Матан

Сергей Григорян

6 ноября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 13

1.0.1 Долг прошлой жизни

Теорема 1.1 (О разрывах монот. ф-ции)**.** *Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Если f монотонна на (a, b), то f на (a, b) может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть f нестрого возр. на (a, b). Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т. $c \in (a, b)$ $\exists$ конечные $f(c-0), f(c+0)$, причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на (a, b) разрывы только I рода.

Пусть $c, d \in (a, b), c < d$. Тогда для $\alpha \in (c, d)$. Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a,d)} f(x) = f(d-0)$$

$\square$

Поэтому если c, d - точки разрыва ф-ции f, то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку $\in \mathbb{Q}$, содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

1.1 Равномерная непр-ть

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$
Напомним, что f непр-на на E, если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение 1.1. Ф-ция f наз-ся **равномерно непрерывной** (на E), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Замечание. *Если f р. н. (равномерно непр-на) на E, то f непр-на на E*

Задача 1.1. Если f и g р. н. на E и огр-ны, то fg - р. н. на E

Определение 1.2. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E(|f(x) - f(x')| \leq C\,|x - x'|)$$

Замечание. *Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$)*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

Доказательство.

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, } \textbf{но не р. н.}$$

Замечание. *f не р. н. $\iff$*

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E(|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ положим, $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}$. Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но, f не р. н. □

Теорема 1.2 (Кантора)**.** *Если f непр-на на $[a, b]$, то f - р. н. на $[a, b]$*

Доказательство. I) Предположим, что f не явл-ся р. н. Тогда полагая $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, получаем $x_n, x'_n \in [a, b]$, т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \to x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти, f в x_0:

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит $\left| f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \right| \geq \varepsilon > 0$

□

Задача 1.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ р. н. на E. Покажите, что

$$\exists! F : closure(E) \to \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

Определение 1.3. Ф-ция $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ наз-ся экспонентой.

Замечание. *Сх-ть $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ устанавливалась ранее для всях $x \in \mathbb{R}$*

Теорема 1.3. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо:*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$$

Доказательство. Введём об-е $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Оценим:

$$a_n(x) a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$a_n(x) a_n(y) - a_n(x + y) = \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k$$

Где:
$$b = \left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right), a = \left(1+\frac{x+y}{n}\right)$$
П-ть $\{\, a_n(|x|)\,\}$, нестрого возрастает, начиная с некот. n_0 (см. док-во сх-ти):
$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^p\right| \leq \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^p \leq \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \leq \exp(|x|), p = 1, \ldots, n$$
Сл-но, каждое слагаемое в $Q(x, y)$ оценивается по модулю $C = \exp|x+y|\exp|x|\exp|y|$. Тогда получаем:
$$|a_n(x)a_n(y) - a_n(x+y)| \leq \frac{|x|\,|y|\,C}{n}$$
Переходя к пределу, получаем, что:
$$|\exp(x)\exp(y) - \exp(x+y)| \leq 0$$
Ч. Т. Д. □

Следствие.
$$\exp x > 0 \text{ и } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$
Доказательство.
$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \exp^2(\frac{x}{2})$$
$$\exp(x)\exp(-x) = 1$$
□

Лемма 1.4. *a)*
$$\exp(x) \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$$
b)
$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x}, \forall x < 1$$

Доказательство. Зафикс. $N \in \mathbb{N}$, т. ч. $\frac{x}{N} \geq -1$. Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N \colon \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x \text{ - пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

□

Теорема 1.5. *Ф-ция* exp *непр-на, строго возр. и отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Доказательство. По нер-ву из предыдущей леммы, при $x < 1$ имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1 - x}$$

Откуда при $x \to 0$, $\exp(x) \to 1$. Тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \exp(x) = \begin{bmatrix} t + a = x \\ t = x - a \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0} \exp(t + a) = \lim_{t \to 0} \exp(a) \exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$ ф-ция непр-на на $\mathbb{R}$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x)\exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ □

2 Лекция 14

Определение 2.1. Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция $\ln\colon (0, +\infty)$, обратная к exp

Замечание. *По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:*

- $\ln$ *непр-на на обл-ти определения.*
- $\ln$ *строго возр.*
- $\ln$ *отображет* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*, при этом, если* $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Определение 2.2. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Показательной ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция: $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при* $a > 1$ *строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Замечание. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, n > 1$*. Тогда:*

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{n}\ln a\right) = \exp(\ln a) = a$$

Сл-но, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Определение 2.3. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Логарифмической ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция $\log_a\colon (0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Обратная к показательной ф-ции $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображает* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*. Кроме того:*

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Определение 2.4. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Степенной ф-цией с показателем α наз-ся ф-ция $x \mapsto x^\alpha, x \in E$, где:

1) $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow E = \mathbb{R}$, при этом $x^0 = 1, x^\alpha = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\alpha \text{ раз}}$

2) $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при этом $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$, при этом $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

Замечание. *Если в последнем случае $\alpha > 0$, то полагаем $0^\alpha = 0$ (т. е. 0 включаем в E), это согласуется с тем, что:*

$$\lim_{x \to +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

Замечание. *Из св-в* $\exp$ *и* $\ln$ *получаем, что степенная ф-ция непр-на на E, на $(0, +\infty)$ строго возрастает на при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$*

