

Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

11 сентября 2024 г.

Содержание

1	Инфа	3
2	Синтаксис \leftrightarrow Семантика	3
3	Правильные скобочные п-ти (ПСП)	4
3.1	ОПР 1 \Rightarrow ОПР 3	5
3.2	ОПР 2 \Rightarrow ОПР 1	5
3.3	ОПР 3 \Rightarrow ОПР 2	5

1 Инфа

Лектор: Мусатов

Книги: Верещагин Н. К., Шень А. "Лекции по мат. логике":

№ 1 Начало теории мн-в

№ 2 Языки и исчисления

№ 3 Вычислимые ф-ции

2 Синтаксис \leftrightarrow Семантика

Определение 2.1. Синтаксис - правила составления форм. выр-ий.

Определение 2.2. Семантика - сопоставление форм выр-ия некоторого смысла.

Определение 2.3. Алфавит - мн-во символов. (Непустое, обычно конечно)

Определение 2.4. Слово - конечная последовательность символов алфавита. (Может быть пустым)

Пустое слово - ε

Определение 2.5. Язык - любое мн-во слов.

Пустой язык - \emptyset

Синглетов - $\{\varepsilon\}$

Операции над словами:

- Конкатенация: $u * v$
- Возведение в степень: $u^n = u * u * \dots * u$ - n раз ($u^0 = \varepsilon$)
- Обращение: $u^R = u_n u_{n-1} \dots u_1$, если $u = u_1 u_2 \dots u_n$

$$(ab)^R = b^R a^R.$$

Отношения над словами:

- Префикс $u \sqsubset v \iff \exists w: uw = v$

- Суффикс $u \sqsupset v \iff \exists w: wu = v$
- Подслово $u(\text{subset})v \iff \exists t, w: tuw = v$
- Подп-ть $u \subset v \iff$ вычеркнута часть символов v и получили u

Операции над языками:

0) Теоретико-мнж.

1) Конкатенация:

$$L * M = \{u * v | u \in L, v \in M\}.$$

$$L * \emptyset = \emptyset.$$

Пример.

$$L = \{a, ab\}, M = \{a, ba\}, LM = \{aa, aba, abba\}.$$

2) $L^n = L * L * \dots * L$ - n раз

$$L^0 = \{\varepsilon\}.$$

3) Итерация/Звезда Клини:

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k.$$

$$L^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k = L^* * L.$$

$$L^* = L^+ * \{\varepsilon\}.$$

3 Правильные скобочные п-ти (ПСП)

Определение 3.1. ПСП - это п-ть скобок, разбитых на пары, и в каждой паре "(" раньше ")".

Определение 3.2. ПСП - это п-ть, получ. из правил:

1. ε - это ПСП;
2. s - ПСП $\Rightarrow (s)$ - ПСП;
3. s, t - ПСП, $\Rightarrow st$ - ПСП.

Определение 3.3. Баланс СП - (кол-во "(") - (кол-во ")")

Определение 3.4. ПСП - СП, для кот. баланс всей п-ти = 0, а любого др. префикса ≥ 0

3.1 ОПР 1 \Rightarrow ОПР 3

Все скобки разбиты на пары \Rightarrow баланс = 0.

"(" левее ")" \Rightarrow в любом префиксе из каждой пары, ни одной, обе или только "(" . В любом случае итоговый баланс префикса ≥ 0 .

3.2 ОПР 2 \Rightarrow ОПР 1

Скобки, добавленные по правилу (s), будут в паре.

3.3 ОПР 3 \Rightarrow ОПР 2

Д-во: индукция по длине СП

База: $s = \varepsilon \Rightarrow$ подх. по опр. 2

Осн. случ.: $|s| > 0 \Rightarrow$ первый символ "(".

Рассм. кратчайший непустой префикс с балансом = 0:

Случай 1: Это вся п-ть: $s = (s') \Rightarrow$ для s' верно ОПР 3 (т. к. любой другой баланс по случаю ≥ 1) \Rightarrow и ОПР 2.

Случай 2: Это собств. префикс (\neq всей строке): $s = (s')t$. И для s' , и для t - выполнено ОПР 3 \Rightarrow ОПР 2.