АлГем

Сергей Григорян

6 декабря 2024 г.

Содержание

1 Лекция 21 (СКИП))

2 Лекция 22

2.1 Сопряжённое пр-во

V - ЛП над F

$$f : V \to F$$

Определение 2.1. f — **линейный функционал** (ЛФ), если соблюдаются:

1) Аддитивность:

$$\forall x, y \in V\colon f(x+y) = f(x) + f(y)$$

2) Однородность:

$$\forall \lambda \in F, \forall x \in V\colon f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Определение 2.2. V^* —

3 Лекция 24(вроде)

Утверждение 3.1. *ЛО* $\phi : U \to V$ *— инъективно* $\iff \ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$

Доказательство.

- Необх.: пусть ϕ - инъективно $\Rightarrow \forall x \neq \overline{0} \hookrightarrow$

$$\phi(x) \neq \phi(\overline{0}) = \overline{0} \Rightarrow \ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$$

- Дост.: пусть $\ker\phi = \{\,\overline{0}\,\}$. Покажем, что ϕ - инъективно. Пусть $\exists x_1, x_2 \in V\colon \phi(x_1) = \phi(x_2)$

$$\hookrightarrow \phi(x_1) - \phi(x_2) = \phi(x_1 - x_2) = \overline{0} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\square$

Следствие 3.1. *Пусть* $\phi\colon V \to W$ *— ЛО, кот. удовл. одному из двух условий экв-ных условий утв-я* (3.1)*. Тогда* ϕ *переводит ЛНЗ в ЛНЗ.*

Доказательство. Пусть система $x_1, \ldots, x_n$ — ЛНЗ. От прот., пусть:

$$\phi(x_1), \ldots, \phi(x_n) \text{ — ЛЗ}$$

Тогда $\exists$ нетрив. ЛК:

$$\lambda_1\phi(x_1) + \lambda_2\phi(x_2) + \ldots + \lambda_n\phi(x_n) = \overline{0}$$

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \overline{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \overline{0} \in \ker\phi, \exists i\colon \lambda_i \neq 0$$

Прот. с тем, что $x_1, \ldots, x_n$ — ЛНЗ. $\square$

Теорема 3.1 (Теорема о гомоморфизмах ЛП)**.** *Пусть $\phi\colon V \to W$ - ЛО. Пусть $V = \ker\phi \oplus U$. Тогда $\exists$ канонический изоморфизм пр-в U на $\operatorname{Im}\phi$. Более того, если:*

$$\phi|_U\colon U \to \operatorname{Im}\phi \text{ — } \textit{изоморфизм}$$

Доказательство. $\phi(U) \subseteq \operatorname{Im}\phi$. ...??? $\square$

Теорема 3.2 (О ядре и образе ЛО)**.** *$\phi\colon V \to W$ — ЛО. Тогда справ-во:*

$$\dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi = \dim V$$

Доказательство. Пусть, как в теореме (3.1), $V = \ker\phi \oplus U$:

$$\phi|_U\colon U \to \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \dim V = \dim\operatorname{Im}\phi$$

По т. (3.1):

$$\dim V = \dim\ker V + \dim V = \dim\ker\phi + \dim\operatorname{Im}\phi$$

$\square$

Замечание. *Верно ли, что если $\phi\colon V \to V$, то $\hookrightarrow V = \ker\phi \oplus \operatorname{Im}\phi$. Нет, это не так.*

Определение 3.1 (Матрицы ЛО)**.** $\phi\colon V \to W$. Пусть

$$G = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} \text{ — базис } V$$

$$G' = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} \text{ — базис } W$$

$$W \ni \phi(e_1) = a_{11}f_1 + \dots a_{m1}f_m$$
$$\vdots$$
$$\phi(e_n) = a_{n1}f_1 + \dots + a_{nm}f_m$$
$$A_\phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(F)$$

Можно записать иначе:

$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) \\ \vdots \\ \phi(e_n) \end{pmatrix} = A_\phi^T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \phi(e_1) & \dots & \phi(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix} A_\phi$$
$$\phi(G) = f \cdot A_\phi$$

