

Содержание

1	Упражняемся	3
2	Векторная алгебра	3
3	Операции с векторами	4
3.1	I. Сложение	4
3.2	Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$	5
4	Системы векторов в пр-ве V_i	6
5	Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i	8
6	Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3	10
7	Матрица перехода от одного базиса к другому	12

АлГем

Сергей Григорян

12 сентября 2024 г.

1 Упражняемся

$A \in M_{m \times n}$ Произвольную i -ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}).$$

Определение 1.1. **Линейная комбинация (ЛК)** строк A_{1*}, \dots, A_{m*} наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

Утверждение 1.1. а) Пусть $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A

б) Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B .

Доказательство. б) Пусть $C = AB \in M_{m \times k}$

$$C_{*j} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{sj} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} b_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}.$$

□

2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i -ого измерения. ($i = 1, 2, 3$)

Определение 2.1. Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

\overline{XY} - направленный отрезок.

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

Обозначение.

$\bar{0}$ - нулевой напр. отр..

Определение 2.2. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

- a) $XY = X'Y'$
- b) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны (\exists прямая, \parallel им обоим)
- c) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 2.3. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Утверждение 2.1. Два напр. отр. \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ определяют (порождают) один и тот же вектор \bar{a} и т. т., когда они равны.

Доказательство.

а) Необходимое: Пусть \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \bar{a}$

б) Достаточное: Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\bar{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. \square

Определение 2.4. $\overline{XY} = \bar{a} \iff$ он порождает вектор \bar{a}

3 Операции с векторами

3.1 I. Сложение

Замечание. При данном векторе \bar{a} и фикс. точке X , то найдётся напр. отр. $\overline{XY} = \bar{a}$

Определение 3.1. Пусть напр. отр. \overline{XY} опр. \bar{a} , \overline{YZ} опр. \bar{b} :

Сумма векторов: вектором $\bar{a} + \bar{b}$ назыв. вектор, пород. \overline{XZ}

Замечание. Данное опр. **корректно**, и не зависит от начальной точки X

Доказательство. ***Рисунок*** \square

3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\bar{a} = \overline{XY}$ и \overline{XZ} :

- а) $XZ = |\lambda| * XY$
- б) \overline{XZ} - коллинеарен \overline{XY}
- с) \overline{XZ} сонаправлен \overline{XY} , при $\lambda > 0$
 \overline{XZ} прот. направлен. \overline{XY} при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемы напр. отр. \overline{XZ} , наз-ся вектором $\lambda \bar{a}$

Доказательство. to do by yourself □

Теорема 3.1. *Операции "+" и "*" удовлетв. след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-в параллелограмма):*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. *Ассоциативность сложения:*

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

3. $\exists \bar{o}: \bar{o} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{o} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i$

4. $\forall \bar{a} \in V_i \exists (-\bar{a}) \in V_i: \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{o}$

5. *Унитарность:*

$$1 * \bar{a} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i.$$

- 6.

$$(\lambda * \mu) * \bar{a} = \lambda * (\mu * \bar{a}).$$

- 7.

$$(\lambda + \mu) * \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu * \bar{a}.$$

- 8.

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}.$$

Замечание. *Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва \mathbb{R} .*

4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n} \in V_i$

Обозначение.

$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{v_i}$ - наз-ся ЛК векторов.

Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots n$, то такая ЛК наз-ся **тривиальной**.

Если $\exists i: \alpha_i \neq 0$, то ЛК **нетривиальная**.

Определение 4.1 (ЛЗ система векторов). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если \exists **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{0}$

Определение 4.2 (ЛНЗ сис. вект.). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если \nexists **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{0}$

Пример.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ - ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: представить, что есть коэф-ты, дающие ЛК = $\overline{0}$, и показать, что она тривиальная.

Утверждение 4.1. Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ - ЛЗ \iff хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.

Доказательство. а) **Необх:** пусть $(\overline{v_1} \ \overline{v_2} \ \dots \ \overline{v_n})$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК : } \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \dots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} + \dots + \overline{v_i} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n} = \overline{0}.$$
$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\bar{v}_i = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n - \bar{v}_i = \bar{o}.$$

□

Замечание. НЕВЕРНО было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.

Пример.

\bar{a}, \bar{b} - неколлин..

\Rightarrow Для $(\bar{a} \ \bar{a} \ \bar{b})$ - это неверно, т. к. \bar{b} не выразим через \bar{a} .

Но $1 * \bar{a} + (-1) * \bar{a} + 0 * \bar{b} = \bar{o}$ - нетривиальная ЛК.

