АлГем

Сергей Григорян

11 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 12

1.1 Классификация КВП

Эллиптический тип: $a \geq b > 0$	Инварианты
1) Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta > 0, I \cdot \triangle < 0$
2) Мнимый эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	$\delta > 0, I \cdot \triangle > 0$
3) Пара пересек. мнимых прямых: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta > 0, \triangle = 0$

Гиперболический тип: $a > 0, b > 0$	Инварианты
4) Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\delta < 0, \triangle \neq 0$
5) Пара пересек. действ. прямых: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta < 0, \triangle = 0$

Параболический тип: $p, a > 0$	Инварианты
6) Парабола: $y^2 = 2px$	$\delta = 0, \triangle \neq 0$
7) Пара || действ. прямых: $y^2 = a^2$ 8) Пара || мнимых прямых: $y^2 = -a^2$ 9) Пара совпад. действ. прямых: $y^2 = 0$	$\delta = 0$ $\triangle = 0$

Для различения 7-9):

$$K = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$$

1.2 Центр КВП

$$\Gamma\colon P(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

Определение 1.1. Точка $O(x_0, y_0)$ наз-ся центром кривой Γ (а также центром её мн-на), если $\forall \overline{s} = (\alpha, \beta)$ вып-ся рав-во:

$$P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) \tag{2}$$

Утверждение 1.1. *Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр кривой Γ (и мн-на P). Тогда т. A принадлежит $\Gamma \iff A' \in \Gamma$ - точка, симметричная т. A отн-но центра O*

Доказательство. Пусть $A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 + \alpha \\ y_0 + \beta \end{pmatrix}, A' \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 - \alpha \\ y_0 - \beta \end{pmatrix}$:

$$A \in \Gamma \iff P(x_0 + \alpha, y_0 + \beta) = 0 \iff P(x_0 - \alpha, y_0 - \beta) = 0 \iff A' \in \Gamma$$

□

Замечание. *Центр Γ не обязан лежать в Γ*

Утверждение 1.2. *Точка $O(x_0, y_0)$ явл-ся центром Γ (и $P(x,y)$) $\iff$:*

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство.

$$P(x_0+\alpha, y_0+\beta) = A(x_0+\alpha)^2 + 2B(x_0+\alpha)(y_0+\beta) + C(y_0+\beta)^2 + 2D(x_0+\alpha) + 2E(y_0+\beta) + F$$

$$P(x_0-\alpha, y_0-\beta) = A(x_0-\alpha)^2 + 2B(x_0-\alpha)(y_0-\beta) + C(y_0-\beta)^2 + 2D(x_0-\alpha) + 2E(y_0-\beta) + F$$

$$P(x_0+\alpha, y_0+\beta) - P(x_0-\alpha, y_0-\beta) = 4\alpha(Ax_0+By_0+D) + 4\beta(Bx_0+Cy_0+E) = 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\iff \begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

□

1.3 Центральные кривые

Определение 1.2. КВП наз-ся **центральной**, если она имеет единственный центр. (Этот центр **не обязан** лежать на КВП)

Утверждение 1.3. *a) Кривая* Γ *явл. центральной* $\iff$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Св-во кривой Γ *быть центральной не зависит от выбора ПДСК.*

c) Пусть Γ *- центральная кривая, содерж. хотя бы одну точку. Тогда* Γ *содержитединственный центр симметрии* O_0*, причём* $O_0 = O \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Доказательство. a) По т. Крамера, $O(x_0, y_0)$ - единственный центр $\iff$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$$

b) Т. к. δ - инвариант, то и св-во быть центральной также не меняется при замене ПДСК.

c) Пусть $O(x_0, y_0)$ - центр и он единств. $\iff$ $\delta \neq 0$, тогда можно сказать, что Γ имеет эллиптический или гиперболический тип. Тогда:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - C = 0 \text{ - ур-е КВП}$$

$$\Rightarrow B = D = E = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - решение системы (3)}$$

Тогда Γ содержит единственный центр симметрии O_0, причём $O_0 \equiv O(x_0, y_0)$

