Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

23 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 7

Теорема 1.1 (О полноте ИВ). *ϕ - тавтология $\Rightarrow$ ϕ выводима*

Правило исчерп. разбора случаев: Пусть Γ - нек-рое мн-во ф-ул, при это $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$
Тогда: $\Gamma \vdash B$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Обозначение.

$$p^{\varepsilon} = \begin{cases} p, \varepsilon = 1 \\ \neg p, \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Лемма 1.2 (Основная). *Пусть ϕ - ф-ла от n переменных ($\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$).*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \{\, 0, 1 \,\}^n, \phi(a_1, \ldots, a_n) = a \in \{\, 0, 1 \,\}$$

Тогда:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi^a$$

Рассм. переход:
ОСНОВНАЯ ЛЕММА $\Rightarrow$ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ИВ

$$\phi \text{ - тавтология} \Rightarrow \text{ при всех } (a_1, \ldots, a_n)$$
$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1 \underset{\text{По лемме}}{\Longrightarrow} p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi$$

Пример. *$n = 3$: le Picture*

Лемма 1.3 (Базовая).
AND-ы:

$$A, B \vdash A \wedge B$$
$$\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$

OR-ы:

$$A, B \vdash A \vee B$$

$$\neg A, B \vdash A \vee B$$
$$A, \neg B \vdash A \vee B$$
$$\neg A, \neg B \vdash \neg (A \vee B)$$

Implication-ы:

$$A, B \vdash A \to B$$
$$\neg A, B \vdash A \to B$$
$$A, \neg B \vdash \neg (A \vdash B)$$
$$\neg A, \neg B \to A \to B$$

И ещё:

$$\neg A \vdash \neg A$$
$$A \vdash \neg(\neg A)$$

Док-во основной леммы. Инд-ция по построению ф-лы:

База) Переменная: $p_i^{a_i} \vdash p_i^{a_i}$

Переход) Пусть, например:

$$\phi = (\xi \wedge \eta)$$
$$\xi(a_1, \dots, a_n) = a, \eta(a_1, \dots, a_n) = b \Rightarrow \phi(a_1, \dots, a_n) = a \cdot b$$

По предположению индукции:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash \xi^a \text{ и } p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \dots, p_n^{a_n} \vdash \eta^b$$

По базовой лемме:

$$\xi^a, \eta^b \vdash \phi^{a \cdot b}$$

Запишем эти 3 вывода (**подряд**):

$$p_1^{a_1}, \dots, p_n^{a_n} \phi^{a \cdot b}$$

□

Другое док-во. Пусть Γ - мн-во пропозициональных ф-л.

Определение 1.1. Γ **совместно**, если при некот. значениях переменных все ф-лы из Γ истинны.

Определение 1.2. Γ - **противоречиво**, если для некот. ф-лы ϕ верно:

$$\begin{cases} \Gamma \vdash \phi \\ \Gamma \vdash \neg\phi \end{cases}$$

Теорема 1.4. Γ *совместна* $\overset{*}{\iff}$ Γ *непротиворечива.*

Рассмотрим связь теоремы о совм. и непрот. с теор. о корр. и полн.:

Теорема 1.5 (О корректности)**.**

$$\vdash \phi \Rightarrow \{\neg\phi\} \text{ - противор.} \overset{*}{\Longrightarrow} \{\neg\phi\} \text{ - несовм.} \Rightarrow \forall a, \neg\phi(a) = 0 \iff \phi(a) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi \text{ - тавтология}$$

Теорема 1.6 (О полноте)**.**

$$\phi \text{ - тавтология} \Rightarrow \{\neg\phi\} \text{ - несовм.} \overset{*}{\Rightarrow} \{\neg\phi\} \text{ - противоречиво} \Rightarrow \neg\neg\phi \vdash \phi$$

$$\frac{\neg\phi \vdash B \qquad\qquad \neg\phi \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg\phi}$$

$\square$

Доказательство. 1) Γ против. $\Rightarrow$ Γ несовм.

Теорема 1.7 (Обобщённая теорема о корректности)**.** *Если* $\Gamma \vdash A$ *и все ф-лы из* Γ *верны на* $(a_1, \ldots, a_n)$*, то и* A *верна на том же наборе.*

Д-во: индукция по номеру ф-лы в выводе.

Γ - совм. $\Rightarrow$ Все ф-лы из Γ верны на нек-ром наборе.

