АлГем

Сергей Григорян

20 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 4

1.1 Декартова система коор-т

$$G = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} \end{pmatrix}$$

- ОНБ

$$G'\text{- } G \text{ повёрнутый на } \alpha$$
$$\overline{e_1}' = \cos\alpha \overline{e_1} + \sin\alpha \overline{e_2}$$
$$\overline{e_2}' = -\sin\alpha \overline{e_1} + \cos\alpha \overline{e_2}$$
$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha) \text{ - Rotation - поворот.}$$

Утверждение 1.1. *Пусть $S = S_{G \to G'}$. Пусть $T = S_{G' \to G''}$. Тогда:*

$$ST = S_{G \to G''}$$

Доказательство.

$$G' = GS, G'' = G'T \Rightarrow G'' = G'T = GST$$

□

Утверждение 1.2. *Пусть S - матрица перехода от G к G'. T - матр. перехода от G' к G. Тогда:*

$$ST = TS = E \text{ - единичная матрица}$$

Доказательство.

$$G'' = G \Rightarrow ST \text{ - матрица перехода от } G \text{ к } G \Rightarrow ST = E$$

$$TS \text{ - матрица перехода от } G' \text{ к } G' \Rightarrow TS = E$$

□

Обозначение. ***Единичная матрица*** *E - диагональная матрица с единицами на главной диагонали.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 1.1. Если выполняется рав-во $ST = TS = E$, то матрица T называется **обратной** к S.

Определение 1.2. Матрица наз-ся **обратимой**, если у неё есть обратная матрица.

Утверждение 1.3. *Если обратная матрица сущ-ет, то она единственная.*

Доказательство. От. прот. Пусть $A^{-1}, \overline{A}^{-1}$ - обратные матрицы к матр. A.

$$A^{-1} = EA^{-1} = (\overline{A}^{-1}A)A^{-1} = \overline{A}^{-1}(AA^{-1}) = \overline{A}^{-1}E = \overline{A}^{-1}$$

$\square$

Следствие 1.1. *Матрица перехода от одного базиса к другому **всегда обратима.***

Задача 1.1. Док-ть, что $R(\alpha)$ обладает св-вами:

1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$

2) $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^T$

Задача 1.2. Пусть $\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ (отн. ОНБ G) - вектор, выход. из нач. коор-т. $\overline{b}$ - вектор $\overline{a}$ повернутый на α, тогда:

$$\overline{b} = R(\alpha), \overline{a} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Определение 1.3. Пусть т. O - фикс. точка, начало коор-т. G базис в V_i. Тогда: (O, G) - ДСК

Определение 1.4. ДСК наз-ся **прямоугольной**, если G - ОНБ.

Определение 1.5. A - точка. Тогда коор-ты вектора $\overline{OA}$ наз-ся коор-тами точки A в ДСК (O, G):

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha \iff \overline{OA} = G\alpha = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.4. $A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = G\beta - G\alpha = G(\beta - \alpha)$$

Итого: чтобы найти вектор по его концам, нужно из коор-ты конца вычесть коор-ту начала.

Утверждение 1.5 (О делении отрезка в данном соотношении)**.**

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta$$

Пусть т. C делит отрезок $[A, B]$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда:

$$C \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \frac{\mu\alpha + \lambda\beta}{\lambda + \mu} \iff$$

$$\iff \overline{c} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b} \text{ - \textit{выпуклая ЛК}}$$

Доказательство.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\overline{b} - \overline{a})$$

$$\overline{c} = \alpha + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\overline{b} - \overline{a}) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu})\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\overline{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{b}$$

□

Теорема 1.1 (Об изменении коор-т точки при замене ДСК)**.** *Пусть в V_i фикс.: (O, G) (I ДСК) и (O', G') (II ДСК).*

Пусть $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \alpha$ и $A \underset{(O',G')}{\longleftrightarrow} \alpha'$ и пусть $S = S_{G \to G'}$

*(***Картинка***)*

Тогда $\alpha = S\alpha' + \gamma$

Доказательство.

