Математическая логика и теория алгоритмов

Сергей Григорян

11 декабря 2024 г.

Содержание

1 Лекция 14

Расшир. ИВ на ф-лы 1-ого порядка.

{ Вывод. ф-лы }	$=$	{ Общезнач. ф-лы }
	$\subset$	Теор. о корр.
	$\supset$	Теор. о полноте

Новый список аксиом:

- Аксиомы 1-11

- Аксиомы 12: $\forall x\phi \to \phi(^t/_x), t$ — терм, подстановка $^t/_x$ — корректна.

- $\phi(^t/_x) \to \exists x\phi$
  $\phi(^t/_x)$ — результат замены своб. вхожд. x на t, при этом своб. переменные из t не попадают под д-ие кванторов ϕ

Подстановка точно корректна, если:

1) t — замкн. терм (сост. только из констант)

2) $t = x$

Примеры вывод ф-л:

0) Все тавтологии (с подст. формул вместо переменных)

1) $\forall x\phi \to \exists x\phi$
   Вывод:

   1. $\forall x\phi \to \phi$ — $A12$

   2. $\phi \to \exists x\phi$ $A13$

   3. $\forall x\phi \to \exists x\phi$ — силлогизм.

   Правила Бёрнайса:

   – Σ-правило:

$$\frac{\phi \to \psi}{\exists x\phi \to \psi}$$

<u>**Замечание**</u>**.** ***Условие применимости:*** *x не параметр ψ!*

- $\prod$-правило:

$$\frac{\psi \to \phi}{\psi \to \forall x\phi}$$

Опять же: x не параметр ψ

2) $\exists x\forall y\phi \to \forall y\exists x\phi$
Вывод:

1. $\forall y\phi \to \phi$ $A12$

2. $\phi \to \exists x\phi$ $A13$
3. $\forall y\phi \to \exists x\phi$ — силлогизм
4. $\exists x\forall y\phi \to \exists x\phi$ — Σ — Бёрн., 3
5. $\exists x\forall y\phi \to \forall y\exists x\phi$ — $\prod$— Бёрн., 4

Правило обобщения (Gen):

$$\frac{\phi}{\forall x\phi}$$

$$\phi \text{ общезн. } \Rightarrow \forall x\phi \text{ общезн.}$$

При этом $(\phi \to \forall x\phi)$ — необщезн.

3) Вывод **Gen**:

$$\vdash \phi \Rightarrow \vdash \forall x\phi$$

1. ϕ — выводима

2. ψ (любая замкн. акс.)
3. $\phi \to (\psi \to \phi)$ A1
4. $\psi \to \phi$ MP 1, 3
5. $\psi \to \forall x\phi$ — $\prod$-Бёрн., 4

6. $\forall x \phi$ MP 2, 5

4) $\neg \exists x \phi \leftrightarrow \forall x \neg \phi$

$$\neg \forall x \phi \leftrightarrow \exists x \neg \phi$$

$$\forall x \neg \phi \to \neg \phi$$

$$\phi \to \neg \forall x \neg \phi$$

$$\exists x \phi \to \neg \forall x \neg \phi$$

$$\forall x \neg \phi \to \neg \exists x \phi \text{ — контрапоз.}$$

5) Лемма о дедукции для ИП:
В кач-ве посылок используются только замкн. ф-лы (посылки также наз-ют аксиомами)
Теория — любое мн-во замкн. ф-л
Модель теории — интерпретация, в кот-рой все ф-лы теории истины.
Лемма о дедукции: Пусть Γ — теория, A — замкн. ф-ла, B — произв. ф-ла.
Тогда: $\Gamma \vdash (A \to B) \iff \Gamma \cup \{ A \} \vdash B$

Доказательство. $\Rightarrow$) 1. $A \to B$ (вывод)
2. A — посылка
3. B (MP 1, 2)

