Матан

Сергей Григорян

25 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 6

Рассм. $\bigcap_{i=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$

По аксиоме Архимеде, заключаем, что $\bigcap_{i=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

1.1 Бесконечные пределы

Выделим классы п-ть, **расход. особым образом**:

Определение 1.1. Говорят, что $\{a_n\}_1^{\infty}$ стремится к $+\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$

Обозначение. *Пишут вот так:* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *или* $a_n \to +\infty$

Определение 1.2. Говорят, что $\{a_n\}_1^{\infty}$ стремится к $-\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow a_n < -\frac{1}{e})$

Обозначение. *Пишут, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *или* $a_n \to -\infty$

Определение 1.3. П-ть $\{a_n\}_1^{\infty}$ наз-ся **беск. большой**, если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

Замечание. *Из опр-ий следует, что* $a_n \to -\infty \iff (-a_n) \to +\infty$

Пример. *1)*

$$a_n = n^2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$$

$$\textit{Возьмём } N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq N \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

2)

$$(-n^2) \to -\infty$$

3)

$$(-1)^n n^2 - \textit{б. б., но}, (-1)^n n^2 \not\to +\infty, (-1)^n n^2 \not\to -\infty$$

Задача 1.1. Док-ть, что всякая ББ п-ть является неограниченной.

Замечание. *П-ть не может одновременно стремиться к числу и к символу* $+\infty$ *(Т. к. она либо ограничена, либо неогр.), а также к бесконечностям разных знаков. Таким образом, если п-ть имеет предел в* $\mathbb{R}$, *то он единственный.*

Лемма 1.1. *Пусть* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *тогда* $\{a_n\}_1^{\infty}$ *- ББ* $\iff$ $\{\frac{1}{a_n}\}_1^{\infty}$ *- БМ*

Доказательство. Это следует из $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ □

1.2 Дополнения к ранним теоремам

Теорема 1.2 (4’). *Пусть* $a_n \le b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Тогда:*

1) *Если* $a_n \to +\infty$, *то* $b_n \to +\infty$

2) *Если* $b_n \to -\infty$, *то* $a_n \to -\infty$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N \colon (a_n > \frac{1}{\varepsilon})$. Тогда $b_n \ge a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \ge N$. Тогда $b_n \to +\infty$

2) Вытекает из (1): $(-b_n) \to +\infty, -b_n \le -a_n, \forall n \to (-a_n) \to +\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

$\square$

Теорема 1.3 (6’). 1) *Если п-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр. и неогр. сверху, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) *Если п-ть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убыв. и неогр. снизу, то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Доказательство. 1) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Из неогр. сверху следует, что $\exists N \colon a_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ Тогда $a_n \ge a_N > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \ge N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) Аналогично (1), или с помощью сведения a_n к $(-a_n)$

$\square$

Следствие. *Всякая монотонная п-ть имеет предеел в* $\overline{\mathbb{R}}$: *если* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возр., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$

Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убыв., то* $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\, a_n \,\}$

Задача 1.2. Д-те, что теорема 5 (арифм. операции с пределами), остаётся верно и для $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допуст. операциями)

Пример. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}, x < 0$, *а* $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$

Доказательство.

$$\exists N_1, \forall n \ge N_1 (a_n < \frac{x}{2})$$

$$\exists N_2, \forall n \ge N_2 (b_n > \frac{2}{|x|\,\varepsilon})$$

Возьмём $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n \geq N:$

$$a_n b_n < \frac{x}{2} \frac{2}{|x|\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

□

1.3 Подпоследовательности

Определение 1.4. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - п-ть и $\{n_k\}_1^\infty$ строго возрастающая п-ть нат. чисел. П-ть $\{b_k\}_1^\infty$, где $b_k = a_{n_k}, k \in \mathbb{N}$, наз-ся **подпоследовательностью** и об-ся $\{a_{n_k}\}_1^\infty$

Пример.

$$a_n = n, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n_k} = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ - } \textit{подп-ть}$$

Замечание. *1) Подп-ть $\{\, a_{n_k} \}$ - это композиция строго возрастающей ф-ции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma(k) = n_k$, и самой п-ти $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*

