

АлГем

Сергей Григорян

18 октября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 2	3
1.1	Упражняемся	3
1.2	Векторная алгебра	3
1.3	Операции с векторами	4
1.3.1	I. Сложение	4
1.3.2	Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$	5
1.4	Системы векторов в пр-ве V_i	6
2	Лекция 12	8
2.1	Классификация КВП	8
2.2	Центр КВП	9
2.3	Центральные кривые	10
2.4	Св-ва КВП	11
2.4.1	Эллипс	11
2.4.2	Гипербола	12
3	Лекция 13	14
3.1	Св-ва гиперболы	14
3.2	Св-ва параболы	15
3.3	Диаметры невырожд. кривых	16
3.3.1	Гипербола	16
3.3.2	Эллипс	17
3.3.3	Параболы	17
3.4	Сопряжённые диаметры	18
3.5	Касательные к КВП	18
4	Лекция 14	20
4.1	Алгебраические структуры	20
4.2	Сравнения и вычеты	22

1 Лекция 2

1.1 Упражняемся

$A \in M_{m \times n}$ Произвольную i -ую строку будем записывать в виде:

$$A_{i*} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}).$$

Определение 1.1. **Линейная комбинация (ЛК)** строк A_{1*}, \dots, A_{m*} наз-ся форм. алг. выр-е:

$$\alpha_1 A_{1*} + \alpha_2 A_{2*} + \cdots + \alpha_m A_{m*} \in M_{1n}.$$

Утверждение 1.1. а) Пусть $A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}$. Тогда строки матрицы AB явл **ЛК** строк матрицы B с коэф. из соотв. строки матрицы A

б) Столбцы матрицы AB явл. ЛК столбцов матрицы A с коэф. из соотв. столбцов матрицы B .

Доказательство. б) Пусть $C = AB \in M_{m \times k}$

$$C_{*j} = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=1}^n a_{1s} b_{sj} \\ \sum_{s=1}^n a_{2s} b_{sj} \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^n a_{ms} b_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} \begin{pmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ms} \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^n b_{sj} A_{*s}.$$

□

1.2 Векторная алгебра

V_i - линейное пространство i -ого измерения. ($i = 1, 2, 3$)

Определение 1.2. Две точки $X, Y \in V_i$ определяют направленный отрезок, если известно, какая из этих точек первая, какая вторая.

\overline{XY} - направленный отрезок.

$|\overline{XY}| = XY$ - длина напр. отр.

Обозначение.

$\bar{0}$ - нулевой напр. отр..

Определение 1.3. $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \iff$

- а) $XY = X'Y'$
- б) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - коллинеарны (\exists прямая, \parallel им обоим)
- в) \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ - сонаправлены.

Определение 1.4. Вектор - это класс направленных отрезков, кот. равны некоторому фиксированному напр. отр.

Обозначение. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$

Утверждение 1.2. Два напр. отр. \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ определяют (порождают) один и тот же вектор т. и т. т., когда они равны.

Доказательство.

а) **Необходимое:** Пусть \overline{XY} и $\overline{X'Y'}$ опр. один и тот же вектор $\Rightarrow \overline{XY} = \overline{X'Y'} = \bar{a}$

б) **Достаточное:** Пусть $\overline{XY} = \overline{X'Y'} \Rightarrow$ они содерж. в одном классе $\bar{a} \Rightarrow$ они опред. один и тот же вектор. \square

Определение 1.5. $\overline{XY} = \bar{a} \iff$ он порождает вектор a

1.3 Операции с векторами

1.3.1 I. Сложение

Замечание. При данном векторе \bar{a} и фикс. точке X , то найдётся напр. отр. $\overline{XY} = \bar{a}$

Определение 1.6. Пусть напр. отр. \overline{XY} опр. \bar{a} , \overline{YZ} опр. \bar{b} :

