Матан

Сергей Григорян

18 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 13 **3**

1.0.1 Долг прошлой жизни 3

1.1 Равномерная непр-ть 3

1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции 5

2 Лекция 14 **8**

2.0.1 Ликбез по тригономе 10

2.0.2 Сравнение ф-ций 12

1 Лекция 13

1.0.1 Долг прошлой жизни

Теорема 1.1 (О разрывах монот. ф-ции)**.** *Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$. Если f монотонна на (a, b), то f на (a, b) может иметь разрывы только I рода, причём их не более чем счётно.*

Доказательство. Пусть f нестрого возр. на (a, b). Тогда по следствию из т. о пределах монотонной ф-ции, для всякой т. $c \in (a, b)$ $\exists$ конечные $f(c-0), f(c+0)$, причём:

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Таким образом иметь на (a, b) разрывы только I рода.

Пусть $c, d \in (a, b), c < d$. Тогда для $\alpha \in (c, d)$. Рассм.:

$$f(c+0) = \inf_{x \in (c,b)} f(x) \leq f(\alpha) \leq \sup_{x \in (a,d)} f(x) = f(d-0)$$

$\square$

Поэтому если c, d - точки разрыва ф-ции f, то интервалы $(f(c-0), f(c+0))$ и $(f(d-0), f(d+0))$ - невырожд. и не пересекаются. Поставим в соотв. каждому такому интервалу точку $\in \mathbb{Q}$, содержащееся в нём. Тем самым установим биекцию между мн-вом таких интервалов и подмножеством $\mathbb{Q}$. Сл-но таких интервалов не более чем счётно.

1.1 Равномерная непр-ть

Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $f : E \to \mathbb{R}$
Напомним, что f непр-на на E, если:

$$\forall x' \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Определение 1.1. Ф-ция f наз-ся **равномерно непрерывной** (на E), если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in E(|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

Замечание. *Если f р. н. (равномерно непр-на) на E, то f непр-на на E*

Задача 1.1. Если f и g р. н. на E и огр-ны, то fg - р. н. на E

Определение 1.2. Ф-ция $f : E \to \mathbb{R}$ наз-ся **липшицевой**, если:

$$\exists C > 0, \forall x, x' \in E(|f(x) - f(x')| \leq C\,|x - x'|)$$

Замечание. *Всякая липшицева ф-ция явл-ся р. н. (Дост-но положить $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$)*

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x| \text{ - липшицева}$$

Доказательство.

$$||x| - |x'|| \leq |x - x'|, \forall x \in x' \in \mathbb{R}$$

□

Пример.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 \text{ - непр-на, } \textbf{но не р. н.}$$

Замечание. *f не р. н.* $\iff$

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in E(|x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

Доказательство. Для произвольного $\delta > 0$ положим, $x' = \frac{1}{\delta}, x = \frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}$. Тогда:

$$|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \wedge |f(x) - f(x')| = \left(\frac{1}{d} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \frac{1}{\delta^2} = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Сл-но, f не р. н. □

Теорема 1.2 (Кантора)**.** *Если f непр-на на $[a, b]$, то f - р. н. на $[a, b]$*

Доказательство. I) Предположим, что f не явл-ся р. н. Тогда полагая $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, получаем $x_n, x'_n \in [a, b]$, т. ч.

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$$

По т. Б-В $\{ x_n \}$ имеет сх-ся подп-ть $\{ x_{n_k} \}, x_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Имеем

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \to x_0 \text{ По т. о зажатой п-ти}$$

Поэтому, в силу непр-ти, f в x_0:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$$

Что противоречит $\left|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})\right| \geq \varepsilon > 0$

□

Задача 1.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ р. н. на E. Покажите, что

$$\exists! F : closure(E) \to \mathbb{R} \text{ - непр-на на замыкании и } F|_E = f$$

1.2 Показательная и логарифмическая ф-ции

Определение 1.3. Ф-ция $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \exp = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ наз-ся экспонентой.

Замечание. *Сх-ть $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ устанавливалась ранее для всях $x \in \mathbb{R}$*

Теорема 1.3. *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ справедливо:*

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$$

Доказательство. Введём об-е $a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Оценим:

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y)$$

Тогда, в силу тождества:

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \ldots + ba^{n-2} + a^{n-1})$$

$$a_n(x)a_n(y) - a_n(x + y) = \left(1 + \frac{x + y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)^n - \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{xy}{n^2} Q(x, y), Q(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k$$

