

Матан

Сергей Григорян

8 ноября 2024 г.

## Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Лекция 13</b>                                | <b>3</b>  |
| 1.0.1    | Долг прошлой жизни . . . . .                    | 3         |
| 1.1      | Равномерная непр-ть . . . . .                   | 3         |
| 1.2      | Показательная и логарифмическая ф-ции . . . . . | 5         |
| <b>2</b> | <b>Лекция 14</b>                                | <b>8</b>  |
| 2.0.1    | Ликбез по тригономе . . . . .                   | 10        |
| 2.0.2    | Сравнение ф-ций . . . . .                       | 12        |
| <b>3</b> | <b>Лекция 15</b>                                | <b>16</b> |
| 3.1      | Дифференцируемые ф-ции . . . . .                | 16        |
| <b>4</b> | <b>Лекция 16</b>                                | <b>17</b> |
| <b>5</b> | <b>Лекция 17</b>                                | <b>22</b> |
| 5.1      | Дифференциал ф-ции . . . . .                    | 23        |
| 5.2      | Теоремы о среднем . . . . .                     | 24        |
| <b>6</b> | <b>Лекция 18</b>                                | <b>26</b> |
| 6.1      | Приложения теореме о среднем . . . . .          | 27        |
| <b>7</b> | <b>Лекция 19</b>                                | <b>30</b> |
| 7.1      | Производные высших порядков . . . . .           | 33        |
| <b>8</b> | <b>Лекция 20</b>                                | <b>35</b> |
| 8.1      | Формула Тейлора . . . . .                       | 35        |

# 1 Лекция 13

## 1.0.1 Долг прошлой жизни

**Теорема 1.1** (О разрывах монот. ф-ции). Пусть  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ . Если  $f$  монотонна на  $(a, b)$ , то  $f$  на  $(a, b)$  может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.

*Доказательство.* Пусть  $f$  нестрого возр. на  $(a, b)$ . Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т.  $c \in (a, b)$   $\exists$  конечные  $f(c-0), f(c+0)$ , причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на  $(a, b)$  разрывы только I рода.

Пусть  $c, d \in (a, b), c < d$ . Тогда для  $\alpha \in (c, d)$ . Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c, b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a, d)} f(x) = f(d-0)$$

□

Поэтому если  $c, d$  - точки разрыва ф-ции  $f$ , то интервалы  $(f(c-0), f(c+0))$  и  $(f(d-0), f(d+0))$  - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку  $\in \mathbb{Q}$ , содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством  $\mathbb{Q}$ . Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

## 1.1 Равномерная непр-ть

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$  и  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Напомним, что  $f$  непр-на на  $E$ , если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

**Определение 1.1.** Ф-ция  $f$  наз-ся **равномерно непрерывной** (на  $E$ ), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

**Замечание.** Если  $f$  р. н. (равномерно непр-на) на  $E$ , то  $f$  непр-на на  $E$

**Задача 1.1.** Если  $f$  и  $g$  р. н. на  $E$  и огр-ны, то  $fg$  - р. н. на  $E$

**Определение 1.2.** Ф-ция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E (|f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|)$$

**Замечание.** Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ )

**Пример.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

*Доказательство.*

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

**Пример.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, но не р. н.}$$

**Замечание.**  $f$  не р. н.  $\iff$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E (|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

*Доказательство.* Для произвольного  $\delta > 0$  положим,  $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ . Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но,  $f$  не р. н.

□

**Теорема 1.2** (Кантора). Если  $f$  непр-на на  $[a, b]$ , то  $f$  - р. н. на  $[a, b]$

*Доказательство.* I) Предположим, что  $f$  не явл-ся р. н. Тогда полагая  $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , получаем  $x_n, x'_n \in [a, b]$ , т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В  $\{x_n\}$  имеет сх-ся подп-ть  $\{x_{n_k}\}$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ . Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \rightarrow x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти,  $f$  в  $x_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит  $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$

□

**Задача 1.2.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  р. н. на  $E$ . Покажите, что

$$\exists! F : \text{closure}(E) \rightarrow \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

## 1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

**Определение 1.3.** Ф-ция  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exp = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  наз-ся ЭКСПОНЕНТОЙ.

**Замечание.** Сх-ть  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  устанавливалась ранее для всях  $x \in \mathbb{R}$

**Теорема 1.3.** Для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  справедливо:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

*Доказательство.* Введём об-е  $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\begin{aligned} a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y) &= \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n = \\ &= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k \end{aligned}$$

Где:

$$b = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right), a = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$$

П-ть  $\{a_n(|x|)\}$ , нестрого возрастает, начиная с некот.  $n_0$  (см. док-во сх-ти):

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^p\right| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^p \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|), p = 1, \dots, n$$

Сл-но, каждое слагаемое в  $Q(x, y)$  оценивается по модулю  $C = \exp |x + y| \exp |x| \exp |y|$ . Тогда получаем:

$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)| \leq \frac{|x| |y| C}{n}$$

Переходя к пределу, получаем, что:

$$|\exp(x) \exp(y) - \exp(x + y)| \leq 0$$

Ч. Т. Д. □

**Следствие.**

$$\exp x > 0 \text{ и } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\exp(x) \exp(-x) = 1$$

□

**Лемма 1.4.**    *a)*

$$\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

*b)*

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}, \forall x < 1$$

*Доказательство.* Зафикс.  $N \in \mathbb{N}$ , т. ч.  $\frac{x}{N} \geq -1$ . Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N: \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x - \text{пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

**Теорема 1.5.** Ф-ция  $\exp$  непр-на, строго возр. и отображает  $\mathbb{R}$  на  $(0, +\infty)$

*Доказательство.* По нер-ву из предыдущей леммы, при  $x < 1$  имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при  $x \rightarrow 0$ ,  $\exp(x) \rightarrow 1$ . Тогда для  $\forall a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \left[ \begin{array}{l} t + a = x \\ t = x - a \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(t + a) = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$  ф-ция непр-на на  $\mathbb{R}$

Пусть  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ . Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x) \exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но,  $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

□

## 2 Лекция 14

**Определение 2.1.** Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция  $\ln: (0, +\infty)$ , обратная к  $\exp$

**Замечание.** По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:

- $\ln$  непр-на на обл-ти определения.
- $\ln$  строго возр.
- $\ln$  отображает  $(0, +\infty)$  на  $\mathbb{R}$ , при этом, если  $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