Лемма 2.1 (Замечательные пределы)**.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. По пред. лемме при $x < 1$:

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \iff x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \le \frac{e^x-1}{x} \le \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \le \frac{e^x-1}{x} \le 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y-1}, y \ne 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$ - непр. в 0. Также $f(x) = \ln(x+1)$ непр-на в 0. Тогда композиция $g \circ f$ непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ непр-на в 0 $\Rightarrow \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$ $\square$

Задача 2.1. Док-те, что $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Пример.

$$e^\pi \vee \pi^e$$

Доказательство.

$$e^x > 1 + x$$
$$x = \frac{\pi}{e} + 1$$
$$e^{\frac{\pi}{e} - 1} > \frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}} > \pi \Rightarrow e^\pi > \pi^e$$

□

2.0.1 Ликбез по тригономе

Лемма 2.2. *Для всех $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ верно:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Picture:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

□

Следствие. *Для всех $x \in \mathbb{R}$. Верно $|\sin x| < |x|$, причём рав-во имеет место только при $x = 0$*

Доказательство. Если $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, то нер-во следует по лемме.
Если $x \geq \frac{\pi}{2}$, то $|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq x$
Если $x < 0$, то $|\sin x| = |\sin(-x)| < |(-x)| = |x|$ □

Следствие. *Ф-ции* $\sin$ *и* $\cos$ *непр-ны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}$, тогда:

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a| \to 0$$

Сл-но, $\sin x$ в точке a равен $\sin a \Rightarrow \sin x$ - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть $\cos x$ или из ф-л тригонометрии:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$\cos x$ непр-н как композиция непр. ф-ций. □

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство. $x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow\frac{\sin x}{x}<1$ и $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ (из леммы) В силу чётности, $\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow$ предел $=1$. $\square$

Определение 2.5. Обратные тригонометрические ф-ции:

1) arcsin:

$$\arcsin=(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2) $\arccos\colon[-1,1]\to[0,\pi]$

$$\arccos=(\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$$

3) $\operatorname{arctg}\colon\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\operatorname{arctg}=(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4) $\operatorname{arcctg}\colon\mathbb{R}\to(0,\pi)$

$$\operatorname{arcctg}=(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$$

Определение 2.6. Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x\mapsto c, c\in\mathbb{R}$
- $x\mapsto a^x, a>0, a\neq 1$
- $x\mapsto\log_a x, a>0, a\neq 1$
- $x\mapsto x^\alpha$
- $\sin,\cos,\operatorname{tg},\operatorname{ctg}$
- $\arcsin,\arccos,\operatorname{arctg},\operatorname{arcctg}$

Определение 2.7. Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

Пример.

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Теорема 2.3. *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

2.0.2 Сравнение ф-ций

Определение 2.8. Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E и сущ-ет $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие, что

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

1) Если $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ции f и g эквивалентны (асимптотически равны) при $x \to a$. Пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$

2) Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ция f беск. мала по сравн. с ф-цией g при $x \to a$, пишут $f(x) = o(g(x))$, при $x \to a$

3) Если α - огр-на, то говорят, что ф-ция f ограничена по сравнению с g при $x \to a$. Пишут, что $f(x) = O(g(x)), x \to a$

Замечание. *Если $g(x) \neq 0$ в некот. проколот. окр-ти a, с учётом обл. опр-я, то:*

1)

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \alpha(x) = 1$$

2)

$$f(x) = o(g(x)), x \to a \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3)

$$f(x) = O(g(x)), x \to a \iff \exists M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \left(\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \le M \right)$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Следует из опр-я.

$\Leftarrow$) Положим:

$$\alpha\colon E \to \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \\ \text{что угодно, иначе} \end{cases}$$

□

Задача 2.2. Доказать, что $\sim$ - отн. эквив-ти.

Пример. *1)*

$$x^n = o(x^m), x \to 0 \iff n > m$$

$$x^n = x^{n-m} x^m$$

2)

$$x^n = o(x^m), x \to \pm\infty \Rightarrow m > n$$

3)

$$x = O(\sin x), x \to 0$$

$$x + \cos x = O(x), x \to \pm\infty$$

4)

$$x \sim \sin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x), x \to 0$$

Замечание. *Читаем $f(x) = O(g(x)), f(x) = o(g(x))$ - слева направо!*

Лемма 2.4.

$$x \to a$$

Тогда справедливо:

1)

$$o(f) \pm o(f) = o(f), O(f) \pm O(f) = O(f)$$

2)

$$o(f) = O(f)$$

3)

$$o(O(f)) = o(f), O(o(f)) = o(f)$$

4)

$$o(f)O(g) = o(fg)$$

Доказательство. 3)

$$\begin{cases} u = o(v), x \to a \\ v = O(f), x \to a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(x) = \alpha(x)v(x) \\ v(x) = \beta(x)f(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathring{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\Rightarrow u(x) = \alpha(x)\beta(x)f(x) = \gamma(x)f(x), \gamma \to 0, x \to a$$

$$\Rightarrow u(x) = o(f), x \to a$$

□

<u>Лемма</u> 2.5. *1)*

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to a$$

2)

$$f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x), x \to a \Rightarrow f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$$

Кроме того, если $g_{1,2}(x) \neq 0$ в некот. прок. окр-ти a, то:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, x \to a$$

3)

$$f(x) \sim g(x), x \to a$$

То пределы $f(x), g(x)$ при $x \to a$ сущ-ют одновременно (в $\overline{\mathbb{R}}$), и если сущ-ют, то равны.

