АлГем

Сергей Григорян

25 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 6

Определение 1.1. A - матрица размера 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a_{ii} - главная диагональ Определителем такой матрицы наз-ся число, равное:

$$|A| = \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \,(\text{слагаемые, параллельные главной диагонали}) -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \,(\text{слагаемые, } || \text{ побочной диагонали})$$

Таким образом, **определитель матрицы** - это сумма произведений эл-ов матрицы, взятых по одному и ровно по одному слагаемому из каждой строки и из каждого столбца. Произведение имеет знак $+$, если оно $||$ главной диагонали, иначе - побочной.

Утверждение 1.1. *Пусть G - базис в V_3, $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \alpha, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \beta, \overline{c} \underset{G}{\longleftrightarrow} \gamma$, тогда:*

$$V\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} V\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$$

Доказательство.

$$V\left(\sum_i \alpha_i \overline{e_i}, \sum_j \beta_j \overline{e_j}, \sum_k \gamma_k \overline{e_k}\right) = \sum_i \sum_j \sum_k \alpha_i \beta_j \gamma_k V\left(\overline{e_i}, \overline{e_j}, \overline{e_k}\right) =$$

Рассм.:

	i	j	k
1)	1	2	3
2)	2	3	1
3)	3	1	2
4)	2	1	3
5)	3	2	1
6)	1	3	2

$\Rightarrow$

$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 V\left(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\right) + \alpha_2 + \beta_3\gamma_1 V\left(\overline{e_2},\overline{e_3},\overline{e_1}\right) + \alpha_3\beta_1\gamma_2 V\left(\overline{e_3},\overline{e_1},\overline{e_2}\right)$ (ЦИКЛ) $+$

$+\alpha_2\beta_1\gamma_3 V\left(\overline{e_2},\overline{e_1},\overline{e_3}\right) + \alpha_3\beta_2\gamma_1 V\left(\overline{e_3},\overline{e_2},\overline{e_1}\right) + \alpha_1\beta_3\gamma_2 V\left(\overline{e_1},\overline{e_3},\overline{e_2}\right)$ (ТРАНСПОЗИЦИЯ) $\Rightarrow$

$$= V\left(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\right)\left(\alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2\right) =$$
$$= V\left(\overline{e_1},\overline{e_2},\overline{e_3}\right) * \det\left(\alpha^{\uparrow},\beta^{\uparrow},\gamma^{\uparrow}\right)$$

$\square$

Следствие 1.1. *Если G - ОНБ, то:*

$$V\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right) = \left|\alpha^{\uparrow} \quad \beta^{\uparrow} \quad \gamma^{\uparrow}\right|$$
$$S\left(\overline{a},\overline{b}\right) = \left|\alpha^{\uparrow},\beta^{\uparrow}\right|$$

Следствие 1.2. *В произвольном базисе* $V_2 : \overline{a}||\overline{b} \iff S\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 0 \iff \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix} = 0$

$V_3 : \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ *– компл.* $\iff \left|\alpha^{\uparrow} \quad \beta^{\uparrow} \quad \gamma^{\uparrow}\right| = 0$

Теорема 1.1 (Крамера, 1750 г.)**.** *Пусть дана СЛУ (система линейных ур-ий): 3-х ур-ий с 3-мя неизвестными:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3\end{cases}$$

Замечание.

$$\iff AX = B,$$
$$X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$$

Введём ОНБ G:

$$\overline{a_1} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix}\overline{a_{11}}\\ \overline{a_{21}}\\ \overline{a_{31}}\end{pmatrix}, \overline{a_2} \underset{G}{\longleftrightarrow} A_{*2}, \overline{a_3} \underset{G}{\longleftrightarrow} A_{*3}$$

Эта система явл. ***определённой*** $\iff |A| = \triangle \neq 0$
В этом случае, система имеет решение:

$$x = \frac{\triangle_x}{\triangle}, y = \frac{\triangle_y}{\triangle}, z = \frac{\triangle_z}{\triangle} \text{ (Формула Крамера)}$$

Доказательство. a) **Необходимое:** Пусть система опр. $\Rightarrow x_0\overline{a_1} + y_0\overline{a_2} + z_0\overline{a_3} = \overline{b}$ - имеет. ед. реш. Пусть $\det A = 0 \Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - компл. $\Rightarrow$ ЛЗ $\Rightarrow$

$\exists$ нетрив. ЛК $\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \lambda_3\overline{a_3} = \overline{o}$, тогда:

$(\lambda_1+x_0)\overline{a_1}+(\lambda_2+y_0)\overline{a_2}+(\lambda_3+z_0)\overline{a_3} = \overline{b}-$ другое реш. системы $\Rightarrow$ противореичие!!!

