Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

19 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 2

1.1 Отображения и соответствия

Определение 1.1. Соответствие (или многозначная ф-ция, или точечно-множ. отображение) - подмн-во декартова произведения мн-в $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$.

$\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ - соответствие между $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$

Замечание. Непустозначное соответствие: $\forall x, \exists y : (x, y) \in F$

Картинки графика и двудольного графа

Определение 1.2. Отображение - однозначное соотв.

$$\forall x, \exists! y : (x, y) \in f$$

$$\forall\text{- для любого}, \exists! - \text{существует единственный}$$

Определение 1.3. Частично определённая ф-ция:

$$\forall x : (\neg \exists y : (x, y) \in F) \vee (\exists! y : (x, y) \in F)$$

Определение 1.4. Инъекция - отображение, т. ч. $\forall x, y (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$

Определение 1.5. $f(x)$ - тот элемент $z : (x, z) \in f$

Определение 1.6. $F(x)$ - образ $x \iff F(x) = \{z : (x, z) \in F\}$

Определение 1.7. Инъективные соответствия:

$$\forall x, y (x \neq y \rightarrow F(x) \cap F(y) = \emptyset)$$

Определение 1.8. Сюрьекция - отображение, т. ч. $\forall y, \exists x (y = f(x))$

Определение 1.9. Сюрьективное соответствие:

$$\forall y, \exists x : (x, y) \in F$$

Или по другому: $\forall y, \exists x : y \in F(x)$

Определение 1.10. Биекция - отображение, которое одновременно сюрьекция и инъекция.

Биекция = отображение + сюрьекция + инъекция

Замечание. Отдельного понятия биективного соответствия нет.

Определение 1.11. Обратное соответствие $F \subset A \times B$ - $F^{-1} \subset B \times A$:

$$(x, y) \in F \iff (y, x) \in F^{-1}$$

Теорема 1.1. F - Биекция $\iff$ F - взаимнооднозначное соответствие (т. е. F и F^{-1} - отображения)

Замечание. Частично опред. ф-ция + непустознач. соотв = отображение

Доказательство.

- F явл. инъективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ частично опред. ф-ция.
- F явл. сюрьективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ непустозначное соотв.

□

1.2 Образ и прообраз

Определение 1.12. Пусть $S \subset A$. Тогда образ S:

- Для отображения: $f(S) = \{f(x) | x \in S\}$
- Для соотв.: $F(S) = \bigcup_{x \in S} F(x)$

Определение 1.13. Пусть $T \subset B$. Тогда прообраз T:

- Для отображения: $f^{-1}(T) = \{x | f(x) \in T\}$
- Для соотв.: $F^{-1} = \{x | F(x) \cap T \neq \emptyset\}$

Утверждение 1.1. $F(S \cap Q) \subset F(S) \cap F(Q)$

Доказательство. Пусть $y \in F(S \cap Q) \Rightarrow \exists x \in S \cap Q : \ y \in F(x)$:

$$\begin{cases} \exists x \in S : \ y \in F(x) \\ \exists x \in Q : \ y \in F(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow y \in F(S) \cap F(Q)$$

□

Утверждение 1.2 (Обратное.). Если F - инъективно, то

$$F(S) \cap F(Q) \subset F(S \cap Q)$$

Доказательство.

$$y \in F(S) \cap F(Q) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in S: \ y \in F(x_1) \\ \exists x_2 \in Q: \ y \in F(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow \text{Нарушает инъективность}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x \Rightarrow \exists x \in S \cap Q: \ y \in F(x)$$

□

1.3 Композиция

Определение 1.14. Композиция отображений $f \circ g$, опр. так:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Определение 1.15. Композиция соотв. $F \circ G$

$$\begin{cases} F : B \to C \\ G : A \to B \end{cases} \Rightarrow F \circ G(x) = F(G(x))$$

Причём $G(x)$ - это мн-во значений $\Rightarrow$ $F(G(x))$ - образ $G(x)$

Или, эквив.: $(x, z) \in F \circ G \iff \exists y((x, y) \in G \wedge (y, z) \in F)$

Свойства композиции:

1) Ассоциативность: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

2) Отсутствие коммутативности (в общем случае): $F \circ G \neq G \circ F$

Обозначение. Тождественное отображение:

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(x) = x$$

$$G : A \to B \Rightarrow G \circ id_A(x) = id_B \circ G(x) = G(x)$$

Утверждение 1.3. Если $F : A \to A$ - биекция, то:

$$F \circ F^{-1} = id_A = F^{-1} \circ F$$

Обозначение. Мн-во всех отображений из A в B будем называть B^A

Утверждение 1.4. Если $|A| = n$ и $|B| = k$, то $|B^A| = k^n$

Теорема 1.2. Пусть A, B, C - мн-ва. Тогда:

1) $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$
2) $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C, B \cap C \neq \emptyset$
3) $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$

Доказательство. 1)

$$\begin{cases} f : C \to A \\ g : C \to B \end{cases} \longleftrightarrow h : C \to A \times B, h(x) = (f(x), g(x))$$

2)

$$\begin{cases} f : B \to A \\ g : C \to A \end{cases} \longleftrightarrow h : B \cup C \to A \Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x), x \in B \\ g(x), x \in C \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} f : B \times C \to A \\ g : C \to A^B \end{cases} \Rightarrow g(x) : B \to A \Rightarrow g(x)(z) = f(z, x)$$

□

2 Лекция 3

2.1 Мощности мн-в

2.1.1 Парадоксы

Парадокс Галилея:

Все нат. числа	$\not\supseteq$	полные квадаты
n	$\longleftrightarrow$	n^2

Гранд-отель Гильберта:

1	2	3	4	5	6	7	...

1) Все места заняты, нужно подселить постояльца:

Решение.

