Матан

Сергей Григорян

2 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 8

1.1 §3: Топология $\mathbb{R}$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

Обозначение.

- $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ - *ε-окрестность a*
- $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \backslash \{ a \} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ - *проколотая ε-окр-ть т. a*

Определение 1.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

1) Точка x наз-ся внутренней точкой мн-ва E, если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset E)$

   $(int)E$ - мн-во всех внут. точек E

2) Точка x наз-ся внешней точкой мн. E, если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash E)$ $(ext)E$ - мн-во внешних точек E

3) Точка x наз-ся граничной точкой мн-ва E, если

$$\forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash E) \neq \emptyset)$$

   σE - мн-во всех граничных точек E

Замечание. *Из опр-я следует:*

$$\mathbb{R} = (int)E \sqcup (ext)E \sqcup \sigma E$$

Пример.

$$E = (0, 1], (int)E = (0; 1), (ext)E = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \sigma E = \{ 0, 1 \}$$

Определение 1.2. Мн-во $G \subset \mathbb{R}$ наз-ся **открытым**, если все его точки яв-ся внутренними (т. е. $G = (int)G$)

Определение 1.3. Мн-во $F \subset \mathbb{R}$ наз-ся **замкнутым**, если $\mathbb{R} \backslash F$ - открыто.

Пример. *1)* (a, b) - *открытое.*

2) $[a, b]$ *- замкнутое.*

<u>Лемма</u> 1.1. *a) Объединение любого семейства открытых мн-в открыто.*

b) Пересечение конечного сем-ва открытых мн-в открыто.

c) $\mathbb{R}, \emptyset$ *- открыты*

Доказательство. a) Пусть $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ - семейство открытых мн-в.

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \text{ и } x \in G$$

По опр-ю:

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_\lambda \text{ - открыто}) \iff \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda \subset G$$

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset G$, т. е. x - внут. точка G

b) ПУсть $\{ G_k \}_{k=1}^m$ - семейство открытых мн-в, $G = \bigcap_{k=1}^m G_k, x \in G$. По опр. пересечения:

$$\forall k, x \in G_k \Rightarrow \forall k, \exists \varepsilon_k > 0 \colon B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$$

$$\varepsilon = \underset{1 \leq k \leq m}{min} \{ \varepsilon_k \}$$

Тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k, \forall k \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^m$, т. е. x - внут. точка G

c) Открытость $\mathbb{R}, \emptyset$ следует из опр-я.

□

<u>Лемма</u> 1.2. *a) Объединение конечного семейства замкнутых мн-в замкнуто*

b) Пересечение любого семейства замкнутых мн-в замкнуто

c) $\mathbb{R}, \emptyset$ *- замкнуты*

Доказательство. a, b)

$$\mathbb{R}\backslash(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\mathbb{R}\backslash F_\lambda).$$

$$\mathbb{R}\backslash(\bigcup_{k=1}^{m} F_k) = \bigcap_{k=1}^{m}(\mathbb{R}\backslash F_k)$$

c) Очев.

$\square$

Определение 1.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Точка x наз-ся предельной точкой мн-ва E, если:

$$\forall\varepsilon > 0(B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset)$$

Лемма 1.3. *Точка x - предельная точка* $\iff$

$$\exists \{ x_n \}_{x_n \neq x} \subset E \colon (x_n \to x)$$

Доказательство. =>)

$$x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E, \forall n \Rightarrow x_n \neq x \text{ и } x_n \in E \Rightarrow x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$$

<=) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N \colon \forall n \geq N(x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon))$
Сл-но, $x_N \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E$

$\square$

Теорема 1.4 (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утв. эквивалентны:*

1) *E - замкнуто;*
2) *E содержит все свои граничные точки;*
3) *E содержит все свои предельные точки;*
4) *Если п-ть $\{ x_n \}$ точек из E сходится к x, то $x \in E$*

Доказательство.

1 => 2) Пусть $x \in \mathbb{R} \backslash E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash E$, т. е. x - внешняя точка E. Тогда $\sigma E \subset E$

2 => 3) E содержит все свои граничные точки. Рассм. 2 случая:

a) x - внутренняя точка $\Rightarrow x \in E$

b) x - граничная точка $E \Rightarrow x \in E$ - по усл. 2)

3 => 4) Пусть $\{ x_n \} \subset E, x_n \to x$

Предположим, что $x \notin E \overset{\text{Л2}}{\Rightarrow} x$ - предельная точка E

4 => 1) $x \in R \backslash E$. Предположим, что x - не внутренняя точка E. Тогда:

$$\forall n \colon B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset$$

Пусть $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Имеем $\{ x_n \} \subset E \Rightarrow x_n \to x \in E$!!!!!!

