Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

15 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 3

1.1 Мощности мн-в

1.1.1 Парадоксы

Парадокс Галилея:

Все нат. числа	$\not\supseteq$	полные квадаты
n	$\longleftrightarrow$	n^2

Гранд-отель Гильберта:

1	2	3	4	5	6	7	...

1) Все места заняты, нужно подселить постояльца:

   Решение.

Новый	$\rightarrow$	0
i	$\rightarrow$	$(i+1)$

2) Есть своб. места, хотим занять все комнаты имеющимися постояльцами:

   Решение. Если мн-во занятых комнат бесконечно, то:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	...

   (1 - занято, 0 - свободно) $\Rightarrow$

   Переносим 1 в самый ранний 0 для всех 1

3) 2 гранд-отеля, полностью заняты. Один закрылся, как всех заселить?

   Решение.

0	1	2	3	4	5	...

a	b	c	d	e	f	...

   $\Rightarrow$

0	a	1	b	2	c	...

4) Гранд-авеню, гранд-отелей. Цель: переселить всех в один отель:

Решение.

Отель 0: $\mapsto$ неч. номера
Отель 1: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 2, \not\vdots\, 4$
Отель 2: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 4, \not\vdots\, 8$
Отель k: $\mapsto$ номера, кот $\vdots\, 2^k, \not\vdots\, 2^{k+1}$

1.1.2 Счётных мн-в

Определение 1.1. A и B равномощны ($A \cong B$), если $\exists$ биекция $f : A \to B$

Определение 1.2. A наз-ся счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

Утверждение 1.1. 1) A счётно $\Rightarrow A \cup x$ счётно

2) Любое подмн-во счётного мн-ва конечно или счётно

3) A, B счётны $\Rightarrow A \cup B$ счётно

4) $A_0, A_1, \ldots$ - сч. $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ - сч.
или: A, B - сч. $\Rightarrow A \times B$ - сч.

Доказательство. 1) $f : A \to \mathbb{N}$ - биекция

$$g : A \cup \{ x \} \to \mathbb{N} :$$

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ g(y) = f(y) + 1, y \in A \end{cases}$$

2)

$$f : A \to \mathbb{N}, \text{- биекция}; B \subset A$$
$$g : B \to \mathbb{N}; g(x) = \#\{ y \in B \mid f(y) < f(x) \}$$

3)

$$f : A \to \mathbb{N}; g : B \to \mathbb{N}$$
$$h : A \cup B \to \mathbb{N}; h(x) = \begin{cases} 2f(x), x \in A \\ 2g(x) + 1, x \in B \end{cases}$$

4)

$$f : A \to \mathbb{N};$$
$$g : B \to \mathbb{N};$$
$$h : A \times B \to \mathbb{N}; h(x,y) = 2^{f(x)} * (2g(y)+1) - 1$$

□

1.1.3 Отношение равномощности

Утверждение 1.2. Общие св-ва равномощности:

1) Рефлексивность: $A \cong A$

   (т. к. id_A - биекция)

2) Симметричность: $A \cong B \iff B \cong A$

   (f - биекция $\iff f^{-1}$ - биекция)

3) Транзитивность: $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

   (т. к. композиция биекций - биекция)

1.1.4 Сравнимость по мощности

Обозначение. • Нестрогая: $A \lesseqqgtr B$, если $\exists B' \subset B, A \cong B'$

   (A не более мозно чем B)

• Строгая: $A \gtrsim B$, если $A \lesseqqgtr B, A \ncong B$

   (A менее мощно чем B)

Утверждение 1.3. Св-ва сравнимости по мощ-ти:

1) Рефлексивность: $A \lesseqqgtr A$; Антирефлексивность: $A \not\gtrsim A$

2) Транзитивность: $A \lesseqqgtr B, B \lesseqqgtr C \Rightarrow A \lesseqqgtr C$

   Для строгой сравнимости:

   Доказательство.

$$A \gtrsim B, B \gtrsim C \Rightarrow A \gtrsim C$$
$$A \lesseqqgtr C \text{ - из предыдущего}$$

   Нужно: $A \cong C$ □

Теорема 1.1 (Теорема Кантора-Бернштейна).

$$A \gtreqqless B, B \gtreqqless A \Rightarrow A \cong B$$

Доказательство. 1) Пусть $f : A_0 \to B_1 \subset B_0$ - биекция
$g : B_0 \to A_1 \subset A_0$ - биекция

