Матан

Сергей Григорян

13 декабря 2024 г.

Содержание

1 Лекция 29

1.1 Продолжаем про комплы

Определение 1.1. $\{ z_n \}$ наз-ся фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \forall m, n \in \mathbb{N}(|z_n - z_m| < \varepsilon)$$

Следствие. *$\{ z_n \}$ фундам. $\iff$ $\{ x_n \}, \{ y_n \}$ — фундам.*

Теорема 1.1 (Критерий Коши в $\mathbb{C}$)**.** *$\{ z_n \}$ сх-ся $\iff$ $\{ z_n \}$ — фундам.*

Следствие. *Пусть $\{ z_n \}$ огр., т. е. $\exists C > 0 \forall n(|z_n| \leq C)$. Тогда $\{ z_n \}$ имеет сх-ся подп-ть. $\{ z_{n_k} \}$*

Доказательство. $\{ x_n \}$ — огр. $\Rightarrow \exists x_{n_k} \to x_0$
$\{ y_{n_k} \}$ — огр. $\Rightarrow \exists y_{n_{k_i}} \to y_0 \Rightarrow x_{n_{k_i}} \Rightarrow x_0$

$$z_0 = z_0 + iy_0 \Rightarrow z_{n_{k_i}} \to z_0$$

□

Определение 1.2. $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ непр-на в точке $z_0 \iff$:

$$\forall \{ z_n \} \subset E(z_n \to z_0 \Rightarrow f(z_n) \to f(z_0))$$

Пример.

$$f\colon \{ |z| \leq R \} \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists z_0, |z_0| \leq R \Rightarrow \exists z_0, |z_0| \leq R\colon$$

$$\inf_{|z| \leq R} f(z) = f(z_0)$$

Доказательство. $m = \inf\limits_{|z| \in R} f(z)$. Рассм. $r_n \to m, r_n > m$.

$$\exists z_n, |z_n| \leq R, m \leq f(z_n) < r_n$$

В част-ти, $f(z_n) \to m$. $\{ z_n \}$ огр. $\Rightarrow \exists z_{n_k} \to z_0 \Rightarrow |z_0| \leq R$. В част-ти, $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$. В силу непр-ти f в точке z_0.

$$f(z_{n_k}) \to f(z_0), f(z_{n_k}) \to m \Rightarrow f(z_0) = m$$

□

Определение 1.3. Многочлен — это (понятно что)

Теорема 1.2 (Основная теорема алгебры)**.** *Всякий многочлен положительной степени имеет корень.*

Доказательство. Пусть $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \deg P(z) = n$

I. Покажем, что $\exists z_0 \in \mathbb{C}, \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$
Пусть $|z| \geq 1$. Тогда:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \, |z|^k \leq |z|^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{=A}$$

Хотим:

$$A \, |z|^{n-1} \leq \frac{1}{2} |a_n| \, |z|^n$$

$$|z| \geq \frac{2A}{|a_n|}$$

$$|P(z)| = |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = |a_n| \, |z|^n - \frac{1}{2} |a_n| \, |z|^n = \frac{1}{2} |a_n| \, |z^n|$$

$$\frac{1}{2} |a_n| \, |z|^n \geq |a_0| \iff |z| \geq \sqrt[n]{\frac{2 \, |a_0|}{|a_n|}}$$

Положим $R = \max \left\{ 1, \frac{2A}{|a_n|}, \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}} \right\}$
Тогда при $|z| \geq R$ выполнено:

$$|P(z)| \geq |P_0|$$

так что $\inf\limits_{\mathbb{C}} |P(z)| = \inf\limits_{|z| \leq R} |P(z)|$
Согласно примерам:

$$\exists z_0, |z_0| \leq R, \inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$$

II. Докажем, что если $P(z_0) \neq 0$, то $\exists z_k \in \mathbb{C}$, т. ч. $|P(z_k)| < |P(z_0)|$.
Рассм. $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}, \deg Q = \deg P$

Обозначим через α_k наим. коэф. Q, отлич от 0, $k \geq 1$. Тогда $Q(z) = 1 + \alpha_k z^k + \ldots + \alpha_n z^n$. Рассм.:

$$z_1 \in \mathbb{C}, \alpha_k z_1^k = -1, \text{ и пусть } t \in (0,1)$$

$$Q(tz_1) = 1 - t^k + t^{k+1}\phi(t), \text{ где } \phi(t) \text{ — мн-н степени } n-k-1$$

C — наиб. из модулей коэф-тов $\phi(t)$, тогда $|\phi(t)| \leq C(n-k)$

$$|Q(tz_1)| \leq 1 - t^k + t^{k+1}|\phi(t)| \leq 1 - t^k(1 - tC(n-k))$$

При $t \in \left(0, \frac{1}{C(n-k)}\right)$, $|Q(tz_1)| < 1$

□

1.2 Комплексная экспонента e^z

Утверждение 1.1. *Последовательность $a_n(z)$ сх-ся:*

$$a_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Доказательство. По формуле бинома:

$$a_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{z^k}{n^k}, \text{ где}$$

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}, n > m$. Т. к. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ — строго возрастает, то:

$$\frac{C_n^k}{n^k} > \frac{C_m^k}{m^k}, k = 1, \ldots, m$$

Поэтому по нер-ву:

$$|a_n(z) - a_m(z)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k}\right) + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}z^k\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k}\right)|z|^k + \sum_{k=m+1}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}|z|^k = a_n(|z|) - a_m(|z|)$$

Т. к. $\{\, a_n(|z|)\,\}$, то она фундам., а значит, $\{\, a_n(z)\,\}$ фундам. (в $\mathbb{C}$). Сл-но, $\{\, a_n(z)\,\}$ — сх-ся. □

Определение 1.4. Функция $e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, $z\in\mathbb{C}$ наз-ся комплексной экспонентой.