2) Верно, что $n_k \geq k, \forall k$

$(n_1 \geq 1, n_k \geq k, n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k + 1)$

Лемма 1.4. *Если п-ть $\{\, a_n \}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подп-ть имеет тот же предел*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, а $\{\, a_{n_k} \}$ - подп-ть $\{\, a_n \}$

a) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N, \forall n \geq N(|a_n - a| < \varepsilon)$

   Тогда $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при всех $k \geq N$ (т. к. $n_k \geq k \geq N$)

   Сл-но, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Если $a = +\infty$, получаем результат, если заменить $|a_n - a| < \varepsilon$ на $a_n > \frac{1}{\varepsilon}(a_n < -\frac{1}{\varepsilon})$

□

Теорема 1.5 (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Всякая огр. посл-ть имеет сход. подпосл-ть.*

Доказательство. Пусть задана $\{a_n\}_1^\infty$ - ограниченная,

$$\Rightarrow \exists [c,d] \ni a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Определим п-ть отрезков $[c_k, d_k]$ Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$. Если определён отрезок $[c_k, d_k]$, то разделим его пополам ($y = \frac{c_k + d_k}{2}$)

$$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{если } \{\, k \mid a_k \in [c_k, y] \,\} \text{ - бесконечно} \\ [y, d_k], \text{иначе} \end{cases}$$

П-ть $\{\, [c_k, d_k] \,\}$ стягивающаяся:

$$\forall k\colon \begin{cases} [c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k] \\ \qquad d_k - c_k = \dfrac{d-c}{2^k} \end{cases}$$

По т. Кантора $\exists a \in \bigcap_{k=1}^\infty [c_k, d_k]$, причём $c_k \to a, d_k \to a$

Определим a_{n_k}:

$$a_{n_1} = a_1, \text{если определён } a_{n_k}, \text{ то положим}$$

$$a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}], n_{k+1} \geq n_k$$

Т. к. $c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$, то по т. о зажатой п-ти (о двух полицейских), то $a_{n_k} \to a$ □

Теорема 1.6. *Если п-ть неограничена сверху (снизу), то она имеет подпосл-ть, стремящуюся к $+\infty$ ($-\infty$)*

Доказательство. Пусть дана п-ть $\{\, a_n \,\}$ - неогр. сверху.

$$a_{n_1} > 1$$

Пусть определён эл-т a_{n_k}, определим:

$$a_{n_{k+1}} > max\,\{\, k+1, a_1, \ldots, a_{n_k} \,\} \Rightarrow n_{k+1} > n_k$$

Опр-на $\{\, a_{n_k} \,\}$. Т. к. $a_{n_k} > k, \forall k \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty$ (По теореме 4') □

Следствие. *Всякая п-ть имеет подпосл-ть, стремящуюся к некот. эл-ту $\in \overline{\mathbb{R}}$*

2 Лекция 7

2.1 Критерий Коши

Определение 2.1. Посл-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма 2.1. *Всякая фундаментальная п-ть огр-на*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. По опр-ю:

$$\exists N \colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < 1)$$

В част-ти:

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1$$

для всех $n \geq N$ $(m = N)$

Положим

$$\alpha = min(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$\beta = max(a_1, \ldots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

. Тогда:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ □

Теорема 2.2 (Коши)**.** *П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - сходится $\iff$ $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна.*

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела:

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при всех $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} * 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) По предыдущей лемме, п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - ограничена $\Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштрасса (Б-В) $\{a_n\}_1^\infty$ имеет сход. подпосл-ть $\{a_{n_k}\}_1^\infty \to a$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю фундаментальности:

$$\exists N, \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Т. к. $\{a_{n_k}\} \to a \Rightarrow$

$$\exists K \colon \forall k \geq K(|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $M = max(N, K)$. Тогда $n_M \geq M \geq N; n_M \geq M \geq K$

Поэтому при всех $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Замечание. *Критерий Коши позволяет доказывать существование предела,* ***без явного нахождения его значения***