Определение 3.2. Построенная матрица A_ϕ наз-ся матрицей ЛО ϕ отн-но базисов G и G'

$$\phi \underset{(G,G')}{\longleftrightarrow} A_\phi$$

Утверждение 3.2.

$$\phi\colon V \to W$$

Пусть G — базис в V, f — базис в W

$$\phi \underset{(G,G')}{\longleftrightarrow} A_\phi, V \ni x \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \phi(x) \underset{f}{\longleftrightarrow} \beta$$

Тогда $\beta = A_\phi \alpha$

Доказательство.

$$x = G\alpha, \phi(x) = f\beta$$
$$\phi(x) = \phi(G\alpha) = \phi(G)\cdot\alpha = f \cdot A_\phi \cdot \alpha \Rightarrow \beta = A_\phi\alpha$$

□

3.1 Операции над ЛО

Пусть $\mathcal{L}(V,W)$ — мн-во всех ЛО из V в W. (или $\hom(V,W)$)

$$\phi,\psi \in \mathcal{L}(V,W)$$

$$\Rightarrow (\phi+\psi)(x) = \phi(x)+\psi(x)$$
$$(\lambda\phi)(x) = \lambda\phi(x)$$

Покажем аддитивность:

$$(\phi+\psi)(x+y) = \phi(x+y)+\psi(x+y) = \phi(x)+\phi(y)+\psi(x)+\psi(y) =$$

$$= (\phi+\psi)(x)+(\phi+\psi)(y)$$

Замечание. *Легко проверить выполнение аксиом ЛП для $\mathcal{V},\mathcal{W}$, причём в кач-ве нулевого вектора выступет нулевое отображение.*

Утверждение 3.3. *Соответствие:*

$$\phi \underset{(G,G')}{\longleftrightarrow} A_\phi$$

явл-ся изоморфизмом пр-ва $\mathcal{L}(V,W)$ на пр-во $M_{m\times n}(F)$

Доказательство. a) Сохранение " + "?

$$(\phi+\psi)(G) = \big((\phi+\psi)(e_1) \quad \dots \quad (\phi+\psi)(e_n))\big) =$$

$$= \big(\phi(e_1)+\psi(e_1) \quad \dots \quad \phi(e_n)+\psi(e_n)\big)$$
$$= \big(\phi(e_1) \quad \dots \quad \phi(e_n)\big) + \big(\psi(e_1) \quad \dots \quad \psi(e_n)\big) = f\cdot A_\phi + f\cdot A_\psi =$$
$$= f(A_\phi + A_\psi)$$

b) Биективность? Инъективность возникает из того, что только 0 имеет нулевую матрицу.
Сюрьективность? $\forall A \in M_{m\times n}(F) \exists!$ ЛО, со столбцами вида $\phi(e_1),\dots,\phi(e_n)$

□

Следствие 3.2.

$$\dim \mathcal{L}(V,W) = \dim M_{m\times n} = m\cdot n = \dim W \cdot \dim V$$

3.2 Ранг лин. отображения

Определение 3.3. $\phi\colon V \to W$ — ЛО. Ранг $\phi(\operatorname{rk}\phi)$ наз-ся размерностью пр-во $\operatorname{Im}\phi$

Теорема 3.3 (О ранге лин. отображения)**.** *$\phi : V \to W$ — ЛО. Тогда $\operatorname{rk}\phi$ равен $\operatorname{rk} A_\phi$ не зависимо от выбора базисов в V и W.*

Доказательство. Вспомним рав-во:

$$\operatorname{Im}\phi =< \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) >, \text{ где } E \text{ — базис } V$$

$$\forall i\colon \phi(e_i) \in \operatorname{Im}\phi \Rightarrow \supseteq$$

$\subseteq$? Пусть $y \in \operatorname{Im}\phi$. Тогда $\exists x \in V : y = \phi(x) = \phi(\sum_{i=1}^n x_i e_i) =$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \phi(e_i) \in < \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) >$$

$$\operatorname{rk}\phi = \dim \operatorname{Im}\phi = \dim < \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) > = \operatorname{rk} A_\phi$$

