Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

9 октября 2024 г.

Содержание

1 Лекция 5

Пропозициональные ф-лы:

- Всегда $=1$ - Тавтологии - Выполнимые
- М. Б. $=0$ и $=1$ - Опровержимые - Выполнимые
- Всегда $=0$ - Опровержимые - Противоречия

"Важные"тавтологии (Логические законы):

1) Закон непротиворечия:
$$\neg(A \wedge \neg A)$$

2) Закон двойного отрицания:
$$\neg\neg A \leftrightarrow A$$

3) Закон исключённого третьего:
$$A \vee \neg A$$

Пример. *Неконструктивное док-во с использованием закона исключённого третьего:*

Теорема 1.1. $\exists x, y \colon x \notin Q, y \notin Q, x^y \in Q$

Доказательство. Рассм. выр-е: $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$:

1) Оно $\in Q \Rightarrow$ нашли пример
2) Оно $\notin Q \Rightarrow x = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}$:
$$x^y = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$\square$

4) Контрапозиция:
$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

5) Законы Де Моргана:

$$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

Задача о выполнимости условий: даны ф-лы $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$

Вопрос: могут ли они все быть одновременно истинны?

Это эквив. вопросу о выполнимости:

$$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$$

Пример. *Превращение мат. задачи в задачу выполнимости:*
1976г. - з-ча 4 красок решена комп. перебором.
Вершина графа $v \mapsto$ 2 бита. (p_v, q_v) - (область на карте)
u, v - соседний области $\Rightarrow$ условие на отличие цветов:

$$(p_u \neq p_v) \vee (q_u \neq q_v)$$

1.1 Логический вывод

Определение 1.1. Логический вывод - п-ть формул, в кот. каждая ф-ла либо является аксиомой, либо получается из более ранних по одному из правилу вывода.

Замечание.

$(A \to (B \to C))$ *- сл-ие из 2 посылок*

Схемы аскиом (Аксиомы - рез-т подстановки конкретных ф-л вместо A, B, C)

1) $A \to (B \to A)$

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

3) $(A \wedge B) \to A$

4) $(A \wedge B) \to B$

5) $A \to (B \to (A \wedge B))$

6) $A \to (A \vee B)$

7) $B \to (A \vee B)$

8) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ - "Разбор случаев"

9) $\neg A \to (A \to B)$

10) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ - "Рассуждение от противного"

11) $A \vee \neg A$

Правило вывода: modus ponens:

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

Теорема 1.2 (О корректности)**.** *A - выводима $\Rightarrow$ A - тавтология*

Доказательство. Акс. 1-11 - тавтологии.

$$\begin{cases} A \text{ - тавтология} \\ A \to B \text{ - тавтология} \end{cases} \Rightarrow B \text{ - тавтология}$$

$\square$

Теорема 1.3 (О полноте)**.** *A - тавтология $\Rightarrow$ A - выводима*

Обозначение.
$\vdash A$ - *A выводима*
$\models A$ - *A тавтология*

Пример. $\vdash (A \vee B) \to (B \vee A)$

1) $A \to (B \vee A)$ - *акс. 7*

2) $B \to (B \vee A)$ - *акс. 6*

3) $(A \to (B \vee A)) \to ((B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A)))$ - *акс. 8*

4) $(B \to (B \vee A)) \to ((A \vee B) \to (B \vee A))$ - *modus ponens 1, 3*

5) $(A \vee B) \to (B \vee A)$ - *modus ponens 2, 4*

Пример. $\vdash (A \to A)$ - *Закон тождества.*

1) $A \to ((A \to A) \to A)$ - *акс. 1*

2) $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ - *акс. 2*

3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ - *modus ponens 1, 2*

4) $A \to (A \to A)$ - *акс. 1*

5) $A \to A$ - *modus ponens 4, 3*

2 Лекция 6

Определение 2.1. Вывод - п-ть $\phi_1, \dots, \phi_n$, т. ч. $\forall i$:

- ϕ_i - аксиома
- ϕ_i - получается по правилам MP из $\phi_i, \phi_k, j < i, k < i$.
  Это значит, что $\phi_k = \phi_j \to \phi_i$

Ф-ла **выводима** ($\vdash \phi$), если ϕ встреч-ся в нек-ром выводе.

Теорема 2.1. *ϕ - тавтология $\Rightarrow (\vdash \phi)$*

Пример.

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

1)
$$\neg A \to (A \to B) \text{ аксиома 9}$$

2)
$$B \to (A \to B) \text{ - аксиома 9}$$

3)
$$(\neg A \to (A \to B)) \to ((B \to (A \to B)) \to ((A \vee B) \to (A \to B)))$$

4)
$$(B \to (A \to B)) \to ((\neg A \vee B) \to (A \to B)) \text{ - MP 1, 3}$$

5)

$$(\neg A \vee B) \to (A \to B)$$

Определение 2.2. Вывод из мн-ва посылок Γ - это п-ть $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ при этом ϕ_i может быть либо аксиомой, либо эл-т Γ, либо получается по m. p.