Доказательство. 1)

$$f(x) \sim g(x), x \to a \iff f(x) = \alpha(x)g(x), x \in \mathring{B}_\delta(a), \alpha(x) \to 1$$

$$f(x) = \alpha(x)g(x) = g(x) + g(x)(\underbrace{\alpha(x) - 1}_{\to 0}) \iff f(x) = g(x) + o(g(x))$$

2) Пусть $g_1(x) \neq 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$

$$g_2(x) = \alpha(x) g_1(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

$$\alpha(x) \to 1, x \to a$$

Т. к. $\alpha(x)$, то $\exists \delta_1 > 0, \forall \in \overset{\circ}{B}_{\delta_1}(a) \cap E(\alpha(x) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}))$

$\delta_0 = min(\delta, \delta_1)$. Тогда $g_2(x) \neq 0$ на $\overset{\circ}{B}_{\delta_2}(a) \cap E$

Рассм. $\frac{1}{g_1(x)}, \frac{1}{g_2(x)}, x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \Rightarrow \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E(\frac{1}{g_1(x)} = \frac{1}{\alpha(x) g_2(x)}) \Rightarrow \frac{1}{g_1(x)} \sim \frac{1}{g_2(x)}, x \to a$

$\square$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4} - 2)(2^x - 1)^2}$$

Решение.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x \sim x, x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \frac{2 \sin x \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} \sim 2 \cdot x \cdot (\frac{x}{2})^2 \sim \frac{x^3}{2}, x \to 0$$

$$\sqrt{x+4} - 2 = \frac{x}{\sqrt{x+4} + 2} \sim \frac{x}{4}, x \to 0$$

$$e^x - 1 \sim x, x \to 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(\sqrt{x+4} - 2)(2^x - 1)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} x^3}{\frac{x}{4} \cdot x^2} = 2$$

$$\operatorname{tg} x \sim x, x \to 0 \iff \operatorname{tg} x = x + o(x), x \to 0$$

$$\sin x \sim x, x \to 0 \iff \sin x = x + o(x), x \to 0$$

$$\operatorname{tg} x - \sin x = o(x), x \to$$

3 Лекция 15

Определение 3.1. Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty$. Пряая $y = kx+b$ наз-ся наклонной асимптотой f при $x \to +\infty$, если:

$$f(x) = kx + b + o(1), x \to +\infty$$

Аналогично опр-ся накл. асимптота при $x \to -\infty$

Теорема 3.1. *Пусть f опр-на в некот. окр-ти $+\infty, k, b \in \mathbb{R}$. Прямая $y = kx + b$ - наклонная асимптота f при $x \to +\infty \iff$*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

Доказательство. $\Rightarrow$) Пусть $y = kx + b$, накл. асимпт. f при $x \to +\infty$, тогда $f(x) = kx + b + o(1), x \to +\infty \Rightarrow$

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{1}{x}(b + o(1)) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$$

$$f(x) - kx = b + o(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$$

$\Leftarrow$) Рассм. $\alpha(x) = f(x) - kx - b$, где k, b - пределы из усл-я:

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$$

Сл-но, $f(x) = kx + b + \alpha(x), \alpha(x) \to 0, x \to +\infty$

$\square$

Замечание. *Справедливо аналогичное утв-е при $x \to -\infty$*

Определение 3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Ф-ция f опр-на на (α, a) или (a, β). Прямая $x = a$ наз-ся вертикальной асимптотой ф-ции f, если хотя бы один из $f(a + 0)$ или $f(a - 0)$ равен $+\infty(-\infty)$

3.1 Дифференцируемые ф-ции

Пусть I - невырожд. пром-к в $\mathbb{R}$ (содержит более 1 точки).

Определение 3.3. Пусть $f : I \to \mathbb{R}, a \in I$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ - производная ф-ции } f \text{ в точке } a$$

Если предел конечен, то f наз-ся дифференцируемой в a.

Пример. *1)* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = kx + b$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{k(x - a)}{x - a} = k$$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = sign(x)$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{sign(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

Геометрический смысл производной: Пусть f дифф. в a:

$$l\colon y = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}(x - a) + f(a) \text{ - прямая, проход. через } (a, f(a)), (t, f(t))$$

Тогда:

$$K_{\text{сек.}} = \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \to f'(a) = K_{\text{кас.}}, t \to a$$

4 Лекция 16

Теорема 4.1 (О линейной апроксимации)**.** *Ф-ция f дифф-ма в a $\iff$ $\exists A \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a), x \to a \tag{1}$$

Доказательство. Положим $A = f'(a)$:

$\Rightarrow$) Опр-м

$$\alpha : I \to \mathbb{R}, \alpha(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), x \neq a \\ \text{произв.}, x = a \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$ и:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + \alpha(x)(x - a), \text{ т. е. вып-но при } A = f'(a)$$

$\Leftarrow$) ... см. учебник.