Утверждение 4.2. а) Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛЗ \Rightarrow всякая её надсистема тоже ЛЗ

b) Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛНЗ \Rightarrow , то всякая её подсистема ЛНЗ.

Доказательство. а) $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, - не все равны \bar{o} , тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i = \bar{o}$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \bar{v}_j = \bar{o}$

b) Пусть подсистема $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_k)$ - ЛЗ (от прот.), тогда по а),
 $(\bar{v}_1 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ \Rightarrow **Противоречие**

□

Утверждение 4.3. Пусть $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ сист. векторов в V_i . Тогда каждый вектор $\bar{w} \in V_i$ выразится через $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ не более чем одним способом.

Доказательство.

$$\bar{w} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \bar{V} \alpha = \bar{V} \beta$$

$$\Rightarrow \bar{o} = \bar{V}(\alpha - \beta).$$

□

5 Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i

Утверждение 5.1. а) Пусть $\bar{a} \neq \bar{o}$ и \bar{b} коллинеарен \bar{a} . Тогда $\bar{b} = \lambda \bar{a}$.

б) Пусть \bar{a}_1, \bar{a}_2 не коллин. и \bar{b} компл. \bar{a}_1, \bar{a}_2 . Тогда $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$

в) Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ - не комплан. Тогда всякий вектор представим в виде $\bar{b} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$

Доказательство. а) (**Картинка**)

$$\lambda = \begin{cases} \frac{XZ}{XY}, & \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на одной стороне с } X \\ -\frac{XZ}{XY}, & \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на разных сторонах отн. } X \end{cases} \Rightarrow \bar{b} = \lambda \bar{a}$$

б) Оба вектора \bar{a}_1, \bar{a}_2 - ненулевые. (**Картинка**)

$$\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \overline{XZ_1} + \overline{XZ_2} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2$$

в) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ пород. $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$, а вектор b - \overline{XZ} . \bar{a}_1, \bar{a}_2 - не коллин., (**Картинка**) $Z' = l \cap (X_1Y_1Y_2)$

$$\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 = \overline{XZ'} + \overline{Z'Z} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \lambda_3 \bar{a}_3$$

□

Следствие. 1) Система, сост. только из \bar{o} - ЛЗ.

2) Система, сост. из двух коллин. векторов - ЛЗ.

3) Система, сост. из трёх комплан. векторов - ЛЗ.

4) Любая сист., сост. из четырех векторов в пр-ве - ЛЗ.

Доказательство. 1) $1 * \bar{o} = \bar{o}$

2) \bar{a}, \bar{b} - коллин.

Если $\bar{a} = \bar{o}$ - ЛЗ система $\Rightarrow (a, b)$ - надсистема ЛЗ \Rightarrow она ЛЗ

Если $\bar{a} \neq \bar{o} \Rightarrow \bar{b} = \lambda \bar{a} \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b})$ - ЛЗ

3) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}$ - компл.

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - коллин., то $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ - ЛЗ $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема.

Иначе, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин. $\Rightarrow b = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 + \overline{a_2}$ - ЛЗ

4) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b}$:

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема ЛЗ сист.

Иначе $\Rightarrow \overline{b} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$.

□

Утверждение 5.2. Пусть $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n})$ - ЛНЗ сист. вект. и $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_n}, \overline{b})$ - ЛЗ. Тогда:

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{a_i}$$

Доказательство. \exists нетрив. ЛК:

$$\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \dots + \alpha_n \overline{a_n} + \beta \overline{b} = \overline{0}$$

Предположим, что $\beta = 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow$:

$$\overline{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \overline{a_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \overline{a_n}$$

□

Определение 5.1. V - лин. пр-во (над \mathbb{R}).

Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - наз-ся базисом в V_i , если:

а) $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n})$ - ЛНЗ

б) Каждый вектор $\overline{v} \in V_i$ представим в виде ЛК:

$$\overline{v} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \dots + \alpha_n \overline{e_n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$M_{3 \times 1}(\mathbb{R}): \overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \overline{e_i}$$

Замечание.

$$\bar{v} = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \text{коор-т столбец } \bar{v} \text{ в базисе } \bar{e}$$

Утверждение 5.3. Если в V фикс. базис $G = (\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \dots \quad \bar{e}_n)$, то всякий вектор $\bar{v} \in V$ однозначно раскладывается по одному базису. (т. е. имеет однозначно опред. коор-тный столбец)

Доказательство. См. прошлую лекцию □

Утверждение 5.4. Пусть в пр-ве V фикс. базис G , $\bar{v} \xleftrightarrow{G} \alpha, \bar{w} \xleftrightarrow{G} \beta$. Тогда:

$$\bar{v} + \bar{w} \xleftrightarrow{G} \alpha + \beta,$$

$$\lambda \bar{v} \xleftrightarrow{G} \lambda \alpha$$

Доказательство.

$$\bar{v} = G\alpha$$

$$\bar{w} = G\beta$$

$$\Rightarrow \bar{v} + \bar{w} = G(\alpha + \beta)$$

$$\lambda \bar{v} = \lambda G\alpha = G(\lambda\alpha)$$

□

6 Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3

Теорема 6.1 (О ЛНЗ системах векторов).

