Матан

Сергей Григорян

16 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 12

Лемма 1.1. *Если f - непр-на на $[a,b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то*

$$\exists c \in [a,b] \colon f(c) = 0$$

Доказательство. Можно считать, что $f(a) < 0 < f(b)$. В противном случае заменим f на $(-f)$.
Построим п-ть отр-ов $\{[a_n, b_n]\}$ по индукции:

$$[a_1, b_1] \colon = [a,b] \text{ и если } [a_k, b_k] \text{ - построен, положим}$$

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, \frac{a_k+b_k}{2}], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) \geq 0 \\ [\frac{a_k+b_k}{2}, b_k], \text{ если } f(\frac{a_k+b_k}{2}) < 0 \end{cases}$$

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть вложенных отр-ов $\{[a_n, b_n]\}$, т. ч.:

$$f(a_n) \leq 0 f(b_n) > 0$$

По т. Кантора о вложенных отр-ах, сущ-ет $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$, причём $a_n \to c$ и $b_n \to c$. По непр-ти в точке c, переходя в нер-ве к пределу:

$$f(a_n) \leq 0 < f(b_n) \Rightarrow f(c) \leq 0 \leq f(c) \Rightarrow f(c) = 0$$

□

Определение 1.1. Будем говорить, что число s лежит строго между числа α и β, если $max(a,b) > s > min(a,b)$.

Теорема 1.2 (Больцано-Коши о промежуточных значениях)**.** *Если ф-ция f непр-на на $[a,b]$ и число s лежит строго между $f(a)$ и $f(b)$, то:*

$$\exists c \in (a,b) \colon f(c) = s$$

Доказательство. Рассм. $g = f - s$. Тогда g непр-на на $[a,b]$. Сл-но, $g(a)g(b) < 0$. Тогда по лемме (1.1)

$$\exists c \in (a,b) \colon g(c) = 0 \iff f(c) = s$$

□

Задача 1.1. Приведите пример разрывной ф-ции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, т. ч. $\forall [a,b] \subset [0,1]$, f принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$

Напомним, что $I \subset \mathbb{R}$ - промежуток $\iff$

$$\forall x, y \in I([x, y] \subset I)$$

Следствие. *Если ф-ция f непр-на на промеж. I, то $f(I)$ - промежуток.*

Доказательство. Выберем $y_1, y_2 \in f(I)$ $(y_1 < y_2) \Rightarrow$

$$\exists x_1, x_2 \in I\colon (f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2)$$

Если $y_1 < y < y_2$, то, по теореме (1.2) $\exists x \in (x_1, x_2)\colon f(x) = y$. Т. к. I - промежуток, $x_1, x_2 \in I$, то $x \in I$, а значит $y \in f(I)$, т. е. $f(I)$ - промежуток. □

Задача 1.2. Док-те, что если f - непр-на на $[a, b]$, то $f([a, b])$ - отрезок

Лемма 1.3. *Пусть f монотонна на пром-ке I. Если $f(I)$ - это пром-к, то f - непр-на на I.*

Доказательство.

Пусть f нестрого возрастает на I. Если f разрывна в точке $c \in I$. То $f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$ и хотя бы один из интервалов $(f(c-0), f(c))$ или $(f(c), f(c+0))$ непуст.

(Если c - концевая точка I, то сущ-ет только один из пределов, для кот. и проводим рассуждение.)
Пусть $Y = (f(c), f(c+0)) \neq \emptyset$. Тогда

$$\forall t \in I, t \leq c(f(t) \leq f(c))$$

Также

$$\forall t \in I, t > c(f(t) \geq \inf_{(c, \sup I)} f(x) = f(c+0))$$

Сл-но, $f(I)$ не явл. пром-ом. □

Теорема 1.4 (об обратной ф-ции)**.** *Пусть f непр-на и строго монотонна на пром. I, тогда:*

1) $f(I)$ *- пром-ок*

2) $f : I \to f(I)$ *- биекция*

3) $f^{-1} : f(I) \to I$ *- непр-на и строго монотонна на* $f(I)$

Доказательство. По следствию (1), $Y = f(I)$ явл-ся пром-ом. Ф-ция f инъективна в силу строгой монотонности.

