Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

16 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 6

Определение 1.1. **Вывод** - п-ть $\phi_1, \ldots, \phi_n$, т. ч. $\forall i$:

- ϕ_i - аксиома
- ϕ_i - получается по правилам МР из $\phi_i, \phi_k, j < i, k < i$.
  Это значит, что $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$

Ф-ла **выводима** ($\vdash \phi$), если ϕ встреч-ся в нек-ром выводе.

Теорема 1.1. *ϕ - тавтология $\Rightarrow$ ($\vdash \phi$)*

Пример.

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

1)

$$\neg A \to (A \to B) \text{ аксиома 9}$$

2)

$$B \to (A \to B) \text{ - аксиома 9}$$

3)

$$(\neg A \to (A \to B)) \to ((B \to (A \to B)) \to ((A \vee B) \to (A \to B)))$$

4)

$$(B \to (A \to B)) \to ((\neg A \vee B) \to (A \to B)) \text{ - МР 1, 3}$$

5)

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

Определение 1.2. Вывод из мн-ва посылок Γ - это п-ть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ при этом ϕ_i может быть либо аксиомой, либо эл-т Γ, либо получается по m. p.

Лемма 1.2 (О дедукции)**.**

$$\Gamma \vdash A \to B \iff \Gamma \cup \{ A \} \vdash B$$

<u>**Пример**</u> (Силлогизм)**.**

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \iff$$

$$\iff \{ A \to B \} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$$

$$\iff \{ A \to B, B \to C \} \vdash (A \to C)$$

$$\iff \{ A, A \to B, B \to C \} \vdash C$$

1) A *- посылка*

2) $A \to B$ *- посылка*

3) B *по MP 1, 2*

4) $B \to C$ *- посылка*

5) C *- MP 3, 4*

Доказательство. $\Rightarrow$) Если вывели $A \to B$, то из $\Gamma \cup \{ A \}$ можно вывести B по MP

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \cup \{ A \} \vdash B$. Тогда сущю вывод $\phi_1, \ldots, \phi_n = B$ из $\Gamma \cup \{ A \}$

Каждый ϕ_i - либо акс., либо $\in \Gamma$, либо $= A$, либо вывод-ся по MP. Мы докажем по инд-ции, что $\Gamma \vdash A \to \phi_i$:

1) ϕ_i - акс.
   1) ϕ_i
   2) $\phi_i \to (A \to \phi_i)$ - A1
   3) $A \to \phi_i$, MP 1, 2.
2) $\phi_i \in \Gamma$, аналогичен (1)
3) $\phi_i = A$. На прошлой лекции выводили $\vdash A \to A$ без Γ
4) ϕ_i по MP: $\exists j, k, < i$:

$$\phi_k = (\phi_j \to \phi_i)$$

По инд-ции: $\Gamma \vdash A \to \phi_j, \Gamma \vdash A \to \phi_k$, т. е. $\Gamma \vdash A \to (\phi_j \to \phi_i)$:

$$(A \to (\phi_j \to \phi_i)) \to ((A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i)) \text{ - A2}$$

$$(A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

$$(A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

$\square$

Пример.

$$\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$$

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

1) $A \wedge B$ *- посылка*

2) $(A \wedge B) \to B$ *- акс. 4*

3) B *- MP 1, 2*

4) $(A \wedge B) \to A$ *- акс. 3*

5) A *- MP 1, 4*

6) $(B \to (A \to (B \wedge A)))$ *- акс. 5*

7) $A \to (B \wedge A)$ *- MP 3, 6*

8) $B \wedge A$ *- MP 5, 7*

Лемма 1.3 (Правила введения и разбиения конъюнкции)**.**

$$\Gamma \cup \{ A \wedge B \} \vdash C$$

$$\iff \Gamma \cup \{ A, B \} \vdash C$$

Также:

$$\Gamma \vdash A \wedge B \iff \begin{cases} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash B \end{cases}$$

Пример.

$$(A \to \neg A) \to \neg A$$

Вывод:

1-5) $A \to A$

6) $(A \to A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ *- A10*

7) $(A \to \neg A) \to \neg A$ *- MP 5,6*

Пример.

$$\vdash A \to \neg\neg A$$

$$\iff A \vdash \neg\neg A$$

$$\vdash \neg A \to (A \to B) \iff$$

$$\neg A \vdash A \to B \iff \neg A, A \vdash B \iff A \vdash \neg A \to B$$

$$\vdash A \to (\neg A \to B)$$

$$A \vdash \neg\neg A$$

1) $A \to (\neg A \to B)$

2) A - *посылка*

3) $\neg A \to B$, *mp 2, 1*

4) $A \to (\neg A \to \neg B)$

5) $\neg A \to \neg B$, *MP 2, 4*

6) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ - *A10*

7) $(\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A$ - *MP 3, 6*

8) $\neg\neg A$ - *MP 5, 7*

Лемма 1.4 (Правило рассуждения от противного).