$\square$

Следствие. *Если f дифф-ма в a, то она непр-на в a.*

Замечание. *Обратное неверно.*

Определение 4.1. Пусть $f: I \to \mathbb{R}, a \in I$, Тогда:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Соотв. правая и левая производные.

Замечание. *Если $a \in (int) I \Rightarrow \exists f'(a) \iff \exists f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$. Если a - концевая точка I, то производная равна соотв. одност. пределу.*

Задача 4.1. Док-ть, что если $\exists f'_+(a), f'_-(a)$, то f непр-на в a.

Теорема 4.2. *Пусть $f, g \colon I \to \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Если f, g дифф-мы в a, то:*

1) $\exists (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2) $\exists (fg)' = f'g + fg'$

3) *Если $g \neq 0$ на I, то* $\exists (\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Доказательство. 2)

$$fg(x) - fg(a) = (f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))$$

$$\frac{fg(x) - fg(a)}{x - a} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(x) + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

Перейдём к пределу $x \to a$, учитывая непр-ть в т. a ф-ции g:

$$(fg)'(a) = f'g(a) + fg'(a)$$

3) Перейдём к пределу при $x \to a$ в рав-ве:

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)} \cdot \frac{1}{x-a} \to -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

Тогда п. 3. следует из п. 2.

$\square$

<u>Теорема</u> 4.3 (Производная композиции)**.** *Пусть I, G - пром-ки в $\mathbb{R}$. Если ф-ция $f: I \to G$ диф-ма в т. a, ф-ция $g: G \to \mathbb{R}$ диф-ма в b и $b = f(a)$, то композиция $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ диф. в a, причём:*

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Доказательство.

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Рассм. $h\colon I \to \mathbb{R}, h(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(b)}{y-b}, y \neq b \\ g'(b), y = b \end{cases}$ Тогда h непр-на в $y = b$. Покажем, что при $x \in I, x \neq a$, верно:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \tag{2}$$

При $f(x) = f(a)$, обе части обнуляются. Иначе, если $f(x) \neq f(a)$, то 2 верно в силу определения h.
Т. к. h непр-на в $y = b$, то $\lim_{x\to a} h(f(x)) = h(b) = g'(b)$, по т. о пределе композиции. Поэтому существует:

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = \frac{(g\circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a} = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

$\square$

<u>Теорема</u> 4.4 (Предел обратной ф-ции)**.** *Пусть ф-ция $f: I \to \mathbb{R}$ непр-на и строго монотонна на пром-ке I. Если f дифф-ма в точке $a \in I$ и $f'(a) \neq 0$, то обр. ф-ция $f^{-1}\colon f(I) \to I$ - дифф-ма в т. $f(a) = b$ причём:*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

Доказательство. По т. об обр. ф-ции на $f(I)$ опр-на ф-ция f^{-1}, кот. там непр-на и строго монотонна. Следовательно, $f^{-1}(t) \to a, t \to b$ и $f^{-1}(t) \neq a$ при $t \neq b$. Поэтому по св-ву предела композиции:

$$\lim_{t\to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{t-b} = \lim_{t\to b} \frac{f^{-1}(t) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1})(t) - f(f^{-1}(b))} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

(Заменили $f(x) = t, x = f^{-1}(t)$)
Следовательно f^{-1} дифф-ма в т. b. □

Замечание. *Если при вып-нии остальных условий, $f'(a) = 0$, то обратная ф-ция не дифф-ма в точке b. Иначе, при дифф-нии получаем:*

$$f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1})'(b)f'(a) = 1$$

Теорема 4.5 (Таблица производных). *1)*

$$c' = 0, c \in \mathbb{R}$$

2)

$$(a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

3)

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1$$

4)

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

5)

$$(\sin x)' = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

8)

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

9)

$$(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1,1)$$

10)

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Доказательство. 2)

$$(e^x)' = \lim_{t \to x} \frac{e^t - e^x}{t-x} = e^x \lim_{t \to x} \frac{e^{t-x}-1}{t-x} = e^x$$

$$(a^x)' = e^{x \ln a} = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a$$

3) По т. о производной обр. ф-ции:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{(a^y)'} = \frac{1}{a^y \ln a}, y = \log_a x$$

$$\Rightarrow a^y = x \Rightarrow \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

4)

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

5) По первому зам. пределу и непр-ти cos:

$$\lim_{t \to x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t \to x} \frac{2 \sin \frac{t-x}{2} \cos \frac{t+x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = \cos x$$

6)

$$(\cos x)' = (\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right))' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\sin x$$

7)

$$(\operatorname{tg} x)' = (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

8)

$\operatorname{ctg} x$ - аналогично

9)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}, = \frac{1}{\cos y}, y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

Т. к. $x \in (-1, 1) \Rightarrow y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos y > 0 \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

$$\Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

10)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y =$$

$\square$

5 Лекция 17

Определение 5.1. Пусть $\phi, \psi : T \to \mathbb{R}, E = \phi(T)$. Говорят, что ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ параметрически задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in T$$

Если для $\forall t_1, t_2 \in T\,(\phi(t_1) = \phi(t_2) \Rightarrow \psi(t_1) = \psi(t_2))$ и $f(x) = \psi(t)$ при $x = \phi(t)$

В част-ти, если ϕ обратима, то $f = \psi \circ \phi^{-1}$

Следствие. *Пусть T - это пром-к, ϕ непр-на, строго монотонна на T, ϕ и ψ дифф-мы в т. t и $\phi'(t) \neq 0$. Тогда параметрически заданная ф-ция $f = \psi \circ \phi^{-1}$ дифф-ма в т. $x = \phi(t)$, причём:*

$$f'(x) = (\psi \circ \phi^{-1})' = (\psi')(\phi^{-1}(x)) \cdot (\phi^{-1}(x))' = \frac{\psi'(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

Определение 5.2. Говорят, что ф-ция f дифф-ма на мн-ве D, если f дифф-ма в каждой точке из D.