□

3.3 Изменение матр. ЛО при замене базисов

Теорема 3.4. *Пусть $\phi : V \to W$ — ЛО. Пусть G, G' — базисы V, $G' = GS$, (т. е. $S = S_{G \to G'}$)*
Пусть F, F' - базисы W, $F' = FT$
Пусть $\phi \underset{(G,F)}{\longleftrightarrow} A_\phi$ и $\phi \underset{(G',F')}{\longleftrightarrow} A'_\phi$
Тогда:

$$A'_\phi = T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

Доказательство.

$$\phi(G) = F \cdot A_\phi \text{ и } \phi(G') = F' \cdot A'_\phi$$

$$F = F' \cdot T^{-1}$$

Имеем:

$$\phi(G') = \phi(GS) = \phi(G) \cdot S = F \cdot A_\phi \cdot S = F' \cdot T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

$$\Rightarrow A'_\phi = T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S$$

□

Следствие 3.3. *Пусть T и S невырожденные матрицы, т. ч.:*

$$T^{-1} \cdot A \cdot S \text{ — имеет смысл}$$

Тогда:

$$\operatorname{rk}(T^{-1} \cdot A \cdot S) = \operatorname{rk} A$$

Доказательство.

$$A = A_\phi, \phi\colon V \to W$$

$$\operatorname{rk}(A_\phi) = \operatorname{rk}(T^{-1} \cdot A_\phi \cdot S)$$

Т. к. ранг не зависит от выбранных базисов. □

К какому наиболее простому виду можно привести матрицу отображения подоходящей заменой базиса? Ответ: к единичному диагональному виду.

Теорема 3.5. *Пусть $\phi\colon V \to W$ — ЛО. Тогда в V и W $\exists G, F$ — базисы, т. ч.:*

$$\phi \underset{(G,F)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r = \operatorname{rk} \phi$$

Доказательство. Пусть $V = U \oplus \ker \phi$, U — прямое дополнение к $\ker \phi$

$$\phi|_U \colon U \to \operatorname{Im} \phi$$

Выберем в пр-ве V базис, согласованный с разл. в $\oplus$, т. е.:

$$e_1, \dots e_r \text{ — базис в } U, e_{r+1}, \dots, e_n \text{ — базис в } \ker \phi$$

$$f_1 = \phi(e_1), \dots, f_r = \phi(e_r) \text{ — базис в } \operatorname{Im} \phi$$

И дополним его до базиса в W

$$f_{r+1}, \dots, f_n$$

Покажем, что пара базисов (E, F) — искомая пара базисов.

$$\phi(e_1) = f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + \cdot 0 \cdot f_n$$

$$\phi(e_2) = f_2 = 0 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + \ldots + 0 \cdot f_n$$

$$\vdots$$

$$\phi(e_r) = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \ldots + 0 \cdot f_{r-1} + 1 \cdot f_r + 0 \cdot f_{r+1} + \ldots + 0 \cdot f_n$$

$$\phi(e_{r+i}) = \overline{0}, \forall i > 0$$

□

4 Лекция 26

4.1 Определители произовльного порядка

$$\sigma\colon M \to M \text{ — подстановка}$$

Утверждение 4.1. *Следующие три определения эквив-ны: подстановка наз-ся **чётной**, если:*

1) *Чётности верхней и нижней строк совпадают*

2) $n_1 + n_2$ *— чётно, где* n_i *- число инверсий в* i*-ой строке* $(i = 1, 2)$

3) *Она раскладывается в произведение чётного числа транспозиций*

Доказательство.

1 $\iff$ 2) $n_1 + n_2 \in 2\mathbb{Z} \iff \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ч} \\ \text{ч} \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{нч} \\ \text{нч} \end{pmatrix} \iff$ чётность строк совпадет

1 $\iff$ 3) Т. к. каждая транспозиция меняет чётность кол-ва инверсий, то число множителей в произведении чётно.

