

Матан

Сергей Григорян

20 ноября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 22	3
2	Лекция 23	8
2.1	Неопределённый интеграл	8

1 Лекция 22

Следствие. Пусть f непр-на на пром. I и дважды дифф-ма на $\text{int } I$.

- 1) Ф-ция f выпукла вниз на $I \iff f''(x) \geq 0, x \in \text{int } I$
- 2) Если $f''(x) > 0$ на $\text{int } I$, то f строго выпукла вниз на I .

Пример. 1) $y = a^x, a \neq 1$, строго выпукла вниз на \mathbb{R} , т. к.:

$$(a^x)'' = a^x \ln^2 a > 0$$

- 2) $y = \ln x$, строго вогнута (выпукла вверх) на $(0, +\infty)$, т. к.:

$$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$$

- 3) $y = x^p$ на $(0, +\infty), p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$$(x^p)'' = p(p-1)x^{p-2} > 0 \Rightarrow \text{выпукла вниз}$$

При $p \in (0, 1)$ — вогнута.

- 4) $\ln(1+x) < x$, при $x > -1, x \neq 0$:

$y = \ln(1+x)$ — строго выпукла вверх (вогнута) на $(-1, +\infty)$

$y = x$ — касат. к $x \mapsto \ln(1+x)$ в точке $x = 0$

По т. ?? получаем заявленное нер-во.

Определение 1.1. Пусть f опр-на на пром-ке I и $a \in \text{int } I$. Если:

- 1) ф-ция f имеет различный характер выпуклости на $(a-\delta, a], [a, a+\delta)$ для некот. $\delta > 0$
- 2) $\exists f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$
- 3) f — непр-на в a .

Тогда точка a наз-ся **точкой перегиба** ф-ции f .

Следствие. Если ф-ция f дважды дифф-ма на $\text{int } I$ и $a \in \text{int } I$ — точка перегиба f , то $f''(a) = 0$:

Доказательство. Пусть для опре-ти f выпукла вниз на $(a - \delta, a]$ и выпукла вверх (вогнута) на $[a, a + \delta)$, $\delta > 0$. Тогда f' нестрого возрастает на $(a - \delta, a]$ и f' нестрого убывает на $[a, a + \delta)$. Следовательно a — точка локального максимума ф-ции f' . По Т. Ферма $f''(a) = 0$ \square

Выпуклость ф-ции гарантирует её "хорошее поведение" на (a, b)
Ключом является следующий факт:

Лемма 1.1 (Лемма о 3-ёх хордах). Пусть ф-ция f выпукла вниз на (a, b) и $a < x_1 < x < x_2 < b$. Тогда:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad (1)$$

Доказательство. Рассм. $\lambda(t) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(t - x_1) + f(x_1)$. Тогда $f(x_1) = \lambda(x_1)$, $f(x_2) = \lambda(x_2)$ и ввиду выпуклости вниз $f(t) \leq \lambda(t)$. Поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{\lambda(x) - \lambda(x_1)}{x - x_1}, \frac{\lambda(x_2) - \lambda(x)}{x_2 - x} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Однако обе дроби с λ равны:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

\square

Задача 1.1. Д-те, что каждое из этих нер-в эквив-но вып-ти вниз.

Следствие. Для любой точки $x \in (a, b)$ ф-ция $\nu: (a, b) \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\nu(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

нестрого возрастает на $(a, b) \setminus \{x\}$

Доказательство. $y, z \in (a, b) \setminus \{x\}$, $y < z$ \square

Теорема 1.2. Если ф-ция f выпукла вниз на (a, b) , то f непр-на на (a, b) и дифф-ма там, за исключением не более чем счётного мн-ва.

Доказательство. Зафикс. $x \in (a, b), \nu(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. По следствию 1, $\nu(y)$ нестрого возрастает. Тогда по теореме о пределах монотонной функции, существуют конечные $\nu(x-0) \leq \nu(x+0)$, т. е. \exists конечные левая и правая производная f в точке x : $f'_-(x) \leq f'_+(x) \Rightarrow f$ непр-на слева и справа в точке x , а значит непр-на в точке x .

Перейдём к пределу в левом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_1+0$, а также в правом нер-ве 1 при $x \rightarrow x_2-0$. Получаем:

$$f'_+(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_-(x_2)$$

Учитывая, что $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1)$, отсюда следует, что $g = f'_-$ нестрого возрастает на (a, b)

По т. о разрывах монотонной ф-ции g может иметь на (a, b) разрывы только I рода и их не более чем счётно. Покажем, что в точках непроти g ф-ция f дифф-ма. В самом деле, выберем $x_0 < x$, тогда $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq f'_-(x)$, откуда:

$$0 \leq f'_+(x_0) - f'_-(x_0) \leq f'_+(x) - f'_-(x_0)$$

$$\Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f \text{ дифф-ма в т. } x_0$$

□

Теорема 1.3 (Нер-во Йенсена). Пусть ф-ция f выпукла (вогнута) на I . $x_1, \dots, x_n \in I$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, т. ч. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Тогда справедливо:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i), (\geq)$$

Доказательство. Пусть ф-ция f выпукла на I . ММИ:

- $n = 2$ — в точности опр-е выпуклости
- Пусть нер-во верно для n . Установим справедливость для $n + 1$. Т. к. случай $\lambda_{n+1} = 1$ — очев., считаем, что $\lambda_{n+1} < 1$. Положим:

$$y = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n$$

Т. к. $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$:

$$\min_k x_k \leq y \leq \max_k x_k$$

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f((1-\lambda_{n+1})y + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-\lambda_{n+1})f(y) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1})$$

По предположению инд-ции:

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i)$$

Подставляя $f(y)$ в пред-ее нер-во, получаем то, что нужно.