$\Leftarrow$) Инд-ция $C_1, \dots, C_n$ — вывод B из $\Gamma \cup \{ A \}$. По инд-ции докажем $\Gamma \vdash A \to C_i$:

C_i — акс., эл-т Γ, ф-ла A или получ. по MP — аналог. д-ву для ИВ.

$$C_i \text{ — получ. по } \Sigma\text{-прав.}$$

$$C_i \equiv (\exists x \phi \to \psi), C_j \equiv (\phi \to \psi), j < i$$

По предположению инд-ции: $\Gamma \vdash (A \to (\phi \to \psi))$
Тавтология: $(A \to (\phi \to \psi)) \leftrightarrow (\phi \to (A \to \psi))$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (\phi \to (A \to \psi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (\exists x \phi \to (A \to \psi)) \text{ — } \Sigma\text{-Бёрн}$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash (A \to (\exists x \phi \to \psi)) \Rightarrow \Gamma \vdash (A \to C_i)$$

C_i — получ. по $\prod$-правилу:

$$\Gamma \vdash (A \to (\psi \to \phi)) \Rightarrow \Gamma \vdash (A \to (\psi \to \forall x\phi))$$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash ((A \land \psi) \to \psi) \Rightarrow \Gamma \vdash ((A \land \psi) \to \forall x\phi)$$

$\square$

Слабая форма.:
Теперь перейдём к теоремам:
Теор. о корр. ИП: $\vdash \phi \Rightarrow \phi$ — общезначима.
Теор. о полн. ИП: ϕ — общезнач. $\Rightarrow \vdash \phi$
Сильная форма:
У любой непротиворечивой теории существует модель
Сильная форма $\Rightarrow$ слабая форма.

$$\phi \text{ — общ. } \Rightarrow \forall x\phi \text{ — общ.} \Rightarrow \{\neg\forall x\phi\} \text{ — не имеет модели} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\neg\forall x\phi\} \text{ — против.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{\neg\forall x\phi\} \vdash A \\ \{\neg\forall x\phi\} \vdash \neg A \end{cases} = \begin{cases} \vdash \neg\forall x\phi \to A \\ \vdash \neg\forall x\phi \to \neg A \end{cases}$$

$$\Gamma \text{ — непротив. теория} \Rightarrow \text{ Есть модель.}$$

Строим модель из замкн. термов.
Проблема: может не быть конст. символов или функц. симв. Неясно, как опред. пред. симв.

<u>Определение</u> 1.1. Γ — полная теория, если для любой замкн. ϕ верно $\Gamma \vdash \phi$ или $\Gamma \vdash \neg\phi$

<u>Лемма</u> 1.1. *Любая непрот. теория вложена в нек-рую полную.*

Проблема: если $\Gamma \vdash \exists x\phi$, то ψ должна быть ист. для нек-рого эл-та модели.

<u>Определение</u> 1.2. Теория Γ наз-ся экзистенциально полной, если из $\Gamma \vdash \exists x\phi$ следует $\Gamma \vdash \phi(^t/_x)$ для некоторого замкн. терма t

<u>Лемма</u> 1.2. *Если Γ — непрот. теория в сигнатуре $\sigma \Rightarrow \exists \tau \supset \sigma, \triangle \supset \Gamma$: $\triangle$ — непрот. теория в сигн. τ и $\triangle$ — экзистенциально полная.*

2 Лекция 15

Теорема 2.1 (Теорема Гёделя о полноте). *Теория* Γ *непрот.* $\Rightarrow$ *у* Γ *есть модель.*

Доказательство.