$\square$

Обозначение. *Знак подстановки*:

$$\varepsilon\colon S_h \to \{\pm 1\}$$

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ — чётно} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ — нечётно} \end{cases} = (-1)^{\operatorname{inv}(\sigma)} = (-1)^{\tau(\sigma)}$$

$\operatorname{inv}(\sigma)$ *— суммарное число инверсий* $(n_1 + n_2)$

$\tau(\sigma)$ *— размер минимального по кол-ву транспозиций разложения* σ

Утверждение 4.2. *Знак перестановки явл-ся гомоморфизмом мультипликативных групп:*

$$\varepsilon(\sigma \cdot p) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(p)$$

Доказательство.

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$$
$$p = \tau_1' \dots \tau_s'$$
$$\Rightarrow \sigma \cdot p = \tau_1 \dots \tau_k \cdot \tau_1' \dots \tau_s'$$
$$\varepsilon(\sigma \cdot p) = (-1)^{k+s} = (-1)^k(-1)^s = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(p)$$

$\square$

Вспомним определитель 3-его порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Сделаем сопоставление:

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3} \mapsto \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{pmatrix}$$

Слагаемое	Подстановка σ	$\varepsilon(\sigma)$
$a_{11}a_{22}a_{33}$	id	$+1$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$+1$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

На основании этой таблицы строиться формула общего вида (и соотв. определение):

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

Утверждение 4.3. *При транспонировании матрицы A её определитель не меняется. Пусть $a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}$ входит в состав $\det A$ (и соотв. в состав $\det(A^T)$)*

$$\det A \to \varepsilon\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$
$$\det A^T \to \varepsilon\begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

4.2 Полилинейные кососимметрические ф-ции

Определение 4.1. $f\colon V^n \to F$ наз-ся **полилинейной**, если она линейна по каждому из своих арг-ов:

$$V^n = \{\, (a_1, \ldots, a_n), a_i \in V \,\}$$
$$f(a_1, \ldots, a_n) \in F$$

Линейность подразумевает:

1) Аддитивность:

$$f(\ldots, a_i + a_i', \ldots) = f(\ldots, a_i, \ldots) + f(\ldots, a_i', \ldots)$$

2) Однородность:

$$\forall \lambda \in F\colon f(\ldots \lambda a_i \ldots) = \lambda f(\ldots a_i \ldots)$$

Пусть $\operatorname{char} F \neq 2$

Определение 4.2. Полилин. ф-ция $f\colon V^n \to F$ наз-ся кососимметрическим, если:

a) $f(\ldots a_i \ldots a_j \ldots) = -f(\ldots a_j \ldots a_i \ldots), i \neq j$

b) $f(\ldots a \ldots a \ldots) = 0$

Доказательство.

a) $\Rightarrow$ b)

$$f(\ldots a \ldots a \ldots) = -f(\ldots a \ldots a \ldots)$$

Если $\operatorname{char} F = 2$, то опр-е не пол-ся. Иначе всё ок.

b) $\Leftarrow$ a)

$$0 = f(\ldots a_i + a_j \ldots a_i + a_j) = f(\ldots a_i \ldots a_j \ldots) + f(\ldots a_i \ldots a_i \ldots) +$$
$$+ f(\ldots a_j \ldots a_j \ldots) + f(\ldots a_j \ldots a_i \ldots) =$$
$$= f(\ldots a_i \ldots a_j \ldots) + f(\ldots a_j \ldots a_i \ldots)$$

$\square$

Замечание. *В случае* $\operatorname{char} F = 2$, *п. b) выбирается в кач-ве опр-я.*

Утверждение 4.4. *Пусть* $f\colon V^n \to F$ *— полилин. кососим., тогда* $\forall \sigma \in S_n$

$$f(a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(a_1 \dots a_n)$$

Доказательство. Индукция по $\tau(\sigma)$:

База: $\tau(\sigma) = 1 \Rightarrow \sigma$ — очев.

