Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

28 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 12

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = 0 \tag{1}$$

Хар-ое ур-ие:

$$a_k x^k + \ldots + a_0 = 0$$

Теорема 1.1 (Основная теорема алгебры)**.** *Мн-н степени k имеет k комплексных корней, т. е.:*

$$P(x) = a_k x^k + \ldots + a_0 = a_k \prod_{i=0}^{k} (x - \lambda_i)$$

где,

$$P(\lambda_i) = 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$$

Возьмём эти корни из хар-ого ур-ия. Пусть:

$$\mu_1, \ldots, \mu_r$$

Этот же список корней, без **дубликатов**. Также:

$$m_1, \ldots, m_r$$

Это кратности этих корней.

$$1 \leq r \leq k$$

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = k$$

Обозначим за:

$$P_l(n) = c_l n^l + \ldots + c_0$$

— произвольный мн-н степени l

Теорема 1.2. *1)*

$$\forall P^1_{m_1-1}(n), \ldots, P^r_{m_r-1}(n)$$
$$\hookrightarrow y_n = P^1_{m_1-1}(n)\mu_1^n + \ldots + P^r_{m_r}(n)\mu_r^n$$

— удовлетворяет (1)

2) Если $\{ y_n \}_{n=1}^{\infty}$ удовл. (1)*, то $\exists P^1_{m_1-1}, \ldots, P^r_{m_r-1}$:*

$$y_n =< \text{ запись из п. 1} >$$

1.1 Разбиение чисел на слагаемые

$$n \in \mathbb{N} \colon n = x_1 + \ldots + x_t$$
$$\forall i \colon x_i \in \{ n_1, \ldots, n_k \}$$

(***Офигенные примеры с помидором и попойкой***)

Теорема 1.3 (Решение попойки (упор. разбиений))**.**

$$F(n; n_1, \ldots, n_k) = F(n - n_1; n_1, \ldots, n_k) + \ldots + F(n - n_k; n_1, \ldots, n_k)$$

$$F(0; n_1, \ldots, n_k) = 1; F(-n; n_1, \ldots, n_k) = 0$$

Следствие.

$$F(n; , 1, 2, \ldots, n) = 2^{n-1}$$

Доказательство. ММИ:

1) $n = 1 \colon F(1; 1) = 1 = 2^{1-1}$

2)

$$F(n; 1, \ldots, n) = F(n - 1; 1, \ldots, n - 1) +$$
$$+ F(n - 2; 1, 2, \ldots, n - 2) + \ldots + F(1; 1) + F(0; 0) =$$
$$= 2^{n-2} + 2^{n-1} + \ldots + 1 + 1 = 2^{n-1}$$

□

Теорема 1.4 (Решение помидора (неупор. разбиения))**.**

$$f(n; n_1, \ldots, n_k) = f(n - n_1; n_1, \ldots, n_k) + f(n; n_2, \ldots, n_k)$$

$$f(0; \ldots) = 1$$
$$f(-n; \ldots) = 0$$

2 Лекция 13

2.1 Диаграммы Юнга

$n \in \mathbb{N}$

$$n = x_1 + \ldots + x_t$$

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_t$$

Обозначение. *Канонический вид диаграммы юнга:*

$$x_1 \colon \underbrace{\circ \circ \circ \ldots \circ}_{x_1 \text{ раз}}$$

$$\vdots$$

$$x_k \colon \underbrace{\circ \circ \circ \ldots \circ \circ \circ}_{x_k \text{ раз}}$$

Теорема 2.1. *Кол-во разб. (помидорных — неупор.) числа n на не более чем k слагаемых равно кол-ву разб. числа $n + k$ на ровно k слагаемых.*

Доказательство. Добавляем слева от диаграммы юнга столбец размера k. Получаем биекцию. □

Теорема 2.2. *Кол-во разб. (помидорных — неупор.) числа n на не более чем k слагаемых равно кол-ву разб. числа $n + \frac{k(k+1)}{2}$ на ровно k различных слагаемых.*

