Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

3 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 4

<u>Обозначение</u>. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ - это

1) Мн-во подмножеств $A \subset \mathbb{N}$
2) Мн-во ф-ций $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$
3) Мн-во $A \leftrightarrow f_A : N \to \{0,1\}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

<u>Замечание</u>. Бесконечная двоичная дробь:

$$\underline{a_1 a_2 \dots a_n} 01111 \dots = \underline{a_1 a_2 \dots a_n} 10000 \dots$$

<u>Задача</u> 1.1. Показать:

$$[0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\text{ посл-ти с 1 в периоде }\}$$

Доказательство. Конструктивно: Picture

□

<u>Теорема</u> 1.1. A - беск., B - сч. $\Rightarrow A \cup B \cong A$

<u>Следствие</u>.

$$[0,1] \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

<u>Лемма</u> 1.2. В любом бесконечном мн-ве есть счётное подмн-во

Доказательство. A - беск. мн-во
$a_0 \in A, a_1 \in A \setminus \{a_0\}, \dots$
$a_{n+1} \in A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ A - беск., сл-но на каждом шаге возможен выбор нового эл-та □

Теперь докажем теорему:

Доказательство. A - беск. $\Rightarrow C \subset A$, C - счётно

$$\begin{cases} C \cong \mathbb{N} \\ B \cong \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow C \cup B \cong \mathbb{N} \cong C$$

$$A \cup B = (A \backslash C) \cup C \cup B \cong (A \backslash C) \cup C \cong A$$

□

Теорема 1.3 (Кантора). $[0, 1]$ - несчётен (или: $\{\, 0, 1 \,\}^{\mathbb{N}}$ несчётно)

Доказательство. Пусть $\{\, 0, 1 \,\}^{\mathbb{N}}$ - счётно, тогда α_i - i-ая бинарная последовательность:

α_0	$\underline{0}0000\ldots$
α_1	$1\underline{1}111\ldots$
α_2	$01\underline{0}11\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Воспользуемся диагональным методом Кантора:. Возьмём диагональную п-ть:

$$d_i = \alpha_i^i, d = 010\ldots$$

$$d_i' = 1 - \alpha_i^i, d' = 101\ldots$$

Если $d' = \alpha_k^k$, то $d_k^k = d_k^{k\prime} = 1 - \alpha_k^k$, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие. □

Теорема 1.4 (Общая теорема Кантора). $\forall A :\ A \gtrsim 2^A$

Доказательство. Пусть $\phi : A \to 2^A$ - биекция
$\phi(x)$ - подмн-во A
Корректен ли вопрос о том, что $x \in \phi(x)$?
Расм. $M = \{\, x \mid x \notin \phi(x) \,\}$
Т. к. ϕ - биекция $\Rightarrow$ сущ. $m = \phi^{-1}(M)$. Т. е. $\phi(m) = M$
Рассм. 2 случая:

1)

$$m \in M \Rightarrow m \in \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{ ложно при } x = m \Rightarrow m \notin M$$

2)

$$m \notin M \Rightarrow m \notin \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) \text{ - истино, при } x = m \Rightarrow m \in M$$

Получаем противоречие. □

Определение 1.1. A континуально, если $A \cong \{\,0,1\,\}^{\mathbb{N}}$

Теорема 1.5. A - континуально $\Rightarrow$ A^2 - континуально

Пример.

$$[0,1] \cong [0,1]^2$$

Следствие.

$$(\{\,0,1\,\}^{\mathbb{N}})^2 = \{\,0,1\,\}^{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha,\beta) \leftrightarrow \gamma = \alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\ldots$$

$$[0,1] \cong \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ - континуально}$$

По индукции:

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}$$

Верно и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$

Доказательство. Док-во конструктивно ИЛИ:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$$

□

1.1 Бинарные отношения

Определение 1.2. Отношение - любое $R \in A \times A$

Обозначение. Отношение R между a и b:

1) $(a,b) = R$
2) $R(a,b)$
3) aRb

Различные виды отношений:

1) Рефлексивные: $\forall a:\ aRa$

   Пример. $=, \leq, \subset, \cong, \sqsubset$

2) Антирефлексивные: $\forall a: \neg(a\boldsymbol{R}a)$

   Пример. $<, \in, ||$

3) Симметричные: $\forall a, \forall b(a\boldsymbol{R}b \to b\boldsymbol{R}a)$

   Пример. $\cong, ||, =, \equiv_k$

4) Антисимметричные: $\forall a, \forall b((a\boldsymbol{R}b \wedge b\boldsymbol{R}a) \to a = b)$

   Пример. $\leq, <, >, \sqsubset, \sqsubset, \subset$

5) Транзитивность:

$$\forall a, b, c((a\boldsymbol{R}b \wedge b\boldsymbol{R}c) \to a\boldsymbol{R}c)$$

   Пример. $=, \cong, \equiv_k, \leq, \subset, \sqsubset$

6) Антитранзитивность:

$$\forall a, b, c((a\boldsymbol{R}b \wedge b\boldsymbol{R}c) \to \neg(a\boldsymbol{R}c))$$

$$|a - b| = 1 \text{ (На } \mathbb{R})$$

7) Полнота: $\forall a, b(a\boldsymbol{R}b \vee b\boldsymbol{R}a)$

   Пример. $\leq, \overset{\sim}{\leqq}$ (теор. Цермело)

Наборы св-в:

1) Отнош. эквивалентности: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

   Пример. $\equiv_k, (||$ или $=), \sim$ (подобие $\triangle$-ов)

   Общий вид: $f: A \to B, x \sim y$, если $f(x) = f(y)$

2) Отношение нестрогого частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность, транзитивность:

   Пример. $\subset, \leq, \vdots, \sqsubset, \ldots$

3) Отнош. строгого част. п-ка: антирефл., антисимметричность, транзитивность

4) Отнош. лин. порядка: нестрогий частичный порядок + полнота

5) Препорядки: рефлексивность, транзитивность

6) Полные предпорядки: полнота + транзитивность

2 Лекция 5

2.1 Отношения эквивалентности ($\sim$)

Определение 2.1. Отношение эквив. - отношение с св-вами:

1) Рефлексивность: $x \sim x$

2) Симметричность: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3) Транзит.: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Определение 2.2. Класс эквив.: $K_x = \{ y \mid y \sim x \}$

Теорема 2.1 (О разбиении на классы эквив.). Если задано отн. экв. $\sim$ на A, то A можно представить как:

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

т. ч.:

1) Каждая A_i - K_x для некот. x

2) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

3) $y, z \in A_i \Rightarrow y \sim z$

4) $y \in A_i, z \in A_j, i \neq j \Rightarrow y \nsim z$

Доказательство. Рассм. всевозм. мн-ва, явл-ся классами эквив-ти. Докажем выполн. св-в для них. Для этого докажем леммы I-IV

Лемма 2.2 (I). $x \in K_x$

Доказательство.

$$x \sim x \Rightarrow x \in \{ y \mid y \sim x \} \Rightarrow x \in K_x$$

□

Следствие.

$$\bigsqcup_{x \in A} K_x = A$$

Лемма 2.3 (II).

$$y \in K_x, z \in K_x \Rightarrow y \sim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow y \sim x \\ z \in K_x \Rightarrow x \sim z \text{ - симметричность} \end{cases} \Rightarrow y \sim z \text{ - транзитивность}$$

$\square$

Лемма 2.4 (III).

$$K_x \neq K_t \Rightarrow K_x \cap K_t = \emptyset$$

Доказательство. Докажем контрапозицию:

$$K_x \cap K_t \ni w \Rightarrow K_x = K_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ w \sim t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ t \sim w \end{cases} \Rightarrow t \sim x$$

Если $y \in K_t \Rightarrow y \sim t \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \in K_x$, т. е. $K_t \subset K_x$. Аналогично, получаем $K_x \subset K_t \Rightarrow K_x = K_t$ $\square$

Лемма 2.5 (IV).

$$K_x \neq K_t, y \in K_x, z \in K_t \Rightarrow y \nsim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow x \sim y \\ y \in K_t \Rightarrow z \sim t \end{cases}$$

Из $y \sim z$, то, по транзитивности, $x \sim t \Rightarrow K_x = K_t$!!!. Т. к. это противоречие, то $y \nsim z$ $\square$

$\square$

Определение 2.3. Факторимножество $A/_\sim$ - мн-во классов эквив.

