Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

29 сентября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 1

1.1 Инфа

Лектор: Даниил Владимирович Мусатов (ему писать по поводу логики) и Райгородский Андрей Михайлович.

`telega: @musatych`

Об отсутствии на КР писать в тг заранее
Задачи на КР:

- Тестовые 0.8 (Или отдельно написано)
- Обычные (можно пересдать (1(на КР)/0.8(На след. КР)/0.5(В ДЗ)))

Задачи на ДЗ:

- Перешедшие с КР (0.5)
- Обычные (1)
- Дополн. (1.5)

Замечание. Чтобы получить доп. задачу, нужно решить все обычные задачи по какой-то теме.

1.2 Основные понятия теор. множеств

Обозначение. $x \in A \iff$ элемент x принадлежит мн-ву A.

Определение 1.1. Пустое мн-во $\emptyset$ - мн-во, не содержащее ни одного эл-та.

Определение 1.2. A подмн-во B $(A \subset B) \iff$

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Замечание. $\forall A : \emptyset \subset A$

Замечание.

$$\forall x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A).$$

Свойство отношения подмножества:

- Рефлексивность: $A \subset A$

- Транзитивность: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ -

- Антисимметричность: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$

Определение 1.3 (Равенство мн-в). $A = B \iff$, если A и B содержат одни и те же эл-ты.

Запись конечного мн-ва: $\{a, b, c\}$

Замечание. Из опр. рав-ва следует, что кратность и порядок записи не важен:

Пример. $\{a, b, c\} = \{a, c, b, b, b, a\}$

Замечание. Отличие $\in$ и $\subset$:

$$A = \{a, \{b\}, c, \{c\}\}.$$

$$\{a\} \subset A, \{a\} \notin A.$$

$$\{b\} \not\subset A, \{b\} \in A, \{\{b\}\} \subset A.$$

$$\{c\} \subset A, \{c\} \in A.$$

$$\{d\} \notin A, \{d\} \notin A.$$

Конструкция нат. чисел на основе мн-в
$0 = \emptyset$
$1 = \{\emptyset\}$
$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$n + 1 = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Операции над мн-вами

1. Объединение: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

2. Пересечение: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$

3. Разность: $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$

4. Дополнение: $\overline{A} = \{x : x \notin A\}$

5. Симметрическая разность: $A \triangle B = \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

Утверждение 1.1.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. В одну сторону:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow .$$

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ и $A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$
2. $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

□

1.3 Упорядоченные пары и кортежи

$$(a, b), a - \text{ 1-ый эл-т}, b - \text{ 2-ой эл-т}$$

Требование: $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

Определение 1.4 (Упрощенное определение Куратовского).

$$(a, b) = \{\{a, b\}, a\}.$$

$$(a, a) = \{\{a\}, a\}.$$

1.4 Парадокс Рассела

Определим I:

$$\{\{\{\cdots a \cdots\}\}\} = I \Rightarrow I \in I, \text{(беск. кол-во скобок)}.$$

$$(I, I) = \{\{I\}, I\} = I.$$

Рассмотрим: $M = \{x : x \notin x\}$

$$M \overset{?}{\in} M.$$

- Пусть $M \in M$. Тогда $x \notin x$ верно для $x = M$. Тогда $M \notin M$. Но тогда $x \notin x$ неверно для $x = M$. Противоречие.

- Аналогично $M \notin M \Rightarrow$ получаем парадокс.

Аксиома 1.1 (Аксиома фундированности). Не сущ. беск цепочки:

$$A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \cdots$$

Замечание. Это запрещает мн-во I и $M \in M$, а также даёт однозначную интерпретацию (a, b)

Если $\{a, b\} \in a$, то возникает беск. цепочка:

$$\{a, b\} \ni a \ni \{a, b\} \ni a \cdots .$$

Определение 1.5. Кортежи - расширение пары на много эл-ов.

Пример. $(a, b, c, d) = (a, (b, (c, d)))$ - кортеж

Определение 1.6. Декартово произведение мн-в A, B:

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$

2 Лекция 2

2.1 Отображения и соответствия

Определение 2.1. Соответствие (или многозначная ф-ция, или точечно-множ. отображение) - подмн-во декартова произведения мн-в A и B.