Сумма векторов: вектором $\bar{a} + \bar{b}$ назыв. вектор, пород. \overline{XZ}

Замечание. Данное опр. **корректно**, и не зависит от начальной точки X

Доказательство. ***Рисунок*** \square

1.3.2 Умножение вектора на $\lambda \in \mathbb{R}$

Рассм. напр. отр. $\bar{a} = \overline{XY}$ и \overline{XZ} :

- a) $XZ = |\lambda| * XY$
- b) \overline{XZ} - коллинеарен \overline{XY}
- c) \overline{XZ} сонаправлен \overline{XY} , при $\lambda > 0$
 \overline{XZ} прот. направлен. \overline{XY} при $\lambda < 0$:

Вектор, определяемый напр. отр. \overline{XZ} , наз-ся вектором $\lambda \bar{a}$

Доказательство. to do by yourself □

Теорема 1.1. *Операции "+" и "*" удовлетворяют след. св-вам:*

1. *Коммутативность сложения (Вытекает из св-ва параллелограмма):*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

2. *Ассоциативность сложения:*

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

3. $\exists \bar{o}: \bar{o} + \bar{a} = \bar{a} + \bar{o} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i$

4. $\forall \bar{a} \in V_i \exists (-\bar{a}) \in V_i: \bar{a} + (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{o}$

5. *Унитарность:*

$$1 * \bar{a} = \bar{a}, \forall \bar{a} \in V_i.$$

- 6.

$$(\lambda * \mu) * \bar{a} = \lambda * (\mu * \bar{a}).$$

- 7.

$$(\lambda + \mu) * \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu * \bar{a}.$$

- 8.

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}.$$

Замечание. Мн-во векторов является действительным линейным пространством отн-но мн-ва \mathbb{R} .

1.4 Системы векторов в пр-ве V_i

$V_i, i = 1, 2, 3$

$$\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n} \in V_i$$

Обозначение.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{v_i} - \text{наз-ся ЛК векторов.}$$

Если $\alpha_i = 0, \forall i = 1 \dots n$, то такая ЛК наз-ся **тривиальной**.

Если $\exists i: \alpha_i \neq 0$, то ЛК **нетривиальная**.

Определение 1.7 (ЛЗ система векторов). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно зависимой (ЛЗ)**, если \exists **нетривиальная ЛК** этих векторов, равная $\overline{0}$

Определение 1.8 (ЛНЗ сис. вект.). Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ наз-ся **линейно независимой (ЛНЗ)**, если \nexists **нетривиальной ЛК** этих векторов, равной $\overline{0}$

Пример.

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, - \text{ЛНЗ сист. вект..}$$

Док-во ЛНЗ: представить, что есть коэф-ты, дающие ЛК = $\overline{0}$, и показать, что она тривиальная.

Утверждение 1.3. Система векторов $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}$ - ЛЗ \iff хотя бы один из них представим в виде ЛК остальных.

Доказательство. а) **Необх:** пусть $(\overline{v_1} \ \overline{v_2} \ \dots \ \overline{v_n})$ - ЛЗ:

$$\Rightarrow \exists \text{ нетрив. ЛК : } \alpha_1 \overline{v_1} + \alpha_2 \overline{v_2} + \dots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0}.$$

Пусть $\alpha_i \neq 0$:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} + \dots + \overline{v_i} + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n} = \overline{0}.$$
$$\overline{v_i} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} \overline{v_1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} \overline{v_n}.$$

b) **Дост.:** Пусть $\bar{v}_i = \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$

$$\Rightarrow \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n - \bar{v}_i = \bar{o}.$$

□

Замечание. НЕВЕРНО было бы сформ. утв. вот так: каждый из вектор выразим в виде ЛК остальных.

Пример.

\bar{a}, \bar{b} - неколлин..

\Rightarrow Для $(\bar{a} \ \bar{a} \ \bar{b})$ - это неверно, т. к. \bar{b} не выразим через \bar{a} .

Но $1 * \bar{a} + (-1) * \bar{a} + 0 * \bar{b} = \bar{o}$ - нетривиальная ЛК.