Ф-ция $x \mapsto f'(x), x \in D$, также наз-ся производной и обозн-ся в f'

5.1 Дифференциал ф-ции

Определение 5.3. Пусть $f : \underset{\text{пром.}}{I} \to \mathbb{R}$ - дифф-ма в т. a. Линейная ф-ция $h \mapsto f'(a) \cdot h, h \in \mathbb{R}$, наз-ся дифференциалом f в т. a и обозн-ся df_a. Для ф-ции $x \mapsto x$ дифф. в каждой точке, $dx(h) = 1 \cdot h$, поэтому значение дифф-ла $df_a(h) = f'(a)dx(h), h \in \mathbb{R}$ или в функциональной записи:

$$df_a = f'(a)dx$$

Следствие. *В условиях теоремы (4.2) (арифметические оп-ции с пределами):*

- $$\mathrm{d}(\alpha f + \beta g)_a = \alpha \, \mathrm{d}f_a + \beta \, \mathrm{d}g_a$$
- $$\mathrm{d}f \cdot g_a = g(a) \, \mathrm{d}f_a + f(a) \, \mathrm{d}g_a$$
- $$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_a = \frac{g(a) \, \mathrm{d}f_a - f(a) \, \mathrm{d}g_a}{g^2(a)}$$

Следствие. *В условиях теоремы о производной сложной ф-ции:*

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_b \circ \mathrm{d}f_a, b = f(a)$$

Доказательство.

$$\mathrm{d}(g \circ f)_a(h) = g'(f(a))f'(a) \, \mathrm{d}x(h) = g'(b) \, \mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{d}g_b(\mathrm{d}f_a(h)), h \in \mathbb{R}$$

□

Замечание. *Ф-ла $\mathrm{d}f_x = f'(x)dx$ верна, как в случае с независимой переменной x, так и в случае $x = \phi(t)$ (независимость формы 1-ого дифференциала).*

Следствие. *В условиях теоремы о дифференицровании обратной ф-ции верно:*

$$\mathrm{d}(f^{-1})_b = (\mathrm{d}f_a)^{-1}, b = f(a)$$

Доказательство. Следует из того, что:

$$k \mapsto \frac{1}{f'(a)} \cdot k \text{ - обратная ф-ция к линейной } h \mapsto f'(a)h$$

□

5.2 Теоремы о среднем

<u>**Определение**</u> **5.4.** Пусть f опр-на на интервале, содержащем т. a. Точка a наз-ся **точкой локального максимума** ф-ции f, если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)\,(f(x) \leq f(a))$$

Т. е. $f(a) = \underset{x \in B_\delta(a)}{max} f(x)$.

Если ", то a - **точка строгого лок. максимума.**

Аналогично определяется **точка (строгого) лок. минимума**.

Точки локального максимума (минимума) наз-ся **точками экстремума** ф-ции.

<u>**Теорема**</u> **5.1** (Ферма (необх. усл-ие экстремума))**.** *Пусть f опр-на в некот. окр-ти точки a. Если a - точка лок. экстремума ф-ции f и в этой точке* $\exists f'(a)$*, то* $f'(a) = 0$

Доказательство. Пусть, для опр-ти, a - точка лок. максимума, тогда:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)\,(f(x) \leq f(a))$$

Имеем:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0, x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f'(a) = f'_+(a) \leq 0$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0, x \in (a - \delta, a) \Rightarrow f'(a) = f'_-(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \exists f'(a) = 0$$

□

<u>Геометрический смысл</u>: касательная горизонтальна.
В дальнейшем, отрезок $[a, b]$ предполагается невырожденным.

<u>**Теорема**</u> **5.2** (Ролля)**.** *Если f непр-на на* $[a, b]$*, дифф-ма на* (a, b) *и* $f(a) = f(b)$*, то:*

$$\exists c \in (a, b) \colon f'(c) = 0$$

Доказательство. Если f постоянна на $[a,b]$, то $f'(c) = 0, \forall c \in (a,b)$
Пусть f непостоянна на $[a,b] \Rightarrow \exists d \in (a,b)\colon f(d) \neq f(a)$
Если $f(d) > f(a)$, то $\exists c \in [a,b]\colon f(c) = \max\limits_{[a,b]} f(x) \geq f(d) > f(a)$. По т. Ферма $f'(c) = 0$
Иначе, если $f(d) < f(a)$ - заменяем max на min □

Геом. смысл: Есть точка, кас. к которой - горизонтальна.

