# Матан

Сергей Григорян

27 сентября 2024 г.

# Содержание

# 1 Лекция 7

## 1.1 Критерий Коши

**Определение 1.1.** Посл-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

**Лемма 1.1.** *Всякая фундаментальная п-ть огр-на*

*Доказательство.* Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. По опр-ю:

$$\exists N \colon \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < 1)$$

В част-ти:

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1$$

для всех $n \geq N$ $(m = N)$

Положим

$$\alpha = min(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$\beta = max(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

. Тогда:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ □

**Теорема 1.2** (Коши)**.** *П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - сходится $\iff$ $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна.*

*Доказательство.* $\Rightarrow$) Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела:

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N}(|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при всех $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} * 2 = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) По предыдущей лемме, п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - ограничена $\Rightarrow$ по т. Больцано-Вейерштрасса (Б-В) $\{a_n\}_1^\infty$ имеет сход. подпосл-ть $\{a_{n_k}\}_1^\infty \to a$

Покажем, что $a = \lim_{n\to\infty}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю фундаментальности:

$$\exists N, \forall n, m \geq N(|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Т. к. $\{a_{n_k}\} \to a \Rightarrow$

$$\exists K\colon \forall k \geq K(|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $M = max(N, K)$. Тогда $n_M \geq M \geq N; n_M \geq M \geq K$

Поэтому при всех $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

**Замечание.** *Критерий Коши позволяет доказывать существование предела,* ***без явного нахождения его значения***

*Кроме того, критерий позволяет* ***оценить скорость сходимости к пределу*** *(перейдём к пределу по m в определении фунд-ти):*

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \textit{при всех } n \geq N$$

**Задача 1.1.** Покажите, что если всякая фундаментальная посл-ть сх-ся (сходится), то выполняется аксиома непрерывности. А именно:

Пусть $\mathbb{F}$ - упоряд. поле, на котором выполняется аксиома Архимеда

## 1.2 Частичные пределы

**Определение 1.2.** Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся частичным пределом числовой посл-ти $\{a_n\}_1^\infty$, если $\exists \{ a_{n_k} \}$ - подпосл-ть $\{ a_n \}:\ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

$$L\{ a_n \} - \text{мн-во частичных пределов } \{ a_n \}$$

**Пример.** $\pm 1$ - *частичные пределы* $a_n = (-1)^n$

$$a_{2k} \to 1, a_{2k-1} \to -1$$

Пусть задана числовая посл-ть $\{ a_n \}$

Положим

$$M_n = \sup_{k\geq n} \{ a_k \}$$

$$m_n = \inf_{k \geq n} \{ a_k \}$$

Пусть $\{ a_n \}$ огр. сверху. Тогда все $M_n \in \mathbb{R}$
Поскольку при переходе к подмн-ву sup не увеличивается, то $\{ M_n \}$ нестрого убывает
$\Rightarrow \exists \lim_{n \to \infty} M_n$

Пусть $\{ a_n \}$ не огр. сверху. Тогда все $M_n = + \inf$
Положим $\lim_{n \to \infty} M_n = +\infty$

Аналогично для $\{ m_n \}$ (Огр./Неогр. снизу).

Итак, посл-ти $\{ m_n \}$ и $\{ M_n \}$ имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

**<u>Определение</u> 1.3.** Величина $\lim_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **верхний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$

Величина $\lim_{n \to \infty} \inf\limits_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **нижний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$

**<u>Замечание</u>.** *Т. к.* $m_n \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, *тогда:*

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} a_n$$

**<u>Задача</u> 1.2.**

$$\overline{\lim}_{n \to \infty} (-a_n) = - \underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$$

**<u>Теорема</u> 1.3.** *Верхний (нижний) предел - наибольший (наименьший) из част. пределов посл-ти.*

*Доказательство.*

$$M = \overline{\lim}_{n \to \infty} a_n, m = \underline{\lim}_{n \to \infty} a_n$$

Нужно показать, что $M, m$ - это ч. п. $\{ a_n \}$ и любой ч. п. лежит между ними.

1) Покажем, что есть подп-ть $\{ a_n \}$, сх-ся к $M$:

I. $M \in \mathbb{R}$. Имеем

$$M = \inf \{ M_n \}$$

По опр-ю $\sup, \exists n_1 \colon (M - 1 < a_{n_1})$

$$M_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} \{ a_k \} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 \colon (M - \frac{1}{2} < a_{n_2})$$

и т. д.
Таким образом, по индукции, будет построена подп-ть $\{ a_{n_k} \}$, т. ч.