Новый	$\to$	0
i	$\to$	$(i+1)$

2) Есть своб. места, хотим занять все комнаты имеющимися постояльцами:

Решение. Если мн-во занятых комнат бесконечно, то:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	...

(1 - занято, 0 - свободно) $\Rightarrow$
Переносим 1 в самый ранний 0 для всех 1

3) 2 гранд-отеля, полностью заняты. Один закрылся, как всех заселить?

Решение.

0	1	2	3	4	5	...

a	b	c	d	e	f	...

$\Rightarrow$

0	a	1	b	2	c	...

4) Гранд-авеню, гранд-отелей. Цель: переселить всех в один отель:

Решение.

Отель 0: $\mapsto$ неч. номера

Отель 1: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\ 2, \not\vdots\ 4$

Отель 2: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\ 4, \not\vdots\ 8$

Отель k: $\mapsto$ номера, кот $\vdots\ 2^k, \not\vdots\ 2^{k+1}$

2.1.2 Счётных мн-в

Определение 2.1. A и B равномощны ($A \cong B$), если $\exists$ биекция $f : A \to B$

Определение 2.2. A наз-ся счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

Утверждение 2.1. 1) A счётно $\Rightarrow A \cup x$ счётно

2) Любое подмн-во счётного мн-ва конечно или счётно

3) A, B счётны $\Rightarrow A \cup B$ счётно

4) $A_0, A_1, \ldots$ - сч. $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ - сч.
или: A, B - сч. $\Rightarrow A \times B$ - сч.

Доказательство. 1) $f : A \to \mathbb{N}$ - биекция

$$g : A \cup \{ x \} \to \mathbb{N} :$$

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ g(y) = f(y) + 1, y \in A \end{cases}$$

2)

$$f : A \to \mathbb{N}, \text{- биекция}; B \subset A$$

$$g : B \to \mathbb{N}; g(x) = \# \{ y \in B \mid f(y) < f(x) \}$$

3)

$$f : A \to \mathbb{N}; g : B \to \mathbb{N}$$

$$h : A \cup B \to \mathbb{N}; h(x) = \begin{cases} 2f(x), x \in A \\ 2g(x) + 1, x \in B \end{cases}$$

4)

$$f : A \to \mathbb{N};$$

$$g : B \to \mathbb{N};$$

$$h : A \times B \to \mathbb{N}; h(x, y) = 2^{f(x)} * (2g(y) + 1) - 1$$

□

2.1.3 Отношение равномощности

Утверждение 2.2. Общие св-ва равномощности:

1) Рефлексивность: $A \cong A$

   (т. к. id_A - биекция)

2) Симметричность: $A \cong B \iff B \cong A$

   (f - биекция $\iff f^{-1}$ - биекция)

3) Транзитивность: $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

   (т. к. композиция биекций - биекция)

2.1.4 Сравнимость по мощности

Обозначение.
- Нестрогая: $A \lesseqqgtr B$, если $\exists B' \subset B, A \cong B'$

  (A не более мозно чем B)

- Строгая: $A \lessapprox B$, если $A \lesseqqgtr B, A \ncong B$

  (A менее мощно чем B)

Утверждение 2.3. Св-ва сравнимости по мощ-ти:

1) Рефлексивность: $A \lesseqqgtr A$; Антирефлексивность: $A \not\lessapprox A$

2) Транзитивность: $A \lesseqqgtr B, B \lesseqqgtr C \Rightarrow A \lesseqqgtr C$

   Для строгой сравнимости:

   Доказательство.
$$A \lessapprox B, B \lessapprox C \Rightarrow A \lessapprox C$$
$$A \lesseqqgtr C \text{ - из предыдущего}$$
   Нужно: $A \cong C$ □

Теорема 2.1 (Теорема Кантора-Бернштейна).

$$A \leq B, B \leq A \Rightarrow A \cong B$$

Доказательство. 1) Пусть $f : A_0 \to B_1 \subset B_0$ - биекция
$g : B_0 \to A_1 \subset A_0$ - биекция

2) $B_{i+1} = f\left(A_i\right); A_{i+1} = g\left(B_i\right)$

3) $C_i = A_i \backslash A_{i+1}; D_i = B_i \backslash B_{i+1}$

4) $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i; D = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Утверждение 2.4. $C_i \cong D_{i+1}$, т. е. $f : C_i \to D_{i+1}$ - биекция

Почему? Потому что:

$$C_i = A_i \backslash A_{i+1}; f\left(A_i\right) = B_{i+1}, f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+2}$$

$f\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) =$ (т. к. f - биекция) $f\left(A_i\right) \backslash f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+1} \backslash B_{i+2} = D_{i+1} = f\left(C_i\right)$

Утверждение 2.5.

$$D_i \cong C_{i+1} \text{ (симметричо)}$$

Следствие.

$$C_0 \cong C_2 \cong C_4 \cong C_6 \cong \dots$$
$$C_0 \cong D_1 \cong D_3 \cong D_5 \dots$$

Утверждение 2.6.

$$C \cong D$$

Доказательство. f - биекция

Пусть $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \forall i, x \in A_i \Rightarrow \forall i, f(x) \in B_{i+1} \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Т. е. $f(C) \subset D$:

Инъекция - наследуется

Сюрьекция: $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \Rightarrow \forall i, y \in B_{i+1} \Rightarrow \forall i, f^{-1}(y) \in A_i \Rightarrow f^{-1}(y) \in C$ □

$$A = C \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$
$$B = D \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \dots$$

При этом:

$$\begin{cases} C \cong D \\ \begin{cases} C_0 \cong D_1 \\ C_1 \cong D_0 \end{cases} \\ \begin{cases} C_2 \cong D_3 \\ C_3 \cong D_2 \end{cases} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow A \cong B$$

□