Алгебра и геометрия

Григорян Сергей

19 марта 2025 г.

Содержание

1 Лекция 7 **3**

1.1 Приложения ЖНФ 3

1.2 Вычисление многочлена от линейноного оператора 4

1.2.1 Аналитические функции от линейных операторов . 6

1.2.2 Операторная норма 7

1.2.3 Линейные рекурренты 9

1 Лекция 7

1.1 Приложения ЖНФ

Теорема 1.1 (Об минимальной аннулир. мн-не лин. оператора)**.** $\phi\colon V \to V, \dim V = n$,

$$\chi_\phi(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (t-\lambda_i)^{m_i}, m_i = \mathrm{alg}(\lambda_i)$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_s \text{ — попарно различные}$$

Тогда $\mu_\phi(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{l_i}, l_i$ *— максимальный порядок ЖК, отвечающих* λ_i

Доказательство. а) Вычислим мин. многочлен для $\phi = J_k(\lambda)$

$$\chi_\phi(t) = (-1)^k (t-\lambda)^k \Rightarrow \mu_\phi = \mu_{J_k(\lambda)} = (t-\lambda)^i, i \le k$$

Из ЖД заключаем, что $\phi_\lambda^i \neq 0$, если $i < k$, следовательно:

$$(t-\lambda)^i \text{ — не является аннулирующим для оператора } \phi$$

$$\Rightarrow \mu_\phi(t) = (t-\lambda)^k$$

б) $V^\lambda = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_n}_{\text{циклич. подпр-ва для } \phi}$. По следствию из утв. 2:

$$\mu_\phi | V_\lambda = \text{НОК}((t-\lambda)^{k_1}, \ldots, (t-\lambda)^{k_n}) = (t-\lambda)^{\max\limits_{1 \le i \le n} k_i}$$

$$V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_s}$$

$$\mu_\phi = (t-\lambda_1)^{l_1} \ldots (t-\lambda_s)^{l_s}, l_i = \max(k_{ij})$$

□

Следствие (Критерий диагонализируемости лин. оп. в терминах мин. мн-на)**.** $\phi\colon V \to V, \phi$ *— лин. факт. над* $\mathbb{F}$*, тогда* ϕ *— диагонализируем* $\iff$ *все корни минимального многочлена* $\mu_\phi(t)$ *— простые (т. е. кратность каждого корня* $= 1$*).*

Доказательство. а) Необх. ϕ — диагонализируем:

$$\forall \lambda_i \Rightarrow l_i = 1 \Rightarrow \mu_\phi(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i) \Rightarrow \lambda_i \text{ — простые}$$

б) Дост.: $\mu_\phi(t)$ имеет кратности $\forall i\colon l_i = 1 \Rightarrow$ ЖНФ имеет диагональный вид.

$\square$

Пример. *$\phi\colon V \to V$, V — над $\mathbb{C}$. Пусть $\phi^n = id$. Тогда ϕ — диагонализируем.*

$$p(t) = t^n - 1 \text{ — аннулирующий многочлен}$$

$$p(t) = 0 \iff t \in \left\{ \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \right\}$$

$$\mu_\phi | p$$

Корни кратности $1 \Rightarrow \phi$ — диагонализируем.

Вопрос: при каком условии на лин. оператор, минимальный многочлен совпадает с характеристическим?
Ответ: когда у каждого собственного значения есть ровно одна ЖК.

1.2 Вычисление многочлена от линейноного оператора

$\phi\colon V \to V$, ϕ — лин. фактор. V над $\mathbb{F}$:

$$f(t) = t^n$$

Цель: найти $f(\phi), f(A_\phi)$

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} J^n_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & J^n_{k_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Для начала вычислим $f(J_k(\lambda)), f = t^n$:

$$J_k(\lambda) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{\lambda E} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

причём $N^k = 0$, но $N^{k-1} \neq 0$
Считая, что $n \geq k$, воспользуемся биномом Ньютона:

$$J_k(\lambda)^n = (\lambda E + N)^n = \sum_{s=0}^{k-1} C_n^s (\lambda E)^{n-s} N^s =$$

$$= \lambda^n E + C_n^1 \lambda^{n-1} N + \ldots + C_n^{k-1} \lambda^{n-k+1} N^{k-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & & & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & & \\ & & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda^n \end{pmatrix} = \qquad (1)$$

Заметим, что $n\lambda^{n-1} = (\lambda^n)'$. Т. е, в терминах многочлена f, это:

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \ldots \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda) \end{pmatrix}$$

В случае, когда $n < k$, формула будет справ-ва, но будет заполнено только n диагоналей над главной.
Проверим:

$$f^{(k-1)}(\lambda) = (k-1)! C_n^{k-1} \lambda^{n-k+1}$$

$$(t^n)^{(k-1)} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+2) t^{n-k+1} =$$

$$f^{(k-1)}(\lambda) = \frac{n!}{(n-k+1)!} \lambda^{n-k+1} \cdot \frac{(k-1)!}{(k-1)!} = (k-1)! C_n^{k-1} \lambda^{n-k+1}$$