b) **Достаточное**: Пусть $\det A \neq 0 \Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ - не компл. $\Rightarrow \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ $\Rightarrow \overline{b}$ однозначно выр-ется черз $x\overline{a_1} + y\overline{a_2} + z\overline{a_3} = \overline{b}$

c) **Формулы:**

$$V(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{b}) = V(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, x\overline{a_1} + y\overline{a_2} + z\overline{a_3}) =$$

$$= xV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_1}) + yV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_2}) + zV(\overline{a_{11}}, \overline{a_{21}}, \overline{a_3}) = ...$$

□

Определение 1.2. СЛУ наз-ся **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Определение 1.3. СЛУ наз-ся **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Также она наз-ся:

- **Определённой**, если имеет **единственное** решение

- **Неопределённой**, если имеет **более одного** решения

1.1 Векторное произведение векторов

V_3: $\overline{a}, \overline{b} \in V_3 : [\overline{a}, \overline{b}]$ - мат., $\overline{a} \times \overline{b}$ - физ.

Определение 1.4. Векторное произведение вект. $\overline{a}, \overline{b}$ наз-ся вектор $\overline{c}$, т. ч.:

1) $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b}$

2) $|\overline{c}| = S_{||\text{-ма, образ.}\overline{a},\overline{b}} = \left|S(\overline{a}, \overline{b})\right|$

3) Тройка $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ - правая тройка

Замечание. *Если* $\overline{a}||\overline{b}$, *то* $\overline{c} = \overline{o}$

Теорема 1.2 (О связи векторного произв. с ориент. объёмом)**.**

$$V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$$

Доказательство. $\overline{a}||\overline{b} \Rightarrow 0 = 0$ - верно

1) Пусть $\overline{a} \not|| \overline{b}$, тогда они образ. пл-ть α. Пусть $\overline{n}$ - вектор нормали к α:
$$\begin{cases} \overline{n} \perp \overline{a} \\ \overline{n} \perp \overline{b} \\ |\overline{n}| = 1 \end{cases} \Rightarrow (\overline{a}, \overline{b}, \overline{n}) - \text{правая}$$
Было: $V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = S(\overline{a}, \overline{b})(\overline{n}, \overline{c}) = (S(\overline{a}, \overline{b})\overline{n}, \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b}]\overline{c})$

2)
$$(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = ([\overline{b}, \overline{c}], \overline{a}) = V(\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

□

Замечание. *Сочетание скалярного и векторного произведений также назыв.* ***смешанным:***

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) :: = ([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}) = (\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]) = V(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

Лемма 1.3. *Если* $\forall \overline{c} = V_3 \Rightarrow (\overline{a}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c})$, *то* $\overline{a} = \overline{b}$

Доказательство.
$$(\overline{a} - \overline{b}, \overline{c}) = 0, \forall \overline{c}$$
$$\overline{c} = \overline{a} - \overline{b} \Rightarrow$$
$$(\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \overline{b}) = \overline{o} \Rightarrow \overline{a} = \overline{b}$$

□

Теорема 1.4 (О св-вах вект. произведения)**.** *a)* $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$ *- кососимметричность*

b) $[\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}] = [\overline{a}, \overline{b_1}] + [\overline{a}, \overline{b_2}]$

c) $[\overline{a}, \lambda\overline{b}] = \lambda[\overline{a}, \overline{b}]$
b), c) - линейность по II аргументу.

Доказательство. a) Пусть $\overline{a} \not\parallel \overline{b}$ (иначе очев.)

$(\overline{a}, \overline{b}, [\overline{a}, \overline{b}])$ - правая тройка

$(\overline{b}, \overline{a}, [\overline{a}, \overline{b}])$ - левая тройка $\Rightarrow$

$(\overline{b}, \overline{a}, -[\overline{a}, \overline{b}])$ - правая тройка, при этом:

$(\overline{b}, \overline{a}, [\overline{b}, \overline{a}])$ - правая тройка

Ч. Т. Д.

b) Докажем эквив. утв: $([\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}], \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b_1}] + [\overline{a}, \overline{b_2}], \overline{c}), \forall \overline{c}$

$$([\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}], \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b_1} + \overline{b_2}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b_1}, \overline{c}) + (\overline{a}, \overline{b_2}, \overline{c}) =$$
$$= ([\overline{a}, \overline{b_1}], \overline{c}) + ([\overline{a}, \overline{b_2}], \overline{c}) = ([\overline{a}, \overline{b_1}] + [\overline{a}, \overline{b_2}], \overline{c})$$

$\square$

1.2 Запись векторного произведения в произвольном базисе

<u>Теорема</u> 1.5. *Пусть G - базис в V_3, $\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$. Тогда:*

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} [\overline{e_2}, \overline{e_3}] & \overline{[\overline{e_3}, \overline{e_1}]} & [\overline{e_1}, \overline{e_2}] \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство.

