

Алгем.
Лекция 2

Сергей Григорян

6 сентября 2024 г.

1 Упражняемся

$A \in M_{m \times n}$ Произвольную i -ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}) .$$

Определение 1.1. **Линейная комбинация (ЛК)** строк A_{1*}, \dots, A_{m*} наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

Утверждение 1.1. *а) Пусть $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A*

б) Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B .

Доказательство. б) Пусть $C = AB \in M_{m \times k}$

$$\begin{aligned} C_{*j} &= \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{s1} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{2s} b_{s2} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sm} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = . \\ &= \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}. \end{aligned}$$

□

2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i -ого измерения. ($i = 1, 2, 3$)

Определение 2.1. Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

\overline{XY} - направленный отрезок.

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

Обозначение.

$\bar{0}$ - нулевой напр. отр..

Определение 2.2. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

- a) $XY = X'Y'$
- b) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны (\exists прямая, \parallel им обоим)
- c) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 2.3. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Утверждение 2.1. Два напр. отр. \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ определяют (порождают) один и тот же вектор \bar{a} и т. т., когда они равны.

Доказательство.

a) **Необходимое:** Пусть \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \bar{a}$

b) **Достаточное:** Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\bar{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. \square

Определение 2.4. $\overline{XY} = \bar{a} \iff$ он порождает вектор \bar{a}

3 Операции с векторами

3.1 I. Сложение

Замечание. При данном векторе \bar{a} и фикс. точке X , то найдётся напр. отр. $\overline{XY} = \bar{a}$

Определение 3.1. Пусть напр. отр. \overline{XY} опр. \bar{a} , \overline{YZ} опр. \bar{b} :

Сумма векторов: вектором $\bar{a} + \bar{b}$ назыв. вектор, пород. \overline{XZ}

Замечание. Данное опр. **корректно**, и не зависит от начальной точки X

Доказательство. ***Рисунок*** \square

3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\bar{a} = \overline{XY}$ и \overline{XZ} :

- а) $XZ = |\lambda| * XY$
- б) \overline{XZ} - коллинеарен \overline{XY}
- с) \overline{XZ} сонаправлен \overline{XY} , при $\lambda > 0$
 \overline{XZ} прот. направлен. \overline{XY} при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемы напр. отр. XZ , наз-ся вектором $\lambda \bar{a}$

Доказательство. to do by yourself □

Теорема 3.1. *Операции "+" и "*" удовлет. след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-в параллелограмма):*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. *Ассоциативность сложения:*

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

3. $\exists \bar{o}: \bar{o} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{o} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i$

4. $\forall \bar{a} \in V_i \exists (-\bar{a}) \in V_i: \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{o}$

5. *Унитарность:*

$$1 * \bar{a} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i.$$

- 6.

$$(\lambda * \mu) * \bar{a} = \lambda * (\mu * \bar{a}).$$

- 7.

$$(\lambda + \mu) * \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu * \bar{a}.$$

- 8.

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}.$$

Замечание. *Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва \mathbb{R} .*

4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n} \in V_i$

Обозначение.

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{v_i}$ - наз-ся ЛК векторов.

Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots n$, то такая ЛК наз-ся **тривиальной**.

Если $\exists i: \alpha_i \neq 0$, то ЛК **нетривиальная**.

Определение 4.1 (ЛЗ система векторов). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если \exists **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{0}$

Определение 4.2 (ЛНЗ сис. вект.). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если \nexists **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{0}$

Пример.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ - ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: представить, что есть коэф-ты, дающие ЛК = $\overline{0}$, и показать, что она тривиальная.

Утверждение 4.1. Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ - ЛЗ \iff хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.

Доказательство. а) **Необх:** пусть $(\overline{v_1} \ \overline{v_2} \ \dots \ \overline{v_n})$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК : } \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \dots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} + \dots + \overline{v_i} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n} = \overline{0}.$$
$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\bar{v}_i = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n - \bar{v}_i = \bar{o}.$$

□

Замечание. НЕВЕРНО было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.

Пример.

\bar{a}, \bar{b} - неколлин..

\Rightarrow Для $(\bar{a} \ \bar{a} \ \bar{b})$ - это неверно, т. к. b не выразим через a .

Но $1 * \bar{a} + (-1) * \bar{a} + 0 * \bar{b} = \bar{o}$ - нетривиальная ЛК.

Утверждение 4.2. а) Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛЗ \Rightarrow всякая её надсистема тоже ЛЗ

- Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛНЗ \Rightarrow , то всякая её подсистема ЛНЗ.

Доказательство. а) $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, - не все равны \bar{o} , тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i = \bar{o}$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \bar{v}_j = \bar{o}$

b) Пусть подсистема $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_k)$ - ЛЗ (от прот.), тогда по а),
 $(\bar{v}_1 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ \Rightarrow **Противоречие**

□

Утверждение 4.3. Пусть $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ сист. векторов в V_i . Тогда каждый вектор $\bar{w} \in V_i$ выразится через $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ не более чем одним способом.

Доказательство.

$$\bar{w} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \bar{V} \alpha = \bar{V} \beta$$

$$\Rightarrow \bar{o} = \bar{V}(\alpha - \beta).$$

□