Лемма 2.2 (I). *Любую непротиворечивую теорию можно расширить до полной непротиворечивой.*

Лемма 2.3 (II). *Любую непротиворечивую теорию можно расширить до экзистенциальной полной в расшир. сигнатуре.*

Лемма 2.4 (III). *Возможно выполнить леммы I и II одновременно.*

Лемма 2.5 (IV). *Полная непротиворечивая экзистенциальная теория имеет модель.*

□

Напомним определения:

Определение 2.1. $\triangle$ полная в сигнатуре σ, если для любой замкнутой формулы ϕ этой сигн.:

$$\triangle \vdash \phi \text{ ИЛИ } \triangle \vdash \neg\phi$$

Лемма 2.6 (I). Γ *— непрот. в сигн.* $\sigma \Rightarrow$ *сущ.* $\triangle \supset \Gamma$ *— непрот., полн. в сигн.* σ

Док-во (Для конечн. или сч. мн-во переменных и σ*).* $\phi_1, \phi_2, \ldots$ — все замкн. ф-лы.

$$\Gamma_0 = \Gamma, \Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\, \phi_{i+1} \,\}, & \text{если непрот.} \\ \Gamma_i \cup \{\, \neg\phi_{i+1} \,\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Утверждение 2.1. *Все* Γ_i *— непрот.*

Доказательство. От противного, пусть Γ_{i+1} — противоречиво. Тогда:

$$\begin{cases} \Gamma_i \cup \{\, \phi_{i+1} \,\} & \text{— прот.} \\ \Gamma_i \cup \{\, \neg\phi_{i+1} \,\} & \text{— прот.} \end{cases}$$

Отсюда $\Gamma_i \vdash \neg\phi_{i+1}$ и $\Gamma_i \vdash \neg\neg\phi_{i+1}$, из чего следует, что Γ_i — противоречиво — противоречие. Т. е. Γ_i — непрот. $\Rightarrow \Gamma_{i+1}$ — непрот. По индукции получаем, что все Γ_i — непрот. □

$\triangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$ — полное, т. к. $\triangle \ni \phi_i$ или $\triangle \ni \neg\phi_i$. При этом $\triangle$ непрот., т. к. иначе кон. подмн-во $\triangle$ противоречиво $\Rightarrow$ какое-то Γ_i — противоречиво.
□

Определение 2.2. Теория Γ экзистенц. полна отн-но сигнатуры σ, если для любой замкнутой формулы вида $\exists x\phi$, если $\Gamma \vdash \exists x\phi$, то для некот. константного символа $c \in \sigma$ (вариация замкнутого терма) выполнено $\Gamma \vdash \phi(c/x)$.

Лемма 2.7 (II). *Γ — непрот. теория в сигн. $\sigma \Rightarrow$ сущ. теория $\triangle \supset \Gamma$ и сигн. $\tau \supset \sigma$, т. ч.:*
Если $\Gamma \vdash \exists x\phi$ и ϕ в сигн. σ, то для некоторой константы $c \in \tau$ верно $\triangle \vdash \phi(c/x)$

Док-во (для сч. сигнатуры). Если $\Gamma \vdash \exists x\phi$, то добавим в сигнатуре конст. C_ϕ, а в теорию — ф-лу $\phi(C_\phi/x)$.
Почему не будет противоречия?
От противного, пусть $\Gamma \cup \{\, \phi(C_\phi/x) \,\} \vdash \psi, \neg\psi$.
По лемме о дедукции $\Gamma \vdash \phi(C_\phi/x) \to \psi$ и $\Gamma \vdash \phi(C_\phi/x) \to \neg\psi$. Можно считать, что ψ — замкн., иначе применим Акс. 9. и не сод. C_ϕ
Получим $\Gamma \vdash \phi(y/x) \to \psi, y$ — своб. переменных. По $\sum$-правилу Бёрнайса.

$$\Gamma \vdash \exists y\phi(y/x) \to \psi$$

Переим. переменные: $\Gamma \vdash \exists x\phi \to \psi$
Т. к. $\Gamma \vdash \exists xP$, то $\Gamma \vdash \psi$. Аналог. $\Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \Gamma$ — прост. □

Лемма 2.8 (III.). *Пусть Γ — непрот. теория в сигн. σ. Тогда сущ. теория $\triangle \supset \Gamma$ и сигн. $\tau \supset \sigma$, т. ч. $\triangle$ — непрот., полн. и экзист. полн. отн. τ.*