2) $B_{i+1} = f\left(A_i\right); A_{i+1} = g\left(B_i\right)$

3) $C_i = A_i \backslash A_{i+1}; D_i = B_i \backslash B_{i+1}$

4) $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i; D = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Утверждение 1.4. $C_i \cong D_{i+1}$, т. е. $f : C_i \to D_{i+1}$ - биекция

Почему? Потому что:

$$C_i = A_i \backslash A_{i+1}; f\left(A_i\right) = B_{i+1}, f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+2}$$

$f\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) =$ (т. к. f - биекция) $f\left(A_i\right) \backslash f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+1} \backslash B_{i+2} = D_{i+1} = f\left(C_i\right)$

Утверждение 1.5.

$$D_i \cong C_{i+1} \text{ (симметричо)}$$

Следствие.

$$C_0 \cong C_2 \cong C_4 \cong C_6 \cong \dots$$

$$C_0 \cong D_1 \cong D_3 \cong D_5 \dots$$

Утверждение 1.6.

$$C \cong D$$

Доказательство. f - биекция
Пусть $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \forall i, x \in A_i \Rightarrow \forall i, f(x) \in B_{i+1} \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$
Т. е. $f(C) \subset D$:

Инъекция - наследуется

Сюрьекция: $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \Rightarrow \forall i, y \in B_{i+1} \Rightarrow \forall i, f^{-1}(y) \in A_i \Rightarrow f^{-1}(y) \in C$ □

$$A = C \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$

$$B = D \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \dots$$

При этом:

$$\begin{cases} C \cong D \\ \begin{cases} C_0 \cong D_1 \\ C_1 \cong D_0 \end{cases} \\ \begin{cases} C_2 \cong D_3 \\ C_3 \cong D_2 \end{cases} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow A \cong B$$

□

2 Лекция 4

Обозначение. $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ - это

1) Мн-во подмножеств $A \subset \mathbb{N}$
2) Мн-во ф-ций $f : \mathbb{N} \to \{ 0, 1 \}$
3) Мн-во $A \leftrightarrow f_A : N \to \{ 0, 1 \}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Замечание. Бесконечная двоичная дробь:

$$\underline{a_1 a_2 \dots a_n} 01111 \dots = \underline{a_1 a_2 \dots a_n} 10000 \dots$$

Задача 2.1. Показать:

$$[0, 1] \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}} \setminus \{ \text{посл-ти с 1 в периоде} \}$$

Доказательство. Конструктивно: Picture

□

Теорема 2.1. A - беск., B - сч. $\Rightarrow A \cup B \cong A$

Следствие.

$$[0, 1] \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$$

Лемма 2.2. В любом бесконечном мн-ве есть счётное подмн-во

Доказательство. A - беск. мн-во
$a_0 \in A, a_1 \in A \setminus \{ a_0 \}, \dots$
$a_{n+1} \in A \setminus \{ a_0, a_1, \dots, a_n \}$ A - беск., сл-но на каждом шаге возможен выбор нового эл-та $\square$

Теперь докажем теорему:

Доказательство. A - беск. $\Rightarrow C \subset A$, C - счётно

$$\begin{cases} C \cong \mathbb{N} \\ B \cong \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow C \cup B \cong \mathbb{N} \cong C$$

$$A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup B \cong (A \setminus C) \cup C \cong A$$

$\square$

Теорема 2.3 (Кантора). $[0, 1]$ - несчётен (или: $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ несчётно)

Доказательство. Пусть $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ - счётно, тогда α_i - i-ая бинарная последовательность:

α_0	$\underline{0}0000\dots$
α_1	$1\underline{1}111\dots$
α_2	$01\underline{0}11\dots$
$\vdots$	$\vdots$

Воспользуемся диагональным методом Кантора:. Возьмём диагональную п-ть:

$$d_i = \alpha_i^i, d = 010\dots$$

$$d_i' = 1 - \alpha_i^i, d' = 101\dots$$

Если $d' = (\alpha_k)^k$, то $(d_k)^k = ((d_k)^k)' = 1 - (\alpha_k)^k$, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие. $\square$

