

Матан

Сергей Григорян

11 декабря 2024 г.

Содержание

1	Лекция 22	3
2	Лекция 23	8
2.1	Неопределённый интеграл	8
3	Лекция 24	10
3.1	Интегралы Римана и его св-ва	10
4	Лекция 25	15
4.1	Мн-во интегрируемых ф-ций	17
5	Лекция 26	20
6	Лекция 27	24
6.1	Ф-ла Ньютона Лейбница	24
6.2	Интеграл с переменным пределом	25
6.3	Приёмы интегрирования	26
7	Лекция 28	28
7.1	Завершаем интегральчики	28
7.2	Комплексные числа, многочлены и комплексные экспоненты	29
7.3	Вводим анализ на комплах	32
8	Лекция 29	33
8.1	Продолжаем про комплы	33
8.2	Комплексная экспонента e^z	35

1 Лекция 22

Следствие. Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на $\text{int } I$.

- 1) Ф-ция f выпукла вниз на $I \iff f''(x) \geq 0, x \in \text{int } I$
- 2) Если $f''(x) > 0$ на $\text{int } I$, то f строго выпукла вниз на I .

Пример. 1) $y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на \mathbb{R} , т. к.:

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

- 2) $y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

- 3) $y = x^p$ на $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{выпукла вниз}$$

При $p \in (0, 1)$ — вогнута.

- 4) $\ln(1+x) < x$, при $x > -1, x \neq 0$:

$y = \ln(1+x)$ — строго выпукла вверх (вогнута) на $(-1, +\infty)$

$y = x$ — касат. к $x \mapsto \ln(1+x)$ в точке $x = 0$

По т. ?? получаем заявленное нер-во.

Определение 1.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \text{int } I$. Если:

- 1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$
- 2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$
- 3) f — непр-на в a .

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f .

Следствие. Если ф-ция f дважды дифф-ма на $\text{int } I$ и $a \in \text{int } I$ — точка перегиба f , то $f''(a) = 0$:

Доказательство. Пусть для опре-ти f выпукла вниз на $(a - \delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a - \delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a + \delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f' . По Т. Ферма $f''(a) = 0$ \square

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение" на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 1.1 (Лемма о 3-ёх хордах). Пусть ф-ция f выпукла вниз на (a, b) и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (1)$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(t - x_1) + f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1)$, $f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \leq \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{\lambda(x) - \lambda(x_1)}{x - x_1}, \frac{\lambda(x_2) - \lambda(x)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

\square

Задача 1.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

Следствие. Для любой точки $x \in (a, b)$ ф-ция $\nu: (a, b) \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

нестрого возрастает на $(a, b) \setminus \{x\}$

Доказательство. $y, z \in (a, b) \setminus \{x\}$, $y < z$ \square

Теорема 1.2. Если ф-ция f выпукла вниз на (a, b) , то f непр-на на (a, b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.

Доказательство. Зафикс. $x \in (a, b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 1, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, существуют конечные $\nu(x-0) \leq \nu(x+0)$, т. е. \exists конечные левая и правая производная f в точке x : $f'_-(x) \leq f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x , а значит непр-на в точке x .

Перейдём к пределу в левом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_1+0$, а также в правом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_2-0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возрастает на (a, b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a, b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непроти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x)$, откуда:

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f \text{ дифф-ма в т. } x_0$$

□

Теорема 1.3 (Нер-во Йенсена). Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I . $x_1, \dots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\geq)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I . ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости
- Пусть нер-во верно для n . Установим справедливость для $n + 1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$$

Т. к. $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

$$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

По предположению инд-ции:

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

□

Пример. Пусть $x_1, \dots, x_n \geq 0$, тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

По нер-ву Йенсена:

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

□

Пример (Нер-во Гельдера). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.

$f = x^p$ — выпукла вниз

$$x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{1}{q}}}, \lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k x_k = \frac{a_k b_k^{q(1-\frac{1}{p})}}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{a_k b_k}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k f(x_k) = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \frac{a_k^p}{b_k^q} = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Пример (Нер-во Минковского). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и $p \geq 1$. Тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $p = 1$ — верно. $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p &= (a_1 + b_1)(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} = \\ &= a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1} \end{aligned}$$

нер-во Гельдера

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Поделим LHS и RHS на $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ и получим желаемый результат.

□

2 Лекция 23

2.1 Неопределённый интеграл

Определение 2.1. Пусть f -ция f опр-на на пром-ке I .

- 1) F -ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **первообразной** на I , если $F'(x) = f(x), \forall x \in I$
- 2) F -ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **обобщённой первообразной** на I , если F непр-на на I и $F'(x) = f(x), \forall x \in I \setminus A$, причём A не более чем счётно.

Пример.

$$f = \operatorname{sign} x, I = [-1, 1]$$

По т. Дарбу, всякая производная дифференцируемой f -ции принимает все промежуточные значения $\Rightarrow f$ не имеет первообразной на отрезке $[-1, 1]$

Её **обобщённая** первообразная: $F(x) = |x|$

Теорема 2.1 (Описание класса первообразных). Если F — первообразная (обобщённая) f на I и $c \in \mathbb{R}$, то $F + c$, тоже обобщённая первообразная f на I .

Если F_1, F_2 — первообразные (обобщённые) f на I , то их разность постоянна на I .

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{условие постоянства}} F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$

Для обобщённых первообразных следует из дополнения к теореме 10 (10') \square

Определение 2.2. Произвольная первообразная f -ции f на I наз-ся **неопределённым интегралом** f -ции f на I и обозначается:

$$\int f(x)dx \text{ или } \int f dx$$

Замечание. Операция перехода от f -ции к её неопр. интегралу наз-ся **интегрированием**.

