

Матан

Сергей Григорян

27 ноября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 22	3
2	Лекция 23	8
2.1	Неопределённый интеграл	8
3	Лекция 24	10
3.1	Интегралы Римана и его св-ва	10
4	Лекция 25	15
4.1	Мн-во интегрируемых ф-ций	17

1 Лекция 22

Следствие. Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на $\text{int } I$.

- 1) Ф-ция f выпукла вниз на $I \iff f''(x) \geq 0, x \in \text{int } I$
- 2) Если $f''(x) > 0$ на $\text{int } I$, то f строго выпукла вниз на I .

Пример. 1) $y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на \mathbb{R} , т. к.:

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

- 2) $y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

- 3) $y = x^p$ на $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{выпукла вниз}$$

При $p \in (0, 1)$ — вогнута.

- 4) $\ln(1+x) < x$, при $x > -1, x \neq 0$:

$y = \ln(1+x)$ — строго выпукла вверх (вогнута) на $(-1, +\infty)$

$y = x$ — касат. к $x \mapsto \ln(1+x)$ в точке $x = 0$

По т. ?? получаем заявленное нер-во.

Определение 1.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \text{int } I$. Если:

- 1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$
- 2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$
- 3) f — непр-на в a .

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f .

Следствие. Если ф-ция f дважды дифф-ма на $\text{int } I$ и $a \in \text{int } I$ — точка перегиба f , то $f''(a) = 0$:

Доказательство. Пусть для опре-ти f выпукла вниз на $(a - \delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a - \delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a + \delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f' . По Т. Ферма $f''(a) = 0$ \square

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение" на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 1.1 (Лемма о 3-ёх хордах). Пусть ф-ция f выпукла вниз на (a, b) и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (1)$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(t - x_1) + f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1)$, $f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \leq \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{\lambda(x) - \lambda(x_1)}{x - x_1}, \frac{\lambda(x_2) - \lambda(x)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

\square

Задача 1.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

Следствие. Для любой точки $x \in (a, b)$ ф-ция $\nu: (a, b) \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

нестрого возрастает на $(a, b) \setminus \{x\}$

Доказательство. $y, z \in (a, b) \setminus \{x\}$, $y < z$ \square

Теорема 1.2. Если ф-ция f выпукла вниз на (a, b) , то f непр-на на (a, b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.

Доказательство. Зафикс. $x \in (a, b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 1, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, существуют конечные $\nu(x-0) \leq \nu(x+0)$, т. е. \exists конечные левая и правая производная f в точке x : $f'_-(x) \leq f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x , а значит непр-на в точке x .

Перейдём к пределу в левом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_1+0$, а также в правом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_2-0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возрастает на (a, b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a, b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непроти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x)$, откуда:

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f \text{ дифф-ма в т. } x_0$$

□

Теорема 1.3 (Нер-во Йенсена). Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I . $x_1, \dots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\geq)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I .
ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости
- Пусть нер-во верно для n . Установим справедливость для $n + 1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$$

Т. к. $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

$$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

По предположению инд-ции:

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

□

Пример. Пусть $x_1, \dots, x_n \geq 0$, тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

По нер-ву Йенсена:

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

□

Пример (Нер-во Гельдера). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.

$f = x^p$ — выпукла вниз

$$x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{1}{q}}}, \lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k x_k = \frac{a_k b_k^{q(1-\frac{1}{p})}}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{a_k b_k}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k f(x_k) = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \frac{a_k^p}{b_k^q} = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Пример (Нер-во Минковского). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и $p \geq 1$. Тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $p = 1$ — верно. $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p &= (a_1 + b_1)(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} = \\ &= a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1} \end{aligned}$$

нер-во Гельдера

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Поделим LHS и RHS на $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ и получим желаемый результат.

□

2 Лекция 23

2.1 Неопределённый интеграл

Определение 2.1. Пусть ф-ция f опр-на на пром-ке I .

- 1) Ф-ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **первообразной на I** , если $F'(x) = f(x), \forall x \in I$
- 2) Ф-ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **обобщённой первообразной на I** , если F непр-на на I и $F'(x) = f(x), \forall x \in I \setminus A$, причём A не более чем счётно.