Теорема 2.4 (Общая теорема Кантора). $\forall A : A \gtrsim 2^A$

Доказательство. Пусть $\phi : A \to 2^A$ - биекция
$\phi(x)$ - подмн-во A
Корректен ли вопрос о том, что $x \in \phi(x)$?
Расм. $M = \{ x \mid x \notin \phi(x) \}$
Т. к. ϕ - биекция $\Rightarrow$ сущ. $m = \phi^{-1}(M)$. Т. е. $\phi(m) = M$
Рассм. 2 случая:

1)

$$m \in M \Rightarrow m \in \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{ ложно при } x = m \Rightarrow m \notin M$$

2)

$$m \notin M \Rightarrow m \notin \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) \text{ - истино, при } x = m \Rightarrow m \in M$$

Получаем противоречие. □

Определение 2.1. A континуально, если $A \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$

Теорема 2.5. A - континуально $\Rightarrow$ A^2 - континуально

Пример.

$$[0, 1] \cong [0, 1]^2$$

Следствие.

$$(\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}})^2 = \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha, \beta) \leftrightarrow \gamma = \alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \dots$$

$$[0, 1] \cong \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ - континуально}$$

По индукции:

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}$$

Верно и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$

Доказательство. Док-во конструктивно ИЛИ:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$$

□

2.1 Бинарные отношения

Определение 2.2. Отношение - любое $R \in A \times A$

Обозначение. Отношение R между a и b:

1) $(a, b) = R$

2) $R(a, b)$

3) aRb

Различные виды отношений:

1) Рефлексивные: $\forall a\colon\ aRa$

   Пример. $=, \leq, \subset, \cong, \sqsubset$

2) Антирефлексивные: $\forall a\colon\ \neg(aRa)$

   Пример. $<, \in, ||$

3) Симметричные: $\forall a, \forall b (aRb \to bRa)$

   Пример. $\cong, ||, =, \equiv_k$

4) Антисимметричные: $\forall a, \forall b ((aRb \land bRa) \to a = b)$

   Пример. $\leq, <, >, \sqsubset, \sqsubset, \subset$

5) Транзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \land bRc) \to aRc)$$

   Пример. $=, \cong, \equiv_k, \leq, \subset, \sqsubset$

6) Антитранзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \land bRc) \to \neg(aRc))$$

$$|a - b| = 1 \text{ (На } \mathbb{R})$$

7) Полнота: $\forall a, b(aRb \lor bRa)$

   Пример. $\leq, \lesseqqgtr$ (теор. Цермело)

Наборы св-в:

1) Отнош. эквивалентности: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Пример. $\equiv_k, (||$ или $=), \sim$ (подобие $\triangle$-ов)

Общий вид: $f : A \to B, x \sim y$, если $f(x) = f(y)$

2) Отношение нестрогого частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность, транзитивность:

   Пример. $\subset, \leq, \vdots, \sqsubset, \ldots$

3) Отнош. строгого част. п-ка: антирефл., антисимметричность, транзитивность

4) Отнош. лин. порядка: нестрогий частичный порядок + полнота

5) Препорядки: рефлексивность, транзитивность

6) Полные предпорядки: полнота + транзитивность

3 Лекция 5

3.1 Отношения эквивалентности ($\sim$)

Определение 3.1. Отношение эквив. - отношение с св-вами:

1) Рефлексивность: $x \sim x$

2) Симметричность: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$

3) Транзит.: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Определение 3.2. Класс эквив.: $K_x = \{ y \mid y \sim x \}$

Теорема 3.1 (О разбиении на классы эквив.). Если задано отн. экв. $\sim$ на A, то A можно представить как:

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

т. ч.:

1) Каждая A_i - K_x для некот. x

2) $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

3) $y, z \in A_i \Rightarrow y \sim z$

4) $y \in A_i, z \in A_j, i \neq j \Rightarrow y \nsim z$

Доказательство. Рассм. всевозм. мн-ва, явл-ся классами эквив-ти. Докажем выполн. св-в для них. Для этого докажем леммы I-IV

Лемма 3.2 (I). $x \in K_x$

Доказательство.

$$x \sim x \Rightarrow x \in \{\, y \mid y \sim x \,\} \Rightarrow x \in K_x$$

$\square$

Следствие.

$$\bigsqcup_{x \in A} K_x = A$$

Лемма 3.3 (II).