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$$

Имеем:

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_k}$$

Края нер-ва сх-ся к $M \Rightarrow$ по т. о зажатой посл-ти, $a_{n_k} \to M$

II. $M = +\infty$, тогда $\{ a_n \}$ неогр. сверху $\Rightarrow$ (по Теореме 8') она имеет под-пть, сх-ся к $+\infty$

III. $M = -\infty$. Т. к. $a_n \leq M_n, \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

2) Для $m$ - док-во аналогично, или сводиться к $M$ по задаче prot-pred

3) Пусть $\{ a_{n_k} \}, a_{n_k} \to a$. Тогда:

$$m_{n_k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_k}, \forall k \Rightarrow m \leq a \leq M (\text{част. пределы})$$

$\square$

**Следствие.** *$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$ (в $\overline{\mathbb{R}}$) $\iff \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$*
*В этом случае все три предела равны.*

*Доказательство.* $\Rightarrow$) По лемме 4, любая подпосл-ть имеет предел $a \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$\Leftarrow$)

$$m_n \leq a_n \leq M_n$$

для всех $n \Rightarrow a_n \to a$ (Края $\to a$)

$\square$

__Лемма__ **1.4.** *Для $c \in \mathbb{R}$ верно:*

$$c = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (a_n < c + \varepsilon) \ \textit{(1)} \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N (a_n > c - \varepsilon) \ \textit{(2)} \end{cases}$$

$$c = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N (a_n < c + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (a_n > c - \varepsilon) \end{cases}$$

*Доказательство.* Докажем, для верх предела:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n, M_n = \sup_{k\geq n} \{ a_k \}$$

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N (M_N < c + \varepsilon)$$

$$(2) \iff \forall \varepsilon > 0, \forall N (M_n > c - \varepsilon)$$

Напомним, что $\{ M_n \}$ - нестрого убыв.

Тогда $(1) \wedge (2) \iff c = \lim_{n\to\infty} M_n \ (= \inf \{ M_n \})$ □

# 2 Лекция 8

## 2.1 §3: Топология $\mathbb{R}$

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

__Обозначение__.

- $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ - *$\varepsilon$-окрестность $a$*
- $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{ a \} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ - *проколотая $\varepsilon$-окр-ть т. $a$*

__Определение__ **2.1.** ПУсть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

1) Точка $x$ наз-ся <u>внутренней точкой</u> мн-ва $E$, если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset E)$

   $(int)E$ - мн-во всех внут. точек $E$

2) Точка $x$ наз-ся <u>внешней точкой</u> мн. $E$, если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E)$
   $(ext)E$ - мн-во внешних точек $E$

3) Точка $x$ наз-ся <u>граничной точкой</u> мн-ва $E$, если

$$\forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \land B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset)$$

$\sigma E$ - мн-во всех граничных точек $E$

**<u>Замечание</u>.** *Из опр-я следует:*

$$\mathbb{R} = (int)E \sqcup (ext)E \sqcup \sigma E$$

**<u>Пример</u>.**

$$E = (0,1], (int)E = (0;1), (ext)E = (-\infty;0) \cup (1;+\infty), \sigma E = \{\, 0, 1 \,\}$$

**<u>Определение</u> 2.2.** Мн-во $G \subset \mathbb{R}$ наз-ся **открытым**, если все его точки яв-ся внутренними (т. е. $G = (int)G$)

**<u>Определение</u> 2.3.** Мн-во $F \subset \mathbb{R}$ наз-ся **замкнутым**, если $\mathbb{R} \setminus F$ - открыто.

**<u>Пример</u>.** *1)* $(a, b)$ *- открытое.*

*2)* $[a, b]$ *- замкнутое.*

**<u>Лемма</u> 2.1.** *a) Объединение любого семейства открытых мн-в открыто.*

*b) Пересечение конечного сем-ва открытых мн-в открыто.*

*c)* $\mathbb{R}, \emptyset$ *- открыты*

*Доказательство.* a) Пусть $\{\, G_\lambda \,\}_{\lambda \in \Lambda}$ - семейство открытых мн-в.

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \text{ и } x \in G$$

По опр-ю:

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_\lambda \text{ - открыто}) \iff \exists \varepsilon > 0 \colon B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda \subset G$$

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset G$, т. е. $x$ - внут. точка $G$

b) ПУсть $\{ G_k \}_{k=1}^{m}$ - семейство открытых мн-в, $G = \bigcap_{k=1}^{m} G_k, x \in G$. По опр. пересечения:

$$\forall k, x \in G_k \Rightarrow \forall k, \exists \varepsilon_k > 0 \colon B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$$

$$\varepsilon = \min_{1 \le k \le m} \{ \varepsilon_k \}$$

Тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k, \forall k \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^{m}$, т. е. $x$ - внут. точка $G$

c) Открытость $\mathbb{R}, \emptyset$ следует из опр-я.