Замечание. Формально dx в обозначении не несёт смысловой нагрузки, однако его использование **бывает весьма полезным**, если трактовать $f dx$ как дифференциал. ($f' dx = df$)

Замечание. Из неудобств отметим, что в обозначении никак не фигурирует пром-к I .

Утверждение 2.1. Неопределённый интеграл имеет следующие св-ва:

1) Если $\exists \int f dx$ на I , то $(\int f dx)' = f$ на I

2) Если $\exists \int f dx, \int g dx$ на I , а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то на I суц-ет:

$$\int (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int f dx + \mu \int g dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

3) Если u, v - дифф-мые ф-ции на I и $\exists \int v u' dx$ на I , то на I суц-ет:

$$\int v' u dx$$

А также верна ф-ла (интегрирование по частям):

$$\int v u' dx = v u - \int v' u dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

Или:

$$\int u dv = v u - \int v du + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

4) Если F — первообразная f на I , ϕ дифф. на пром-ке $Y, \phi(Y) \subset I$, то суц-ет:

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$ (**ф-ла подстановки**)

Замечание. Если дополнительно ϕ строго монотонна на Y , то на $\phi(Y)$

$$t = \phi^{-1}(x)$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx + C$$

Теорема 2.2 (Таблица неопределённых интегралов). *Смотри таблицу в книжке.*

Задача 2.1. Пусть f дифф-ма на I с $f' \neq 0$ на I . Пусть F — первообразная f на I . Запишите:

$$\int f^{-1}(y)dy$$

через f .

Замечание. В отличие от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит за пределы элементарных ф-ций, напимер:

$$\int e^{-x^2} dx$$

Замечание. Все св-ва переносятся на обобщ. интеграл.

3 Лекция 24

3.1 Интегралы Римана и его св-ва

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок.

Определение 3.1. Разбиение T отр-ка $[a, b]$ наз-ся конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n$, т. ч. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введём обозн-я:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, |T| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

j

Пусть ф-ция f опр-на на $[a, b]$ и T — разбиение $[a, b]$. Положим:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Сумма:

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$s_T(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Эти суммы наз-ся верхней и нижней суммами Дарбу ф-ции f , отвеч. разбиению T

Лемма 3.1. Пусть $T, T' -$ разбиения $[a, b]: T \subset T'$, тогда:

$$s_T(f) \leq s_{T'}(f) \leq S_{T'}(f) \leq S_T(f)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=1}^n$. Рассм. сначала случай, когда:

$$T' = T \cup \{c\}, c \notin T$$

Сущ-ет такое k , что:

$$c \in (x_{k-1}, x_k)$$

Положим:

$$m'_k = \inf_{[x_{k-1}, c]} f(x), m''_k = \inf_{[c, x_k]} f(x)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} m''_k, m'_k &\geq m_k \\ \Rightarrow s_{T'}(f) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i + m_k(c - x_{k-1} + x_k - c) = s_T(f) \end{aligned}$$

Аналогично док-ся правое нер-во. \square

Лемма 3.2. Пусть $|f| \leq M$ и T' получена из T добавлением m точек, тогда:

$$\begin{aligned} s'_T f - s_T f &\leq 2Mm |T| \\ S_T f - S_{T'}(f) &\leq 2Mm |T| \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $T' = T \cup \{c\}$, тогда:

$$\begin{aligned} S_{T'}(f) - S_T(f) &= \underbrace{(m'_k - m_k)}_{\leq 2M}(c - x_{k-1}) + \underbrace{(m''_k - m_k)}_{\leq 2M}(x_k - c) \leq \\ &\leq 2M(c - x_{k-1} + x_k - c) \leq 2M \underbrace{|T|}_{\leq |T|} \end{aligned}$$

Общий результат получается индукцией по M . Для верхний сумм — аналогично. \square

Из леммы (3.1) получаем утв-е:

Следствие. Для любых разбиений T_1, T_2 отр-ка $[a, b]$ вып-но:

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

Доказательство. Рассм. $T = T_1 \cup T_2$, тогда по лемме (3.1):

$$s_{T_1}(f) \leq s_T(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_2}(f)$$

\square

Определение 3.2. Величины:

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f &= \sup s_T(f) \\ \overline{\int_a^b} f &= \inf S_T(f) \end{aligned}$$

Наз-ся соотв. верхними и нижними интегралами Дарбу.

Следствие. Переходя в нер-ве следствия 3.1 к \inf по всем разбиениям T_1 при фикс T_2 , и к \sup по всем разбиениям T_2 при фикс. T_1 , получаем:

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq S_T(f)$$

Определение 3.3. Пусть ф-ция f опр-на на отр-ке $[a, b]$, ф-ция f наз-ся интегрируемой (по Риману), если:

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \in \mathbb{R} \text{ — конечны}$$

Число $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ наз-ся определённым интегралом ф-ции f по $[a, b]$.
 Мн-во всех интегрируемых по Риману на $[a, b]$ ф-ций будем обозначать, как \mathcal{R}

Пример. $f = 1$ на $[a, b] \Rightarrow$ для любых разбиений $T = \{x_i\}_{i=0}^n$:

$$\begin{aligned} s_T(f) = S_T(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = b - a \end{aligned}$$

Лемма 3.3. Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f огр-на на $[a, b]$

Доказательство. Пусть f не огр. сверху на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T ф-ция f не огр. сверху на $[x_{i-1}, x_i]$ для некот. i , а значит:

$$M_i = +\infty \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = +\infty$$