$$y \in K_x, z \in K_x \Rightarrow y \sim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow y \sim x \\ z \in K_x \Rightarrow x \sim z \text{ - симметричность} \end{cases} \Rightarrow y \sim z \text{ - транзитивность}$$

$\square$

Лемма 3.4 (III).

$$K_x \neq K_t \Rightarrow K_x \cap K_t = \emptyset$$

Доказательство. Докажем контрапозицию:

$$K_x \cap K_t \ni w \Rightarrow K_x = K_t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ w \sim t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w \sim x \\ t \sim w \end{cases} \Rightarrow t \sim x$$

Если $y \in K_t \Rightarrow y \sim t \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \in K_x$, т. е. $K_t \subset K_x$. Аналогично, получаем $K_x \subset K_t \Rightarrow K_x = K_t$ $\square$

Лемма 3.5 (IV).

$$K_x \neq K_t, y \in K_x, z \in K_t \Rightarrow y \nsim z$$

Доказательство.

$$\begin{cases} y \in K_x \Rightarrow x \sim y \\ y \in K_t \Rightarrow z \sim t \end{cases}$$

Из $y \sim z$, то, по транзитивности, $x \sim t \Rightarrow K_x = K_t$!!!. Т. к. это противоречие, то $y \nsim z$ □

□

Определение 3.3. Фактормножество $A/_{\sim}$ - мн-во классов эквив.

Теорема 3.6. Если $\sim$ - отн. эквив. на A, то сущ. B и $f : A \to B$, т. ч.:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Доказательство.

$$B = A/_{\sim}$$

$$f(x) = K_x$$

□

3.2 Отношение порядка ($\leq$)

Определение 3.4. Отношение порядка - отношение со св-вами:

- Нестрогий порядок $\leq$:
  1) Рефлекивность: $x \leq x$
  2) Антисимм.: $x \leq y \land y \leq x \Rightarrow x = y$
  3) Транзтивность: $x \leq y \land y \leq z \to x \leq z$
  4) (Для линейных порядков) Полнота: $(x \leq y \lor y \leq x)$
- Строгий порядок $<$:
  1) Антирефлексивность: $\neg(x < x)$
  2) Антисимметричность: $\neg(x < y \land y < x)$

3) Транзитивность: $(x < y \land y < z) \to x < z$

4) (Для линейных порядков) Трихотомичность:

$$x < y \lor y < x \lor x = y$$

Пример. 1) Стандартный числовой порядок в $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

2) $\vdots$ на $\mathbb{N}$ (в том числе включая 0)

$$x \vdots y \iff \exists z : x = y \cdot z$$

3) $\subset$ на 2^A

4) $\sqsubset, \sqsupset, (substring)$ на $\{ 0, 1 \}^n$

5) Асимптот. порядок на ф-циях $f < g$, если $\exists N \forall n > N : f(n) < g(n)$

6) Пор-ки на $\mathbb{R}^2$:

a) Лексикографический:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \iff \left[\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1 = x_2 \land y_1 \le y_2 \end{array}\right.$$

b) Покоординатный:

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \iff \begin{cases} x_1 \le x_2 \\ y_1 \le y_2 \end{cases}$$

Диаграмма Хассе: граф на пл-ти, т. ч. вершины, соед. рёрбрами, не находятся на одном уровне (Picture)
Рассм.$:$ $(\{ 0, 1, \dots, 9 \}, \vdots)$
$x \le y \iff$ Есть восходящий путь из x в y

Определение 3.5. Наибольший эл-т - Больше всех

$$x \text{ - наиб.} \iff \forall y : y \le x$$

Определение 3.6. Макс. эл-т - больше него нет

$$x \text{ - макс.} \iff \neg \exists y : y > x$$

Для лин. порядка - это одно и то же

Для част. порядка - может быть разное, т. е.:

$$\forall y(y \leq x \vee y \text{ не сравним с } x)$$

- макс. эл-т для част. порядка.

Наименьший и минимальный - аналогично.

В конечном непустом мн-ве всегда есть макс. и мин.

В конечном мн-ве единственный макс. является наибольшим.

Для беск. мн-в всё, что выше, конечно неверно. (picture)

Определение 3.7. Упорядоченное мн-во - пара из мн-ва и порядка на нём.