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$$

$$\overline{OA} = G\alpha$$

$$\overline{OO'} + \overline{O'A} = G\gamma + G'\alpha' = G\gamma + GS\alpha' = G(S\alpha' + \gamma)$$

□

1.2 Скалярное произведение

Определение 1.6. V_i. **Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$** обозначаем $(\overline{a}, \overline{b})$ (в физике $\overline{a} \cdot \overline{b}$). Это число, равное:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скал. произ. = 0.

Обозначение.

$$(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \text{ - \textit{скалярный квадрат} } \overline{a}$$

Замечание.

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$$

Определение 1.7. (***Картинка***)

Вектор, порождаемые напр. отр-ом $\overline{OA'}$ наз-ся проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$:

$$pr_{\overline{b}}\overline{a} = \overline{OA'}$$

$$(pr_{\overline{b}}\overline{a} = 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = 0)$$

Утверждение 1.6. *(Линейность векторной проекции)*

a) $pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})(\overline{b} \neq \overline{o})$ - *ассоциативность*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $pr_{\overline{b}}(\lambda \overline{a}) = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$ - *однородность*

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_1} + \overline{A'_1A'_2} = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})$$

b) Для $\lambda > 0$: (****Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\lambda \overline{a}) = \overline{OA'} = \lambda \overline{OA'} = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$$

$\square$

Утверждение 1.7. *Пусть $\overline{b} \neq \overline{o}$. Тогда:*

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство.
$$\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \phi.$$

- Если $\phi = \frac{\pi}{2}$ - рав-во верно.
- Если $\overline{a} = \overline{o}$ - рав-во верно
- Пусть $\phi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$.

$$|pr_{\overline{b}}(\overline{a})| = |\overline{a}||\cos\phi| = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * 1, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\uparrow \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * (-1), \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases} = (\overline{a}, \overline{b})$$

□

Теорема 1.2 (О св-вах скалярного произведения). *1. Симметричность* $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

2. Аддитивность по I арг-ту: $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$

3. Однородность по I арг-ту: $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$

4. Полож. определённость: $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0, \forall\overline{a}$ *и* $(\overline{a}, \overline{a}) \iff \overline{a} = \overline{o}$

Доказательство. 3) При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ очев. При $\lambda > 0$:
$$\angle(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$
$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}) := |\lambda\overline{a}||\overline{b}|\cos(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

2)

$$(\overline{a_1}+\overline{a_2}, \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}), \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1})+pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{bmatrix} pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) = \lambda_1\overline{b} \\ pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}) = \lambda_2\overline{b} \end{bmatrix} =$$

$$= ((\lambda_1+\lambda_2)\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1+\lambda_2)(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda_1(\overline{b}, \overline{b})+\lambda_2(\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1\overline{b}, \overline{b})+(\lambda_2\overline{b}, \overline{b}) =$$
$$= (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}), \overline{b}) + (pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}), \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$$

□

Утверждение 1.8. *Пусть* $\overline{b} \neq \overline{o}$. *Тогда:*

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2} * \overline{b}$$

Доказательство.

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \lambda\overline{b} \mid \ \cdot \overline{b}$$

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda|\overline{b}|^2$$

$$\lambda = \frac{(pr_{\overline{b}}(\overline{a}))}{|\overline{b}|^2} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2}$$

$\square$

2 Лекция 5

2.1 Выр-е скалярного произведения в ОНБ и произвольном базисе

Утверждение 2.1. *G - ОНБ. $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha$. Тогда $\alpha_i = (\overline{a}, \overline{e_i})$*

