Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

13 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 10

1.1 Напоминание

σ - сигнатура, сост. из функц. и пред. символов. и им соотв. валентности.

$$\mu = (M, I_M), I_M \text{ - соотв. символам } \sigma \text{ функций и предикатов}$$

$$\pi \colon Var \to M$$

$$[\phi]_M(\pi) - ?$$

Рекурсия по постр.ϕ:

1)
$$\phi = P(t_1, \ldots, t_n)$$
$$[\phi]_M(\pi) = [P]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M(\pi))$$

2)
$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge, \vee, \to}{(operation)} \psi_1), \phi = \neg\psi \text{ - аналогично.}$$
$$[\phi]_M(\pi) = \underset{OR, IMPL}{AND}([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi))$$

3)
$$\phi = \exists x, \psi$$
$$[\phi]_M(\pi) = 1 \iff \text{ найдётся } a \in M, \text{ т. ч. } [\phi]_M(\pi_{x \to a}) = 1$$
$$[\phi]_M(\pi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a})$$
$$\pi_{x \to a}(y) = \begin{cases} \pi(y), y \neq x \\ a, y = x \end{cases}$$

4) Аналогично (3), но с $\bigwedge$ вместо $\bigvee$

Определение 1.1. Параметры терма t:

1)
$$t = x \in Var \Rightarrow Par(t) = \{ x \}$$

2)
$$t = c \text{ - константа из } \sigma \Rightarrow Par(t) = \emptyset$$

3)

$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ - функциональный символ вал-ти } n \Rightarrow Par(t) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

<u>Определение</u> 1.2. Параметры формулы ϕ:

1)

$$\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow Par(\phi) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

2)

$$\phi = \neg\psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi)$$

3)

$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge,\vee,\rightarrow}{(operation)} \psi_1) \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi_0) \cup Par(\psi_1)$$

4)

$$\phi = (\exists/\forall)x, \psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi) \{ x \}$$

<u>Теорема</u> 1.1. *a) Если π, π' — оценки и для любой пер. $x \in Par(t), \pi(x) = \pi'(x)$, то $[t]_M(\pi) = [t]_M(\pi')$*

b) Если π, π' - оценки, т. ч. для $\forall x \in Par(\phi), \pi(x) = \pi'(x)$ то $[\phi]_M(\pi) = [\phi]_M(\pi')$

Доказательство. a) Индукция по пост. t:

1)

$$t = x \Rightarrow [t]_M(\pi) = \pi(x) = \pi'(x) = [t]_M(\pi')$$

2)

$$t = c \Rightarrow [t]_M(\pi) = [c]_M = [t]_M(\pi')$$

3)

$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ — функциональный символ вал-ти } n$$

$$Par(t_i) \subset Par(t)$$

$$[t]_M(\pi) = [f]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M(\pi)) =$$

$$= [f]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [t]_M(\pi')$$

b) Индукция по построению ϕ:

1) $\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow [\phi]_M(\pi) =$

$= [P]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M[\pi]) = [P]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi'))$

2) $\phi = (\psi_0 \wedge \psi_1) \Rightarrow [\phi]_M[\pi] = AND([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi)]) = And([\psi_0]_M(\pi'), [\psi_1]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi')$ Аналогично для других операций и для отрицания.

3) $\phi = \exists x, \psi$

$$Par(\phi) = Par(\psi) \setminus \{ x \}$$

$[\phi]_M(\psi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a}) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi'_{x \mapsto a}) = [\phi]_M(\pi')$

4) $\phi = \forall x, \psi$ - аналогично 3)

$\square$

2 Лекция 11

Определение 2.1. Предварённая нормальная формула :

$$\underbrace{\exists\forall\exists\exists\forall\ldots}_{\text{Кванторы}} \underbrace{(\ldots)}_{\text{Бескванторная формула}}$$

Теорема 2.1. *У любой ф-лы 1-ого порядка $\exists$ эквив. ей формула в предв. нормальной форме.*

Доказательство. Будем проводить эквив-ные преобразования:

1) $\neg\exists x\phi \sim \forall x\neg\phi$

$$\neg\forall x\phi \sim \exists x\neg\phi$$

2) $(\forall x\phi \wedge \forall x\psi) \sim \forall x(\phi \wedge \psi)$

$$(\exists x\phi \vee \exists x\psi) \sim \exists x(\phi \vee \psi)$$

3)

$$\exists x(\phi \wedge \psi) \to (\exists x\phi \wedge \exists x\psi)$$

Это не эквивалентность! Поэтому нельзя применять

$$(\forall x\phi \vee \forall x\psi) \to \forall x(\phi \vee \psi)$$

Нужно сделать замену переменной.

$$\exists x\phi \sim \exists y\underline{\phi(y/x)}$$

Получили ф-лу ϕ с подстановкой y вместо x.

$$\phi(y/x) \text{ — } \textbf{все свободные вхожд. } x \textbf{ замен-ся на } y$$

! При этом, эти вхождения не должны подпадать под д-ие кванторов по y, и y не входит свободно в ф-лу ϕ.
Рассм. примеры некорректных подстановок:

1) $\exists x\forall y A(x,y) \not\to \exists y\forall y A(y,y)$
2) $\exists x A(x,y) \not\to \exists y A(y,y)$

Иначе, замена на новую переменную корректна.

