

Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

31 октября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 3	3
1.1	Мощности мн-в	3
1.1.1	Парадоксы	3
1.1.2	Счётных мн-в	4
1.1.3	Отношение равномощности	5
1.1.4	Сравнимость по мощности	5
2	Лекция 4	7
2.1	Бинарные отношения	9
3	Лекция 5	11
3.1	Отношения эквивалентности (\sim)	11
3.2	Отношение порядка (\leq)	13
4	Лекция 6	16
4.1	Плотный порядок. Изоморфизм	16
4.2	Предпорядки	18
4.2.1	Агрегирование предпорядков	19
5	Лекция 7	20
5.1	База	20
6	Лекция 8	22
6.1	Продолжение про тождества	22
7	Лекция 9	25
7.1	Циклические п-ти	26
7.2	Формула обращения Мёбиуса	27

1 Лекция 3

1.1 Мощности мн-в

1.1.1 Парадоксы

Парадокс Галилея:

Все нат. числа	\nsubseteq	полные квадраты
n	\longleftrightarrow	n^2

Гранд-отель Гильберта:

1	2	3	4	5	6	7	...
---	---	---	---	---	---	---	-----

- 1) Все места заняты, нужно подселить постояльца:

<u>Решение.</u>	Новый	\rightarrow	0
	i	\rightarrow	$(i + 1)$

- 2) Есть своб. места, хотим занять все комнаты имеющимися постояльцами:

Решение. Если мн-во занятых комнат бесконечно, то:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

(1 - занято, 0 - свободно) \Rightarrow
Переносим 1 в самый ранний 0 для всех 1

- 3) 2 гранд-отеля, полностью заняты. Один закрылся, как всех заселить?

Решение.

0	1	2	3	4	5	...
---	---	---	---	---	---	-----

a	b	c	d	e	f	...
---	---	---	---	---	---	-----

\Rightarrow

0	a	1	b	2	c	...
---	---	---	---	---	---	-----

4) Гранд-авеню, гранд-отелей. Цель: переселить всех в один отель:

Решение.

Отель 0: \mapsto неч. номера

Отель 1: \mapsto номера, кот. : 2, \nmid 4

Отель 2: \mapsto номера, кот. : 4, \nmid 8

Отель k : \mapsto номера, кот. : 2^k , \nmid 2^{k+1}

1.1.2 Счётных мн-в

Определение 1.1. A и B равномощны ($A \cong B$), если \exists биекция $f : A \rightarrow B$

Определение 1.2. A наз-ся счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

Утверждение 1.1. 1) A счётно $\Rightarrow A \cup x$ счётно

2) Любое подмн-во счётного мн-ва конечно или счётно

3) A, B счётны $\Rightarrow A \cup B$ счётно

4) A_0, A_1, \dots - сч. $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ - сч.

или: A, B - сч. $\Rightarrow A \times B$ - сч.

Доказательство. 1) $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ - биекция

$$g : A \cup \{x\} \rightarrow \mathbb{N}:$$

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ g(y) = f(y) + 1, y \in A \end{cases}$$

2)

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}, \text{ - биекция; } B \subset A$$

$$g : B \rightarrow \mathbb{N}; g(x) = \# \{ y \in B \mid f(y) < f(x) \}$$

3)

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}; g : B \rightarrow \mathbb{N}$$

$$h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}; h(x) = \begin{cases} 2f(x), x \in A \\ 2g(x) + 1, x \in B \end{cases}$$

4)

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow \mathbb{N}; \\ g &: B \rightarrow \mathbb{N}; \\ h &: A \times B \rightarrow \mathbb{N}; h(x, y) = 2^{f(x)} * (2g(y) + 1) - 1 \end{aligned}$$

□

1.1.3 Отношение равномощности

Утверждение 1.2. Общие св-ва равномощности:

- 1) Рефлексивность: $A \cong A$
(т. к. id_A - биекция)
- 2) Симметричность: $A \cong B \iff B \cong A$
(f - биекция $\iff f^{-1}$ - биекция)
- 3) Транзитивность: $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$
(т. к. композиция биекций - биекция)

1.1.4 Сравнимость по мощности

Обозначение. • Нестрогая: $A \preceq B$, если $\exists B' \subset B, A \cong B'$
(A не более мощно чем B)

• Строгая: $A \prec B$, если $A \preceq B, A \not\cong B$
(A менее мощно чем B)