Следствие. *Пусть f - дифф-ма на пром-ке I, тогда между любыми двумя различными нулями ф-ции f найдётся хотя бы один нуль производной.*

Теорема 5.3 (Лагранжа). *Если f - непр-на на $[a,b]$, дифф-ма на (a,b), то:*

$$\exists c \in (a,b)\colon f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

Доказательство. Рассм. ф-цию

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - f(a)$$

Ф-ция h непр-на на $[a,b]$, дифф-ма на (a,b), $h(a) = 0 = h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a,b)\colon h'(c) = 0$$

Т. е.

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

Ч. Т. Д. □

Геометрический смысл: интерпретируя $f'(c)$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ как угловые коэфф-ты.

Задача 5.1. Пусть f непр-на на $[a,b)$ и дифф-ма на (a,b). Покажите, что если $\exists f'(a+0)$, то $\exists f'_+(a) = f'(a+0)$

Следствие (Оценка приращений). *Пусть f непр-на на пром-ке I и дифф-ма на $int(I)$. Если:*

$$\exists M > 0, \forall x \in int(I)\, |f'(x)| \leq M$$

То:

$$\forall x,y \in (|f(y) - f(x)| \leq M \cdot |y-x|)$$

Т. е. f - липшицева.

Доказательство. Пусть $x, y \in I, x \neq y$. Тогда, по Т. Лагранжа, между x и y найдётся т. c, что $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Т. к. $c \in int(I)$, то $|f(c)| \leq M$. Отсюда следует заявленная оценка. □

6 Лекция 18

Теорема 6.1 (Коши)**.** *Если f, g - непр-ны на $[a, b]$, дифф-мы на (a, b) и $g \neq 0$ на (a, b), то*

$$\exists c \in (a, b) \colon \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Отметим, что $g(b) \neq g(a)$ (исходя из т. Ролля: $\exists \xi \in (a, b) \colon g'(\xi) = 0$). Рассм. ф-цию:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

Тогда h непр-на на $[a, b]$, диф-ма на (a, b) и $h(a) = f(a) = h(b)$. По т. Ролля:

$$\exists c \in (a, b) \colon h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0$$

Поскольку $g'(c) \neq 0$, получаем то, что хотели:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

□

Геом. смысл: такой же, как в т. Лагранжа. Для парам. заданной ф-ции:

$$\begin{cases} x = g(t), \\ y = f(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Замечание. *В теореме Ферма требуется лишь сущ-е производной, поэтому в опир-ся на неё теоремах Ролля, Лагранжа и Коши остаются справедливыми при замене условия дифференцируемости ф-ции на (a, b) существованием там производной в $\overline{\mathbb{R}}$*

Пример.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

Однако не сущ-ет $f'(\pm 0)$, т. е. f' разрывна в нуле.

Теорема 6.2 (Дарбу)**.** *Если f дифф-ма на $[a,b]$. то для s, лежащего строго между $f'(a), f'(b)$, верно:*

$$\exists c\in(a,b)\colon f'(c)=s$$

Доказательство. Пусть для определённости $f'(a)<s<f'(b)$. Положим $\phi(x)=f(x)-sx$. Тогда ϕ дифф-ма на $[a,b]$:

$$\phi'(a)=f'(a)-s<0<f'(b)-s=\phi'(b)$$

Пусть $\phi(c)=\inf\limits_{[a,b]}\phi(x)$ (сущ-ет по т. Вейерштрасса).
При $c=a$ получаем:

$$\frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a}\geq 0, \forall x\in(a,b]\Rightarrow\phi'(a)\geq 0!!!\Rightarrow c\neq a$$

Аналогично показ-ся, что $c\neq b\Rightarrow c\in(a,b)\Rightarrow\phi'(c)=0$, (По т. Ферма) т. е. $f'(c)=s$. □

6.1 Приложения теореме о среднем

Теорема 6.3 (Условия монотонности)**.** *Пусть ф-ция f непр-на на пром-ке I и дифф-ма на $int(I)$.*

1) *Ф-ция f нестрого возр-ет (убывает) на $I \iff f'(x)\geq 0\,(\leq 0)\,,\forall x\in int(I)$*

2) *Если $f'(x)<0\,(>0)\,,\forall x\in int(I)$, то ф-ция f строго убывает (возрастает).*

3) *Ф-ция f постоянна на $I \iff f'(x)=0, \forall x\in int(I)$*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$) Пусть f нестрого возрастает на $I, x \in int(I)$. Тогда $f(y) \geq f(x), \forall y \in (x, \sup I)$. Поэтому $f'(x) = f'(x) = \lim_{y \to x+0} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

$\Leftarrow$) Пусть $x, y \in I$ и $x < y$. По т. Лагранжа

$$\exists c \in (x, y) \colon f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Т. к. $c \in int(I) \Rightarrow f'(c) \geq 0$, а значит, что $f(y) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

Замечание. *При замене $\geq$ на $>$ в $\Rightarrow$ получаем док-во п. 2.*

Замечание. *Док-во убыв. может быть сведено к рассм. $-f(x)$, где f - убыв.*

Замечание. *Обратное утв. к п. 2* ***неверно****. Рассм. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$. Она строго возрастает, но $f'(0) = 0$*