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overline{e_s}$$

$$(\overline{a}, \overline{e_i}) = (\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overline{e_s}, \overline{e_i}) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s (\overline{e_s}, \overline{e_i}) = \alpha_i = 1$$

$$(\overline{e_i}, \overline{e_i}) = |\overline{e_i}^2| = 1$$

$\square$

Теорема 2.1. *(Выраж. ск. произ. в ОНБ) G - ОНБ, $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta$. Тогда $(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha^T \beta$*

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}, \overline{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{e_j}$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = (\sum_i \alpha_i\overline{e_i}, \sum_j \beta_j\overline{e_j}) = \sum_i\sum_j \alpha_i\beta_j(\overline{e_i},\overline{e_j}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i = \alpha^T\beta$$

$\square$

<u>Замечание</u>. $V_3 : (\overline{a},\overline{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$

V - лин. пр-во, $G = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - базис в V.

<u>Определение</u> 2.1. **Матрицей Грама** базиса G наз-ся матрица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\overline{e_1},\overline{e_1}) & (\overline{e_1},\overline{e_2}) & \dots & \overline{e_1, e_n} \\ & \dots & & \\ (\overline{e_n},\overline{e_1}) & (\overline{e_n},\overline{e_2}) & \dots & (\overline{e_n},\overline{e_n}) \end{pmatrix}$$

<u>Теорема</u> 2.2. *Пусть V - лин. пр-во, G - произ. базис с матр. Грама Γ.*

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow (\overline{a},\overline{b}) = \alpha^T\Gamma\beta$$

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_i \alpha_i\overline{e_i}$$

$$\overline{b} = \sum_j \beta_j\overline{e_j}$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = \sum_i\sum_j \alpha_i\beta_j(\overline{e_i},\overline{e_j}) = \sum_i\sum_j \alpha_i[\Gamma]_{ij}\beta_j = \sum_i \alpha_i \sum_j [\Gamma]_{ij}\beta_j = \sum_i \alpha_i[\Gamma\beta]_i =$$
$$= \alpha^T[\Gamma]\beta$$

$\square$

<u>Определение</u> 2.2. Матрица $S_{n\times n}$ наз-ся ортогональной, если:

$$S^TS = E$$

<u>Утверждение</u> 2.2. *ПУсть в V_i, G - ОНБ и F - произвольный базис и пусть $S = S_{G\to F}$. Тогда базис F явл. ОНБ $\iff$ S - ортогональная.*

Доказательство.

$$S = \begin{pmatrix} F_1^{\uparrow} & F_2^{\uparrow} & \dots & F_n^{\uparrow} \end{pmatrix}, S^T S = \begin{pmatrix} F_1^{\rightarrow} \\ F_2^{\rightarrow} \\ \vdots \\ F_n^{\rightarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1^{\uparrow} & F_2^{\uparrow} & \dots & F_n^{\uparrow} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (F_1, F_1) & (F_1, F_2) & \dots & (F_1, F_n) \\ & & \dots & \\ (F_n, F_1) & (F_n, F_2) & \dots & (F_n, F_n) \end{pmatrix} = \Gamma_F$$

F - ОНБ $\iff \Gamma_f = E \iff S^T S = E \iff S -$ орт. $\square$

Задача 2.1. Д-ть, что Γ_G и Γ_F - матр. грамма двух произв. базисов в V_i, то если $S = S_{G \to F}$, то:

$$\Gamma_F = S^T \Gamma_G S$$

Утверждение 2.3. *Пусть в V_i G - ОНБ. Тогда:*

a) $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\sum_{s=1}^n \alpha_s^2}$ *($\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha$)*

b) Если $\overline{a} \neq \overline{o}$ и $\overline{b} \neq 0$. Тогда:

$$\cos\phi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\sqrt{\sum \alpha_i^2}\sqrt{\sum \beta_i^2}}$$

Следствие 2.1. V_3. $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, B \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \overline{AB} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 \\ \beta_3 - \alpha_3 \end{pmatrix}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(\overline{AB}, \overline{AB})} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\beta_i - \alpha_i)^2}$$

2.2 Ориентация на пл-ти

Определение 2.3. Упорядоченная пара векторов $\overline{a}, \overline{b} (\overline{a} \not\parallel \overline{b})$ наз-ся **положительно ориентированной**, если при взгляде из фиксир. полупр-ва **кратчайший поворот** первого вектора ($\overline{a}$) в вектор, сонаправленный второму вектору ($\overline{b}$) кажется совершающим **против. часовой стрелки**.

