Основы комбинаторики и теории чисел

Сергей Григорян

11 сентября 2024 г.

Содержание

1 Инфа

Лектор: Даниил Владимирович Мусатов (ему писать по поводу логики) и Райгородский Андрей Михайлович.

`telega: @musatych`

Об отсутствии на КР писать в тг заранее

Задачи на КР:

- Тестовые 0.8 (Или отдельно написано)
- Обычные (можно пересдать (1(на КР)/0.8(На след. КР)/0.5(В ДЗ)))

Задачи на ДЗ:

- Перешедшие с КР (0.5)
- Обычные (1)
- Дополн. (1.5)

Замечание. *Чтобы получить доп. задачу, нужно решить **все** обычные задачи по какой-то теме.*

2 Основные понятия теор. множеств

Обозначение. *$x \in A \iff$ **элемент** x принадлежит **мн-ву** A.*

Определение 2.1. Пустое мн-во $\emptyset$ - мн-во, не содержащее ни одного эл-та.

Определение 2.2. A **подмн-во** B $(A \subset B) \iff$

$$\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Замечание. $\forall A \colon \emptyset \subset A$

Замечание.

$$\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A).$$

Свойство отношения подмножества:

- **Рефлексивность**: $A \subset A$
- **Транзитивность**: $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ -
- **Антисимметричность**: $A \subset B, B \subset A \Rightarrow A = B$

Определение 2.3 (Равенство мн-в)**.** $A = B \iff$, если A и B содержат один и те же эл-ты.

Запись конечного мн-ва: $\{a, b, c\}$

Замечание. *Из опр. рав-ва следует, что* ***кратность и порядок записи не важен****:*

Пример. $\{a, b, c\} = \{a, c, b, b, b, a\}$

Замечание. *Отличие* $\in$ *и* $\subset$ *:*

$$A = \{a, \{b\}, c, \{c\}\}.$$

$$\{a\} \subset A, \{a\} \notin A.$$
$$\{b\} \not\subset A, \{b\} \in A, \{\{b\}\} \subset A.$$
$$\{c\} \subset A, \{c\} \in A.$$
$$\{d\} \notin A, \{d\} \notin A.$$

Конструкция нат. чисел на основе мн-в
$0 = \emptyset$
$1 = \{\emptyset\}$
$2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
$n + 1 = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$

Операции над мн-вами

1. Объединение: $A \cup B = \{x \colon x \in A \vee x \in B\}$
2. Пересечение: $A \cap B = \{x \colon x \in A \wedge x \in B\}$
3. Разность: $A \backslash B = \{x \colon x \in A \wedge x \notin B\}$
4. Дополнение: $\overline{A} = \{x \colon x \notin A\}$

5. Симметрическая разность: $A \triangle B = \{x \colon (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

<u>**Утверждение**</u> **2.1.**

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Доказательство. В одну сторону:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow .$$

1. $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ и $A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C$

2. $x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

□

3 Упорядоченные пары и кортежи

$$(a, b), a - \text{ 1-ый эл-т}, b - \text{ 2-ой эл-т}$$

Требование: $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$

<u>**Определение**</u> **3.1** (Упрощенное определение Куратовского)**.**

$$(a, b) = \{\{a, b\}, a\}.$$

$$(a, a) = \{\{a\}, a\}.$$

4 Парадокс Рассела

Определим I:

$$\{\{\{\cdots a \cdots\}\}\} = I \Rightarrow I \in I, \text{(беск. кол-во скобок)}.$$

$$(I, I) = \{\{I\}, I\} = I.$$

Рассмотрим: $M = \{x \colon x \notin x\}$

$$M \overset{?}{\in} M.$$

- Пусть $M \in M$. Тогда $x \notin x$ верно для $x = M$. Тогда $M \notin M$. Но тогда $x \notin x$ неверно для $x = M$. Противоречие.
- Аналогично $M \notin M \Rightarrow$ получаем парадокс.

Аксиома 4.1 (Аксиома фундированности)**.** *Не сущ. беск цепочки:*

$$A_1 \ni A_2 \ni A_3 \ni \cdots$$

Замечание. *Это запрещает мн-во* I *и* $M \in M$*, а также даёт однозначную интерпретацию* (a, b)

Если $\{a, b\} \in a$*, то возникает беск. цепочка:*

$$\{a, b\} \ni a \ni \{a, b\} \ni a \cdots .$$

Определение 4.1. Кортежи - расширение пары на много эл-ов.

Пример. $(a, b, c, d) = (a, (b, (c, d)))$ - *кортеж*

Определение 4.2. Декартово произведение мн-в A, B:

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}.$$