# АлГем

Сергей Григорян

16 октября 2024 г.

# Содержание

# 1 Лекция 12

## 1.1 Классификация КВП

| Эллиптический тип: $a \geq b > 0$ | Инварианты |
|---|---|
| 1) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\delta > 0, I \cdot \triangle < 0$ |
| 2) Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | $\delta > 0, I \cdot \triangle > 0$ |
| 3) Пара пересек. мнимых прямых: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | $\delta > 0, \triangle = 0$ |

| Гиперболический тип: $a > 0, b > 0$ | Инварианты |
|---|---|
| 4) Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\delta < 0, \triangle \neq 0$ |
| 5) Пара пересек. действ. прямых: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | $\delta < 0, \triangle = 0$ |

| Параболический тип: $p, a > 0$ | Инварианты |
|---|---|
| 6) Парабола: $y^2 = 2px$ | $\delta = 0, \triangle \neq 0$ |
| 7) Пара \|\| действ. прямых: $y^2 = a^2$<br>8) Пара \|\| мнимых прямых: $y^2 = -a^2$<br>9) Пара совпад. действ. прямых: $y^2 = 0$ | $\delta = 0$<br>$\triangle = 0$ |

Для различения 7-9):

$$K = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$$

## 1.2 Центр КВП

$$\Gamma\colon P(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

**Определение 1.1.** Точка $O(x_0, y_0)$ наз-ся центром кривой $\Gamma$ (а также центром её мн-на), если $\forall \overline{s} = (\alpha, \beta)$ вып-ся рав-во:

$$P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) \qquad (2)$$

**Утверждение 1.1.** *Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр кривой $\Gamma$ (и мн-на $P$). Тогда т. $A$ принадлежит $\Gamma \iff A' \in \Gamma$ - точка, симметричная т. $A$ отн-но центра $O$*

*Доказательство.* Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 + \beta \end{pmatrix}, A' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \end{pmatrix}$:

$$A \in \Gamma \iff P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = 0 \iff P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = 0 \iff A' \in \Gamma$$

□

**Замечание.** *Центр $\Gamma$ не обязан лежать в $\Gamma$*

**Утверждение 1.2.** *Точка $O(x_0, y_0)$ явл-ся центром $\Gamma$ (и $P(x,y)$) $\iff$ :*

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

*Доказательство.*

$$P(x_0+\alpha, y_0+\beta) = A(x_0+\alpha)^2+2B(x_0+\alpha)(y_0+\beta)+C(y_0+\beta)^2+2D(x_0+\alpha)+2E(y_0+\beta)+F$$

$$P(x_0-\alpha, y_0-\beta) = A(x_0-\alpha)^2+2B(x_0-\alpha)(y_0-\beta)+C(y_0-\beta)^2+2D(x_0-\alpha)+2E(y_0-\beta)+F$$

$$P(x_0+\alpha, y_0+\beta)-P(x_0-\alpha, y_0-\beta) = 4\alpha(Ax_0+By_0+D)+4\beta(Bx_0+Cy_0+E) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

□

## 1.3 Центральные кривые

**Определение 1.2.** КВП наз-ся **центральной**, если она имеет единственный центр. (Этот центр **не обязан** лежать на КВП)

**Утверждение 1.3.** *a) Кривая* $\Gamma$ *явл. центральной* $\iff$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

*b) Св-во кривой* $\Gamma$ *быть центральной не зависит от выбора ПДСК.*

*c) Пусть* $\Gamma$ *- центральная кривая, содерж. хотя бы одну точку. Тогда* $\Gamma$ *содержитединственный центр симметрии* $O_0$*, причём* $O_0 = O \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

*Доказательство.* a) По т. Крамера, $O(x_0, y_0)$ - единственный центр $\iff$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Т. к. $\delta$ - инвариант, то и св-во быть центральной также не меняется при замене ПДСК.

c) Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр и он единств. $\iff$ $\delta \neq 0$, тогда можно сказать, что $\Gamma$ имеет эллиптический или гиперболический тип. Тогда:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - C = 0 \text{ - ур-е КВП}$$

$$\Rightarrow B = D = E = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - решение системы (3)}$$

Тогда $\Gamma$ содержит единственный центр симметрии $O_0$, причём $O_0 \equiv O(x_0, y_0)$

$\square$

## 1.4 Св-ва КВП

### 1.4.1 Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$a$ - большая полуось

$b$ - малая полуось

$c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$ - фокусное расстояние

$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ - фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

При $a = b$, $\varepsilon = 0$
Директрисы:

$$d_1 \colon x = \frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2 \colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

**Утверждение 1.4.** *$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ эллипсу $\iff$*

$$\iff AF_1 = |a - \varepsilon x| \iff AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

*Т. к. $|x| \leq a$ (если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ эллипсу), то модули раскрываются с положительным знаком.*

*Доказательство.*

$$0 = AF_1^2 - (a - \varepsilon x)^2 = (x-c)^2 + y^2 + a^2 + 2a\varepsilon x - \varepsilon^2 x^2 = (1-\varepsilon^2)x^2 + 2x(-c + a\varepsilon) + c^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon^2 - 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$= \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - b^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) = 0$$