Переход: Пусть для σ, т. ч. $\tau(\sigma) < k$, утв-е вып-ся. Тогда для $\tau(\sigma) = k$, утв-е верно, (делаем ещё один *swap*, чётность мен-ся, и утв-е верно)

$\square$

Теорема 4.1 (О характеризации определителя его св-вам)**.**

$$A \in M_n(F)$$

Тогда:

a) $\det A$ *— полилин., кососим. ф-ция от строк (или столбцов) матрицы* A

b) *Пусть* $f\colon M_n(F) \to F$ *— полилин. кососим. ф-ция от строк (или столбцов) матрицы. Тогда:*

$$f(A) = f(E) \cdot \det A, \text{ где } E \text{ — единич. матрица}$$

Доказательство. a) Зафикс. все элем-ты, матрицы $A : a_{ij}, i > 1$:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \sum_j \alpha_j a_{1j}$$

— лин. форма коорд. I строки.

1) $\operatorname{char} F \neq 2$. Проверим, что $\det A$ — кососим ф-ция от строк A:

$$\det(\overline{a_1} \dots \overline{a_i} \dots \overline{a_j} \dots \overline{a_n}) \stackrel{?}{=} -\det(\overline{a_1} \dots \overline{a_j} \dots \overline{a_i} \dots \overline{a_n})$$

I. $a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} \mapsto \det A$

II. $a_{1\sigma(1)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \mapsto \det A'$

$\Rightarrow \varepsilon(I) = -\varepsilon(II) \Rightarrow \det A' = -\det A$

2) $\operatorname{char} F = 2$

$$\det(\overline{a_1} \dots \overline{a_i} \dots \overline{a_j} \dots \overline{a_n}) \stackrel{?}{=} 0, (\overline{a_i} = \overline{a_j})$$

b)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$e_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(a_1, \dots, a_n) = f\left(\sum_{j_1} a_{1j_1} e_{j_1}, \sum_{j_2} a_{2,j_2} e_{j_2} \dots \sum_{j_n} a_{nj_n} e_{j_n}\right) =$$

$$= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} \varepsilon(j) a_1 j_1 \dots a_{nj_n} f(e_1, \dots, e_n) = \det A f(E)$$

□

Утверждение 4.5. *a) Если над матрицей A совершить ЭП строк I типа ($a_i \mapsto a_i + \lambda a_j$), то опр-тель не меняется.*

b) При преобразованиях второго типа ($a_i \leftrightarrow a_j$) опр-тель изменит свой знак.

c) При преобразованиях третьего типа ($a_i \mapsto \lambda a_i$) опр-тель умножается на λ

Доказательство. a)

$$\det(\overline{a_1} \dots \overline{a_i} + \lambda \overline{a_j} \dots \overline{a_n}) =$$

$$= \det(\overline{a_1} \dots \overline{a_i} \dots \overline{a_n}) + \lambda \det(\overline{a_1} \dots \overline{a_j} \dots \overline{a_j} \dots \overline{a_n}) =$$
$$= \det(\overline{a_1} \dots \overline{a_i} \dots \overline{a_n})$$

b) Из кососим.

c) Следсвие однородности.

□

<u>**Определение**</u> **4.3.** Матрица $A \in M_n(F)$ наз-ся верхнетреугольной (нижнетреугольной), если $a_{ij} = 0, i > j (i < j)$

<u>**Утверждение**</u> **4.6.** *Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы равен произведению эл-ов на главной диагонали.*

Доказательство.

$$\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \to \det A$$

Если $\sigma \neq e$, то $\exists i$, т. ч. $\sigma(i) < i \Rightarrow a_{i\sigma(i)} = 0$ (Легко док-ть от прот.) $\Rightarrow$ единственное ненулевое произведение — произведение эл-ов главной диагонали. □

<u>**Определение**</u> **4.4.** Минором k-ого порядка матрицы A наз-ся $\det M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$

<u>**Определение**</u> **4.5.** Ранг матрицы по минорам наз-ся порядок её наибольшего ненулевого минора. ($\det M \neq 0$)

$$\operatorname{rk}_M A$$

<u>**Теорема**</u> **4.2** (Фробениус, 1873-75 гг.). *Все 3 понятия ранга матрицы эквив-ны, т. е.:*

$$\operatorname{rk}_r A = \operatorname{rk}_c A = \operatorname{rk}_M A$$