1) Система, состоящая из одного **ненулевого** вектора \bar{a} - ЛНЗ

2) Система, сост. из двух неколлин. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛНЗ

3) Система, сост. из трёх некомплан. векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - ЛНЗ

Доказательство. 1) От. противного, пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda \overline{a} = \overline{0}$:

$$|\lambda| |\overline{a}| = 0!!! \text{ Два ненулевых числа в умнож. дают 0.}$$

2) От. противного, пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛЗ. Б. О. О. (без ограничения общности) $\overline{a_2} = \lambda \overline{a_1}$ - противоречие.

3) От. пр., пусть $(\overline{a_1} \ \overline{a_2} \ \overline{a_3})$ - ЛЗ. Б. О. О. $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$ - противоречие.

□

Теорема 6.2 (Об описании базиса в V_i). Система векторов является:

а) базисом в $V_1 \iff$ она состоит из одного вектора $\overline{e} \neq \overline{0}$

б) базисом в $V_2 \iff$ она сост. из двух неколлин. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}$

в) базисом в $V_3 \iff$ она сост. из трёх некомпл. векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

Доказательство.

а) $V_1: \overline{e} \neq 0$ (ЛНЗ сист.)

$$\forall \overline{b} \in V_1 (\overline{b} = \lambda \overline{e}) \Rightarrow (\overline{e}) - \text{базис в } V_1.$$

Если $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in V_1 \Rightarrow$ они коллин. \Rightarrow ЛЗ и аналогично $(\overline{0})$ - ЛЗ.

б) V_2 - фикс. $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - неколл. \Rightarrow ЛНЗ.

$$\forall \overline{b} \in V_2 \xRightarrow{\text{утв. 1}} \overline{b} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \Rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2}) - \text{базис.}$$

Почему нет других? $(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - компл. \Rightarrow ЛЗ. Если $(\overline{e_1} \ \overline{e_2})$ - коллин. \Rightarrow через них выр-ся только коллин. им вектора.

с) $(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - некомпл. \Rightarrow ЛНЗ:

$$\forall b \in V_3: b = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \overline{e_i} \Rightarrow \text{базис.}$$

Почему нет других?

$(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3} \ \overline{e_4})$ - ЛЗ

$(\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \overline{e_3})$ - компланарный, то тогда ЛЗ

- $\overline{e_1} \parallel \overline{e_2}$ - очев.

- $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$ - образ. плоскость.

□

7 Матрица перехода от одного базиса к другому

V : два базиса: $G = (\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \dots \ \overline{e_n})$, $G' = (\overline{e'_1} \ \overline{e'_2} \ \dots \ \overline{e'_n})$

$$\overline{e'_1} = S_{11}\overline{e_1} + S_{21}\overline{e_2} + \dots + S_{n1}\overline{e_n}$$

$$\vdots$$

$$\overline{e'_n} = S_{1n}\overline{e_1} + S_{2n}\overline{e_2} + \dots + S_{nn}\overline{e_n}$$

\Rightarrow

$$S' = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} = S_{G \rightarrow G'}$$

- матрица перехода от G к G'

$$(\overline{e'_1} \ \overline{e'_2} \ \dots \ \overline{e'_n}) = (\overline{e_1} \ \overline{e_2} \ \dots \ \overline{e_n}) S_{G \rightarrow G'} \iff$$

$$G' = G S_{G \rightarrow G'}$$

Утверждение 7.1. Пусть в V фикс. G и G' - базисы и $G' = GS$. Пусть $\bar{a} \xleftrightarrow{G} \alpha$ и $\bar{a} \xleftrightarrow{G'} \alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$.

Доказательство.

$$\bar{a} = G\alpha$$

$$\bar{a} = G'\alpha' = GS\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

□

Определение 7.1. \bar{a}, \bar{b} наз-ся ортогональными, если он перпендикулярны друг другу.

Определение 7.2. Базис G наз-ся ортогональным, если все базис. векторы попарно ортогональны.

Определение 7.3. Базис G наз-ся ортонормированным (ОНБ), если он ортогональный и нормированный ($\forall i: |\bar{e}_i| = 1$).