Алгем.
Лекция 1
Алгебра матриц

Сергей Григорян

4 сентября 2024 г.

1 Инфа

Лектор: Вадим Владимирович Штепин

2 Матрицы

Определение 2.1. **Матрица** - прямоугольная таблица чисел.

Обозначение. $A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

Определение 2.2. **Поле** - мн-во, на котором определены "$+$, -, *, $/$".

2.1 I. Сложение

Обозначение. $M_{m*n}-$ *мн-во всех матриц размера* $m * n$

$A, B \in M_{m*n}, A + B \in M_{m*n}$

Определение 2.3. $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ - сложение матриц определено поэлементно.

2.2 II. Умножение матрицы на вещественное число $\lambda \in \mathbb{R}$

Определение 2.4. Умножение матрицы на число осущ. поэлементно:

$A \in M_{m*n}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A \in M_{m*n}$

$[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda [A]_{ij}$

Теорема 2.1. *Операции сложения матриц и "$*\lambda$"удовл. след. св-вам* $[A, B, C \in M_{m*n}]$*:*

1. *Коммутативность сложения:* $A + B = B + A$

2. *Ассоциативность сложения:* $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. *Существование нулевой матрицы:* $\exists O \in M_{m*n}$*, т. ч.* $A + O = A, \forall A \in M_{m*n}$

4. *Св-во сущ. прот. матрицы:* $\forall A \in M_{m*n} \exists (-A) \in M_{m*n}$*, т. ч. A + (-A) = (-A) + A = 0*

5. *Унитарность:* $1 * A = A$*;*

6. *Ассоциативность отн-но скалярного мн-ва :* $(\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$ *;*

7. *Дистрибутивность* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

8. *Дистрибутивность* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$*;*

Доказательство. **8)** $A, B \in M_{m*n}$

$[\lambda(A+B)]_{ij} = \lambda[A+B]_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda * a_{ij} + \lambda * (b_{ij}) = [\lambda A]_{ij} + [\lambda B]_{ij} = [\lambda A + \lambda B]_{ij}.$

□

Определение 2.5. Линейное пр-во над M_{m*n}**:**

Пусть V - произв. мн-во, на кот. определены операции сложения эл-ов из V и умн-я эл-ов из V на эл-ты $\mathbb{R}$, и эти оп-ции удовл аксиомам (1-8). Тогда V - действительное линейное (векторное) пр-во.

Вывод: $M_{m*n}(\mathbb{R})$ - действ. лин. пр-во.

3 III. Транспонирование

$A \in M_{m*n} \Rightarrow A^T$ или $A^t \in M_{n*m}$

Определение 3.1.

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & -1 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -7 \\ 9 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 IV. Умножение матриц

4.1 Частный случай

$A \in M_{1*n}, B \in M_{n*1}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

4.2 Общий случай

$A * B$ имеет смысл (опр.), если:

$$A \in M_{m*\underline{n}}, B \in M_{\underline{n}*k}$$

Тогда:

$$C = A * B \in M_{m*k}.$$

$$[C]_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить эл-т c_{ij} матрицы C, нужно умножить i-ую строку A на j-ую строку B

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 23 & 38 & 34 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 4.1 (О св-вах опер. транспонирования)**.** *Операция транспонирования матрицы обладает св-вами.*

1. $(A^T)^T = A$

2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$

4. *Св-во транспон. произв-я:*

$$(A * B)^T = B^T A^T.$$

Доказательство. **4)** Пусть матрица $A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}$. $AB \in M_{n*k} \Rightarrow (AB)^T \in M_{k*m}$

$B^T \in M_{k*n}, A^T \in M_{n*m} \Rightarrow B^T A^T \in M_{k*m}$

$$[(A * B)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} bsi = \sum_{s=1}^{n} b_{si} a_{js} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [B^T]_{is} [A^T]_{sj} = [B^T A^T].$$

□

$$(A * B * C)^T = C^T * B^T * A^T.$$

Теорема 4.1. *(О св-вах опер. "*"и "+")*

1. *Ассоциативность умножения:*

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

2. *Левая дистрибутивность умножения отн-но сложение*

$$A * (B + C) = A * B + A * C.$$

3. *Правая дистрибутивность умн. отн. слож:*

$$(A + B) * C = A * C + B * C.$$

Доказательство. **1)**

$$A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}, C \in M_{k*r}$$

Правая и левая часть, очев., имеют смысл.

$$[(AB)*C]_{ij} = \sum_{s=1}^{k}[AB]_{is}[C]_{sj} = \sum_{s=1}^{k}(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ts}) * c_{sj} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ts} * c_{sj} = .$$

$$= \sum_{s=1}^{k} a_{it} \sum_{t=1}^{n} b_{ts} * c_{sj} = \sum_{s=1}^{k}[A]_{it}[BC]_{tj} = [A(BC)]_{ij}.$$

□

Замечание. *Умножение матриц* ***некоммутативно****:*

$$AB \neq BA.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- это пример ***делителя нуля***

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение 4.1. Матрица $\triangle \in M_{n*n}$ наз-ся **диагональной**, если:

$$\triangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, ([\triangle]_{ij} = 0, i \neq j)$$

Утверждение 4.2.

a) Умножение матрицы A слева на матрицу $\triangle$, если это возм.,

$$[\triangle A].$$

равносильно умнож строк матрицы A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ соотв.

b) *Умнож. A справа на* $\triangle$, *если это возм.*

$$[A * \triangle].$$

равносильно умножению столбцов A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, *соотв.*