, $f \in R[a, b]$ $\square$

Следствие. *Если f монот. на $[a, b]$, то f инт. на $[a, b]$*

Доказательство. Пусть для опр-ти f нестрого возр-ет на $[a,b]$, тогда для произв. разб. T имеем:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\triangle x_i \leq \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\,|T|$$

Сл-но, $\Omega_T(f) \leq (f(b) - f(a))\,|T|\,, f \in R[a,b]$ □

Теорема 4.2. *Пусть f огр. на $[a,b]$ и $f \in R[c,d]$ на любом $[c,d] \subset (a,b)$. Тогда $f \in R[a,b]$*

Доказательство. Пусть $|f| \leq M$. Заф. $\varepsilon > 0$.
Положим $c = a + \frac{\varepsilon}{6M}, d = b - \frac{\varepsilon}{6M}$. Положим $f \in R[c,d]$, поэтому по теореме 4.1, $\exists T_0$ — разб. : $\Omega_{T_0}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$T = T_0 \cup \{\, a, b \,\} \text{ — разб. } [a,b]$$

Тогда:

$$\Omega_T(f) = \omega(f,[a,c])(c-a) + \Omega_{T_0}(f) + \omega(f,[d,b])(b-d)$$

Т. к. $|f| \leq M, \omega(f,[a,c]) \leq 2M, \omega(f,[d,b]) \leq 2M$, то

$$\Omega_T(f) \leq 2M * \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M\frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow f \in R[a,b]$$

□

Следствие. *Пусть f огр-на на $[a,b]$ и мн-во точек разрыва f на $[a,b]$ конечно. Тогда f интегрируема на $[a,b]$*

Доказательство. Добавим к точкам разрыва a, b:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b$$

По теореме 4.2, ф-ция $f \in R[c,d], \forall [c,d] \subset [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f \in R[x_{i-1}, x_i]$. Благодаря св-ву аддитивности интеграла, получаем, что f интегрируема на $[a,b]$ □

Пример.

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, f(0) = a, a \in \mathbb{R}$$

Тогда $f \in R[-1,1]$

5 Лекция 26

Теорема 5.1. *Пусть $f \in R[a,b]$, $m \le f \le M$ на $[a,b]$ и ф-ция g непрерыв. на $[m,M]$. Тогда $g \circ f \in R[a,b]$*

Доказательство. Обозначим $h = g \circ f$. По т. Кантора, ф-ция g равн. непр. на $[m,M]$. Заф. $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall y', y'' \in [m,M]\,(|y' - y''| < \delta \Rightarrow |g(y') - g(y'')| < \varepsilon)$$

Можно считать, что $\delta < \varepsilon$. По теореме 4.2:

$$\exists T = \{\, x_k \,\}_{k=1}^{n} \text{ отр-ка } [a,b]\colon$$

$$\Omega_T(f) < \delta^2$$

Положим ω_k - колебание h на $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда:

$$\Omega_T(h) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \triangle x_k = \sum_{k \in A} \omega_k \triangle x_k + \sum_{k \in B} \omega_k \triangle x_k$$

где A — мн-во тех номеров, для кот-ых $\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) < \delta$, а B — мн-во остальных номеров. Если $k \in A$, то

$$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]\colon\ |f(x') - f(x'')| < \delta,$$

а значит

$$|h(x') - h(x'')| = |g(f(x')) - g(f(x''))| < \varepsilon$$

Поэтому $\omega_k \le \varepsilon$:

$$\sum_{k \in A} \omega_k \triangle x_k \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = \varepsilon(b-a)$$

Оценим вторую сумму. Отметим, что:

$$\delta \sum_{k \in B} \triangle x_k \le \sum_{k \in B} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \triangle x_i \le \sum_{k=1}^{n} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \triangle x_i = \Omega_T(f) < \delta^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in B} \triangle x_k < \delta < \varepsilon$$

Ф-ция g непр-на на $[m, M]$, а значит, огр., $|g| \leq C$. Тогда $\omega_k \leq 2C$. В итоге:

$$\Omega_T(h) = \sum_{k \in A} \omega_k \triangle x_k + \sum_{k \in B} \omega_k \triangle x_k < \varepsilon(b - a + 2C)$$

По теореме 4.1 $\square$

Задача 5.1. Композиция двух ф-ций, интегрируемых по Риману, необязательно интегрируема.

