

Матан

Сергей Григорян

9 октября 2024 г.

Содержание

1	Лекция 7	3
1.1	Критерий Коши	3
1.2	Частичные пределы	4
2	Лекция 8	7
2.1	§3: Топология \mathbb{R}	7
3	Лекция 9	12
3.1	§4: Непрерывные ф-ции	14
3.1.1	Предел ф-ции в точке	14
4	Лекция 10	19
4.1	Критерий Коши для предела ф-ции	19
4.2	Односторонние пределы	20
5	Лекция 11	23
5.1	Непрерывность ф-ции в точке	23

1 Лекция 7

1.1 Критерий Коши

Определение 1.1. Послед-ть $\{a_n\}_1^\infty$ наз-ся **фундаментальной**, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < \varepsilon)$$

Лемма 1.1. *Всякая фундаментальная п-ть огр-на*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. По опр-ю:

$$\exists N: \forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < 1)$$

В част-ти:

$$a_N - 1 < a_n < a_N + 1$$

для всех $n \geq N$ ($m = N$)

Положим

$$\alpha = \min(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1)$$

$$\beta = \max(a_1, \dots, a_{N-1}, a_N + 1)$$

. Тогда:

$$\alpha \leq a_n \leq \beta$$

при всех $n \in \mathbb{N}$

□

Теорема 1.2 (Коши). *П-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - сходится $\iff \{a_n\}_1^\infty$ - фундаментальна.*

Доказательство. \Rightarrow) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела:

$$\exists N, \forall n \in \mathbb{N} (|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда при всех $n, m \geq N$:

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} * 2 = \varepsilon$$

\Leftarrow) По предыдущей лемме, п-ть $\{a_n\}_1^\infty$ - ограничена \Rightarrow по т. Больцано-Вейерштрасса (Б-В) $\{a_n\}_1^\infty$ имеет сход. подпослед-ть $\{a_{n_k}\}_1^\infty \rightarrow a$

Покажем, что $a = \lim_{n \rightarrow \infty}$. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю фундаментальности:

$$\exists N, \forall n, m \geq N (|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Т. к. $\{a_{n_k}\} \rightarrow a \Rightarrow$

$$\exists K: \forall k \geq K (|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Положим $M = \max(N, K)$. Тогда $n_M \geq M \geq N; n_M \geq M \geq K$

Поэтому при всех $n \geq N$:

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Замечание. Критерий Коши позволяет доказывать существование предела, без явного нахождения его значения

Кроме того, критерий позволяет оценить скорость сходимости к пределу (перейдём к пределу по n в определении фунд-ти):

$$|a_n - a| \leq \varepsilon, \text{ при всех } n \geq N$$

Задача 1.1. Покажите, что если всякая фундаментальная посл-ть сх-ся (сходится), то выполняется аксиома непрерывности. А именно:

Пусть \mathbb{F} - упоряд. поле, на котором выполняется аксиома Архимеда

1.2 Частичные пределы

Определение 1.2. Точка $a \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся частичным пределом числовой посл-ти $\{a_n\}_1^\infty$, если $\exists \{a_{n_k}\}$ - подпосл-ть $\{a_n\} : \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

$L \{a_n\}$ - мн-во частичных пределов $\{a_n\}$

Пример. ± 1 - частичные пределы $a_n = (-1)^n$

$$a_{2k} \rightarrow 1, a_{2k-1} \rightarrow -1$$

Пусть задана числовая посл-ть $\{a_n\}$

Положим

$$M_n = \sup_{k \geq n} \{a_k\}$$

$$m_n = \inf_{k \geq n} \{ a_k \}$$

Пусть $\{ a_n \}$ огр. сверху. Тогда все $M_n \in \mathbb{R}$

Поскольку при переходе к подмн-ву \sup не увеличивается, то $\{ M_n \}$ нестрого убывает

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$$

Пусть $\{ a_n \}$ не огр. сверху. Тогда все $M_n = +\infty$

Положим $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$

Аналогично для $\{ m_n \}$ (Огр./Неогр. снизу).

Итак, посл-ти $\{ m_n \}$ и $\{ M_n \}$ имеют предел в $\overline{\mathbb{R}}$

Определение 1.3. Величина $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **верхний предел** $\{ a_n \}$

и об-ся $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

Величина $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} \{ a_k \}$ - **нижний предел** $\{ a_n \}$ и об-ся $\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

Замечание. Т. к. $m_n \leq M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, тогда:

$$\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Задача 1.2.

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n)} = - \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Теорема 1.3. Верхний (нижний) предел - наибольший (наименьший) из част. пределов посл-ти.

Доказательство.

$$M = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, m = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Нужно показать, что M, m - это ч. п. $\{ a_n \}$ и любой ч. п. лежит между ними.

1) Покажем, что есть подп-ть $\{ a_n \}$, сх-ся к M :

I. $M \in \mathbb{R}$. Имеем

$$M = \inf \{ M_n \}$$

По опр-ю $\sup, \exists n_1 : (M - 1 < a_{n_1})$

$$M_{n_1+1} = \sup_{k \geq n_1+1} \{ a_k \} \Rightarrow \exists n_2 > n_1 : (M - \frac{1}{2} < a_{n_2})$$

и т. д.

Таким образом, по индукции, будет построена подп-ть $\{ a_{n_k} \}$,

т. ч.

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k}$$

Имеем:

$$M - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq M_{n_k}$$

Края нер-ва сх-ся к $M \Rightarrow$ по т. о зажатой посл-ти, $a_{n_k} \rightarrow M$

II. $M = +\infty$, тогда $\{ a_n \}$ неогр. сверху \Rightarrow (по Теореме 8') она имеет подп-ть, сх-ся к $+\infty$

III. $M = -\infty$. Т. к. $a_n \leq M_n, \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

2) Для m - док-во аналогично, или сводиться к M по задаче prot-pred

3) Пусть $\{ a_{n_k} \}, a_{n_k} \rightarrow a$. Тогда:

$$m_{n_k} \leq a_{n_k} \leq M_{n_k}, \forall k \Rightarrow m \leq a \leq M (\text{част. пределы})$$

□

Следствие. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ (в $\overline{\mathbb{R}}$) $\iff \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$
В этом случае все три предела равны.

Доказательство. \Rightarrow) По лемме 4, любая подпосл-ть имеет предел $a \Rightarrow$
 $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$

\Leftarrow)

$$m_n \leq a_n \leq M_n$$

для всех $n \Rightarrow a_n \rightarrow a$ (Края $\rightarrow a$)

□

Лемма 1.4. Для $c \in \mathbb{R}$ верно:

$$c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (a_n < c + \varepsilon) & (1) \\ \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N (a_n > c - \varepsilon) & (2) \end{cases}$$

$$c = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N (a_n < c + \varepsilon) \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (a_n > c - \varepsilon) \end{cases}$$

Доказательство. Докажем, для верх предела:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n, M_n = \sup_{k \geq n} \{ a_k \}$$

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N (M_N < c + \varepsilon)$$

$$(2) \iff \forall \varepsilon > 0, \forall N (M_n > c - \varepsilon)$$

Напомним, что $\{ M_n \}$ - нестрого убыв.

$$\text{Тогда } (1) \wedge (2) \iff c = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n (= \inf \{ M_n \})$$

□

2 Лекция 8

2.1 §3: Топология \mathbb{R}

Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$.

Обозначение. • $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ - ε -окрестность a

- $\overset{\circ}{B}_\varepsilon(a) = B_\varepsilon(a) \setminus \{ a \} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$ - проколота ε -окр-ть $m. a$

Определение 2.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

- 1) Точка x наз-ся внутренней точкой мн-ва E , если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset E)$

$(int)E$ - мн-во всех внут. точек E

- 2) Точка x наз-ся внешней точкой мн. E , если $\exists \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E)$
 $(ext)E$ - мн-во внешних точек E

3) Точка x наз-ся границной точкой мн-ва E , если

$$\forall \varepsilon > 0 (B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus E) \neq \emptyset)$$

σE - мн-во всех граничных точек E

Замечание. Из опр-я следует:

$$\mathbb{R} = (int)E \sqcup (ext)E \sqcup \sigma E$$

Пример.

$$E = (0, 1], (int)E = (0; 1), (ext)E = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \sigma E = \{0, 1\}$$

Определение 2.2. Мн-во $G \subset \mathbb{R}$ наз-ся **открытым**, если все его точки яв-ся внутренними (т. е. $G = (int)G$)

Определение 2.3. Мн-во $F \subset \mathbb{R}$ наз-ся **замкнутым**, если $\mathbb{R} \setminus F$ - открыто.

Пример. 1) (a, b) - открытое.

2) $[a, b]$ - замкнутое.

Лемма 2.1. а) Объединение любого семейства открытых мн-в открыто.

б) Пересечение конечного сем-ва открытых мн-в открыто.

с) \mathbb{R}, \emptyset - открыты

Доказательство. а) Пусть $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - семейство открытых мн-в.

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \text{ и } x \in G$$

По опр-ю:

$$\exists \lambda_0 \in \Lambda (x \in G_{\lambda_0} - \text{открыто}) \iff \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset G_{\lambda_0} \subset G$$

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset G$, т. е. x - внут. точка G

- b) Пусть $\{G_k\}_{k=1}^m$ - семейство открытых мн-в, $G = \bigcap_{k=1}^m G_k, x \in G$.
По опр. пересечения:

$$\forall k, x \in G_k \Rightarrow \forall k, \exists \varepsilon_k > 0: B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k$$

$$\varepsilon = \min_{1 \leq k \leq m} \{\varepsilon_k\}$$

Тогда $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(x) \subset B_{\varepsilon_k}(x) \subset G_k, \forall k \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset G = \bigcap_{k=1}^m G_k$, т. е. x - внут. точка G

- с) Открытость \mathbb{R}, \emptyset следует из опр-я.

□

Лемма 2.2. а) Объединение конечного семейства замкнутых мн-в замкнуто

- b) Пересечение любого семейства замкнутых мн-в замкнуто

- с) \mathbb{R}, \emptyset - замкнуты

Доказательство. а, b)

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda).$$

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^m F_k \right) = \bigcap_{k=1}^m (\mathbb{R} \setminus F_k)$$

- с) Очев.

□

Определение 2.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$. Точка x наз-ся предельной точкой мн-ва E , если:

$$\forall \varepsilon > 0 (\overset{\circ}{B}_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset)$$

Лемма 2.3. Точка x - предельная точка \iff

$$\exists \{x_n\}_{x_n \neq x} \subset E: (x_n \rightarrow x)$$

Доказательство. \Rightarrow)

$$x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap E, \forall n \Rightarrow x_n \neq x \text{ и } x_n \in E \Rightarrow x - \frac{1}{n} < x_n < x + \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow x$$

\Leftarrow) Зафикс. $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists N: \forall n \geq N (x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon))$

Сл-но, $x_N \in \overset{\circ}{B}_{\varepsilon}(x) \cap E$

□

Теорема 2.4 (Критерий замкнутости). *Следующие утв. эквивалентны:*

- 1) E - замкнуто;
- 2) E содержит все свои граничные точки;
- 3) E содержит все свои предельные точки;
- 4) Если n -ть $\{x_n\}$ точек из E сходится к x , то $x \in E$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2) Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus E$ (открытое) $\Rightarrow \exists B_{\varepsilon}(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$, т. е. x - внешняя точка E . Тогда $\sigma E \subset E$

2 \Rightarrow 3) E содержит все свои граничные точки. Рассм. 2 случая:

- а) x - внутренняя точка $\Rightarrow x \in E$
- б) x - граничная точка $E \Rightarrow x \in E$ - по усл. 2)

3 \Rightarrow 4) Пусть $\{x_n\} \subset E, x_n \rightarrow x$

Предположим, что $x \notin E \xRightarrow{\text{Л2}} x$ - предельная точка E

4 \Rightarrow 1) $x \in \mathbb{R} \setminus E$. Предположим, что x - не внутренняя точка E . Тогда:

$$\forall n: B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E \neq \emptyset$$

Пусть $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x)$. Имеем $\{x_n\} \subset E \Rightarrow x_n \rightarrow x \in E!!!!!!$

□

Пример. Пусть L - мн-во част. пределов числовой п-ть $\{a_n\}$. Покажем, что L - замкнуто.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \subset L, x_n \rightarrow x$

По опр-ю част. предела, найдётся строго возрастающая п-ть номеров $\{n_k\}$, что $|a_{n_k} - x_k| < \frac{1}{k}$

Сл-но:

$$|a_{n_k} - x| \leq |a_{n_k} - x_k| + |x_k - x| < \frac{1}{k} + |x_k - x|$$

Т. е. $x \in L$, по эквив. п.1 и п. 4 (Теоремы 2.4) заключаем, что L - замкнуто. \square

Определение 2.5. $\overline{E} = E \cup \sigma E$ - замыкание мн-ва E

Лемма 2.5. Мн-во \overline{E} является замкнутым.

Кроме того, $\overline{E} = E \cup \{x: x - \text{предельная точка } E\}$

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{E} \Rightarrow x$ - внешн. точка E , т. е.

$$\exists B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus E$$

Если $B_\varepsilon(x) \cap \sigma E \neq \emptyset$, то $B_\varepsilon(x) \cap E \neq \emptyset!!!$

Сл-но, $B_\varepsilon(x) \subset \mathbb{R} \setminus \overline{E}$, т. е. x - внут. точка $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$

Вторая часть следует из наблюдений:

(1) любая предельная точка E либо внутренняя, либо граничная.

(2) граничная точка E , не принадлежащая E , является предельной. \square

Задача 2.1. 1) $x \in \overline{E} \iff \exists \{x_n\} \subset E (x_n \rightarrow x)$

2) $\overline{E} = \bigcap \{F: F - \text{замкнуто или } F \supset E\}$

3 Лекция 9

Определение 3.1. Семейство $\{G_\lambda\}$ наз-ся покрытием мн-ва E , если $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Покрытие наз-ся открытым, если все G_λ открыты.

Пример. $\{(\frac{1}{n}, 1)\}_{n \in \mathbb{N}}$ - *открытое покр-е* $(0, 1)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$$

Теорема 3.1 (Лемма Гейне-Бореля). Если $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует открытое покр-е отрезка $[a, b]$, то:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda: ([a, b] \subset G_{\lambda_1} \cup \dots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Предположим, что из открытого покр-я $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ отрезка $[a, b]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

Разделим $[a, b]$ пополам и обозначим за $[a_1, b_1]$ ту его половину, кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ .

Разделим $[a_1, b_1]$ пополам и обозначим за $[a_2, b_2]$ ту его половину, кот. не покр-ся конечным набором G_λ

...

По индукции будет построена стягивающаяся п-ть отрезков, каждый из кот. не покрыв-ся конечным набором G_λ

По т. Кантора о вложенных отрезках, найдётся т. $c \in \bigcap_{i=1}^n [a_i, b_i]$. Т. к.

$$\begin{aligned} c \in [a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda &\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \Lambda (c \in G_{\lambda_0} - \text{открытое}) \\ &\Rightarrow \exists B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0} \end{aligned}$$

Выберем k так, что $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} < \varepsilon$

Сл-но, $c - a_k < \varepsilon$ и $b_k - c < \varepsilon$. Откуда:

$$[a_k, b_k] \subset B_\varepsilon(c) \subset G_{\lambda_0} !!! (с построением п-ти $\{[a_n, b_n]\}$)$$

□

Следствие. Если F - замкнутое огр. мн-во в \mathbb{R} и $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ - откр. покр-е F , то:

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda: (F \subset G_{\lambda_1} \cup \dots \cup G_{\lambda_n})$$

Доказательство. Т. к. F - огр., то $\exists [a, b]: F \subset [a, b]$. Сем-во $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \cup \{\mathbb{R} \setminus F\}$ отк-е покр-е $[a, b]$, т. к. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \cup (\mathbb{R} \setminus F) = \mathbb{R}$

По т. Гейне-Бореля $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} [a, b] &\subset G_{\lambda_1} \cup G_{\lambda_2} \cup \dots \cup G_{\lambda_n} \cup (\mathbb{R} \setminus F) \\ \Rightarrow F &\subset G_{\lambda_1} \cup \dots \cup G_{\lambda_n} \end{aligned}$$

□

Введм следующее обозначение:

Обозначение.

$$B_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right) \cup \{+\infty\} \text{ - } \varepsilon\text{-окр-ть } +\infty$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(+\infty) = \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right) \text{ - проколота } \varepsilon\text{-окр-ть } +\infty$$

$$B_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \{-\infty\}$$

$$\overset{\circ}{B}_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Поскольку все определения этого параграфа давались на языке окр-тей, то всё это верно и для $\overline{\mathbb{R}}$

$E \subset \overline{\mathbb{R}}$. В част-ти $+\infty(-\infty)$ - предел. точка мн-ва $E \subset \overline{\mathbb{R}} \iff E \setminus \{+\infty\}$ неогр. сверху ($E \setminus \{-\infty\}$ - неогр. снизу).

На языке окр-ти можно дать общее определение предела:

Определение 3.2. Точка в $b \in \overline{\mathbb{R}}$ наз-ся **пределом** числовой п-ти $\{a_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N: \forall n \geq N (a_n \in B_\varepsilon(b))$$

3.1 §4: Непрерывные ф-ции

3.1.1 Предел ф-ции в точке

Пусть $E \in \mathbb{R}$, задана ф-ция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Определение 3.3 (по Коши). Точка b наз-ся пределом ф-ции f в т. a , если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Пишут $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ или $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow a$

$$(f(\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E) \subset B_\varepsilon(b))$$

Замечание. Если для ф-ции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ - положить $a = +\infty$: дост-но положить $N = \lfloor \frac{1}{\delta} \rfloor + 1$

Определение 3.4. Число b наз-ся пределом ф-ции f в точке $a \in \mathbb{R}$, если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Определение 3.5 (по Гейне). Точка b наз-ся пределом ф-ции f в точке a , если a - предельная точка мн-ва E и:

$$\forall \{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\} (x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b)$$

Замечание. Поскольку a - предельная точка мн-ва E , то

$$\forall \delta > 0: \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E \neq \emptyset$$

и суц-ет $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$

Пример.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$$

$a \in \mathbb{R}$ - предельная точка \mathbb{R}

Покажем, что:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

Зафикси. $\varepsilon > 0$ и пусть $\delta \leq 1$:

$$0 < |x - a| < \delta \leq 1$$

$$|x + a| = |x - a + 2a| < |x - a| + 2|a| \leq 1 + 2|a|$$

Возьмем $\delta = \min \{ 1, \frac{\varepsilon}{2|a|+1} \}$:

$$0 < |x - a| < \delta \iff 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1} \iff |x^2 - a^2| < |x - a|(2|a|+1) < \varepsilon$$

Рассм. по Гейне:

$$x_n \neq a, x_n \rightarrow a \Rightarrow x_n^2 \rightarrow a^2 \iff f(x_n) \rightarrow f(a)$$

Теорема 3.2. Определения по Коши и по Гейне **равносильны**.

Доказательство. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и a - предельная точка мн-ва E .

Опр. 1 \Rightarrow Опр. 2) Пусть $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ по Коши

Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}$ и $x_n \rightarrow a$. Заф. $\varepsilon > 0$.

По опр-ю предела ф-ции $\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E: (f(x) \in B_\varepsilon(b))$

Т. к. $x_n \rightarrow a$, то $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in B_\delta(a))$. Имеем $x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ при всех $n \geq N$, а значит, $f(x_n) \in B_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N$. Сл-но, $f(x_n) \rightarrow b$. Опр. 2 выполн-ся.

Опр. 2 \Rightarrow Опр. 1) Пусть $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что Опр. 1 не выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E (x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \wedge f(x) \notin B_\varepsilon(b))$$

Положим $\delta = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ и соотв. знач-е x обозначим через x_n . По индукции будет построена посл-ть $\{x_n\}$, т. ч. $x_n \in \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{n}}(a) \cap E$.

Имеем $\{x_n\} \subset E \setminus \{a\}$ и по т. о зажатой п-ти $x_n \rightarrow a$, а значит $f(x_n) \rightarrow b$

По опр-ю предела посл-ти $\exists N, \forall n \geq N (f(x_n) \in B_\varepsilon(b))!!!$

Сл-но опр. 2 не выполняется !!!

□

Замечание. Определа по Гейне можно ослабить, считая, что $\{x_n\}$ монотонна. (Задача !)

Св-ва предела ф-ции:

Пусть $f, g, h : E \rightarrow \mathbb{R}$ и a - предел. точка E :

C1: (Единственность предела) Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, то $b = c$

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}$ и $x_n \rightarrow a$

По опр-ю Гейне $f(x_n) \rightarrow b$ и $f(x_n) \rightarrow c$. Т. к. предел посл-ти единственен, то $b = c$ □

C2: (Предел по подмн-ву) Если a - предел. точка мн-ва $D \subset E$ и

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow a} (f|_D) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{x_n\}, x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$. Тогда:

$$(f|_D)(x_n) = f(x_n) \rightarrow b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x \rightarrow a} (f|_D)(x)$ □

C3: (Предел зажатой ф-ции) Если:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E: (f(x) \leq h(x) \leq g(x))$$

и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, то суц-ет $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$

Доказательство. Рассм. произв. $\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$. Тогда $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$f(x_n) \leq h(x_n) \leq g(x_n), \forall n \geq N$$

По т. о зажатой п-ти:

$$\begin{cases} f(x_n) \rightarrow b \\ g(x_n) \rightarrow b \end{cases} \Rightarrow h(x_n) \rightarrow b$$

По опр-ю Гейне $b = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ □

C4: **(Свойство локализации)** Если f и g совпадают на $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, то суш-ет $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

C5: **(Арифм. операции с пределами)** Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тогда:

1)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = bc$$

3) Если $c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ на E , то:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$$

Следствие. Если суш-ет величина справа, то суш-ет величина слева и рав-во выполняется

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть:

$$\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$$

Тогда $f(x_n) \rightarrow b$ и $g(x_n) \rightarrow c$. По св-вам предела п-ти:

$$f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow b \pm c$$

$$f(x_n)g(x_n) \rightarrow bc$$

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{b}{c}$$

\Rightarrow По опр. предела ф-цию по Гейне:

$$(f \pm g)(x) \rightarrow b \pm c$$

$$(fg)(x) \rightarrow bc$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \rightarrow \frac{b}{c}$$

При $x \rightarrow a$.

□

С6: **(Лок. огр-ть)** Если сущ. конечный $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, то

$$\exists \delta > 0, \exists C > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (|f(x)| \leq C)$$

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (b - 1 < f(x) < b + 1) (\varepsilon = 1)$$

Положим тогда $C = |b| + 1$.

□

С7: **(Предел композиции)** Пусть заданы ф-ции:

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}, f(E) \subset D, g : D \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

Пусть вып-но хотя бы одно из условий:

- 1) $f(x) \neq b$ в некот. проколотой окр-ти a
- 2) $g(b) = c$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c = \lim_{y \rightarrow b} g(y)$$

Доказательство. Зафикс. $\varepsilon > 0$. По опр-ю предела ф-ции:

$$\exists \sigma > 0, \forall y \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b) \cap D (g(y) \in B_\varepsilon(c))$$

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (f(x) \in B_\sigma(b))$$

- 1) Уменьшая $\delta > 0$, если необ-мо, можно считать, что $f(x) \neq b$ для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$.

$$\text{Тогда } f(x) \in \overset{\circ}{B}_\sigma(b), a - \dots,$$

$$g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$$

$$\text{Сл-но, } c = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$$

2) Если $f(x) = b$, для некот. т. $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$, то

$$g(f(x)) = g(b) = c \in B_\varepsilon(c)$$

Сл-но, $g(f(x)) \in B_\varepsilon(c)$, для всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$. Так что $c = \lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x)$

□

Замечание. Выполнение хотя бы одного из условий *существенно* для \exists предела.

Пример.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

$$g = f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0, g(f(x)) = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1 \neq \lim_{y \rightarrow 0} g(y)$$

4 Лекция 10

4.1 Критерий Коши для предела ф-ции

Теорема 4.1 (Критерий Коши суц-е предела ф-ции). Пусть:

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}$$

a предельная точка мн-ва E

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (|f(x) - f(x')| < \varepsilon) \quad (1)$$

Доказательство.

\Rightarrow) Заф. $\varepsilon > 0$. Пусть предел ф-ции $= b$. По опр. предела ф-ции:

$$\exists \delta > 0, \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Тогда для любых $x, x' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E$:

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - b| + |f(x') - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$$

\Leftarrow) Пусть для f выполнено (1). Покажем, что f удов-ет опр-ю предела по Гейне. Заф. $\varepsilon > 0$ и выберем соотв. $\delta > 0$ из (1). рассм. произ. п-ть:

$$\{x_n\}, x_n \in E \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$$

Тогда $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$, а значит:

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \forall n, m \geq N$$

Так что п-ть $\{f(x_n)\}$ - фундаментальна \Rightarrow по критерию Коши для п-тей $f(x_n) \rightarrow b \in \mathbb{R}$.

Рассм. ещё п-ть $\{y_n\}, y_n \in E \setminus \{a\}, y_n \rightarrow a$. Тогда:

$$\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 (x_n, y_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E)$$

Значит:

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$$

Сл-но, $f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$, откуда $f(y_n) \rightarrow b$. По Гейне,

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

□

4.2 Односторонние пределы

Определение 4.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

Если a - предельная точка мн-ва $(a; +\infty) \cap E$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{(a; +\infty) \cap E}(x)$$

наз-ся **пределом справа** ф-ции f в т. a .

Если a предельная точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$, то:

$$\lim_{x \rightarrow a} f|_{(-\infty; a) \cap E}(x)$$

наз-ся **пределом слева** ф-ции f

Обозначение.

$$f(a+0) \text{ или } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

$$f(a-0) \text{ или } \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

По опр-ю:

$$f(+\infty-0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$f(-\infty+0) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Лемма 4.2. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и задана $f : E \rightarrow \mathbb{R}$

Пусть a - предел. точка мн-ва $(-\infty; a) \cap E$ и $(a; +\infty) \cap E$. Тогда:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) (\in \mathbb{R}) \iff f(a+0) = f(a-0)$$

Доказательство. \Rightarrow Это вытекает из св-ва предела по подмножеству.

\Leftarrow $f(a+0) = b = f(a-0)$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю одност. пределов:

$$\exists \delta_1 > 0, \forall x \in (a - \delta_1, a) \cap E (f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

$$\exists \delta_2 > 0, \forall x \in (a, a + \delta_2) \cap E (f(x) \in B_\varepsilon(a))$$

Положим $\delta = \min(d_1, d_2)$. Тогда:

$$\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap E (f(x) \in B_\varepsilon(b))$$

Сл-но, $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

□

Определение 4.2. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $D \subset E$.

Ф-ция f наз-ся нестрого возрастающей (убывающей) на D , если:

$$\forall x_1, x_2 \in D (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)) \text{ (соотв. } (f(x_1) \geq f(x_2)) \text{)}$$

Теорема 4.3 (О пределе монотонной ф-ции). Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}}; a < b$. Если ф-ция f нестрого возрастает на (a, b) , то:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf_{(a,b)} f(x)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \sup_{(a,b)} f(x)$$

Если f нестрого убыв., то \sup и \inf меняются местами.

Доказательство. Пусть f нестрого возрастает на (a, b) . Положим $s = \sup_{(a,b)} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. По опр-ю \sup :

$$\forall r < s, \exists x_r \in (a, b): (f(x_r) > r)$$

Откуда в силу возрастания вып-но:

$$r < f(x) \leq s, \forall x \in (x_r, b)$$

Зафикс. $\varepsilon > 0$. Положим $s - \varepsilon = r$, если $s \in \mathbb{R}$, и $\frac{1}{\varepsilon} = r$, если $s = +\infty$. Тогда:

$$f(x) \in B_\varepsilon(s), \forall x \in (x_r, b)$$

Если $b \in \mathbb{R}$, то $\delta = b - x_2 \Rightarrow (b - \delta, b) \subset (x_r, b)$

Если $b = +\infty$, то $\delta = \frac{1}{|x_r|+1} \Rightarrow (\frac{1}{\delta}, +\infty) \subset (x_2, b)$ □

Следствие. Если ф-ция f монотонна на (a, b) и $c \in (a, b)$, то суц-ют конечные $f(c-0)$ и $f(c+0)$, причём

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0), \text{ - если } f \text{ нестрого возр-ет};$$

$$f(c-0) \geq f(c) \geq f(c+0) \text{ - если } f \text{ нестрого убыв-ет.}$$

Доказательство. Для опред-ти, пусть f нестрого возр-ет на (a, b) . Тогда:

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in (a, c) \Rightarrow f(c-0) = \sup_{(a,c)} f(x) \leq f(c)$$

$$f(c) \leq f(x), \forall x \in (c, b) \Rightarrow f(c+0) = \inf_{(b,c)} f(x) \geq f(c)$$

□

5 Лекция 11

5.1 Непрерывность ф-ции в точке

Определение 5.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}, a \in E$ и $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Ф-ция f наз-ся непрерывной в точке a , если:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Иначе:

$$x \in B_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$$

Замечание. Из опр-я следует, что ф-ция не меняет значение **резко**

Св-во (отделимость): если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ - непр-на в точке a и $f(a) > 0 (< 0)$, то

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E (f(x) > \frac{f(a)}{2} (< \frac{f(a)}{2}))$$

Доказательство. Пусть $f(a) > 0$. По непр-ти ф-ции в a , положим $\varepsilon = \frac{f(a)}{2}$. Тогда

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E (f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}) \Rightarrow f(x) > \frac{f(a)}{2}$$

□

Замечание. В определении непр-ти ф-ции точка $a \in E$ - области определения, но **не обязана** быть предельной точкой E .

Определение 5.2. Точка, принадлежащая мн-ву, но не явл-ся его предельной точкой наз-ся **изолированной**.

Пример.

$$E = (1, 2] \cup \{5\}$$

Тогда точка 5 - изолированная точка мн-ва E

Теорема 5.1. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}, a \in E$. Следующие утв-я эквив-ны:

- 1) f непр-на в a
- 2) $\forall \{x_n\}, x_n \in E (x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a))$

3) Либо a - изолированная точка мн-ва E , либо a - предельная точка мн-ва E и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Доказательство.

1 \Rightarrow 2) Рассм. $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \rightarrow a$. Заф. $\varepsilon > 0$. По опр-ю непр-ти

$$\exists \delta > 0, \forall x \in B_\delta(a) \cap E (|f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

Т.к. $x_n \rightarrow a$, то $\exists N, \forall n \geq N (x_n \in B_\delta(a) \cap E)$, а значит,

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon, \forall n \geq N$$

Сл-но, $f(x_n) \rightarrow f(a)$

2 \Rightarrow 3) Если a - предельная точка мн-ва E , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, по опр-ю предела по Гейне.

В противном случае, a - изолированная точка области определения.

3 \Rightarrow 1) Если a - изолированная точка мн-ва E , то $\exists \delta_0 > 0: (B_{\delta_0}(a) \cap E = \{a\})$. Тогда определение непр-ти выполняется для $\delta = \delta_0$.

Если a - предельная точка мн-ва E , то по опр-ю предела по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$$

При $x = a$, следствие выше выпол-ся (очевидно). Это означает, что f непр-на в a .

□

Следствие. Если $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$ - непр-ны в $a \in E$, то в этой точке непр-ны ф-ции:

1) $f \pm g$

2) $f \cdot g$

3) При доп. усл-ии $g \neq 0: \frac{f}{g}$

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \rightarrow a$. Т. к. f, g - непр-ны в a , то $f(x_n) \rightarrow f(a)$ и $g(x_n) \rightarrow g(a)$. Тогда по св-вам предела п-ти имеем:

$$1) \quad f(x_n) \pm g(x_n) \rightarrow f(a) \pm g(a)$$

$$2) \quad f(x_n)g(x_n) \rightarrow f(a)g(a)$$

$$3) \quad \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \rightarrow \frac{f(a)}{g(a)}$$

По Теореме (5.1), эти ф-ции непрерывны в a . □

Пример.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0, (a_i \in \mathbb{R})$$

Эта ф-ция непр-на в каждой точке $a \in \mathbb{R}$

Доказательство.

$$x \mapsto x$$

$$x \mapsto c, c \in \mathbb{R}$$

Ф-ции выше непрерывны. Тогда по сл-ию (5.1) в a непр-ны:

$$x \mapsto x^k, k \in \mathbb{N}$$

А значит P непр-на в a . □

Теорема 5.2 (Непрерывность композиции). Если ф-ция $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непр-на в a , $f(E) \subset D, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ - непр-на в $b = f(a)$, то композиция $g \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ непр-на в т. a .

Доказательство. Рассм. произвольную п-ть $\{x_n\}, x_n \in E, x_n \rightarrow a$. Тогда: $f(x_n) \rightarrow f(a)$ по непр-ти f в a . Кроме того:

$$g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a)) \text{ - по непр-ти } g \text{ в } f(a) \iff$$

$$(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(a)$$

По Теореме 5.1, ф-ция $g \circ f$ непр-на в т. a . □

Определение 5.3. Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ и $a \in E$. Если $f|_{[a, +\infty)}$ непр-но в a , то говорят, что f непр-на справа в т. a .

Аналогично: $f|_{(-\infty, a]}$ непр-на в a , то f непр-на слева в a .

Замечание. Если a - предел. точка мн-ва $[a, +\infty) \cap E$, то f непр. справа в т. $a \iff f(a+0) = f(a)$