АлГем

Сергей Григорян

18 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Инфа

Лектор: Вадим Владимирович Штепин

1.2 Матрицы

Определение 1.1. Матрица - прямоугольная таблица чисел.

Обозначение. $A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$

Определение 1.2. Поле - мн-во, на котором определены "+, -, *, /".

1.2.1 I. Сложение

Обозначение. *M_{m*n} − мн-во всех матриц размера $m * n$*

$A, B \in M_{m*n}, A + B \in M_{m*n}$

Определение 1.3. $[A+B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ - сложение матриц определено поэлементно.

1.2.2 II. Умножение матрицы на вещественное число $\lambda \in \mathbb{R}$

Определение 1.4. Умножение матрицы на число осущ. поэлементно:

$A \in M_{m*n}$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda A \in M_{m*n}$

$[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda [A]_{ij}$

Теорема 1.1. *Операции сложения матриц и "$*\lambda$"удовл. след. св-вам $[A, B, C \in M_{m*n}]$:*

1. *Коммутативность сложения: $A + B = B + A$*
2. *Ассоциативность сложения: $(A + B) + C = A + (B + C)$*

3. *Существование нулевой матрицы:* $\exists O \in M_{m*n}$, *т. ч.* $A + O = A, \forall A \in M_{m*n}$

4. *Св-во сущ. прот. матрицы:* $\forall A \in M_{m*n} \exists (-A) \in M_{m*n}$, *т. ч.* A + (-A) = (-A) + A = O

5. *Унитарность:* $1 * A = A$;

6. *Ассоциативность отн-но скалярного мн-ва :* $(\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$;

7. *Дистрибутивность* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

8. *Дистрибутивность* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

Доказательство. **8)** $A, B \in M_{m*n}$

$[\lambda(A+B)]_{ij} = \lambda[A+B]_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda*a_{ij}+\lambda*(b_{ij}) = [\lambda A]_{ij}+[\lambda B]_{ij} = [\lambda A+\lambda B]_{ij}$.

□

Определение 1.5. Линейное пр-во над M_{m*n}:

Пусть V - произв. мн-во, на кот. определены операции сложения эл-ов из V и умн-я эл-ов из V на эл-ты $\mathbb{R}$, и эти оп-ции удовл аксиомам (1-8). Тогда V - действительное линейное (векторное) пр-во.

Вывод: $M_{m*n}(\mathbb{R})$ - действ. лин. пр-во.

1.3 III. Транспонирование

$A \in M_{m*n} \Rightarrow A^T$ или $A^t \in M_{n*m}$

Определение 1.6.

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & -1 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -7 \\ 9 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4 IV. Умножение матриц

1.4.1 Частный случай

$A \in M_{1*n}, B \in M_{n*1}$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

1.4.2 Общий случай

$A * B$ имеет смысл (опр.), если:

$$A \in M_{m*\underline{n}}, B \in M_{\underline{n}*k}$$

Тогда:

$$C = A * B \in M_{m*k}.$$

$$[C]_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}.$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить эл-т c_{ij} матрицы C, нужно умножить i-ую строку A на j-ую строку B

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -11 \\ 23 & 38 & 34 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.1 (О св-вах опер. транспонирования)**.** *Операция транспонирования матрицы обладает св-вами.*

1. $(A^T)^T = A$

2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$

3. $(A+B)^T = A^T + B^T$

4. *Св-во транспон. произв-я:*

$$(A * B)^T = B^T A^T.$$

Доказательство. **4)** Пусть матрица $A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}$. $AB \in M_{n*k} \Rightarrow (AB)^T \in M_{k*m}$

$B^T \in M_{k*n}, A^T \in M_{n*m} \Rightarrow B^T A^T \in M_{k*m}$

$$[(A * B)^T]_{ij} = [AB]_{ji} = \sum_{s=1}^{n} a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^{n} b_{si} a_{js} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} [B^T]_{is} [A^T]_{sj} = [B^T A^T].$$

□

$$(A * B * C)^T = C^T * B^T * A^T.$$

Теорема 1.2. *(О св-вах опер. "*"и "+")*

1. *Ассоциативность умножения:*

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

2. *Левая дистрибутивность умножения отн-но сложение*

$$A * (B + C) = A * B + A * C.$$

3. *Правая дистрибутивность умн. отн. слож:*

$$(A + B) * C = A * C + B * C.$$

Доказательство. **1)**

$$A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}, C \in M_{k*r}$$

Правая и левая часть, очев., имеют смысл.

$$[(AB) * C]_{ij} = \sum_{s=1}^{k}[AB]_{is}[C]_{sj} = \sum_{s=1}^{k}(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ts}) * c_{sj} = \sum_{s=1}^{k}\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ts}c_{sj} = .$$

$$= \sum_{s=1}^{k} a_{it} \sum_{t=1}^{n} b_{ts}c_{sj} = \sum_{s=1}^{k}[A]_{it}[BC]_{tj} = [A(BC)]_{ij}.$$

□

Замечание. *Умножение матриц* ***некоммутативно****:*

$$AB \neq BA.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- это пример ***делителя нуля***

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. Матрица $\triangle \in M_{n*n}$ наз-ся **диагональной**, если:

$$\triangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, ([\triangle]_{ij} = 0, i \neq j)$$

Утверждение 1.2.

a) *Умножение матрицы A слева на матрицу $\triangle$, если это возм.,*

$$[\triangle A].$$

равносильно умнож строк матрицы A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ соотв.

b) *Умнож. A справа на $\triangle$, если это возм.*

$$[A * \triangle].$$

Равносильно умножению столбцов A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, соотв.