$\square$

**Теорема 1.1.**

$$\frac{AF_1}{p(d_1, A)} = \varepsilon = \frac{AF_2}{p(d_2, A)}$$

*Доказательство.*

$$\varepsilon p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

**Теорема 1.2** (Характеристической св-во эллипса)**.** *Точка* $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ *эллипсу* $\iff$

$$AF_1 + AF_2 = 2a$$

*Доказательство.* a) Необходимость:

$$AF_1 + AF_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$$

b) Достаточность: Пусть: $AF_1 + AF_2 = 2a$, тогда $|x| \le a$. От прот., пусть $|x| > a \Rightarrow$

$AF_1 + AF_2 \ge |x - c| + |x + c| \ge |x - c + x + c| = |2x| > 2a$ - противоречие.

Если $|x| = a \Rightarrow$

$$\left[\begin{aligned} x &= a \\ x &= -a \end{aligned}\right. \Rightarrow A\colon a - c + a + c = 2a \text{ для } -a \text{ аналогично.}$$

(Остальное док-во...)

□

### 1.4.2 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - фокусное расст.
$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ - фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$
$d_1\colon x = \frac{a}{\varepsilon}$
$d_2\colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$

**Утверждение 1.5.** *Точка* $A(x$
$y) \in$ *гиперболе* $\iff$

$$AF_1 = |a - \varepsilon x|\,, AF_2 = |\varepsilon x + a|$$

$$|x| \geq a$$

$$\varepsilon\,|x| > a$$

*Доказательство.*

$$0 = AF_1^2 - (\varepsilon x - a)^2 = (x-c)^2 + y^2 - \varepsilon^x x^2 + 2\varepsilon a x - a^2 - a^2 = (1-\varepsilon^2)x^2 + 2x(-c+\varepsilon a) + c^2 + y^2 - a^2 =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 + b^2 = 0$$

□

**Следствие 1.1.**

$$\frac{AF_1}{p(A, d_1)} = \varepsilon$$

*Доказательство.*

$$\varepsilon \cdot p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

**Теорема 1.3** (Характеристическое св-во гиперб.)**.**

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{ гиперболы } \iff |AF_2 - AF_1| = 2a$$

*Доказательство.* a) Пусть $A \in$ правой ветви гиперболы:

$$|AF_2 - AF_1| = AF_2 - AF_1 = \varepsilon x + a - (\varepsilon x - a) = 2a$$

b) Пусть изв., что $AF_2 - AF_1 = 2a$, и покажем, что $A \in$ правой части.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$
$$x^2(c^2 - a^2) + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 + a^4 - a^2(a^2 + b^2) - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 - a^2b^2 - a^2y^2 = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

□

# 2 Лекция 13

## 2.1 Св-ва гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**Определение 2.1. Асимптотами** гиперболы наз-ся гиперболы:

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

**Утверждение 2.1.** *Пусть* $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *- т. гиперболы, с указанным ур-ем. Тогда произведение расстояний от* $A$ *до асимптот* $= const$

*Доказательство.*

$$p(A, l_1)p(A, l_2) = \frac{\left|\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \frac{\left|\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right|}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

□

__**Следствие**__ **2.1.** *Пусть т. A движется по одной из ветвей гиперболы, т. ч.:*

$$p(A, O(0,0)) \to +\infty$$

*Тогда верно* ***одно*** *из двух:*

$$\left[\begin{array}{l} p(A, l_1) \to 0 \\ p(A, l_2) \to 0 \end{array}\right.$$

*Доказательство.* Для правой верхней полуветви.

$$x = a \operatorname{ch} t y = b \operatorname{sh} t$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 \operatorname{ch}^2 t}{a^2} - \frac{b^2 \operatorname{sh}^2 t}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1 \text{ основное гиперболическое тождество}$$

$$\Rightarrow A(t) \in \text{ гиперболе}$$

$$p(A, l_2) = \frac{\left|\frac{x(t)}{a} + \frac{y(t)}{b}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \to +\infty$$

$$p(A, l_1) = \frac{const}{p(A, l_2)} \Rightarrow p(A, l_1) \to 0$$

□

## 2.2 Св-ва параболы

Канон. ур-е:

$$y^2 = 2px, p > 0$$

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$d \colon x = -\frac{p}{2}$$

__**Утверждение**__ **2.2.** *Т.* $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *принадлежит параболе* $y^2 = 2px \iff$

$$AF = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

*Доказательство.*

$$AF^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = -2xp + y^2 = -2xp + 2xp = 0$$

□

**Следствие 2.2.** *Парабола - это ГМТ A, т. ч.:*

$$\frac{p(A,F)}{p(A,d)} = 1$$

*Доказательство.*

$$p(A,d) = \left|x + \frac{p}{2}\right| = AF \Rightarrow \frac{AF}{AF} = 1$$

□

**Определение 2.2.** Будем считать, что $\varepsilon_{\text{пар.}} = 1$

**Теорема 2.1** (Об эксцентриситете)**.** *Для любой невырожденной КВП ($\triangle \neq 0$):*

$$\frac{p(A,F)}{p(A,d)} = \varepsilon$$

**Утверждение 2.3.** *Две КВП подобны тогда и только тогда, когда они имеют равный эксцентриситет.*

## 2.3 Диаметры невырожд. кривых

### 2.3.1 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ - середина хорды гиперболы, имеющей напр. вектор $\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0\alpha}{a}-\frac{y_0\beta}{b^2}\right)t+\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-1=0$$

