Матан

Сергей Григорян

18 сентября 2024 г.

Содержание

1 §2. Предел последовательности

1.1 Определение предела

Определение 1.1. $a : \mathbb{N} \to A$ - п-ть эл-ов мн-а A. Значение $a(n)$ - наз-ся n-ым членом п-ти. (Обозначается a_n). Сама п-ть обозначается $\{a_n\}$ или $a_n, n \in \mathbb{N}$

Если $A = \mathbb{R}$ - то $\{a_n\}$ - числовая п-ть.

Пример. *1)*
$$a : \mathbb{N} \to \{c\}, c \in \mathbb{R}$$
Здесь постоянная п-ть ($a_n = c, \forall n \in \mathbb{N}$)

2) $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$

3) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$ *- п-ть Фиббоначи.*

Определение 1.2. Число a наз-ся пределом п-ти $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N, что $|a_n - a| < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. Обозначается, как $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

Определение 1.3 (В кванторах)**.**
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$$
Или, $a_n \to a$ (при $n \to \infty$)

Замечание.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon > 0, M = \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \notin (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, M \text{ - конечно}$$

Определение 1.4. Если $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$, то $\{a_n\}$ наз-ся **сходящейся п-тью**, иначе - **расходящейся п-тью**

Пример.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Зафикс. $\varepsilon > 0$. *Рассмотрим* $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ *нам подойдёт* $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. *Если* $n \geq N \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

Теорема 1.1. *(О единственности предела) Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*, то* $a = b$*.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опред. предела $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$ и $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$.

Положим $N = max(N_1, N_2)$:

$$|a - b| = |a - a_N + a_N - b| \leq |a - a_N| + |b - a_N| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - любое $\Rightarrow$, то $|a - b| = 0$, т. е. $a = b$ □

Задача 1.1.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$

Определение 1.5. П-ть $\{a_n\}$ наз-ся **ограниченной**, если $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ - ограничено.

Теорема 1.2. *(Об ограниченности сходящейся п-ти) Если* $\{a_n\}$ *сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. По опред. предела (для $\varepsilon = 1$) $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < a_n < a + 1)$. Положим $m = min\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a - 1\}, M = max\{a_1, \ldots, a_{N-1}, a + 1\}$. Тогда $m \leq a_n \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. □

Замечание. *Обратное утв.* ***неверно****:*

Пример.

$$a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$$

Предположим, что a_n *сходится:*

По опред. предела($\varepsilon = 1$*)* $\exists N, \forall n \geq N(a - 1 < (-1)^n < a + 1)$

- *При чётном* $n \Rightarrow 1 < a + 1$
- *При нечётном* $n \Rightarrow a - 1 < -1$

$\Rightarrow a < 0 \wedge a > 0!!!$ *- противоречие*

Лемма 1.3. *Для всякого* $m \in \mathbb{N}$ *п-ти* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$*, где* $b_n = a_{n+m}, \forall n \in \mathbb{N}$ *имеют предел одновременно, и если имеют, то пределы равны.*

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\forall n \geq N_1\colon (|a_n - a| < \varepsilon) \Rightarrow (\forall n \geq N_1(|a_{n+m} - a| < \varepsilon))$$

$$(\forall n \geq N_2(|a_{n+m} - a| < \varepsilon)) \Rightarrow (\forall n \geq N_2 + m(|a_n - a| < \varepsilon))$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} b_n = a$$

$\square$

Определение 1.6. П-ть $\{b_n\}$ об-ся $\{a_{n+m}\}$ и наз-ся m-ным хвостом $\{a_n\}$

Теорема 1.4 (О пределе в нер-вах)**.** *Если* $a_n \leq b_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, *то* $a \leq b$

Доказательство. От прот. Пусть $b < a$. По опред. предела

$$\exists N_1\colon \forall n \geq N_1(a - \frac{a-b}{2} < a_n)$$

$$\exists N_2\colon \forall n \geq N_2(b_n < b + \frac{a-b}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$, тогда:

$$\frac{a+b}{2} < a_N \text{ и } b_N < \frac{a+b}{2} \Rightarrow b_N < a_N!!!$$

$\square$

Замечание.

Пример.

$$0 < \frac{1}{2}, \textit{но} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Следствие. *Если* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b, a < b \Rightarrow \exists N, \forall n \geq N(a_n < b_n)$

Теорема 1.5 (О зажатой п-ти)**.** *Если* $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$, *то* $\exists \lim_{n\to\infty} c_n = a$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (a - \varepsilon < a_n)$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (b_n < a + \varepsilon)$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow |c_n - a| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Ч. Т. Д. □

Пример.

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, |q| < 1$$

- $q = 0$: *верно*
- $q \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} = 1 + \alpha, \alpha > 0$

$$\frac{1}{|q|^n} = (1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$$

$$\Rightarrow 0 < |q|^n < \frac{1}{n\alpha} (\frac{1}{n\alpha} \to 0) \Rightarrow |q|^n \to 0$$

Теорема 1.6. *(Арифметические операции с пределами) Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Тогда:*

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

3) Если $b \neq 0$ *и* $b_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *то*

$$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, n \geq N_1 (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\exists N_2, n \geq N_2 (|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда $\forall n \geq N$:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |(a_n - a) + (b_n - b)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2) По теор. 2 п-ть $\{a_n\}$ огр., т. е.