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B \\ \Gamma, A \vdash \neg B \iff \Gamma \vdash A \to \neg B \end{cases} \iff \Gamma \vdash \neg A, \text{ A10 + MP x2}$$

□

Пример (Закон контрапозиции).

$$\frac{\dfrac{A \to B, \neg B, A \vdash B \qquad\qquad A \to B, \neg B, A, \vdash \neg B}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}\ \textit{Рассуждение от противного}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\ \textit{ЛОД x2}$$

Пример (Закон Де Моргана).

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$

$$\iff (\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$$

1) $(A \wedge B) \to A$ *- акс. 3*

2) $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ *- закон контрапозиции.*

3) $(A \wedge B) \to B$ *- акс. 4*

4) $\neg B \to \neg(A \wedge B)$ *- контрапозиция*

5) $(\neg A \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg B \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)))$

6) MP 2x

Лемма 1.5 (Правило контрапозиции). $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$

Лемма 1.6 (Правило разбора случаев).

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

Лемма 1.7 (Правило исчерп. разбора случаев).

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Пример.

$$\dfrac{\dfrac{\neg\neg A, A \vdash A \qquad \neg\neg A, \neg A \vdash A}{\neg\neg A \vdash A}}{\vdash \neg\neg A \to A}$$

2 Лекция 7

Теорема 2.1 (О полноте ИВ). *ϕ - тавтология $\Rightarrow$ ϕ выводима*

Правило исчерп. разбора случаев: Пусть Γ - нек-рое мн-во ф-ул, при это $\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, \neg A \vdash B$
Тогда: $\Gamma \vdash B$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Обозначение.

$$p^{\varepsilon} \rightleftharpoons \begin{cases} p, \varepsilon = 1 \\ \neg p, \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Лемма 2.2 (Основная)**.** *Пусть* ϕ *- ф-ла от* n *переменных* ($\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$)*.*

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n, \phi(a_1, \ldots, a_n) = a \in \{0, 1\}$$

Тогда:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi^a$$

Рассм. переход:
ОСНОВНАЯ ЛЕММА $\Rightarrow$ ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ ИВ

$$\phi \text{ - тавтология} \Rightarrow \text{ при всех } (a_1, \ldots, a_n)$$
$$\phi(a_1, \ldots, a_n) = 1 \underset{\text{По лемме}}{\Longrightarrow} p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \phi$$

Пример. $n = 3$*: le Picture*

Лемма 2.3 (Базовая)**.**
AND-ы:

$$A, B \vdash A \wedge B$$
$$\neg A, B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$
$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$$

OR-ы:

$$A, B \vdash A \vee B$$
$$\neg A, B \vdash A \vee B$$
$$A, \neg B \vdash A \vee B$$
$$\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$$

Implication-ы:

$$A, B \vdash A \rightarrow B$$
$$\neg A, B \vdash A \rightarrow B$$

$$A, \neg B \vdash \neg(A \vdash B)$$

$$\neg A, \neg B \to A \to B$$

И ещё:

$$\neg A \vdash \neg A$$

$$A \vdash \neg(\neg A)$$

Док-во основной леммы. Инд-ция по построению ф-лы:

База) Переменная: $p_i^{a_i} \vdash p_i^{a_i}$

Переход) Пусть, например:

$$\phi = (\xi \wedge \eta)$$

$$\xi(a_1, \ldots, a_n) = a, \eta(a_1, \ldots, a_n) = b \Rightarrow \phi(a_1, \ldots, a_n) = a \cdot b$$

По предположению индукции:

$$p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \xi^a \text{ и } p_1^{a_1}, p_2^{a_2}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash \eta^b$$

По базовой лемме:

$$\xi^a, \eta^b \vdash \phi^{a \cdot b}$$

Запишем эти 3 вывода (**подряд**):

$$p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \phi^{a \cdot b}$$

□

Другое док-во. Пусть Γ - мн-во пропозициональных ф-л.

Определение 2.1. Γ **совместно**, если при некот. значениях переменных все ф-лы из Γ истинны.