Если f не огр. снизу, то $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. □

Замечание. Ограниченность ф-ции является **необходимым, но не достаточным условием интегрируемости.**

Пример. Ф-ция Дирихле:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Для произвольного отр-ка $[a, b]$, имеем:

$$\begin{aligned} s_T(\mathcal{D}) &= 0, S_T(\mathcal{D}) = b - a \\ &\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0, \overline{\int_a^b} f = b - a \end{aligned}$$

Следствие (Аддитивность подотрезков). Пусть $a < c < b$. Ф-ция f интегрируема по Риману на $[a, b] \iff f$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, при этом справ-ва формула:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

Доказательство. Покажем, что:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

Пусть $T_1 = \{x_i\}_{i=0}^k$ — разбиение $[a, c]$, $T_2 = \{x_i\}_{i=k+1}^n$ — разбиение $[c, b]$, тогда $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение $[a, b]$, причём:

$$\begin{aligned} s_T(f) &= \sum_{i=0}^k m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i = \\ &= s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \end{aligned} \quad (2)$$

Сл-но, $\int_a^b f \geq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f)$

Переходя в последнем нер-ве к \sup сначала по всем разбиениям T_2 отр-ка $[c, b]$, затем по всем разбиениям T_1 отр-ка $[a, c]$ получим:

$$\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$$

С другой стороны, из (2) следует:

$$s_T(f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f$$

Рассм. произв. разбиение \tilde{T} отр-ка $[a, b]$ и $T = \tilde{T} \cup \{c\}$:

$$\begin{aligned} s_{\tilde{T}}(f) &\leq s_T(f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \\ \Rightarrow \int_a^b f &\leq \int_a^c f + \int_c^b f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Аналогично для верхнего интеграла Дарбу.

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\int_a^c f} + \overline{\int_c^b f} = \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f(x) dx$$

Сл-но $\int_a^c f = \overline{\int_a^c f}$, $\int_c^b f = \overline{\int_c^b f}$

Пусть $f \in \mathcal{R}$

□

4 Лекция 25

Следствие. Если $f \in R[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, тогда $f \in R[c, d]$

Замечание.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Задача 4.1. Проверить, что аддитивность верна при любом расположении точек a, b, c

Следствие. Пусть $f, g \in R[a, b]$, и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lambda f + \mu g \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b f dx$$

Доказательство.

Замечание. $\lambda \geq 0, A, B \subset \mathbb{R}$:

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

$$\lambda(\sup A + \sup B) = \sup A + \sup B$$

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Пусть $\lambda \geq 0$. Т. к. $\inf_{x \in E} \lambda f(x) = \lambda \inf_{x \in E} f(x)$, для любого $E \subset [a, b]$, то $s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f)$ для произвольного разб-я T отр-ка $[a, b]$. По опр-ю:

$$\underline{\int_a^b \lambda f dx} = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \underline{\int_a^b f dx}$$

Аналогично устанавливается, что верхний интеграл Дарбу обладает таким св-вом (св-вом однородности).

Т. к. $\inf_E -f = -\sup_E f, \forall E \subset [a, b]$, то

$$\underline{\int_a^b (-f)} = -\overline{\int_a^b f}, \overline{\int_a^b (-f)} = -\underline{\int_a^b f}$$

Сл-но, $(-f) \in R[a, b], \int_a^b (-f) = -\int_a^b f, \lambda < 0 \Rightarrow \lambda = (-1) |\lambda|$

Т. к.

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$$

То для произвольного разб-я T отр-ка $[a, b]$ имеем

$$s_T(f + g) \geq s_T(f) + s_T(g)$$

Сл-но, $\underline{\int_a^b (f + g) dx} \geq \underline{\int_a^b f dx} + \underline{\int_a^b g dx}$

Аналогично:

$$\overline{\int_a^b (f + g) dx} \leq \overline{\int_a^b f dx} + \overline{\int_a^b g dx}$$

Вычтем из нер-ва для верхнего интеграла нер-во для нижнего:

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{\int_a^b (f + g) dx} - \underline{\int_a^b (f + g) dx} &\leq \left(\overline{\int_a^b f dx} - \underline{\int_a^b f dx} \right) + \\ &+ \left(\overline{\int_a^b g dx} - \underline{\int_a^b g dx} \right) = 0 \end{aligned}$$

Т. к. $f, g \in R[a, b]$, то $\overline{\int_a^b (f + g) dx} = \underline{\int_a^b (f + g) dx}$, т. е. $f + g \in R[a, b]$ и

$$\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

□

Следствие. Пусть $f, g \in R[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$$

Доказательство. Для произвольного разбиения T имеем $f(x) \leq g(x), \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$

$$s_T(f) \leq s_T(g) \Rightarrow$$

□

4.1 Мн-во интегрируемых ф-ций

Определение 4.1. Пусть f опр-на на $E \subset \mathbb{R}$. **Колебание (осцилляцией)** ф-ции f на E наз-ся

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|$$

Замечание. Перепишем в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \omega(f, E) &= \sup_{x, y \in E} (f(x) - f(y)) = \sup_{x, y \in E} (f(x) + (-f(y))) = \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{y \in E} f(y) = \\ &= \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{y \in E} f(y) \end{aligned}$$

Пусть f опр-на на $[a, b]$ и $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a, b]$, тогда:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n w(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$$

Отметим, что $SZ_T(f)$ конечно $\iff f$ ограничена на $[a, b]$. В этом случае:

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$$

Теорема 4.1.