Определение 2.4. Упорядоченная тройка некомпл. векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся **правой тройкой (положит. ориент)**, если $(\overline{a}, \overline{b})$ из конца вектора $\overline{c}$ каж-ся положит. ориентированной. Иначе - наз-ся **левой тройкой (отриц. ориент.)**

Утверждение 2.4. *a) Если на пл-ти V_2, $(\overline{a}, \overline{b})$ - положит. ориент., то пара $(\overline{b}, \overline{a})$ - отриц. ориент. и наоборот.*

b) в V_3 : $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ и $(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$ всегда прот. ориент. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ всегда одинаково ориент.

Доказательство. a) Очев.

b)

□

Определение 2.5. **Транспозиция** - перемещ. мест двух векторов.

Определение 2.6. **3-цикл**: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mapsto (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) \mapsto (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b})$

Замечание. $\Rightarrow$ *Всякая **транспозиция меняет** ориентацию, а всякий **3-цикл - сохраняет**.*

Определение 2.7. V_2 - с фикс. ориентацией. Тогда ор. площадью упор. пары $(\overline{a}, \overline{b})$ наз-ся число S:

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \pm S_{\text{пар-м, порожд.} a \text{ и } b}$$

(Знак +/- зависит от положит./отриц. ориентации $(\overline{a}, \overline{b})$)

Определение 2.8. V_3 - с фикс. ор. Тогда **ориентированным объёмом** упор. тройки $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся число:

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \pm V \text{ - объём параллелипипеда, порожд. } (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

(+/- зависит от полож./отриц. ориентации тройки)

Замечание. *Если $\overline{a}||\overline{b}$, то $S(\overline{a}, \overline{b}) = 0$*
Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - комплан., то $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$

Замечание. *$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся также смешанным произведением векторов.*

Утверждение 2.5. *a) Если* $(\overline{a}, \overline{b})$ *- ОНБ в* V_2*, то*

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \pm 1,$$

в зависимости от ориентации $(\overline{a}, \overline{b})$

b) Если $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ *в* V_3*, то:*

$$V(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = \pm 1,$$

в зависимости от ориентации $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$

Теорема 2.3 (О св-вах ориент. объёма)**.** *a) Ориент. объём* $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *меняет знак на противоположный при любой транспозиции арг-ов.* $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ *не меняет знак при 3-цикле.*

b) Аддитивность на III аргументах: $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1} + \overline{c_2}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1}) + V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_2})$

c) Однородность на III аргументах: $V(\overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c}) = \lambda V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$

Доказательство. b) Если $\overline{a}||\overline{b}$, то очев. Пусть $\overline{a} \not\parallel \overline{b}$. α - образована $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$\overline{n}$: $\overline{n} \perp \overline{a}, \overline{b}, |\overline{n}| = 1, (\overline{a}, \overline{b}, \overline{n})$- правая

Лемма 2.4. $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S(\overline{a}, \overline{b}) * (\overline{n}, \overline{c})$ *л. ч.* $|V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})| = V_{пар.}$

$|S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c})| = S(\overline{a}, \overline{b})|\overline{c}||\cos\angle(\overline{n}, \overline{c})|$

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > 0 \iff (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \text{ - } \textit{правая} \iff$$

концы $\overline{n}$ *и* $\overline{c}$ *лежат в одном полупр-ве от* $\alpha \iff \cos\angle(\overline{n}, \overline{c}) > 0$

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1}+\overline{c_2}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_1}+\overline{c_2}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_1})+S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_2}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1})+V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_2})$$