Пример.

$$f = \operatorname{sign} x, I = [-1, 1]$$

По т. Дарбу, всякая производная дифференцируемой ф-ции принимает все промежуточные значения $\Rightarrow f$ не имеет первообразной на отрезке $[-1, 1]$

Её **обобщённая** первообразная: $F(x) = |x|$

Теорема 2.1 (Описание класса первообразных). Если F — первообразная (обобщённая) f на I и $c \in \mathbb{R}$, то $F + c$, тоже обобщённая первообразная f на I .

Если F_1, F_2 — первообразные (обобщённые) f на I , то их разность постоянна на I .

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{условие постоянства}} F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$

Для обобщённых первообразных следует из дополнения к теореме 10 (10') \square

Определение 2.2. Произвольная первообразная ф-ции f на I наз-ся **неопределённым интегралом** ф-ции f на I и обозначается:

$$\int f(x)dx \text{ или } \int f dx$$

Замечание. Операция перехода от ф-ции к её неопр. интегралу наз-ся **интегрированием**.

Замечание. Формально dx в обозначении не несёт смысловой нагрузки, однако его использование **бывает весьма полезным**, если трактовать $f dx$ как дифференциал. ($f' dx = df$)

Замечание. Из неудобств отметим, что в обозначении никак не фигурирует пром-к I .

Утверждение 2.1. Неопределённый интеграл имеет следующие св-ва:

1) Если $\exists \int f dx$ на I , то $(\int f dx)' = f$ на I

2) Если $\exists \int f dx, \int g dx$ на I , а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то на I суц-ет:

$$\int (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int f dx + \mu \int g dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

3) Если u, v - дифф-мые ф-ции на I и $\exists \int v u' dx$ на I , то на I суц-ет:

$$\int v' u dx$$

А также верна ф-ла (интегрирование по частям):

$$\int v u' dx = v u - \int v' u dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

Или:

$$\int u dv = v u - \int v du + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

4) Если F — первообразная f на I , ϕ дифф. на пром-ке $Y, \phi(Y) \subset I$, то суц-ет:

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$ (**ф-ла подстановки**)

Замечание. Если дополнительно ϕ строго монотонна на Y , то на $\phi(Y)$

$$t = \phi^{-1}(x)$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx + C$$

Теорема 2.2 (Таблица неопределённых интегралов). *Смотри таблицу в книжке.*

Задача 2.1. Пусть f дифф-ма на I с $f' \neq 0$ на I . Пусть F — первообразная f на I . Запишите:

$$\int f^{-1}(y)dy$$

через f .

Замечание. В отличие от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит за пределы элементарных функций, напимер:

$$\int e^{-x^2} dx$$

Замечание. Все св-ва переносятся на обобщ. интеграл.

3 Лекция 24

3.1 Интегралы Римана и его св-ва

Пусть $[a, b]$ — невырожденный отрезок.

Определение 3.1. Разбиение T отр-ка $[a, b]$ наз-ся конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^n$, т. ч. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введём обозн-я:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, |T| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$$

j

Пусть функция f опр-на на $[a, b]$ и T — разбиение $[a, b]$. Положим:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Сумма:

$$S_T(f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$s_T(f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

Эти суммы наз-ся верхней и нижней суммами Дарбу ф-ции f , отвеч. разбиению T

Лемма 3.1. Пусть $T, T' -$ разбиения $[a, b]: T \subset T'$, тогда:

$$s_T(f) \leq s_{T'}(f) \leq S_{T'}(f) \leq S_T(f)$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_i\}_{i=1}^n$. Рассм. сначала случай, когда:

$$T' = T \cup \{c\}, c \notin T$$

Сущ-ет такое k , что:

$$c \in (x_{k-1}, x_k)$$

Положим:

$$m'_k = \inf_{[x_{k-1}, c]} f(x), m''_k = \inf_{[c, x_k]} f(x)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} m''_k, m'_k &\geq m_k \\ \Rightarrow s_{T'}(f) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i + m_k(c - x_{k-1} + x_k - c) = s_T(f) \end{aligned}$$