Доказательство. К i-ой строке слева добавляем i единиц. Если числа были равными, то теперь нет. Нер-ва сохранились. Получили биекцию. □

Теорема 2.3. *Кол-во разб. (помидорных — неупор.) числа n на не более чем k слагаемых равно кол-ву разбиений числа n на слагаемые величины $\leq k$.*

Доказательство. Инвертируем таблицу, превращая строки в столбцы. □

2.2 Эйлер

$$(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^n)\dots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots$$

Теорема 2.4. *Пусть* $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{ 0 \}$. *Тогда коэфф. при* x^n *равен* $(-1)^k$, *если же* $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$, *то коэфф. равен* 0.

Посмотрим, причём здесь разбиения? А вот причём:
Коэффициент при x^n:

$$(-x^{n_1})(-x^{n_2})\dots(-x^{n_t}) = (-1)^t x^n$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$$

$n_{\text{чёт}}$ — кол-во разбиений n на различные слагаемые, число кот-ых **чётно**
$n_{\text{нечёт}}$ — кол-во разбиений n на различные слагаемые, число кот-ых **нечётно**
Тогда коэф-т при $x^n \to n_{\text{чёт}} - n_{\text{нечёт.}}$

2.3 Формальные степенные ряды

На мн-ве объектов вида:

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots), a_i \in \mathbb{R}$$

(т. е. бесконечные п-ть чисел)
Введём операции:

1) Сложение:

$$B = (b_0, b_1, \dots), C = A + B \Rightarrow \forall i \colon c_i = a_i + b_i$$

2) Умножение на число: очев.

3) Умножение ФСР:

$$A, B, C = A \cdot B$$

$$\forall i \colon c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k}$$

4) <u>Взятие обратного</u>:

$$A, C = \frac{1}{A} \iff AC = 1$$

Это такое C, что:

$$\begin{cases} a_0c_0 = 1 \\ a_0c_1 + a_1c_0 = 0 \\ a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Система разрешима $\iff a_0 \neq 0$

<u>**Пример.**</u>

$$\frac{1}{(1-x^2)^2} = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1+x}\right)^2$$

Деля в столбик 1 *на* $1-x$, *получаем:*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2 = 1 + 2x^2 + 3x^4 + \ldots + (n+1)x^{2n}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = 1 - 2x + 3x^2 + \ldots + (-1)^n(n+1)x^n$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 = \ldots + (1\cdot(-1)^n\cdot(n+1) + 2\cdot(-1)^{n-1}\cdot n + \ldots + (n+1)\cdot 1)x^n + \ldots$$

Т. е. коэф. при x^n*:*

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)(-1)^{n-k}(n+1-k) = \begin{cases} 0, n = 2l+1, l \in \mathbb{N} \\ l+1, n = 2l, l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

2.4 Производящие ф-ции

$$a_0, \dots, a_n, \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$S_n(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k$$

Ряд сходится, если:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) \in \mathbb{R}$$

Теорема 2.5 (Коши-Адамар)**.** *Пусть*

$$p = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Если $|x_0| < p$, то ряд с коэф. $\{ a_n \}$ сх-ся. Если $|x_0| > p$, то расх-ся.

Пример. *1)*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, |x_0| < 1 \text{ — сх-ся}, |x_0| \geq 1 \text{ — расх-ся}$$

2)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k, |x_0| < \frac{1}{2} \text{ — сх-ся, иначе расх-ся}$$

3)

$$a_k = \begin{cases} 2^k, k \text{ — чёт} \\ -3^k, k \text{ — нечет} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |x_0| < \frac{1}{3} \text{ — сх-ся, иначе расх-ся}$$

4)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

$$|x_0| < 1 \text{ — } \textit{сх-ся}$$

$$|x_0| > 1 \text{ — } \textit{расх-ся}$$

$$|x_0| = 1 \text{ — } \textit{СХ-СЯ и равен } \frac{\pi^2}{6}$$

5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, |x_0| = 1 \text{ — } \textit{расх-ся}$$