**Определение 2.2.** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ . Показательной ф-цией с основанием  $a$  наз-ся ф-ция:  $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

**Замечание.** Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при  $a > 1$  строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображает  $\mathbb{R}$  на  $(0, +\infty)$

**Замечание.** Пусть  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ . Тогда:

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) = \exp(\ln a) = a$$

Сл-но,  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

**Определение 2.3.** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ . Логарифмической ф-цией с основанием  $a$  наз-ся ф-ция  $\log_a: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Обратная к показательной ф-ции  $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

**Замечание.** Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображает  $(0, +\infty)$  на  $\mathbb{R}$ . Кроме того:

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Определение 2.4.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Степенной ф-цией с показателем  $\alpha$  наз-ся ф-ция  $x \mapsto x^\alpha, x \in E$ , где:



1)  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow E = \mathbb{R}$ , при этом  $x^0 = 1, x^\alpha = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ раз}}$

2)  $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , при этом  $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3)  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$ , при этом  $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

**Замечание.** Если в последнем случае  $\alpha > 0$ , то полагаем  $0^\alpha = 0$  (т. е. 0 включаем в  $E$ ), это согласуется с тем, что:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

**Замечание.** Из св-в  $\exp$  и  $\ln$  получаем, что степенная ф-ция непр-на на  $E$ , на  $(0, +\infty)$  строго возрастает на при  $\alpha > 0$  и строго убывает при  $\alpha < 0$

**Лемма 2.1** (Замечательные пределы).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

*Доказательство.* По пред. лемме при  $x < 1$ :

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \iff x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция  $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y-1}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$  - непр. в 0. Также  $f(x) = \ln(x+1)$  непр-на

в 0. Тогда композиция  $g \circ f$  непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и  $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  непр-на в 0  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e \quad \square$

**Задача 2.1.** Док-те, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

**Пример.**

$$e^\pi \vee \pi^e$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^x &> 1 + x \\ x &= \frac{\pi}{e} + 1 \\ e^{\frac{\pi}{e}-1} &> \frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e \end{aligned}$$

□

### 2.0.1 Ликбез по тригонометрии

**Лемма 2.2.** Для всех  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  верно:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

*Доказательство.* Picture:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &< S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Верно  $|\sin x| < |x|$ , причём рав-во имеет место только при  $x = 0$

*Доказательство.* Если  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то нер-во следует по лемме.

Если  $x \geq \frac{\pi}{2}$ , то  $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$

Если  $x < 0$ , то  $|\sin x| = |\sin(-x)| < |(-x)| = |x|$

□

**Следствие.** Ф-ции  $\sin$  и  $\cos$  непр-ны на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathbb{R}$ , тогда:

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} = |x-a| \rightarrow 0$$

Сл-но,  $\sin x$  в точке  $a$  равен  $\sin a \Rightarrow \sin x$  - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть  $\cos x$  или из ф-л тригонометрии:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$\cos x$  непр-н как композиция непр. ф-ций.

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.*  $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  и  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$  (из леммы) В силу чётности,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{предел} = 1$ .  $\square$

**Определение 2.5.** Обратные тригонометрические ф-ции:

1)  $\arcsin$ :

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2)  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$$

3)  $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\arctg = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4)  $\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

$$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)})^{-1}$$

**Определение 2.6.** Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto x^\alpha$
- $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
- $\arcsin, \arccos, \arctg, \operatorname{arcctg}$

**Определение 2.7.** Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

**Пример.**

$$\operatorname{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

**Теорема 2.3.** *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

**2.0.2 Сравнение ф-ций**

**Определение 2.8.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $E$  и существует  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\delta > 0$ , такие, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

- 1) Если  $\alpha(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что ф-ции  $f$  и  $g$  эквивалентны (асимптотически равны) при  $x \rightarrow a$ . Пишут  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow a$
- 2) Если  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что ф-ция  $f$  беск. мала по сравн. с ф-цией  $g$  при  $x \rightarrow a$ , пишут  $f(x) = o(g(x))$ , при  $x \rightarrow a$
- 3) Если  $\alpha$  - огр-на, то говорят, что ф-ция  $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow a$ . Пишут, что  $f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$

**Замечание.** Если  $g(x) \neq 0$  в неkot. проколот. окр-ти  $a$ , с учётом обл. опр-я, то:

1)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 1$$

2)

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow a \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3)

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow a \iff \exists M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \left( \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \right)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$ ) Следует из опр-я.

$\Leftarrow$ ) Положим:

$$\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ \text{что угодно, иначе} \end{cases}$$

□

**Задача 2.2.** Доказать, что  $\sim$  - отн. эквив-ти.

Пример. 1)

$$\begin{aligned} x^n = o(x^m), x \rightarrow 0 &\iff n > m \\ x^n &= x^{n-m} x^m \end{aligned}$$

2)

$$x^n = o(x^m), x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow m > n$$

3)

$$\begin{aligned} x &= O(\sin x), x \rightarrow 0 \\ x + \cos x &= O(x), x \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

4)

$$x \sim \sin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), x \rightarrow 0$$

**Замечание.** Читаем  $f(x) = O(g(x)), f(x) = o(g(x))$  - слева направо!

**Лемма 2.4.**

$$x \rightarrow a$$

Тогда справедливо:

1)

$$o(f) \pm o(f) = o(f), O(f) \pm O(f) = O(f)$$

2)

$$o(f) = O(f)$$

3)

$$o(O(f)) = o(f), O(o(f)) = o(f)$$

4)

$$o(f)O(g) = o(fg)$$

*Доказательство.* 3)

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = o(v), x \rightarrow a \\ v = O(f), x \rightarrow a \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} u(x) = \alpha(x)v(x) \\ v(x) = \beta(x)f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ &\Rightarrow u(x) = \alpha(x)\beta(x)f(x) = \gamma(x)f(x), \gamma \rightarrow 0, x \rightarrow a \\ &\Rightarrow u(x) = o(f), x \rightarrow a \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.5.** 1)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a \iff f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow a$$

2)

$$f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x), x \rightarrow a \Rightarrow f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$$

Кроме того, если  $g_{1,2}(x) \neq 0$  в некоем прок. окр-ти  $a$ , то:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, x \rightarrow a$$

3)

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow a$$

То пределы  $f(x), g(x)$  при  $x \rightarrow a$  существуют одновременно (в  $\overline{\mathbb{R}}$ ), и если существуют, то равны.