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists T \text{ — разбиение } [a, b] \hookrightarrow \Omega_T f < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow)

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = I$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю интеграла Дарбу: $\exists T_1, T_2$ — разб-я $[a, b]$:

$$s_{T_1}(f) > I - \frac{\varepsilon}{2}, S_{T_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$T = T_1 \cup T_2 \text{ — разб. } [a, b]$$

Тогда:

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f) \leq S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) < \varepsilon$$

\Leftarrow) Т. к. $\Omega(f)$ конечна, то f огр-на на $[a, b]$, тогда ввиду нер-в:

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq S_T(f) - s_T(f) = \Omega_T(f) < \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ — любое, то $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$, т. е. $f \in R[a, b]$

□

Следствие. Если f непр-на на $[a, b]$, то f интегр. на $[a, b]$

Доказательство. Заф. $\varepsilon > 0$. По т. Кантора, f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому

$$\exists \delta > 0: \forall x', x'' \in [a, b] (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a})$$

Рассм. разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^n: |T| < \delta$

По т. Вей-са $\exists x'_i, x''_i \in [x_{i-1}, x_i]: M_i = f(x'_i), m_i = f(x''_i)$

Т. к. $|x''_i - x'_i| \leq \Delta x_i < \delta$, то $|f(x''_i) - f(x'_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x'_i) - f(x''_i)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

По теореме 4.1, $f \in R[a, b]$

□

Следствие. Если f монот. на $[a, b]$, то f инт. на $[a, b]$

Доказательство. Пусть для опр-ти f нестроого возр-ет на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T имеем:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) |T|$$

Сл-но, $\Omega_T(f) \leq (f(b) - f(a)) |T|, f \in R[a, b]$ □

Теорема 4.2. Пусть f огр. на $[a, b]$ и $f \in R[c, d]$ на любом $[c, d] \subset (a, b)$. Тогда $f \in R[a, b]$

Доказательство. Пусть $|f| \leq M$. Заф. $\varepsilon > 0$.

Положим $c = a + \frac{\varepsilon}{6M}, d = b - \frac{\varepsilon}{6M}$. Положим $f \in R[c, d]$, поэтому по теореме 4.1, $\exists T_0$ — разб. : $\Omega_{T_0}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$T = T_0 \cup \{a, b\} \text{ — разб. } [a, b]$$

Тогда:

$$\Omega_T(f) = \omega(f, [a, c])(c - a) + \Omega_{T_0}(f) + \omega(f, [d, b])(b - d)$$

Т. к. $|f| \leq M, \omega(f, [a, c]) \leq 2M, \omega(f, [d, b]) \leq 2M$, то

$$\begin{aligned} \Omega_T(f) &\leq 2M * \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon \\ &\Rightarrow f \in R[a, b] \end{aligned}$$

□

Следствие. Пусть f огр-на на $[a, b]$ и мн-во точек разрыва f на $[a, b]$ конечно. Тогда f интегрируема на $[a, b]$

Доказательство. Добавим к точкам разрыва a, b :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

По теореме 4.2, ф-ция $f \in R[c, d], \forall [c, d] \subset [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f \in R[x_{i-1}, x_i]$. Благодаря св-ву аддитивности интеграла, получаем, что f интегрируема на $[a, b]$ □

Пример.

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, f(0) = a, a \in \mathbb{R}$$

Тогда $f \in R[-1, 1]$

5 Лекция 26

Теорема 5.1. Пусть $f \in R[a, b]$, $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$ и ф-ция g непрерывна на $[m, M]$. Тогда $g \circ f \in R[a, b]$

Доказательство. Обозначим $h = g \circ f$. По т. Кантора, ф-ция g равн. непр. на $[m, M]$. Заф. $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall y', y'' \in [m, M] (|y' - y''| < \delta \Rightarrow |g(y') - g(y'')| < \varepsilon)$$

Можно считать, что $\delta < \varepsilon$. По теореме 4.2:

$$\exists T = \{x_k\}_{k=1}^n \text{ отр-ка } [a, b]:$$

$$\Omega_T(f) < \delta^2$$

Положим ω_k - колебание h на $[x_{k-1}, x_k]$. Тогда:

$$\Omega_T(h) = \sum_{k=1}^n \omega_k \Delta x_k = \sum_{k \in A} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k \in B} \omega_k \Delta x_k$$

где A — мн-во тех номеров, для кот-ых $\omega(f, [x_{k-1}, x_k]) < \delta$, а B — мн-во остальных номеров. Если $k \in A$, то

$$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]: |f(x') - f(x'')| < \delta,$$

а значит

$$|h(x') - h(x'')| = |g(f(x')) - g(f(x''))| < \varepsilon$$

Поэтому $\omega_k \leq \varepsilon$:

$$\sum_{k \in A} \omega_k \Delta x_k \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b - a)$$

Оценим вторую сумму. Отметим, что:

$$\delta \sum_{k \in B} \Delta x_k \leq \sum_{k \in B} w(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n w(f, [x_{k-1}, x_k]) \Delta x_k = \Omega_T(f) < \delta^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in B} \Delta x_k < \delta < \varepsilon$$

Ф-ция g непр-на на $[m, M]$, а значит, $|g| \leq C$. Тогда $\omega_k \leq 2C$. В итоге:

$$\Omega_T(h) = \sum_{k \in A} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k \in B} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon(b - a + 2C)$$

По теореме 4.1 □

Задача 5.1. Композиция двух ф-ций, интегрируемых по Риману, необязательно интегрируема.