Доказательство. Идея: поочерёдно применим леммы 1 и 2.

$$\Gamma_0 = \Gamma, \sigma_0 = \sigma$$

$$\Gamma \supset \Gamma_0, \sigma_1 = \sigma_0, \Gamma_1 \text{ полная отн-но } \sigma_1$$

$$\Gamma_2 \supset \Gamma_1, \sigma_2 \supset \sigma_1, \Gamma_2 \text{ экзист. полная отн-но } \sigma_1$$

$$\Gamma_3 \supset \Gamma_2, \sigma_3 = \sigma_2, \Gamma_3 \text{ — полная отн-но } \sigma_3$$

$$\vdots, \vdots$$

$$\triangle = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i, \tau = \bigcup_{i=0}^{\infty} \sigma_i$$

ϕ замкн. ф-ла в сигн. $\tau \Rightarrow \phi$ — замкн. ф-ла в сигнатуре $\sigma_i \Rightarrow \Gamma_{i+1} \vdash \phi$ или $\Gamma_{i+1} \vdash \neg\phi \Rightarrow \triangle \vdash \phi$ или $\triangle \vdash \neg\phi$. Аналог. для экзист. полн. $\square$

Лемма 2.9 (IV)**.** $\triangle$ *— непрот., полн., экзист. полн. теория в сигн. $\tau \Rightarrow \triangle$ имеет модель.*

Доказательство. Носитель — замкн. термы. (составл. только из констант).

$$[f](\text{"}t_1 \ldots, \text{"}t_k\text{"}) = \text{"}f(t_1, \ldots, t_k)\text{"}$$

$$[P](\text{"}t_1 \ldots, \text{"}t_k\text{"}) = \begin{cases} 1, \triangle \vdash P(t_1, \ldots, t_k) \\ 0, \triangle \vdash \neg P(t_1, \ldots, t_k) \end{cases}$$

$\square$

Утверждение 2.2. *Все формулы из $\triangle$ истины в этой интерпретации, а все замкнутые формулы не из $\triangle$ — ложны. (не вывод. из $\triangle$)*

Доказательство. Индукция по построению ф-лы:

- Атомарная формула — по опр.

- $\phi \rightleftharpoons \neg\psi$. Рассм. несколько случаев:

$$\triangle \nvdash \phi \iff \triangle \vdash \psi \Rightarrow \psi \text{ — ист} \Rightarrow \phi \text{ — ложна}$$

$$\triangle \vdash \phi \iff \triangle \vdash \neg\psi \Rightarrow \psi \text{ — ложна} \Rightarrow \phi \text{ — истина.}$$

$$\phi \rightleftharpoons (\psi \wedge \eta) \text{ — аналог.}$$

$$\phi \rightleftharpoons \exists x \phi$$

$$\triangle \vdash \exists x \psi \overset{\text{экз. полная}}{\Rightarrow} \triangle \vdash \psi(t/x) \Rightarrow \psi(t/x) \text{ — ист.} \Rightarrow \exists x \psi \text{ — ист.}$$

$$\triangle \neg \exists x \psi \Rightarrow \text{ для всех } t \text{ ф-ла } \psi(t/x) \text{ ложна,}$$

Тогда $\exists x \psi$ тоже ложна.

$$\text{Иначе, если } \psi(t/x) \text{ — ист, то } \triangle \vdash \psi(t/x) \Rightarrow \triangle \vdash \exists x \psi$$

$$\phi \rightleftharpoons \exists x \psi \text{ — аналог.}$$

□

Теорема 2.10 (Мальцева о компактности)**.** *Если* Γ *— теория, и любая кон. подтеория имеет модель, то и вся* Γ *имеет модель.*

Доказательство. Рассм. 2 случая:

1) Γ — против. ⇒ конечная подтеория прот. ⇒ не имеет модели.

2) Γ — непротив. ⇒ имеет модель.

□