*Доказательство.* 1)

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x), x \rightarrow a &\iff f(x) = \alpha(x)g(x), x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a), \alpha(x) \rightarrow 1 \\ f(x) = \alpha(x)g(x) &= g(x) + g(x)(\alpha(x) - 1) \underset{\rightarrow 0}{\iff} f(x) = g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

2) Пусть  $g_1(x) \neq 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$

$$g_2(x) = \alpha(x)g_1(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\alpha(x) \rightarrow 1, x \rightarrow a$$

Т. к.  $\alpha(x)$ , то  $\exists \delta_1 > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_{\delta_1}(a) \cap E (\alpha(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

$\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$ . Тогда  $g_2(x) \neq 0$  на  $\overset{\circ}{B}_{\delta_0}(a) \cap E$

Рассм.  $\frac{1}{g_1(x)}, \frac{1}{g_2(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (\frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\alpha(x)g_2(x)}) \Rightarrow$   
 $\frac{1}{g_1(x)} \sim \frac{1}{g_2(x)}, x \rightarrow a$

□

**Пример.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4}-2)(2^x-1)^2}$$

**Решение.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) = \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \sim 2 \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \sim \frac{x^3}{2}, x \rightarrow 0$$

$$\sqrt{x+4}-2 = \frac{x}{\sqrt{x+4}+2} \sim \frac{x}{4}, x \rightarrow 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4}-2)(2^x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{\frac{x}{4} \cdot x^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0 \iff \operatorname{tg} x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\sin x \sim x, x \rightarrow 0 \iff \sin x = x + o(x), x \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = o(x), x \rightarrow 0$$

### 3 Лекция 15

**Определение 3.1.** Пусть  $f$  опр-на в некот. окр-ти  $+\infty$ . Прямая  $y = kx + b$  наз-ся наклонной асимптотой  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ , если:

$$f(x) = kx + b + o(1), x \rightarrow +\infty$$

Аналогично опр-ся накл. асимптота при  $x \rightarrow -\infty$

**Теорема 3.1.** Пусть  $f$  опр-на в некот. окр-ти  $+\infty$ ,  $k, b \in \mathbb{R}$ . Прямая  $y = kx + b$  - наклонная асимптота  $f$  при  $x \rightarrow +\infty \iff$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$  Пусть  $y = kx + b$ , накл. асимпт.  $f$  при  $x \rightarrow +\infty$ , тогда  $f(x) = kx + b + o(1), x \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{1}{x}(b + o(1)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

$\Leftarrow$  Рассм.  $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ , где  $k, b$  - пределы из усл-я:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$$

Сл-но,  $f(x) = kx + b + \alpha(x), \alpha(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$

□

**Замечание.** Справедливо аналогичное утв-е при  $x \rightarrow -\infty$

**Определение 3.2.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Ф-ция  $f$  опр-на на  $(\alpha, a)$  или  $(a, \beta)$ . Прямая  $x = a$  наз-ся вертикальной асимптотой ф-ции  $f$ , если хотя бы один из  $f(a + 0)$  или  $f(a - 0)$  равен  $+\infty(-\infty)$

#### 3.1 Дифференцируемые ф-ции

Пусть  $I$  - невырожд. пром-к в  $\mathbb{R}$  (содержит более 1 точки).



**Определение 3.3.** Пусть  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$ :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ - производная ф-ции } f \text{ в точке } a$$

Если предел конечен, то  $f$  наз-ся дифференцируемой в  $a$ .

**Пример.** 1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = kx + b$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x - a)}{x - a} = k$$

2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \text{sign}(x)$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sign}(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Геометрический смысл производной: Пусть  $f$  дифф. в  $a$ :

$l: y = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) + f(a)$  - прямая, проход. через  $(a, f(a)), (t, f(t))$

Тогда:

$$K_{\text{сек.}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \rightarrow f'(a) = K_{\text{кас.}}, t \rightarrow a$$

## 4 Лекция 16

**Теорема 4.1** (О линейной аппроксимации). Ф-ция  $f$  дифф-ма в  $a \iff \exists A \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a), x \rightarrow a \quad (1)$$

*Доказательство.* Положим  $A = f'(a)$ :

$\Rightarrow$ ) Опр-м

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a), x \neq a \\ \text{произв.}, x = a \end{cases}$$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$  и:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a), \text{ т. е. вып-но при } A = f'(a)$$

$\Leftarrow$ ) ... см. учебник.

□

**Следствие.** Если  $f$  дифф-ма в  $a$ , то она непр-на в  $a$ .

**Замечание.** Обратное неверно.

**Определение 4.1.** Пусть  $f : I \rightarrow \mathbb{R}, a \in I$ , Тогда:

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Соотв. правая и левая производные.

**Замечание.** Если  $a \in (\text{int})I \Rightarrow \exists f'(a) \iff \exists f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$ .

Если  $a$  - концевая точка  $I$ , то производная равна соотв. одност. пределу.

**Задача 4.1.** Док-ть, что если  $\exists f'_+(a), f'_-(a)$ , то  $f$  непр-на в  $a$ .

**Теорема 4.2.** Пусть  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Если  $f, g$  дифф-мы в  $a$ , то:

1)  $\exists (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2)  $\exists (fg)' = f'g + fg'$

3) Если  $g \neq 0$  на  $I$ , то  $\exists \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. 2)

$$fg(x) - fg(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$

$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}g(x) + f(a)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Перейдём к пределу  $x \rightarrow a$ , учитывая непр-ть в т.  $a$  ф-ции  $g$ :

$$(fg)'(a) = f'g(a) + fg'(a)$$

3) Перейдём к пределу при  $x \rightarrow a$  в рав-ве:

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \frac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{1}{x - a} \rightarrow -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Тогда п. 3. следует из п. 2.