□

Пример. *Пусть L - мн-во част. пределов числовой п-ть $\{ a_n \}$. Покажем, что L - замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\{ x_n \} \subset L$, $x_n \to x$

По опр-ю част. предела, найдётся строго возрастающая п-ть номеров $\{ n_k \}$, что $|a_{n_k} - x_k| < \frac{1}{k}$

Сл-но:

$$|a_{n_k} - x| \leq |a_{n_k} - x_k| + |x_k - x| < \frac{1}{k} + |x_k - x|$$

Т. е. $x \in L$, по эквив. п.1 и п. 4 (Теоремы 1.4) заключаем, что L - замкнуто. □

Определение 1.5. $\overline{E} = E \cup \sigma E$ - замыкание мн-ва E

Лемма 1.5. *Мн-во $\overline{E}$ является замкнутым.*
Кроме того, $\overline{E} = E \cup \{ x \colon x$ - предельная точка $E \}$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R} \backslash \overline{E} \Rightarrow x$ - внешн. точка E, т. е.

$$\exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash E$$

Если $B_\varepsilon(x) \cap \sigma E \neq \emptyset$, то $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$!!!

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash \overline{E}$, т. е. x - внут. точка $\mathbb{R} \backslash \overline{E}$

Вторая часть следует из наблюдений:

(1) любая предельная точка E либо внутренняя, любо граничная.

(2) граничная точка E, не принадлежащая E, является предельной. $\square$

Задача 1.1. 1) $x \in \overline{E} \iff \exists \{ x_n \} \subset E (x_n \to x)$

2) $\overline{E} = \bigcap \{ F \colon F$ - замкнуто или $F \supset E \}$

2 Лекция 9

Определение 2.1. Семейство $\{ G_\lambda \}$ наз-ся покрытием мн-ва E, если $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Покрытие наз-ся открытым, если все G_λ открыты.

Пример. $\{ \left(\frac{1}{n}, 1\right) \}_{n \in \mathbb{N}}$ - *открытое покр-е* $(0,1)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

Теорема 2.1 (Лемма Гейне-Бореля)**.** *Если* $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ *образует открытое покр-е отрезка* $[a,b]$*, то:*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \colon ([a,b] \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Предположим, что из открытого покр-я $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ отрезка $[a,b]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разделим $[a,b]$ пополам и обозначим за $[a_1, b_1]$ ту его половину, кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ.

Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим за $[a_2, b_2]$ ту его половину, кот. не покр-ся конечным набором G_λ

...

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть отрезков, каждый из кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ

По т. Кантора о вложенных отрезках, найдётся т. $c \in \bigcap_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$. Т. к.

$$c \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (c \in G_\lambda \text{ - открытое})$$

$$\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}$$

Выберем k так, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$

Сл-но, $c - a_k < \varepsilon$ и $b_k - c < \varepsilon$. Откуда:

$$[a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0}!!!(\text{с построением п-ти } \{ [a_n, b_n] \})$$

□

Следствие. *Если F - замкнутое огр. мн-во в $\mathbb{R}$ и $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ - откр. покр-е F, то:*

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \colon (F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Т. к. F - огр., то $\exists [a, b] \colon F \subset [a, b]$. Сем-во $\{ G_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{ \mathbb{R} \backslash F \}$ отк-е покр-е $[a, b]$, т. к. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \cup (\mathbb{R} \backslash F) = \mathbb{R}$

По т. Гейне-Бореля $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$:

$$[a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n} \cup (\mathbb{R} \backslash F)$$

$$\Rightarrow F \subset G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_n}$$

□

Введм следующее обозначение:

Обозначение.

$$B_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}; +\infty) \cup \{\, +\infty \,\} \text{ - } \varepsilon\text{-}\textit{окр-ть } +\infty$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(+\infty) = (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \text{ - } \textit{проколотая } \varepsilon\text{-}\textit{окр-ть } +\infty$$

$$B_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \cup \{\, -\infty \,\}$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$$

Поскольку все определения этого параграфа давались на языке окр-тей, то всё это верно и для $\overline{\mathbb{R}}$

$E \subset \overline{\mathbb{R}}$. В част-ти $+\infty(-\infty)$ - предел. точка мн-ва $E \subset \overline{\mathbb{R}} \iff E \setminus \{\, +\infty \,\}$ неогр. сверху ($E \setminus \{\, -\infty \,\}$ - неогр. снизу).