Следствие. *Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда:*

1) $f \cdot g \in R[a, b]$

2)

$$|f| \in R[a, b] \text{ и } \left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx$$

Доказательство. 1) $t \mapsto t^2$ — непр-на на $\mathbb{R} \overset{\text{теор. } 5.1}{\Rightarrow} f^2 \in R[a, b]$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in R[a, b]$$

2) $t \mapsto |t|$ — непр. на $\mathbb{R} \overset{\text{теор. } 5.1}{\Rightarrow} |f| \in \mathbb{R}[a, b]$

$$\Rightarrow -|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow \text{очев.}$$

$\square$

Пусть $T = \{ x_i \}_{i=0}^n$ — разб. $[a, b]$, $\xi = \{ \xi_i \}_{i=1}^n$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пара (T, ξ) наз-ся отмеченным разбиением. Пусть f опр-на на $[a, b]$ и (T, ξ) — отмеч. разб. Тогда:

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \triangle x_i$$

Наз-ся суммой Римана, отвечающей (T, ξ)

Лемма 5.2. *Для всякого разб-я T отр-ка $[a, b]$ выполнено,*

$$s_T(f) = \inf_\xi \sigma_T(f, \xi)$$

$$S_T(f) = \sup_\xi \sigma_T(f, \xi)$$

Доказательство. Пусть $T = \{ x_i \}_{i=0}^n$. Т. к. $f(x) \geq m_i, \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, то $\sigma_T(f, \xi) \geq s_T(f)$
Заф. $\varepsilon > 0$ и выберем $\xi_i' \in [x_{i-1}, x_i]$, так что:

$$f(\xi_i') < m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}, \xi' = \{ \xi_i' \}$$

$$\sigma_T(f, \xi') = \sum_{i=1}^n f(\xi_i') \triangle x_i < \sum_{i=1}^n \left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \triangle x_i =$$

$$= s_T(f) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \triangle x_i = s_T(f) + \varepsilon$$

Таким образом $s_T(f)$ — инфимум мн-ва $\{ \sigma_T(f, \xi) \colon \{ \xi \} \}$ $\square$

Лемма 5.3. *Если f огр-на на $[a, b]$, то*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \colon \forall T \text{ — разб. } [a, b],\ |T| < \delta$$

$$\underline{\int_a^b} f - s_T(f)\, dx < \varepsilon, S_T(f) - \overline{\int_a^b} f\, dx$$

Доказательство. $M > 0, |f| \leq M$ на $[a, b]$. Заф. $\varepsilon > 0$, по опр-ю $\underline{\int_a^b} f$ найдётся $T_\varepsilon = \{ x_i \}_{i=0}^m$, что:

$$\underline{\int_a^b} f - s_{T_\varepsilon}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть T произв. разб. $[a, b]$ и $R = T \cup T_\varepsilon$. Т. к. R получено из T, добавим $\leq m$, то $S_R(f) - s_T(f) \leq 2Mm\,|T|$, а значит:

$$\underline{\int_a^b} f - s_T(f) = \underline{\int_a^b} f - s_{T_\varepsilon}(f) + S_{T_\varepsilon}(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + S_R(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + 2Mm\,|T|$$

$\square$

Теорема 5.4 (Критерий Дарбу)**.** *След. утв. эквив-ны:*

1) *f интегр. на $[a, b]$*

2) $\exists I \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall (T, \xi)(|T| < \delta \Rightarrow |\sigma_T(f, \xi) - I| < \varepsilon)$

*Доказательство*1 $\Rightarrow$ 2)

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По лемме **??**:

$$\exists \delta > 0, \forall T - \text{разб. } [a,b], |T| < \delta$$

$$\forall \{\, \xi \,\}, I - \varepsilon < s_T(f) \le \sigma_T(f,\xi) \le S_T(f) < I + \varepsilon \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma_T(f,\xi) < I + \varepsilon$$

2 $\Rightarrow$ 1) Заф. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$

$$\forall (T,\xi), |T| < \delta\colon$$

$$I - \varepsilon < \sigma_T(f,\xi) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \le s_T(f) \le S_T(f) \le I + \varepsilon$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le I + \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$, любое, то $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$