Пусть дана матрица A и её матрица перехода к жорданову базису:

$$J = S^{-1}AS, S = S_{e\to A}$$

$$A = SJS^{-1}$$

$$A^n = (SJS^{-1})(SJS^{-1})\ldots(SJS^{-1}) = SJ^nS^{-1}$$

1.2.1 Аналитические функции от линейных операторов

$$\phi\colon V \to V, \mathbb{F} = \mathbb{R} \vee \mathbb{F} = \mathbb{C}$$

Определение 1.1. Норма в ЛП V — функция $||\cdot||\colon V \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая аксиомам:

1. $\forall x \neq 0, ||x|| > 0$ (положительная определённость)
2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ (однородность)
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (нер-во треугольника)

Пример. $\mathbb{F}^n$*:*

1. $||x|| = \max\limits_i |x_i|$

2. Евклидова (эрмитова) норма:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

3. Манхэттенская норма:

$$||x|| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Определение 1.2 (Сходимость по норме)**.** $\{\, x^m \,\}$ (верхний индекс) сходится к x по норме, если $||x^m - x|| \to 0$ при $m \to \infty$

Замечание. *В случае норм (*1 - 3*) сходимость по норме эквивалентна покоординатной сходимости:*

$$\forall i\colon x_i^m \to x_i$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty} x_m$ *— сходится абсолютно, если* $\sum_{m1}^{\infty} ||x_m||$ *— сх-ся.*

Утверждение 1.1. *Если ряд* $\sum x_m$ *сходится абсолютно, то он сх-ся.*

$$\left|\left|\sum x_m\right|\right| \leq \sum ||x_m||$$

Утверждение 1.2. *Если ряд* $\sum x_m$ *сходится абсолютно, то его члены можно переставлять как угодно, а сумма будет та же.*

1.2.2 Операторная норма

$(V, ||\cdot||)$ — линейное нормированное пр-во.

$$\phi \in \mathcal{L}(V), \dim \mathcal{L}(V) = (\dim V)^2$$

Определение 1.3.

$$||\phi|| = \sup_{x\neq 0} \frac{||\phi(x)||}{||x||} = \sup_{||x||=1} ||\phi(x)|| = \max_{||x||=1} ||\phi(x)||$$

(можем писать max, т. к. норма непрерывна и определена на компакте)

Теорема 1.2. *Пусть $f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m t^m$ — степенной ряд с радиусом сходимости R. Пусть $\phi\colon V \to V$, т. ч. $||\phi|| < R$. Тогда:*

$$f(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi^m$$

сходится по операторной норме, и его сумма — лин. оператор.

Лемма 1.3 (О свойствах операторной нормы). *а)* $||\phi + \psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$ *(нер-во треугольника)*

б) $||\phi \cdot \psi|| \leq ||\phi|| \cdot ||\psi||$

Доказательство. а) $x \neq 0$:

$$||(\phi + \psi)(x)|| = ||\phi(x) + \psi(x)|| \leq ||\phi(x)|| + ||\psi(x)||$$

$$\sup_{||x||\neq 0} \frac{||(\phi + \psi)(x)||}{||x||} \leq \sup_{||x||\neq 0} \frac{||\phi(x)||}{||x||} + \sup_{||x||\neq 0} \frac{||\psi(x)||}{||x||}$$

$$||\phi(x)|| = \frac{||\phi(x)|| \cdot ||x||}{||x||} \leq \left(\sup_{||x||\neq 0} \frac{||\phi(x)||}{||x||} \right) \cdot ||x|| = ||\phi|| \cdot ||x||$$

$$x \neq 0\colon \forall x \in V \hookrightarrow ||\phi(x)|| \leq ||\phi|| \cdot ||x||$$

б) $||\phi \cdot \psi(x)|| = ||\phi(\psi(x))|| \leq ||\phi|| \cdot ||\psi(x)|| \leq ||\phi|| \cdot ||\psi|| \cdot ||x||$

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{||\phi|| \cdot \psi(x)||}{||x||} \leq ||\phi|| \cdot ||\psi||$$

$$||\phi \cdot \psi|| = \sup \frac{||\phi \cdot \psi(x)||}{||x||} \leq ||\phi|| \cdot ||\psi||$$

□

Доказательство. а) $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \phi^m(x)$ — покажем, что ряд сходится абсолютно:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| ||\phi^m(x)|| \le \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| ||\phi^m|| \cdot ||x|| = ||x|| \sum_m |a_m| \, ||\phi^m|| \le$$

$$\le ||x|| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \cdot ||\phi||^m =$$

$$||\phi|| = R_0 < R$$

$$= ||x|| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \cdot R_0^m \text{ — сх-ся}$$

По теореме Абеля, внутри круга сходимости сходимость степенного ряда является равномерной и абсолютной.

$$f(\phi)(x) := \sum_m a_m \phi^m(x)$$

$$x \underset{\text{лин. оп?}}{\mapsto} f(\phi)(x)$$

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} a_m \phi^m \text{ — это лин. оп.}$$

Пределом при $n \to \infty$ получаем, что $f(\phi)$ — лин. оператор.