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overline{e_i}, \sum_{i=1}^{3} \beta_i \overline{e_i}\right] = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j [\overline{e_i}, \overline{e_j}] =$$

Рассм.:

i	j
2	3
3	1
1	2

$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\overline{e_2}, \overline{e_3}] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[\overline{e_3}, \overline{e_1}] + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

$\square$

Замечание. *В упрощ. виде:*

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

1.3 Биортогональный базис

V_3: $G = (\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})$

Определение 1.5. Векторы

$$f_1 = \frac{[\overline{e_2}, \overline{e_3}]}{(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})}, f_2 = \frac{[\overline{e_3}, \overline{e_1}]}{(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})}, \overline{f_3} = \frac{[\overline{e_1}, \overline{e_2}]}{(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3})}$$

наз-ся векторами **биортогонального** (к G) базиса

Теорема 1.6 (О св-вах биортогонального базиса). *a) $(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})$ - базис в V_3*

b)

$$(\overline{f_i}, \overline{e_j}) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

c) Если $\overline{v} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, *то* $\alpha = (\overline{v}, \overline{f_1}), \beta = (\overline{v}, \overline{f_2}), \gamma = (\overline{v}, \overline{f_3})$

2 Лекция 7

Определение 2.1. Пусть $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in V_3$
Двойным векторным произв. наз-ся выр-е: $[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$

Теорема 2.1 (Тождество БАЦ-ЦАБ).

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b})$$

Доказательство. Выделим правый ОНБ след. образом:

$$\overline{e_1}||\overline{a}$$

$$\overline{e_2}, \text{т. ч. } (\overline{a}, \overline{b}, \overline{e_2}) - \text{компланарная сист.}$$

$$\overline{e_3} = [\overline{e_1}, \overline{e_2}]$$

Тогда:

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{c} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \beta_1 & \beta_2 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \beta_2\gamma_3\overline{e_1} - \overline{e_2}\beta_1\gamma_3 + \overline{e_3}(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \beta_2\gamma_3 \\ -\beta_1\gamma_3 \\ \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] = \begin{vmatrix} \overline{e_1} & \overline{e_2} & \overline{e_3} \\ \alpha & 0 & 0 \\ \beta_2\gamma_3 & -\beta_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \end{vmatrix} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) \\ -\alpha\beta_1\gamma_3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{b}(\overline{a}, \overline{c}) - \overline{c}(\overline{a}, \overline{b}) = \begin{pmatrix} \alpha\beta_1\gamma_1 \\ \alpha\beta_2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha\beta_1\gamma_1 \\ \alpha\beta_1\gamma_2 \\ \alpha\beta_1\gamma_3 \end{pmatrix} = [\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]$$

□

Следствие 2.1 (Тождество Якоби)**.**

$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]] + [\overline{b}, [\overline{c}, \overline{a}]] + [\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]] = \overline{o}, \forall \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$$

2.1 Понятие ур-я мн-ва. Задание прямой на пл-ти

V_2 или V_3 с фикс. ДСК.

Определение 2.2. Ур-ем мн-ва $M \subset V_i$ наз-ся высказывание, верное $\forall x \in M$ и неверное $\forall x \in V_i \backslash M$

V_2 с фикс. ДСК

Определение 2.3. Ненулевой вектор $\overline{a}$, кот. $||$ данной прямой l наз-ся её **направляющим вектором**.

Picture(2)

Векторное параметрическое ур-е прямой:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + t\overline{a}, t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$\overline{a} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{r} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\overline{r_0} \underset{G}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Коорд. параметрическое ур-е прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t \\ y = y_0 + \alpha_2 t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Каноническое ур-е прямой:

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha_1} = \frac{y - y_0}{\alpha_2} = \frac{z - z_0}{\alpha_3} \tag{3}$$

Если $\alpha_2 = 0$:
$l\colon y - y_0 = 0$

Замечание. *Если одна из коор-т напр. вектора равна 0, то соотв. коор-т можно приравнять к начальной*

$$\alpha_2(x-x_0)-\alpha_1(y-y_0)=0$$

При $A=\alpha_2, B=-\alpha_1$, имеем общее ур-е прямой на пл-ти:

$$Ax+By+C=0 \tag{4}$$

$$\overline{a}=\begin{pmatrix}-B\\A\end{pmatrix}$$

Утверждение 2.1. *Пусть l задана общ. ур-ем (4), $X_0\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in l$*

