Матан

Сергей Григорян

20 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 5

Пример.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}, n \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1+2+\dots+n}{n^2+n} \le a_n \le \frac{1+2+\dots+n}{n^2+1}$$
$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} \le a_n \le \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$
$$\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} (\frac{2}{n^2} \to 0, \frac{1}{n} \to 0)$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$$

Определение 1.1. Посл-ть $\{\alpha_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. малой**, если

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

Замечание.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff a_n = a + \alpha_n, \textit{где } \alpha_n \textit{ - б. м.}$$

Пример. *Пусть* $\{\alpha_n\}_1^\infty$ *- б. м., а* $\{\beta_n\}_1^\infty$ *- огранич. Тогда:* $\{\alpha_n\beta_n\}_1^\infty$ *- б. м.*

Доказательство. Т. к. $\{\beta_n\}_1^\infty$ - огр., то $\exists C > 0 \colon \forall n (|\beta_n| \le C)$

$$-C|\alpha_n| \le \alpha_n\beta_n \le C|\alpha_n|$$

Крайние части $\to 0 \Rightarrow$ По. т. о двух полицейских $\lim_{n\to\infty} \alpha_n\beta_n = 0$ □

1.1 Монотонные п-ти

Определение 1.2. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого возрастающей** (**строго возрастающей**), если

$$a_n \le a_{n+1} (a_n < a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **нестрого убывающей** (**строго убыв.**), если:

$$a_n \ge a_{n+1} (a_n > a_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$$

Такие п-ти наз-ся **монотонными**.

Замечание. *Из опр-я следует, что* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает* $\iff$ $\{-a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает.*

Замечание. *Если* $a_n \le a_{n+1}, \forall n \in N \Rightarrow \forall n, m(n < m \to a_n \le a_m)$

Теорема 1.1 (Теорема о пределе монотонной п-ти)**.** *ПУсть* $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого возрастает и огр. сверху, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *сходиться и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_1^\infty$

Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ *нестрого убывает и огр снизу, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *сходиться и* $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_1^\infty$

Доказательство. Док-ем первое утв. По условию $\exists c = \sup\{a_n\}_1^\infty \in \mathbb{R}$.

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. супремума $\forall n(a_n \le c)$, также:

$$\exists N(a_N > c - \varepsilon)$$

Поскольку $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $a_n \ge a_N, \forall n \ge N \Rightarrow$ при всех таких $n \ge N$ имеем:

$$a_N \le a_n$$

$$c - \varepsilon < a_N \le a_n \le c < c + \varepsilon, \text{откуда}$$

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = c$$

Второе утв. док-ся аналогично. □

Лемма 1.2 (Нер-во Бернулли)**.** *Если* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \ge -1$*, то:*

$$(1+x)^n \ge 1 + nx$$

Доказательство. **МММ**:

n = 1 Верно.

$n \Rightarrow n+1$ Пусть утв. верно для n. Тогда:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \ge (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \ge 1+(n+1)x$$

□

Пример. *Для* $\forall x \in \mathbb{R}$ *n-ть* $a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$ *сходится.*

Доказательство. Зафикс. $m \in \mathbb{N}$, что $m \geq |x|$. Тогда при:

$$n \geq m\colon a_n(x) > 0,$$

а также:

$$\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = (1+\frac{x}{n})\left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} = (1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}$$

Исследуем: $(-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}})$. Она:

$$\begin{cases} > 0, x < 0 \\ \geq -1, x \geq 0 \end{cases}$$

По нер-ву Бернулли:

$$(1+\frac{x}{n})\left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1} \geq (1+\frac{x}{n})(1-\frac{\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}) = 1$$

Итак, $\{a_n\}_1^\infty(x)$ нестрого возр. при $n \geq m$. По доказанному $a_n(-x) \geq a_m(-x)$, при $n \geq m$.

Т. к.

$$a_n(x)a_n(-x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leq 1,$$

то:

$$a_n(x) \leq \frac{1}{a_n(-x)} \leq \frac{1}{a_m(-x)}, \text{т. е.}$$

$\{a_n\}_1^\infty$ огр. сверху.

Сл-но, по теореме о пределе монот. посл-ти. $\{a_n(x)\}_1^\infty$ сход-ся. $\square$

<u>Определение</u> 1.3.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

<u>Задача</u> 1.1. Док-те, что $2 < e < 3$

1.2 Последовательность вложенных отрезков

Определение 1.4. П-ть отрезков $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **вложенной**, если $\forall n \in \mathbb{N}([a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n])$

Если к тому же, $b_n - a_n \to 0$, то п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ наз-ся **стягивающейся**.

