



ASPETTI AVANZATI DEI LINGUAGGI
DI PROGRAMMAZIONE

**Esercizi - Aspetti avanzati di Linguaggi di
programmazione**

Autori:

Stefano Campese

Enrico Savoca

Contents

	Page
1 Introduzione	2
2 Il mini linguaggio funzionale (note 2)	3
3 Il mini linguaggio funzionale (note 3)	12
4 Estensioni del linguaggio (note 6)	17
5 Estensioni del linguaggio (note 7)	19
6 Eccezioni (note 8)	20
7 Subtyping (note 9)	21
8 Featherweight Java (note 11)	22
9 Imperative Featherweight Java (note 12)	23

1 Introduzione

Il documento è stato realizzato da Stefano Campese ed Enrico Savoca. Lo scopo di esso è quello di raccogliere in un unico posto le soluzioni di tutti gli esercizi del corso di "Aspetti avanzati dei linguaggi di programmazione". Gli esercizi sono stati svolti da entrambi gli autori e la versione ritenuta corretta di ognuno di essi è stata riportata nel presente testo.

2 Il mini linguaggio funzionale (note 2)

Esercizio 1.1

La relazione di riduzione data definisce una strategia efficiente per la valutazione del termine if-then-else, che permette cioè di valutare unicamente il ramo scelto dalla valutazione della guardia booleana. Ridefinire la semantica operativa del linguaggio in modo che adotti una strategia non efficiente per il costrutto if-then-else, valutando entrambi i rami del costrutto condizionale.

Svolgimento

Per ottenere una semantica meno efficiente, si cambiano gli assiomi (IF-TRUE) e (IF-FALSE) e si aggiungono le regole (THEN) ed (ELSE). (IF) si mantiene tale.

Assiomi

$$(IF-TRUE) \frac{}{if\ TRUE\ then\ v_1\ else\ v_2 \rightarrow v_1}$$

$$(IF-FALSE) \frac{}{if\ FALSE\ then\ v_1\ else\ v_2 \rightarrow v_2}$$

Regole

$$(THEN) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{if\ v_1\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ v_1\ then\ M'_2\ else\ M_3}$$

$$(ELSE) \frac{M_3 \rightarrow M'_3}{if\ v_1\ then\ v_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ v_1\ then\ v_2\ else\ M'_3}$$

Esercizio 1.4

La valutazione, cioè l'esecuzione del programma, è deterministica. Se $M \rightarrow M'$ e $M \rightarrow M''$ allora $M'=M''$.

Dimostrare la proposizione precedente per induzione sulla struttura del termine M .

Dimostrazione

Si dimostra per induzione sulla derivazione.

Casi base:

- $M = \text{true}$
 Se $\text{true} \rightarrow M'$ e $\text{true} \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè true è un valore finale;
- $M = \text{false}$
 Se $\text{false} \rightarrow M'$ e $\text{false} \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè false è un valore finale;
- $M = \text{fn } x.M$
 Se $\text{fn } x.M \rightarrow M'$ e $\text{fn } x.M \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè $\text{fn } x.M$ è un valore finale;
- $M = n$
 Se $n \rightarrow M'$ e $n \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè n è un valore finale.

Passo induttivo:

- Tesi: $M = M_1 + M_2 \rightarrow M', M_1 + M_2 \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Per ipotesi induttiva:
 - Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
 - Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM-LEFT):

$$(\text{SUM-LEFT}) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 + M_2 \rightarrow M'_1 + M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
 La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM-RIGHT):

$$(\text{SUM-RIGHT}) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1 + M_2 \rightarrow v_1 + M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
 La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM):

$$(SUM) \frac{\text{con } n'=n_1 + n_2}{n_1 + n_2 \rightarrow n'}$$

Il risultato della somma è univoco e di conseguenza la derivazione è deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = M_1 - M_2 \rightarrow M', M_1 - M_2 \rightarrow M'' \implies M'=M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
- Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS-LEFT):

$$(MINUS-LEFT) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 - M_2 \rightarrow M'_1 - M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS-RIGHT):

$$(MINUS-RIGHT) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1 - M_2 \rightarrow v_1 - M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS):

$$(MINUS) \frac{\text{con } n'=n_1 - n_2}{n_1 - n_2 \rightarrow n'}$$

Il risultato della differenza è univoco e di conseguenza la derivazione è deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M', \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M'' \implies M'=M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (IF):

$$(IF) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{if\ M_1\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ M'_1\ then\ M_2\ else\ M_3 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso dell'assioma (IF-TRUE):

$$(IF-TRUE) \frac{}{if\ true\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow M_2 = M'}$$

In questo caso $M_2 = M' = M''$ per applicazione dell'assioma e la derivazione risulta deterministica.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (IF-FALSE):

$$(IF-FALSE) \frac{}{if\ false\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow M_3 = M'}$$

In questo caso $M_3 = M' = M''$ per applicazione dell'assioma e la derivazione risulta deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = M_1\ M_2 \rightarrow M', M_1\ M_2 \rightarrow M'' \implies M' = M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
- Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

2 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (APP1):

$$(APP1) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1\ M_2 \rightarrow M'_1\ M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (APP2):

$$(APP2) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1\ M_2 \rightarrow v_1\ M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;

La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

In tutti e 2 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = \text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M', \text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M'' \implies M' = M''$

Derivazione tramite l'uso dell'assioma (BETA):

$$(BETA) \frac{}{\text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M'}$$

Tramite l'applicazione dell'assioma si ottiene $Mx := v = M' = M''$.