□

Следствие. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* (T_n, ξ_n) — *послед. отм. разб.* $[a,b]$, $|T_n| \to 0$ *при* $n \to \infty$*. Тогда:*

$$\sigma_{T_n}(f,\xi_n) \to \int_a^b f\,dx$$

Заф. $\varepsilon > 0$*. Найдётся* $\delta > 0$ *из* (2)*, то* $\exists N \forall n \ge N (|T_n| < \delta)$*, а значит* $\left|\sigma_{T_n}(f,\xi_n) - \int_a^b f\,dx\right| < \varepsilon$

Теорема 5.5 (Формула Ньютона Лейбница)**.** *Если* $f \in R[a,b]$ *и имеет (обобщ.) первообразную* F *на* $[a,b]$*, то:*

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

6 Лекция 27

6.1 Ф-ла Ньютона Лейбница

Теорема 6.1 (Ф-ла Ньютона-Лейбница)**.** *Если $f \in R[a, b]$ и имеет (обобщ.) первообразную на $[a, b]$, то:*

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть $T = \{ x_i \}_{i=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Если F — первообразная, то по т. Лагранжа:

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i)\colon F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i) \triangle x_i$$

А значит ($m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f, M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$)

$$m_i \triangle x_i \le F(x_i) - F(x_{i-1}) \le M_i \triangle x_i$$

Замечание. *Для обобщённой первообразной это нер-во вып-ся по следствию т. $10'$.*

Просуммируем получ. нер-ва, то $i = 1, \ldots, n$, получим:

$$s_T(f) \le F(b) - F(a) \le S_T(x_i)$$

Перейдём к sup слева и к inf справа по всем разбиениям T:

$$\underline{\int_a^b} f\,dx \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f\,dx$$

Т. к. $f \in R[a, b]$, то "= а значит:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

□

6.2 Интеграл с переменным пределом

Определение 6.1. Пусть I — невырожд. пром-к и $a \in I$. Пусть f опр-на на I и $f \in R[\alpha, \beta], \forall[\alpha, \beta] \subset I$. Тогда:

$$F\colon I \to R$$
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

наз-ся интегралом с переменным верх. пределом.

Теорема 6.2 (Основаная теорема интегрального исчисления)**.** *Пусть f опр-на на пром. $I, a \in I$, пусть $f \in R[\alpha, \beta], \forall[\alpha, \beta] \subset I$. Тогда F непр-на на I. Кроме того, если f непр. в т. x, то F дифф-ма в т. x и $F'(x) = f(x)$*

Доказательство. Пусть $x \in I$. Выберем $\sigma > 0$ так, что:

$$[\alpha, \beta] = [x - \sigma, x + \sigma] \cap I \text{— невырожд. отрезок}$$

По усл-ию $f \in R[\alpha, \beta]$, в част-ти f огр-на на $[\alpha, \beta], |f| \leq |M|$, на $[\alpha, \beta]$
Тогда для $\forall y \in [\alpha, \beta]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$
$$= \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)|\,dt \right| \leq M|y - x|$$

Сл-но, $\lim_{y \to x} F(y) = F(x) \iff F$ непр-на в произвольной т. $x \iff F$ непр-на на I
Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти f в т. x

$$\exists \delta > 0, \forall t \in \overset{\circ}{B}_\delta(x) \cap I, |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Тогда для любого $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(x) \cap I$:

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t)\,dt - \frac{1}{y - x} \int_x^y f(x)\,dt \right| =$$
$$= \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y (f(t) - f(x))\,dt \right| = \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y |f(t) - f(x)|\,dt \right| \leq$$
$$\leq \varepsilon \cdot \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y dt \right| = \varepsilon$$

Ч. Т. Д. ∎

Следствие. *Всякая непр-ная на пром. I ф-ция имеет первообразную. Всякая монотонная на I ф-ция имеет обобщённую первообразную.*

Замечание. *Если $f \in R[a,b]$ и имеет (обобщ.) первообразную по F на $[a,b]$, то F с точностью до константы совпадает с интегралом с переменным пределом.*

6.3 Приёмы интегрирования

Теорема 6.3. *Пусть f непр-на на I, $\phi\colon [\alpha,\beta] \to I$ дифф-ма на $[\alpha,\beta], \phi \in R[\alpha,\beta]$, тогда:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\phi'(t)\,dt$$