Кроме того, критерий позволяет ***оценить скорость сходимости к пределу*** *(перейдём к пределу по m в определении фунд-ти):*

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \textit{при всех } n \geq N$$

Задача 2.1. Покажите, что если всякая фундаментальная посл-ть сх-ся (сходится), то выполняется аксиома непрерывности. А именно:

Пусть $\mathbb{F}$ - упоряд. поле, на котором выполняется аксиома Архимеда

2.2 Частичные пределы

Определение 2.2. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся частичным пределом числовой посл-ти $\{a_n\}_1^\infty$, если $\exists \{ a_{n_k} \}$ - подпосл-ть $\{ a_n \}$: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$L\{ a_n \} - \text{мн-во частичных пределов } \{ a_n \}$$

Пример. ± 1 - *частичные пределы* $a_n = (-1)^n$

$$a_{2k} \to 1, a_{2k-1} \to -1$$

Пусть задана числовая посл-ть $\{ a_n \}$

Положим

$$M_n = \sup_{k\geq n}\{ a_k \}$$

$$m_n = \inf_{k \geq n} \{ a_k \}$$

Пусть $\{ a_n \}$ огр. сверху. Тогда все $M_n \in \mathbb{R}$

Поскольку при переходе к подмн-ву sup не увеличивается, то $\{ M_n \}$ нестрого убывает

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} M_n$

Пусть $\{ a_n \}$ не огр. сверху. Тогда все $M_n = +\inf$

Положим $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$

Аналогично для $\{ m_n \}$ (Огр./Неогр. снизу).

Итак, посл-ти $\{ m_n \}$ и $\{ M_n \}$ имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

<u>Определение</u> 2.3. Величина $\lim_{n\to\infty} \sup\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **верхний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

Величина $\lim_{n\to\infty} \inf\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **нижний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

<u>Замечание</u>. *Т. к. $m_n \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, тогда:*

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n$$

<u>Задача</u> 2.2.

$$\varlimsup_{n\to\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to\infty} a_n$$

<u>Теорема</u> 2.3. *Верхний (нижний) предел - наибольший (наименьший) из част. пределов посл-ти.*

Доказательство.

$$M = \varlimsup_{n\to\infty} a_n, m = \varliminf_{n\to\infty} a_n$$

Нужно показать, что M, m - это ч. п. $\{ a_n \}$ и любой ч. п. лежит между ними.

1) Покажем, что есть подп-ть $\{ a_n \}$, сх-ся к M:

I. $M \in \mathbb{R}$. Имеем

$$M = \inf \{ M_n \}$$

По опр-ю $\sup, \exists n_1 \colon (M - 1 < a_{n_1})$

$$M_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} \{ a_k \} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 \colon (M - \frac{1}{2} < a_{n_2})$$

и т. д.

Таким образом, по индукции, будет построена подп-ть $\{ a_{n_k} \}$, т. ч.

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$$

Имеем:

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_k}$$

Края нер-ва сх-ся к $M \Rightarrow$ по т. о зажатой посл-ти, $a_{n_k} \to M$

II. $M = +\infty$, тогда $\{ a_n \}$ неогр. сверху $\Rightarrow$ (по Теореме 8') она имеет под-пть, сх-ся к $+\infty$

III. $M = -\infty$. Т. к. $a_n \leq M_n, \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) Для m - док-во аналогично, или сводиться к M по задаче ref:prot$_p red\{ a_{n_k} \}$, $a_{n_k} \to a$. Тогда:

$$m_{n_k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_k}, \forall k \Rightarrow m \leq a \leq M (\text{част. пределы})$$

□

Следствие. $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ *(в $\overline{\mathbb{R}}$)* $\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$
В этом случае все три предела равны.

3) *Доказательство.* $\Rightarrow$) По лемме 4, любая подпосл-ть имеет предел $a \Rightarrow$ $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$\Leftarrow$)

$$m_n \leq a_n \leq M_n$$

для всех $n \Rightarrow a_n \to a$ (Края $\to a$)

□

Лемма 2.4. *Для $c \in \mathbb{R}$ верно:*

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (a_n < c + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N (a_n > c - \varepsilon) \end{cases}$$