$\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi$ верно на том же наборе

$\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\phi \Rightarrow - - - - - || - - - - -$

Но ϕ и $\neg\phi$ не м. б. верны одновременно. Противор.

2) Γ непрот. $\Rightarrow$ Γ совм.
Пусть $\triangle$ непрот. Будем говорить, что $\triangle$ - полное, если для $\forall\phi$ верно $\triangle \vdash \phi$ или $\triangle \vdash \neg\phi$.

<u>Лемма</u> 1.8 (I). *Γ непрот $\Rightarrow \Gamma \subset \triangle$ для некот. полного непрот. $\triangle$*

<u>Лемма</u> 1.9 (II). *$\triangle$ полное, непрот. $\Rightarrow \triangle$ - совм.*

Док-во леммы I для счётного мн-ва перемен. Если переменных сч. мн-во то и ф-лы тоже.
Пусть $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ - все ф-лы.
Опр. Γ_i по инд-ции:

$$\Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\}, \text{ - если это непрот.} \\ \Gamma_{i-1} \cup \{\, \neg\phi_i \,\} \text{ - иначе} \end{cases}$$

<u>Утверждение</u> 1.1. *Все Γ_i - непрот.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\phi_i \\ \Gamma \cup \{\, \neg\phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\neg\phi_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma_{i-1}$ - прот. $\Rightarrow$ пришли к противоречию.

□

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$$

$$\triangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \text{ - тоже непрот.}$$

Если $\triangle$ прот., то прот. использ. кон. число ф-л из $\triangle$. Каждое δ_j лежит в Γ_{k_j}. Тогда прот. выв-ся из $\Gamma_{max\{\, k_j \,\}}$. Но все конечные Γ_i непрот.

Док-во леммые II. $\triangle$ - полн. $\Rightarrow$ для перем. p_i, $\triangle \vdash p_i \vee \triangle \vdash \neg p_i$.
Набор. значений:

$$p_i = \begin{cases} 1, \triangle \vdash p_i \\ 0, \triangle \vdash \neg p_i \end{cases} \tag{1}$$

Д-м, что ф-лы из $\triangle$ верны на системе (1). Ф-ла - перем. $\Rightarrow$ согл. опр. системы (1):

$$\phi = \neg\psi$$

□

Более общ утв.:

$$\begin{cases} \triangle \vdash \phi \Rightarrow \phi \text{ верна на системе (1)} \\ \triangle \nvdash \phi \Rightarrow \phi \text{ - неверна на системе (1)} \end{cases}$$

$\square$

$\square$

2 Лекция 8

Ф-лы	
Выполнимые	Невыполнимые

2.1 Выр-ем задачи через вып-ть ф-л

1) **Раскраски:**
Дан граф $G = (V, E)$. Цель, построить 3-раскраску

$$V \to \{1, 2, 3\} : (v, u) \in E \Rightarrow col(u) \neq col(v)$$

Вершина $u \mapsto (p_u, q_u)$	
цвет	знач перем
не сущ	00
1	01
2	10
3	11

Усл-ие на ребро:

$$(v, u) \mapsto (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Итоговая ф-ла:

$$\bigcap_{(v,u)\in E} (p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

Вып-ма т. и т. т., когда граф раскрашен в 3 цвета.

2) **Расстановка ферзей**:

$$n \times n \colon p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{на клетке } (i,j) \text{ стоит ферзь} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - в i-ой строке} > 1 \ \Phi.$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{ik}) \text{ - в i-ой строке} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ik} \vee \neg p_{jk}) \text{ - в i-ой вертикали} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на диагонали} \leq 1 \ \Phi$$

$$(\neg p_{ij} \vee \neg p_{i-k,j-k}) \text{ на побочной диагонали} \leq 1 \ \Phi$$

Вся ф-ла - конкатенация всех условий.

3) **З-ча о клике**:
Дан граф $G, q_{uv} = 1 \iff (u,v) \in E$
Вопрос: $\exists$? клика из k вершин.

$$(v_1, v_2, \ldots, v_k) \colon \forall i \neq j, (v_i, v_j) \in E$$

$$\bigvee_{(v_1,v_2,\ldots,v_k)} \bigwedge_{i \neq j} q_{v_i,v_j} \text{ - длина} \sim C_n^k =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} > \frac{(n-k)^k}{k!} > \left(\frac{n-k}{k}\right)^k \underset{k=\frac{n}{10}}{=} 9^{\frac{n}{10}}$$

Можно ли понимать $v_1, v_2, \ldots, v_k$ как перемен. и написать ф-лу:

$$\bigwedge_{i \neq j} (v_i \neq v_j \wedge q_{v_i,v_j})?$$

Это не булева ф-ла, т. к. перем. встреч. в индексе.

$$p_u = \begin{cases} 1, & \text{u в клике} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$(p_u \wedge p_v) \to q_{uv}$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n \geq k$$

Или: $(u,v) \notin E \Rightarrow (\neg p_u \wedge \neg p_v)$.

