АлГем

Сергей Григорян

27 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 7

Определение 1.1. Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$

Двойным векторным произв. наз-ся выр-е: $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$

Теорема 1.1 (Тождество БАЦ-ЦАБ)**.**

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство. Выделим правый ОНБ след. образом:

$$\overline{e_1} || \overline{a}$$

$$\overline{e_2}, \text{т. ч. } (\overline{a}, \overline{b}, \overline{e_2}) - \text{компланарная сист.}$$

$$\overline{e_3} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

Тогда:

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \beta_2\gamma_3\overline{e_1} - \overline{e_2}\beta_1\gamma_3 + \overline{e_3}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_2\gamma_3 \\ -\beta_1\gamma_3 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta_2\gamma_3 & -\beta_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{vmatrix} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \\ -\alpha\beta_1\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{pmatrix} \alpha\beta_1\gamma_1 \\ \alpha\beta_2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha\beta_1\gamma_1 \\ \alpha\beta_1\gamma_2 \\ \alpha\beta_1\gamma_3 \end{pmatrix} = [\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$$

□

Следствие 1.1 (Тождество Якоби)**.**

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] + [\overline{b}, [\overline{c}, \overline{a}]] + [\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]] = \overline{o}, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$$

1.1 Понятие ур-я мн-ва. Задание прямой на пл-ти

V_2 или V_3 с фикс. ДСК.

Определение 1.2. Ур-ем мн-ва $M \subset V_i$ наз-ся высказывание, верное $\forall x \in M$ и неверное $\forall x \in V_i \setminus M$

V_2 с фикс. ДСК

Определение 1.3. Ненулевой вектор $\overline{a}$, кот. $||$ данной прямой l наз-ся её **направляющим вектором**.

Picture(2)

Векторное параметрическое ур-е прямой:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a}, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{r} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overline{r_0} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Коорд. параметрическое ур-е прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Каноническое ур-е прямой:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3} \tag{3}$$

Если $\alpha_2 = 0$:
$l \colon y - y_0 = 0$

Замечание. *Если одна из коор-т напр. вектора равна 0, то соотв. коор-т можно приравнять к начальной*

$$\alpha_2(x - x_0) - \alpha_1(y - y_0) = 0$$

При $A = \alpha_2, B = -\alpha_1$, имеем общее ур-е прямой на пл-ти:

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.1. *Пусть l задана общ. ур-ем (4), $X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in l$*

Тогда $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in l \iff A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$

Доказательство. a) Необходимое:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + C = 0 \\ Ax_1 + By_1 + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$$

b) Достаточное:

$$X_0 \in l \text{ и } A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax_1 + By_1 + C = 0$$

□

Следствие 1.2. *Вектор $\overline{b} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ явл. направляющим вектором l:*

$$Ax + By + C = 0 \iff Ap_1 + Bp_2 = 0$$

Доказательство. Picture(1) □

Теорема 1.2. *Пусть l: $Ax + By + C = 0$.*

Тогда любой напр. вектор этой прямой коллинеарен вектору $\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$, а в кач-ве начальной точки X_0 этой прямой можно взять:

$$X \begin{pmatrix} -\frac{AC}{A^2+B^2} \\ -\frac{BC}{A^2+B^2} \end{pmatrix}$$

Доказательство. a)

$$\lambda \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} - \text{вектор}$$

$$A(-\lambda B) + B(-\lambda A) = 0 \Rightarrow \text{напр.}$$

b)

$$-\frac{A^2C}{A^2+B^2} - \frac{B^2C}{A^2+B^2} + C = -C + C = 0$$

□

Следствие 1.3. *Все рассм. выше способы задания прямой l - эквивалентны.*

1.1.1 Случай ПДСК

(O, G) - ПДСК

Утверждение 1.2. $l\colon Ax + By + C = 0$
Тогда вектор $\overline{n} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \perp l$

Доказательство.

$$\overline{a} \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{n}, \overline{a}) = A(-B) + B(-A) = 0 \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{a}$$