Утверждение 1.4. а) Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛЗ \Rightarrow всякая её надсистема тоже ЛЗ

b) Если система $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ - ЛНЗ \Rightarrow , то всякая её подсистема ЛНЗ.

Доказательство. а) $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n$, - не все равны \bar{o} , тогда $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i = \bar{o}$
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} 0 * \bar{v}_j = \bar{o}$

b) Пусть подсистема $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_k)$ - ЛЗ (от прот.), тогда по а),
 $(\bar{v}_1 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ \Rightarrow **Противоречие**

□

Утверждение 1.5. Пусть $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ - ЛНЗ сист. векторов в V_i . Тогда каждый вектор $\bar{w} \in V_i$ выразится через $(\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ не более чем одним способом.

Доказательство.

$$\bar{w} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \bar{V} \alpha = \bar{V} \beta$$

$$\Rightarrow \bar{o} = \bar{V}(\alpha - \beta).$$

□

2 Лекция 12

2.1 Классификация КВП

Эллиптический тип: $a \geq b > 0$	Инварианты
1) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta > 0, I \cdot \Delta < 0$
2) Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\delta > 0, I \cdot \Delta > 0$
3) Пара пересек. мнимых прямых: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta > 0, \Delta = 0$

Гиперболический тип: $a > 0, b > 0$	Инварианты
4) Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta < 0, \Delta \neq 0$
5) Пара пересек. действ. прямых: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta < 0, \Delta = 0$

Параболический тип: $p, a > 0$	Инварианты
6) Парабола: $y^2 = 2px$	$\delta = 0, \Delta \neq 0$
7) Пара действ. прямых: $y^2 = a^2$	$\delta = 0$
8) Пара мнимых прямых: $y^2 = -a^2$	$\Delta = 0$
9) Пара совпад. действ. прямых: $y^2 = 0$	

Для различения 7-9):

$$K = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$$

2.2 Центр КВП

$$\Gamma: P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (1)$$

Определение 2.1. Точка $O(x_0, y_0)$ наз-ся центром кривой Γ (а также центром её мн-на), если $\forall \bar{s} = (\alpha, \beta)$ вып-ся рав-во:

$$P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) \quad (2)$$

Утверждение 2.1. Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр кривой Γ (и мн-на P). Тогда т. A принадлежит $\Gamma \iff A' \in \Gamma$ - точка, симметричная т. A отн-но центра O

Доказательство. Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 + \beta \end{pmatrix}, A' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \end{pmatrix}$:

$$A \in \Gamma \iff P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = 0 \iff P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = 0 \iff A' \in \Gamma$$

□

Замечание. Центр Γ не обязан лежать в Γ

Утверждение 2.2. Точка $O(x_0, y_0)$ явл-ся центром Γ (и $P(x, y)$) \iff :

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Доказательство.

$$P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = A(x_0 + \alpha)^2 + 2B(x_0 + \alpha)(y_0 + \beta) + C(y_0 + \beta)^2 + 2D(x_0 + \alpha) + 2E(y_0 + \beta) + F$$

$$P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = A(x_0 - \alpha)^2 + 2B(x_0 - \alpha)(y_0 - \beta) + C(y_0 - \beta)^2 + 2D(x_0 - \alpha) + 2E(y_0 - \beta) + F$$

$$P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) - P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = 4\alpha(Ax_0 + By_0 + D) + 4\beta(Bx_0 + Cy_0 + E) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

□

2.3 Центральные кривые

Определение 2.2. КВП наз-ся **центральной**, если она имеет единственный центр. (Этот центр **не обязан** лежать на КВП)

Утверждение 2.3. а) Кривая Γ явл. центральной \iff

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

б) Св-во кривой Γ быть центральной не зависит от выбора ПДСК.