Утверждение 1.3. Св-ва сравнимости по мощ-ти:

- 1) Рефлексивность: $A \preceq A$; Антирефлексивность: $A \not\prec A$
- 2) Транзитивность: $A \preceq B, B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$

Для строгой сравнимости:

Доказательство.

$$\begin{aligned} A \prec B, B \prec C &\Rightarrow A \prec C \\ A \preceq C &\text{ - из предыдущего} \end{aligned}$$

Нужно: $A \cong C$

□

Теорема 1.1 (Теорема Кантора-Бернштейна).

$$A \cong B, B \cong A \Rightarrow A \cong B$$

Доказательство. 1) Пусть $f : A_0 \rightarrow B_1 \subset B_0$ - биекция

$g : B_0 \rightarrow A_1 \subset A_0$ - биекция

$$2) \quad B_{i+1} = f(A_i); A_{i+1} = g(B_i)$$

$$3) \quad C_i = A_i \setminus A_{i+1}; D_i = B_i \setminus B_{i+1}$$

$$4) \quad C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i; D = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$$

Утверждение 1.4. $C_i \cong D_{i+1}$, т. е. $f : C_i \rightarrow D_{i+1}$ - биекция

Почему? Потому что:

$$C_i = A_i \setminus A_{i+1}; f(A_i) = B_{i+1}, f(A_{i+1}) = B_{i+2}$$

$$f(A_i \setminus A_{i+1}) = (\text{т. к. } f - \text{биекция}) f(A_i) \setminus f(A_{i+1}) = B_{i+1} \setminus B_{i+2} = D_{i+1} = f(C_i)$$

Утверждение 1.5.

$$D_i \cong C_{i+1} \text{ (симметрично)}$$

Следствие.

$$C_0 \cong C_2 \cong C_4 \cong C_6 \cong \dots$$

$$C_0 \cong D_1 \cong D_3 \cong D_5 \dots$$

Утверждение 1.6.

$$C \cong D$$

Доказательство. f - биекция

Пусть $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \forall i, x \in A_i \Rightarrow \forall i, f(x) \in B_{i+1} \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Т. е. $f(C) \subset D$:

Инъекция - наследуется

Сюръекция: $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \Rightarrow \forall i, y \in B_{i+1} \Rightarrow \forall i, f^{-1}(y) \in A_i \Rightarrow f^{-1}(y) \in$

C

□

$$A = C \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$

$$B = D \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \dots$$

При этом:

$$\left\{ \begin{array}{l} C \cong D \\ \left\{ \begin{array}{l} C_0 \cong D_1 \\ C_1 \cong D_0 \\ C_2 \cong D_3 \\ C_3 \cong D_2 \\ \vdots \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow A \cong B$$

□

2 Лекция 4

Обозначение. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - это

- 1) Мн-во подмножеств $A \subset \mathbb{N}$
- 2) Мн-во ф-ций $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$
- 3) Мн-во $A \leftrightarrow f_A : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Замечание. Бесконечная двоичная дробь:

$$\underline{a_1 a_2 \dots a_n} 01111 \dots = \underline{a_1 a_2 \dots a_n} 10000 \dots$$

Задача 2.1. Показать:

$$[0, 1] \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{ \text{посл-ти с 1 в периоде} \}$$

Доказательство. Конструктивно: Picture

□

Теорема 2.1. A - беск., B - сч. $\Rightarrow A \cup B \cong A$

Следствие.

$$[0, 1] \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

Лемма 2.2. В любом бесконечном мн-ве есть счётное подмн-во

Доказательство. A - беск. мн-во

$a_0 \in A, a_1 \in A \setminus \{a_0\}, \dots$

$a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ A - беск., сл-но на каждом шаге возможен выбор нового эл-та \square

Теперь докажем теорему:

Доказательство. A - беск. $\Rightarrow C \subset A, C$ - счётно

$$\begin{cases} C \cong \mathbb{N} \\ B \cong \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow C \cup B \cong \mathbb{N} \cong C$$

$$A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup B \cong (A \setminus C) \cup C \cong A$$

\square

Теорема 2.3 (Кантора). $[0, 1]$ - несчётен (или: $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ несчётно)

Доказательство. Пусть $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - счётно, тогда α_i - i -ая бинарная последовательность:

α_0	00000 ...
α_1	11111 ...
α_2	01011 ...
\vdots	\vdots

Воспользуемся диагональным методом Кантора:. Возьмём диагональную п-ть:

$$d_i = \alpha_i^i, d = 010 \dots$$

$$d'_i = 1 - \alpha_i^i, d' = 101 \dots$$

Если $d' = (\alpha_k)^k$, то $(d_k)^k = ((d_k)^k)' = 1 - (\alpha_k)^k$, что невозможно \Rightarrow противоречие. \square

Теорема 2.4 (Общая теорема Кантора). $\forall A: A \lesssim 2^A$

Доказательство. Пусть $\phi: A \rightarrow 2^A$ - биекция

$\phi(x)$ - подмн-во A

Корректен ли вопрос о том, что $x \in \phi(x)$?