□

Определение 1.4. Вектор $\overline{n}$ наз-ся вектором нормали к прямой l

Ур-е прямой с угловым коэффициентом (ПДСК): Picture (3) and (4)

Замечание. *Если $B \neq 0$ (и только в этом случае), то ур-е $l\colon Ax+By+C=0$ можно записать в виде:*

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{A}{B}$$

1.1.2 Признаки параллельности/перпендикулярности прямых на плоскости

Утверждение 1.3. *a) Прямые:*

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \iff k_1 = k_2$$

b) Прямые: $i = \overline{1,2}$*:* $A_ix+B_iy+C_i = 0$ *параллельны* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

Доказательство. a) Picture(5)

$$k_1 = \operatorname{tg}\phi = k_2$$

b)

$$l_1||l_2 \iff \overline{n_1}||\overline{n_2} \iff S(\overline{n_1},\overline{n_2}) = 0 \iff \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

□

Утверждение 1.4. *a) Прямые:*

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

перпендикулярны, при $k_1k_2 = -1$

b)

$$l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Доказательство. a)

$$\phi_1 = \phi_2 + \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{tg}\phi_1 = \operatorname{tg}(\phi_2 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\phi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\phi_2} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2 = -1 \iff k_1k_2 = -1$$

b)

$$l_1 \perp l_2 \iff (\overline{n_1},\overline{n_2}) = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

□

Утверждение 1.5. *Прямые* $l_1\colon A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2\colon A_2x+B_2y+C_2=0$

a) *Пересекаются по одной точке* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) *Параллельны (включая совпадение)* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

c) *Совпадают* $\iff$ *ур-я пропорциональны*

Доказательство.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

a) Единственное решение при $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) Противоположность $a)$: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

c) Пусть $l_1 = l_2 \Rightarrow$

$$A_1B_2 = B_1A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \end{cases} \quad (\text{где } \lambda \neq 0, \lambda \neq \infty)$$

□

Определение 1.5. Полупл-тью, определяемой прямой l и вектором нормали $\overline{n}$, наз-ся мн-во всех точек x пл-ти, т. ч. вектор $\overline{X_0X}$ составляет с вектором $\overline{n}$ угол $\leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos\phi \geq 0 \iff (\overline{X_0X_1}, \overline{n}) \geq 0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0) \geq 0$$

$$Ax_0+By_0 = 0 \Rightarrow Ax+By+C \geq 0$$

Picture (7)

2 Лекция 8

2.1 Пучок прямых на пл-ти

V_2, с фикс. ДСК

Определение 2.1. Пучком пересекающихся прямых на пл-ти наз-ся мн-во всех прямых на пл-ти, проходящих через. фикс. точку.

Определение 2.2. Пучком параллельных прямых на пл-ти наз-ся мн-во всех прямых пл-ти, параллельных некоторой фикс. прямой.

Теорема 2.1. *Пусть даны две различные прямые l_1, l_2 на пл-ти:*

$$l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = f_1(x, y) = 0$$

$$l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = f_2(x, y) = 0$$

Тогда пучок прямых, задаваемый (порождаемый) прямыми l_1 и l_2 состоит из тех и только тех прямых, коор-ты точек которых удовл. ур-ю:

$$\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0 \tag{5}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$$

Выр-е $\alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) \not\equiv 0$

Доказательство. а) Пусть $l_1 \cap l_2 = \{ x_0 \}$

Покажем, что всякая прямая l, коор-ты точек кот. удовл. ур-ю (5), принадлежит пучку, порождаемому l_1, l_2

По усл.:

$$f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha f_1(x, y) + \beta f_2(x, y) = 0$$

$\Rightarrow l$ проходит через x_0

Пусть l такова, что она принадлежит пучку, порожд. l_1, l_2. Покажем, что $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, такие, что l задаётся ур-ем (5)

Пусть $X \in l, X \neq x_0$:

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$

$$f_2(X)f_1(x,y) - f_1(X)f_2(x,y) = 0 \tag{6}$$

Если подставим X:

$$f_2(X)f_1(X) - f_1(X)f_2(X) = 0$$

прямая (6) проходит через X_0 и $X \Rightarrow$ это прямая l.

b) Пусть $l_1 || l_2 \iff \overline{n_1} || \overline{n_2}$

Пусть прямая l такова, что её коорд. удовл. усл. (5) $\Rightarrow$

$$\overline{n_l} = \alpha\overline{n_1} + \beta\overline{n_2}, \overline{n_l} || n_1, n_2$$

Обратно: пусть l принадлежит пучку параллельных прямых, порожд. l_1 и l_2

$$\alpha = f_2(X), \beta = -f_1(X)$$
$$\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y) = 0$$
$$f_2(X)f_1(x,y) - f_1(X)f_2(x,y) = 0, \text{ (при } X \text{ равно } 0)$$
$$\Rightarrow \overline{n} || \overline{n_1}, \overline{n_2}$$

Определение 2.3. Ур-е (5) наз-ся ур-ем пучка прямых, порожд. l_1 и l_2

□

2.2 Приложения в планиметрии

2.2.1 Расстояние от точки до прямой

Обозначение. *Расстояние от точки до прямой ($p(X,l)$)*

Утверждение 2.1. *Пусть прямая l в ПДСК задана общим ур-ем $Ax + By + C = 0$. Пусть $X \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Тогда:*

$$p(X,l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Доказательство. Пусть $\overline{a} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$

(Picture 2.1)

$$p(X, l) = h = \frac{S_{\overline{a} \times \overline{X_0 X}}}{|\overline{a}|}$$

$$S_{\overline{a} \times \overline{X_0 X}} = S = \left| \begin{vmatrix} x - x_0 & -B \\ y - y_0 & A \end{vmatrix} \right| = |A(x - x_0) + B(y - y_0)| = |Ax + By - (Ax_0 + By_0)| = |Ax + By$$

$$\Rightarrow p(X, l) = \frac{S}{|\overline{a}|} = \frac{|Ax + By + C|}{A^2 + B^2}$$

□

2.2.2 Вычисление угла между пересекающимися прямыми

Определение 2.4. Углом между двумя пересекающимися прямыми наз-ся наименьший из двух смежных углов, порождённый пересечением прямых.

Picture(2.2) **Вычисление**:

$$l_i \colon A_i x + B_i y + C_i = 0, i = 1, 2$$

$$\overline{n_1} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \overline{n_2} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

$$\phi = \angle(\overline{n_1}, \overline{n_2})$$

$$\phi = \begin{cases} \psi, \text{ если } \psi \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \psi, \text{ если } \psi > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\cos\phi = |\cos\phi| = |\cos\psi| =$$

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \colon \ |\cos(\pi - \phi)| = |-\cos\psi| = |\cos\psi| = \frac{|(\overline{n_1}, \overline{n_2})|}{|\overline{n_1}|\,|\overline{n_2}|} =$$

$$\frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Утверждение 2.2. *Косинус угла между двумя пересек. прямыми:*

$$l_i \colon A_i x + B_i y + C_i = 0$$

Может быть вычислен по формуле:

$$\cos\phi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

2.3 Пл-ть в пр-ве

V_3, с фикс. ДСК (O, G)

<u>Определение</u> 2.5. Направляющий векторы пл-ти - это пара неколлинеарных векторов, задающих эту пл-ть.

Picture (2.3)

Пусть α - наша пл-ть, $X_0 \in \alpha$, $\overline{a}, \overline{b}$ - напр. векторы α

$$\overline{X_0X}, \overline{a}, \overline{b} \text{ - коллинеарны } \iff X \in \alpha$$
$$\Rightarrow \overline{X_0X} = s\overline{a} + t\overline{b}; s, t \in \mathbb{R}$$
$$\overline{r} - \overline{r_0} = s\overline{a} + t\overline{b}$$
$$\overline{r} = \overline{r_0} + s\overline{a} + t\overline{b} \tag{7}$$