Следствие. Пусть $f, g \in R[a, b]$, тогда:

1) $f \cdot g \in R[a, b]$

2)

$$|f| \in R[a, b] \text{ и } \left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx$$

Доказательство. 1) $t \mapsto t^2$ — непр-на на $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{теор. 5.1}} f^2 \in R[a, b]$

$$f \cdot g = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in R[a, b]$$

2) $t \mapsto |t|$ — непр. на $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{теор. 5.1}} |f| \in R[a, b]$

$$\Rightarrow -|f| \leq f \leq |f| \Rightarrow \text{очев.}$$

□

Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разб. $[a, b]$, $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^n$, где $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пара (T, ξ) наз-ся отмеченным разбиением. Пусть f опр-на на $[a, b]$ и (T, ξ) — отмеч. разб. Тогда:

$$\sigma_T(f, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Наз-ся суммой Римана, отвечающей (T, ξ)

Лемма 5.2. Для всякого разб-я T отр-ка $[a, b]$ выполнено,

$$s_T(f) = \inf_{\xi} \sigma_T(f, \xi)$$

$$S_T(f) = \sup_{\xi} \sigma_T(f, \xi)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$. Т. к. $f(x) \geq m_i, \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, то $\sigma_T(f, \xi) \geq s_T(f)$
 Заф. $\varepsilon > 0$ и выберем $\xi'_i \in [x_{i-1}, x_i]$, так что:

$$\begin{aligned} f(\xi'_i) &< m_i + \frac{\varepsilon}{b-a}, \xi' = \{\xi'_i\} \\ \sigma_T(f, \xi') &= \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \left(m_i + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \\ &= s_T(f) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = s_T(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

Таким образом $s_T(f)$ — инфимум мн-ва $\{\sigma_T(f, \xi) : \{\xi\}\}$ □

Лемма 5.3. Если f огр-на на $[a, b]$, то

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall T \text{ — разб. } [a, b], |T| < \delta$$

$$\int_a^b f - s_T(f) dx < \varepsilon, S_T(f) - \overline{\int_a^b f} dx$$

Доказательство. $M > 0, |f| \leq M$ на $[a, b]$. Заф. $\varepsilon > 0$, по опр-ю $\int_a^b f$ найдётся $T_\varepsilon = \{x_i\}_{i=0}^m$, что:

$$\int_a^b f - s_{T_\varepsilon}(f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Пусть T произв. разб. $[a, b]$ и $R = T \cup T_\varepsilon$. Т. к. R получено из T , добавим $\leq m$, то $S_R(f) - s_T(f) \leq 2Mm|T|$, а значит:

$$\int_a^b f - s_T(f) = \int_a^b f - s_{T_\varepsilon}(f) + S_{T_\varepsilon}(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + S_R(f) - s_T(f) < \frac{\varepsilon}{2} + 2Mm|T|$$

□

Теорема 5.4 (Критерий Дарбу). След. утв. эквив-ны:

- 1) f интегр. на $[a, b]$
- 2) $\exists I \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall (T, \xi) (|T| < \delta \Rightarrow |\sigma_T(f, \xi) - I| < \varepsilon)$

Доказательство $1 \Rightarrow 2)$

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = I$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По лемме ??:

$$\exists \delta > 0, \forall T - \text{разб. } [a, b], |T| < \delta$$

$$\forall \{ \xi \}, I - \varepsilon < s_T(f) \leq \sigma_T(f, \xi) \leq S_T(f) < I + \varepsilon \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma_T(f, \xi) < I + \varepsilon$$

$2 \Rightarrow 1)$ Заф. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0$

$$\forall (T, \xi), |T| < \delta:$$

$$I - \varepsilon < \sigma_T(f, \xi) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \leq s_T(f) \leq S_T(f) \leq I + \varepsilon$$

$$\Rightarrow I - \varepsilon \leq \int_a^b f \leq \overline{\int_a^b f} \leq I + \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$, любое, то $\int_a^b f = \overline{\int_a^b f}$

□

Следствие. Пусть $f \in R[a, b]$ и (T_n, ξ_n) — послед. отл. разб. $[a, b]$, $|T_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда:

$$\sigma_{T_n}(f, \xi_n) \rightarrow \int_a^b f dx$$

Заф. $\varepsilon > 0$. Найдётся $\delta > 0$ из (2), то $\exists N \forall n \geq N (|T_n| < \delta)$, а значит $\left| \sigma_{T_n}(f, \xi_n) - \int_a^b f dx \right| < \varepsilon$

Теорема 5.5 (Формула Ньютона Лейбница). Если $f \in R[a, b]$ и имеет (обобщ.) первообразную F на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$$

6 Лекция 27

6.1 Ф-ла Ньютона Лейбница

Теорема 6.1 (Ф-ла Ньютона-Лейбница). Если $f \in R[a, b]$ и имеет (обобщ.) первообразную на $[a, b]$, то:

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a, b]$. Если F — первообразная, то по т. Лагранжа:

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_i): F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x_i$$

А значит $(m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f, M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f)$

$$m_i \Delta x_i \leq F(x_i) - F(x_{i-1}) \leq M_i \Delta x_i$$

Замечание. Для обобщённой первообразной это нер-во вып-ся по след-ствию т. 10'.

Просуммируем получ. нер-ва, то $i = 1, \dots, n$, получим:

$$s_T(f) \leq F(b) - F(a) \leq S_T(x_i)$$

Перейдём к \sup слева и к \inf справа по всем разбиениям T :

$$\int_a^b f dx \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\int_a^b f dx}$$

Т. к. $f \in R[a, b]$, то " = а значит:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

□

6.2 Интеграл с переменным пределом

Определение 6.1. Пусть I — невырожд. пром-к и $a \in I$. Пусть f опр-на на I и $f \in R[\alpha, \beta], \forall [\alpha, \beta] \subset I$. Тогда:

$$F: I \rightarrow R$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

наз-ся интегралом с переменным верх. пределом.