Расм. $M = \{x \mid x \notin \phi(x)\}$

Т. к. ϕ - биекция \Rightarrow сущ. $m = \phi^{-1}(M)$. Т. е. $\phi(m) = M$

Рассм. 2 случая:

1)

$$m \in M \Rightarrow m \in \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{ложно при } x = m \Rightarrow m \notin M$$

2)

$$m \notin M \Rightarrow m \notin \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{истинно, при } x = m \Rightarrow m \in M$$

Получаем противоречие. □

Определение 2.1. A континуально, если $A \cong \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Теорема 2.5. A - континуально $\Rightarrow A^2$ - континуально

Пример.

$$[0, 1] \cong [0, 1]^2$$

Следствие.

$$(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})^2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha, \beta) \leftrightarrow \gamma = \alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots$$

$$[0, 1] \cong \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} - \text{континуально}$$

По индукции:

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}$$

Верно и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$

Доказательство. Док-во конструктивно ИЛИ:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$$

□

2.1 Бинарные отношения

Определение 2.2. Отношение - любое $R \in A \times A$

Обозначение. Отношение R между a и b :

1) $(a, b) = R$

2) $R(a, b)$

3) aRb

Различные виды отношений:

1) Рефлексивные: $\forall a : aRa$

Пример. $=, \leq, \subset, \cong, \sqsubset$

2) Антирефлексивные: $\forall a : \neg(aRa)$

Пример. $<, \in, ||$

3) Симметричные: $\forall a, \forall b(aRb \rightarrow bRa)$

Пример. $\cong, ||, =, \equiv_k$

4) Антисимметричные: $\forall a, \forall b((aRb \wedge bRa) \rightarrow a = b)$

Пример. $\leq, <, >, \sqsubset, \sqsupset, \subset$

5) Транзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \wedge bRc) \rightarrow aRc)$$

Пример. $=, \cong, \equiv_k, \leq, \subset, \sqsubset$

6) Антитранзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \wedge bRc) \rightarrow \neg(aRc))$$

$$|a - b| = 1 \text{ (На } \mathbb{R})$$

7) Полнота: $\forall a, b(aRb \vee bRa)$

Пример. \leq, \cong (теор. Цермело)

Наборы св-в:

1) Отнош. эквивалентности: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Пример. $\equiv_k, (|| \text{ или } =), \sim$ (подобие \triangle -ов)

Общий вид: $f : A \rightarrow B, x \sim y$, если $f(x) = f(y)$

- 2) Отношение нестрогого частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность, транзитивность:

Пример. $\subset, \leq, :, \sqsubset, \dots$

- 3) Отнош. строгого част. п-ка: антирефл., антисимметричность, транзитивность
- 4) Отнош. лин. порядка: нестрогий частичный порядок + полнота
- 5) Препорядки: рефлексивность, транзитивность
- 6) Полные предпорядки: полнота + транзитивность

3 Лекция 5

3.1 Отношения эквивалентности (\sim)

Определение 3.1. Отношение эквив. - отношение с св-вами:

- 1) Рефлексивность: $x \sim x$
- 2) Симметричность: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- 3) Транзит.: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Определение 3.2. Класс эквив.: $K_x = \{ y \mid y \sim x \}$

Теорема 3.1 (О разбиении на классы эквив.). Если задано отн. экв. \sim на A , то A можно представить как:

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

т. ч.:

- 1) Каждая A_i - K_x для некот. x

$$2) \quad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$3) \quad y, z \in A_i \Rightarrow y \sim z$$

$$4) \quad y \in A_i, z \in A_j, i \neq j \Rightarrow y \approx z$$

Доказательство. Рассм. всевозм. мн-ва, явл-ся классами эквив-ти. Докажем выполн. св-в для них. Для этого докажем леммы I-IV