Аналогично док-ся правое нер-во. \square

Лемма 3.2. Пусть $|f| \leq M$ и T' получена из T добавлением m точек, тогда:

$$\begin{aligned} s'_T f - s_T f &\leq 2Mm |T| \\ S_T f - S_{T'}(f) &\leq 2Mm |T| \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $T' = T \cup \{c\}$, тогда:

$$\begin{aligned} S_{T'}(f) - S_T(f) &= \underbrace{(m'_k - m_k)}_{\leq 2M}(c - x_{k-1}) + \underbrace{(m''_k - m_k)}_{\leq 2M}(x_k - c) \leq \\ &\leq 2M(c - x_{k-1} + x_k - c) \leq 2M \underbrace{|T|}_{\leq |T|} \end{aligned}$$

Общий результат получается индукцией по M . Для верхний сумм — аналогично. \square

Из леммы (3.1) получаем утв-е:

Следствие. Для любых разбиений T_1, T_2 отр-ка $[a, b]$ вып-но:

$$s_{T_1}(f) \leq S_{T_2}(f)$$

Доказательство. Рассм. $T = T_1 \cup T_2$, тогда по лемме (3.1):

$$s_{T_1}(f) \leq s_T(f) \leq S_T(f) \leq S_{T_2}(f)$$

\square

Определение 3.2. Величины:

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b f} &= \sup s_T(f) \\ \overline{\int_a^b f} &= \inf S_T(f) \end{aligned}$$

Наз-ся соотв. верхними и нижними интегралами Дарбу.

Следствие. Переходя в нер-ве следствия 3.1 к \inf по всем разбиениям T_1 при фикс T_2 , и к \sup по всем разбиениям T_2 при фикс. T_1 , получаем:

$$s_T(f) \leq \underline{\int_a^b f} \leq \overline{\int_a^b f} \leq S_T(f)$$

Определение 3.3. Пусть ф-ция f опр-на на отр-ке $[a, b]$, ф-ция f наз-ся интегрируемой (по Риману), если:

$$\underline{\int_a^b f} = \overline{\int_a^b f} \in \mathbb{R} \text{ — конечны}$$

Число $I = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ наз-ся определённым интегралом ф-ции f по $[a, b]$.
 Мн-во всех интегрируемых по Риману на $[a, b]$ ф-ций будем обозначать, как \mathcal{R}

Пример. $f = 1$ на $[a, b] \Rightarrow$ для любых разбиений $T = \{x_i\}_{i=0}^n$:

$$\begin{aligned} s_T(f) = S_T(f) &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = b - a \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = b - a \end{aligned}$$

Лемма 3.3. Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то f огр-на на $[a, b]$

Доказательство. Пусть f не огр. сверху на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T ф-ция f не огр. сверху на $[x_{i-1}, x_i]$ для некот. i , а значит:

$$M_i = +\infty \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = +\infty$$

Если f не огр. снизу, то $\underline{\int_a^b} f = -\infty$. □

Замечание. Ограниченность ф-ции является **необходимым, но не достаточным условием интегрируемости.**

Пример. Ф-ция Дирихле:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Для произвольного отр-ка $[a, b]$, имеем:

$$\begin{aligned} s_T(\mathcal{D}) &= 0, S_T(\mathcal{D}) = b - a \\ &\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = 0, \overline{\int_a^b} f = b - a \end{aligned}$$

Следствие (Аддитивность подотрезков). Пусть $a < c < b$. Ф-ция f интегрируема по Риману на $[a, b] \iff f$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, при этом справ-ва формула:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

Доказательство. Покажем, что:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

Пусть $T_1 = \{x_i\}_{i=0}^k$ — разбиение $[a, c]$, $T_2 = \{x_i\}_{i=k+1}^n$ — разбиение $[c, b]$, тогда $T = T_1 \cup T_2$ — разбиение $[a, b]$, причём:

$$\begin{aligned} s_T(f) &= \sum_{i=0}^k m_i \Delta x_i + \sum_{i=k+1}^n m_i \Delta x_i = \\ &= s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f) \end{aligned} \quad (2)$$

Сл-но, $\int_a^b f \geq s_{T_1}(f) + s_{T_2}(f)$

Переходя в последнем нер-ве к \sup сначала по всем разбиениям T_2 отр-ка $[c, b]$, затем по всем разбиениям T_1 отр-ка $[a, c]$ получим:

$$\int_a^b f \geq \int_a^c f + \int_c^b f$$

С другой стороны, из (2) следует:

$$s_T(f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f$$

Рассм. произв. разбиение \tilde{T} отр-ка $[a, b]$ и $T = \tilde{T} \cup \{c\}$:

$$\begin{aligned} s_{\tilde{T}}(f) &\leq s_T(f) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \\ \Rightarrow \int_a^b f &\leq \int_a^c f + \int_c^b f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Аналогично для верхнего интеграла Дарбу.