Теорема 6.2 (Основная теорема интегрального исчисления). Пусть f опр-на на пром. $I, a \in I$, пусть $f \in R[\alpha, \beta], \forall [\alpha, \beta] \subset I$. Тогда F непр-на на I . Кроме того, если f непр. в т. x , то F дифф-ма в т. x и $F'(x) = f(x)$

Доказательство. Пусть $x \in I$. Выберем $\sigma > 0$ так, что:

$$[\alpha, \beta] = [x - \sigma, x + \sigma] \cap I \text{ — невырожд. отрезок}$$

По усл-ию $f \in R[\alpha, \beta]$, в част-ти f огр-на на $[\alpha, \beta], |f| \leq |M|$, на $[\alpha, \beta]$
Тогда для $\forall y \in [\alpha, \beta]$:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)| dt \right| \leq M|y - x|$$

Сл-но, $\lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x) \iff F$ непр-на в произвольной т. $x \iff F$ непр-на на I

Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти f в т. x

$$\exists \delta > 0, \forall t \in \overset{\circ}{B}_\delta(x) \cap I, |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Тогда для любого $y \in \overset{\circ}{B}_\delta(x) \cap I$:

$$\left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t) dt - \frac{1}{y - x} \int_x^y f(x) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y (f(t) - f(x)) dt \right| = \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y |f(t) - f(x)| dt \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \frac{1}{|y - x|} \left| \int_x^y dt \right| = \varepsilon$$

Ч. Т. Д. □

Следствие. Всякая непр-ная на пром. I ϕ -ция имеет первообразную. Всякая монотонная на I ϕ -ция имеет обобщённую первообразную.

Замечание. Если $f \in R[a, b]$ и имеет (обобщ.) первообразную по F на $[a, b]$, то F с точностью до константы совпадает с интегралом с переменным пределом.

6.3 Приёмы интегрирования

Теорема 6.3. Пусть f непр-на на I , $\phi: [\alpha, \beta] \rightarrow I$ дифф-ма на $[\alpha, \beta]$, $\phi \in R[\alpha, \beta]$, тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta (f \circ \phi) \phi'(t) dt$$

Где $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$

Доказательство. Т. к. f непр-на, то $f \circ \phi$ непр-на на $[\alpha, \beta]$, а значит, $(f \circ \phi) \cdot \phi' \in R[\alpha, \beta]$. Пусть F — первообраз. f на I . Т. к.:

$$(F \circ \phi)' = F'(\phi) \cdot \phi' = (f \circ \phi) \phi'$$

на $[\alpha, \beta]$

По ф-ле Н-Л:

$$\int_\alpha^\beta (f \circ \phi) \phi'(t) dt = F \circ \phi|_\alpha^\beta = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

□

Теорема 6.4. Пусть f, g дифф-мы на $[a, b]$ и $f', g' \in R[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

(Ф-ла интегрирования по частям)

Доказательство. Обозначим:

$$h = f'g + fg'$$

Т. к.:

$$h = (fg)'$$

то fg — первообразная h на $[a, b]$. По ф-ле Ньютона-Лейбница получаем:

$$\int_a^b f'g \, dx + \int_a^b fg' \, dx = (fg)|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

□

Пример.

$$Y_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \, dx, m \in \mathbb{N}_0$$

Доказательство. Для $m \geq 2$ по ф-ле инт-я по частям имеем:

$$Y_m = \int_a^b \sin^{m-1} x (-\cos x)' \, dx = \underbrace{-\sin^{m-1} x \cos x}_=0 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \cos^2 x \, dx =$$

$$= (m-1)(Y_{m-2} - Y_m) \Rightarrow Y_m = \frac{m-1}{m} Y_{m-2}$$

$$\Rightarrow Y_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!} \frac{\pi}{2}, m - \text{чёт.} \\ \frac{(m-1)!!}{m!!}, m - \text{нечёт.} \end{cases}$$

□

Пример (Ф-ла Валлиса).

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$$

Доказательство. На $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

Из предыдущего примера:

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

Обозначим $x_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2$

⋮

□

Теорема 6.5. Пусть $f, g \in R[a, b]$, $m \leq f \leq M$ на $[a, b]$, g не меняет знака на $[a, b]$. Тогда $\exists \lambda \in [m, M]$:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \lambda \int_a^b g(x) dx$$

Доказательство. Пусть $g \geq 0$: Тогда:

$$mg \leq fg \leq Mg$$

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Если $\int_a^b g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$

Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0 (> 0)$, то:

$$\lambda = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \in [m; M]$$

Случай $g \leq 0$ св-ся аналогично. □

Задача 6.1. Док-ть, что λ может быть выбрана на $(m; M)$

7 Лекция 28

7.1 Завершаем интегральчики

Замечание. Пусть $f \in R[a, b]$ и $f \geq 0$ на $[a, b]$. Если $\exists x_0 \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$ и f непр-на в x_0 , то $\int_a^b f(x) dx > 0$

Доказательство. По св-ву отделимости $\exists \delta > 0, \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$, $(f(x) > \frac{f(x_0)}{2})$. Тогда $[c, d]$ — невырожд. отрезок и по св-ву аддитивности интеграла:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0$$

□

Теорема 7.1. Пусть f дифф-ма $(n+1)$ раз на (α, β) и $f^{(n+1)} \in R[c, d] \forall [c, d] \subset (\alpha, \beta)$. Тогда для любых $a, x \in (\alpha, \beta)$ выполнено:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Доказательство. ММИ по n .