Лемма 3.2 (I). $x \in K_x$

Доказательство.

$$x \sim x \Rightarrow x \in \{ y \mid y \sim x \} \Rightarrow x \in K_x$$

□

Следствие.

$$\bigsqcup_{x \in A} K_x = A$$

Лемма 3.3 (II).

$$y \in K_x, z \in K_x \Rightarrow y \sim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow y \sim x \\ z \in K_x \Rightarrow x \sim z \text{ - симметричность} \end{cases} \Rightarrow y \sim z \text{ - транзитивность}$$

□

Лемма 3.4 (III).

$$K_x \neq K_t \Rightarrow K_x \cap K_t = \emptyset$$

Доказательство. Докажем контрапозицию:

$$\begin{aligned} K_x \cap K_t \ni w &\Rightarrow K_x = K_t \\ \Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ w \sim t \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ t \sim w \end{cases} \Rightarrow t \sim x \end{aligned}$$

Если $y \in K_t \Rightarrow y \sim t \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \in K_x$, т. е. $K_t \subset K_x$. Аналогично, получаем $K_x \subset K_t \Rightarrow K_x = K_t$ □

Лемма 3.5 (IV).

$$K_x \neq K_t, y \in K_x, z \in K_t \Rightarrow y \sim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow x \sim y \\ y \in K_t \Rightarrow z \sim t \end{cases}$$

Из $y \sim z$, то, по транзитивности, $x \sim t \Rightarrow K_x = K_t$!!! Т. к. это противоречие, то $y \sim z$ □

□

Определение 3.3. Фактормножество A/\sim - мн-во классов эквив.

Теорема 3.6. Если \sim - отн. эквив. на A , то сущ. B и $f : A \rightarrow B$, т. ч.:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Доказательство.

$$B = A/\sim$$

$$f(x) = K_x$$

□

3.2 Отношение порядка (\leq)

Определение 3.4. Отношение порядка - отношение со св-вами:

- Нестрогий порядок \leq :
 - 1) Рефлексивность: $x \leq x$
 - 2) Антисимм.: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
 - 3) Транзитивность: $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
 - 4) (Для линейных порядков) Полнота: $(x \leq y \vee y \leq x)$
- Строгий порядок $<$:
 - 1) Анtireфлексивность: $\neg(x < x)$
 - 2) Антисимметричность: $\neg(x < y \wedge y < x)$

- 3) Транзитивность: $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
 4) (Для линейных порядков) Трихотомичность:

$$x < y \vee y < x \vee x = y$$

Пример. 1) Стандартный числовой порядок в $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

- 2) $:$ на \mathbb{N} (в том числе включая 0)

$$x : y \iff \exists z : x = y \cdot z$$

- 3) \subset на 2^A

- 4) $\sqsubset, \sqsupset, (substring)$ на $\{0, 1\}^n$

- 5) Асимптот. порядок на ф-циях $f < g$, если $\exists N \forall n > N : f(n) < g(n)$

- 6) Пор-ки на \mathbb{R}^2 :

- а) Лексикографический:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 < x_2 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

- б) Покоординатный:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \leq x_2 \\ y_1 \leq y_2 \end{cases}$$

Диаграмма Хассе: граф на пл-ти, т. ч. вершины, соединённые рёбрами, не находятся на одном уровне (Picture)

Рассм.: $(\{0, 1, \dots, 9\}, :)$

$x \leq y \iff$ Есть восходящий путь из x в y

Определение 3.5. Наибольший эл-т - Больше всех

$$x - \text{наиб.} \iff \forall y : y \leq x$$

Определение 3.6. Макс. эл-т - больше него нет

$$x - \text{макс.} \iff \neg \exists y : y > x$$

Для лин. порядка - это одно и то же

Для част. порядка - может быть разное, т. е.:

$$\forall y(y \leq x \vee y \text{ не сравним с } x)$$

- макс. эл-т для част. порядка.

Наименьший и минимальный - аналогично.

В конечном непустом мн-ве всегда есть макс. и мин.

В конечном мн-ве единственный макс. является наибольшим.

Для беск. мн-в всё, что выше, конечно неверно. (picture)

Определение 3.7. Упорядоченное мн-во - пара из мн-ва и порядка на нём.