На языке окр-ти можно дать общее определение предела:

Определение 2.2. Точка в $b \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся **пределом** числовой п-ти $\{\, a_n \,\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n \geq N (a_n \in B_\varepsilon(b))$$

2.1 §4: Непрерывные ф-ции

2.1.1 Предел ф-ции в точке

Пусть $\exists \in \mathbb{R}$, задана ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$.
Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Определение 2.3 (по Коши)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в т. a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $b = \lim_{x \to a} f(x)$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$

$$(f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b))$$

Замечание. *Если для ф-ции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - положить $a = +\infty$: дост-но положить $N = \left\lfloor \frac{1}{\delta} \right\rfloor + 1$*

Определение 2.4. Число b наз-ся пределом ф-ции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (0 < |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Определение 2.5 (по Гейне)**.** Точка b наз-ся пределом ф-ции f в точке a, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \} (x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to b)$$

Замечание. *Поскольку a - предельная точка мн-ва E, то*

$$\forall \delta > 0 \colon \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \neq \emptyset$$

и сущ-ет $\{ x_n \} \subset E \setminus \{ a \}, x_n \to a$

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$$a \in \mathbb{R} \text{ - \textit{предельная точка} } \mathbb{R}$$

Покажем, что:

$$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta \leq 1$:

$$0 < |x - a| < \delta \leq 1$$

$$|x + a| = |x - a + 2a| < |x - a| + 2\,|a| \leq 1 + 2\,|a|$$

Возьмем $\delta = min \{ 1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1} \}$:

$$0 < |x - a| < \delta \iff 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{2\,|a| + 1} \iff \left|x^2 - a^2\right| < |x - a|\,(2\,|a|{+}1) < \varepsilon$$

Рассм. по Гейне:

$$x_n \neq a, x_n \to a \Rightarrow x_n^2 \to a^2 \iff f(x_n) \to f(a)$$

Теорема 2.2. *Определения по Коши и по Гейне* ***равносильны****.*

Доказательство. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка мн-ва E.

Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 2) Пусть $b = \lim_{x \to a} f(x)$ по Коши

Рассм. произвольную п-ть $\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}$ и $x_n \to a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \colon (f(x) \in B_\varepsilon(b))$

Т. к. $x_n \to a$, то $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in B_\delta(a))$. Имеем $x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geq N$, а значит, $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N$. Сл-но, $f(x_n) \to b$. Опр. 2 выполн-ся.

Опр. 2 $\Rightarrow$ Опр. 1) Пусть $b = \lim_{x \to a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что Опр. 1 не выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ и соотв. знач-е x обозначим через x_n. По индукции будет построена посл-ть $\{ x_n \}$, т. ч. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E$.

Имеем $\{ x_n \} \subset E \setminus \{ a \}$ и по т. о зажатой п-ти $x_n \to a$, а значит $f(x_n) \to b$

По опр-ю предела посл-ти $\exists N, \forall n \geq N (f(x_n) \in B_\varepsilon(b))$!!!

Сл-но опр. 2 не выполняется !!!

$\square$

Замечание. *Опр-е предела по Гейне можно ослабить, считая, что $\{ x_n \}$ монотонна. (Задача !)*

Св-ва предела ф-ции:

Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ и a - предел. точка E:

C1: **(Единственность предела)** Если $\lim_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim_{x \to a} f(x) = c$, то $b = c$

Доказательство. Рассм. произвольую п-ть $\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}$ и $x_n \to a$

По опр-ю Гейне $f(x_n) \to b$ и $f(x_n) \to c$. Т. к. предел посл-ти единственнен, то $b = c$ $\square$

C2: **(Предел по подмн-ву)** Если a - предел. точка мн-ва $D \subset E$ и

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Тогда $\lim_{x \to a} (f|_D) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{ x_n \}, x_n \in D \setminus \{ a \}, x_n \to a$. Тогда:

$$(f|_D)(x_n) = f(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x \to a} (f|_D)(x)$ $\square$

C3: **(Предел зажатой ф-ции)** Если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \colon (f(x) \le h(x) \le g(x))$$

и $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x \to a} h(x) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{ x_n \}, x_n \in E \setminus \{ a \}, x_n \to a$. Тогда $\exists N, \forall n \ge N (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n), \forall n \ge N$$

По т. о зажатой п-ти:

$$\begin{cases} f(x_n) \to b \\ g(x_n) \to b \end{cases} \Rightarrow h(x_n) \to b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x \to a} h(x)$ $\square$

C4: **(Свойство локализации)** Если f и g совпадают на $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ и $\lim_{x \to a} f(x) = b$, то сущ-ет $\lim_{x \to a} g(x) = b$