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, тогда:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \leq \overline{\int_a^c f} + \overline{\int_c^b f} = \overline{\int_a^b f} = \int_a^b f(x) dx$$

Сл-но $\int_a^c f = \overline{\int_a^c f}, \int_c^b f = \overline{\int_c^b f}$

Пусть $f \in \mathcal{R}$

□

4 Лекция 25

Следствие. Если $f \in R[a, b]$ и $[c, d] \subset [a, b]$, тогда $f \in R[c, d]$

Замечание.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Задача 4.1. Проверить, что аддитивность верна при любом расположении точек a, b, c

Следствие. Пусть $f, g \in R[a, b]$, и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\lambda f + \mu g \in R[a, b]$$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b f dx$$

Доказательство.

Замечание. $\lambda \geq 0, A, B \subset \mathbb{R}$:

$$\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$$

$$\lambda(\sup A + \sup B) = \sup A + \sup B$$

$$\sup(-A) = -\inf A$$

Пусть $\lambda \geq 0$. Т. к. $\inf_{x \in E} \lambda f(x) = \lambda \inf_{x \in E} f(x)$, для любого $E \subset [a, b]$, то $s_T(\lambda f) = \lambda s_T(f)$ для произвольного разб-я T отр-ка $[a, b]$. По опр-ю:

$$\underline{\int_a^b \lambda f \, dx} = \sup_T s_T(\lambda f) = \lambda \underline{\int_a^b f \, dx}$$

Аналогично устанавливается, что верхний интеграл Дарбу обладает таким св-вом (св-вом однородности).

Т. к. $\inf_E -f = -\sup_E f, \forall E \subset [a, b]$, то

$$\underline{\int_a^b (-f)} = -\overline{\int_a^b f}, \overline{\int_a^b (-f)} = -\underline{\int_a^b f}$$

Сл-но, $(-f) \in R[a, b], \int_a^b (-f) = -\int_a^b f, \lambda < 0 \Rightarrow \lambda = (-1) |\lambda|$

Т. к.

$$\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} f(x) + \inf_{x \in E} g(x)$$

То для произвольного разб-я T отр-ка $[a, b]$ имеем

$$s_T(f + g) \geq s_T(f) + s_T(g)$$

Сл-но, $\underline{\int_a^b (f + g) \, dx} \geq \underline{\int_a^b f \, dx} + \underline{\int_a^b g \, dx}$

Аналогично:

$$\overline{\int_a^b (f + g) \, dx} \leq \overline{\int_a^b f \, dx} + \overline{\int_a^b g \, dx}$$

Вычтем из нер-ва для верхнего интеграла нер-во для нижнего:

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{\int_a^b (f + g) \, dx} - \underline{\int_a^b (f + g) \, dx} &\leq \left(\overline{\int_a^b f \, dx} - \underline{\int_a^b f \, dx} \right) + \\ &+ \left(\overline{\int_a^b g \, dx} - \underline{\int_a^b g \, dx} \right) = 0 \end{aligned}$$

Т. к. $f, g \in R[a, b]$, то $\overline{\int_a^b (f + g) \, dx} = \underline{\int_a^b (f + g) \, dx}$, т. е. $f + g \in R[a, b]$ и

$$\int_a^b (f + g) \, dx = \int_a^b f \, dx + \int_a^b g \, dx$$

□

Следствие. Пусть $f, g \in R[a, b]$ и $f \leq g$ на $[a, b]$. Тогда:

$$\int_a^b f \, dx \leq \int_a^b g \, dx$$

Доказательство. Для произвольного разбиения T имеем $f(x) \leq g(x), \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$

$$s_T(f) \leq s_T(g) \Rightarrow$$

□

4.1 Мн-во интегрируемых ф-ций

Определение 4.1. Пусть f опр-на на $E \subset \mathbb{R}$. **Колебание (осцилляцией)** ф-ции f на E наз-ся

$$\omega(f, E) = \sup_{x, y \in E} |f(x) - f(y)|$$

Замечание. Перепишем в более удобном виде:

$$\begin{aligned} \omega(f, E) &= \sup_{x, y \in E} (f(x) - f(y)) = \sup_{x, y \in E} (f(x) + (-f(y))) = \sup_{x \in E} f(x) + \sup_{y \in E} f(y) = \\ &= \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{y \in E} f(y) \end{aligned}$$