Обозначение. Пишут так: (A, \leq_A) , сокращённо УМ

Операции над УМ:

1) Сложение:

$$(A, \leq_A) + (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \sqcup B$$

$$x \leq y \iff \begin{cases} x, y \in A : x \leq_A y \\ x, y \in B : x \leq_B y \\ x \in A, y \in B \end{cases}$$

При этом оно:

– Ассоциативно: $A + (B + C) = (A + B) + C$

– Некоммутативно: $A + B \neq B + A$

2) Умножение:

$$(A, \leq_A) \cdot (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \times B$$

$$(a_1, b_1) \leq_C (a_2, b_2) \iff \begin{cases} b_1 <_B b_2 \\ b_1 = b_2, a_1 \leq_A a_2 \end{cases}$$

4 Лекция 6

4.1 Плотный порядок. Изоморфизм

Отношение частичного порядка:

- 1) $x \leq x$ - рефлексивность
- 2) $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ - антисимметричность
- 3) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ - транзитивность

Отношение линейного порядка:

- 4) $\forall x, y: x \leq y \vee y \leq x$

Упор. мн-во (A, \leq_A)

Наибольший эл-т - $M: \forall x, x \leq M$.

Наименьший эл-т - $m: \forall x, x \geq m$

Максимальный эл-т - $M: \neg \exists x: x > M$ (или $\forall x: x \leq M \vee (x \text{ не сравним с } M)$)

Минимальный эл-т $m: \neg \exists x: x < m$

Определение 4.1. Плотный порядок:

$$\forall x, y (x < y \rightarrow \exists z: x < z < y)$$

Утверждение 4.1. Плотный порядок - либо тривиальный (т. е. разл-ные эл-ты не сравнимы), либо опр. на бесконечном мн-ве.

Определение 4.2. Изоморфизм упор. мн-в (A, \leq_A) и (B, \leq_B) - это такая биекция $f: A \rightarrow B$, что:

$$\forall x, y: (x \leq_A y \iff f(x) \leq_B f(y))$$

Пример.

$$(\{n \mid 30 \leq n\}, \leq) \text{ и } (2^{\{a,b,c\}}, \subset)$$

Пример.

$$(\mathbb{Q} \cap (0, 1), \leq) \text{ и } (\mathbb{Q} \cap (0, +\infty), \leq)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1$$

Теорема 4.1. Любые два счётных плотно, линейно упоряд. мн-ва без наиб. и наим. эл-тов изоморфны:

Пример.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_2 = \{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \},$$

\mathbb{A} - корни мн-ов с целыми коэфф-ми

Доказательство.

$$A = \{ a_0, a_1, \dots \}, B = \{ b_0, b_1, \dots \}$$

Построим инъекцию f :

- 1) Построим $a_0 \rightarrow b_0$
- 2) Б. О. О. $a_1 > a_0$. Т. к. в B нет наибольшего, то есть $b_i : b_i > b_0$. Тогда добавим $a_1 \rightarrow b_i$
- 3) Пусть для $a_k, k \leq n-1$ соединения проведены. Проведём для a_n . Рассм. три случая:
 - I) $a_n < a_k, \forall k \leq n-1$. Тогда отобразим его в $b_p : b_p < b_i, \forall i$ из использованных ранее.
 - II) $a_n > a_k, \forall k \leq n-1$. Тогда отобразим его в $b_p : b_p > b_i, \forall i$ из использованных ранее.
 - III) Иначе у a_n есть использованные ранее соседи a_i и a_j . Т. к. A и B - лин. упор.: $\exists p : f(a_i) < b_p < f(a_j)$. Добавим $a_n \rightarrow b_p$

Как добиться, чтобы постр. ф-ция была сюръекцией? Варианты:

- 1) Каждый раз брать эл-т B с наим номером из подходящих.
- 2) Действовать по очереди: сначала брать эл-т A с наим. номером, кот. ещё не рассмотрен, и отправлять в B . Затем эл-т B с наим. номером, кот. ещё не рассм, и отправлять в A . И т. д.

□

4.2 Предпорядки

Определение 4.3. Предпорядок (Предпочтения) - отношение, обладающее рефлексивностью и транзитивностью.

Определение 4.4. Полный предпорядок (Рациональные предпочтения) - предпорядок + любые два сравнимы. (или полн. + транз.)

Обозначение.

$a \succsim b$ - предпор.

$a \sim b \iff (a \succsim b \wedge b \succsim a)$ - отношение безразличия

$a \succ b \iff (a \succsim b \wedge \neg(b \succ a))$ - строгий предпорядок

Нетранзитивно: $a \succ b \succ c \succ a$

Теорема 4.2 (Структурная теорема о предпорядке на мн-ве A).

