Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

26 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 3

1.1 Мощности мн-в

1.1.1 Парадоксы

Парадокс Галилея:

Все нат. числа	$\not\supseteq$	полные квадаты
n	$\longleftrightarrow$	n^2

Гранд-отель Гильберта:

1	2	3	4	5	6	7	...

1) Все места заняты, нужно подселить постояльца:

   Решение.

Новый	$\to$	0
i	$\to$	$(i+1)$

2) Есть своб. места, хотим занять все комнаты имеющимися постояльцами:

   Решение. Если мн-во занятых комнат бесконечно, то:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	...

   (1 - занято, 0 - свободно) $\Rightarrow$
   Переносим 1 в самый ранний 0 для всех 1

3) 2 гранд-отеля, полностью заняты. Один закрылся, как всех заселить?

   Решение.

0	1	2	3	4	5	...

a	b	c	d	e	f	...

   $\Rightarrow$

0	a	1	b	2	c	...

4) Гранд-авеню, гранд-отелей. Цель: переселить всех в один отель:

Решение.

Отель 0: $\mapsto$ неч. номера
Отель 1: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 2, \not\vdots\, 4$
Отель 2: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 4, \not\vdots\, 8$
Отель k: $\mapsto$ номера, кот $\vdots\, 2^k, \not\vdots\, 2^{k+1}$

1.1.2 Счётных мн-в

Определение 1.1. A и B равномощны ($A \cong B$), если $\exists$ биекция $f : A \to B$

Определение 1.2. A наз-ся счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

Утверждение 1.1. 1) A счётно $\Rightarrow A \cup x$ счётно

2) Любое подмн-во счётного мн-ва конечно или счётно

3) A, B счётны $\Rightarrow A \cup B$ счётно

4) $A_0, A_1, \ldots$ - сч. $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ - сч.
или: A, B - сч. $\Rightarrow A \times B$ - сч.

Доказательство. 1) $f : A \to \mathbb{N}$ - биекция

$$g : A \cup \{ x \} \to \mathbb{N} :$$

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ g(y) = f(y) + 1, y \in A \end{cases}$$

2)

$$f : A \to \mathbb{N}, \text{- биекция}; B \subset A$$

$$g : B \to \mathbb{N}; g(x) = \# \{ y \in B \mid f(y) < f(x) \}$$

3)

$$f : A \to \mathbb{N}; g : B \to \mathbb{N}$$

$$h : A \cup B \to \mathbb{N}; h(x) = \begin{cases} 2f(x), x \in A \\ 2g(x) + 1, x \in B \end{cases}$$

4)

$$f : A \to \mathbb{N};$$
$$g : B \to \mathbb{N};$$
$$h : A \times B \to \mathbb{N}; h(x, y) = 2^{f(x)} * (2g(y) + 1) - 1$$

$\square$

1.1.3 Отношение равномощности

<u>Утверждение</u> 1.2. Общие св-ва равномощности:

1) Рефлексивность: $A \cong A$
   (т. к. id_A - биекция)
2) Симметричность: $A \cong B \iff B \cong A$
   (f - биекция $\iff f^{-1}$ - биекция)
3) Транзитивность: $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$
   (т. к. композиция биекций - биекция)

1.1.4 Сравнимость по мощности

<u>Обозначение</u>.

- Нестрогая: $A \lesseqqgtr B$, если $\exists B' \subset B, A \cong B'$
  (A не более мозно чем B)
- Строгая: $A \gtrsim B$, если $A \lesseqqgtr B, A \ncong B$
  (A менее мощно чем B)

<u>Утверждение</u> 1.3. Св-ва сравнимости по мощ-ти:

1) Рефлексивность: $A \lesseqqgtr A$; Антирефлексивность: $A \not\gtrsim A$
2) Транзитивность: $A \lesseqqgtr B, B \lesseqqgtr C \Rightarrow A \lesseqqgtr C$
   Для строгой сравнимости:

   Доказательство.
   $$A \gtrsim B, B \gtrsim C \Rightarrow A \gtrsim C$$
   $$A \lesseqqgtr C \text{ - из предыдущего}$$
   Нужно: $A \cong C$ $\square$

Теорема 1.1 (Теорема Кантора-Бернштейна).

$$A \gtreqqless B, B \gtreqqless A \Rightarrow A \cong B$$

Доказательство. 1) Пусть $f : A_0 \to B_1 \subset B_0$ - биекция
$g : B_0 \to A_1 \subset A_0$ - биекция

2) $B_{i+1} = f\left(A_i\right); A_{i+1} = g\left(B_i\right)$

3) $C_i = A_i \backslash A_{i+1}; D_i = B_i \backslash B_{i+1}$

4) $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i; D = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Утверждение 1.4. $C_i \cong D_{i+1}$, т. е. $f : C_i \to D_{i+1}$ - биекция

Почему? Потому что:

$$C_i = A_i \backslash A_{i+1}; f\left(A_i\right) = B_{i+1}, f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+2}$$

$f\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) =$ (т. к. f - биекция) $f\left(A_i\right) \backslash f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+1} \backslash B_{i+2} = D_{i+1} = f\left(C_i\right)$

Утверждение 1.5.

$$D_i \cong C_{i+1} \text{ (симметричо)}$$

Следствие.

$$C_0 \cong C_2 \cong C_4 \cong C_6 \cong \dots$$

$$C_0 \cong D_1 \cong D_3 \cong D_5 \dots$$

Утверждение 1.6.

$$C \cong D$$

Доказательство. f - биекция
Пусть $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \forall i, x \in A_i \Rightarrow \forall i, f(x) \in B_{i+1} \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$
Т. е. $f(C) \subset D$:

Инъекция - наследуется

Сюрьекция: $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \Rightarrow \forall i, y \in B_{i+1} \Rightarrow \forall i, f^{-1}(y) \in A_i \Rightarrow f^{-1}(y) \in C$ □

$$A = C \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$

$$B = D \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \dots$$

При этом:

$$\begin{cases} C \cong D \\ \begin{cases} C_0 \cong D_1 \\ C_1 \cong D_0 \end{cases} \\ \begin{cases} C_2 \cong D_3 \\ C_3 \cong D_2 \end{cases} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow A \cong B$$

□

2 Лекция 4

Обозначение. $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ - это

1) Мн-во подмножеств $A \subset \mathbb{N}$
2) Мн-во ф-ций $f : \mathbb{N} \to \{ 0, 1 \}$
3) Мн-во $A \leftrightarrow f_A : N \to \{ 0, 1 \}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Замечание. Бесконечная двоичная дробь:

$$\underline{a_1 a_2 \dots a_n} 01111 \dots = \underline{a_1 a_2 \dots a_n} 10000 \dots$$

Задача 2.1. Показать:

$$[0, 1] \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}} \setminus \{ \text{посл-ти с 1 в периоде} \}$$

Доказательство. Конструктивно: Picture

□

Теорема 2.1. A - беск., B - сч. $\Rightarrow A \cup B \cong A$

Следствие.

$$[0, 1] \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$$

Лемма 2.2. В любом бесконечном мн-ве есть счётное подмн-во

Доказательство. A - беск. мн-во
$a_0 \in A, a_1 \in A \setminus \{ a_0 \}, \dots$
$a_{n+1} \in A \setminus \{ a_0, a_1, \dots, a_n \}$ A - беск., сл-но на каждом шаге возможен выбор нового эл-та $\square$

Теперь докажем теорему:

Доказательство. A - беск. $\Rightarrow C \subset A$, C - счётно

$$\begin{cases} C \cong \mathbb{N} \\ B \cong \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow C \cup B \cong \mathbb{N} \cong C$$

$$A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup B \cong (A \setminus C) \cup C \cong A$$

$\square$

Теорема 2.3 (Кантора). $[0,1]$ - несчётен (или: $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ несчётно)

Доказательство. Пусть $\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$ - счётно, тогда α_i - i-ая бинарная последовательность:

α_0	$\underline{0}0000\dots$
α_1	$1\underline{1}111\dots$
α_2	$01\underline{0}11\dots$
$\vdots$	$\vdots$

Воспользуемся диагональным методом Кантора:. Возьмём диагональную п-ть:

$$d_i = \alpha_i^i, d = 010\dots$$

$$d_i' = 1 - \alpha_i^i, d' = 101\dots$$

Если $d' = \alpha_k^k$, то $d_k^k = d_k^{k\prime} = 1 - \alpha_k^k$, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие. $\square$

Теорема 2.4 (Общая теорема Кантора). $\forall A: \ A \gnsim 2^A$

Доказательство. Пусть $\phi : A \to 2^A$ - биекция
$\phi(x)$ - подмн-во A
Корректен ли вопрос о том, что $x \in \phi(x)$?
Расм. $M = \{ x \mid x \notin \phi(x) \}$
Т. к. ϕ - биекция $\Rightarrow$ сущ. $m = \phi^{-1}(M)$. Т. е. $\phi(m) = M$
Рассм. 2 случая:

1)

$$m \in M \Rightarrow m \in \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{ ложно при } x = m \Rightarrow m \notin M$$

2)

$$m \notin M \Rightarrow m \notin \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) \text{ - истино, при } x = m \Rightarrow m \in M$$

Получаем противоречие. □

Определение 2.1. A континуально, если $A \cong \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$

Теорема 2.5. A - континуально $\Rightarrow$ A^2 - континуально

Пример.

$$[0, 1] \cong [0, 1]^2$$

Следствие.

$$(\{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}})^2 = \{ 0, 1 \}^{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha, \beta) \leftrightarrow \gamma = \alpha_0 \beta_0 \alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots$$

$$[0, 1] \cong \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ - континуально}$$

По индукции:

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}$$

Верно и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$

Доказательство. Док-во конструктивно ИЛИ:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$$

□

2.1 Бинарные отношения

Определение 2.2. Отношение - любое $R \in A \times A$

Обозначение. Отношение R между a и b:

1) $(a, b) = R$

2) $R(a, b)$

3) aRb

Различные виды отношений:

1) Рефлексивные: $\forall a\colon aRa$

   Пример. $=, \leq, \subset, \cong, \sqsubset$

2) Антирефлексивные: $\forall a\colon \neg(aRa)$

   Пример. $<, \in, ||$

3) Симметричные: $\forall a, \forall b(aRb \to bRa)$

   Пример. $\cong, ||, =, \equiv_k$

4) Антисимметричные: $\forall a, \forall b((aRb \land bRa) \to a = b)$

   Пример. $\leq, <, >, \sqsubset, \sqsubset, \subset$

5) Транзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \land bRc) \to aRc)$$

   Пример. $=, \cong, \equiv_k, \leq, \subset, \sqsubset$

6) Антитранзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \land bRc) \to \neg(aRc))$$

$$|a - b| = 1 \text{ (На } \mathbb{R})$$

7) Полнота: $\forall a, b(aRb \lor bRa)$

   Пример. $\leq, \precapprox$ (теор. Цермело)

Наборы св-в:

1) Отнош. эквивалентности: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

Пример. $\equiv_k, (|| \text{ или } =), \sim$ (подобие $\triangle$-ов)

Общий вид: $f : A \to B, x \sim y$, если $f(x) = f(y)$

2) Отношение нестрогого частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность, транзитивность:

   Пример. $\subset, \leq, \vdots, \sqsubset, \dots$

3) Отнош. строгого част. п-ка: антирефл., антисимметричность, транзитивность

4) Отнош. лин. порядка: нестрогий частичный порядок + полнота

5) Препорядки: рефлексивность, транзитивность

6) Полные предпорядки: полнота + транзитивность