Где:
$$b=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right), a=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)$$
П-ть $\{\, a_n(|x|) \,\}$, нестрого возрастает, начиная с некот. n_0 (см. док-во сх-ти):
$$\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^p\right| \le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^p \le \left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \le \exp(|x|), p=1,\ldots,n$$
Сл-но, каждое слагаемое в $Q(x,y)$ оценивается по модулю $C=\exp|x+y|\exp|x|\exp|y|$. Тогда получаем:
$$|a_n(x)a_n(y)-a_n(x+y)| \le \frac{|x|\,|y|\,C}{n}$$
Переходя к пределу, получаем, что:
$$|\exp(x)\exp(y)-\exp(x+y)| \le 0$$
Ч. Т. Д. □

Следствие.
$$\exp x > 0 \ \text{и} \ \exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Доказательство.
$$\exp(x)=\exp(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\exp^2(\frac{x}{2})$$
$$\exp(x)\exp(-x)=1$$
□

Лемма 1.4. *a)*
$$\exp(x) \ge 1+x, \forall x \in \mathbb{R}$$
b)
$$\exp(x) \le \frac{1}{1-x}, \forall x < 1$$

Доказательство. Зафикс. $N \in \mathbb{N}$, т. ч. $\frac{x}{N} \geq -1$. Тогда по нер-ву Бернулли:

$$\forall n \geq N\colon \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$$

Пред. переходом получаем:

$$\exp(x) \geq 1 + x \text{ - пункт а)}$$

По нер-ву п. а):

$$\exp(-x) \geq 1 - x > 0, \text{ при } x < 1$$

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \leq \frac{1}{1-x}$$

□

Теорема 1.5. *Ф-ция* exp *непр-на, строго возр. и отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Доказательство. По нер-ву из предыдущей леммы, при $x < 1$ имеем:

$$1 + x \leq \exp(x) \leq \frac{1}{1-x}$$

Откуда при $x \to 0$, $\exp(x) \to 1$. Тогда для $\forall a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} \exp(x) = \begin{bmatrix} t + a = x \\ t = x - a \\ t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0} \exp(t + a) = \lim_{t \to 0} \exp(a)\exp(t) = \exp(a)$$

$\Rightarrow$ ф-ция непр-на на $\mathbb{R}$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. Тогда:

$$\exp(y) - \exp(x) = \exp(x)(\exp(y - x) - 1) \geq (y - x)\exp(x) > 0$$

Т. к.

$$\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} \exp = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0 \Rightarrow \inf_{\mathbb{R}} \exp = 0$$

Сл-но, $\exp(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ □

2 Лекция 14

Определение 2.1. Натуральным логарифмом наз-ся ф-ция $\ln\colon (0, +\infty)$, обратная к exp

Замечание. *По т. об обратной ф-ции и св-в экспоненты, можно получить св-ва нат. логарифма:*

- $\ln$ *непр-на на обл-ти определения.*
- $\ln$ *строго возр.*
- $\ln$ *отображжет* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$*, при этом, если* $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow$

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

Определение 2.2. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Показательной ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция: $x \mapsto a^x = \exp(x \ln a), x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Показательная ф-ция непр-на, строго монотонна (при* $a > 1$ *строго возрастает, иначе - строго убывает), а также отображает* $\mathbb{R}$ *на* $(0, +\infty)$

Замечание. *Пусть* $n \in \mathbb{N}, n > 1$. *Тогда:*

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \exp(\frac{1}{n}\ln a) \cdot \exp(\frac{1}{n}\ln a) = \exp(\ln a) = a$$

Сл-но, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Определение 2.3. Пусть $a > 0, a \neq 1$. Логарифмической ф-цией с основанием a наз-ся ф-ция $\log_a\colon (0; +\infty) \to \mathbb{R}$. Обратная к показательной ф-ции $x \mapsto a^x, x \in \mathbb{R}$

Замечание. *Логарифмическая ф-ция непр-на, строго монотонна и отображает* $(0, +\infty)$ *на* $\mathbb{R}$. *Кроме того:*

$$x = a^y \iff x = \exp(y \ln a) \iff \ln(x) = y \ln a \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Определение 2.4. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Степенной ф-цией с показателем α наз-ся ф-ция $x \mapsto x^\alpha, x \in E$, где:

1) $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow E = \mathbb{R}$, при этом $x^0 = 1, x^\alpha = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{\alpha \text{ раз}}$

2) $\alpha \in -\mathbb{N} \Rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, при этом $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$

3) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow E = (0, +\infty)$, при этом $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$

Замечание. *Если в последнем случае $\alpha > 0$, то полагаем $0^\alpha = 0$ (т. е. 0 включаем в E), это согласуется с тем, что:*

$$\lim_{x \to +0} \exp(\alpha \ln x) = 0$$

Замечание. *Из св-в* exp *и* ln *получаем, что степенная ф-ция непр-на на E, на $(0, +\infty)$ строго возрастает на при $\alpha > 0$ и строго убывает при $\alpha < 0$*

Лемма 2.1 (Замечательные пределы)**.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Кроме того:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Доказательство. По пред. лемме при $x < 1$:

$$1 + x \le e^x \le \frac{1}{1-x} \iff x \le e^x - 1 \le \frac{x}{1-x} \iff$$

$$\begin{cases} 1 \le \frac{e^x - 1}{x} \le \frac{1}{1-x}, x > 0 \\ \frac{1}{1-x} \le \frac{e^x - 1}{x} \le 1, x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Ф-ция $g(y) = \begin{cases} \frac{y}{e^y - 1}, y \ne 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$ - непр. в 0. Также $f(x) = \ln(x+1)$ непр-на в 0. Тогда композиция $g \circ f$ непр-на в 0

$$h(x) = g \circ f(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x+1)}{x}, x > 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = g(0) = 1$$

Тогда и $\exp \circ h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ непр-на в 0 $\Rightarrow \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1 = e$ $\square$

Задача 2.1. Док-те, что $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

Пример.

$$e^\pi \vee \pi^e$$

Доказательство.

$$e^x > 1+x$$
$$x=\frac{\pi}{e}+1$$
$$e^{\frac{\pi}{e}-1}>\frac{\pi}{e} \iff e^{\frac{\pi}{e}}>\pi \Rightarrow e^\pi>\pi^e$$

□

2.0.1 Ликбез по тригономе

Лемма 2.2. *Для всех $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ верно:*

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Доказательство. Picture:

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сек. } AOB} < S_{\triangle AOC}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

□

Следствие. *Для всех $x\in\mathbb{R}$. Верно $|\sin x|<|x|$, причём рав-во имеет место только при $x=0$*

Доказательство. Если $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, то нер-во следует по лемме.
Если $x\geq\frac{\pi}{2}$, то $|\sin x|\leq 1<\frac{\pi}{2}\leq x$
Если $x<0$, то $|\sin x|=|\sin(-x)|<|(-x)|=|x|$ □

Следствие. *Ф-ции* $\sin$ *и* $\cos$ *непр-ны на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $a\in\mathbb{R}$, тогда:

$$|\sin x-\sin a|=2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq 2\frac{|x-a|}{2}=|x-a|\to 0$$

Сл-но, $\sin x$ в точке a равен $\sin a\Rightarrow \sin x$ - непр-на. Аналогично доказывается непр-ть $\cos x$ или из ф-л тригонометрии:

$$\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)\Rightarrow$$

$\cos x$ непр-н как композиция непр. ф-ций. □

Следствие.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Доказательство. $x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow\frac{\sin x}{x}<1$ и $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ (из леммы) В силу чётности, $\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1\Rightarrow$ предел $=1$. $\square$

Определение 2.5. Обратные тригонометрические ф-ции:

1) arcsin:

$$\arcsin=(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1}$$

2) $\arccos\colon[-1,1]\to[0,\pi]$

$$\arccos=(\cos|_{[0,\pi]})^{-1}$$

3) $\mathrm{arctg}\colon\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\mathrm{arctg}=(\mathrm{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}$$

4) $\mathrm{arcctg}\colon\mathbb{R}\to(0,\pi)$

$$\mathrm{arcctg}=(\mathrm{ctg}|_{(0,\pi)})^{-1}$$

Определение 2.6. Основными элементарными ф-циями наз-ся:

- $x\mapsto c, c\in\mathbb{R}$
- $x\mapsto a^x, a>0, a\neq 1$
- $x\mapsto \log_a x, a>0, a\neq 1$
- $x\mapsto x^\alpha$
- $\sin,\cos,\mathrm{tg},\mathrm{ctg}$
- $\arcsin,\arccos,\mathrm{arctg},\mathrm{arcctg}$

Определение 2.7. Элементарной ф-цией наз-ся любая ф-ция, полученная конечным числом арифметических операций или взятием их композиции.

Пример.

$$\operatorname{sh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{th} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{cth}\colon \mathbb{R} \setminus \{ 0 \} \to \mathbb{R}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

Теорема 2.3. *Всякая элементарная ф-ция непр-на на своей области определения.*

2.0.2 Сравнение ф-ций

Определение 2.8. Пусть $f, g\colon E \to \mathbb{R}$, a - предельная точка E и сущ-ет $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$ и $\delta > 0$, такие, что

$$f(x) = \alpha(x) g(x), \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$$

Тогда:

1) Если $\alpha(x) \to 1$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ции f и g эквивалентны (асимптотически равны) при $x \to a$. Пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$

2) Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то говорят, что ф-ция f беск. мала по сравн. с ф-цией g при $x \to a$, пишут $f(x) = o(g(x))$, при $x \to a$

3) Если α - огр-на, то говорят, что ф-ция f ограничена по сравнению с g при $x \to a$. Пишут, что $f(x) = O(g(x)), x \to a$