- 1) Отношение безразличия - это отношение эквив-ти на A
- 2) На эл-ах A/\sim можно ввести отношение $S \leq T$, если $\exists x \in S, y \in T : x \precsim y$
Это отнош. будет част. пор. на A/\sim
- 3) \leq лин. пор. $\iff \precsim$ - полон.

Доказательство.

- 1) Рефл.: $a \precsim a \Rightarrow (a \precsim a \wedge a \precsim a) \Rightarrow a \sim a$
- 2) Симм.:

$$a \sim b \iff (a \precsim b \wedge b \precsim a) \iff (b \precsim a \wedge a \precsim b) \iff b \sim a$$

- 3) Транзитивность:

$$\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \iff \begin{cases} a \precsim b \wedge b \precsim a \\ b \precsim c \wedge c \precsim b \end{cases} \iff \begin{cases} a \precsim c \\ c \precsim a \end{cases} \Rightarrow a \sim c$$

- 1) Рефл $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S \Rightarrow$ т. к. $x \precsim x \Rightarrow S \leq S$

2) Транз. $R \leq S \leq T$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in R \\ y, z \in S \\ t \in T \\ x \lesssim y \\ z \lesssim t \end{array} \right. \Rightarrow y \lesssim z \Rightarrow x \lesssim t \Rightarrow R \leq T$$

3) Антисимм.:

$$S \leq T, T \leq S$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in S, y \in T \Rightarrow x \lesssim y \\ z \in T, t \in S \Rightarrow z \lesssim t \\ x \sim t \\ y \sim z \end{array} \right. \Rightarrow y \sim z \lesssim t \sim x \Rightarrow y \lesssim x \Rightarrow x \sim y \Rightarrow S = T$$

• \Leftarrow) S, T - классы

$$x \in S, y \in T :$$

$$\text{Если } x \lesssim y \Rightarrow S \leq T$$

$$\text{Если } y \lesssim x \Rightarrow T \leq S$$

\Rightarrow) Даны x, y :

$$x \in S, y \in T, \text{ б. о. о. } S \leq T$$

$$\Rightarrow \exists z \in S, t \in T : z \lesssim t$$

$$x \sim z \lesssim t \sim y \Rightarrow x \lesssim y$$

S - класс эквив., T - класс эквив.

□

4.2.1 Агрегирование предпорядков

A - мн-во, $\lesssim_1, \dots, \lesssim_n$ - препорядки \Rightarrow

$$F : (\lesssim_1, \lesssim_2, \dots, \lesssim_n) \mapsto \lesssim$$

Определение 4.5. Агрегирование по больш-ву:

$$x \preceq y, \text{ если } \# \{ i \mid x \lesssim_i y \} \leq \# \{ i \mid y \lesssim_i x \}$$

Парадокс Кондорсе:

$$\begin{cases} a \lesssim_1 b \lesssim_1 c \\ b \lesssim_2 c \lesssim_2 a \\ c \lesssim_3 a \lesssim_3 b \end{cases} \Rightarrow a \trianglelefteq b \trianglelefteq c \trianglelefteq a$$

Теорема 4.3. Любое полное отношение может быть реализовано как результат агрегирования предпорядков

Доказательство. Эл-ты $x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$. Также есть два предпорядка $<$ и $<'$, т. ч.:

$$\begin{aligned} x < y < a_1 < \dots < a_{n-2} \\ a_{n-2} <' a_{n-3} \dots a_2 < a_1 < x < y \end{aligned}$$

□

5 Лекция 7

5.1 База

Сложение, умножение.

Принцип Дирихле.

$\{a_1, \dots, a_n\}$

Сочетания: без и с повторениями.

Размещения: без и с повторениями.

C_n^k - число сочет. без повтор. (или $\binom{n}{k}$)

\overline{C}_n^k - число сочет. с повт.

Теорема 5.1.

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

к-сочет с повтор. \longleftrightarrow п-сть из 0 и 1 длины $n + k - 1$ с k ед-цами.

$$n = 26, \{ a, b, c, \dots \}, k = 4, \{ m, a, m, a \}$$

□

$$V = \{ \bar{x} = (x_1, \dots, x_8) : \forall i, x_i \in \{-1, 0, 1\}, x_1^2 + \dots x_8^2 = 4 \}$$

$$|V| = C_8^4 \cdot 2^4 = 1120$$

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_8 y_8$$

Рассм. произв. $W \subset V : \forall \bar{x}, \bar{y} \in W : (\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

Задача 5.1. $\{1, 2, \dots, 30\}$

$\overline{M_1, \dots, M_{15}}$ - различные 5-сочет.