Пусть f опр-на на $[a, b]$ и $T = \{x_i\}_{i=0}^n$ — разбиение $[a, b]$, тогда:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n w(f, [x_{i-1}, x_i]) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i$$

Отметим, что $SZ_T(f)$ конечно $\iff f$ ограничена на $[a, b]$. В этом случае:

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f)$$

Теорема 4.1.

$$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists T \text{ — разбиение } [a, b] \hookrightarrow \Omega_T f < \varepsilon$$

Доказательство. \Rightarrow)

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b f} = I$$

Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю интеграла Дарбу: $\exists T_1, T_2$ — разб-я $[a, b]$:

$$s_{T_1}(f) > I - \frac{\varepsilon}{2}, S_{T_2} < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$T = T_1 \cup T_2 \text{ — разб. } [a, b]$$

Тогда:

$$\Omega_T(f) = S_T(f) - s_T(f) \leq S_{T_2}(f) - s_{T_1}(f) < \varepsilon$$

\Leftarrow) Т. к. $\Omega(f)$ конечна, то f огр-на на $[a, b]$, тогда ввиду нер-в:

$$0 \leq \overline{\int_a^b f} - \underline{\int_a^b f} \leq S_T(f) - s_T(f) = \Omega_T(f) < \varepsilon$$

Т. к. $\varepsilon > 0$ — любое, то $\overline{\int_a^b f} = \underline{\int_a^b f}$, т. е. $f \in R[a, b]$

□

Следствие. Если f непр-на на $[a, b]$, то f интегр. на $[a, b]$

Доказательство. Заф. $\varepsilon > 0$. По т. Кантора, f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому

$$\exists \delta > 0: \forall x', x'' \in [a, b] (|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a})$$

Рассм. разб. $T = \{x_i\}_{i=0}^n: |T| < \delta$

По т. Вей-са $\exists x'_i, x''_i \in [x_{i-1}, x_i]: M_i = f(x'_i), m_i = f(x''_i)$

Т. к. $|x''_i - x'_i| \leq \Delta x_i < \delta$, то $|f(x''_i) - f(x'_i)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x'_i) - f(x''_i)) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

По теореме 4.1, $f \in R[a, b]$

□

Следствие. Если f монот. на $[a, b]$, то f инт. на $[a, b]$

Доказательство. Пусть для опр-ти f нестрого возр-ет на $[a, b]$, тогда для произв. разб. T имеем:

$$\Omega_T(f) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) |T|$$

Сл-но, $\Omega_T(f) \leq (f(b) - f(a)) |T|$, $f \in R[a, b]$ □

Теорема 4.2. Пусть f огр. на $[a, b]$ и $f \in R[c, d]$ на любом $[c, d] \subset (a, b)$. Тогда $f \in R[a, b]$

Доказательство. Пусть $|f| \leq M$. Заф. $\varepsilon > 0$.

Положим $c = a + \frac{\varepsilon}{6M}$, $d = b - \frac{\varepsilon}{6M}$. Положим $f \in R[c, d]$, поэтому по теореме 4.1, $\exists T_0$ — разб. : $\Omega_{T_0}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$T = T_0 \cup \{a, b\} \text{ — разб. } [a, b]$$

Тогда:

$$\Omega_T(f) = \omega(f, [a, c])(c - a) + \Omega_{T_0}(f) + \omega(f, [d, b])(b - d)$$

Т. к. $|f| \leq M$, $\omega(f, [a, c]) \leq 2M$, $\omega(f, [d, b]) \leq 2M$, то

$$\Omega_T(f) \leq 2M * \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3} + 2M \frac{\varepsilon}{6M} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow f \in R[a, b]$$

□