□

Теорема 2.5 (О св-вах ориент площади)**.** *a)* $S(\overline{a}, \overline{b}) = -S(\overline{b}, \overline{a})$ *- кососимметрична* *b)* $S(\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}) = S(\overline{a}, \overline{b_1}) + S(\overline{a}, \overline{b_2})$ *- аддитивность по II арг-ту.*

c) $S(\overline{a}, \lambda\overline{b}) = \lambda S(\overline{a}, \overline{b})$

Утверждение 2.6. *Пусть* $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ *Тогда* $S(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} S(\overline{e_1}, \overline{e_2})$

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = S(\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2}, \beta_1\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2}) = \alpha_1\beta_2 S(\overline{e_1}, \overline{e_2}) + \alpha_2\beta_1 S(\overline{e_2}, \overline{e_1}) = S(\overline{e_1}, \overline{e_2})(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} S(\overline{e_1}, \overline{e_2})$$

3 Лекция 6

Определение 3.1. A - матрица размера 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ii} - главная диагональ Определителем такой матрицы наз-ся число, равное:

$$|A| = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\ \text{(слагаемые, параллельные главной диагонали)} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}\ \text{(слагаемые, || побочной диагонали)}$$

Таким образом, **определитель матрицы** - это сумма произведений эл-ов матрицы, взятых по одному и ровно по одному слагаемому из каждой строки и из каждого столбца. Произведение имеет знак $+$, если оно || главной диагонали, иначе - побочной.

Утверждение 3.1. *Пусть* G *- базис в* V_3, $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta, \overline{c} \underset{G}{\longleftrightarrow} \gamma$, *тогда:*

$$V\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} V\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$$

Доказательство.

$$V\left(\sum_i \alpha_i\overline{e_i}, \sum_j \beta_j\overline{e_j}, \sum_k \gamma_k\overline{e_k}\right) = \sum_i\sum_j\sum_k \alpha_i\beta_j\gamma_k V\left(\overline{e_i}, \overline{e_j}, \overline{e_k}\right) =$$

Рассм.:

	i	j	k
1)	1	2	3
2)	2	3	1
3)	3	1	2
4)	2	1	3
5)	3	2	1
6)	1	3	2

$\Rightarrow$

$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 V\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right) + \alpha_2 + \beta_3\gamma_1 V\left(\overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_1}\right) + \alpha_3\beta_1\gamma_2 V\left(\overline{e_3}, \overline{e_1}, \overline{e_2}\right)$ (ЦИКЛ) $+$

$+\alpha_2\beta_1\gamma_3 V\left(\overline{e_2}, \overline{e_1}, \overline{e_3}\right) + \alpha_3\beta_2\gamma_1 V\left(\overline{e_3}, \overline{e_2}, \overline{e_1}\right) + \alpha_1\beta_3\gamma_2 V\left(\overline{e_1}, \overline{e_3}, \overline{e_2}\right)$ (ТРАНСПОЗИЦИЯ) $\Rightarrow$

$$= V\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)\left(\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2\right) =$$
$$= V\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right) * \det\left(\alpha^\uparrow, \beta^\uparrow, \gamma^\uparrow\right)$$

□

Следствие 3.1. *Если G - ОНБ, то:*

$$V\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \left|\alpha^\uparrow \quad \beta^\uparrow \quad \gamma^\uparrow\right|$$

$$S\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left|\alpha^\uparrow, \beta^\uparrow\right|$$

Следствие 3.2. *В произвольном базисе V_2 : $\overline{a}||\overline{b} \iff S\left(\overline{a}, \overline{b}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$*

V_3 : $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компл. $\iff \left|\alpha^\uparrow \quad \beta^\uparrow \quad \gamma^\uparrow\right| = 0$

Теорема 3.1 (Крамера, 1750 г.)**.** *Пусть дана СЛУ (система линейных ур-ий): 3-х ур-ий с 3-мя неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\end{cases}$$