□

**Теорема 4.3** (Производная композиции). Пусть  $I, G$  - пром-ки в  $\mathbb{R}$ . Если ф-ция  $f : I \rightarrow G$  диф-ма в т.  $a$ , ф-ция  $g : G \rightarrow \mathbb{R}$  диф-ма в  $b$  и  $b = f(a)$ , то композиция  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  диф. в  $a$ , причём:

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

*Доказательство.*

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Рассм.  $h : I \rightarrow \mathbb{R}, h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}, y \neq b \\ g'(b), y = b \end{cases}$  Тогда  $h$  непр-на в  $y = b$ .

Покажем, что при  $x \in I, x \neq a$ , верно:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (2)$$

При  $f(x) = f(a)$ , обе части обнуляются. Иначе, если  $f(x) \neq f(a)$ , то 2 верно в силу определения  $h$ .

Т. к.  $h$  непр-на в  $y = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$ , по т. о пределе композиции. Поэтому существует:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

□

**Теорема 4.4** (Предел обратной ф-ции). Пусть ф-ция  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  непр-на и строго монотонна на пром-ке  $I$ . Если  $f$  дифф-ма в точке  $a \in I$  и  $f'(a) \neq 0$ , то обр. ф-ция  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  - дифф-ма в т.  $f(a) = b$  причём:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

*Доказательство.* По т. об обр. ф-ции на  $f(I)$  опр-на ф-ция  $f^{-1}$ , кот. там непр-на и строго монотонна. Следовательно,  $f^{-1}(t) \rightarrow a, t \rightarrow b$  и  $f^{-1}(t) \neq a$  при  $t \neq b$ . Поэтому по св-ву предела композиции:

$$\lim_{t \rightarrow b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t - b} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(t)) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(Заменили  $f(x) = t, x = f^{-1}(t)$ )

Следовательно  $f^{-1}$  дифф-ма в т.  $b$ . □

**Замечание.** Если при вып-нии остальных условий,  $f'(a) = 0$ , то обратная ф-ция не дифф-ма в точке  $b$ . Иначе, при дифф-нии получаем:

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(b)f'(a) = 1$$

**Теорема 4.5** (Таблица производных). 1)

$$c' = 0, c \in \mathbb{R}$$

2)

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

3)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$$

4)

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

5)

$$(\sin x)' = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

8)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

9)

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$$

10)

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

*Доказательство.* 2)

$$(e^x)' = \lim_{t \rightarrow x} \frac{e^t - e^x}{t - x} = e^x \lim_{t \rightarrow x} \frac{e^{t-x} - 1}{t - x} = e^x$$

$$(a^x)' = e^{x \ln a} = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$$

3) По т. о производной обр. ф-ции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}, y = \log_a x$$

$$\Rightarrow a^y = x \Rightarrow \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

4)

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

5) По первому зам. пределу и непр-ти  $\cos$ :

$$\lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin t - \sin x}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{2 \sin \frac{t-x}{2} \cos \frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right)' = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8)

$\operatorname{ctg} x$  - аналогично

9)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)',} = \frac{1}{\cos y}, y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

$$\text{Т. к. } x \in (-1, 1) \Rightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

10)

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\text{ctg } y)'} = -\sin^2 y =$$

□

## 5 Лекция 17

**Определение 5.1.** Пусть  $\phi, \psi : T \rightarrow \mathbb{R}, E = \phi(T)$ . Говорят, что ф-ция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  параметрически задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$$

Если для  $\forall t_1, t_2 \in T (\phi(t_1) = \phi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2))$  и  $f(x) = \psi(t)$  при  $x = \phi(t)$

В част-ти, если  $\phi$  обратима, то  $f = \psi \circ \phi^{-1}$

**Следствие.** Пусть  $T$  - это пром-к,  $\phi$  непр-на, строго монотонна на  $T$ ,  $\phi$  и  $\psi$  дифф-мы в т.  $t$  и  $\phi'(t) \neq 0$ . Тогда параметрически заданная ф-ция  $f = \psi \circ \phi^{-1}$  дифф-ма в т.  $x = \phi(t)$ , причём:

$$f'(x) = (\psi \circ \phi^{-1})' = (\psi')(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

**Определение 5.2.** Говорят, что ф-ция  $f$  дифф-ма на мн-ве  $D$ , если  $f$  дифф-ма в каждой точке из  $D$ .

Ф-ция  $x \mapsto f'(x), x \in D$ , также наз-ся производной и обозн-ся в  $f'$

## 5.1 Дифференциал $\phi$ -ции

**Определение 5.3.** Пусть  $f : I \xrightarrow{\text{пром.}} \mathbb{R}$  - дифф-ма в т.  $a$ . Линейная  $\phi$ -ция  $h \mapsto f'(a) \cdot h, h \in \mathbb{R}$ , наз-ся дифференциалом  $f$  в т.  $a$  и обозн-ся  $df_a$ . Для  $\phi$ -ции  $x \mapsto x$  дифф. в каждой точке,  $dx(h) = 1 \cdot h$ , поэтому значение дифф-ла  $df_a(h) = f'(a)dx(h), h \in \mathbb{R}$  или в функциональной записи:

$$df_a = f'(a)dx$$

**Следствие.** В условиях теоремы (4.2) (арифметические оп-ции с пределами):

•

$$d(\alpha f + \beta g)_a = \alpha df_a + \beta dg_a$$

•

$$df \cdot g_a = g(a) df_a + f(a) dg_a$$

•

$$d\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a) df_a - f(a) dg_a}{g^2(a)}$$

**Следствие.** В условиях теоремы о производной сложной  $\phi$ -ции:

$$d(g \circ f)_a = dg_b \circ df_a, b = f(a)$$

*Доказательство.*

$$d(g \circ f)_a(h) = g'(f(a))f'(a)dx(h) = g'(b)df_a(h) = dg_b(df_a(h)), h \in \mathbb{R}$$

□

**Замечание.**  $\phi$ -ла  $df_x = f'(x)dx$  верна, как в случае с независимой переменной  $x$ , так и в случае  $x = \phi(t)$  (независимость формы 1-ого дифференциала).