Сл-но, $f : I \to Y$ - биекция, и сущ-ют $f^{-1} : Y \to I$

Б. О. О. пусть f строго возрастает на I

Пусть $y_1, y_2 \in Y, y_1 < y_2 \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in I \colon f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$

Если $x_1 \geq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - в силу возрастания $f \Rightarrow y_1 \geq y_2$!!!

Таким образом, если $y_1, y_2 \in Y(y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2))$ - т. е. f^{-1} строго возрастает на Y.

$f^{-1}(Y) = I$ - пром-к $\Rightarrow f^{-1}$ - непр-на на Y □

Пример. *Для* $\forall x \geq 0, n \in \mathbb{N} \exists! y \geq 0 \colon y^n = x$. *Пишут, что:*

$$y = \sqrt[n]{x}$$

Кроме того, $f(x) \colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ *- непр-на и строго монотонна.*

Доказательство. Рассм. ф-цию $g : [0; +\infty) \to \mathbb{R}, g(y) = y^n$

Ф-ция g - непр-на и строго возрастает на $[0; +\infty)$, причём:

$$g(0) = 0, \lim_{y \to +\infty} g(y) = +\infty$$

По теореме (1.4) $\exists f = g^{-1} \colon [0; +\infty) \to [0; +\infty)$:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

□

1.1 Счётные и несчётные мн-ва

Определение 1.2. Мн-во A наз-ся счётным если $\exists f : \mathbb{N} \to A$ - биекция.

Замечание.

$$A = \{ a_1, a_2, \dots \}$$
$$\forall i, j (i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j)$$

Пример.

$$\mathbb{Z} \text{ - счётно}$$
$$\dots\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$
$$h(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ - нечётно} \\ -\frac{n}{2}, & n \text{ - чётно} \end{cases}$$

Лемма 1.5. *Всякое бесконечное мн-во $A \subset \mathbb{N}$ - счётно.*

Доказательство. Пусть $n_1 = min(A)$. Если $n_1 \dots n_k$ - определена, то по инд-ции определим:

$$n_{k+1} = min(A \setminus \{ n_1 \dots n_k \})$$

Поскольку при переходе к подмн-ву минимум не уменьшается и $n_{k+1} \notin \{ n_1, \dots n_k \}$, то $n_{k+1} > n_k$

Предположим, что $\exists m \in A$ и $m \neq n_k, \forall k$. Тогда по инд-ции

$$n_k < m, \forall k \Rightarrow m > n_m \geq m!!!$$

Сл-но, $\sigma : \mathbb{N} \to A, \sigma(k) = n_k$ - строго возр. биекция. □

Определение 1.3. Мн-во не более чем счётно, если оно конечно или счётно.

Следствие. *Всякое подмн-во счётного мн-ва не более чем счётно.*

Доказательство. Рассм. конечное подмн-ва A счётного мн-ва X. $g : X \to \mathbb{N}$ - биекция $\Rightarrow$

$$g \colon A \to g(A) \text{ - биекция мн-ва } A \text{ и } g(A) \subset \mathbb{N}$$

□

Теорема 1.6. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ - *счётно*

Доказательство. Идея: Сделаем таблицу и рассматриваем её подиагонально, затем нумеруем эл-ты в диагоналях.

(k,m)	1	2	3	
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	...
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	...
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	...
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	...

$$p \in \mathbb{N}$$
$$M_p = \{\, (k,m) \colon 1 \leq m \leq p, k = p + 1 - m \,\}$$
$$g(p) = 1 + 2 + \ldots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$$
$$N_p = \{\, n \colon g(p) + 1 \leq n \leq g(p) + p = g(p+1) \,\}$$
$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(k,m) = g(k + m - 1) + m$$

□

Следствие. *Мн-во $\mathbb{Q}$ - счётно.*

Доказательство. Любое рац. число можно записать в виде несокр. дроби $\frac{p}{q}$, т. е.:

$$f_1 \colon r \to (p,q) \text{ - инъекция}$$
$$\mathbb{Q} \to \underset{(p,q)}{\mathbb{Z} \times \mathbb{N}} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$F : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}, F = f_3 \circ f_2 \circ f_1 \text{ - инъекция}$$
$$\Rightarrow F(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q} \text{ - не более чем счётно и беск} \Rightarrow \text{счётно}$$

