

Алгоритмы и структуры данных.

Лекция 1

Сергей Григорян

2 сентября 2024 г.

1 Телега препода

telegram - @EeeDA (Долгов Даниил)

2 Пояснение за О-нотацию

$O(n) \iff T(n) \geq c * n$, n - размер входных данных, c - const

В общем:

$$f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}.$$

$$f \in O(g) \iff \exists c: f(n) \leq c * g(n).$$

Пример.

$$f(n) = 5n$$

$$g(n) = 20n$$

$$f \in O(g), g \in O(f)$$

Пример.

$$f(n) = 5n,$$

$$g(n) = n^2,$$

$$f \in O(g), 5n \leq 5n^2.$$

$$g \notin O(f), \nexists c: g(n) \leq c * f(n), \forall n.$$

3 Задачи

3.1 Задача 1

a_1, a_2, \dots, a_n - числа, все кроме одного встречаются дважды За $O(n)$
найти число, кот. встреч. 1 раз

Решение. *xor-sum*

3.2 Задача 2

— Кроме двух —

Решение. Пусть a, b - искомые числа. Считаем $a \oplus b = c$. Пусть i -ый бит $c = 1$ (Он существует, т. к. иначе $a = b$). Разбиваем числа на 2 группы (с единицей в i -ом бите и с нулем). Считаем xor этих групп. Эти xor-ы наш ответ.

3.3 Задача 3

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Найти $b, c \in \{1, \dots, n\}$: их нет в a

Время: $O(n)$

Память: $O(1)$

Решение. I) "Добавить" числа $1..n$, и сводим к задаче (2)

$$II) S = \sum_{i=1}^{n-2} a_i$$

$$b + c = S - \frac{n(n+1)}{2}$$

Пусть $b < c$

$$a_i \leq \frac{b+c}{2}$$

$$q = \left\lfloor \frac{b+c}{2} \right\rfloor \Rightarrow b \in \{1, 2, \dots, q\}$$

Только одно число отсутствует в этом мн-ве \Rightarrow

$$b = \left\lfloor \frac{q(q+1)}{2} \right\rfloor - \sum_{i=1}^q a_i$$

$$c = S - \frac{n(n+1)}{2} - b.$$

3.4 Задача 4

Дана матрица $(n * m)$. По горизонталям и вертикалям числа возрастают. Найти данное число x .

Время: $O(n + m)$

Память: $O(1)$

Решение. Идем по контуру. solved.

3.5 Задача 5

Есть n бин строк длины n . Найти строку $t: t \neq s_i, \forall i = 1..n$

Время: $O(n)$

Решение. Напишем строки в столбец. Возьмём строку $t': t'_i = s_{ii}$. Тогда $t = \text{inverse}(t')$

3.6 Задача 6

a_1, a_2, \dots, a_n , есть число, кот. встреч. $> \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ раз. Найти его.

Решение. Поддерживаем тек. моду и счётчик, сколько раз тек. мода встретилась в массиве. $+1$, если встрет. она, иначе -1 . Если счётчик $= 0$, то меняем тек. моду на встреч. элем.

Почему работает:

Доказательство. Рассм. первый момент обнуления. Увидим, что кол-во истинной моды на ост. суффиксе $> \frac{1}{2}$ размеры, суффикса. После последнего такого отрезка, получаем, что, т.к. счётчик не может обнулиться, то полученная мода - истинная. \square

3.7 Задача 7

Слишком изи, чтобы писать.