

Матан

Сергей Григорян

21 октября 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 13</b>	<b>3</b>
1.0.1	Долг прошлой жизни . . . . .	3
1.1	Равномерная непр-ть . . . . .	3
1.2	Показательная и логарифмическая ф-ции . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Лекция 14</b>	<b>8</b>
2.0.1	Ликбез по тригономе . . . . .	10
2.0.2	Сравнение ф-ций . . . . .	12

# 1 Лекция 13

## 1.0.1 Долг прошлой жизни

**Теорема 1.1** (О разрывах монот. ф-ции). Пусть  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$ . Если  $f$  монотонна на  $(a, b)$ , то  $f$  на  $(a, b)$  может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.

*Доказательство.* Пусть  $f$  нестрого возр. на  $(a, b)$ . Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т.  $c \in (a, b)$   $\exists$  конечные  $f(c-0), f(c+0)$ , причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на  $(a, b)$  разрывы только I рода.

Пусть  $c, d \in (a, b), c < d$ . Тогда для  $\alpha \in (c, d)$ . Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c, b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a, d)} f(x) = f(d-0)$$

□

Поэтому если  $c, d$  - точки разрыва ф-ции  $f$ , то интервалы  $(f(c-0), f(c+0))$  и  $(f(d-0), f(d+0))$  - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку  $\in \mathbb{Q}$ , содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством  $\mathbb{Q}$ . Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

## 1.1 Равномерная непр-ть

Пусть  $E \subset \mathbb{R}$  и  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Напомним, что  $f$  непр-на на  $E$ , если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

**Определение 1.1.** Ф-ция  $f$  наз-ся **равномерно непрерывной** (на  $E$ ), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E (|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

**Замечание.** Если  $f$  р. н. (равномерно непр-на) на  $E$ , то  $f$  непр-на на  $E$

**Задача 1.1.** Если  $f$  и  $g$  р. н. на  $E$  и огр-ны, то  $fg$  - р. н. на  $E$

**Определение 1.2.** Ф-ция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E (|f(x) - f(x')| \leq C |x - x'|)$$

**Замечание.** Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ )

**Пример.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

*Доказательство.*

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

**Пример.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, но не р. н.}$$

**Замечание.**  $f$  не р. н.  $\iff$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E (|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

*Доказательство.* Для произвольного  $\delta > 0$  положим,  $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ . Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но,  $f$  не р. н.

□

**Теорема 1.2** (Кантора). Если  $f$  непр-на на  $[a, b]$ , то  $f$  - р. н. на  $[a, b]$

*Доказательство.* I) Предположим, что  $f$  не явл-ся р. н. Тогда полагая  $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ , получаем  $x_n, x'_n \in [a, b]$ , т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В  $\{x_n\}$  имеет сх-ся подп-ть  $\{x_{n_k}\}$ ,  $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ . Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \rightarrow x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти,  $f$  в  $x_0$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит  $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$

□

**Задача 1.2.** Пусть  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  р. н. на  $E$ . Покажите, что

$$\exists! F : \text{closure}(E) \rightarrow \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

## 1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

**Определение 1.3.** Ф-ция  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exp = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  наз-ся ЭКСПОНЕНТОЙ.

**Замечание.** Сх-ть  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  устанавливалась ранее для всях  $x \in \mathbb{R}$

**Теорема 1.3.** Для любых  $x, y \in \mathbb{R}$  справедливо:

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

*Доказательство.* Введём об-е  $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ . Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$\begin{aligned} a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y) &= \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n = \\ &= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k \end{aligned}$$

Где:

$$b = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right), a = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$$

П-ть  $\{a_n(|x|)\}$ , нестрого возрастает, начиная с некот.  $n_0$  (см. док-во сх-ти):

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^p\right| \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^p \leq \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|), p = 1, \dots, n$$

Сл-но, каждое слагаемое в  $Q(x, y)$  оценивается по модулю  $C = \exp |x + y| \exp |x| \exp |y|$ . Тогда получаем:

$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)| \leq \frac{|x| |y| C}{n}$$

Переходя к пределу, получаем, что:

$$|\exp(x) \exp(y) - \exp(x + y)| \leq 0$$

Ч. Т. Д. □

**Следствие.**

$$\exp x > 0 \text{ и } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

*Доказательство.*

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\exp(x) \exp(-x) = 1$$

□

**Лемма 1.4.**    *a)*

$$\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

*b)*

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}, \forall x < 1$$

*Доказательство.* Зафикс.  $N \in \mathbb{N}$ , т. ч.  $\frac{x}{N} \geq -1$ . Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N: \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x - \text{пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

**Теорема 1.5.** Ф-ция  $\exp$  непр-на, строго возр. и отображает  $\mathbb{R}$  на  $(0, +\infty)$

*Доказательство.* По нер-ву из предыдущей леммы, при  $x < 1$  имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при  $x \rightarrow 0$ ,  $\exp(x) \rightarrow 1$ . Тогда для  $\forall a \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \exp(x) = \left[ \begin{array}{l} t + a = x \\ t = x - a \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(t + a) = \lim_{t \rightarrow 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$  ф-ция непр-на на  $\mathbb{R}$

Пусть  $x, y \in \mathbb{R}, x < y$ . Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x) \exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но,  $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

□

## 2 Лекция 14

**Определение 2.1.** Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция  $\ln: (0, +\infty)$ , обратная к  $\exp$

**Замечание.** *По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:*

- $\ln$  непр-на на обл-ти определения.
- $\ln$  строго возр.
- $\ln$  отображает  $(0, +\infty)$  на  $\mathbb{R}$ , при этом, если  $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