Где $a = \phi(\alpha), b = \phi(\beta)$

Доказательство. Т. к. f непр-на, то $f\circ\phi$ непр-на на $[\alpha,\beta]$, а значит, $(f\circ\phi)\cdot\phi' \in R[\alpha,\beta]$. Пусть F — первообраз. f на I. Т. к.:

$$(F\circ\phi)' = F'(\phi)\cdot\phi' = (f\circ\phi)\phi'$$

на $[\alpha,\beta]$
По ф-ле Н-Л:

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\phi)\phi'(t)\,dt = F\circ\phi|_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

□

Теорема 6.4. *Пусть f, g дифф-мы на $[a,b]$ и $f', g' \in R[a,b]$. Тогда:*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(Ф-ла интегрирования по частям)

Доказательство. Обозначим:

$$h = f'g + fg'$$

Т. к.:

$$h = (fg)'$$

то fg — первообразная h на $[a, b]$. По ф-ле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_a^b f'g\,dx + \int_a^b fg'\,dx = (fg)|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

$\square$

Пример.

$$Y_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,dx, m \in \mathbb{N}_0$$

Доказательство. Для $m \geq 2$ по ф-ле инт-я по частям имеем:

$$Y_m = \int_a^b \sin^{m-1} x(-\cos x)'\,d = \underbrace{-\sin^{m-1} x \cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \cos^2 x\,dx =$$

$$= (m-1)(Y_{m-2} - Y_m) \Rightarrow Y_M = \frac{m-1}{m} Y_{m-2}$$

$$\Rightarrow Y_M = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2}, m \text{ — чёт.} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, m \text{ — нечет.} \end{cases}$$

$\square$

Пример (Ф-ла Валлиса)**.**

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$$

Доказательство. На $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

Из предыдущего примера:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Обозначим $x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

$$\vdots$$

$\square$

Теорема 6.5. *Пусть* $f, g \in R[a,b], m \leq f \leq M$ *на* $[a,b], g$ *не меняет знака на* $[a,b]$. *Тогда* $\exists \lambda \in [m,M]$*:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \lambda \int_a^b g(x)\,dx$$

Доказательство. Пусть $g \geq 0$: Тогда:

$$mg \leq fg \leq Mg$$

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$
Если $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0 (> 0)$, то:

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \in [m; M]$$

Случай $g \leq 0$ св-ся аналогично. □

Задача 6.1. Док-ть, что λ может быть выбрана на $(m; M)$

7 Лекция 28

7.1 Завершаем интегральчики

Замечание. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $f \geq 0$ *на* $[a,b]$. *Если* $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) > 0$ *и* f *непр-на в* x_0, *то* $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

Доказательство. По св-ву отделимости $\exists \delta > 0, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a,b]$, $(f(x) > \frac{f(x_0)}{2})$. Тогда $[c,d]$ — невырожд. отрезок и по св-ву аддитивности интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geq \int_c^d f(x)\,dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0$$

□

Теорема 7.1. *Пусть f дифф-ма $(n+1)$ раз на (α, β) и $f^{(n+1)} \in R[c,d] \forall [c,d] \subset (\alpha, \beta)$. Тогда для любых $a, x \in (\alpha, \beta)$ выполнено:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Доказательство. ММИ по n.

- База $n = 0$:
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$
- (Ф-ла Н-Л) Пусть $n > 1$ и предположим, что утв. верно для $n-1$, т. е.:
$$r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$
Проинтегрируем по частям:
$$r_{n-1}(x) = -\frac{1}{n!}\int_a^x ((x-t)^n)' f^{(n)}(t)\,dt = -\frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}\Big|_{t=a}^{t=x} +$$
$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$
$$= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$
Таким образом:
$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

□

7.2 Комплексные числа, многочлены и комплексные экспоненты

Определение 7.1. Множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$ наз-ся мн-во $\mathbb{R}^2$ с введёнными на нём операциями:

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Отн-но введённых операций $\mathbb{C}$ явл-ся полем с нулём $(0, 0)$ и единицей $(1, 0)$

Замечание. *Пару $(a, 0)$ отождествляют с действительным числом a. Такое отождествление согласовано с операциями:*