**Следствие.** В условиях теоремы о дифференцировании обратной  $\phi$ -ции верно:

$$d(f^{-1})_b = (df_a)^{-1}, b = f(a)$$

*Доказательство.* Следует из того, что:

$$k \mapsto \frac{1}{f'(a)} \cdot k - \text{обратная } \phi\text{-ция к линейной } h \mapsto f'(a)h$$

□

## 5.2 Теоремы о среднем

**Определение 5.4.** Пусть  $f$  опр-на на интервале, содержащем т.  $a$ . Точка  $a$  наз-ся **точкой локального максимума** ф-ции  $f$ , если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) (f(x) \leq f(a))$$

$$\text{Т. е. } f(a) = \max_{x \in B_\delta(a)} f(x).$$

Если ”, то  $a$  - **точка строгого лок. максимума**.

Аналогично определяется **точка (строгого) лок. минимума**.

Точки локального максимума (минимума) наз-ся **точками экстремума** ф-ции.

**Теорема 5.1** (Ферма (необх. усл-ие экстремума)). Пусть  $f$  опр-на в неkot. окр-ти точки  $a$ . Если  $a$  - точка лок. экстремума ф-ции  $f$  и в этой точке  $\exists f'(a)$ , то  $f'(a) = 0$

*Доказательство.* Пусть, для опр-ти,  $a$  - точка лок. максимума, тогда:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) (f(x) \leq f(a))$$

Имеем:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(a) = 0$$

□

Геометрический смысл: касательная горизонтальна.

В дальнейшем, отрезок  $[a, b]$  предполагается невырожденным.

**Теорема 5.2** (Ролля). Если  $f$  непр-на на  $[a, b]$ , дифф-ма на  $(a, b)$  и  $f(a) = f(b)$ , то:

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = 0$$



Доказательство. Если  $f$  постоянна на  $[a, b]$ , то  $f'(c) = 0, \forall c \in (a, b)$   
 Пусть  $f$  непостоянна на  $[a, b] \Rightarrow \exists d \in (a, b): f(d) \neq f(a)$   
 Если  $f(d) > f(a)$ , то  $\exists c \in [a, b]: f(c) = \max_{[a, b]} f(x) \geq f(d) > f(a)$ . По т.  
 Ферма  $f'(c) = 0$   
 Иначе, если  $f(d) < f(a)$  - заменяем  $\max$  на  $\min$  □

Геом. смысл: Есть точка, кас. к которой - горизонтальна.

Следствие. Пусть  $f$  - дифф-ма на пром-ке  $I$ , тогда между любыми двумя различными нулями ф-ции  $f$  найдётся хотя бы один нуль производной.

Теорема 5.3 (Лагранжа). Если  $f$  - непр-на на  $[a, b]$ , дифф-ма на  $(a, b)$ , то:

$$\exists c \in (a, b): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Рассм. ф-цию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) - f(a)$$

Ф-ция  $h$  непр-на на  $[a, b]$ , дифф-ма на  $(a, b)$ ,  $h(a) = 0 = h(b)$ . По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = 0$$

Т. е.

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Ч. Т. Д. □

Геометрический смысл: интерпретируя  $f'(c)$  и  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  как угловые коэфф-ты.

Задача 5.1. Пусть  $f$  непр-на на  $[a, b]$  и дифф-ма на  $(a, b)$ . Покажите, что если  $\exists f'(a+0)$ , то  $\exists f'_+(a) = f'(a+0)$

Следствие (Оценка приращений). Пусть  $f$  непр-на на пром-ке  $I$  и дифф-ма на  $\text{int}(I)$ . Если:

$$\exists M > 0, \forall x \in \text{int}(I) |f'(x)| \leq M$$

То:

$$\forall x, y \in I (|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y - x|)$$

Т. е.  $f$  - липшицева.

*Доказательство.* Пусть  $x, y \in I, x \neq y$ . Тогда, по Т. Лагранжа, между  $x$  и  $y$  найдётся т.  $c$ , что  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . Т. к.  $c \in \text{int}(I)$ , то  $|f'(c)| \leq M$ . Отсюда следует заявленная оценка.  $\square$

## 6 Лекция 18

**Теорема 6.1** (Коши). *Если  $f, g$  - непр-ны на  $[a, b]$ , дифф-мы на  $(a, b)$  и  $g' \neq 0$  на  $(a, b)$ , то*

$$\exists c \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

*Доказательство.* Отметим, что  $g(b) \neq g(a)$  (исходя из т. Ролля:  $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$ ). Рассм. ф-цию:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Тогда  $h$  непр-на на  $[a, b]$ , диф-ма на  $(a, b)$  и  $h(a) = f(a) = h(b)$ . По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b): h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

Поскольку  $g'(c) \neq 0$ , получаем то, что хотели:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$\square$

Геом. смысл: такой же, как в т. Лагранжа. Для парам. заданной ф-ции:

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

**Замечание.** В теореме Ферма требуется лишь суц-е производной, поэтому в опир-ся на неё теоремах Ролля, Лагранжа и Коши остаются справедливыми при замене условия дифференцируемости ф-ции на  $(a, b)$  существованием там производной в  $\mathbb{R}$

**Пример.**

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Однако не существует  $f'(\pm 0)$ , т. е.  $f'$  разрывна в нуле.

**Теорема 6.2** (Дарбу). Если  $f$  дифф-ма на  $[a, b]$ . то для  $s$ , лежащего строго между  $f'(a), f'(b)$ , верно:

$$\exists c \in (a, b): f'(c) = s$$

*Доказательство.* Пусть для определённости  $f'(a) < s < f'(b)$ . Положим  $\phi(x) = f(x) - sx$ . Тогда  $\phi$  дифф-ма на  $[a, b]$ :

$$\phi'(a) = f'(a) - s < 0 < f'(b) - s = \phi'(b)$$

Пусть  $\phi(c) = \inf_{[a, b]} \phi(x)$  (существует по т. Вейерштрасса).