La derivazione risulta quindi deterministica e la tesi risulta dimostrata.

La derivazione è deterministica all'applicazione di tutte le regole e gli assiomi del linguaggio, di conseguenza è deterministica l'esecuzione del programma.

□

Esercizio 1.5

Descrivere la valutazione del termine $((\text{fn } x.3) (\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0) (\text{false}))$. Modificare le regole di valutazione in modo tale che, mantenendo una strategia call-by-value, il termine precedente evolva in un termine stuck in meno passi di riduzione. Scrivere le regole di valutazione della strategia call-by-name e valutare il termine precedente secondo questa strategia.

Svolgimento

Valutazione tramite strategia call-by-value:

passo 1

$$(APP1) \frac{(BETA) \frac{}{(\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y) \rightarrow 3}}{((\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false})) \rightarrow 3 ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false}))}$$

passo 2

$$(APP2) \frac{(BETA) \frac{}{(\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false}) \rightarrow \text{if false then } 1 \text{ else } 0}}{3 ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false})) \rightarrow 3 (\text{if false then } 1 \text{ else } 0)}$$

passo 3

$$\frac{\text{(IF-FALSE)} \frac{}{if\ false\ then\ 1\ else\ 0 \rightarrow 0}}{\text{(APP2)} \frac{}{3\ (if\ false\ then\ 1\ else\ 0) \rightarrow 3\ 0}}$$

3 0 costituisce uno stuck: non esistono regole o assiomi per continuare l'esecuzione di tale programma. Esecuzione terminata dopo 3 passi di derivazione.

Si può mantenere la strategia CBV e terminare l'esecuzione in un numero minore di passi modificando (APP2):

$$\text{(APP2)} \frac{N \rightarrow N'}{(\text{fn } x.M) N \rightarrow \text{fn } x.M\ N'}$$

In questo modo l'esecuzione del programma terminerebbe dopo un solo passo. Infatti, ci si ritroverebbe in una forma in cui non è possibile applicare alcuna regola o assioma (3 non è una funzione).

Con una strategia CBN (Call-by-name) non ho (APP2) e la funzione (BETA) è la seguente:

$$\text{(BETA)} \frac{\checkmark}{(\text{fn } x.M) N \rightarrow Mx := N}$$

Con questa regola mostriamo l'esecuzione del programma:

passo 1

$$\text{(APP1)} \frac{\text{(BETA)} \frac{}{(\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y) \rightarrow 3}}{((\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.if\ z\ then\ 1\ else\ 0)(false)) \rightarrow 3 ((\text{fn } z.if\ z\ then\ 1\ else\ 0)(false))}}$$

Stuck! Non esistono regole o assiomi applicabili: APP1 non è applicabile in quanto 3 non è funzione.

Esercizio 1.6

Consideriamo le seguenti definizioni in Scala: `def square(x:Int):Int = x*x` `def sumOfSquare(x:Int,y:Int):Int = square(x)+square(y)` Descrivere i passi di riduzione dell'espressione `sumOfSquare(3,4)` secondo una strategia call- by-value analoga a quella definita nella sezione precedente. Descrivere inoltre la riduzione della stesa espressione secondo la strategia call-by-name. Descrivere i passi di riduzione dell'espressione `sumOfSquare(3,2+2)` secondo le strategie call-by-value e call-by-name.

Svolgimento

Caso $\text{sumOfSquare}(3,4)$.

CBV si comporta come CBN.

passo 1

$$(\text{BETA}) \frac{}{\text{sumOfSquare}(3, 4) \rightarrow \text{square}(3) + \text{square}(4)}$$

passo 2

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(3) \rightarrow 3*3}}{\text{square}(3) + \text{square}(4) \rightarrow 3*3 + \text{square}(4)}$$

passo 3

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{3*3 \rightarrow 9}}{3*3 + \text{square}(4) \rightarrow 9 + \text{square}(4)}$$

passo 4

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(4) \rightarrow 4*4}}{9 + \text{square}(4) \rightarrow 9 + 4*4}$$

passo 5

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{4*4 \rightarrow 16}}{9 + 4*4 \rightarrow 9 + 16}$$

passo 6

$$(\text{SUM}) \frac{}{9 + 16 \rightarrow 25}$$

Caso $\text{sumOfSquare}(3,2+2)$

CBV:

passo 1

$$(\text{APP2}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{\text{sumOfSquare}(3, 2+2) \rightarrow \text{sumOfSquare}(3, 4)}$$

I passi successivi sono gli stessi del caso precedente, quindi i passi di esecuzione sono 7.