□

Пример. Пусть $x_1, \dots, x_n \geq 0$, тогда:

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

Доказательство. $y = \ln x, \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$

По нер-ву Йенсена:

$$\begin{aligned} \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i\right) &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

□

Пример (Нер-во Гельдера). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и

$$p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Тогда справ-во нер-во:

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство.

$f = x^p$ — выпукла вниз

$$x_k = \frac{a_k}{b_k^{\frac{1}{q}}}, \lambda_k = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k x_k = \frac{a_k b_k^{q(1-\frac{1}{p})}}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{a_k b_k}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\lambda_k f(x_k) = \frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \frac{a_k^p}{b_k^q} = \frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} \iff \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

□

Пример (Нер-во Минковского). Пусть $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0$ и $p \geq 1$. Тогда:

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Доказательство. $p = 1$ — верно. $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1)^p + \dots + (a_n + b_n)^p &= (a_1 + b_1)(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + (a_n + b_n)(a_n + b_n)^{p-1} = \\ &= a_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + a_n(a_n + b_n)^{p-1} + b_1(a_1 + b_1)^{p-1} + \dots + b_n(a_n + b_n)^{p-1} \end{aligned}$$

нер-во Гельдера $\leq \dots$

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Поделим LHS и RHS на $(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ и получим желаемый результат.

□

2 Лекция 23

2.1 Неопределённый интеграл

Определение 2.1. Пусть ф-ция f опр-на на пром-ке I .

- 1) Ф-ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **первообразной на I** , если $F'(x) = f(x), \forall x \in I$
- 2) Ф-ция $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ наз-ся **обобщённой первообразной на I** , если F непр-на на I и $F'(x) = f(x), \forall x \in I \setminus A$, причём A не более чем счётно.

Пример.

$$f = \operatorname{sign} x, I = [-1, 1]$$

По т. Дарбу, всякая производная дифференцируемой ф-ции принимает все промежуточные значения $\Rightarrow f$ не имеет первообразной на отрезке $[-1, 1]$

*Её **обобщённая** первообразная: $F(x) = |x|$*

Теорема 2.1 (Описание класса первообразных). *Если F — первообразная (обобщённая) f на I и $c \in \mathbb{R}$, то $F + c$, тоже обобщённая первообразная f на I .*

Если F_1, F_2 — первообразные (обобщённые) f на I , то их разность постоянна на I .

Доказательство. $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0 \xrightarrow{\text{условие постоянства}} F_1 - F_2 = c \in \mathbb{R}$

Для обобщённых первообразных следует из дополнения к теореме 10 (10') □

Определение 2.2. Произвольная первообразная ф-ции f на I наз-ся **неопределённым интегралом** ф-ции f на I и обозначается:

$$\int f(x)dx \text{ или } \int f dx$$

Замечание. *Операция перехода от ф-ции к её неопр. интегралу наз-ся **интегрированием**.*

Замечание. Формально dx в обозначении не несёт смысловой нагрузки, однако его использование **бывает весьма полезным**, если трактовать $f dx$ как дифференциал. ($f' dx = df$)

Замечание. Из неудобств отметим, что в обозначении никак не фигурирует пром-к I .

Утверждение 2.1. Неопределённый интеграл имеет следующие св-ва:

1) Если $\exists \int f dx$ на I , то $(\int f dx)' = f$ на I

2) Если $\exists \int f dx, \int g dx$ на I , а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то на I суц-ет:

$$\int (\lambda f + \mu g) dx = \lambda \int f dx + \mu \int g dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

3) Если u, v - дифф-мые ф-ции на I и $\exists \int v u' dx$ на I , то на I суц-ет:

$$\int v' u dx$$

А также верна ф-ла (интегрирование по частям):

$$\int v u' dx = v u - \int v' u dx + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

Или:

$$\int u dv = v u - \int v du + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$

4) Если F — первообразная f на I , ϕ дифф. на пром-ке $Y, \phi(Y) \subset I$, то суц-ет:

$$\int f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(t)) + C, C \in \mathbb{R}$$

для некоторого $C \in \mathbb{R}$ (**ф-ла подстановки**)

Замечание. Если дополнительно ϕ строго монотонна на Y , то на $\phi(Y)$

$$t = \phi^{-1}(x)$$

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx + C$$

Теорема 2.2 (Таблица неопределённых интегралов). Смотри таблицу в книжке.

Задача 2.1. Пусть f дифф-ма на I с $f' \neq 0$ на I . Пусть F — первообразная f на I . Запишите:

$$\int f^{-1}(y)dy$$

через f .

Замечание. В отличие от операции дифференцирования, операция интегрирования выводит за пределы элементарных функций, напριме:

$$\int e^{-x^2} dx$$

Замечание. Все св-ва переносятся на обобщ. интеграл.