с) Пусть Γ - центральная кривая, содерж. хотя бы одну точку. Тогда Γ содержит единственный центр симметрии O_0 , причём $O_0 = O \iff \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Доказательство. а) По т. Крамера, $O(x_0, y_0)$ - единственный центр \iff

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

б) Т. к. δ - инвариант, то и св-во быть центральной также не меняется при замене ПДСК.

с) Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр и он единств. $\iff \delta \neq 0$, тогда можно сказать, что Γ имеет эллиптический или гиперболический тип. Тогда:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - C = 0 \text{ - ур-е КВП}$$

$$\Rightarrow B = D = E = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - решение системы (3)}$$

Тогда Γ содержит единственный центр симметрии O_0 , причём $O_0 \equiv O(x_0, y_0)$

□

2.4 Св-ва КВП

2.4.1 Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

a - большая полуось

b - малая полуось

$c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$ - фокусное расстояние

$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ - фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

При $a = b, \varepsilon = 0$

Директрисы:

$$d_1: x = \frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2: x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Утверждение 2.4. $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{эллипсу} \iff$

$$\iff AF_1 = |a - \varepsilon x| \iff AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

Т. к. $|x| \leq a$ (если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{эллипсу}$), то модули раскрываются с положительным знаком.

Доказательство.

$$0 = AF_1^2 - (a - \varepsilon x)^2 = (x - c)^2 + y^2 + a^2 + 2a\varepsilon x - \varepsilon^2 x^2 = (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2x(-c + a\varepsilon) + c^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 - \varepsilon^2 - 1 - \frac{c^2}{a^2} &= \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \\ &= \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - b^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

□

Теорема 2.1.

$$\frac{AF_1}{p(d_1, A)} = \varepsilon = \frac{AF_2}{p(d_2, A)}$$

Доказательство.

$$\varepsilon p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

Теорема 2.2 (Характеристической св-во эллипса). Точка $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{эл-липсу} \iff$

$$AF_1 + AF_2 = 2a$$

Доказательство. а) Необходимость:

$$AF_1 + AF_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$$

б) Достаточность: Пусть: $AF_1 + AF_2 = 2a$, тогда $|x| \leq a$. От прот., пусть $|x| > a \Rightarrow$

$$AF_1 + AF_2 \geq |x - c| + |x + c| \geq |x - c + x + c| = |2x| > 2a - \text{противоречие.}$$

Если $|x| = a \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = a \\ x = -a \end{cases} \Rightarrow A: a - c + a + c = 2a \text{ для } -a \text{ аналогично.}$$

(Остальное док-во...)

□

2.4.2 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - фокусное расст.

$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ - фокусы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$$

$$d_1: x = \frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2: x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Утверждение 2.5. Точка $A(x, y) \in \text{гиперболе} \iff$

$$AF_1 = |a - \varepsilon x|, AF_2 = |\varepsilon x + a|$$

$$|x| \geq a$$

$$\varepsilon |x| > a$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &= AF_1^2 - (\varepsilon x - a)^2 = (x - c)^2 + y^2 - \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon ax - a^2 - a^2 = (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2x(-c + \varepsilon a) + c^2 + y^2 - a^2 = \\ &= -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 + b^2 = 0 \end{aligned}$$

□

Следствие 2.1.

$$\frac{AF_1}{p(A, d_1)} = \varepsilon$$

Доказательство.

$$\varepsilon \cdot p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

Теорема 2.3 (Характеристическое св-во гиперб.).

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{гиперболы} \iff |AF_2 - AF_1| = 2a$$

Доказательство. а) Пусть $A \in$ правой ветви гиперболы:

$$|AF_2 - AF_1| = AF_2 - AF_1 = \varepsilon x + a - (\varepsilon x - a) = 2a$$

б) Пусть изв., что $AF_2 - AF_1 = 2a$, и покажем, что $A \in$ правой части.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + 2a$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

$$\begin{aligned}
4xc - 4a^2 &= 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
x^2(c^2 - a^2) + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 &= 0 \\
x^2b^2 + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 &= 0 \\
x^2b^2 + a^4 - a^2(a^2 + b^2) - a^2y^2 &= 0 \\
x^2b^2 - a^2b^2 - a^2y^2 &= 0 \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}$$