Теорема 1.3 (Кантор)**.** *Всякая п-ть вложенных отрезков имеет общую точку. Если п-ть стягивающаяся, то такая точка единственная.*

Доказательство. Пусть задана п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ вложенных отр-ов. Тогда:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon a_1 \le a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n \le b_1$$

П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и огр. сверху (числом b_1).
П-ть $\{b_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и огр. снизу (числом a_1)
$\Rightarrow \{a_n\}_1^\infty, \{b_n\}_1^\infty$ сход., $a_n \to \alpha, b_n \to \beta$ и $\alpha \le \beta$.
Итак $\forall n(a_n \le \alpha \le \beta \le b_n)$, т. е.:

$$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

Если п-ть $\{[a_n, b_n]\}_1^\infty$ - стягив., то $b_n - a_n \to 0$
Пусть $x, y \in \bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n]$, тогда $|x - y| \le b_n - a_n \Rightarrow x = y$
Т. е. $\bigcap_{n=1}^\infty [a_n, b_n] = x$, где $x = \alpha = \beta$. $\square$

2 Лекция 6

Рассм. $\bigcap_{i=1}^\infty (0, \frac{1}{n})$

По аксиоме Архимеде, заключаем, что $\bigcap_{i=1}^\infty (0, \frac{1}{n}) = \emptyset$

2.1 Бесконечные пределы

Выделим классы п-ть, **расход. особым образом**:

Определение 2.1. Говорят, что $\{a_n\}_1^\infty$ стремится к $+\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \ge N \Rightarrow a_n > \frac{1}{\varepsilon})$

Обозначение. *Пишут вот так:* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *или* $a_n \to +\infty$

Определение 2.2. Говорят, что $\{a_n\}_1^\infty$ стремится к $-\infty$, если $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}(n \geq N \Rightarrow a_n < -\frac{1}{e})$

Обозначение. *Пишут, что* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *или* $a_n \to -\infty$

Определение 2.3. П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **беск. большой**, если $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$

Замечание. *Из опр-ий следует, что* $a_n \to -\infty \iff (-a_n) \to +\infty$

Пример. *1)*

$$a_n = n^2, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$$

Возьмём $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rfloor + 1 \Rightarrow n \geq N \Rightarrow n^2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

2)

$$(-n^2) \to -\infty$$

3)

$$(-1)^n n^2 - \text{б. б., но}, (-1)^n n^2 \not\to +\infty, (-1)^n n^2 \not\to -\infty$$

Задача 2.1. Док-ть, что всякая ББ п-ть является неограниченной.

Замечание. *П-ть не может одновременно стремиться к числу и к символу* $+\infty$ *(Т. к. она либо ограничена, либо неогр.), а также к бесконечностям разных знаков. Таким образом, если п-ть имеет предел в* $\overline{\mathbb{R}}$*, то он единственный.*

Лемма 2.1. *Пусть* $a_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$*, тогда* $\{a_n\}_1^\infty$ *- ББ* $\iff$ $\{\frac{1}{a_n}\}_1^\infty$ *- БМ*

Доказательство. Это следует из $|a_n| > \frac{1}{\varepsilon} \iff \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon$ □

2.2 Дополнения к ранним теоремам

Теорема 2.2 (4’). *Пусть* $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$*. Тогда:*

1) *Если* $a_n \to +\infty$*, то* $b_n \to +\infty$

2) *Если* $b_n \to -\infty$*, то* $a_n \to -\infty$

Доказательство. 1) Заф. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N\colon (a_n > \frac{1}{\varepsilon})$. Тогда $b_n \geq a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq N$. Тогда $b_n \to +\infty$

2) Вытекает из (1): $(-b_n) \to +\infty, -b_n \leq -a_n, \forall n \to (-a_n) \to +\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

$\square$

Теорема 2.3 (6'). *1) Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр. и неогр. сверху, то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*

2) Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убыв. и неогр. снизу, то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Доказательство. 1) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Из неогр. сверху следует, что $\exists N\colon a_N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ Тогда $a_n \geq a_N > \frac{1}{\varepsilon}, \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

2) Аналогично (1), или с помощью сведения a_n к $(-a_n)$

$\square$

Следствие. *Всякая монотонная п-ть имеет предеел в $\overline{\mathbb{R}}$: если $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого возр., то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$*

Если п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ нестрого убыв., то $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\, a_n \,\}$