4) $(\exists x\phi) \wedge \psi \sim \exists x(\phi \wedge \psi)$, причём $x \notin Params(\psi)$

$(\exists x\phi \wedge \psi) \sim \exists y\phi(y/x) \wedge \psi \sim \exists y(\phi(y/x) \wedge \psi)$, если $x \in Params(\psi)$, y не встречается в ϕ и ψ

$\exists\phi \vee \psi \sim \exists x(\phi \vee \psi), \forall$ — аналог.

$(\exists x\phi \to \psi) \sim \forall x(\phi \to \psi)$

$(\psi \to \exists x\phi) \sim \exists x(\psi \to \phi)$

$\square$

Замечание. *Значение ф-лы зависит только от значения её параметров.* $\Rightarrow$ *Ф-ла с k пар-рами при фикс. интерпретации задаёт k-местный предикат.*

Определение 2.2. Предикат наз-ся **выразимым** в данной интерпретации, если его можно задать ф-лой 1-ого порядка.

Пример. $(\mathbb{N}, S, =), S(n) = n+1$. *Тогда:*

$$x = 0 \iff \neg\exists y\colon x = S(y)$$

$$x = 1 \iff \exists y\colon (x = S(y) \wedge \underbrace{\qquad y = 0 \qquad}_{\text{Здесь подставляем строчку выше}})$$

Пример. $(\mathbb{N}, \cdot, =)$
$x = 0 \iff \forall y \cdot x = x$
$x = 1 \iff \forall y \cdot x = y$

$$x \colon y \iff \exists z (x = y \cdot z)$$

$$p \text{ — } \textit{простое} \iff (p \neq 1 \wedge \forall q (p \vdots q \to (q = 1 \vee q = p)))$$

$$d = gcd(x, y) \iff (x \vdots d \wedge y \vdots d \wedge \forall k ((x \vdots k \wedge y \vdots k) \to d \vdots k))$$

$$d = lcm(x, y) \iff (c \vdots x \wedge c \vdots y \wedge \forall k ((k \vdots x \wedge k \vdots y) \to k \vdots c))$$

Пример. $(2^A, \subset)$

$$x = y \iff (x \subset y \wedge y \subset x)$$

$$x = \emptyset \iff \forall y \colon x \subset y$$

$$|x| = 1 \iff (\neg(x = \emptyset) \wedge \forall y (y \subset x \to (y = \emptyset \vee y = x)))$$

$$z = x \cup y \iff (x \subset z \wedge y \subset z \wedge \forall t ((x \subset t \wedge y \subset t) \to (z \subset t)))$$

Пример. *Метрическая геометрия:*

$(\mathbb{R}^2, E), E(x, y)$ — *значит, что* $|x - y| = 1$*, т. е. расстояние от точки* x *до* $y = 1$

$$x = y \iff \forall z (E(x, z) \to E(y, z))$$

$$|x - y| = 2 \iff \exists! z (E(x, z) \wedge E(y, z))$$

Или:

$$\exists z ((E(x, z) \wedge E(y, z)) \wedge \forall t ((E(x, t) \wedge E(y, t)) \to t = z))$$

$$|x - y| = \sqrt{3}$$

Рисуем прямоугольный треугольник с гипотенузой длины $= 2$ *и катетом длины* $= 1$*. Тогда катет от* x *до* y *имеет длину* $\sqrt{3}$

$$\exists z \exists t (E(x, z) \wedge E(z, t) \wedge E(x, t) \wedge E(y, t) \wedge |y - z| = 2)$$

Пример. $(\mathbb{N}, S, =)$

$$y = x + k, k \text{ — } \textit{параметр}$$

$$y = \underbrace{S(S(S(\ldots(S(x)))))}_{k \text{ раз}}$$

$$y = x + k \iff \exists z (y = z + \frac{k}{2} \wedge z = x + \frac{k}{2})$$

$$\iff \exists z \forall u \forall v \left(((u = y \land v = z) \lor (u = z \land v = x)) \to u = v + \frac{k}{2} \right)$$

$$len(k) = len(\frac{k}{2}) + C$$

$$k = 1 \text{ — база индукции}, y = x + 1 \iff y = S(x)$$

Общая длина: $C \log_2 k$

$$k \text{ — нечётно} \Rightarrow y = x + k \iff \exists z (y = S(z) + \frac{k-1}{2} \land z = x + \frac{k-1}{2})$$