Т. к. $A$ - середина хорды, то член при $t$ равен 0 - необх. и дост. условие:

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{a^2}x-\frac{\beta}{b^2}y=0 \text{ - диаметр гиперболы, сопряж. с } \overline{v}$$

### 2.3.2 Эллипс

Аналогично гиперболе, получаем:

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y=0 \text{ - диаметр эллипса, сопряж с } \overline{v} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

### 2.3.3 Параболы

$$y^2=2px$$

$$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} \text{ - середина хорды, с напр. вектором } \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$(y_0+\beta t)^2=2p(x_0+\alpha t)$$

$$y_0^2+2y_0\beta t+\beta^2t^2-2px_0-2p\alpha t=0$$

$$\beta^2t^2+t(2y_0\beta-2p\alpha)+y_0^2-2px_0=0$$

$$\Rightarrow y=p\frac{\alpha}{\beta} \text{ - ур-е диаметра, сопряж с вектором } \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Вывод: любой диаметр параболы $||$ её оси.

**Теорема 2.2.** *Мн-во всех середин хорд данного напр-я $\overline{v}$ невырожд. КВП всегда лежит на одной прямой, кот. наз-ся диаметром, сопряж. напр. $\overline{v}$*

**Замечание.** *У эллипса и гиперболы диаметр проходит через центр кривой, а у параболы диаметр параллелен её оси.*

## 2.4 Сопряжённые диаметры

**Теорема 2.3.** *Пусть* $\Gamma$ *- эллипс или гипербола,* $\overline{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ *- задаёт напр. на пл-ти. Пусть* $d$ *- диаметр, сопряж.* $\overline{v}$*. Пусть также* $\overline{w}$ *- напр. вектор диаметра* $d$*. Пусть теперь* $d'$ *- диаметр, сопряжённый* $\overline{w}$*. Тогда* $d' || \overline{v}$

*Для гиперболы.* Пусть $AB$ - хорда с напр. $\overline{v}$.

$$C = Sym_O(A)$$

$$D = Sym_O(B)$$

$$ABCD \text{ - пар-м}$$

$d$ проходит через середины $AB$ и $CD \Rightarrow d'$ проходит через сер-ны $AD$ и $BC$. Тогда, по постр., $d' || AB || CD || \overline{v}$.

□

**Определение 2.3.** Построенные пары диаметров ($d$ и $d'$) наз-ся взаимно сопряжёнными. (Т. е. каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру)

## 2.5 Касательные к КВП

$$F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{4}$$

**Определение 2.4.** Особая точка КВП, это центр, принадлежащий кривой.

a) Точка пересечения пары пересекающихся действ. прямых - особая.

b) Точка пересечения пары пересек. мнимых прямых - особая.

c) Каждая точка пары совпавших действ. прямых - особая.

Считается, что в особой точке, касат. к кривой не определена.

Исключая из рассм. особые точки и неособые точки, лежащие на прямой, входящей в состав $\Gamma$, мы получаем случаи эллипса, гиперболы и параболы.

**Определение 2.5.** Касательная к $\Gamma$ в т. $M \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ наз-ся предельное положение секущей, когда длина хорды секущей стремится к 0.

$$F_1(x, y) = Ax + By + C = 0$$
$$F_2(x, y) = Bx + Cy + D = 0$$

Секущ. через т. $M$:

$$l\colon \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

$$F(x(t), y(t)) = A(x_0+\alpha t)^2+2B(x_0+\alpha t)(y_0+\beta t)+C(y_0+\beta t)^2+2D(x_0+\beta t)+2E(y_0+\beta t)+F = 0$$

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0$$

$$P = A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$Q = (Ax_0 + By_0 + D)\alpha + (Bx_0 + Cy_0 + E)\beta$$

$$R = F(x_0, y_0) = 0, \text{ т. к. } M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \Gamma$$

$$t(Pt + 2Q) = 0 \tag{5}$$

Если $P = 0 \iff \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$, прямая $l$, проходя через т. $M \in \Gamma$, далее нигде с $\Gamma$ не пересекается.

**Определение 2.6.** Напр. $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ наз-ся асимптотическим направлением:

$$\left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}\right]$$

**Утверждение 2.4.** *Если:*

- $\delta < 0$, *то* $\Gamma$ *имеет 2 асимп. напр-я.*
- $\delta = 0$, *то* $\Gamma$ *имеет 1 асимп. напр-я.*
- $\delta > 0$, *то нет асимп. напр-я.*

Пусть $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ - не асимп. напр-е:
Ур-ие (5) имеет 2 корня:

$$\left[\begin{aligned} &t_0 = 0 \\ &t_1 \end{aligned}\right.$$

Привидение полож. секущ. т. и т. т., .........