Задача 2.2. Д-те, что теорема 5 (арифм. операции с пределами), остаётся верно и для $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ (с допуст. операциями)

Пример. *Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = x \in \mathbb{R}, x < 0$, а $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Тогда $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$*

Доказательство.

$$\exists N_1, \forall n \geq N_1 (a_n < \frac{x}{2})$$

$$\exists N_2, \forall n \geq N_2 (b_n > \frac{2}{|x|\,\varepsilon})$$

Возьмём $N = max(N_1, N_2) \Rightarrow \forall n \geq N\colon$

$$a_n b_n < \frac{x}{2} \frac{2}{|x|\,\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$\square$

2.3 Подпоследовательности

<u>**Определение**</u> **2.4.** Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - п-ть и $\{n_k\}_1^\infty$ строго возрастающая п-ть нат. чисел. П-ть $\{b_k\}_1^\infty$, где $b_k = a_{n_k}, k \in \mathbb{N}$, наз-ся **подпоследовательностью** и об-ся $\{a_{n_k}\}_1^\infty$

<u>**Пример**</u>**.**

$$a_n = n, n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n_k} = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ - } \textit{подп-ть}$$

<u>**Замечание**</u>**.** *1) Подп-ть $\{ a_{n_k} \}$ - это композиция строго возрастающей ф-ции $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma(k) = n_k$, и самой п-ти $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*

2) Верно, что $n_k \geq k, \forall k$

$(n_1 \geq 1, n_k \geq k, n_{k+1} > n_k \geq k \Rightarrow n_{k+1} \geq k+1)$

<u>**Лемма**</u> **2.4.** *Если п-ть $\{ a_n \}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$, то любая её подп-ть имеет тот же предел*

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, а $\{ a_{n_k} \}$ - подп-ть $\{ a_n \}$

a) Пусть $a \in \mathbb{R}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр. предела $\exists N, \forall n \geq N(|a_n - a| < \varepsilon)$

   Тогда $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ при всех $k \geq N$ (т. к. $n_k \geq k \geq N$)

   Сл-но, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

b) Если $a = +\infty$, получаем результат, если заменить $|a_n - a| < \varepsilon$ на $a_n > \frac{1}{\varepsilon}(a_n < -\frac{1}{\varepsilon})$

□

<u>**Теорема**</u> **2.5** (Больцано-Вейерштрасса)**.** *Всякая огр. посл-ть имеет сход. подпосл-ть.*

Доказательство. Пусть задана $\{a_n\}_1^\infty$ - ограниченная,

$$\Rightarrow \exists [c, d] \ni a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Определим п-ть отрезков $[c_k, d_k]$ Положим $[c_1, d_1] = [c, d]$. Если определён отрезок $[c_k, d_k]$, то разделим его пополам $(y = \frac{c_k+d_k}{2})$

$$[c_{k+1}, d_{k+1}] = \begin{cases} [c_k, y], \text{если } \{\, k \mid a_k \in [c_k, y] \,\} \text{ - бесконечно} \\ [y, d_k], \text{иначе} \end{cases}$$

П-ть $\{\, [c_k, d_k] \,\}$ стягивающаяся:

$$\forall k\colon \begin{cases} [c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k] \\ d_k - c_k = \dfrac{d-c}{2^k} \end{cases}$$

По т. Кантора $\exists a \in \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$, причём $c_k \to a, d_k \to a$

Определим a_{n_k}:

$$a_{n_1} = a_1, \text{если определён } a_{n_k}, \text{ то положим}$$

$$a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}], n_{k+1} \geq n_k$$

Т. к. $c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$, то по т. о зажатой п-ти (о двух полицейских), то $a_{n_k} \to a$ □

Теорема 2.6. *Если п-ть неограничена сверху (снизу), то она имеет подпосл-ть, стремящуюся к $+\infty$ ($-\infty$)*

Доказательство. Пусть дана п-ть $\{\, a_n \,\}$ - неогр. сверху.

$$a_{n_1} > 1$$

Пусть определён эл-т a_{n_k}, определим:

$$a_{n_{k+1}} > max\,\{\, k+1, a_{n_1}, \ldots, a_{n_k} \,\} \Rightarrow n_{k+1} > k$$

Опр-на $\{\, a_{n_k} \,\}$. Т. к. $a_{n_k} > k, \forall k \Rightarrow a_{n_k} \to +\infty$ (По теореме 4') □

Следствие. *Всякая п-ть имеет подпосл-ть, стремящуюся к некот. эл-ту $\in \overline{\mathbb{R}}$*