$F \subset A \times B$ - соответствие между A и B

Замечание. Непустозначное соответствие: $\forall x, \exists y \colon (x, y) \in F$

Картинки графика и двудольного графа

Определение 2.2. Отображение - однозначное соотв.

$$\forall x, \exists ! y \colon (x, y) \in f$$

$$\forall\text{- для любого}, \exists ! - \text{существует единственный}$$

Определение 2.3. Частично определённая ф-ция:

$$\forall x \colon (\neg \exists y \colon (x, y) \in F) \vee (\exists ! y \colon (x, y) \in F)$$

Определение 2.4. Инъекция - отображение, т. ч. $\forall x, y(x \neq y \to f(x) \neq f(y))$

Определение 2.5. $f(x)$ - тот элемент $z:\ (x, z) \in f$

Определение 2.6. $F(x)$ - образ $x \iff F(x) = \{z:\ (x, z) \in F\}$

Определение 2.7. Инъективные соответствия:

$$\forall x, y(x \neq y \to F(x) \cap F(y) = \emptyset)$$

Определение 2.8. Сюрьекция - отображение, т. ч. $\forall y, \exists x(y = f(x))$

Определение 2.9. Сюрьективное соответствие:

$$\forall y, \exists x:\ (x, y) \in F$$

Или по другому: $\forall y, \exists x:\ y \in F(x)$

Определение 2.10. Биекция - отображение, которое одновременно сюрьекция и инъекция.

Биекция = отображение + сюрьекция + инъекция

Замечание. Отдельного понятия биективного соответствия нет.

Определение 2.11. Обратное соответствие $F \subset A \times B$ - $F^{-1} \subset B \times A$:

$$(x, y) \in F \iff (y, x) \in F^{-1}$$

Теорема 2.1. F - Биекция $\iff$ F - взаимнооднозначное соответствие (т. е. F и F^{-1} - отображения)

Замечание. Частично опред. ф-ция + непустознач. соотв = отображение

Доказательство.

- F явл. инъективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ частично опред. ф-ция.
- F явл. сюрьективным соответствием $\iff$ $F^{-1}-$ непустозначное соотв.

□

2.2 Образ и прообраз

Определение 2.12. Пусть $S \subset A$. Тогда образ S:

- Для отображения: $f(S) = \{f(x) | x \in S\}$
- Для соотв.: $F(S) = \bigcup_{x \in S} F(x)$

Определение 2.13. Пусть $T \subset B$. Тогда прообраз T:

- Для отображения: $f^{-1}(T) = \{x | f(x) \in T\}$
- Для соотв.: $F^{-1} = \{x | F(x) \cap T \neq \emptyset\}$

Утверждение 2.1. $F(S \cap Q) \subset F(S) \cap F(Q)$

Доказательство. Пусть $y \in F(S \cap Q) \Rightarrow \exists x \in S \cap Q : \ y \in F(x)$:

$$\begin{cases} \exists x \in S : \ y \in F(x) \\ \exists x \in Q : \ y \in F(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow y \in F(S) \cap F(Q)$$

□

Утверждение 2.2 (Обратное.). Если F - инъективно, то

$$F(S) \cap F(Q) \subset F(S \cap Q)$$

Доказательство.

$$y \in F(S) \cap F(Q) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y \in F(S) \\ y \in F(Q) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x_1 \in S : \ y \in F(x_1) \\ \exists x_2 \in Q : \ y \in F(x_2) \end{cases} \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow \text{Нарушает инъективность}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = x \Rightarrow \exists x \in S \cap Q : \ y \in F(x)$$

□

2.3 Композиция

Определение 2.14. Композиция отображений $f \circ g$, опр. так:

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

Определение 2.15. Композиция соотв. $F \circ G$

$$\begin{cases} F : B \to C \\ G : A \to B \end{cases} \Rightarrow F \circ G(x) = F(G(x))$$

Причём $G(x)$ - это мн-во значений $\Rightarrow F(G(x))$ - образ $G(x)$
Или, эквив.: $(x, z) \in F \circ G \iff \exists y((x, y) \in G \wedge (y, z) \in F)$

Свойства композиции:

1) Ассоциативность: $F \circ (G \circ H) = (F \circ G) \circ H$

2) Отсутствие коммутативности (в общем случае): $F \circ G \neq G \circ F$

Обозначение. Тождественное отображение:

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(x) = x$$

$$G : A \to B \Rightarrow G \circ id_A(x) = id_B \circ G(x) = G(x)$$

Утверждение 2.3. Если $F : A \to A$ - биекция, то:

$$F \circ F^{-1} = id_A = F^{-1} \circ F$$

Обозначение. Мн-во всех отображений из A в B будем называть B^A

Утверждение 2.4. Если $|A| = n$ и $|B| = k$, то $|B^A| = k^n$

Теорема 2.2. Пусть A, B, C - мн-ва. Тогда:

1) $A^C \times B^C \sim (A \times B)^C$

2) $A^{B \cup C} \sim A^B \times A^C, B \cap C \neq \emptyset$

3) $A^{B \times C} \sim (A^B)^C$

Доказательство. 1)

$$\begin{cases} f : C \to A \\ g : C \to B \end{cases} \longleftrightarrow h : C \to A \times B, h(x) = (f(x), g(x))$$

2)
$$\begin{cases} f : B \to A \\ g : C \to A \end{cases} \longleftrightarrow h : B \cup C \to A \Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x), x \in B \\ g(x), x \in C \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} f : B \times C \to A \\ g : C \to A^B \end{cases} \Rightarrow g(x) : B \to A \Rightarrow g(x)(z) = f(z, x)$$

$\square$

3 Лекция 3

3.1 Мощности мн-в

3.1.1 Парадоксы

Парадокс Галилея:

Все нат. числа	$\supsetneq$	полные квадаты
n	$\longleftrightarrow$	n^2

Гранд-отель Гильберта:

1	2	3	4	5	6	7	...

1) Все места заняты, нужно подселить постояльца:

Решение.

Новый	$\to$	0
i	$\to$	$(i+1)$

2) Есть своб. места, хотим занять все комнаты имеющимися постояльцами:

Решение. Если мн-во занятых комнат бесконечно, то:

0	1	0	0	1	1	0	1	0	...

(1 - занято, 0 - свободно) $\Rightarrow$
Переносим 1 в самый ранний 0 для всех 1

3) 2 гранд-отеля, полностью заняты. Один закрылся, как всех заселить?

Решение.

0	1	2	3	4	5	...

a	b	c	d	e	f	...

$\Rightarrow$

0	a	1	b	2	c	...

4) Гранд-авеню, гранд-отелей. Цель: переселить всех в один отель:

Решение.

Отель 0: $\mapsto$ неч. номера
Отель 1: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 2, \not\vdots\, 4$
Отель 2: $\mapsto$ номера, кот. $\vdots\, 4, \not\vdots\, 8$
Отель k: $\mapsto$ номера, кот $\vdots\, 2^k, \not\vdots\, 2^{k+1}$

3.1.2 Счётных мн-в

Определение 3.1. A и B равномощны ($A \cong B$), если $\exists$ биекция $f : A \to B$

Определение 3.2. A наз-ся счётным, если $A \cong \mathbb{N}$

Утверждение 3.1. 1) A счётно $\Rightarrow A \cup x$ счётно

2) Любое подмн-во счётного мн-ва конечно или счётно

3) A, B счётны $\Rightarrow A \cup B$ счётно

4) $A_0, A_1, \ldots$ - сч. $\Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ - сч.
или: A, B - сч. $\Rightarrow A \times B$ - сч.

Доказательство. 1) $f : A \to \mathbb{N}$ - биекция

$$g : A \cup \{ x \} \to \mathbb{N} :$$

$$\begin{cases} g(x) = 0 \\ g(y) = f(y) + 1, y \in A \end{cases}$$

2)

$$f : A \to \mathbb{N}, \text{- биекция}; B \subset A$$

$$g : B \to \mathbb{N}; g(x) = \#\{ y \in B \mid f(y) < f(x) \}$$

3)

$$f : A \to \mathbb{N}; g : B \to \mathbb{N}$$

$$h : A \cup B \to \mathbb{N}; h(x) = \begin{cases} 2f(x), x \in A \\ 2g(x) + 1, x \in B \end{cases}$$

4)

$$f : A \to \mathbb{N};$$

$$g : B \to \mathbb{N};$$

$$h : A \times B \to \mathbb{N}; h(x, y) = 2^{f(x)} * (2g(y) + 1) - 1$$

$\square$

3.1.3 Отношение равномощности

<u>Утверждение</u> 3.2. Общие св-ва равномощности:

1) Рефлексивность: $A \cong A$

   (т. к. id_A - биекция)

2) Симметричность: $A \cong B \iff B \cong A$

   (f - биекция $\iff$ f^{-1} - биекция)

3) Транзитивность: $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

   (т. к. композиция биекций - биекция)

3.1.4 Сравнимость по мощности

<u>Обозначение</u>.