□

3 Лекция 13

3.1 Св-ва гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Определение 3.1. Асимптотами гиперболы наз-ся гиперболы:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

Утверждение 3.1. Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ - т. гиперболы, с указанным ур-ем. Тогда произведение расстояний от A до асимптот $= \text{const}$

Доказательство.

$$p(A, l_1)p(A, l_2) = \frac{\left| \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \frac{\left| \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left| \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

□

Следствие 3.1. Пусть m . A движется по одной из ветвей гиперболы,
т. ч.:

$$p(A, O(0, 0)) \rightarrow +\infty$$

Тогда верно **одно** из двух:

$$\begin{cases} p(A, l_1) \rightarrow 0 \\ p(A, l_2) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Доказательство. Для правой верхней полуветви.

$$x = a \operatorname{ch} ty = b \operatorname{sh} t$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \operatorname{ch}^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 t}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \text{ основное гиперболическое тождество}$$

$$\Rightarrow A(t) \in \text{гиперболе}$$

$$p(A, l_2) = \frac{\left| \frac{x(t)}{a} + \frac{y(t)}{b} \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \rightarrow +\infty$$

$$p(A, l_1) = \frac{\operatorname{const}}{p(A, l_2)} \Rightarrow p(A, l_1) \rightarrow 0$$

□

3.2 Св-ва параболы

Канон. ур-е:

$$y^2 = 2px, p > 0$$

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$d: x = -\frac{p}{2}$$

Утверждение 3.2. $T. A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ принадлежит параболе $y^2 = 2px \iff$

$$AF = \left| x + \frac{p}{2} \right|$$

Доказательство.

$$AF^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -2xp + y^2 = -2xp + 2xp = 0$$

□

Следствие 3.2. *Парабола - это ГМТ A , т. ч.:*

$$\frac{p(A, F)}{p(A, d)} = 1$$

Доказательство.

$$p(A, d) = \left|x + \frac{p}{2}\right| = AF \Rightarrow \frac{AF}{AF} = 1$$

□

Определение 3.2. Будем считать, что $\varepsilon_{\text{пар.}} = 1$

Теорема 3.1 (Об эксцентриситете). *Для любой невырожденной КВП ($\Delta \neq 0$):*

$$\frac{p(A, F)}{p(A, d)} = \varepsilon$$

Утверждение 3.3. *Две КВП подобны тогда и только тогда, когда они имеют равный эксцентриситет.*

3.3 Диаметры невырожд. кривых

3.3.1 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - середина хорды гиперболы, имеющей напр. вектор

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{x_0\alpha}{a} - \frac{y_0\beta}{b^2}\right)t + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0$$

Т. к. A - середина хорды, то член при t равен 0 - необх. и дост. условие:

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{a^2}x - \frac{\beta}{b^2}y = 0 - \text{диаметр гиперболы, сопряж. с } \bar{v}$$

3.3.2 Эллипс

Аналогично гиперболе, получаем:

$$\frac{\alpha}{a^2}x + \frac{\beta}{b^2}y = 0 - \text{диаметр эллипса, сопряж с } \bar{v} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

3.3.3 Параболы

$$y^2 = 2px$$

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \text{середина хорды, с напр. вектором } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(y_0 + \beta t)^2 = 2p(x_0 + \alpha t)$$

$$y_0^2 + 2y_0\beta t + \beta^2 t^2 - 2px_0 - 2p\alpha t = 0$$

$$\beta^2 t^2 + t(2y_0\beta - 2p\alpha) + y_0^2 - 2px_0 = 0$$

$$\Rightarrow y = p\frac{\alpha}{\beta} - \text{ур-е диаметра, сопряж с вектором } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Вывод: любой диаметр параболы || её оси.