Тогда $X_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\in l \iff A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=0$

Доказательство. a) Необходимое:

$$\begin{cases}Ax_0+By_0+C=0\\Ax_1+By_1+C=0\end{cases}\Rightarrow A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=0$$

b) Достаточное:

$$X_0\in l \text{ и } A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax_1+By_1+C=0$$

□

Следствие 2.2. *Вектор $\overline{b}\begin{pmatrix}p_1\\p_2\end{pmatrix}$ явл. направляющим вектором l:*

$$Ax+By+C=0 \iff Ap_1+Bp_2=0$$

Доказательство. Picture(1) □

Теорема 2.2. *Пусть l: $Ax+By+C=0$.*

Тогда любой напр. вектор этой прямой коллинеарен вектору $\begin{pmatrix}-B\\A\end{pmatrix}$, а в кач-ве начальной точки X_0 этой прямой можно взять:

$$X\begin{pmatrix}-\frac{AC}{A^2+B^2}\\-\frac{BC}{A^2+B^2}\end{pmatrix}$$

Доказательство. a)

$$\lambda \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} - \text{вектор}$$

$$A(-\lambda B) + B(-\lambda A) = 0 \Rightarrow \text{напр.}$$

b)

$$-\frac{A^2C}{A^2+B^2} - \frac{B^2C}{A^2+B^2} + C = -C + C = 0$$

□

Следствие 2.3. *Все рассм. выше способы задания прямой l - эквивалентны.*

2.1.1 Случай ПДСК

(O, G) - ПДСК

Утверждение 2.2. $l\colon Ax + By + C = 0$
Тогда вектор $\overline{n}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \perp l$

Доказательство.

$$\overline{a}\begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix} \Rightarrow (\overline{n}, \overline{a}) = A(-B) + B(-A) = 0 \Rightarrow \overline{n} \perp \overline{a}$$

□

Определение 2.4. Вектор $\overline{n}$ наз-ся вектором нормали к прямой l

Ур-е прямой с угловым коэффициентом (ПДСК): Picture (3) and (4)

Замечание. *Если $B \neq 0$ (и только в этом случае), то ур-е $l\colon Ax + By + C = 0$ можно записать в виде:*

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{A}{B}$$

2.1.2 Признаки параллельности/перпендикулярности прямых на плоскости

Утверждение 2.3. *a) Прямые:*

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \iff k_1 = k_2$$

b) Прямые: $i = \overline{1,2}$*:* $A_ix + B_iy + C_i = 0$ *параллельны* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

Доказательство. a) Picture(5)

$$k_1 = \operatorname{tg}\phi = k_2$$

b)

$$l_1 || l_2 \iff \overline{n_1} || \overline{n_2} \iff S(\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0 \iff \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$$

□

Утверждение 2.4. *a) Прямые:*

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$$

перпендикулярны, при $k_1k_2 = -1$

b)

$$l_1 \perp l_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

Доказательство. a)

$$\phi_1 = \phi_2 + \frac{\pi}{2} \iff \operatorname{tg}\phi_1 = \operatorname{tg}(\phi_2 + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\phi_2 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\phi_2} \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\phi_1 \operatorname{tg}\phi_2 = -1 \iff k_1k_2 = -1$$

b)

$$l_1 \perp l_2 \iff (\overline{n_1}, \overline{n_2}) = 0 \iff A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

□

Утверждение 2.5. *Прямые* $l_1\colon A_1x+B_1y+C_1=0$, $l_2\colon A_2x+B_2y+C_2=0$

a) *Пересекаются по одной точке* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) *Параллельны (включая совпадение)* $\iff \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

c) *Совпадают* $\iff$ *ур-я пропорциональны*

Доказательство.

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

a) Единственное решение при $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$

b) Противоположность $a)$: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

c) Пусть $l_1 = l_2 \Rightarrow$

$$A_1B_2 = B_1A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \end{cases} \quad (\text{где } \lambda \neq 0, \lambda \neq \infty)$$

$\square$

Определение 2.5. Полупл-тью, определяемой прямой l и вектором нормали $\overline{n}$, наз-ся мн-во всех точек x пл-ти, т. ч. вектор $\overline{X_0X}$ составляет с вектором $\overline{n}$ угол $\leq \frac{\pi}{2}$

$$\cos\phi \geq 0 \iff (\overline{X_0X_1}, \overline{n}) \geq 0$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0) \geq 0$$

$$Ax_0+By_0=0 \Rightarrow Ax+By+C \geq 0$$

Picture (7)