□

Пример. *Посчитаем экспоненту от Жордановой клетки:*

$$\exp(J_k(\lambda)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & & & \\ & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & & \\ & & e^{\lambda} & \frac{e^{\lambda}}{1!} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\exp(A) = S \exp(J) S^{-1}$$

1.2.3 Линейные рекурренты

$\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathbb{F}[x]$ — кольцо многочленов.

$$p(x) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \ldots + p_1 x + p_0, \deg p = s, p_0 \neq 0$$

Определение 1.4. Линейной рекуррентной с характеристическим многочленом p называется последовательностью:

$$\{ a_n \} \in F^{\infty}$$

причём для $\forall n > 0$:

$$a_{n+s} + p_{s-1}a_{n+s-1} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0 \tag{2}$$

$$F^{\infty} \ni (a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}, a_s, \ldots, a_n, \ldots)$$

Утверждение 1.3. *Пусть V_p — мн-во всех линейных рекуррент с характристическим многочленом $p(x)$. Тогда V_p — линейное пр-во над полем F, $\dim V_p = s$*

Доказательство. $\{ a_n \}$ и $\{ b_n \} \in V_p < F^{\infty}$. Стандартный базис пр-ва V_p:

$$e_0 = (\underset{0}{1}, 0, 0, 0, \ldots, \underset{s-1}{0}, \underset{s}{-p_0}, \ldots)$$

$$e_1 = (0, 1, 0, 0, \ldots, 0, -p_1, \ldots)$$

$$\vdots$$

$$e_{s-1} = (0, 0, 0, 0, \ldots, 1, -p_{s-1}, \ldots)$$

$$\phi\colon V_p \to V_p$$

$$\phi(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

□

Утверждение 1.4. $\{ a_n \} \in V_p \iff p(\phi)(a_n) = 0$

Доказательство.

$$a_n \in V_p \iff a_{n+s}p_{s-1}a_{n+s-1} + \ldots + p_1 a_{n+1} + p_0 a_n = 0 =$$

$$= (\phi^s + p_{s-1}\phi^{s-1} + \ldots + p_1\phi + p_0 id)(a_n) = 0 \iff$$

$$\iff p(\phi)(a_n) = 0$$

□

Следствие.

$$V_p = \ker p(\phi)$$

$$\phi|_{V_p} = \psi_p$$

Утверждение 1.5. *Пусть μ — минимальный многочлен лин. оператора ϕ_p. Тогда:*

$$\mu = p$$

Доказательство.

$$\mu(\psi_p) = \mu(\phi)|_{V_p} = 0(\text{по опр. мин. мн-на})$$

$$\Rightarrow V_p \subseteq \ker \mu(\phi) \subseteq V_\mu$$

$$\dim V_p = s \leq \dim V_\mu = \deg \mu$$

$$\Rightarrow p \text{ — аннулир. мн-н для } \phi|V_p = \psi_p$$

$$\Rightarrow \mu|p$$

$$\deg \mu \leq \deg p \Rightarrow \mu \sim p$$

□

Определение 1.5. Матрицу вида:

$$A_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{s-1} \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.6. *Оператор $\psi_p = \phi|_{V_p}$ имеет в стандартном базисе $(e_0, \dots, e_{s-1})$ пр-ве V_p или A_p*

Доказательство.

$$\psi_p(e_0) = \psi_p(1, 0, \dots, \underset{s-1}{0}, -p_0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, \underset{s-1}{-p_0}, 0, \dots, 0) = -p_0 e_{s-1}$$

$$0 < i \leq s-1$$

$$\psi_p(e_i) = \psi(p)(0, 0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \underset{s}{-p_i}, \dots) = (0, \dots, \underset{i-1}{1}, \dots, \underset{s-1}{-p_i}, \dots) =$$

$$= e_{i-1} - p_i e_{s-1}$$

□

Утверждение 1.7.

$$\chi_{\psi_p}(x) = \chi_{A_p}(x) = (-1)^s p(x) =$$

$$= (-1)^s(x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \ldots + p_1 x + p_0)$$

Доказательство.

$$\chi_{A_p}(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -x & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -x & \ldots & 0 \\ & & & & \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \ldots & -p_{s-1} - x \end{vmatrix} =$$

Раскладываем по последней строке и получаем ответ.

$$= (-p_{s-1} - x) \begin{vmatrix} -x & & & \\ & -x & & \\ & & \ddots & \\ & & & -x \end{vmatrix} + \ldots$$

□

Следствие. *Оператор ψ_p имеет только одну ЖК, отвечающему каждому СЗ.*

Теорема 1.4 (Основная теорема о линейных реккурентах)**.** *Пусть $p(x) \in \mathbb{F}[x]; p_0 \neq 0, \deg p = s$:*

$$p(x) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \ldots + p_1 x + p_0$$

Пусть $\{ a_n \}$ — лин. рекуррента относящаяся к характеристическому многочлену $p(x)$, тогда:

$$a_n = \sum_{i=1}^{u} \sum_{k=1}^{l_i} c_{ik} C_n^{k-1} \lambda_i^{n-k+1}$$

где u — число различных СЗ оператора ψ_p, l_i — размер единственной ЖК, относящ. к λ_i