Замечание.

$$\iff AX = B,$$
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Введём ОНБ G:

$$\overline{a_1} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} \\ \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{31}} \end{pmatrix}, \overline{a_2} \underset{G}{\longleftrightarrow} A_{*2}, \overline{a_3} \underset{G}{\longleftrightarrow} A_{*3}$$

Эта система явл. ***определённой*** $\iff |A| = \triangle \neq 0$

В этом случае, система имеет решение:

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, y = \frac{\triangle_y}{\triangle}, z = \frac{\triangle_z}{\triangle} \text{ (Формула Крамера)}$$

Доказательство. a) **Необходимое:** Пусть система опр. $\Rightarrow x_0\overline{a_1} + y_0\overline{a_2} + z_0\overline{a_3} = \overline{b}$ - имеет. ед. реш. Пусть $\det A = 0 \Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow$ ЛЗ $\Rightarrow$

$\exists$ нетрив. ЛК $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} = \overline{o}$, тогда:

$(\lambda_1+x_0)\overline{a_1}+(\lambda_2+y_0)\overline{a_2}+(\lambda_3+z_0)\overline{a_3} = \overline{b}-$ другое реш. системы $\Rightarrow$ противореичие!!!

b) **Достаточное**: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - не компл. $\Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ $\Rightarrow \overline{b}$ однозначно выр-ется черз $x\overline{a_1} + y\overline{a_2} + z\overline{a_3} = \overline{b}$

c) **Формулы:**

$$V(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{b}) = V(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, x\overline{a_1} + y\overline{a_2} + z\overline{a_3}) =$$
$$= xV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_1}) + yV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_2}) + zV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_3}) = ...$$

$\square$

Определение 3.2. СЛУ наз-ся **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Определение 3.3. СЛУ наз-ся **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Также она наз-ся:

- **Определённой**, если имеет **единственное** решение

- **Неопределённой**, если имеет **более одного** решения

3.1 Векторное произведение векторов

V_3: $\overline{a}, \overline{b} \in V_3 : [\overline{a}, \overline{b}]$ - мат., $\overline{a} \times \overline{b}$ - физ.

Определение 3.4. Векторное произведение вект. $\overline{a}, \overline{b}$ наз-ся вектор $\overline{c}$, т. ч.:

1) $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$

2) $|\overline{c}| = S_{||\text{-ма, образ.}\overline{a},\overline{b}} = \left|S(\overline{a}, \overline{b})\right|$

3) Тройка $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ - правая тройка

Замечание. *Если* $\overline{a}||\overline{b}$, *то* $\overline{c} = \overline{o}$

Теорема 3.2 (О связи векторного произв. с ориент. объёмом)**.**

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$$

Доказательство. $\overline{a}||\overline{b} \Rightarrow 0 = 0$ - верно

1) Пусть $\overline{a} \not|| \overline{b}$, тогда они образ. пл-ть α. Пусть $\overline{n}$ - вектор нормали к α:

$$\begin{cases} \overline{n} \perp \overline{a} \\ \overline{n} \perp \overline{b} \\ |\overline{n}| = 1 \end{cases} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}, \overline{n}) - \text{правая}$$

Было: $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c}) = (S(\overline{a}, \overline{b})\overline{n}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}]\overline{c})$

2)
$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{b}, \overline{c}], \overline{a}) = V(\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

□

Замечание. *Сочетание скалярного и векторного произведений также назыв.* ***смешанным:***

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) : \,:\, = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

Лемма 3.3. *Если* $\forall \overline{c} = V_3 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c})$, *то* $\overline{a} = \overline{b}$

Доказательство.

$$(\overline{a}-\overline{b},\overline{c})=0,\forall\overline{c}$$
$$\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}\Rightarrow$$
$$(\overline{a}-\overline{b},\overline{a}-\overline{b})=\overline{o}\Rightarrow\overline{a}=\overline{b}$$