Обозначение. Пишут так: $(A, \leq_A)$, сокращённо УМ

Операции над УМ:

1) Сложение:

$$(A, \leq_A) + (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \sqcup B$$

$$x \leq y \iff \left[\begin{array}{l} x, y \in A: \ x \leq_A y \\ x, y \in B: \ x \leq_B y \\ x \in A, y \in B \end{array}\right.$$

При этом оно:

- Ассоциативно: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Некоммутативно: $A + B \neq B + A$

2) Умножение:

$$(A, \leq_A) \cdot (B, \leq_B) = (C, \leq_C)$$

$$C = A \times B$$

$$(a_1, b_1) \leq_C (a_2, b_2) \iff \left[\begin{array}{l} b_1 <_B b_2 \\ b_1 = b_2, a_1 \leq_A a_2 \end{array}\right.$$

4 Лекция 6

4.1 Плотный порядок. Изоморфизм

Отношение частичного порядка:

1) $x \leq x$ - рефлексивность
2) $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ - антисимметричность
3) $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ - транзитивность

Отношение линейного порядка:

4) $\forall x, y \colon x \leq y \vee y \leq x$

Упор. мн-во $(A, \leq_A)$
Наибольший эл-т - $M \colon \forall x, x \leq M$.
Наименьший эл-т - $m \colon \forall x, x \geq m$
Максимальный эл-т - $M \colon \neg\exists x \colon x > M$ (или $\forall x \colon x \leq M \vee (x$ не сравним с $M))$
Минимальный эл-т $m \colon \neg\exists x \colon x < m$

Определение 4.1. Плотный порядок:

$$\forall x, y (x < y \to \exists z \colon x < z < y)$$

Утверждение 4.1. Плотный порядок - либо тривиальный (т. е. разл-ные эл-ты не сравнимы), либо опр. на бесконечном мн-ве.

Определение 4.2. Изоморфизм упор. мн-в $(A, \leq_A)$ и $(B, \leq_B)$ - это такая биекция $f \colon A \to B$, что:

$$\forall x, y \colon (x \leq_A y \iff f(x) \leq_B f(y))$$

Пример.

$$(\{\, n \mid 30 \vdots n \,\}, \vdots) \text{ и } (2^{\{\, a,b,c \,\}}, \subset)$$

Пример.

$$(\mathbb{Q} \cap (0,1), \leq) \text{ и } (\mathbb{Q} \cap (0, +\infty), \leq)$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x} - 1$$

Теорема 4.1. Любые два счётных плотно, линейно упоряд. мн-ва без наиб. и наим. эл-тов изоморфны:

Пример.

$$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_2 = \{ \frac{a}{2^n} \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}, \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q} \},$$

$\mathbb{A}$ - корни мн-ов с целыми коэфф-ми

Доказательство.

$$\boldsymbol{A} = \{ a_0, a_1, \dots \}, \boldsymbol{B} = \{ b_0, b_1, \dots \}$$

Построим инъекцию f:

1) Построим $a_0 \to b_0$

2) Б. О. О. $a_1 > a_0$. Т. к. в $\boldsymbol{B}$ нет наибольшего, то есть $b_i : b_i > b_0$. Тогда добавим $a_1 \to b_i$

3) Пусть для $a_k, k \leq n-1$ соединения проведены. Проведём для a_n. Рассм. три случая:

   I) $a_n < a_k, \forall k \leq n{-}1$. Тогда отобразим его в $b_p : b_p < b_i, \forall i$ из использованных ранее.

   II) $a_n > a_k, \forall k \leq n-1$. Тогда отобразим его в $b_p : b_p > b_i, \forall i$ из использованных ранее.

   III) Иначе у a_n есть использованные ранее соседи a_i и a_j. Т. к. $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ - лин. упор.: $\exists p : f(a_i) < b_p < f(a_j)$. Добавим $a_n \to b_p$

Как добиться, чтобы постр. ф-ция была сюрьекцией? Варианты:

1) Каждый раз брать эл-т $\boldsymbol{B}$ с наим номером из подходящих.

2) Действовать по очереди: сначала брать эл-т $\boldsymbol{A}$ с наим. номером, кот. ещё не рассмотрен, и отправлять в $\boldsymbol{B}$. Затем эл-т $\boldsymbol{B}$ с наим. номером, кот. ещё не рассм, и отправлять в $\boldsymbol{A}$. И т. д.