Утверждение 1.2.

$$\forall z,w\in\mathbb{C}\colon e^{z+w}=e^ze^w$$

Доказательство. Такое же, как и в случае $\mathbb{R}$ □

Теорема 1.3.

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!},\forall z\in\mathbb{C}$$

2 Лекция 30

Теорема 2.1.

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!},\forall z\in\mathbb{C}$$

Доказательство. ПУсть $z\in\mathbb{C}$. Заф. $\varepsilon>0$ и выберем $m\in\mathbb{N}$, т. ч. $|z|\le m$ и оценим при $n>m$ и $\frac{|z|^{m+1}}{m!}<\frac{\varepsilon}{4}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{n^k}z^k\right|=|\sum_{k=0}^{m}\frac{z^k}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=m+1}^{n}\frac{z^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{m}\frac{|z^k|}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)+2\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|z^k|}{k!}$$

Рассм. 2-ую сумму:

$$\sum_{k=m+1}^{n}\frac{|z^k|}{k!}=\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+\frac{|z|}{m+1}+\ldots+\frac{|z|^{n-m-1}}{(m+2)\dots n}\right)\le$$

$$\le\left[q=\frac{|z|}{m+1}\right]\le\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\left(1+q+\ldots+q^{n-m+1}\right)\le$$

$$\le\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{1}{1-q}=\frac{|z|^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{m+1}{m+1-|z|}\le\frac{|z|^{m+1}}{m!}$$

Заметим, что $\frac{|z|^{m+1}}{m!}$ — б. м., т. е.

$$\exists m_0 \colon \forall m \geq m_0, \frac{|z|^{m+1}}{m!} < \frac{\varepsilon}{4}$$

А т. к. длинная скобка при $n \to \infty$ стремиться к 0, то всё получается и теорема доказана. □

Пример. $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sum_{m=0}^{2n} \frac{(ix)^m}{m!} = \sum_{m\text{ — чёт}} + \sum_{m\text{ — нечёт.}} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Распишем разложение $\cos$ *и* $\sin$ *по формуле Тейлора, с остаточным членом в форму Лагранжа.*

$$\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = \frac{\cos^{(2n+1)}(\xi) x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\Rightarrow \left| \cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right|$$

Получаем:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

2.1 Обсуждаем модель $\mathbb{R}$

2.1.1 Строим $\mathbb{N}$

$$< \mathbb{N}, +, \cdot, \leq >$$

$$0 = \emptyset$$

$$S(n) = n \cup \{ n \}$$

$$\mathbb{N} = \{ 0, S(0), S(S(0)), S(S(S(0))), \ldots \}$$

$$a + 0 = a$$

$$a + S(b) = S(a + b)$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot S(b) = a \cdot b + a$$

$$a \leq b \iff \exists c\colon (a + c = b)$$

$$x = a - b$$

$$(a, b),\ \text{где } a, b \in \mathbb{N}$$

$$a - b = c - d \iff a + d = b + c \iff (a, b) \sim (c, d)$$

2.1.2 Строим $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = {}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}/_{\sim}$$

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$$

$$(a, b) + (b, a) \sim (0, 0)$$

$$[(a, b)] + [(c, d)] = (a + c, b + d)$$

$$(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$$

$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [ac + bd, ad + bc]$$

$$a - b \leq c - d \iff a + d \leq b + c \iff (a, b) \leq (c, d)$$

Введём также инъекцию $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$i(n) = [(n, 0)]$$

2.1.3 Строим $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = {}^{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}/_{\sim}$$

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

$$(a, b) + (c, d) = (ad + cb, bd)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$$

$$(a, b) \leq (c, d) \iff$$

$$\iff (bd > 0 \land ad \leq bc) \lor (bd < 0 \land ad \geq bc)$$

$$(a, b) \cdot (b, a) \sim (1, 1)$$

Введём также инъекцию: $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$

$$i(a) = [(a, 1)]$$

2.1.4 Строим $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$$

Определение 2.1. Посл-ть $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ наз-ся фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Определение 2.2. Число $r \in a$ наз-ся пределом посл-ти $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+\colon \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N(|a_n - r| < \varepsilon)$$

Обозначение. *Мн-во фундаментальных последовательной назовём C (от Cauchy).*

$$\mathbb{R} = {}^{C}/_{\sim}$$

$$(a_n) \sim (b_n) \iff (a_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Утверждение 2.1. *Пусть $(a_n), (b_n) \in C$. Тогда $(a_n + b_n) \in C$*

Доказательство. Заф. $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$. Выберем $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ так, что:

$$\forall n, m \geq N_1(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\forall n, m \geq N_2(|b_n - b_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\forall n, m \geq max(N_1, N_2)\colon$$

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon$$

$\square$

Лемма 2.2. *Пусть $(a_n) \in C$, тогда верно одно из трех:*

1) $a_n \to 0$

2) $\exists r \in \mathbb{Q}_+, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, (a_n \geq r)$

3) $\exists r \in \mathbb{Q}_-, \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n \geq N, (a_n \leq r)$

Доказательство. Если $a_n \not\to 0$, то $\exists \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, (|a_n| \geq \varepsilon)$ $\square$