- Нестрогая: $A \lesseqqgtr B$, если $\exists B' \subset B, A \cong B'$

  (A не более мозно чем B)

- Строгая: $A \gtrsim B$, если $A \lesseqqgtr B, A \ncong B$

  (A менее мощно чем B)

Утверждение 3.3. Св-ва сравнимости по мощ-ти:

1) Рефлексивность: $A \gtreqqless A$; Антирефлексивность: $A \not\gtrsim A$

2) Транзитивность: $A \gtreqqless B, B \gtreqqless C \Rightarrow A \gtreqqless C$

   Для строгой сравнимости:

   Доказательство.

$$A \gtrsim B, B \gtrsim C \Rightarrow A \gtrsim C$$

$$A \gtreqqless C \text{ - из предыдущего}$$

   Нужно: $A \cong C$ □

Теорема 3.1 (Теорема Кантора-Бернштейна).

$$A \gtreqqless B, B \gtreqqless A \Rightarrow A \cong B$$

Доказательство. 1) Пусть $f : A_0 \to B_1 \subset B_0$ - биекция

$g : B_0 \to A_1 \subset A_0$ - биекция

2) $B_{i+1} = f\left(A_i\right); A_{i+1} = g\left(B_i\right)$

3) $C_i = A_i \backslash A_{i+1}; D_i = B_i \backslash B_{i+1}$

4) $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i; D = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$

Утверждение 3.4. $C_i \cong D_{i+1}$, т. е. $f : C_i \to D_{i+1}$ - биекция

Почему? Потому что:

$$C_i = A_i \backslash A_{i+1}; f\left(A_i\right) = B_{i+1}, f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+2}$$

$f\left(A_i \backslash A_{i+1}\right) =$ (т. к. f - биекция) $f\left(A_i\right) \backslash f\left(A_{i+1}\right) = B_{i+1} \backslash B_{i+2} = D_{i+1} = f\left(C_i\right)$

Утверждение 3.5.

$$D_i \cong C_{i+1} \text{ (симметричо)}$$

Следствие.

$$C_0 \cong C_2 \cong C_4 \cong C_6 \cong \dots$$

$$C_0 \cong D_1 \cong D_3 \cong D_5 \dots$$

Утверждение 3.6.

$$C \cong D$$

Доказательство. f - биекция
Пусть $x \in \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \forall i, x \in A_i \Rightarrow \forall i, f(x) \in B_{i+1} \Rightarrow f(x) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$
Т. е. $f(C) \subset D$:

Инъекция - наследуется

Сюрьекция: $y \in \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \Rightarrow \forall i, y \in B_{i+1} \Rightarrow \forall i, f^{-1}(y) \in A_i \Rightarrow f^{-1}(y) \in C$ $\square$

$$A = C \cap C_0 \cap C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \dots$$
$$B = D \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \dots$$

При этом:

$$\begin{cases} C \cong D \\ \begin{cases} C_0 \cong D_1 \\ C_1 \cong D_0 \end{cases} \\ \begin{cases} C_2 \cong D_3 \\ C_3 \cong D_2 \end{cases} \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow A \cong B$$

$\square$

4 Лекция 4

Обозначение. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ - это

1) Мн-во подмножеств $A \subset \mathbb{N}$

2) Мн-во ф-ций $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$

3) Мн-во $A \leftrightarrow f_A : N \to \{0, 1\}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

Замечание. Бесконечная двоичная дробь:

$$\underline{a_1 a_2 \dots a_n} 01111 \dots = \underline{a_1 a_2 \dots a_n} 10000 \dots$$

Задача 4.1. Показать:

$$[0,1] \cong \{\, 0,1 \,\}^{\mathbb{N}} \setminus \{\, \text{посл-ти с 1 в периоде} \,\}$$

Доказательство. Конструктивно: Picture

□

Теорема 4.1. $\boldsymbol{A}$ - беск., $\boldsymbol{B}$ - сч. $\Rightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cong \boldsymbol{A}$

Следствие.

$$[0,1] \cong \{\, 0,1 \,\}^{\mathbb{N}}$$

Лемма 4.2. В любом бесконечном мн-ве есть счётное подмн-во

Доказательство. $\boldsymbol{A}$ - беск. мн-во
$a_0 \in A, a_1 \in A \setminus \{\, a_0 \,\}, \ldots$
$a_{n+1} \in A \setminus \{\, a_0, a_1, \ldots, a_n \,\}$ $\boldsymbol{A}$ - беск., сл-но на каждом шаге возможен выбор нового эл-та □

Теперь докажем теорему:

Доказательство. $\boldsymbol{A}$ - беск. $\Rightarrow \boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ - счётно

$$\begin{cases} C \cong \mathbb{N} \\ B \cong \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow C \cup B \cong \mathbb{N} \cong C$$

$$A \cup B = (A \setminus C) \cup C \cup B \cong (A \setminus C) \cup C \cong A$$

□

Теорема 4.3 (Кантора). $[0,1]$ - несчётен (или: $\{\, 0,1 \,\}^{\mathbb{N}}$ несчётно)