Теорема 2.6. Если $\sim$ - отн. эквив. на A, то сущ. B и $f : A \to B$, т. ч.:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Доказательство.

$$B = A/_\sim$$
$$f(x) = K_x$$

$\square$

2.2 Отношение порядка ($\leq$)

Определение 2.4. Отношение порядка - отношение со св-вами:

- Нестрогий порядок $\leq$:
  1) Рефлекивность: $x \leq x$
  2) Антисимм.: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
  3) Транзтивность: $x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z$
  4) (Для линейных порядков) Полнота: $(x \leq y \vee y \leq x)$
- Строгий порядок $<$:
  1) Антирефлексивность: $\neg(x < x)$
  2) Антисимметричность: $\neg(x < y \wedge y < x)$
  3) Транзитивность: $(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$
  4) (Для линейных порядков) Трихотомичность:

$$x < y \vee y < x \vee x = y$$

Пример. 1) Стандартный числовой порядок в $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

2) $\vdots$ на $\mathbb{N}$ (в том числе включая 0)

$$x \vdots y \iff \exists z : x = y \cdot z$$

3) $\subset$ на 2^A

4) $\sqsubset, \sqsupset, (substring)$ на $\{ 0, 1 \}^n$

5) Асимптот. порядок на ф-циях $f < g$, если $\exists N \forall n > N : f(n) < g(n)$

6) Пор-ки на $\mathbb{R}^2$:

   a) Лексикографический:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2 \end{array}\right.$$

b) Покоординатный:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \le x_2 \\ y_1 \le y_2 \end{cases}$$

Диаграмма Хассе: граф на пл-ти, т. ч. вершины, соед. рёрбрами, не находятся на одном уровне (Picture)
Рассм.: $(\{0, 1, \ldots, 9\}, \vdots)$
$x \le y \iff$ Есть восходящий путь из x в y

Определение 2.5. Наибольший эл-т - Больше всех

$$x \text{ - наиб. } \iff \forall y : y \le x$$

Определение 2.6. Макс. эл-т - больше него нет

$$x \text{ - макс. } \iff \neg \exists y : y > x$$

Для лин. порядка - это одно и то же

Для част. порядка - может быть разное, т. е.:

$$\forall y (y \le x \vee y \text{ не сравним с } x)$$

- макс. эл-т для част. порядка.

Наименьший и минимальный - аналогично.

В конечном непустом мн-ве всегда есть макс. и мин.

В конечном мн-ве единственный макс. является наибольшим.

Для беск. мн-в всё, что выше, конечно неверно. (picture)

Определение 2.7. Упорядоченное мн-во - пара из мн-ва и порядка на нём.

Обозначение. Пишут так: $(A, \le_A)$, сокращённо УМ

Операции над УМ:

1) Сложение:

$$(A, \leq_A) + (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \sqcup B$$

$$x \leq y \iff \left[\begin{array}{l} x, y \in A: \ x \leq_A y \\ x, y \in B: \ x \leq_B y \\ x \in A, y \in B \end{array}\right.$$

При этом оно:

- Ассоциативно: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Некоммутативно: $A + B \neq B + A$

2) Умножение:

$$(A, \leq_A) \cdot (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \times B$$

$$(a_1, b_1) \leq_C (a_2, b_2) \iff \left[\begin{array}{l} b_1 <_B b_2 \\ b_1 = b_2, a_1 \leq_A a_2 \end{array}\right.$$