При  $c = a$  получаем:

$$\frac{\phi(x) - \phi(a)}{x - a} \geq 0, \forall x \in (a, b] \Rightarrow \phi'(a) \geq 0!!! \Rightarrow c \neq a$$

Аналогично показ-ся, что  $c \neq b \Rightarrow c \in (a, b) \Rightarrow \phi'(c) = 0$ , (По т. Ферма) т. е.  $f'(c) = s$ .  $\square$

## 6.1 Приложения теореме о среднем

**Теорема 6.3** (Условия монотонности). Пусть  $\phi$ -ция  $f$  непр-на на проме  $I$  и дифф-ма на  $\text{int}(I)$ .

- 1)  $\phi$ -ция  $f$  нестрого возр-ет (убывает) на  $I \iff f'(x) \geq 0 (\leq 0), \forall x \in \text{int}(I)$
- 2) Если  $f'(x) < 0 (> 0), \forall x \in \text{int}(I)$ , то  $\phi$ -ция  $f$  строго убывает (возрастает).
- 3)  $\phi$ -ция  $f$  постоянна на  $I \iff f'(x) = 0, \forall x \in \text{int}(I)$

*Доказательство.* 1)  $\Rightarrow$ ) Пусть  $f$  нестрого возрастает на  $I$ ,  $x \in \text{int}(I)$ . Тогда  $f(y) \geq f(x), \forall y \in (x, \sup I)$ . Поэтому  $f'(x) = f'(x) = \lim_{y \rightarrow x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

$\Leftarrow$ ) Пусть  $x, y \in I$  и  $x < y$ . По т. Лагранжа

$$\exists c \in (x, y): f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Т. к.  $c \in \text{int}(I) \Rightarrow f'(c) \geq 0$ , а значит, что  $f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

**Замечание.** При замене  $\geq$  на  $>$   $\Rightarrow$  получаем док-во п. 2.

**Замечание.** Док-во убыв. может быть сведено к рассм.  $-f(x)$ , где  $f$  - убыв.

**Замечание.** Обратное утв. к п. 2 **неверно**. Рассм.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ . Она строго возрастает, но  $f'(0) = 0$

□

**Пример.** Найти все дифф-мые ф-ции, удовл. в усл-ию:

$$f'(x) = f(x), \forall x \in I$$

**Решение.** Рассм.  $g(x) = f(x)e^{-x}$ . Тогда:

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0, x \in I \text{ т. к. } f(x) = f'(x), x \in I$$

По т. об условии монотонности, получаем, что  $\exists c \in \mathbb{R}, g(x) = c, \forall x \in I$

**Следствие** (Достаточные условия экстремума). Пусть  $f$  опр-на на  $(\alpha, \beta)$  и  $a \in (\alpha, \beta)$ . Пусть  $f$  дифф-ма на  $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$  и непр-на в  $a$ . Справ-вы след. утв-я:

- 1) Если  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha, a)$  и  $f'(x) \leq 0$  для  $\forall x \in (a, \beta)$ , то  $a$  — точка лок. максимума ф-ции  $f$  (строгого, если нер-ва строгие).
- 2) Если  $f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha, a)$  и  $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, \beta)$ , то  $a$  — точка лок. минимума ф-ции  $f$  (строгого, если нер-ва строгие).

*Доказательство.* 1) По теореме об условии монотонности, ф-ция  $f$  нестрого возр. на  $(\alpha, a]$  и нестрого убывает на  $[a, \beta)$ . Поэтому  $f(x) \leq f(a), \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a$  — точка лок. максимума. Если нер-ва для производной строгие, то возр-е/убыв-е строгое  $\Rightarrow$  нер-ва строгие  $\Rightarrow a$  — точка строгого лок. максимума.

□

**Следствие** (О доказательстве нер-в). Пусть  $f, g$  - непр-ны на  $[a, b]$  и дифф-мы на  $(a, b)$ ,  $f(a) \leq g(a)$  и  $f'(x) \leq g'(x)$  ( $<$ ),  $\forall x \in (a, b)$ . Тогда  $f(x) \leq g(x)$  ( $<$ ),  $\forall x \in (a, b)$

*Доказательство.* Рассм.  $h(x) = g(x) - f(x)$

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow h - \text{нестрого возрастает}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b)$$

□

**Пример.**

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x > 0$$

*Доказательство.* ММИ:

- $n = 1$  — очев.
- Пусть утв. верно для  $n - 1$ . Док-ем для  $n$ . Рассм.:

$$f(x) = e^x, g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, x \in [0; +\infty)$$

$$f(0) = g(0), f'(x) = e^x > 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x)$$

Тогда  $f(x) > g(x)$  по предыдущему следствию.

□

**Теорема 6.4** (Усиление условия монотонности). Пусть  $f$ -ция  $f$  непр-на на  $[a, b]$  и  $A$  не более чем счётное мн-во,  $A \subset [a, b]$ . Если  $f$  дифф-ма на  $[a, b] \setminus A$ .  $f'(x) \geq 0$  и на  $[a, b] \setminus A$ , то  $f$  нестрого возр.

*Доказательство.* Дост-но установить, что  $f(a) \leq f(b)$ .

Рассм. сначала случай  $f'(x) > 0$  на  $[a, b] \setminus A$ . Предположим, что  $f(a) > f(b)$ .  $f(A)$  не более чем счётно  $\rightarrow \exists d \notin f(A)$  и  $f(a) > d > f(b)$ . Рассм.  $B = \{x \in [a, b]: f(x) = d\}$ .

Положим  $c = \sup B$ . Т. к.  $B$  - замкнуто, то  $c \in B$ . В част-ти,

$$f'(c) > 0, \text{ т. к. } c \notin A, c \in (a, b)$$

С другой стороны:

$$\forall x \in (c, b), f(x) < d \text{ (по т. о пром. значениях)}$$

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0!!!$$

□

**Следствие.** Пусть  $f$  - непр-на на  $[a, b]$  и дифф-ма на  $[a, b] \setminus A$ , где  $A \subset [a, b]$  - не более чем счётно. Если  $m \leq f' \leq M$  на  $[a, b] \setminus A$ , то:

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

*Доказательство.* Дост-но применить предыдущую теорему для ф-ций:

$$\phi(x) = f(x) - mx$$

$$\psi(x) = Mx - f(x)$$

На  $[a, b]$

□

## 7 Лекция 19

Важным приложением теоремы Коши о среднем, явл-ся правило Лопиталья:

**Теорема 7.1** (Правило Лопиталья для неопределённости  $\frac{0}{0}$ ). Пусть  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , ф-ции  $f, g$  опр-ны на  $(a, b)$  и дифф-мы, причём  $g' \neq 0$  на  $(a, b)$ . Пусть:

1)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Простое.*  $a \in \mathbb{R}$ . Суш-е предела установим по Гейне. Рассм.  $\{x_n\} \subset (a, b): x_n \rightarrow a$ . Доопределим по непр-ни ф-ций  $f, g$  в т.  $a$ , положив  $f(a) = g(a) = 0$ . По т. Коши о среднем:

$$[a, x_n]: \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \text{ для некот. т. } c_n \in (a, x_n)$$

Т. к.  $a < c_n < x_n \Rightarrow c_n \xrightarrow{\rightarrow a} a$ . Поэтому:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

По опр-ю Гейне  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$  □

**Замечание.** Рассм. отдельно случай  $a = -\infty$ . Можно считать, что  $b < 0$ . Рассм. ф-ции:

$$\phi(t) = f\left(-\frac{1}{t}\right), \psi(t) = g\left(-\frac{1}{t}\right), t \in (0, -\frac{1}{b})$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \phi(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \psi(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f'(-\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}}{g'(-\frac{1}{t}) \cdot \frac{1}{t^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

По доказанному,  $\exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

**Лемма 7.2.** Пусть  $\{a_n\}, \{b_n\}$  - числ.  $n$ -ти, причём  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ . Тогда:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

*Доказательство.* Введём обоз-я:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = c, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\exists \{n_k\}, n_k - \text{строга возр.: } a_{n_k} b_{n_k} \rightarrow c \Rightarrow a_{n_k} = \frac{a_{n_k} b_{n_k}}{b_{n_k}} \rightarrow \frac{c}{1} \leq a$$

$$\begin{aligned} \exists \{m_k\}, m_k - \text{ строго возр. : } a_{m_k} \rightarrow a, b_{m_k} \rightarrow 1 \Rightarrow a_{m_k} b_{m_k} \rightarrow a \leq c \\ \Rightarrow a = c \end{aligned}$$

Док-во для нижнего предела аналогично.  $\square$

**Теорема 7.3** (Правило Лопиталя для неопр.  $\frac{\infty}{\infty}$ ). *Всё то же самое, но в (1):*

$$\lim_{x \rightarrow a+0} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a+0} |g(x)| = +\infty$$

*Доказательство.* 1)  $L \in \mathbb{R}, (L = +\infty)$ . Рассм.  $\{x_n\} \subset (a, b), x_n \rightarrow a$ .

Зафикс.  $\varepsilon > 0$ . По усл-ию (2),  $\exists y \in (a, b), \forall c \in (a, y), \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$ .

Можно считать, что все  $x_n \in (a, y), f \neq 0, g \neq 0$  на  $(a, y)$ . По т.

Коши о среднем  $\frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$ , для некот.  $c_n \in (x_n, y)$ . Т. к.:

$$\left| \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} - L \right| < \varepsilon, \left( \frac{f'(c)}{g'(c)} > M \right)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} < L + \varepsilon, \left( \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} > M \right) \\ \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{f(x_n) \left( 1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \right)}{g(x_n) \left( 1 - \frac{g(y)}{g(x_n)} \right)} < L + \varepsilon, \left( \frac{f(x_n) \left( 1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \right)}{g(x_n) \left( 1 - \frac{g(y)}{g(x_n)} \right)} > M \right) \end{aligned}$$

Однако  $1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \rightarrow 1$  (аналогично с  $g$ ).

Воспользуемся леммой и получим:

$$(M <) L - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq L + \varepsilon$$

Т. к.  $\varepsilon > 0$  - произвольное, то:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

След-но:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

Тогда по Гейне  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\square$



**Замечание.** Правило Лопиталя остаётся верным и для  $x \rightarrow b-0$ , (достаточно сделать замену  $x \rightarrow -x$ ). А значит, оно верно и для  $x \rightarrow x_0$ .

**Задача 7.1.** Докажите, что в правиле Лопиталя для  $\frac{\infty}{\infty}$  можно снять условие  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty$

**Пример.** 1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \alpha > 0, a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$$

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left( \frac{x}{a^{\frac{x}{\alpha}}} \right)^\alpha, \lim_{y \rightarrow 0} y^\alpha = 0$$

**Задача 7.2.** Доказать:

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

**Замечание.** Здесь не применимо правило Лопиталя.

## 7.1 Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно.

**Определение 7.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Положим  $f^{(1)} = f'$ . Если  $n > 1$ ,  $f^{(n-1)}$  - определена в некот. окр-ти точки  $a$  и дифф-ма в т.  $a$ , то  $f$  **наз-ся дифф-мой  $n$  раз в точке  $a$**  и  $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$

Также считаем, что  $f^{(0)} = f$

**Замечание.** Сущ-е производной  $n$ -го порядка  $f$  в т.  $a$  влечёт при  $n > 1$  существование производной  $(n-1)$ -го порядка в некот. окр-ти точки  $a$ .

**Замечание.** Т. к. операция взятия производной линейна, справедливо следующее:

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

**Теорема 7.4** (Ф-ла Лейбница). Если  $f, g$  дифф-ма  $n$  раз в точке  $x$ , то их произведение также дифф-мо  $n$  раз в точке  $x$ , причём справедлива ф-ла:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

*Доказательство.* Док-во проведем через ММИ по  $n$ :

- База  $n = 1$  - проверяли
- Предположим утв-е верно для  $n$ . Тогда покажем, что утв-е верно для  $n + 1$ . Тогда:

$$\begin{aligned} (fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' = \left( \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} (f^{(k)} g^{(n+1-k)}) + \sum_{k=0}^n C_n^k (f^{(k)} g^{(n+1-k)}) = \\ &= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

□

**Определение 7.2.** Ф-ция  $f$  наз-ся  $n$  раз дифф-мой на мн-ве  $D$ , если  $f$  дифф-ма  $n$  раз в каждой точке из  $D$ . Если при этом ф-ция  $x \mapsto f^{(n)}(x)$  - непр-на, то  $f$  наз-ся  $n$  раз непрерывно дифф-мой на  $D$ .

**Обозначение.**  $C^n(D)$  - мн-во  $n$  раз непр-но дифф-мой на  $D$  ф-ций.

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(D)$$

## 8 Лекция 20

### 8.1 Формула Тейлора

**Определение 8.1.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и ф-ция  $f$  дифф-ма в  $n$  раз в т.  $a$ . Тогда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x)$$

Наз-ся **ф-лой Тейлора** порядка  $n$  **ф-ции  $f$  в т.  $a$** . При этом

$$P_n(x) = P_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

наз-ся **многочленом Тейлора**, а  $r_n(x) = r_{n,f,a}(x)$  — **остаточным членом**.