Можно ли покрасить числа $1, \dots, 30$ в 2 цвета, чтобы все M_i были неоднородными?

Решение. Всего раскрасок: 2^{30}

Кол-во раскрасок, в кот-ых M_i закрашено в один цвет: 2^{26}

Кол-во раскрасок, в кот-ых хотя бы одно M_i закрашено в один цвет:

$$\text{КОЛ-ВО} \leq 2^{26} \cdot 15 < 2^{30}$$

Тождества:

1)

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

2)

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

6 Лекция 8

6.1 Продолжение про тождества

3)

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

4)

$$(C_n^0)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$

Доказательство. 4) Рассм. $\{a_1, \dots, a_{2n}\}$

Выберем из этого мн-ва все возм. n -сочетания без повторений.

Их C_{2n}^n

$$\{ \underbrace{a_1, \dots, a_n}_{k \text{ объектов}}; \underbrace{a_{n+1}, \dots, a_{2n}}_{n-k \text{ объектов}} \}$$

Из левой половины выбираем k объектов, из правой соотв. - $n - k$. Кол-во способов так сделать:

$$C_n^k C_n^{n-k} = (C_n^k)^2$$

Складывая по всем k :

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$$

□

Вопрос: $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^4$

5) Рассм. $\{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. Выберем из этого мн-ва все возможные m -сочетания с повторениями. Их:

$$\overline{C_{n+1}^m} = C_{n+m}^m = C_{n+m}^n$$

Для $k = 0, 1, \dots, m$ рассм. по отдельности все m -сочет. с повторениями, в каждом из которых ровно k объектов a_1 . Их:

$$\overline{C_n^{m-k}} = C_{n+m-k-1}^{m-k} = C_{n+m-k-1}^{n-1}$$

Получаем тождество:

$$\sum_{k=0}^m C_{n-1+m-k}^{n-1} = C_{n+m}^n$$

Следствие.

$$n = 1 : 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = C_{m+1}^1$$

$$n = 2 : (m+1) + (m) + \dots + 1 = C_{m+2}^2 = \frac{(m+2)!}{2!m!} = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$n = 3 : \text{Сумма квадратов :)}$$

6) Полиномиальная ф-ла:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = (x_1 + \dots + x_k) \underset{n \text{ раз}}{\dots} (x_1 + \dots + x_k)$$

Задача 6.1. Комбинаторная задача: посчитать кол-во способов получить из слова КОМБИНАТОРИКА перестановкой букв разные слова.

Решение. Всего букв: 13.

к - 2
о - 2
м - 1
б - 1
и - 2
а - 2
н - 1
т - 1
р - 1

$$\Rightarrow C_{13}^2 C_{11}^2 C_9^1 \dots C_1^1 = \frac{13!}{2!2!1!1! \dots 1!}$$

Задача 6.2. Даны n_1 объектов a_1 , n_2 объектов a_2 , \dots n_k объектов a_k . Сколько способов сформировать п-ти из этих объектов.

Решение. $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ - кол-во способов сформировать п-ть из наших объектов.

Теорема 6.1.

$$P(n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}$$

Тогда:

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \dots + x_k) \dots (x_1 + \dots + x_k)}_{n \text{ раз}} = \dots + P(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k},$$

$P(n_1, \dots, n_k)$ - полиномиальный коэфф.

n_1 - кол-во скобок, из кот. взяли x_1

$n_2 - \dots x_2$

\vdots

$n_k - \dots x_k$

$$n_1 + \dots + n_k = n, \forall i, n_i \geq 0 \Rightarrow x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

6)

$$\sum_{n_1 + \dots + n_k = n} P(n_1, \dots, n_k) = k^n$$

7) Ф-ла включений-исключений: есть N объектов и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - св-ва:

Теорема 6.2.