□

Пример. *Найти все дифф-мые ф-цие, удовл. в усл-ию:*

$$f'(x) = f(x), \forall x \in I$$

Решение. *Рассм. $g(x) = f(x)e^{-x}$. Тогда:*

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0, x \in I \text{ т. к. } f(x) = f'(x), x \in I$$

По т. об условии монотонности, получаем, что $\exists c \in \mathbb{R}, g(x) = c, \forall x \in I$

Следствие (Достаточные условия экстремума)**.** *Пусть f опр-на на (α, β) и $a \in (\alpha, \beta)$. Пусть f дифф-ма на $(\alpha, \beta) \setminus \{ a \}$ и непр-на в a. Справ-вы след. утв-я:*

1) *Если $f'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \leq 0$ для $\forall x \in (a, \beta)$, то a — точка лок. максимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).*

2) *Если $f'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha, a)$ и $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, \beta)$, то a - точка лок. минимума ф-ции f (строгого, если нер-ва строгие).*

Доказательство. 1) По теореме об условии монотонности, ф-ция f нестрого возр. на $(\alpha, a]$ и нестрого убывает на $[a, \beta)$. Поэтому $f(x) \leq f(a), \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow a$ — точка лок. максимума. Если нер-ва для производной строгие, то возр-е/убыв-е строгое $\Rightarrow$ нер-ва строгие $\Rightarrow a$ — точка строгого лок. максимума.

□

Следствие (О доказательстве нер-в). *Пусть f, g - непр-ны на $[a, b)$ и дифф-мы на $(a, b), f(a) \leq g(a)$ и $f'(x) \leq g'(x)$ $(<)$, $\forall x \in (a, b)$. Тогда $f(x) \leq g(x) (<), \forall x \in (a, b)$*

Доказательство. Рассм. $h(x) = g(x) - f(x)$

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow h \text{ — нестрого возрастает}$$

$$\Rightarrow h(x) \geq h(a) \geq 0 \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq g(x), \forall x \in (a, b)$$

□

Пример.

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, x > 0$$

Доказательство. ММИ:

- $n = 1$ — очев.
- Пусть утв. верно для $n - 1$. Док-ем для n. Рассм.:

  $$f(x) = e^x, g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}, x \in [0; +\infty)$$

  $$f(0) = g(0), f'(x) = e^x > 1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = g'(x)$$

  Тогда $f(x) > g(x)$ по предыдущему следствию.

□

Теорема 6.4 (Усиление условия монотонности). *Пусть ф-ция f непр-на на $[a, b]$ и A не более чем счётное мн-во, $A \subset [a, b]$. Если f дифф-ма на $[a, b] \backslash A$. $f'(x) \geq 0$ и на $[a, b] \backslash A$, то f нестрого возр.*

Доказательство. Дост-но установить, что $f(a) \leq f(b)$.

Рассм. сначала случай $f'(x) > 0$ на $[a, b] \backslash A$. Предположим, что $f(a) > f(b)$. $f(A)$ не более чем счётно $\rightarrow \exists d \notin f(A)$ и $f(a) > d > f(b)$. Рассм. $B = \{ x \in [a, b] \colon f(x) = d \}$.
Положим $c = \sup B$. Т. к. B - замкнуто, то $c \in B$. В част-ти,

$$f'(c) > 0, \text{ т. к. } c \notin A, c \in (a, b)$$

С другой стороны:

$$\forall x \in (c, b), f(x) < d \text{ (по т. о пром. значениях)}$$

$$f'(c) = \lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0!!!$$

□

Следствие. *Пусть f - непр-на на $[a, b]$ и дифф-ма на $[a, b] \setminus A$, где $A \subset [a, b]$ - не более чем счётно. Если $m \leq f' \leq M$ на $[a, b] \setminus A$, то:*

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Доказательство. Дост-но применить предыдущую теорему для ф-ций:

$$\phi(x) = f(x) - mx$$

$$\psi(x) = Mx - f(x)$$

На $[a, b]$ □

7 Лекция 19

Важным приложением теоремы Коши о среднем, явл-ся правило Лопиталя:

Теорема 7.1 (Правило Лопиталя для неопределённости $\frac{0}{0}$)**.** *Пусть $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ф-ции f, g опр-ны на (a, b) и дифф-мы, причём $g' \neq 0$ на (a, b). Пусть:*

1)

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0$$

2)

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Тогда:

$$\exists \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Простое. $a \in \mathbb{R}$. Сущ-е предела установим по Гейне. Рассм. $\{ x_n \} \subset (a,b)\colon x_n \to a$. Доопределим по непр-ни ф-ций f, g в т. a, положив $f(a) = g(a) = 0$. По т. Коши о среднем:

$$[a, x_n]\colon \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \text{ для некот. т. } c_n \in (a, x_n)$$

Т. к. $a < c_n < \underset{\to a}{x_n} \Rightarrow c_n \to a$. Поэтому:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = L$$

По опр-ю Гейне $\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ $\square$

<u>**Замечание**</u>**.** *Рассм. отдельно случай $a = -\infty$. Можно считать, что $b < 0$. Рассм. ф-ции:*

$$\phi(t) = f\left(-\frac{1}{t}\right), \psi(t) = g\left(-\frac{1}{t}\right), t \in (0, -\frac{1}{b})$$

$$\lim_{t\to+0} \phi(t) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{t\to+0} \psi(t) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{t\to+0} \frac{\phi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t\to+0} \frac{f'\left(-\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}{g'\left(-\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