2 Лекция 2

2.1 Упражняемся

$A \in M_{m*n}$ Произвольную i-ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.1. Линейная комбинация (ЛК) строк $A_{1*}, \cdots, A_{m*}$ наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

Утверждение 2.1. *a)* *Пусть $A \in M_{m*n}, B \in M_{n*k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A*

b) *Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B.*

Доказательство. **b)** Пусть $C = AB \in M_{m*k}$

$$C_{*j} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{sj} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} b_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}.$$

$\square$

2.2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i-ого измерения. $(i = 1, 2, 3)$

Определение 2.2. Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

$$\overline{XY} \text{ - направленный отрезок.}$$

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

Обозначение.

$$\overline{0} \text{ - } \textit{нулевой напр. отр..}$$

Определение 2.3. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

a) $XY = X'Y'$

b) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны ($\exists$ прямая, $||$ им обоим)

c) $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 2.4. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$

Утверждение 2.2. *Два напр. отр.* $\overline{XY}$ *и* $\overline{X'Y'}$ *определяют (порождают) один и тот же вектор т. и т. т., когда они равны.*

Доказательство.

a) Необходимое: Пусть $\overline{XY}$ и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \overline{a}$

b) Достаточное: Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\overline{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. $\square$

Определение 2.5. $\overline{XY} = \overline{a} \iff$ он порождает вектор a

2.3 Операции с векторами

2.3.1 I. Сложение

<u>Замечание</u>. *При данном векторе* $\overline{a}$ *и фикс. точке* X*, то найдётся напр. отр.* $\overline{XY} = \overline{a}$

<u>Определение</u> 2.6. Пусть напр. отр. $\overline{XY}$ опр. $\overline{a}$, $\overline{YZ}$ опр. $\overline{b}$:

Сумма векторов: вектором $\overline{a} + \overline{b}$ назыв. вектор, порожд. $\overline{XZ}$

<u>Замечание</u>. *Данное опр.* ***корректно****, и не зависит от начальной точки* X

Доказательство. ***Рисунок*** □

2.3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\overline{a} = \overline{XY}$ и $\overline{XZ}$:

a) $XZ = |\lambda| * XY$

b) $\overline{XZ}$ - коллинеарен $\overline{XY}$

c) $\overline{XZ}$ сонаправлен $\overline{XY}$, при $\lambda > 0$
$\overline{XZ}$ прот. направлен. $\overline{XY}$ при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемы напр. отр. $\overline{XZ}$, наз-ся вектором $\lambda\overline{a}$

Доказательство. to do by yourself □

<u>Теорема</u> 2.1. *Операции "+"и "*λ"удовл. след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-в параллелограмма):*
$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}.$$
2. *Ассоциативность сложения:*
$$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}).$$
3. $\exists\overline{o}$: $\overline{o} + \overline{a} = \overline{a} + \overline{o} = \overline{a}, \forall\overline{a} \in V_i$
4. $\forall\overline{a} \in V_i$ $\exists(-\overline{a}) \in V_i$: $\overline{a} + (-\overline{a}) = (\overline{-a}) + \overline{a} = \overline{o}$

5. *Унитарность:*
$$1 * \overline{a} = \overline{a}, \forall \overline{a} \in V_i.$$

6.
$$(\lambda * \mu) * \overline{a} = \lambda * (\mu * \overline{a}).$$

7.
$$(\lambda + \mu) * \overline{a} = \lambda \overline{a} + \mu * \overline{a}.$$

8.
$$\lambda(\overline{a} + \overline{b}) = \lambda \overline{a} + \lambda \overline{b}.$$

Замечание. *Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва $\mathbb{R}$.*

2.4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$

$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n} \in V_i$

Обозначение.
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{v_i} \text{ - наз-ся ЛК векторов.}$$

*Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \cdots n$, то такая ЛК наз-ся **тривиальной**.*

*Если $\exists i \colon \alpha_i \neq 0$, то ЛК **нетривиальная**.*

Определение 2.7 (ЛЗ система векторов)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если $\exists$ **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{o}$

Определение 2.8 (ЛНЗ сис. вект.)**.** Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если $\nexists$ **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{o}$

Пример.
$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ - ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: предствить, что есть коэф-ты, дающие ЛК $= \overline{o}$, и показать, что она тривиальная.