Теорема 3.2. *Мн-во всех середин хорд данного напр-я \bar{v} невырожд. КВП всегда лежит на одной прямой, кот. наз-ся диаметром, сопряж. напр. \bar{v}*

Замечание. *У эллипса и гиперболы диаметр проходит через центр кривой, а у параболы диаметр параллелен её оси.*

3.4 Сопряжённые диаметры

Теорема 3.3. Пусть Γ - эллипс или гипербола, $\bar{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - задаёт напр. на пл-ти. Пусть d - диаметр, сопряж. \bar{v} . Пусть также \bar{w} - напр. вектор диаметра d . Пусть теперь d' - диаметр, сопряжённый \bar{w} . Тогда $d' \parallel \bar{v}$

Для гиперболы. Пусть AB - хорда с напр. \bar{v} .

$$C = Sym_O(A)$$

$$D = Sym_O(B)$$

$ABCD$ - пар-м

d проходит через середины AB и $CD \Rightarrow d'$ проходит через сер-ны AD и BC . Тогда, по постр., $d' \parallel AB \parallel CD \parallel \bar{v}$.

□

Определение 3.3. Построенные пары диаметров (d и d') наз-ся взаимно сопряжёнными. (Т. е. каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру)

3.5 Касательные к КВП

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4)$$

Определение 3.4. Особая точка КВП, это центр, принадлежащий кривой.

- а) Точка пересечения пары пересекающихся действ. прямых - особая.
- б) Точка пересечения пары пересек. мнимых прямых - особая.
- с) Каждая точка пары совпавших действ. прямых - особая.

Считается, что в особой точке, касат. к кривой не определена.

Исключая из рассм. особые точки и неособые точки, лежащие на прямой, входящей в состав Γ , мы получаем случаи эллипса, гиперболы и параболы.

Определение 3.5. Касательная к Γ в т. $M \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ наз-ся предельное положение секущей, когда длина хорды секущей стремится к 0.

$$F_1(x, y) = Ax + By + C = 0$$

$$F_2(x, y) = Bx + Cy + D = 0$$

Секущ. через т. M :

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

$$F(x(t), y(t)) = A(x_0 + \alpha t)^2 + 2B(x_0 + \alpha t)(y_0 + \beta t) + C(y_0 + \beta t)^2 + 2D(x_0 + \beta t) + 2E(y_0 + \beta t) + F = 0$$

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0$$

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$Q = (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta$$

$$R = F(x_0, y_0) = 0, \text{ т. к. } M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$t(Pt + 2Q) = 0 \tag{5}$$

Если $P = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$, прямая l , проходя через т. $M \in \Gamma$, далее нигде с Γ не пересекается.

Определение 3.6. Напр. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ наз-ся асимптотическим направлением:

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} \right]$$

Утверждение 3.4. Если:

- $\delta < 0$, то Γ имеет 2 асимп. напр-я.
- $\delta = 0$, то Γ имеет 1 асимп. напр-я.
- $\delta > 0$, то нет асимп. напр-я.

Пусть $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - не асимпт. напр-е:

Ур-ие (5) имеет 2 корня:

$$\begin{bmatrix} t_0 = 0 \\ t_1 \end{bmatrix}$$

Привидение полож. секущ. т. и т. т.,

4 Лекция 14

4.1 Алгебраические структуры

Определение 4.1. Группой наз-ся мн-во G с опред. на нём бинарной алг. операцией. (Обозначим как $*$: $G \times G \rightarrow G$ - отображение)

Кроме того, $*$ удовл. след. св-вам:

I) Ассоциативность: $(a * b) * c = a * (b * c)$

II) \exists нейтрального эл-та e отн-но $*$:

$$a * e = e * a = a$$

III) \exists обратный эл-т a^{-1} :

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

Пример. 1) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$ - 0 нейтр. эл-т, $\forall a \rightarrow -a$ - проти-вopоложный (обратный) эл-т.

2) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, *)$

3) $(\mathbb{R}, *)$ - не группа, нарушается III для 0

4) Пусть X - произв. мн-во, $S(X)$ - мн-во всех вз. однозн. отобр. $X \rightarrow X$:

ϕ, ψ - вз. одн. отобр.

$$(\phi \cdot \psi)(x) = \phi(\psi(x))$$

Тогда:

$(S(X), \circ)$ - группа

$$e(x) = x$$

5) Пусть $X = \{1, 2, \dots, n\}$

$\phi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ - подстановка

$S(\{1, 2, \dots, n\}) = S_n$ - симметрич. группа степени n .

Утверждение 4.1. Во всякой группе G нейтральный эл-т единственный.

Доказательство.

$$e = e * e' = e'$$

□

Определение 4.2. Пусть G группа. Эл-т b наз-ся левым обратным к a , если $b * a = e$

Эл-т c наз-ся правым обратным к a , если $c * a = e$

Утверждение 4.2. $\forall a \in G$ левый обратный к нему совпад. с правым обратным к нему и совпад. с a^{-1}

Доказательство.

$$b * a = e, a * c = e$$

$$c = e * c = (b * a) * c = b * (a * c) = b * e = b$$

$$\Rightarrow b * a = a * b = e \Rightarrow b = a^{-1}$$

В част-ти, для каждого эл-та a обратный эл-т единственный.

□

Определение 4.3. Мн-во R с опред. на нём бинарной алг. операциями " + " и " * " наз-ся кольцом, если эти операции удовл. св-вам:

а) $(R, +)$ - абелева группа (т. е. группа с комутативностью).

б) Ассоц. *

с) Левая и правая дистрибутивность * отн-но +:

$$(a + b) * c = a * c + b * c$$

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$

Пример. 1) $(\mathbb{Z}, +, *)$, $(\mathbb{Q}, +, *)$, $(\mathbb{R}, +, *)$ - 0 - нейтр. эл-т +

2) $(M_n(\mathbb{R}), +, *)$

Определение 4.4. Если в $R \exists 1 \in R$, т. ч.:

$$1 * a = a * 1 = a, \forall a \in R$$

то 1 наз-ся единицей кольца.

4.2 Сравнения и вычеты

Определение 4.5. Назовём $a, b \in \mathbb{Z}$ сравнимыми по модулю n ($n \in \mathbb{N}, n > 1$), если a и b имеют равные остатки при делении на n .

Обозначение.

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = qn, q \in \mathbb{Z}$$

$$2 \equiv 17 \pmod{5}$$

$$3 \equiv 0 \pmod{3}$$

Замечание. Сравнения по одному и другому \pmod можно складывать и умножать:

$$\begin{cases} a_1 \equiv b_1 \pmod{n} \\ a_2 \equiv b_2 \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2 \pmod{n} \\ a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2 \pmod{n} \end{cases}$$

Доказательство.

$$(a_1 \pm a_2) - (b_1 \pm b_2) = (a_1 - b_1) \pm (a_2 - b_2) = q_1n \pm q_2n = n(q_1 \pm q_2):n$$

$$a_1a_2 = (b_1 + q_1n)(b_2 + q_2n) = (b_1b_2 + (q_2b_1 + q_1b_2 + q_1q_2n)n):n$$

$$\Rightarrow a_1a_2 - b_1b_2:n$$

□

Обозначение.

$$a \in \mathbb{Z}$$

$$\{a + n \cdot q\} \Rightarrow \bar{a} - \text{класс вычетов } a \text{ по модулю } n$$

Классы вычетов по модулю $n \rightarrow \mathbb{Z}_n$:

$$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}$$

Замечание.