Определение 2.2. Γ - **противоречиво**, если для некот. ф-лы ϕ верно:

$$\begin{cases} \Gamma \vdash \phi \\ \Gamma \vdash \neg\phi \end{cases}$$

Теорема 2.4. Γ *совместна* $\overset{*}{\Longleftrightarrow}$ Γ *непротиворечива.*

Рассмотрим связь теоремы о совм. и непрот. с теор. о корр. и полн.:

Теорема 2.5 (О корректности)**.**

$$\vdash \phi \Rightarrow \{\, \neg\phi \,\} \text{ - } \textit{противор.} \overset{*}{\Longrightarrow} \{\, \neg\phi \,\} \text{ - } \textit{несовм.} \Rightarrow \forall a, \neg\phi(a) = 0 \iff \phi(a) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi \text{ - } \textit{тавтология}$$

Теорема 2.6 (О полноте)**.**

$$\phi \text{ - } \textit{тавтология} \Rightarrow \{\, \neg\phi \,\} \text{ - } \textit{несовм.} \overset{*}{\Rightarrow} \{\, \neg\phi \,\} \text{ - } \textit{противоречиво} \Rightarrow \neg\neg\phi \vdash \phi$$

$$\frac{\neg\phi \vdash B \qquad\qquad \neg\phi \vdash \neg B}{\vdash \neg\neg\phi}$$

□

Доказательство. 1) Γ против. $\Rightarrow$ Γ несовм.

Теорема 2.7 (Обобщённая теорема о корректности)**.** *Если $\Gamma \vdash A$ и все ф-лы из Γ верны на $(a_1, \ldots, a_n)$, то и A верна на том же наборе.*

Д-во: индукция по номеру ф-лы в выводе.

Γ - совм. $\Rightarrow$ Все ф-лы из Γ верны на нек-ром наборе.

$\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \phi$ верно на том же наборе

$\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\phi \Rightarrow - - - - - || - - - - -$

Но ϕ и $\neg\phi$ не м. б. верны одновременно. Противор.

2) Γ непрот. $\Rightarrow$ Γ совм.
Пусть $\triangle$ непрот. Будем говорить, что $\triangle$ - полное, если для $\forall\phi$ верно $\triangle \vdash \phi$ или $\triangle \vdash \neg\phi$.

Лемма 2.8 (I)**.** Γ *непрот* $\Rightarrow \Gamma \subset \triangle$ *для некот. полного непрот.* $\triangle$

Лемма 2.9 (II)**.** $\triangle$ *полное, непрот.* $\Rightarrow \triangle$ *- совм.*

Док-во леммы I для счётного мн-ва перемен. Если переменных сч. мн-во то и ф-лы тоже.
Пусть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ - все ф-лы.
Опр. Γ_i по инд-ции:

$$\Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_i = \begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\}, & \text{- если это непрот.} \\ \Gamma_{i-1} \cup \{\, \neg\phi_i \,\} & \text{- иначе} \end{cases}$$

Утверждение 2.1. *Все Γ_i - непрот.*

Доказательство.

$$\begin{cases} \Gamma_{i-1} \cup \{\, \phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\phi_i \\ \Gamma \cup \{\, \neg\phi_i \,\} \text{ - прот. } \Rightarrow \Gamma_{i-1} \vdash \neg\neg\phi_i \end{cases}$$

$\Rightarrow \Gamma_{i-1}$ - прот. $\Rightarrow$ пришли к противоречию.

$\square$

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$$
$$\triangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i \text{ - тоже непрот.}$$

Если $\triangle$ прот., то прот. использ. кон. число ф-л из $\triangle$. Каждое δ_j лежит в Γ_{k_j}. Тогда прот. выв-ся из $\Gamma_{max\{\, k_j \,\}}$. Но все конечные Γ_i непрот.

Док-во леммые II. $\triangle$ - полн. $\Rightarrow$ для перем. p_i, $\triangle \vdash p_i \vee \triangle \vdash \neg p_i$.
Набор. значений:

$$p_i = \begin{cases} 1, \triangle \vdash p_i \\ 0, \triangle \vdash \neg p_i \end{cases} \tag{1}$$

Д-м, что ф-лы из $\triangle$ верны на системе (1). Ф-ла - перем. $\Rightarrow$ согл. опр. системы (1):

$$\phi = \neg\psi$$

$\square$

Более общ утв.:

$$\begin{cases} \triangle \vdash \phi \Rightarrow \phi \text{ верна на системе (1)} \\ \triangle \nvdash \phi \Rightarrow \phi \text{ - неверна на системе (1)} \end{cases}$$

$\square$

$\square$