Доказательство. Пусть $\{\, 0,1 \,\}^{\mathbb{N}}$ - счётно, тогда α_i - i-ая бинарная последовательность:

α_0	$\underline{0}0000\ldots$
α_1	$1\underline{1}111\ldots$
α_2	$01\underline{0}11\ldots$
$\vdots$	$\vdots$

Воспользуемся диагональным методом Кантора:. Возьмём диагональную п-ть:

$$d_i = \alpha_i^i, d = 010\dots$$

$$d_i' = 1 - \alpha_i^i, d' = 101\dots$$

Если $d' = \alpha_k^k$, то $d_k^k = d_k^{k\prime} = 1 - \alpha_k^k$, что невозможно $\Rightarrow$ противоречие. □

Теорема 4.4 (Общая теорема Кантора). $\forall A:\ A \gtrsim 2^A$

Доказательство. Пусть $\phi : A \to 2^A$ - биекция
$\phi(x)$ - подмн-во A
Корректен ли вопрос о том, что $x \in \phi(x)$?
Расм. $M = \{\ x \mid x \notin \phi(x)\ \}$
Т. к. ϕ - биекция $\Rightarrow$ сущ. $m = \phi^{-1}(M)$. Т. е. $\phi(m) = M$
Рассм. 2 случая:

1)

$$m \in M \Rightarrow m \in \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) - \text{ ложно при } x = m \Rightarrow m \notin M$$

2)

$$m \notin M \Rightarrow m \notin \phi(m) \Rightarrow x \notin \phi(x) \text{ - истино, при } x = m \Rightarrow m \in M$$

Получаем противоречие. □

Определение 4.1. A континуально, если $A \cong \{\ 0, 1\ \}^{\mathbb{N}}$

Теорема 4.5. A - континуально $\Rightarrow$ A^2 - континуально

Пример.

$$[0,1] \cong [0,1]^2$$

Следствие.

$$(\{\ 0, 1\ \}^{\mathbb{N}})^2 = \{\ 0, 1\ \}^{\mathbb{N}}$$

$$(\alpha, \beta) \leftrightarrow \gamma = \alpha_0\beta_0\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\dots$$

$$[0,1] \cong \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \text{ - континуально}$$

По индукции:

$$\mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}$$

Верно и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$

Доказательство. Док-во конструктивно ИЛИ:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}$$

$\square$

4.1 Бинарные отношения

<u>Определение</u> 4.2. Отношение - любое $R \in A \times A$

<u>Обозначение</u>. Отношение R между a и b:

1) $(a, b) = R$

2) $R(a, b)$

3) aRb

Различные виды отношений:

1) Рефлексивные: $\forall a:\ aRa$

   <u>Пример</u>. $=, \leq, \subset, \cong, \sqsubset$

2) Антирефлексивные: $\forall a:\ \neg(aRa)$

   <u>Пример</u>. $<, \in, ||$

3) Симметричные: $\forall a, \forall b(aRb \to bRa)$

   <u>Пример</u>. $\cong, ||, =, \equiv_k$

4) Антисимметричные: $\forall a, \forall b((aRb \wedge bRa) \to a = b)$

   <u>Пример</u>. $\leq, <, >, \sqsubset, \sqsubset, \subset$

5) Транзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \wedge bRc) \to aRc)$$

   <u>Пример</u>. $=, \cong, \equiv_k, \leq, \subset, \sqsubset$

6) Антитранзитивность:

$$\forall a, b, c((aRb \wedge bRc) \to \neg(aRc))$$

$$|a - b| = 1 \text{ (На } \mathbb{R})$$

7) Полнота: $\forall a, b(aRb \vee bRa)$

<u>Пример</u>. $\leq, \cong\!\!\!\!\leqq$ (теор. Цермело)

Наборы св-в:

1) Отнош. эквивалентности: рефлексивность, симметричность, транзитивность.

<u>Пример</u>. $\equiv_k, (|| \text{ или } =), \sim$ (подобие $\triangle$-ов)

Общий вид: $f : A \to B, x \sim y$, если $f(x) = f(y)$

2) Отношение нестрогого частичного порядка, рефлексивность, антисимметричность, транзитивность:

<u>Пример</u>. $\subset, \leq, \vdots, \sqsubset, \ldots$

3) Отнош. строгого част. п-ка: антирефл., антисимметричность, транзитивность

4) Отнош. лин. порядка: нестрогий частичный порядок + полнота

5) Препорядки: рефлексивность, транзитивность

6) Полные предпорядки: полнота + транзитивность