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n| \leq C)|b| \leq C$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела:

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2C})$$

Тогда $\forall n > N = max(N_1, N_2)$:

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\frac{\varepsilon}{2C} + C\frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon$$

3) Т. к. $\frac{a_n}{b_n} = a_n * \frac{1}{b_n}$, то дост-но д-ть, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$, и восп. утв. 2: Т. к. $b \neq 0$, то $\exists N_1, \forall n \geq N_1(|b_n - b| < \frac{|b|}{2})$. Поэтому:

$$|b| = |b - b_n + b_n| \leq |b_n - b| + |b_n| \leq \frac{|b|}{2} + |b_n|,$$

откуда:

$$|b_n| > \frac{|b|}{2},$$

а значит: $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}, \forall n \geq N_1$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела: $\exists N_2, \forall n \geq N_2(|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\varepsilon)$

Положим $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при $\forall n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_nb|} < \frac{2}{|b|^2}\frac{|b|^2}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

$\square$

Пример.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leq a_n \leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}$$

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \leq a_n \leq \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}}(\frac{2}{n^2} \to 0, \frac{1}{n} \to 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

<u>Определение</u> 1.7. Посл-ть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

<u>Замечание</u>.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \textit{где } \alpha_n \textit{ - б. м.}$$

<u>Пример</u>. *Пусть* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *- б. м., а* $\{\beta_n\}_1^\infty$ *- огранич. Тогда:* $\{\alpha_n\beta_n\}_1^\infty$ *- б. м.*

Доказательство. Т. к. $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огр., то $\exists C > 0\colon \forall n(|\beta_n| \leq C)$

$$-C|\alpha_n| \leq \alpha_n\beta_n \leq C|\alpha_n|$$

Крайние части $\to 0 \Rightarrow$ По. т. о двух полицейских $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$ □

2 Монотонные п-ти

<u>Определение</u> 2.1. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого возрастающей** (**строго возрастающей**), если

$$a_n \leq a_{n+1}(a_n < a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого убывающей** (**строго убыв.**), если:

$$a_n \geq a_{n+1}(a_n > a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Такие п-ти наз-ся **монотонными**.

<u>Замечание</u>. *Из опр-я следует, что* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает* $\iff$ $\{-a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает.*

<u>Замечание</u>. *Если* $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in N \Rightarrow \forall n, m(n < m \to a_n \leq a_m)$

Теорема 2.1 (Теорема о пределе монотонной п-ти). *ПУсть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возрастает и огр. сверху, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходиться и $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$*

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убывает и огр снизу, тогда $\{a_n\}_1^\infty$ сходиться и $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$

Доказательство. Док-ем первое утв. По условию $\exists c = \sup\{a_n\}_1^\infty \in \mathbb{R}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. супремума $\forall n(a_n \le c)$, также:

$$\exists N(a_N > c - \varepsilon)$$

Поскольку $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $a_n \ge a_N, \forall n \ge N \Rightarrow$ при всех таких $n \ge N$ имеем:

$$a_N \le a_n$$

$$c - \varepsilon < a_N \le a_n \le c < c + \varepsilon, \text{откуда}$$

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

Второе утв. док-ся аналогично. □

Лемма 2.2 (Нер-во Бернулли). *Если $n \in \mathbb{N}$ и $x \ge -1$, то:*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Доказательство. **MMM**:

n = 1 Верно.

$n \Rightarrow n+1$ Пусть утв. верно для n. Тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \ge 1+(n+1)x$$

□

Пример. *Для $\forall x \in \mathbb{R}$ п-ть $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ сходится.*

Доказательство. Зафикс. $m \in \mathbb{N}$, что $m \ge |x|$. Тогда при:

$$n \ge m \colon a_n(x) > 0,$$

а также:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Исследуем: $(-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}})$. Она:

$$\begin{cases} > 0, x < 0 \\ \geq -1, x \geq 0 \end{cases}$$

По нер-ву Бернулли:

$$(1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq (1+\frac{x}{n})(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}) = 1$$

Итак, $\{a_n\}_1^\infty(x)$ нестрого возр. при $n \geq m$. По доказанному $a_n(-x) \geq a_m(-x)$, при $n \geq m$.

Т. к.

$$a_n(x)a_n(-x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq 1,$$

то:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{a_n(-x)} \leq \frac{1}{a_m(-x)}, \text{т. е.}$$

$\{a_n\}_1^\infty$ огр. сверху.

Сл-но, по теореме о пределе монот. посл-ти. $\{a_n(x)\}_1^\infty$ сход-ся. □

Определение 2.2.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Задача 2.1. Док-те, что $2 < e < 3$

3 Последовательность вложенных отрезков

Определение 3.1. П-ть отрезков $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **вложенной**, если $\forall n \in \mathbb{N}([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$

Если к тому же, $b_n - a_n \to 0$, то п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **стягивающейся**.

Теорема 3.1 (Кантор). *Всякая п-ть вложенных отрезков имеет общую точку. Если п-ть стягивающаяся, то такая точка единственная.*

Доказательство. Пусть задана п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ вложенных отр-ов. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и огр. сверху (числом b_1).
П-ть $\{b_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и огр. снизу (числом a_1)
$\Rightarrow \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ сход., $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ и $\alpha \leq \beta$.
Итак $\forall n (a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n)$, т. е.:

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Если п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ - стягив., то $b_n - a_n \to 0$
Пусть $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, тогда $|x - y| \leq b_n - a_n \Rightarrow x = y$
Т. е. $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = x$, где $x = \alpha = \beta$. $\square$