Утверждение 2.3. *Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛЗ $\iff$ хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.*

Доказательство. a) **Необх:** пусть $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК } : \alpha_1\overline{v_1} + \alpha_2\overline{v_2} + \cdots + \alpha_n\overline{v_n} = \overline{o}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\overline{v_1} + \cdots + \overline{v_i} + \cdots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\overline{v_n} = \overline{o}.$$
$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\overline{v_1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\overline{v_i} = \lambda_1\overline{v_1} + \cdots + \lambda_n\overline{v_n}$

$$\Rightarrow \lambda_1\overline{v_1} + \cdots + \lambda_n\overline{v_n} - \overline{v_i} = \overline{o}.$$

□

Замечание. ***НЕВЕРНО*** *было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.*

Пример.

$$\overline{a}, \overline{b} \text{ - неколлин..}$$

$$\Rightarrow \textit{Для } \begin{pmatrix}\overline{a} & \overline{a} & \overline{b}\end{pmatrix} \textit{ - это неверно, т. к. } b \textit{ не выразим через } a.$$

$$\textit{Но } 1 * \overline{a} + (-1) * \overline{a} + 0 * \overline{b} = \overline{o} \textit{ - нетривиальная ЛК.}$$

Утверждение 2.4. *a) Если система $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛЗ $\Rightarrow$ всякая её **надсистема** тоже ЛЗ*

b) Если система $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \cdots, \overline{v_n}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$, то всякая её подсистема ЛНЗ.

Доказательство. a) $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_n$,- не все равны $\overline{o}$, тогда $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{v_i} = \overline{o}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\overline{v_i} + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \overline{v_j} = \overline{o}$

b) Пусть подсистема $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_k}\end{pmatrix}$ - ЛЗ (от прот.), тогда по a), $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ - ЛНЗ $\Rightarrow$ **Противоречие**

□

Утверждение 2.5. *Пусть* $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ *- ЛНЗ сист. векторов в* V_i*. Тогда каждый вектор* $\overline{w} \in V_i$ *выразится через* $\begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix}$ *не более чем одним способом.*

Доказательство.

$$\overline{w} = \begin{pmatrix}\overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix} = \overline{V}\alpha = \overline{V}\beta$$

$$\Rightarrow \overline{o} = \overline{V}(\alpha - \beta).$$

□

3 Лекция 3

3.1 Понятие базиса лин. пр-ва. Базисы в пр-вах V_i

Утверждение 3.1. *a) Пусть* $\overline{a} \neq \overline{o}$ *и* $\overline{b}$ *коллинеарен* $\overline{a}$*. Тогда* $\overline{b} = \lambda\overline{a}$*.*

b) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ *не коллин. и* $\overline{b}$ *компл.* $\overline{a_1}, \overline{a_2}$*. Тогда* $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$

c) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ *- не комплан. Тогда всякий вектор представим в виде* $\overline{b} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$\lambda = \begin{cases} \frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на одной стороне с } X \\ -\frac{XZ}{XY}, \text{если } Y \text{ и } Z \text{ лежат на разных сторонах отн. } X \end{cases} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a}$$

b) Оба вектора $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ненулевые. (***Картинка***)

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ_1} + \overline{XZ_2} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$$

c) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ порожд. $\overline{XY_1}, \overline{XY_2}, \overline{XY_3}$, а вектор b - $\overline{XZ}$. $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин., (***Картинка***) $Z' = l \cap (X_1Y_1Y_2)$

$$\overline{b} = \overline{b_1} + \overline{b_2} = \overline{XZ'} + \overline{Z'Z} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3}$$

□

Следствие. *1) Система, сост. только из $\overline{o}$ - ЛЗ.*

2) Система, сост. из двух колин. векторов - ЛЗ.

3) Система, сост. из трёх комплан. векторов - ЛЗ.

4) Любая сист., сост. из четырех векторов в пр-ве - ЛЗ.

Доказательство. 1) $1 * \overline{o} = \overline{o}$

2) $\overline{a}, \overline{b}$ - коллин.

Если $\overline{a} = \overline{o}$ - ЛЗ система $\Rightarrow (a, b)$- надсистема ЛЗ $\Rightarrow$ она ЛЗ

Если $\overline{a} \neq \overline{o} \Rightarrow \overline{b} = \lambda\overline{a} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b})$ - ЛЗ

3) Пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b}$ - компл.

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - коллин., то $(\overline{a_1}, \overline{a_2})$ - ЛЗ $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема.

Иначе, $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - не коллин. $\Rightarrow b = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2 + \overline{a_2}$ - ЛЗ

4) $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b}$:

Если $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow (\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{b})$ - ЛЗ, как надсистема ЛЗ сист.

Иначе $\Rightarrow \overline{b} = \alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \alpha_3\overline{a_3}$.

□

Утверждение 3.2. *Пусть $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n})$ - ЛНЗ сист. вект. и $(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}, \overline{b})$ - ЛЗ. Тогда:*

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a_i}$$

Доказательство. $\exists$ нетрив. ЛК:

$$\alpha_1\overline{a_1} + \alpha_2\overline{a_2} + \ldots + \alpha_n\overline{a_n} + \beta\overline{b} = \overline{o}$$

Предположим, что $\beta = 0 \Rightarrow$ противоречие с условием $\Rightarrow \beta \neq 0 \Rightarrow$:

$$\overline{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\overline{a_1} - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta}\overline{a_n}$$

□

Определение 3.1. V - лин. пр-во (над $\mathbb{R}$).

Система векторов $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - наз-ся базисом в V_i, если:

a) $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - ЛНЗ

b) Каждый вектор $\overline{v} \in V_i$ представим в виде ЛК:

$$\overline{v} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \ldots + \alpha_n\overline{e_n}, \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Пример.

$$M_{3*1}(\mathbb{R})\colon \overline{e_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overline{e_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \overline{e_3} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\overline{v} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\overline{e_i}$$

Замечание.

$$\overline{v} = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \ldots & \overline{e_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix} \text{ - } \textit{коор-т столбец } \overline{v} \textit{ в базисе } \overline{e}$$

Утверждение 3.3. *Если в V фикс. базис $G = \begin{pmatrix}\overline{e_1} & \overline{e_2} & \ldots & \overline{e_n}\end{pmatrix}$, то всякий вектор $\overline{v} \in V$ однозначно раскладывается по одному базису. (т. е. имеет однозначно опред. коор-тный столбец)*

Доказательство. См. прошлую лекцию ☐

Утверждение 3.4. *Пусть в пр-ве V фикс. базис G, $\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha, \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \beta$. Тогда:*

$$\overline{v} + \overline{w} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \alpha + \beta,$$

$$\lambda\overline{v} \underset{G}{\Longleftrightarrow} \lambda\alpha$$

Доказательство.

$$\overline{v} = G\alpha$$
$$\overline{v} = G\beta$$
$$\Rightarrow \overline{v} + \overline{w} = G(\alpha + \beta)$$
$$\lambda\overline{v} = \lambda G\alpha = G(\lambda\alpha)$$

□

3.2 Описание базисов в пр-вах V_1, V_2, V_3

Теорема 3.1 (О ЛНЗ системах векторов)**.**

1) *Система, состоящая из одного* ***ненулевого*** *вектора* $\overline{a}$ *- ЛНЗ*
2) *Система, сост. из двух неколлин. векторов* $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ *- ЛНЗ*
3) *Система, сост. из трёх некомплан. векторов* $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$*- ЛНЗ*

Доказательство. 1) От. противного, пусть $\lambda \neq 0$ и $\lambda\overline{a} = \overline{o}$:

$$|\lambda||\overline{a}| = 0\text{!!! Два ненулевых числа в умнож. дают 0.}$$

2) От. противного, пусть $\overline{a_1}, \overline{a_2}$ - ЛЗ. Б. О. О. (без ограничения общности) $\overline{a_2} = \lambda\overline{a_1}$ - противоречие.
3) От. пр., пусть $\begin{pmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2} & \overline{a_3}\end{pmatrix}$ - ЛЗ. Б. О. О. $\overline{a_3} = \lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2}$ - противоречие.

□

Теорема 3.2 (Об описании базиса в V_i)**.** *Система векторов является:*

a) *базисом в* $V_1 \iff$ *она состоит из одного вектора* $\overline{e} \neq \overline{o}$
b) *базисом в* $V_2 \iff$ *она сост. из двух неколин. векторов* $\overline{e_1}, \overline{e_2}$
c) *базисом в* $V_3 \iff$ *она сост. из трёх некомпл. векторов* $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$

Доказательство.

a) $V_1\colon \overline{e} \neq 0$ (ЛНЗ сист.)

$$\forall \overline{b} \in V_1 (\overline{b} = \lambda \overline{e}) \Rightarrow (\overline{e}) \text{ - базис в } V_1.$$

Если $\overline{e_1}, \overline{e_2} \in V_1 \Rightarrow$ они коллин. $\Rightarrow$ ЛЗ и аналогично $(\overline{o})$ - ЛЗ.

b) V_2 - фикс. $(\overline{e_1}, \overline{e_2})$ - неколл. $\Rightarrow$ ЛНЗ.

$$\forall b \in V_2 \underset{\text{Утв. 1}}{\Rightarrow} \overline{b} = \lambda_1 \overline{e_1} + \lambda_2 \overline{e_2} \Rightarrow (\overline{e_1}, \overline{e_2})\text{- базис.}$$

Почему нет других? $\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix}$ - компл. $\Rightarrow$ ЛЗ. Если $\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} \end{pmatrix}$ - коллин. $\Rightarrow$ через них выр-ся только коллин. им вектора.

c) $\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix}$ - некомпл. $\Rightarrow$ ЛНЗ:

$$\forall b \in V_3\colon b = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i} \Rightarrow \text{ базис.}$$

Почему нет других?

$$\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} & \overline{e_4} \end{pmatrix} \text{ - ЛЗ}$$

$\begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix}$ - компланарный, то тогда ЛЗ

- $\overline{e_1} || \overline{e_2}$ - очев.
- $\overline{e_1 \not|| \overline{e_2}}$ - образ. плоскость.

$\square$

3.3 Матрица перехода от одного базиса к другому

$V\colon$ два базиса: $G = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n} \end{pmatrix}, G' = \begin{pmatrix} \overline{e_1}' & \overline{e_2}' & \dots & \overline{e_n}' \end{pmatrix}$

$$\overline{e_1}' = S_{11}\overline{e_1} + S_{21}\overline{e_2} + \ldots + S_{n1}\overline{e_n}$$

$$\vdots$$

$$\overline{e_n} = S_{1n}\overline{e_1} + S_{2n}\overline{e_2} + \ldots + S_{nn}\overline{e_n}$$

$\Rightarrow$

$$S' = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{pmatrix} = S_{G \to G'}$$

- матрица перехода от G к G'

$$\begin{pmatrix} \overline{e_1}' & \overline{e_2}' & \dots & \overline{e_n}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \dots & \overline{e_n} \end{pmatrix} S_{G \to G'} \iff$$

$$G' = GS_{G \to G'}$$

Утверждение 3.5. *Пусть в V фикс. G и G' - базисы и $G' = GS$. Пусть $\overline{a} \underset{G}{\iff} \alpha$ и $\overline{a} \underset{G'}{\iff} \alpha'$. Тогда $\alpha = S\alpha'$.*

Доказательство.

$$\overline{a} = G\alpha$$

$$\overline{a} = G'\alpha' = GS\alpha' \Rightarrow \alpha = S\alpha'$$

□

Определение 3.2. $\overline{a}, \overline{b}$ наз-ся ортогональными, если он перпендикулярны друг другу.

Определение 3.3. Базис G наз-ся ортогональным, если все базис. векторы попарно ортогональны.

Определение 3.4. Базис G наз-ся ортонормированным (ОНБ), если он ортогональный и нормированный ($\forall i \colon |\overline{e_i}| = 1$).

4 Лекция 4

4.1 Декартова система коор-т

$$G = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} \end{pmatrix}$$

- ОНБ

$$G' \text{- } G \text{ повёрнутый на } \alpha$$

$$\overline{e_1}' = \cos\alpha \overline{e_1} + \sin\alpha \overline{e_2}$$

$$\overline{e_2}' = -\sin\alpha\overline{e_1} + \cos\alpha\overline{e_2}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = R(\alpha) \text{ - Rotation - поворот.}$$

Утверждение 4.1. *Пусть $S = S_{G\to G'}$. Пусть $T = S_{G'\to G''}$. Тогда:*

$$ST = S_{G\to G''}$$

Доказательство.

$$G' = GS, G'' = G'T \Rightarrow G'' = G'T = GST$$

□

Утверждение 4.2. *Пусть S - матрица перехода от G к G'. T - матр. перехода от G' к G. Тогда:*

$$ST = TS = E \text{ - единичная матрица}$$

Доказательство.

$$G'' = G \Rightarrow ST \text{ - матрица перехода от } G \text{ к } G \Rightarrow ST = E$$

$$TS \text{ - матрица перехода от } G' \text{ к } G' \Rightarrow TS = E$$

□

Обозначение. ***Единичная матрица*** *E - диагональная матрица с единицами на главной диагонали.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Определение 4.1. Если выполняется рав-во $ST = TS = E$, то матрица T называется **обратной** к S.

Определение 4.2. Матрица наз-ся **обратимой**, если у неё есть обратная матрица.

Утверждение 4.3. *Если обратная матрица сущ-ет, то она единственная.*

Доказательство. От. прот. Пусть $A^{-1}, \overline{A}^{-1}$ - обратные матрицы к матр. A.

$$A^{-1} = EA^{-1} = (\overline{A}^{-1}A)A^{-1} = \overline{A}^{-1}(AA^{-1}) = \overline{A}^{-1}E = \overline{A}^{-1}$$

$\square$

Следствие. *Матрица перехода от одного базиса к другому* ***всегда обратима.***

Задача 4.1. Док-ть, что $R(\alpha)$ обладает св-вами:

1) $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha + \beta)$

2) $R(\alpha)^{-1} = R(-\alpha) = R(\alpha)^T$

Задача 4.2. Пусть $\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ (отн. ОНБ G) - вектор, выход. из нач. коор-т. $\overline{b}$ - вектор $\overline{a}$ повернутый на α, тогда:

$$\overline{b} = R(\alpha), \overline{a} = R(\alpha) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Определение 4.3. Пусть т. O - фикс. точка, начало коор-т. G базис в V_i. Тогда: (O, G) - ДСК

Определение 4.4. ДСК наз-ся **прямоугольной**, если G - ОНБ.

Определение 4.5. A - точка. Тогда коор-ты вектора $\overline{OA}$ наз-ся коор-тами точки A в ДСК (O, G):

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha \iff \overline{OA} = G\alpha = \begin{pmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Утверждение 4.4. $A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = G\beta - G\alpha = G(\beta - \alpha)$$

Итого: чтобы найти вектор по его концам, нужно из коор-ты конца вычесть коор-ту начала.

<u>Утверждение</u> 4.5 (О делении отрезка в данном соотношении).

$$A \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \alpha, B \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \beta$$

Пусть т. C делит отрезок $[A,B]$ в отношении $\frac{\lambda}{\mu}$. Тогда:

$$C \underset{(O,E)}{\longleftrightarrow} \frac{\mu\alpha + \lambda\beta}{\lambda + \mu} \iff$$

$$\iff \bar{c} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\bar{b} \text{ - выпуклая ЛК}$$

Доказательство.

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\overline{AB} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\bar{b} - \bar{a})$$

$$\bar{c} = \alpha + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(\bar{b} - \bar{a}) = (1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu})\bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\bar{b} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}\bar{a} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\bar{b}$$

□

<u>Теорема</u> 4.1 (Об изменении коор-т точки при замене ДСК). *Пусть в <u>V_i фикс.:</u> (O,G) (I ДСК) и (O',G') (II ДСК).*

Пусть $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \alpha$ и $A \underset{(O',G')}{\longleftrightarrow} \alpha'$ и пусть $S = S_{G \to G'}$

*(***Картинка***)*

Тогда $\alpha = S\alpha' + \gamma$

Доказательство.

$$\overline{OA} = \overline{OO'} + \overline{O'A}$$

$$\overline{OA} = G\alpha$$

$$\overline{OO'} + \overline{O'A} = G\gamma + G'\alpha' = G\gamma + GS\alpha' = G(S\alpha' + \gamma)$$

□

4.2 Скалярное произведение

Определение 4.6. V_i. **Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$** обозначаем $(\overline{a}, \overline{b})$ (в физике $\overline{a} \cdot \overline{b}$). Это число, равное:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \alpha$$

$$\alpha = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то скал. произ. = 0.

Обозначение.

$$(\overline{a}, \overline{a}) = |\overline{a}|^2 \text{ - } \textit{скалярный квадрат } \overline{a}$$

Замечание.

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \iff \overline{a} \perp \overline{b}$$

Определение 4.7. (***Картинка***)

Вектор, порождаемые напр. отр-ом $\overline{OA'}$ наз-ся проекцией вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$:

$$pr_{\overline{b}}\overline{a} = \overline{OA'}$$

$$(pr_{\overline{b}}\overline{a} = 0 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}) = 0)$$

Утверждение 4.6. *(Линейность векторной проекции)*

a) $pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})(\overline{b} \neq \overline{o})$ - *ассоциативность*

b) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$ - *однородность*

Доказательство. a) (***Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a_1} + \overline{a_2}) = \overline{OA'_2} = \overline{OA'_1} + \overline{A'_1A'_2} = pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) + pr_{\overline{b}}(\overline{a_2})$$

b) Для $\lambda > 0$: (****Картинка***)

$$pr_{\overline{b}}(\lambda\overline{a}) = \overline{OA'} = \lambda\overline{OA'} = \lambda pr_{\overline{b}}(\overline{a})$$

□

Утверждение 4.7. *Пусть $\overline{b} \neq \overline{o}$. Тогда:*

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство.

$$\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \phi.$$

- Если $\phi = \frac{\pi}{2}$ - рав-во верно.
- Если $\overline{a} = \overline{o}$ - рав-во верно
- Пусть $\phi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$.

$$|pr_{\overline{b}}(\overline{a})| = |\overline{a}||\cos\phi| = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \upuparrows \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{cases} |\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * 1, \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \upuparrows \overline{b} \\ -|\overline{a}|\cos\phi|\overline{b}| * (-1), \text{если } pr_{\overline{b}}(\overline{a}) \uparrow\downarrow \overline{b} \end{cases} = (\overline{a}, \overline{b})$$

□

Теорема 4.2 (О св-вах скалярного произведения). 1. *Симметричность* $(\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b}, \overline{a})$

2. *Аддитивность по I арг-ту:* $(\overline{a_1} + \overline{a_2}, \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$
3. *Однородность по I арг-ту:* $(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$
4. *Полож. определённость:* $(\overline{a}, \overline{a}) \geq 0, \forall\overline{a}$ *и* $(\overline{a}, \overline{a}) \iff \overline{a} = \overline{o}$

Доказательство. 3) При $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$ очев. При $\lambda > 0$:

$$\angle(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \angle(\overline{a}, \overline{b})$$

$$(\lambda\overline{a}, \overline{b}) := |\lambda\overline{a}||\overline{b}|\cos(\lambda\overline{a}, \overline{b}) = \lambda|\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b})$$

2)

$$(\overline{a_1}+\overline{a_2}, \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}+\overline{a_2}), \overline{b}) = (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1})+pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \begin{bmatrix} pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}) = \lambda_1\overline{b} \\ pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}) = \lambda_2\overline{b} \end{bmatrix} =$$

$$= ((\lambda_1+\lambda_2)\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1+\lambda_2)(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda_1(\overline{b}, \overline{b})+\lambda_2(\overline{b}, \overline{b}) = (\lambda_1\overline{b}, \overline{b})+(\lambda_2\overline{b}, \overline{b}) =$$
$$= (pr_{\overline{b}}(\overline{a_1}), \overline{b}) + (pr_{\overline{b}}(\overline{a_2}), \overline{b}) = (\overline{a_1}, \overline{b}) + (\overline{a_2}, \overline{b})$$

□

Утверждение 4.8. *Пусть* $\overline{b} \neq \overline{o}$. *Тогда:*

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2} * \overline{b}$$

Доказательство.

$$pr_{\overline{b}}(\overline{a}) = \lambda \overline{b} \mid \cdot \overline{b}$$

$$(pr_{\overline{b}}(\overline{a}), \overline{b}) = \lambda(\overline{b}, \overline{b}) = \lambda |\overline{b}|^2$$

$$\lambda = \frac{(pr_{\overline{b}}(\overline{a}))}{|\overline{b}|^2} = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{b}|^2}$$

□

5 Лекция 5

5.1 Выр-е скалярного произведения в ОНБ и произвольном базисе

Утверждение 5.1. *G - ОНБ. $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha$. Тогда $\alpha_i = (\overline{a}, \overline{e_i})$*

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overline{e_s}$$

$$(\overline{a}, \overline{e_i}) = (\sum_{s=1}^{n} \alpha_s \overline{e_s}, \overline{e_i}) = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s (\overline{e_s}, \overline{e_i}) = \alpha_i = 1$$

$$(\overline{e_i}, \overline{e_i}) = |\overline{e_i}^2| = 1$$

□

Теорема 5.1. *(Выраж. ск. произ. в ОНБ) G - ОНБ, $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta$. Тогда $(\overline{a}, \overline{b}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha^T \beta$*

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{e_i}, \overline{b} = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{e_j}$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = (\sum_i \alpha_i \overline{e_i}, \sum_j \beta_j \overline{e_j}) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha^T \beta$$

□

Замечание. $V_3 : (\overline{a},\overline{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$

V - лин. пр-во, $G = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n})$ - базис в V.

Определение 5.1. Матрицей Грама базиса G наз-ся матрица:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (\overline{e_1}, \overline{e_1}) & (\overline{e_1}, \overline{e_2}) & \ldots & \overline{e_1, e_n} \\ & \ldots & & \\ (\overline{e_n}, \overline{e_1}) & (\overline{e_n}, \overline{e_2}) & \ldots & (\overline{e_n}, \overline{e_n}) \end{pmatrix}$$

Теорема 5.2. *Пусть V - лин. пр-во, G - произ. базис с матр. Грама Γ.*

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta \Rightarrow (\overline{a},\overline{b}) = \alpha^T \Gamma \beta$$

Доказательство.

$$\overline{a} = \sum_i \alpha_i \overline{e_i}$$

$$\overline{b} = \sum_j \beta_j \overline{e_j}$$

$$(\overline{a},\overline{b}) = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j (\overline{e_i}, \overline{e_j}) = \sum_i \sum_j \alpha_i [\Gamma]_{ij} \beta_j = \sum_i \alpha_i \sum_j [\Gamma]_{ij} \beta_j = \sum_i \alpha_i [\Gamma\beta]_i =$$
$$= \alpha^T [\Gamma] \beta$$

□

Определение 5.2. Матрица $S_{n\times n}$ наз-ся ортогональной, если:

$$S^T S = E$$

Утверждение 5.2. *ПУсть в V_i, G - ОНБ и F - произвольный базис и пусть $S = S_{G\to F}$. Тогда базис F явл. ОНБ $\iff$ S - ортогональная.*

Доказательство.

$$S = \begin{pmatrix} F_1^{\uparrow} & F_2^{\uparrow} & \dots & F_n^{\uparrow} \end{pmatrix}, S^T S = \begin{pmatrix} F_1^{\rightarrow} \\ F_2^{\rightarrow} \\ \vdots \\ F_n^{\rightarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1^{\uparrow} & F_2^{\uparrow} & \dots & F_n^{\uparrow} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (F_1, F_1) & (F_1, F_2) & \dots & (F_1, F_n) \\ & & \dots & \\ (F_n, F_1) & (F_n, F_2) & \dots & (F_n, F_n) \end{pmatrix} = \Gamma_F$$

F - ОНБ $\iff \Gamma_f = E \iff S^T S = E \iff S -$ орт. $\square$

Задача 5.1. Д-ть, что Γ_G и Γ_F - матр. грамма двух произв. базисов в V_i, то если $S = S_{G \to F}$, то:

$$\Gamma_F = S^T \Gamma_G S$$

Утверждение 5.3. *Пусть в V_i G - ОНБ. Тогда:*

a) $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a}, \overline{a})} = \sqrt{\alpha^T \alpha} = \sqrt{\sum_{s=1}^n \alpha_s^2}$ $(\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha)$

b) *Если $\overline{a} \neq \overline{o}$ и $\overline{b} \neq 0$. Тогда:*

$$\cos \phi = \frac{(\overline{a}, \overline{b})}{|\overline{a}||\overline{b}|} = \frac{\alpha^T \beta}{\sqrt{\alpha^T \alpha}\sqrt{\beta^T \beta}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i}{\sqrt{\sum \alpha_i^2}\sqrt{\sum \beta_i^2}}$$

Следствие. V_3. $A \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, B \underset{(O,G)}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \overline{AB} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2 \\ \beta_3 - \alpha_3 \end{pmatrix}$:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(\overline{AB}, \overline{AB})} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\beta_i - \alpha_i)^2}$$

5.2 Ориентация на пл-ти

Определение 5.3. Упорядоченная пара векторов $\overline{a}, \overline{b} (\overline{a} \not\parallel \overline{b})$ наз-ся **положительно ориентированной**, если при взгляде из фиксир. полупр-ва **кратчайший поворот** первого вектора $(\overline{a})$ в вектор, сонаправленный второму вектору $(\overline{b})$ кажется совершающим **против. часовой стрелки**.

Определение 5.4. Упорядоченная тройка некомпл. векторов $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся **правой тройкой (положит. ориент)**, если $(\overline{a}, \overline{b})$ из конца вектора $\overline{c}$ каж-ся положит. ориентированной. Иначе - наз-ся **левой тройкой (отриц. ориент.)**

Утверждение 5.4. *a) Если на пл-ти V_2, $(\overline{a}, \overline{b})$ - положит. ориент., то пара $(\overline{b}, \overline{a})$ - отриц. ориент. и наоборот.*

b) в V_3 : $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ и $(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c})$ всегда прот. ориент. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ всегда одинаково ориент.

Доказательство. a) Очев.

b)

□

Определение 5.5. **Транспозиция** - перемещ. мест двух векторов.

Определение 5.6. **3-цикл**: $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \mapsto (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) \mapsto (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b})$

Замечание. $\Rightarrow$ *Всякая* ***транспозиция меняет*** *ориентацию, а всякий* ***3-цикл - сохраняет****.*

Определение 5.7. V_2 - с фикс. ориентацией. Тогда ор. площадью упор. пары $(\overline{a}, \overline{b})$ наз-ся число S:

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \pm S_{\text{пар-м, порожд.}a \text{ и } b}$$

(Знак +/- зависит от положит./отриц. ориентации $(\overline{a}, \overline{b})$)

Определение 5.8. V_3 - с фикс. ор. Тогда **ориентированным объёмом** упор. тройки $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся число:

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \pm V \text{ - объём параллелипипеда, порожд. } (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

(+/- зависит от полож./отриц. ориентации тройки)

Замечание. *Если $\overline{a} || \overline{b}$, то $S(\overline{a}, \overline{b}) = 0$*
Если $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - комплан., то $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0$

Замечание. *$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ наз-ся также смешанным произведением векторов.*

Утверждение 5.5. *a) Если $(\overline{a}, \overline{b})$ - ОНБ в V_2, то*

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = \pm 1,$$

в зависимости от ориентации $(\overline{a}, \overline{b})$

b) Если $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$ в V_3, то:

$$V(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}) = \pm 1,$$

в зависимости от ориентации $(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$

Теорема 5.3 (О св-вах ориент. объёма)**.** *a) Ориент. объём $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ меняет знак на противоположный при любой транспозиции арг-ов. $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ не меняет знак при 3-цикле.*

b) Аддитивность на III аргументах: $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1} + \overline{c_2}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1}) + V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_2})$

c) Однородность на III аргументах: $V(\overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c}) = \lambda V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$

Доказательство. b) Если $\overline{a}||\overline{b}$, то очев. Пусть $\overline{a} \not|| \overline{b}$. α - образована $\overline{a}$ и $\overline{b}$

$\overline{n}$: $\overline{n} \perp \overline{a}, \overline{b}, |\overline{n}| = 1, (\overline{a}, \overline{b}, \overline{n})$- правая

Лемма 5.4. *$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S(\overline{a}, \overline{b}) * (\overline{n}, \overline{c})$ л. ч. $|V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})| = V_{пар.}$*

$|S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c})| = S(\overline{a}, \overline{b})|\overline{c}||\cos\angle(\overline{n}, \overline{c})|$

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) > 0 \iff (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \text{ - правая} \iff$$

концы $\overline{n}$ и $\overline{c}$ лежат в одном полупр-ве от α $\iff$ $\cos\angle(\overline{n}, \overline{c}) > 0$

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1} + \overline{c_2}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_1} + \overline{c_2}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_1}) + S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c_2}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_1}) + V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c_2})$$

□

Теорема 5.5 (О св-вах ориент площади)**.** *a) $S(\overline{a}, \overline{b}) = -S(\overline{b}, \overline{a})$ - кососимметрична* *b)* $S(\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}) = S(\overline{a}, \overline{b_1}) + S(\overline{a}, \overline{b_2})$ *- аддитивность по II арг-ту.*

c) $S(\overline{a}, \lambda\overline{b}) = \lambda S(\overline{a}, \overline{b})$

<u>**Утверждение**</u> **5.6.** *Пусть* $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ *Тогда* $S(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} S(\overline{e_1}, \overline{e_2})$

$$S(\overline{a}, \overline{b}) = S(\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}, \beta_1\overline{e_1}+\beta_2\overline{e_2}) = \alpha_1\beta_2 S(\overline{e_1}, \overline{e_2})+\alpha_2\beta_1 S(\overline{e_2}, \overline{e_1}) = S(\overline{e_1}, \overline{e_2})(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1) =$$

$$= \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} S(\overline{e_1}, \overline{e_2})$$