- База $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

- (Ф-ла Н-Л) Пусть $n > 1$ и предположим, что утв. верно для $n-1$, т. е.:

$$r_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

Проинтегрируем по частям:

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x) &= -\frac{1}{n!} \int_a^x ((x-t)^n)' f^{(n)}(t) dt = -\frac{1}{n!} (x-t)^n f^{(n)} \Big|_{t=a}^{t=x} + \\ &\quad + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Таким образом:

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

□

7.2 Комплексные числа, многочлены и комплексные экспоненты

Определение 7.1. Множеством комплексных чисел \mathbb{C} наз-ся мн-во \mathbb{R}^2 с введёнными на нём операциями:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Отн-но введенных операций \mathbb{C} явл-ся полем с нулём $(0, 0)$ и единицей $(1, 0)$

Замечание. Пару $(a, 0)$ отождествляют с действительным числом a . Такое отождествление согласовано с операциями:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$$

В этом смысле $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Пару $(0, 1)$ называют мнимой единицей и обозначают буквой i . Из определения умножения:

$$i^2 = -1$$

Т. к. $(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$, то комплексное число $z = (a, b)$ представимо в виде:

$$z = a + bi$$

Такое представление наз-ся алгебраической формой записи комплексного числа, при этом:

$a =: \operatorname{Re} z$ — вещественная часть z

$b =: \operatorname{Im} z$ — мнимая часть z

Определение 7.2. Пусть $z = a + bi$. Тогда действительное число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ наз-ся модулем комплексного числа z . $\bar{z} = a - bi$ наз-ся сопряжённым к комплексному числу z

Лемма 7.2. Пусть $z, w \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$1) \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$2) \quad \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$3) \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$4) \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2. \text{ В част-ти:}$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, z \neq 0$$

$$5) \quad |zw| = |z| |w|$$

$$6) \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

Доказательство. Все св-ва, кроме последнего, вытекают из опр-я. Установим св-во 6:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2$$

Положим $t = z\bar{w}$, тогда $\bar{t} = \bar{z}w$, а значит,

$$z\bar{w} + \bar{z}w = 2 \operatorname{Re} t$$

Т. к. $\operatorname{Re} t \leq |t|$, а $|t| = |z| |w|$, то:

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2$$

□

Замечание. По ММИ рав-ва (5) и (6) распространяются на произвольное конечное кол-во сомножителей/слагаемых.

Пусть (r, ϕ) — полярные коор-ты $z = x + iy$. Тогда $r = |z|$, ϕ — аргумент z (определён с точностью до слагаемого $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$). Если $\phi \in (-\pi, \pi]$, то $\phi = \arg z$ — главное значение арг-та.

Т. к. $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$, то z представимо в виде:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

Такое представление наз-ся тригонометрической формой записи комплексного числа z .

Замечание. 1) Установим, когда $r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$

$$\iff r_1 = r_2, \text{ смотрим на модули}$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \phi_2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2)

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1)$$

$$z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$3) \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos \phi - i \sin \phi)}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi))$$

Утверждение 7.1 (Формула Муавра). Если $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \neq 0$ и $n \in \mathbb{Z}$, то $z^n = |z|^n (\cos n\phi + i \sin n\phi)$

Определение 7.3. Комплексное число w наз-ся корнем n -ой степени из комплексного числа z , если $w^n = z$

Лемма 7.3. Если $z \neq 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то суц-ют ровно n корней n -степени из z , они задаются формулой:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos \phi_k + i \sin \phi_k), \phi_k = \frac{\phi + 2\pi k}{n}, k = 0, \dots, n-1$$

Доказательство. а)

$$w_k^n = |z|(\cos n\phi_k + i \sin n\phi_k) = z$$

б) Если $m \geq n$, то $m = nq + r$, где $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

$$w_m = w_{nq+r} = w_r$$

в) $p, r \in \{0, 1, \dots, n-1\}, p \neq r$. Покажем, что $w_p \neq w_r$. От прот., пусть $w_p = w_r \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \phi_p &= \phi_r + 2\pi s, s \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow \frac{\phi + 2\pi p}{n} &= \frac{\phi + 2\pi r}{n} + 2\pi i s \\ \Leftrightarrow p - r &= ns \end{aligned}$$

Т. к. $|p - r| < n \Rightarrow s = 0 \Rightarrow p = r!!!$

□

7.3 Вводим анализ на комплах

Определение 7.4. Пусть $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ и $z_0 \in \mathbb{C}$. Говорят, что $\{z_n\}$ сх-ся к z_0 , если:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z_0| = 0$$

Пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ или $z_n \rightarrow z_0$

Лемма 7.4. Пусть $z_n = x_n + iy_n, x_n = \operatorname{Re} z_n, y_n = \operatorname{Im} z_n, n \in \mathbb{N}_0$

$$z_n \rightarrow z_0 \iff x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$$

Доказательство.

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

(Слева можно поставить $\operatorname{Im} z$) □

8 Лекция 29

8.1 Продолжаем про комплы

Определение 8.1. $\{z_n\}$ наз-ся фундаментальной, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \forall m, n \in \mathbb{N} (|z_n - z_m| < \varepsilon)$$

Следствие. $\{z_n\}$ фундам. $\iff \{x_n\}, \{y_n\}$ — фундам.

Теорема 8.1 (Критерий Коши в \mathbb{C}). $\{z_n\}$ сх-ся $\iff \{z_n\}$ — фундам.