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$

Проверка корректности:

$$\begin{cases} a \equiv a_1 \pmod{n} \\ b \equiv b_1 \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \bar{a} + \bar{b} \stackrel{?}{=} \overline{a_1 + b_1}$$

$$\begin{aligned} a + b &\equiv a_1 + b_1 \\ \bar{a} + \bar{b} &\equiv \overline{a + b} \equiv \overline{a_1 + b_1} \equiv \overline{a_1} + \overline{b_1} \end{aligned}$$

Утверждение 4.3. Множество Z_n классов вычетов по модулю n является кольцом с операциями $+$ и $*$

Доказательство. Операция определена и корректна:

$(\mathbb{Z}_n, +)$ - абелева группа

$\bar{0}$ - нейтральный элемент

□

Определение 4.6. Пусть R - кольцо с 1.

Элемент $a \in R$ - обратимый $\iff \exists b \in R: a * b = b * a = 1$

Определение 4.7. R^* - множество всех обратимых элементов кольца R с 1.

Утверждение 4.4. R^* - группа с операцией умножения.

Доказательство. Покажем, что если a обратим, то обратный к нему элемент b тоже обратим:

$$a * b = b * a = 1 \Rightarrow \text{по определению это верно}$$

$$\Rightarrow a \in R^* \Rightarrow b \in R^*$$

Покажем теперь, что если $a, b \in R^* \Rightarrow a * b \in R^*$:

$$a, b \in R^* \Rightarrow a^{-1}, b^{-1} \in R^*$$

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

$$abb^{-1}a^{-1} = a * 1 * a^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow a \cdot b \in R^*$$

□

Задача 4.1. Z_n^* - мн-во всех классов вычетов, взаимно простых с n .

Утверждение 4.5. В любом кольце R :

$$0 * a = a * 0 = 0, \forall a \in R$$

Доказательство.

$$0 * a + 0 * a = (0 + 0) * a = 0 * a$$

$$0 * a = 0$$

□

Следствие 4.1. Если R - ненулевое кольцо с 1. То $0 \neq 1$:

Доказательство. От прот. пусть $0 = 1$:

$\forall a \in R: a = a * 1 = a * 0 = 0 \Rightarrow R$ - нулевое. Противоречие!!!

□

Следствие 4.2. Если R ненулевое кольцо с 1, то $0 \notin R^*$

Определение 4.8. Мн-во F с опред. на нём бинарными алг. операциями $+$, $*$ наз-ся **полем**, если:

- 1) $(F, +)$ - абелева группа с нейтр. эл-ом 0.
- 2) $(F \setminus \{0\}, *)$ - абелева группа с нейтр. эл-ом 1.
- 3) $(a + b)c = ac + bc$ - дистрибутивность.

Замечание. В любом поле содерж. 0 и 1. $\Rightarrow |F| \geq 2$

Замечание.

$$F^* = F \setminus \{0\} \text{ - мультипликативная группа поля}$$

Определение 4.9. Поле - это коммутативное кольцо с 1, у кот. каждый ненулевой эл-т обратим.

Пример. 1) $(\mathbb{Q}, +, *)$ - поле рац. чисел.

2) $(\mathbb{R}, +, *)$ - поле действ. чисел.

3) $(\mathbb{C}, +, *)$ - поле комплексных чисел.

4) (Boolean)

Утверждение 4.6. В поле нет делителей нуля.

Доказательство. Пусть $a \cdot b = 0, a \neq 0, b \neq 0$:

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \cdot b^{-1} = 0!!!$$

□

Теорема 4.1. Кольцо классов вычетов \mathbb{Z}_n явл-ся полем $\iff n$ - простое.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть n - сост. $\Rightarrow \exists p, q > 1: n = pq$

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = \overline{p \cdot q} = \bar{n} = \bar{0} \Rightarrow \bar{p}, \bar{q} - \text{делители } 0 - \text{противоречие с тем, что } \mathbb{Z}_n - \text{поле!!!}$$

б) Дост. Пусть n - простое, покажем, что $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot)$ - абелева группа.
Нетривиальная часть: покажем, что $\forall \bar{a} \neq \bar{0}$, обратимый:

$$\bar{0} \cdot \bar{a}, \bar{1} \cdot \bar{a}, \dots, \overline{(n-1)} \bar{a} - \text{попарно различны.}$$

□