Будем делать так:

$$p_{iu} \text{ - вершина } u \text{ - } i\text{-ая в клике}$$

$$(p_{i1} \vee \ldots \vee p_{in}) \text{ - под каждым номером есть вершина, } i \in \{1, \ldots, k\}$$

$$i \neq j \Rightarrow (\neg p_{iv} \vee \neg p_{jv}) \text{ - у одной верш. не м. б. 2 номеров.}$$

$$(u, v) \notin E \Rightarrow (\neg p_{iu} \vee \neg p_{jv}) \text{ - антиребро не м. б. внутри клики.}$$

2.1.1 Обобщаем. Метод резолюций

Ф-ла - конъюнкция всех усл. - КНФ.

Пусть дана КНФ, будем рассм. её как набор дизъюнктов.

Правило Res:

$$\frac{A \vee x \qquad\qquad B \vee \neg x}{A \vee B \text{ - } \textbf{резольвента}}$$

Утверждение 2.1. *Если на данном наборе вып.* $A \vee x$ *и* $B \vee \neg x$*, то вып-мо и* $A \vee B$

Следствие. *Если исх. ф-ла вып-ма, то и все резольвенты тоже.*

Пустой дизъюинкт: $\perp$

$$\frac{x \qquad \neg x}{\perp}$$

$$\frac{x \vee y \qquad \neg x \vee \neg y}{y \vee \neg y}$$

$$\frac{p \vee x \qquad p \vee r \vee \neg x}{p \vee r}$$

Метод резолюций: строим всё новые резольвенты, пока либо не будет выведен $\perp$, либо не прекратится появление новых дизъюнктов.

Теорема 2.1 (О корректности метода резол.). *Если исх. ф-ла вып., то* $\perp$ *нельзя вывести.*

Доказательство. Если можно вывести, то $\perp$ будет ист., но он $\equiv 0$ □

Пример. *Ферзи 2 x 2*

p	q
r	s

Усл-ие:

$$p \vee q$$

$$r \vee s$$

$$\neg p \vee \neg q$$

$$\neg r \vee \neg q$$

$$\neg p \vee \neg s$$

$$\neg q \vee \neg r$$

$$\frac{p \vee q \qquad\qquad \neg p \vee \neg s}{q \vee \neg s}$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

Picture

Теорема 2.2. *(О полноте) Если $\perp$ нельзя вывести, то ф-ла выполнима.*

Доказательство. Все выводимые дизъюнкты разобъём на классы.

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots \subset C_k$$

C_i - дизъюнкты, зависящ. только от переменных $p_1, \ldots, p_i$ ($C_0 = \emptyset$, т. к. $\perp$ - невыводим).

Будем док-ть по инд-ции, что одновр. вып. все дизъюнкты из C_i. ММИ:

- База: $C_0 = \emptyset \Rightarrow$ очев.

- Переход: пусть все ф-лы из C_{i-1} вып-ны на знач. $a_1, \dots a_{i-1}$. Рассм. ф-лы из C_i, кот. ещё не выполнены за счёт этих значений.
  Предположим, что среди них есть ф-ла с p_i и ф-ла с $\neg p_i$:

  $$p_i \vee D_0 \text{ и } \neg p_i \vee D_1$$

  Раз эти ф-лы остались, то $D_0(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$ и $D_1(a_1, \dots, a_{i-1}) = 0$. Но $D_0 \vee D_1$ явл-ся резольвентой: $(p_i \vee D_0), (\neg p_i \vee D_1)$. Тогда $D_0 \vee D_1 \in C_{i-1}$, и тогда должно быть: $D_0 \vee D_1 = 1$!!!
  Следовательно, все оставшиеся ф-лы либо с $p_i \Rightarrow p_i = 1$, либо с $\neg p_i \Rightarrow p_i = 0$

$\square$

Как это связано с тафтологиями? А это уже совсем другая история.