По доказанному, $\exists \lim_{t\to+0} \frac{\phi(t)}{\psi(t)} = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

<u>**Лемма**</u> **7.2.** *Пусть $\{ a_n \}, \{ b_n \}$ - числ. п-ти, причём $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Тогда:*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$$

Доказательство. Введём обоз-я:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n = c, \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$$

$$\exists \{ n_k \}, n_k \text{ - строго возр.: } a_{n_k} b_{n_k} \to c \Rightarrow a_{n_k} = \frac{a_{n_k} b_{n_k}}{b_{n_k}} \to \frac{c}{1} \le a$$

$$\exists \{ m_k \}, m_k \text{ - строго возр. } : a_{m_k} \to a, b_{m_k} \to 1 \Rightarrow a_{m_k} b_{m_k} \to a \leq c$$
$$\Rightarrow a = c$$

Док-во для нижнего предела аналогично. $\square$

Теорема 7.3 (Правило Лопиталя для неопр. $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Всё то же самое, но в* (1):
$$\lim_{x \to a+0} |f(x)| = \lim_{x \to a+0} |g(x)| = +\infty$$

Доказательство. 1) $L \in \mathbb{R}, (L = +\infty)$. Рассм. $\{ x_n \} \subset (a, b), x_n \to a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По усл-ию (2), $\exists y \in (a, b), \forall c \in (a, y), \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - L \right| < \varepsilon$. Можно считать, что все $x_n \in (a, y), f \neq 0, g \neq 0$ на (a, y). По т. Коши о среднем $\frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$, для некот. $c_n \in (x_n, y)$. Т. к.:
$$\left| \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} - L \right| < \varepsilon, \left(\frac{f'(c)}{g'(c)} > M \right)$$

Тогда:
$$L - \varepsilon < \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} < L + \varepsilon, \left(\frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} > M \right)$$
$$\iff L - \varepsilon < \frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(y)}{f(x_n)}\right)}{g(x_n)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}\right)} < L + \varepsilon, \left(\frac{f(x_n)\left(1 - \frac{f(y)}{f(x_n)}\right)}{g(x_n)\left(1 - \frac{g(y)}{g(x_n)}\right)} > M \right)$$

Однако $1 - \frac{f(y)}{f(x_n)} \to 1$ (аналогично с g).
Воспользуемся леммой и получим:
$$(M <)\, L - \varepsilon \leq \varliminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq \varlimsup_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \leq L + \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ - произвольное, то:
$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \varliminf_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

След-но:
$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L$$

Тогда по Гейне $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$\square$

Замечание. *Правило Лопиталя остётся верным и для $x \to b-0$, (достно сделать замену $x \to -x$). А значит, оно верно и для $x \to x_0$.*

Задача 7.1. Докажите, что в правиле Лопиталя для $\frac{\infty}{\infty}$ можно снять условие $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$

Пример. *1)*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \alpha > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

2)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \alpha > 0, a > 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$$

$$\frac{x^\alpha}{a^x} = \left(\frac{x}{a^{\frac{x}{a}}}\right)^\alpha, \lim_{y\to 0} y^\alpha = 0$$

Задача 7.2. Доказать:

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

Замечание. *Здесь **не применимо** правило Лопиталя.*

7.1 Производные высших порядков

Производные высших порядков определяются индуктивно.

Определение 7.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $f^{(1)} = f'$. Если $n > 1$, $f^{(n-1)}$ - определена в некот. окр-ти точки a и дифф-ма в т. a, то f **наз-ся дифф-мой n раз в точке** a и $f^{(n)}(a) = (f^{(n-1)})'(a)$

Также считаем, что $f^{(0)} = f$

Замечание. *Сущ-е производной n-го порядка f в т. a влечёт при $n > 1$ существование производной $(n-1)$-го порядка в некот. окр-ти точки a.*

Замечание. *Т. к. операция взятия производной линейна, справедливо следующее:*

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x) + \beta g^{(n)}(x)$$

Теорема 7.4 (Ф-ла Лейбница). *Если f, g дифф-ма n раз в точке x, то их произведение также дифф-мо n раз в точке x, причём справедлива ф-ла:*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

Доказательство. Док-во проведем через ММИ по n:

- База $n = 1$ - проверяли
- Предположим утв-е верно для n. Тогда покажем, что утв-е верно для $n + 1$. Тогда:

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} \left(f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)} g^{(n+1-k)}) =$$

$$= f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(C_n^{k-1} + C_n^k\right)}_{=C_{n+1}^k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(n+1)} g^{(0)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

□

Определение 7.2. Ф-ция f наз-ся n раз дифф-мой на мн-ве D, если f дифф-ма n раз в каждой точке из D. Если при этом ф-ция $x \mapsto f^{(n)}(x)$ - непр-на, то f наз-ся n раз непрерывно дифф-мой на D.

Обозначение. *$C^n(D)$ - мн-во n раз непр-но дифф-мой на D ф-ций.*

$$C^\infty(D) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n(D)$$