Введение в матан.
Лекция 1

Сергей Григорян

10 сентября 2024 г.

1 Инфа

Лектор: Редкозубов Вадим Витальевич

2 Учебники

- Зорич. В. А. "Мат. анализ";
- Виноградов О. Л. "Мат. анализ".

3 П. 1. Действительные числа

3.1 Вспомогательные конструкции

$x \in \{a, b\} \Rightarrow x = a$ или $x = b$ - неуп. пара
$(a, b) -$ уп. пара
$(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$
$A, B -$ мн-ва, $A \cdot B = \{(a, b) \colon a \in A \vee b \in B\}$

Определение 3.1. Пусть X, Y - мн-ва. Ф-цией $f \colon X \to Y$ наз-ся ф-ла $P(x, y)$, т. ч. $\forall x \in X$ сущ-ет утв. $y \in Y$,что $P(x, y)$ - истина. Пишут $y = f(x)$ или $f \colon x \Rightarrow y$.

Определение 3.2. Ф-ции $f, g \colon X \to Y$ называются равными, если $\forall x \in X \colon (f(x) = g(x))$. Пишут $f = g$.

Обозначение. $f : X \to Y$, X - *область опред. ф-ции*

1. $A \subset X$

   $f(A) = \{f(x) \colon x \in A\}$, *образ* A.

   $f(X)$ - *мн-во значений* f.

2. $B \subset Y$

   $f^{-1}(B) = \{x \in X \colon f(x) \in B\}$ - *прообраз* B.

3. $f : X \to Y, g : Z \to X \Rightarrow f \circ g : Z \to Y, f \circ g(z) = f(g(z))$ - *композиция ф-ций* f *и* g.

Утверждение 3.1. $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$

Определение 3.3. Ф-ция $f : X \to Y$ наз-ся **инъекцией**, если $\forall x_1, x_2 \in X(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

сюрьекцией, если $f(X) = Y$

биекцкией $=$ **сюрьекцией** $+$ **инъекция**

Пример. *1.* $f : \{0, 1, 2\} \to \{1, 2\}$

$f(0) = 1, f(1) = f(2) = 2$

*Это **сюрьекция***

2. $f : \{1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$

$f(1) = 2, f(2) = 1$

*Это **инъекция***

Пример. $id : X \to X, \forall x \in X(id(x) = x)$ *- это **тождественная ф-ция**.*

Пример. *Пусть* $f : X \to Y$ *- биекция*

$\Rightarrow y = f(x)$ *- имеет **1 решение**. Тогда:*

$f^{-1} : Y \to X, x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$ *- обратная к* f *ф-ция.*

$f^{-1} \circ f = id_X, f \circ f^{-1} = id_Y$

Задача 3.1.

1. Композиция инъекций (сюрьекций, биекция) яв-ся инъекцией (сюрьекцией, биекцией).
2. Обр-я ф-ция к биек. $f : X \to Y$ - явл. биекцией.

Определение 3.4. Пусть $A, \Lambda \neq \emptyset$

Говорят, что A - **семейство, индексированное эл-ми** Λ, если $\exists \phi : \Lambda \to A$ - сюрьекция.

Пишут $A = \{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, где $a_\lambda = \phi(\lambda)$

$\mathscr{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \colon \exists \lambda \in \Lambda(x \in A_\Lambda)\}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \colon \forall \lambda \in \Lambda(x \in A_\lambda)\}$$

Пример.

$A_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon n > 1 \text{ и } n \neq 2m\colon \forall m > 1\}$
$A_2 = \{n \in A_1\colon n \neq 3m\colon \forall m > 1\}$
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n -$ *мн-во простых чисел.*

Теорема 3.1 (Закон Де Моргана)**.** *Для любого мн-ва E верно:*

1.
$$E \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (E\setminus A_\lambda)$$

2.
$$E \setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E\setminus A_\lambda)$$

Доказательство.

1.

$$x \in E\setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge (\forall\lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda))$$

$$\iff \forall\lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \forall\lambda \in \Lambda (x \in E\setminus A_\lambda) \iff x \in \bigcap (E\setminus A_\lambda)$$

2.

$$x \in E\setminus \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge x \notin \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \iff x \in E \wedge \exists\lambda \in \Lambda (x \notin A_\lambda).$$

$$\iff \exists\lambda \in \Lambda (x \in E \wedge x \notin A_\lambda) \iff \exists\lambda \in \Lambda (x \in E\setminus A_\lambda) \iff \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E\setminus A_\lambda).$$

□

3.2 Аксиомат. опр-е мн-ва действ. чисел

На мн-ве $\mathbb{R}$ опр-ны операции "+": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R})$, "*": $(\mathbb{R} \cdot \mathbb{R} \to \mathbb{R})$,удовл. аксиомам.

A1: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon (a+b)+c = a+(b+c)$;

A2: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a+b = b+a$;

A3: $\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}\colon a+0 = a$;

A4: $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}\colon a+(-a) = 0$.

M1: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\colon (a*b)*c = a*(b*c)$,

M2: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a*b = b*a$,

M3: $\exists 1 \in \mathbb{R}, 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}, a*1 = a$,

M4: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{R}\colon a*a^{-1} = 1$,

AM: $\forall a, b, c \in R\colon a*(b+c) = ab+ac$

На мн-ве $\mathbb{R}$ введено отношение порядка "$\leq$ удовл. след. аксиомам:

O1: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

(i): $a \leq a$;

(ii): $a \leq b, b \leq a \iff a = b$;

(iii): $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

O2: $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a \leq b \vee b \leq a$

O3: Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \leq b$, то $a+c \leq b+c$;

O4: Если $a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b$ и $0 \leq c$, то $ac \leq bc$;

Аксиома непрерывности: Для любых непустых $A, B \subset \mathbb{R}$, т. ч. $\forall a \in A, b \in B, a \leq b; \exists c \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A, b \in B (a \leq c \leq b)$