Следствие. Пусть $\{z_n\}$ огр., т. е. $\exists C > 0 \forall n (|z_n| \leq C)$. Тогда $\{z_n\}$ имеет сх-ся подп-ть. $\{z_{n_k}\}$

Доказательство. $\{x_n\}$ — огр. $\Rightarrow \exists x_{n_k} \rightarrow x_0$
 $\{y_{n_k}\}$ — огр. $\Rightarrow \exists y_{n_{k_i}} \rightarrow y_0 \Rightarrow x_{n_{k_i}} \Rightarrow x_0$

$$z_0 = x_0 + iy_0 \Rightarrow z_{n_{k_i}} \rightarrow z_0$$

□

Определение 8.2. $f : E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ непр-на в точке $z_0 \iff :$

$$\forall \{z_n\} \subset E (z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow f(z_0))$$

Пример.

$$f : \{ |z| \leq R \} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \exists z_0, |z_0| \leq R \Rightarrow \exists z_0, |z_0| \leq R :$$

$$\inf_{|z| \leq R} f(z) = f(z_0)$$

Доказательство. $m = \inf_{|z| \in R} f(z)$. Рассм. $r_n \rightarrow m, r_n > m$.

$$\exists z_n, |z_n| \leq R, m \leq f(z_n) < r_n$$

В част-ти, $f(z_n) \rightarrow m$. $\{z_n\}$ огр. $\Rightarrow \exists z_{n_k} \rightarrow z_0 \Rightarrow |z_0| \leq R$. В част-ти, $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$. В силу непр-ти f в точке z_0 .

$$f(z_{n_k}) \rightarrow f(z_0), f(z_{n_k}) \rightarrow m \Rightarrow f(z_0) = m$$

□

Определение 8.3. Многочлен — это (понятно что)

Теорема 8.2 (Основная теорема алгебры). *Всякий многочлен положительной степени имеет корень.*

Доказательство. Пусть $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \deg P(z) = n$

I. Покажем, что $\exists z_0 \in \mathbb{C}, \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$

Пусть $|z| \geq 1$. Тогда:

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k \leq |z|^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{=A}$$

Хотим:

$$A |z|^{n-1} \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n$$

$$|z| \geq \frac{2A}{|a_n|}$$

$$|P(z)| = |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| = |a_n| |z|^n - \frac{1}{2} |a_n| |z|^n = \frac{1}{2} |a_n| |z|^n$$

$$\frac{1}{2} |a_n| |z|^n \geq |a_0| \iff |z| \geq \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}}$$

Положим $R = \max \left\{ 1, \frac{2A}{|a_n|}, \sqrt[n]{\frac{2|a_0|}{|a_n|}} \right\}$

Тогда при $|z| \geq R$ выполнено:

$$|P(z)| \geq |P_0|$$

так что $\inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|$

Согласно примерам:

$$\exists z_0, |z_0| \leq R, \inf_{\mathbb{C}} |P(z)| = |P(z_0)|$$

II. Докажем, что если $P(z_0) \neq 0$, то $\exists z_k \in \mathbb{C}$, т. ч. $|P(z_k)| < |P(z_0)|$.

Рассм. $Q(z) = \frac{P(z+z_0)}{P(z_0)}$, $\deg Q = \deg P$

Обозначим через α_k наим. коэф. Q , отлич от 0, $k \geq 1$. Тогда $Q(z) = 1 + \alpha_k z^k + \dots + \alpha_n z^n$. Рассм.:

$$z_1 \in \mathbb{C}, \alpha_k z_1^k = -1, \text{ и пусть } t \in (0, 1)$$

$$Q(tz_1) = 1 - t^k + t^{k+1} \phi(t), \text{ где } \phi(t) \text{ — мн-н степени } n - k - 1$$

C — наиб. из модулей коэф-тов $\phi(t)$, тогда $|\phi(t)| \leq C(n - k)$

$$|Q(tz_1)| \leq 1 - t^k + t^{k+1} |\phi(t)| \leq 1 - t^k (1 - tC(n - k))$$

При $t \in \left(0, \frac{1}{C(n-k)}\right)$, $|Q(tz_1)| < 1$

□

8.2 Комплексная экспонента e^z

Утверждение 8.1. Последовательность $a_n(z)$ сх-ся:

$$a_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Доказательство. По формуле бинома:

$$a_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{z^k}{n^k}, \text{ где}$$

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}, n > m$. Т. к. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ — строго возрастает, то:

$$\frac{C_n^k}{n^k} > \frac{C_m^k}{m^k}, k = 1, \dots, m$$

Поэтому по нер-ву:

$$\begin{aligned} |a_n(z) - a_m(z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) + \sum_{k=m+1}^n \frac{C_n^k}{n^k} z^k \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{C_n^k}{n^k} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) |z|^k + \sum_{k=m+1}^n \frac{C_n^k}{n^k} |z|^k = a_n(|z|) - a_m(|z|) \end{aligned}$$

Т. к. $\{a_n(|z|)\}$, то она фундам., а значит, $\{a_n(z)\}$ фундам. (в \mathbb{C}). Сл-но, $\{a_n(z)\}$ — сх-ся. \square

Определение 8.4. Функция $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $z \in \mathbb{C}$ наз-ся комплексной экспонентой.

Утверждение 8.2.

$$\forall z, w \in \mathbb{C}: e^{z+w} = e^z e^w$$

Доказательство. Такое же, как и в случае \mathbb{R} \square

Теорема 8.3.

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}, \forall z \in \mathbb{C}$$