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) =$$

Доказательство. Индукция по числу свойств:

– База:

$$n = 1 : N(\alpha'_1) = N - N(\alpha_1)$$

– Переход:

$$\forall N, \forall a_1, \dots, a_N, \forall k \leq n - 1, \forall \alpha_1, \dots, \alpha_k - \text{выполнена теорема.}$$

Берём произв. $N, a_1, \dots, a_N, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Рассм. св-ва $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$:

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1} N(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \quad (1)$$

Выберем из a_1, \dots, a_N те объекты, кот. обладают св-вом α_n . Их $N(\alpha_n) = M$, обозначим их, как: b_1, \dots, b_M :

$$\begin{aligned} M(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{n-1}) &= M - M(\alpha_1) - M(\alpha_2) - \dots - M(\alpha_{n-1}) + \dots + (-1)^{n-1} (M(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})) = \\ &= N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha_n) = N(\alpha_n) - N(\alpha_1, \alpha_n) - \dots - N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + \dots + (-1)^{n-1} (N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, чтобы получить $N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, вычислим (1) - (2):

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - \dots - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + \dots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + \dots + (-1)^n N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

□

7 Лекция 9

7)

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n > 0 \end{cases}$$

8) Рассм. $A = \{ a_1, \dots, a_n \}, m < n, m > 0$. Выберем из A все возм. m -разм. с повтор. Их n^m . $N = n^m, \alpha_1, \dots, \alpha_m$. Размещ. обладает св-вом $\alpha_i \iff \alpha_i \notin$ размещению.

$$N(\alpha_i) = (n-1)^m, N(\alpha_i, \alpha_j) = (n-2)^m$$

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = 0$$

По формуле вкл.-искл.:

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = n^m - n(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m + \dots$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (n-k)^m$$

Задача 7.1. Задача о беспорядках:

Определение 7.1. Беспорядок - перестановка, при кот. $\sigma_i \neq i, \forall i = \overline{1, n}$

Найдём кол-во беспорядков для $n = 100$: . Пусть α_i - св-во, при кот. $\sigma_i = i$, посчитаем:

$$N = 100!$$

$$N(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = 100! - 99! * 100 + C_{100}^2 \cdot 98! - \dots = \sum_{k=0}^n C_n^k (n-k)! = !n$$

При раскрытии С-шек, получаем:

$$N(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{100!} \approx \frac{1}{e}$$

"Физической интуицией" получаем:

$$\left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx \frac{1}{e}$$

7.1 Циклические п-ти

Алфавит: $X = \{ b_1, \dots, b_r \}$. Из b-шек составляем слова длины n .

$$a_1 a_2 \dots a_n, \forall i, a_i \in X$$

$$a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow \dots \rightarrow a_{n-1} \rightarrow a_n \rightarrow a_1$$

Т. е. $a_1 \dots a_n$ отождествляется с $a_2 \dots a_n a_1, a_3 \dots a_n a_1 a_2, \dots$

Однако r^n - кол-во обычных слов, т. е. n не всегда делит r^n .

Пример.

$$r = 3, X = \{ C, O, H \}, n = 4 :$$

Следующие слова нужно поделить на 4:

COCH

OCHC

CHCO

HCOC

Эти на 2:

COCO

ОСОС

А это на 1:

СССС

Для решение этой задачи, для начала, изучим следующий мощный инструмент:

7.2 Формула обращения Мёбиуса

Теорема 7.1 (ОТА).

$$\forall n \geq 2, \exists! \{ p_1, \dots p_s \}, \{ a_1, \dots a_s \} :$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_s^{\alpha_s}$$

(Это наз-ся каноническим разложением n)

Определение 7.2. Функция Мёбиуса $\mu(n)$:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ (-1)^s, n = p_1 \cdot \dots \cdot p_s \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Лемма 7.2.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $n \geq 2 \Rightarrow n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$$(d|n) \Rightarrow (d = p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}, \forall i, 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$$

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \mu(p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}) = \sum_{\beta_1=0}^1 \dots \sum_{\beta_k=0}^1 \mu(p_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot p_k^{\beta_k}) \\ &= \mu(1) + C_k^1(-1) + C_k^2(-1)^2 + \dots + C_k^k(-1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 7.3 (Формула обращения Мёбиуса). Пусть $f = f(n)$ - ф-ция $n \in \mathbb{N}$. Пусть $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Тогда:

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} f(d') &= \sum_{(d,d') : d \cdot d' | n} \mu(d) f(d') = \sum_{d|n} f(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = \\ &= f(n) \cdot \sum_{d'|1} \mu(d') + \sum_{d|n, d < n} f(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = f(n) \cdot 1 + \sum_{d|n, d < n} f(d) \cdot 0 = f(n) \end{aligned}$$

□