□

Теорема 3.4 (О св-вах вект. произведения). *a)* $[\overline{a},\overline{b}]=-[\overline{b},\overline{a}]$ *- кососимметричность*

b) $[\overline{a},\overline{b_1}+\overline{b_2}]=[\overline{a},\overline{b_1}]+[\overline{a},\overline{b_2}]$

c) $[\overline{a},\lambda\overline{b}]=\lambda[\overline{a},\overline{b}]$

b), c) - линейность по II *аргументу.*

Доказательство. a) Пусть $\overline{a}\not\parallel\overline{b}$ (иначе очев.)

$(\overline{a},\overline{b},[\overline{a},\overline{b}])$ - правая тройка

$(\overline{b},\overline{a},[\overline{a},\overline{b}])$ - левая тройка $\Rightarrow$

$(\overline{b},\overline{a},-[\overline{a},\overline{b}])$ - правая тройка, при этом:

$(\overline{b},\overline{a},[\overline{b},\overline{a}])$ - правая тройка

Ч. Т. Д.

b) Докажем эквив. утв: $([\overline{a},\overline{b_1}+\overline{b_2}],\overline{c})=([\overline{a},\overline{b_1}]+[\overline{a},\overline{b_2}],\overline{c}),\forall\overline{c}$

$$([\overline{a},\overline{b_1}+\overline{b_2}],\overline{c})=(\overline{a},\overline{b_1}+\overline{b_2},\overline{c})=(\overline{a},\overline{b_1},\overline{c})+(\overline{a},\overline{b_2},\overline{c})=$$
$$=([\overline{a},\overline{b_1}],\overline{c})+([\overline{a},\overline{b_2}],\overline{c})=([\overline{a},\overline{b_1}]+[\overline{a},\overline{b_2}],\overline{c})$$

□

3.2 Запись векторного произведения в произвольном базисе

Теорема 3.5. *Пусть* G *- базис в* V_3*,* $\overline{a}\underset{G}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix},\overline{b}\underset{G}{\longleftrightarrow}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}$*. Тогда:*

$$[\overline{a},\overline{b}]=\begin{vmatrix}[\overline{e_2},\overline{e_3}] & \overline{[\overline{e_3},\overline{e_1}]} & [\overline{e_1},\overline{e_2}]\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$$

Доказательство.

$$[\overline{a},\overline{b}] = \left[\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\overline{e_i}, \sum_{i=1}^{3}\beta_i\overline{e_i}\right] = \sum_i\sum_j\alpha_i\beta_j[\overline{e_i},\overline{e_j}] =$$

Рассм.:

i	j
2	3
3	1
1	2

$$= (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)[\overline{e_2},\overline{e_3}] + (\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)[\overline{e_3},\overline{e_1}] + (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)[\overline{e_1},\overline{e_2}]$$

□

<u>Замечание</u>. *В упрощ. виде:*

$$[\overline{a},\overline{b}] = \begin{vmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3}\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}$$

3.3 Биортогональный базис

$V_3\colon G = (\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})$

<u>Определение</u> 3.5. Векторы

$$f_1 = \frac{[\overline{e_2},\overline{e_3}]}{(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})}, f_2 = \frac{[\overline{e_3},\overline{e_1}]}{(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})}, \overline{f_3} = \frac{[\overline{e_1},\overline{e_2}]}{(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3})}$$

наз-ся векторами **биортогонального** (к G) базиса

<u>Теорема</u> 3.6 (О св-вах биортогонального базиса)**.** *a)* $(\overline{f_1},\overline{f_2},\overline{f_3})$ *- базис в* V_3

b)

$$(\overline{f_i},\overline{e_j}) = \begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}$$

c) Если $\overline{v} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, *то* $\alpha = (\overline{v},\overline{f_1}), \beta = (\overline{v},\overline{f_2}), \gamma = (\overline{v},\overline{f_3})$