**Пример.** Если  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$  и  $0 \leq m \leq n$ , то:

$$P_n^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^n c_k \frac{k!}{(k-m)!} (x-a)^{k-m}$$

поэтому:

$$P_n^{(m)}(a) = m! c_m$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

— **ф-ла Тейлора** для **мн-на  $P_n$** .

**Теорема 8.1** (Остаточный член в форме Пеано). Пусть  $n \in \mathbb{N}$  и ф-ция  $f$  дифф-ма  $n$  раз в  $a$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^k), x \rightarrow a$$

**Доказательство.** Пусть  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ . Тогда

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}$$

Поэтому для ост. члена  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Выполнено:

$$r_n(a) = r'_n(a) = \dots = r_n^{(n)}(a) = 0$$

По правилу Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r'_n(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}$$

Этот предел существует по определению:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n^{(n-1)}(x) - r_n^{(n-1)}(a)}{x-a} = \frac{1}{n!} r_n^{(n)}(a) = 0$$

□

**Следствие.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , функция  $f$  дифференцируема  $n$  раз в т.  $a$  и  $f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ , но  $f^{(n)}(a) \neq 0$ . Тогда:

- 1) Если  $n$  чётно и  $f^{(n)}(a) > 0$ , ( $f^{(n)}(a) < 0$ ), то  $a$  является точкой локального минимума функции  $f$  (точкой локального максимума).
- 2) Если  $n$  нечётно, то  $a$  не является точкой локального экстремума функции  $f$ .

*Доказательство.* По предположению имеем:

$$f(x) = f(a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n), x \rightarrow a$$

или:

$$f(x) - f(a) = \left( \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x) \right) (x-a)^n$$

Где,  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ . Из стремления к 0:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \left( |\alpha(x)| < \left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \right| \right)$$

$$\text{Тогда } \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \left( \text{sign}\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \alpha(x)\right) = \text{sign} f^{(n)}(a) \right)$$

$$\Rightarrow \text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{sign}(f^{(n)}(a)(x-a)^n)$$

Откуда следует, заявленное утверждение.

□

**Теорема 8.2** (Единственность). Пусть для функции  $f$  найдутся мн-ны  $p_1(x)$  и  $p_2(x)$  степени  $\leq n$ , т. ч.

$$f(x) - p_1(x) = o((x - a)^n)$$

$$f(x) - p_2(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

Тогда  $p_1(x) = p_2(x)$ :

*Доказательство.* Положим  $q(x) = p_1(x) - p_2(x)$ . Тогда

$$q(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

Покажем, что  $q(x) \equiv 0$ .

Пусть  $q(x) = c_0 + c_1(x - a) + \dots + c_n(x - a)^n$ . Предположим, что не все его коор-ты = 0. Пусть  $j = \min: c_j \neq 0$ . Сделаем преобразования:

$$q(x) = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$c_j(x - a)^j + \dots + c_n(x - a)^n = o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$c_j + c_{j+1}(x - a) + \dots + c_n(x - a)^{n-j} = o((x - a)^{n-j}), x \rightarrow a$$

Перейдя к пределу, получим  $c_j = 0!!! \Rightarrow q(x) \equiv 0$  □

**Теорема 8.3** (Единственность представления ф-лой Тейлора). Если функция  $f$  дифф-ма  $n$  раз в  $a$  и

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x - a)^k + o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

$$\text{Тогда } c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, k = \overline{0, n}$$

**Следствие.** Пусть  $f$  дифф-ма  $(n + 1)$  раз в  $a$  и

$$f'(x) = \sum_{k=0}^n c_k(x - a)^k + o((x - a)^n), x \rightarrow a$$

Тогда:

$$f(x) =$$

*Доказательство.* Из пред-я  $f'$  имеем по т. 8.3:

$$c_k = \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!} \Rightarrow f^{(k+1)}(a) = k!c_k, k = \overline{0, n}$$

□

**Определение 8.2.** Формула Тейлора в т.  $a = 0$  — **ф-ла Маклорена**.

Основные разложения:

I) Если  $f(x) = e^x$ , то  $f^k(0) = e^0 = 1$ , для  $k \in \mathbb{N}_0$ , тогда:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), x \rightarrow 0$$

II) Если  $f(x) = \sin x$ , то по инд-ции проверяется, что  $f^{(m)}(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}m)$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Значит,  $f^{(2k)}(0) = 0$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . След-но:

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}), x \rightarrow 0$$

III) Если  $f(x) = \cos x$ , то по инд-ции уст-ся, что  $f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}m)$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . Поэтому  $f^{(2k+1)}(0) = 0$ ,  $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Получаем:

$$\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), x \rightarrow 0$$

IV) Если  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}, k \in \mathbb{N}_0$$

Положим:

$$C_\alpha^0 = 1, C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n C_\alpha^k x^k + o(x^n), x \rightarrow 0$$

В част-ти,  $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), x \rightarrow 0$

V) Если  $f(x) = \ln(1+x)$ , то  $f(0) = 0$ :

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, k \in \mathbb{N}$$

Получаем:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n), x \rightarrow 0$$

**Задача 8.1.** Представить ф-лой Маклорена ф-цию  $f(x) = \arctg x$  до  $o(x^{2n+2})$

**Задача 8.2.** До  $o(x^3)$ , представить ф-лой Маклорена:

$$f(x) = \ln(1 + \sin x)$$

$$\ln(1+w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + o(w^3)$$

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{\ln(1+w) - p(w)}{w^3} = 0, w = \sin x$$

$$\ln(1 + \sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{3} + o(\sin^3 x)$$

$$\sin x \sim x \Rightarrow o(\sin^3 x) = o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), x \rightarrow 0$$

$$\sin^2 = x^2 + 2xo(x^2) + o(x^4) = x^2 + o(x^3)$$

$$\sin^3 = (x + o(x))^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1 + \sin x) = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) - \frac{1}{2}(x^2 + o(x^3)) + \frac{1}{3}(x^3 + o(x^3)) + o(x^3) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$