

Введение в матан.
Лекция 1

Сергей Григорян

5 сентября 2024 г.

1 Инфа

Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

2 Учебники

- Зорич. В. А. "Мат. анализ";
- Виноградов О. Л. "Мат. анализ".

3 П. 1. Действительные числа

3.1 Вспомогательные конструкции

$x \in \{a, b\} \Rightarrow x = a$ или $x = b$ - неуп. пара

(a, b) - уп. пара

$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$

A, B - мн-ва, $A \cdot B = \{(a, b) : a \in A \vee b \in B\}$

Определение 3.1. Пусть X, Y - мн-ва Ф-цией $f: X \rightarrow Y$ наз-ся ф-ла $\overline{P(x, y)}$, т. ч. $\forall x \in X$ сущ-ет утв. $y \in Y$, что $P(x, y)$ - истина. Пишут $y = f(x)$ или $f: x \Rightarrow y$.

Определение 3.2. Ф-ции $f, g: X \rightarrow Y$ называются равными, если $\forall x \in X: (f(x) = g(x))$. Пишут $f = g$.

Обозначение. $f: X \rightarrow Y$, X - область опред. ф-ции

1. $A \subset X$

$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$, образ A .

$f(X)$ - мн-во значений f .

2. $B \subset Y$

$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ - прообраз B .

3. $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow X \Rightarrow f \circ g: Z \rightarrow Y, f \circ g(z) = f(g(z))$ - композиция ф-ций f и g .

Утверждение 3.1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Определение 3.3. Ф-ция $f : X \rightarrow Y$ наз-ся **инъекцией**, если $\forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
сюръекцией, если $f(X) = Y$
биекцией = сюръекцией + инъекция

Пример. 1. $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1, 2\}$

$$f(0) = 1, f(1) = f(2) = 2$$

Это **сюръекция**

2. $f : \{1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$

$$f(1) = 2, f(2) = 1$$

Это **инъекция**

Пример. $id : X \rightarrow X, \forall x \in X (id(x) = x)$ - это **тождественная ф-ция**.

Пример. Пусть $f : X \rightarrow Y$ - биекция

$\Rightarrow y = f(x)$ - имеет **1 решение**. Тогда:

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x) \text{ - обратная к } f \text{ ф-ция.}$$

$$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y$$

Задача 3.1. 1. Композиция инъекций (сюръекций, биекция) яв-ся инъекцией (сюръекцией, биекцией).

2. Обр-я ф-ция к биек. $f : X \rightarrow Y$ - явл. биекцией.

Определение 3.4. Пусть $A, \Lambda \neq \emptyset$

Говорят, что A - **семейство, индексированное эл-ми** Λ , если $\exists \phi : \Lambda \rightarrow A$ - сюръекция.

Пишут $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $a_\lambda = \phi(\lambda)$

$$\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \exists \lambda \in \Lambda (x \in A_\lambda)\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x : \forall \lambda \in \Lambda (x \in A_\lambda)\}$$

Пример.

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N}: n > 1 \text{ и } n \neq 2m: \forall m > 1\}$$

$$A_2 = \{n \in A_1: n \neq 3m: \forall m > 1\}$$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ — *множество простых чисел.*

Теорема 3.1 (Закон Де Моргана). *Для любого мн-ва E верно:*

1.

$$E \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

2.

$$E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

Доказательство.

1.

$$x \in E \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge (\forall \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda))$$

$$\iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \forall \lambda \in \Lambda (x \in E \setminus A_\lambda) \iff x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda)$$

2.

$$x \in E \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge \exists \lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda).$$

$$\iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \exists \lambda \in \Lambda (x \in E \setminus A_\lambda) \iff \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (E \setminus A_\lambda).$$

□

3.2 Аксиомат. опр-е мн-ва действ. чисел

На мн-ве \mathbb{R} опр-ны операции "+": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, "*": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, удовл. аксиомам.

$$A1: \forall a, b \in \mathbb{R} (a + b) + c = a + (b + c);$$

$$A2: \forall a, b \in \mathbb{R} a + b = b + a ;$$

$$A3: \exists 0 \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} a + 0 = a ;$$

$$A4: \forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R} a + (-a) = 0.$$

$$M1: \forall a, b, c \in \mathbb{R} (a * b) * c = a * (b * c),$$

$$M2: \forall a, b \in \mathbb{R} a * b = b * a,$$

$$M3: \exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}, a * 1 = a,$$

$$M4: \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R} a * a^{-1} = 1,$$

$$AM: \forall a, b, c \in \mathbb{R} a * (b + c) = ab + ac$$

На мн-ве \mathbb{R} введено отношение порядка " \leq " удовл. след. аксиомам:

$$O1: \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(i): a \leq a;$$

$$(ii): a \leq b, b \leq a \iff a = b ;$$

$$(iii): a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$O2: \forall a, b \in \mathbb{R}: a \leq b \vee b \leq a$$

$$O3: \text{Если } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ и } a \leq b, \text{ то } a + c \leq b + c ;$$

$$O4: \text{Если } a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \text{ и } 0 \leq c, \text{ то } ac \leq bc ;$$

Аксиома непрерывности: Для любых непустых $A, B \subset \mathbb{R}$, т. ч. $\forall a \in A, b \in B, a \leq b; \exists c \in \mathbb{R}: \forall a \in A, b \in B (a \leq c \leq b)$