$\square$

1.4 Св-ва КВП

1.4.1 Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a \text{ - большая полуось}$$

$$b \text{ - малая полуось}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} < a \text{ - фокусное расстояние}$$

$$F_1(c, 0), F_2(-c, 0) \text{ - фокусы}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ - эксцентриситет}$$

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

При $a = b$, $\varepsilon = 0$
Директрисы:

$$d_1 \colon x = \frac{a}{\varepsilon}$$

$$d_2 \colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$$

Утверждение 1.4. *$A \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ эллипсу $\iff$*

$$\iff AF_1 = |a - \varepsilon x| \iff AF_2 = |a + \varepsilon x|$$

Т. к. $|x| \leq a$ (если $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ эллипсу), то модули раскрываются с положительным знаком.

Доказательство.

$$0 = AF_1^2 - (a - \varepsilon x)^2 = (x-c)^2 + y^2 + a^2 + 2a\varepsilon x - \varepsilon^2 x^2 = (1-\varepsilon^2)x^2 + 2x(-c + a\varepsilon) + c^2 + y^2 - a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - \varepsilon^2 - 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow$$

$$= \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 - b^2 = b^2(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1) = 0$$

$\square$

Теорема 1.1.
$$\frac{AF_1}{p(d_1, A)} = \varepsilon = \frac{AF_2}{p(d_2, A)}$$

Доказательство.
$$\varepsilon p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

Теорема 1.2 (Характеристической св-во эллипса)**.** *Точка* $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in$ *эллипсу* $\iff$
$$AF_1 + AF_2 = 2a$$

Доказательство. a) Необходимость:
$$AF_1 + AF_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$$

b) Достаточность: Пусть: $AF_1 + AF_2 = 2a$, тогда $|x| \leq a$. От прот., пусть $|x| > a \Rightarrow$

$AF_1 + AF_2 \geq |x - c| + |x + c| \geq |x - c + x + c| = |2x| > 2a$ - противоречие.

Если $|x| = a \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -a \end{array}\right. \Rightarrow A\colon a - c + a + c = 2a \text{ для } -a \text{ аналогично.}$$

(Остальное док-во...)

□

1.4.2 Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ - фокусное расст.
$F_1(c, 0), F_2(-c, 0)$ - фокусы

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$
$d_1\colon x = \frac{a}{\varepsilon}$
$d_2\colon x = -\frac{a}{\varepsilon}$

Утверждение 1.5. *Точка* $A(x$
$y) \in$ *гиперболе* $\iff$

$$AF_1 = |a - \varepsilon x|\,, AF_2 = |\varepsilon x + a|$$

$$|x| \geq a$$

$$\varepsilon\,|x| > a$$

Доказательство.

$$0 = AF_1^2 - (\varepsilon x - a)^2 = (x-c)^2 + y^2 - \varepsilon^x x^2 + 2\varepsilon a x - a^2 - a^2 = (1-\varepsilon^2)x^2 + 2x(-c+\varepsilon a) + c^2 + y^2 - a^2 =$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 + b^2 = 0$$

□

Следствие 1.1.

$$\frac{AF_1}{p(A, d_1)} = \varepsilon$$

Доказательство.

$$\varepsilon \cdot p(A, d_1) = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = |\varepsilon x - a| = AF_1$$

□

Теорема 1.3 (Характеристическое св-во гиперб.)**.**

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ \textit{гиперболы} \iff |AF_2 - AF_1| = 2a$$

Доказательство. a) Пусть $A \in$ правой ветви гиперболы:

$$|AF_2 - AF_1| = AF_2 - AF_1 = \varepsilon x + a - (\varepsilon x - a) = 2a$$

b) Пусть изв., что $AF_2 - AF_1 = 2a$, и покажем, что $A \in$ правой части.

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$x^2c^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$
$$x^2(c^2 - a^2) + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 + a^4 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 + a^4 - a^2(a^2 + b^2) - a^2y^2 = 0$$
$$x^2b^2 - a^2b^2 - a^2y^2 = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$
$$0 = 0$$

$\square$