**Определение 2.2.** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ . Показательной ф-цией с основанием  $a$  наз-ся ф-ция:  $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

**Замечание.** *Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при  $a > 1$  строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображает  $\mathbb{R}$  на  $(0, +\infty)$*

**Замечание.** *Пусть  $n \in \mathbb{N}, n > 1$ . Тогда:*

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right) = \exp(\ln a) = a$$

*Сл-но,  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$*

**Определение 2.3.** Пусть  $a > 0, a \neq 1$ . Логарифмической ф-цией с основанием  $a$  наз-ся ф-ция  $\log_a: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Обратная к показательной ф-ции  $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

**Замечание.** *Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображает  $(0, +\infty)$  на  $\mathbb{R}$ . Кроме того:*

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

**Определение 2.4.** Пусть  $a \in \mathbb{R}$ . Степенной ф-цией с показателем  $\alpha$  наз-ся ф-ция  $x \mapsto x^\alpha, x \in E$ , где:



1)  $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow E = \mathbb{R}$ , при этом  $x^0 = 1, x^\alpha = \underset{\alpha \text{ раз}}{x \cdot \dots \cdot x}$

2)  $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , при этом  $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3)  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$ , при этом  $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

**Замечание.** Если в последнем случае  $\alpha > 0$ , то полагаем  $0^\alpha = 0$  (т. е. 0 включаем в  $E$ ), это согласуется с тем, что:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

**Замечание.** Из св-в  $\exp$  и  $\ln$  получаем, что степенная ф-ция непр-на на  $E$ , на  $(0, +\infty)$  строго возрастает на при  $\alpha > 0$  и строго убывает при  $\alpha < 0$

**Лемма 2.1** (Замечательные пределы).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

*Доказательство.* По пред. лемме при  $x < 1$ :

$$1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x} \iff x \leq e^x - 1 \leq \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \leq \frac{e^x-1}{x} \leq 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция  $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y-1}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$  - непр. в 0. Также  $f(x) = \ln(x+1)$  непр-на

в 0. Тогда композиция  $g \circ f$  непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и  $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$  непр-на в 0  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e \quad \square$

**Задача 2.1.** Док-те, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

**Пример.**

$$e^\pi \vee \pi^e$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^x &> 1 + x \\ x &= \frac{\pi}{e} + 1 \\ e^{\frac{\pi}{e}-1} &> \frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e \end{aligned}$$

□

### 2.0.1 Ликбез по тригономе

**Лемма 2.2.** Для всех  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  верно:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

*Доказательство.* Picture:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &< S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \sin x &< \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

□

**Следствие.** Для всех  $x \in \mathbb{R}$ . Верно  $|\sin x| < |x|$ , причём рав-во имеет место только при  $x = 0$

*Доказательство.* Если  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то нер-во следует по лемме.

Если  $x \geq \frac{\pi}{2}$ , то  $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$

Если  $x < 0$ , то  $|\sin x| = |\sin(-x)| < |(-x)| = |x|$

□

**Следствие.** Ф-ции  $\sin$  и  $\cos$  непр-ны на  $\mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Пусть  $a \in \mathbb{R}$ , тогда:

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} = |x-a| \rightarrow 0$$

Сл-но,  $\sin x$  в точке  $a$  равен  $\sin a \Rightarrow \sin x$  - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть  $\cos x$  или из ф-л тригонометрии:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$\cos x$  непр-н как композиция непр. ф-ций.

□

**Следствие.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*Доказательство.*  $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$  и  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$  (из леммы) В силу чётности,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{предел} = 1$ .  $\square$

**Определение 2.5.** Обратные тригонометрические ф-ции:

1)  $\arcsin$ :

$$\arcsin = (\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2)  $\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1}$$

3)  $\arctg: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\arctg = (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4)  $\operatorname{arcctg}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

$$\operatorname{arcctg} = (\operatorname{ctg}|_{(0, \pi)})^{-1}$$

**Определение 2.6.** Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$
- $x \mapsto a^x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto \log_a x, a > 0, a \neq 1$
- $x \mapsto x^\alpha$
- $\sin, \cos, \operatorname{tg}, \operatorname{ctg}$
- $\arcsin, \arccos, \arctg, \operatorname{arcctg}$

**Определение 2.7.** Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

**Пример.**

$$\operatorname{sh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

**Теорема 2.3.** *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

### 2.0.2 Сравнение ф-ций

**Определение 2.8.** Пусть  $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a$  - предельная точка  $E$  и суц-ет  $\alpha: E \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\delta > 0$ , такие, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

- 1) Если  $\alpha(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что ф-ции  $f$  и  $g$  эквивалентны (асимптотически равны) при  $x \rightarrow a$ . Пишут  $f(x) \sim g(x)$  при  $x \rightarrow a$
- 2) Если  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow a$ , то говорят, что ф-ция  $f$  беск. мала по сравн. с ф-цией  $g$  при  $x \rightarrow a$ , пишут  $f(x) = o(g(x))$ , при  $x \rightarrow a$
- 3) Если  $\alpha$  - огр-на, то говорят, что ф-ция  $f$  ограничена по сравнению с  $g$  при  $x \rightarrow a$ . Пишут, что  $f(x) = O(g(x))$ ,  $x \rightarrow a$