

Алгем.
Лекция 1
Алгебра матриц

Сергей Григорян

8 сентября 2024 г.

1 Инфа

Лектор: Вадим Владимирович Штепин

2 Матрицы

Определение 2.1. Матрица - прямоугольная таблица чисел.

Обозначение. $A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Определение 2.2. Поле - мн-во, на котором определены "+, -, *, /".

2.1 I. Сложение

Обозначение. $M_{m \times n}$ - мн-во всех матриц размера $m \times n$

$$A, B \in M_{m \times n}, A + B \in M_{m \times n}$$

Определение 2.3. $[A + B]_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ - сложение матриц определено поэлементно.

2.2 II. Умножение матрицы на вещественное число

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Определение 2.4. Умножение матрицы на число осущ. поэлементно:

$$A \in M_{m \times n}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda A \in M_{m \times n}$$

$$[\lambda A]_{ij} = \lambda a_{ij} = \lambda [A]_{ij}$$

Теорема 2.1. Операции сложения матриц и " $\cdot \lambda$ " удовл. след. св-вам $[A, B, C \in M_{m \times n}]$:

1. Коммутативность сложения: $A + B = B + A$

2. Ассоциативность сложения: $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. *Существование нулевой матрицы:* $\exists O \in M_{m \times n}$, т. ч. $A + O = A, \forall A \in M_{m \times n}$
4. *Св-во суц. прот. матрицы:* $\forall A \in M_{m \times n} \exists (-A) \in M_{m \times n}$, т. ч. $A + (-A) = (-A) + A = O$
5. *Унитарность:* $1 * A = A$;
6. *Ассоциативность отн-но скалярного мн-ва :* $(\lambda * \mu) * A = \lambda * (\mu * A)$;
7. *Дистрибутивность* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
8. *Дистрибутивность* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

Доказательство. 8) $A, B \in M_{m \times n}$

$$[\lambda(A+B)]_{ij} = \lambda[A+B]_{ij} = \lambda(a_{ij}+b_{ij}) = \lambda*a_{ij}+\lambda*(b_{ij}) = [\lambda A]_{ij}+[\lambda B]_{ij} = [\lambda A+\lambda B]_{ij}.$$

□

Определение 2.5. Линейное пр-во над $M_{m \times n}$:

Пусть V - произв. мн-во, на кот. определены операции сложения эл-ов из V и умн-я эл-ов из V на эл-ты \mathbb{R} , и эти оп-ции удовл аксиомам (1-8). Тогда V - действительное линейное (векторное) пр-во.

Вывод: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ - действ. лин. пр-во.

3 III. Транспонирование

$$A \in M_{m \times n} \Rightarrow A^T \text{ или } A^t \in M_{n \times m}$$

Определение 3.1.

$$[A^T]_{ij} = [A]_{ji}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & -1 \\ 3 & -7 & -2 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & -7 \\ 9 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4 IV. Умножение матриц

4.1 Частный случай

$$A \in M_{1 \times n}, B \in M_{n \times 1}$$

$$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n) * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

4.2 Общий случай

$A * B$ имеет смысл (опр.), если:

$$A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}$$

Тогда:

$$C = A * B \in M_{m \times k}.$$

$$[C]_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}.$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить эл-т c_{ij} матрицы C , нужно умножить i -ую строку A на j -ую строку B

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -11 \\ 23 & 38 & 34 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 4.1 (О св-вах опер. транспонирования). *Операция транспонирования матрицы обладает св-вами.*

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. Св-во транспон. произв-я:

$$(A * B)^T = B^T A^T.$$

Доказательство. 4) Пусть матрица $A \in M_{m \times n}$, $B \in M_{n \times k}$. $AB \in M_{m \times k} \Rightarrow (AB)^T \in M_{k \times m}$
 $B^T \in M_{k \times n}$, $A^T \in M_{n \times m} \Rightarrow B^T A^T \in M_{k \times m}$

$$\begin{aligned} [(A * B)^T]_{ij} &= [AB]_{ji} = \sum_{s=1}^n a_{js} b_{si} = \sum_{s=1}^n b_{si} a_{js} = \\ &= \sum_{s=1}^n [B^T]_{is} [A^T]_{sj} = [B^T A^T]_{ij}. \end{aligned}$$

□

$$(A * B * C)^T = C^T * B^T * A^T.$$

Теорема 4.1. (О св-вах опер. "*" и "+")

1. Ассоциативность умножения:

$$(A * B) * C = A * (B * C).$$

2. Левая дистрибутивность умножения отн-но сложение

$$A * (B + C) = A * B + A * C.$$

3. Правая дистрибутивность умн. отн. слож:

$$(A + B) * C = A * C + B * C.$$

Доказательство. 1)

$$A \in M_{m \times n}, B \in M_{n \times k}, C \in M_{k \times r}$$

Правая и левая часть, очев., имеют смысл.

$$\begin{aligned} [(AB) * C]_{ij} &= \sum_{s=1}^k [AB]_{is} [C]_{sj} = \sum_{s=1}^k \left(\sum_{t=1}^n a_{it} b_{ts} \right) * c_{sj} = \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^n a_{it} b_{ts} c_{sj} = \\ &= \sum_{s=1}^k a_{it} \sum_{t=1}^n b_{ts} c_{sj} = \sum_{s=1}^k [A]_{it} [BC]_{tj} = [A(BC)]_{ij}. \end{aligned}$$

□

Замечание. Умножение матриц **некоммутативно**:

$$AB \neq BA.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- это пример **делителя нуля**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Определение 4.1. Матрица $\Delta \in M_{n \times n}$ наз-ся **диагональной**, если:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, ([\Delta]_{ij} = 0, i \neq j)$$

Утверждение 4.2.

а) Умножение матрицы A слева на матрицу Δ , если это возм.,

$$[\Delta A].$$

равносильно умнож строк матрицы A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ со-
отв.

b) Умнож. A справа на Δ , если это возм.

$$[A * \Delta].$$

равносильно умножению столбцов A на числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, со-
отв.