Лемма 2.2 (О дедукции)**.**

$$\Gamma \vdash A \to B \iff \Gamma \cup \{ A \} \vdash B$$

Пример (Силлогизм)**.**

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C)) \iff$$

$$\iff \{ A \to B \} \vdash (B \to C) \to (A \to C)$$
$$\iff \{ A \to B, B \to C \} \vdash (A \to C)$$
$$\iff \{ A, A \to B, B \to C \} \vdash C$$

1) *A - посылка*

2) *$A \to B$ - посылка*

3) *B по МР 1, 2*

4) *$B \to C$ - посылка*

5) *C - МР 3, 4*

Доказательство. $\Rightarrow$) Если вывели $A \to B$, то из $\Gamma \cup \{ A \}$ можно вывести B по МР

$\Leftarrow$) Пусть $\Gamma \cup \{ A \} \vdash B$. Тогда сущю вывод $\phi_1, \ldots, \phi_n = B$ из $\Gamma \cup \{ A \}$

Каждый ϕ_i - либо акс., либо $\in \Gamma$, либо $= A$, либо вывод-ся по МР. Мы докажем по инд-ции, что $\Gamma \vdash A \to \phi_i$:

1) ϕ_i - акс.
   1) ϕ_i
   2) $\phi_i \to (A \to \phi_i)$ - A1

3) $A \to \phi_i$, MP 1, 2.

2) $\phi_i \in \Gamma$, аналогичен (1)

3) $\phi_i = A$. На прошлой лекции выводили $\vdash A \to A$ без Γ

4) ϕ_i по MP: $\exists j, k, < i$:

$$\phi_k = (\phi_j \to \phi_i)$$

По инд-ции: $\Gamma \vdash A \to \phi_j, \Gamma \vdash A \to \phi_k$, т. е. $\Gamma \vdash A \to (\phi_j \to \phi_i)$:

$$(A \to (\phi_j \to \phi_i)) \to ((A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i)) \text{ - A2}$$

$$(A \to \phi_j) \to (A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

$$(A \to \phi_i) \text{ - MP}$$

□

Пример.

$$\vdash (A \wedge B) \to (B \wedge A)$$

$$A \wedge B \vdash B \wedge A$$

1) $A \wedge B$ *- посылка*

2) $(A \wedge B) \to B$ *- акс. 4*

3) B *- MP 1, 2*

4) $(A \wedge B) \to A$ *- акс. 3*

5) A *- MP 1, 4*

6) $(B \to (A \to (B \wedge A)))$ *- акс. 5*

7) $A \to (B \wedge A)$ *- MP 3, 6*

8) $B \wedge A$ *- MP 5, 7*

Лемма 2.3 (Правила введения и разбиения конъюнкции)**.**

$$\Gamma \cup \{ A \wedge B \} \vdash C$$

$$\iff \Gamma \cup \{ A, B \} \vdash C$$

Также:

$$\Gamma \vdash A \wedge B \iff \begin{cases} \Gamma \vdash A \\ \Gamma \vdash B \end{cases}$$

Пример.

$$(A \to \neg A) \to \neg A$$

Вывод:

1-5) $A \to A$

6) $(A \to A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ - *A10*

7) $(A \to \neg A) \to \neg A$ - *MP 5,6*

Пример.

$$\vdash A \to \neg\neg A$$

$$\iff A \vdash \neg\neg A$$

$$\vdash \neg A \to (A \to B) \iff$$

$$\neg A \vdash A \to B \iff \neg A, A \vdash B \iff A \vdash \neg A \to B$$

$$\vdash A \to (\neg A \to B)$$

$$A \vdash \neg\neg A$$

1) $A \to (\neg A \to B)$

2) A - *посылка*

3) $\neg A \to B$, *mp 2, 1*

4) $A \to (\neg A \to \neg B)$

5) $\neg A \to \neg B$, *MP 2, 4*

6) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A)$ - *A10*

7) $(\neg A \to \neg B) \to \neg\neg A$ - *MP 3, 6*

8) $\neg\neg A$ - *MP 5, 7*

Лемма 2.4 (Правило рассуждения от противного)**.**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad\qquad \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$$

Доказательство.

$$\begin{cases}\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B \\ \Gamma, A \vdash \neg B \iff \Gamma \vdash A \to \neg B\end{cases} \iff \Gamma \vdash \neg A, \text{ A10 + MP x2}$$

$\square$

Пример (Закон контрапозиции).

$$\dfrac{\dfrac{A \to B, \neg B, A \vdash B \qquad A \to B, \neg B, A, \vdash \neg B}{A \to B, \neg B \vdash \neg A}\ \textit{Рассуждение от противного}}{\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)}\ \textit{ЛОД x2}$$

Пример (Закон Де Моргана).

$$\vdash (\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$$

$$\iff (\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$$

1) $(A \wedge B) \to A$ - *акс. 3*

2) $\neg A \to \neg(A \wedge B)$ - *закон контрапозиции.*

3) $(A \wedge B) \to B$ - *акс. 4*

4) $\neg B \to \neg(A \wedge B)$ - *контрапозиция*

5) $(\neg A \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg B \to \neg(A \wedge B)) \to ((\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)))$

6) MP 2x

Лемма 2.5 (Правило контрапозиции). $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, \neg B \vdash \neg A}$

Лемма 2.6 (Правило разбора случаев).

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$$

Лемма 2.7 (Правило исчерп. разбора случаев).

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

Пример. $$\dfrac{\dfrac{\neg\neg A, A \vdash A \qquad \neg\neg A, \neg A \vdash A}{\neg\neg A \vdash A}}{\vdash \neg\neg A \to A}$$