□

Теорема 1.7. $\mathbb{R}$ *несчётно*

Доказательство. Пред-м, что $\mathbb{R} = \{\, x_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$
Рассм. $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Разобъём $[a,b]$ на три отр-ка и обозн. $[a_1, b_1]$ тот из ни, который не сод-т x_1. По инд-ции построим п-ть влож. отр-ов $\{\, [a_k, b_k] \,\}$, не содержащую $x_k, \forall k$. Однако сущ-ет точка, общая для всех отр-ов $\Rightarrow$ $\forall n x \in [a,b], x_n \notin x_n \Rightarrow \forall n \colon x_n \neq x$ □

2 Лекция 13

2.0.1 Долг прошлой жизни

Теорема 2.1 (О разрывах монот. ф-ции)**.** *Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Если f монотонна на (a, b), то f на (a, b) может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть f нестрого возр. на (a, b). Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т. $c \in (a, b)$ $\exists$ конечные $f(c-0), f(c+0)$, причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на (a, b) разрывы только I рода.

Пусть $c, d \in (a, b), c < d$. Тогда для $\alpha \in (c, d)$. Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a,d)} f(x) = f(d-0)$$

$\square$

Поэтому если c, d - точки разрыва ф-ции f, то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку $\in \mathbb{Q}$, содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

2.1 Равномерная непр-ть

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$
Напомним, что f непр-на на E, если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение 2.1. Ф-ция f наз-ся **равномерно непрерывной** (на E), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Замечание. *Если f р. н. (равномерно непр-на) на E, то f непр-на на E*

Задача 2.1. Если f и g р. н. на E и огр-ны, то fg - р. н. на E

Определение 2.2. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E(|f(x) - f(x')| \leq C\, |x - x'|)$$

Замечание. *Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$)*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

Доказательство.

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, \textbf{но не р. н.}}$$

Замечание. *f не р. н.* $\iff$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E(|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ положим, $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}$. Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но, f не р. н. □

Теорема 2.2 (Кантора)**.** *Если f непр-на на $[a, b]$, то f - р. н. на $[a, b]$*

Доказательство. I) Предположим, что f не явл-ся р. н. Тогда полагая $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, получаем $x_n, x'_n \in [a, b]$, т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$. Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \to x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти, f в x_0:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит $\left|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon > 0$

□

Задача 2.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ р. н. на E. Покажите, что

$$\exists! F : closure(E) \to \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

2.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

Определение 2.3. Ф-ция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ наз-ся экспонентой.

Замечание. *Сх-ть* $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ *устанавливалась ранее для всях* $x \in \mathbb{R}$

Теорема 2.3. *Для любых* $x, y \in \mathbb{R}$ *справедливо:*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Доказательство. Введём об-е $a_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y) = \left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{xy}{n^2}Q(x,y), Q(x,y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k}a^k$$

Где:

$$b = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right), a = \left(1 + \frac{x+y}{n}\right)$$

П-ть $\{\, a_n(|x|) \,\}$, нестрого возрастает, начиная с некот. n_0 (см. док-во сх-ти):

$$\left|\left(1 + \frac{x}{n}\right)^p\right| \le \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^p \le \left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^n \le \exp(|x|), p = 1, \dots, n$$

Сл-но, каждое слагаемое в $Q(x, y)$ оценивается по модулю $C = \exp|x+y|\exp|x|\exp|y|$. Тогда получаем:

$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)| \le \frac{|x|\,|y|\,C}{n}$$

Переходя к пределу, получаем, что:

$$|\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)| \le 0$$

Ч. Т. Д. □

Следствие.

$$\exp x > 0 \ \text{и} \ \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство.

$$\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp^2(\frac{x}{2})$$

$$\exp(x)\exp(-x) = 1$$

□

Лемма 2.4. *a)*

$$\exp(x) \ge 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$

b)

$$\exp(x) \le \frac{1}{1-x}, \forall x < 1$$

Доказательство. Зафикс. $N \in \mathbb{N}$, т. ч. $\frac{x}{N} \geq -1$. Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N\colon \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x \text{ - пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

Теорема 2.5. *Ф-ция* exp *непр-на, строго возр. и отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Доказательство. По нер-ву из предыдущей леммы, при $x < 1$ имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при $x \to 0$, $\exp(x) \to 1$. Тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \exp(x) = \begin{bmatrix} t + a = x \\ t = x - a \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0} \exp(t + a) = \lim_{t \to 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$ ф-ция непр-на на $\mathbb{R}$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x)\exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ □