Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

6 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 8

Ф-лы	
Выполнимые	Невыполнимые

1.1 Выр-ем задачи через вып-ть ф-л

1) **Раскраски:**
Дан граф $G = (V, E)$. Цель, построить 3-раскраску

$$V \to \{1, 2, 3\} : (v, u) \in E \Rightarrow col(u) \neq col(v)$$

Вершина $u \mapsto (p_u, q_u)$

цвет	знач перем
не сущ	00
1	01
2	10
3	11

Усл-ие на ребро:

$$(v, u) \mapsto (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Итоговая ф-ла:

$$\bigcap_{(v,u)\in E} (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Вып-ма т. и т. т., когда граф раскрашен в 3 цвета.

2) **Расстановка ферзей**:

$$n \times n\colon p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{на клетке } (i, j) \text{ стоит ферзь} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - в i-ой строке} > 1 \ \Phi.$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{ik}) \text{ - в i-ой строке} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ik} \vee \neg p_{jk}) \text{ - в i-ой вертикали} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на диагонали} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на побочной диагонали} \leq 1 \ \Phi$$

Вся ф-ла - конкатенация всех условий.

3) **З-ча о клике**:
Дан граф $G, q_{uv} = 1 \iff (u,v) \in E$
Вопрос: $\exists$? клика из k вершин.

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k)\colon \forall i \neq j, (v_i, v_j) \in E$$

$$\bigvee_{(v_1,v_2,\ldots,v_k)} \bigwedge_{i\neq j} q_{v_i,v_j} \text{ - длина} \sim C_n^k =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{(n-k)^k}{k!} > \left(\frac{n-k}{k}\right)^k \underset{k=\frac{n}{10}}{=} 9^{\frac{n}{10}}$$

Можно ли понимать $v_1, v_2, \ldots, v_k$ как перемен. и написать ф-лу:

$$\bigwedge_{i\neq j}(v_i \neq v_j \wedge q_{v_i,v_j})?$$

Это не булева ф-ла, т. к. перем. встреч. в индексе.

$$p_u = \begin{cases} 1, & \text{u в клике} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_u \wedge p_v) \to q_{uv}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geq k$$

Или: $(u,v) \notin E \Rightarrow (\neg p_u \wedge \neg p_v)$.

Будем делать так:

$$p_{iu} \text{ - вершина } u \text{ - } i\text{-ая в клике}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - под каждым номером есть вершина, } i \in \{1, \ldots, k\}$$

$$i \neq j \Rightarrow (\neg p_{iv} \vee \neg p_{jv}) \text{ - у одной верш. не м. б. 2 номеров.}$$

$$(u,v) \notin E \Rightarrow (\neg p_{iu} \vee \neg p_{jv}) \text{ - антиребро не м. б. внутри клики.}$$

1.1.1 Обобщаем. Метод резолюций

Ф-ла - конъюнкция всех усл. - КНФ.

Пусть дана КНФ, будем рассм. её как набор дизъюнктов.

Правило Res:

$$\frac{A \vee x \qquad\qquad\qquad\qquad B \vee \neg x}{A \vee B \text{ - \textbf{резольвента}}}$$

Утверждение 1.1. *Если на данном наборе вып. $A \vee x$ и $B \vee \neg x$, то вып-мо и $A \vee B$*

Следствие. *Если исх. ф-ла вып-ма, то и все резольвенты тоже.*

Пустой дизъюинкт: $\perp$

$$\frac{x \qquad \neg x}{\perp}$$

$$\frac{x \vee y \qquad\qquad \neg x \vee \neg y}{y \vee \neg y}$$

$$\frac{p \vee x \qquad\qquad p \vee r \vee \neg x}{p \vee r}$$

Метод резолюций: строим всё новые резольвенты, пока либо не будет выведен $\perp$, либо не прекратится появление новых дизъюнктов.

Теорема 1.1 (О корректности метода резол.)**.** *Если исх. ф-ла вып., то $\perp$ нельзя вывести.*

Доказательство. Если можно вывести, то $\perp$ будет ист., но он $\equiv 0$ □

Пример. *Ферзи 2 x 2*

p	q
r	s

Усл-ие:

$$p \vee q$$

$$r \vee s$$

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\neg r \vee \neg q$$

$$\neg p \vee \neg s$$

$$\neg q \vee \neg r$$

$$\frac{p \vee q \qquad\qquad \neg p \vee \neg s}{q \vee \neg s}$$

Picture

Теорема 1.2. *(О полноте) Если $\perp$ нельзя вывести, то ф-ла выполнима.*

Доказательство. Все выводимые дизъюнкты разобъём на классы.

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_k$$

C_i - дизъюнкты, зависящ. только от переменных $p_1, \ldots, p_i$ ($C_0 = \emptyset$, т. к. $\perp$ - невыводим).

Будем док-ть по инд-ции, что одновр. вып. все дизъюнкты из C_i. ММИ:

- База: $C_0 = \emptyset \Rightarrow$ очев.
- Переход: пусть все ф-лы из C_{i-1} вып-ны на знач. $a_1, \ldots a_{i-1}$. Рассм. ф-лы из C_i, кот. ещё не выполнены за счёт этих значений.
  Предположим, что среди них есть ф-ла с p_i и ф-ла с $\neg p_i$:

  $$p_i \vee D_0 \text{ и } \neg p_i \vee D_1$$

  Раз эти ф-лы остались, то $D_0(a_1, \ldots, a_{i-1}) = 0$ и $D_1(a_1, \ldots, a_{i-1}) = 0$.
  Но $D_0 \vee D_1$ явл-ся резольвентой: $(p_i \vee D_0), (\neg p_i \vee D_1)$. Тогда $D_0 \vee D_1 \in C_{i-1}$, и тогда должно быть: $D_0 \vee D_1 = 1$!!!
  Следовательно, все оставшиеся ф-лы либо с $p_i \Rightarrow p_i = 1$, либо с $\neg p_i \Rightarrow p_i = 0$

$\square$

Как это связано с тафтологиями? А это уже совсем другая история.

2 Лекция 9

Использование резолюций для проверки тавтологий:

ϕ - тавтология $\iff$ $\neg\phi$ - противоречие $\iff$ $\neg\phi$ невып.

ϕ - тавтология $\iff$ из нек-ой задачи о вып-ти КНФ, постр. по $\neg\phi$, можно вывести $\perp$ (Пустой дизъюнкт)

Резольвента:

$$\frac{A \vee x \qquad\qquad B \vee \neg x}{A \vee B}$$

Получение $\perp$:

$$\frac{p \qquad \neg p}{\perp}$$

К исх. дизъюнктам добавляем все возм. резольв.
$\Rightarrow$ ϕ невып. $\iff$ можно вывести $\perp$
Как по ϕ построить КНФ, используемый в методе??? (Преобразование Цейтина)

<u>Пример.</u>

$$(p \wedge q) \vee (r \to \neg s)$$

Строим дерево.

Тут получили 3-КНФ: в каждой скобке ≤ 3 литерала.
На 2-КНФ метод. резол. работает за $O(n)$ шагов.
На 3-КНФ может быть экспоненциально долгим.

2.1 Языки 1-ого порядка

Алфавит:

1) Индивидные переменные. x, y, z

2) Функциональный символ. $f^{(1)}, g^{(2)}$
(С указанием числа арг-ов)
В т. ч. константные символы. ($f^{(0)}$) - ф-циональные символы валентности 0.

3) Предикатные символы. (С указ. валентности) $(P^{(1)}, Q^{(1)})$

4) $\neg, \wedge, \vee, \to$

5) Кванторы: $\forall, \exists$

6) Служебные: "(") "

Замечание. *Символы из пп. 2, 3. в совокупности наз-ся сигнатурой.*

Определение 2.1. Термы - это:

1) x - переменная $\Rightarrow$ x - терма

2) c - константный символ $\Rightarrow$ c - терм.

3) $t_1, \ldots, t_k$ - термы, f - ф-ция. символ вал-ти $k \Rightarrow f(t_1, \ldots, t_k)$ - терм.

Определение 2.2. Формулы - это:

4) $t_1, \ldots, t_k$ - термы, P - предикат. символ вал-ти $k \Rightarrow P(t_1, \ldots, t_k)$ - ф-ла (атомарная).

5) ϕ - ф-ла $\Rightarrow \neg\phi$ - ф-ла

6) ϕ, ψ ф-лы $\Rightarrow (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi)$ - ф-лы

7) ϕ - ф-ла, x - перем. $\Rightarrow$ $\exists x\phi, \forall x\phi$ - ф-лы Не запрещается писать записи вида $\exists x \forall X P(x)$, или $\exists x P(y)$
Часто добавляют отдельный вид атомарных ф-л:
$$t_1 = t_2$$

2.1.1 Интерпретация

M - непустое мн-во - носитель интерпретации.
f - функциональный символ вал-ти $k > 0$, $[f] : M^k \to M$
c - конст. символ., $c \in M$
P - предикатный символ вал-ти k., $[P] : M^k \to \{0, 1\}$
Var - мн-во переменных.
Оценка - $\pi\colon Var \to M$
Если заданы интерпретация и оценка, то определены значения всех термов и ф-л: $[t](\pi) \in M, [\phi](\pi) \in \{0, 1\}$

1) $t \risingdotseq x \Rightarrow [t](\pi) = \pi(x)$

2) $t \risingdotseq C \Rightarrow [t](\pi) = [C]$

3) $t \risingdotseq f(t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow [t](\pi) = [f]([t_1](\pi), [t_2](\pi), \ldots, [t_k](\pi_k))$

4) $t \risingdotseq P(t_1, \ldots, t_k) \Rightarrow [\phi](\pi) = [P]([t_1](\pi), \ldots, [t_k](\pi))$

5) $\phi \risingdotseq \neg\phi \Rightarrow [\phi](\pi) = neg([\phi](\pi))$

6) $\phi \risingdotseq (\phi \wedge \eta) \Rightarrow and([\phi](\pi), [\eta](\pi))$

7)

3 Лекция 10

3.1 Напоминание

σ - сигнатура, сост. из функц. и пред. символов. и им соотв. валентности.

$$\mu = (M, I_M), I_M \text{ - соотв. символам } \sigma \text{ функций и предикатов}$$

$$\pi \colon Var \to M$$

$$[\phi]_M(\pi) - ?$$

Рекурсия по постр.ϕ:

1)
$$\phi = P(t_1, \ldots, t_n)$$
$$[\phi]_M(\pi) = [P]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M(\pi))$$

2)
$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge, \vee, \to}{(operation)} \psi_1), \phi = \neg\psi \text{ - аналогично.}$$
$$[\phi]_M(\pi) = \underset{OR, IMPL}{AND}([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi))$$

3)

$$\phi = \exists x, \psi$$

$$[\phi]_M(\pi) = 1 \iff \text{ найдётся } a \in M, \text{ т. ч. } [\phi]_M(\pi_{x \to a}) = 1$$

$$[\phi]_M(\pi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a})$$

$$\pi_{x \to a}(y) = \begin{cases} \pi(y), y \neq x \\ a, y = x \end{cases}$$

4) Аналогично (3), но с $\bigwedge$ вместо $\bigvee$

<u>Определение</u> 3.1. Параметры терма t:

1)

$$t = x \in Var \Rightarrow Par(t) = \{\, x \,\}$$

2)

$$t = c \text{ - константа из } \sigma \Rightarrow Par(t) = \emptyset$$

3)

$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ - функциональный символ вал-ти } n \Rightarrow Par(t) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

<u>Определение</u> 3.2. Параметры формулы ϕ:

1)

$$\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow Par(\phi) = \bigcup_{i=1}^{n} Par(t_i)$$

2)

$$\phi = \neg\psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi)$$

3)

$$\phi = (\psi_0 \underset{\wedge, \vee, \to}{(operation)} \psi_1) \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi_0) \cup Par(\psi_1)$$

4)

$$\phi = (\exists/\forall)x, \psi \Rightarrow Par(\phi) = Par(\psi)\{\, x \,\}$$

Теорема 3.1. *a) Если π, π' — оценки и для любой пер. $x \in Par(t), \pi(x) = \pi'(x)$, то $[t]_M(\pi) = [t]_M(\pi')$*

b) Если π, π' - оценки, т. ч. для $\forall x \in Par(\phi), \pi(x) = \pi'(x)$ то $[\phi]_M(\pi) = [\phi]_M(\pi')$

Доказательство. a) Индукция по пост. t:

1)
$$t = x \Rightarrow [t]_M(\pi) = \pi(x) = \pi'(x) = [t]_M(\pi')$$

2)
$$t = c \Rightarrow [t]_M(\pi) = [c]_M = [t]_M(\pi')$$

3)
$$t = f(t_1, \ldots, t_n), f \text{ — функциональный символ вал-ти } n$$

$$Par(t_i) \subset Par(t)$$

$$[t]_M(\pi) = [f]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M(\pi)) =$$
$$= [f]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [t]_M(\pi')$$

b) Индукция по построению ϕ:

1) $\phi = P(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow [\phi]_M(\pi) =$

$$= [P]_M([t_1]_M(\pi), \ldots, [t_n]_M[\pi]) = [P]_M([t_1]_M(\pi'), \ldots, [t_n]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi'))$$

2) $\phi = (\psi_0 \wedge \psi_1) \Rightarrow [\phi]_M[\pi] = AND([\psi_0]_M(\pi), [\psi_1]_M(\pi)]) = And([\psi_0]_M(\pi'), [\psi_1]_M(\pi')) = [\phi]_M(\pi')$ Аналогично для других операций и для отрицания.

3) $\phi = \exists x, \psi$
$$Par(\phi) = Par(\psi) \setminus \{ x \}$$
$[\phi]_M(\psi) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi_{x \mapsto a}) = \bigvee_{a \in M} [\phi]_M(\pi'_{x \mapsto a}) = [\phi]_M(\pi')$

4) $\phi = \forall x, \psi$ - аналогично 3)

$\square$