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

В этом смысле $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Пару $(0, 1)$ называют мнимой единицей и обозначают буквой i. Из определения умножения:

$$i^2 = -1$$

Т. к. $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$, то комплексное число $z = (a, b)$ представимо в виде:

$$z = a + bi$$

Такое представление наз-ся алгебраической формой записи комплексного числа, при этом:

$$a =: \operatorname{Re} z \text{ — вещественная часть } z$$

$$b =: \operatorname{Im} z \text{ — мнимая часть } z$$

Определение 7.2. Пусть $z = a + bi$. Тогда действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ наз-ся модулем комплексного числа z. $\overline{z} = a - bi$ наз-ся сопряжённым к комплексному числу z

Лемма 7.2. *Пусть $z, w \in \mathbb{C}$. Тогда:*

1) $|\overline{z}| = |z|$
2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
3) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. *В част-ти:*

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, z \neq 0$$

5) $|zw| = |z|\,|w|$

6) $|z+w| \le |z| + |w|$

Доказательство. Все св-ва, кроме последнего, вытекают из опр-я. Установим св-во 6:

$$|z+w|^2 = (z+w)(z-w) = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2$$

Положим $t = z\overline{w}$, тогда $\overline{t} = \overline{z}w$, а значит,

$$z\overline{w} + \overline{z}w = 2\,\mathrm{Re}\,t$$

Т. к. $\mathrm{Re}\,t \le |t|$, а $|t| = |z|\,|w|$, то:

$$|z+w|^2 \le |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

□

Замечание. *По ММИ рав-ва (5) и (6) распространяются на произвольное конечное кол-во сомножителей/слагаемых.*

Пусть (r, ϕ) — полярные коор-ты $z = x + iy$. Тогда $r = |z|\,, \phi$ — аргумент z (определён с точностью до слагаемого $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$). Если $\phi \in (-\pi, \pi]$, то $\phi = \arg z$ — главное значение арг-та.
Т. к. $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$, то z представимо в виде:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Такое представление наз-ся тригонометрической формой записи комплексного числа z.

Замечание. *1) Установим, когда* $r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1) = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$

$$\iff r_1 = r_2, \text{ смотрим на модули}$$
$$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2)

$$z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$
$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2))$$

3) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos\phi - i\sin\phi)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos(-\phi) + i\sin(-\phi))$

Утверждение 7.1 (Формула Муавра)**.** *Если* $z = r(\cos\phi + i\sin\phi) \neq 0$ *и* $n \in \mathbb{Z}$*, то* $z^n = |z|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi)$

Определение 7.3. Комплексное число w наз-ся корнем n-ой степени из комплексного числа z, если $w^n = z$

Лемма 7.3. *Если* $z \neq 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$*, то сущ-ют ровно* n *корней* n*-степени из* z*, они задаются формулой:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\phi_k + i\sin\phi_k), \phi_k = \frac{\phi + 2\pi k}{n}, k = 0, \ldots, n-1$$

Доказательство. a)

$$w_k^n = |z|(\cos n\phi_k + i\sin n\phi_k) = z$$

b) Если $m \geq n$, то $m = nq + r$, где $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$

$$w_m = w_{nq+r} = w_r$$

c) $p, r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, p \neq q$. Покажем, что $w_p \neq w_r$. От прот., пусть $w_p = w_r \Rightarrow$

$$\phi_p = \phi_r + 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$$
$$\iff \frac{\phi + 2\pi p}{n} = \frac{\phi + 2\pi r}{n} + 2piis$$
$$\iff p - r = ns$$

Т. к. $|p - r| < n \Rightarrow s = 0 \Rightarrow p = r$!!!

□

7.3 Вводим анализ на комплах

Определение 7.4. Пусть $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Говорят, что $\{z_n\}$ сх-ся к z_0, если:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$$

Пишут $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ или $z_n \to z_0$

Лемма 7.4. *Пусть* $z_n = x_n + iy_n, x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, n \in \mathbb{N}_0$

$$z_n \to z_0 \iff x_n \to x_0, y_n \to y_0$$

Доказательство.

$$|\operatorname{Re} z| \le |z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

(Слева можно поставить $\operatorname{Im} z$) $\square$