□

4.2 Предпорядки

Определение 4.3. Предпорядок (Предпочтения) - отношение, обладающее рефлексивностью и транзитивностью.

Определение 4.4. Полный предпорядок (Рациональные предпочтения) - предпорядок + любые два сравнимы. (или полн. + транз.)

Обозначение.

$$a \gtrsim b \text{ - предпор.}$$

$$a \sim b \iff (a \gtrsim b \wedge b \gtrsim) \text{ - отношение безразличия}$$

$$a \succ \iff (a \succ b \wedge \neg(b \succ a)) \text{ - строгий предпорядок}$$

Нетранзитивно: $a \succ b \succ c \succ a$

Теорема 4.2 (Структурная теорема о предпорядке на мн-ве A).

1) Отношение безразличия - это отношение эквив-ти на A
2) На эл-ах $A/_\sim$ можно ввести отношение
   $S \leq T$, если $\exists x \in S, y \in T: \ x \lesssim y$
   Это отнош. будет част. пор. на $A/_\sim$
3) $\leq$ лин. пор. $\iff$ $\lesssim$ - полон.

Доказательство.

- 1) Рефл.: $a \lesssim a \Rightarrow (a \lesssim a \wedge a \lesssim a) \Rightarrow a \sim a$

  2) Симм.:

  $$a \sim b \iff (a \lesssim b \wedge b \lesssim a) \iff (b \lesssim a \wedge a \lesssim b) \iff b \sim a$$

  3) Транзитивность:

  $$\begin{cases} a \sim b \\ b \sim c \end{cases} \iff \begin{cases} a \lesssim b \wedge b \lesssim a \\ b \lesssim c \wedge c \lesssim b \end{cases} \iff \begin{cases} a \lesssim c \\ c \lesssim a \end{cases} \Rightarrow a \sim c$$

- 1) Рефл $S \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in S \Rightarrow$ т. к. $x \lesssim x \Rightarrow S \leq S$

2) Транз. $R \le S \le T$:

$$\begin{cases} x \in R \\ y, z \in S \\ t \in T \\ x \precsim y \\ z \precsim t \end{cases} \Rightarrow y \precsim z \Rightarrow x \precsim t \Rightarrow R \le T$$

3) Антисимм.:

$$S \le T, T \le S$$

$$\begin{cases} x \in S, y \in T \Rightarrow x \precsim y \\ z \in T, t \in S \Rightarrow z \precsim t \\ x \sim t \\ y \sim z \end{cases} \Rightarrow y \sim z \precsim t \sim x \Rightarrow y \precsim x \Rightarrow x \sim y \Rightarrow S = T$$

- $\Leftarrow$) S, T - классы

  $$x \in S, y \in T:$$

  Если $x \precsim y \Rightarrow S \le T$
  Если $y \precsim x \Rightarrow T \le S$

  $\Rightarrow$) Даны x, y:

  $$x \in S, y \in T, \text{ б. о. о. } S \le T$$

  $$\Rightarrow \exists z \in S, t \in T: \ z \precsim t$$

  $$x \sim z \precsim t \sim y \Rightarrow x \precsim y$$

  S - класс эквив., T - класс эквив.

□

4.2.1 Агрегирование предпорядков

A - мн-во, $\precsim_1, \dots, \precsim_n$ - препорядки $\Rightarrow$
$F : (\precsim_1, \precsim_2, \dots, \precsim_n) \mapsto \precsim$

Определение 4.5. Агрегирование по больш-ву:

$$x \trianglelefteq y, \text{ если } \#\{\, i \mid x \precsim_i y \,\} \le \#\{\, i \mid y \precsim_i x \,\}$$

Парадокс Кондорсе:

$$\begin{cases} a \lesssim_1 b \lesssim_1 c \\ b \lesssim_2 c \lesssim_2 a \\ c \lesssim_3 a \lesssim_3 b \end{cases} \Rightarrow a \trianglelefteq b \trianglelefteq c \trianglelefteq a$$

Теорема 4.3. Любое полное отношение может быть реализовано как результат агрегирование предпорядков

Доказательство. Эл-ты $x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$. Также есть два предпорядка $\prec$ и $\prec'$, т. ч.:

$$x \prec y \prec a_1 \prec \dots \prec a_{n-2}$$

$$a_{n-2} \prec' a_{n-3} \dots a_2 \prec a_1 \prec x \prec y$$

$\square$