□

**Лемма 2.2.** *a) Объединение конечного семейства замкнутых мн-в замкнуто*

*b) Пересечение любого семейства замкнутых мн-в замкнуто*

*c)* $\mathbb{R}, \emptyset$ *- замкнуты*

*Доказательство.* a, b)

$$\mathbb{R} \backslash (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \backslash F_\lambda).$$

$$\mathbb{R} \backslash (\bigcup_{k=1}^{m} F_k) = \bigcap_{k=1}^{m} (\mathbb{R} \backslash F_k)$$

c) Очев.

□

**Определение 2.4.** Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Точка $x$ наз-ся предельной точкой мн-ва $E$, если:

$$\forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset)$$

**Лемма 2.3.** *Точка $x$ - предельная точка* $\iff$

$$\exists \{ x_n \}_{x_n \neq x} \subset E \colon (x_n \to x)$$

*Доказательство.* =>)

$$x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E, \forall n \Rightarrow x_n \neq x \text{ и } x_n \in E \Rightarrow x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to x$$

<=) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N\colon \forall n \geq N(x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon))$
Сл-но, $x_N \in \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E$

$\square$

**Теорема 2.4** (Критерий замкнутости)**.** *Следующие утв. эквивалентны:*

1) *$E$ - замкнуто;*
2) *$E$ содержит все свои граничные точки;*
3) *$E$ содержит все свои предельные точки;*
4) *Если п-ть $\{x_n\}$ точек из $E$ сходится к $x$, то $x \in E$*

*Доказательство.*

1 => 2) Пусть $x \in \mathbb{R}\backslash E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R}\backslash E$, т. е. $x$ - внешняя точка $E$. Тогда $\sigma E \subset E$

2 => 3) $E$ содержит все свои граничные точки. Рассм. 2 случая:

a) $x$ - внутренняя точка $\Rightarrow x \in E$
b) $x$ - граничная точка $E \Rightarrow x \in E$ - по усл. 2)

3 => 4) Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \to x$

Предположим, что $x \notin E \overset{\text{Л2}}{\Rightarrow} x$ - предельная точка $E$

4 => 1) $x \in R\backslash E$. Предположим, что $x$ - не внутренняя точка $E$. Тогда:

$$\forall n\colon B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset$$

Пусть $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Имеем $\{x_n\} \subset E \Rightarrow x_n \to x \in E$!!!!!!

$\square$

**Пример.** *Пусть $L$ - мн-во част. пределов числовой п-ть $\{a_n\}$. Покажем, что $L$ - замкнуто.*

*Доказательство.* Пусть $\{ x_n \} \subset L$, $x_n \to x$

По опр-ю част. предела, найдётся строго возрастающая п-ть номеров $\{ n_k \}$, что $|a_{n_k} - x_k| < \frac{1}{k}$

Сл-но:

$$|a_{n_k} - x| \leq |a_{n_k} - x_k| + |x_k - x| < \frac{1}{k} + |x_k - x|$$

Т. е. $x \in L$, по эквив. п.1 и п. 4 (Теоремы 2.4) заключаем, что $L$ - замкнуто. $\square$

**<u>Определение</u> 2.5.** $\overline{E} = E \cup \sigma E$ - замыкание мн-ва $E$

**<u>Лемма</u> 2.5.** *Мн-во $\overline{E}$ является замкнутым.*
*Кроме того, $\overline{E} = E \cup \{ x \colon x$ - предельная точка $E \}$*

*Доказательство.* Пусть $x \in \mathbb{R} \backslash \overline{E} \Rightarrow x$ - внешн. точка $E$, т. е.

$$\exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash E$$

Если $B_\varepsilon(x) \cap \sigma E \neq \emptyset$, то $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset$!!!

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \backslash \overline{E}$, т. е. $x$ - внут. точка $\mathbb{R} \backslash \overline{E}$

Вторая часть следует из наблюдений:

(1) любая предельная точка $E$ либо внутренняя, любо граничная.

(2) граничная точка $E$, не принадлежащая $E$, является предельной. $\square$

**<u>Задача</u> 2.1.** 1) $x \in \overline{E} \iff \exists \{ x_n \} \subset E (x_n \to x)$

2) $\overline{E} = \bigcap \{ F \colon F$ - замкнуто или $F \supset E \}$