- векторное ур-е прямой

$$\overline{a} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$\overline{b} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} x = x_0 + sa_1 + tb_1 \\ y = y_0 + sa_2 + tb_2 \\ z = z_0 + sa_3 + tb_3 \end{cases} \tag{8}$$

- координатное ур-е прямой

$$(\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{a}, \overline{b}) = 0 \tag{9}$$
$$\iff \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & b_1 \\ y - y_0 & a_2 & b_2 \\ z - z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

Если раскроем определитель по соотв. формуле:

$$Ax + By + Cz + D = 0, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \text{ (т. к. иначе } \overline{a} || \overline{b}) \tag{11}$$

- общее ур-е пл-ти

Утверждение 2.3. *Пусть* $X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *принадлежит пл-ти, заданной общ. ур-ем (11). Тогда т.* $X_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *принадлежит пл-ти* π

$$\iff A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) = 0$$

Доказательство. Аналогично прямой □

Следствие 2.1. *Вектор* $\overline{c} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ *- направляющий вектор пл-ти* $\pi \iff A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$

Доказательство. Т. пл-ти X_0 - начало $\overline{c}$, а X_1 - конец $\overline{c}$

$$\overline{c}||\pi \iff X_1 \in \pi \iff A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \iff$$

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

□

Следствие 2.2. *Пусть, для определённости,* $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$. $A \neq 0$ *(Б. О. О.) Тогда векторы:*

$$\begin{pmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -C \\ 0 \\ A \end{pmatrix}$$

Ненулевые, неколлинеарны и параллельны пл-ти π, *т. е. они могут быть выбраны в кач-ве напр. векторов* π

В кач-ве нач. точки X_0 *можно взять точки с коор-т* $\begin{pmatrix} -\frac{D}{A} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Следствие 2.3. *Все указанные методы задания пл-ти эквивалентны*

Пусть теперь (O, G) - прямоугольная (ПДСК)

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \iff \begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = (\overline{c}, \overline{n}) = 0$$

Где $\overline{n} \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$

Определение 2.6. $\overline{n}$ наз-ся вектором нормали к пл-ти π

Утверждение 2.4. *В ПДСК вектор нормали $\overline{n}$ к π ортогонале любому вектору, параллельному π*

Пусть теперь (O, G) - произвольная ДСК.

Определение 2.7. Тогда вектор, сопоставленный пл-ти $Ax + By + Cz + D = 0$, с коор-тами $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$ наз-ся **сопутствующим вектором пл-ти**.

Утверждение 2.5. *Плоскости $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0, i = 1, 2,$ с сопутствующими векторами, соотв. $\overline{n_1}, \overline{n_2}$ параллельны тогда и только тогда, когда:*

$$\overline{n_1} || \overline{n_2}$$

Пл-ти π_1, π_2 совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны

Доказательство.

a) Усли ур-я пропорциональны $\Rightarrow \pi_1 = \pi_2$

b) Пусть $\overline{n_1} || \overline{n_2}$ и при этом ур-я не пропорциональны, покажем, что $\pi_1 || \pi_2$ и $\pi_1 \not\equiv \pi_2$

Доказательство.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda, \text{ но } \frac{D_1}{D_2} \neq \lambda \iff D_1 - \lambda D_2 \neq 0$$

$$\lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (\lambda D_2 - D_1)$$

$\Rightarrow \nexists X_0 \colon X_0 \in \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \pi_1 || \pi_2$ $\square$

c) Пусть $\overline{n_1} \not\parallel \overline{n_2}$

Покажем, что пл-ти пересекаются:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ z = z_0 \end{cases} \iff \begin{cases} A_1x + B_1y = -D_1 - C_1z_0 \\ A_2x + B_2y = -D_2 - C_2z_0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \exists! X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ удовл. системе}$$

При этом пл-ти π_1 и π_2 не совпадают:

Доказательство. Пусть $\pi_1 \equiv \pi_2$:

$$\begin{cases} z = 0 \\ A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ПРОТИВОРЕЧИЕ}$$

□

□