CBN:

passo 1

$$(\text{BETA}) \frac{}{\text{sumOfSquare}(3, 2+2) \rightarrow \text{square}(3) + \text{square}(2+2)}$$

passo 2

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(3) \rightarrow 3*3}}{\text{square}(3) + \text{square}(2+2) \rightarrow 3*3 + \text{square}(2+2)}$$

passo 3

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{3*3 \rightarrow 9}}{3*3 + \text{square}(2+2) \rightarrow 9 + \text{square}(2+2)}$$

passo 4

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(2+2) \rightarrow (2+2)*(2+2)}}{9 + \text{square}(2+2) \rightarrow 9 + (2+2)*(2+2)}$$

passo 5

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT-L}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{(2+2)*(2+2) \rightarrow (4)*(2+2)}}{9 + (2+2)*(2+2) \rightarrow 9 + (4)*(2+2)}$$

passo 6

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT-R}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{4*(2+2) \rightarrow 4*4}}{9 + 4*(2+2) \rightarrow 9 + 4*4}$$

passo 7

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{4*4 \rightarrow 16}}{9 + 4*4 \rightarrow 9 + 16}$$

passo 8

$$(\text{SUM}) \frac{}{9 + 16 \rightarrow 25}$$

I passi di esecuzione sono 8 in questo caso (CBN).

Esercizio 1.7

Si consideri la seguente definizione in Scala: `def test(x:Int, y:Int):Int = x*x` confrontare la velocità (cioè il numero di passi) di riduzione delle seguenti espressioni secondo le strategie CBV e CBN, indicando quale delle due è più veloce

1. `test(2,3)`
2. `test(3+4,8)`
3. `test(7,2*4)`
4. `test(3+4,2*4)`

Svolgimento

1. CBV=CBN: entrambi terminano l'esecuzione in 2 passi;
2. CBV<CBN: CBV termina prima perchè valuta l'espressione `3+4` subito (una sola volta). CBN invece invocherà prima la funzione, sostituendo ad `x` l'espressione. Essendo `x` presente 2 volte nella funzione, la valutazione dovrà essere effettuata 2 volte.
3. CBV>CBN: CBN termina prima perchè non valuta l'espressione `2*4` che non è utilizzata nella funzione `test`.
4. CBV=CBN: entrambi terminano l'esecuzione in 4 passi; la differenza sta nel fatto che con CBV si svolgeranno prima le due operazioni (somma e moltiplicazione) e poi si chiamerà la funzione. Con CBN invece, si eviterà di calcolare `2*4`, tuttavia si calcolerà `3+4` due volte.

Esercizio 1.8

Definire in Scala una funzione `and` che si comporta come il costrutto logico `x&y`.

Svolgimento

```
// and logico. b1 e b2 passati by-name
def and(b1:=> Boolean, b2:=> Boolean): Boolean =
  if(!b1) false
  else if(b2) true
      else false;
```

3 Il mini linguaggio funzionale (note 3)

Esempi di derivazione svolti

- a) $\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}$
- b) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T$
- c) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}$
- d) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash f \text{ (if false then true else false)} : \text{Bool}$
- e) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

Svolgimento

- a) $\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}$

$$\text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(SUM)} \frac{\text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 5 : \text{Nat}} \quad \text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 7 : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash 5 + 7 : \text{Nat}} \quad \text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 2 : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}}$$

- b) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T$

$$\text{(FUN)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:T \in x:T}{x:T \vdash x:T}}{\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T}$$

- c) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}$

$$\text{(APP)} \frac{\text{(FUN)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:\text{Bool} \in x:\text{Bool}}{x:\text{Bool} \vdash x:\text{Bool}}}{\emptyset \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash \text{true} : \text{Bool}}}{\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}}$$

- d) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash f \text{ (if false then true else false)} : \text{Bool}$

Sia $\Gamma = f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}}{\Gamma \vdash \text{if false then true else false} : \text{Bool}} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash f (\text{if false then true else false}) : \text{Bool}}
\end{array}$$

e) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ Sia $\Gamma = f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma, x:\text{Bool}}{\Gamma, x:\text{Bool} \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(FUN)} \frac{\Gamma, x:\text{Bool} \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:\text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : ?} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}}{\Gamma \vdash (\text{if } x \text{ then false else } x) : ? \rightarrow \text{Bool}} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash (\text{if } x \text{ then false else } x) : ? \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}
\end{array}$$

Quindi $? = \text{Bool}$.

Esercizio 2.1

Trovare un contesto Γ tale che $\Gamma' f x y : \text{Bool}$ sia derivabile.

Svolgimento

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f : T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(VAR)} \frac{x:T_2 \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T_2} \quad \text{(VAR)} \frac{y:T_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash y : T_1} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f : T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash x : T_2}{\Gamma \vdash f x : T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f x : T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash y : T_1}{\Gamma \vdash f x y : \text{Bool}}
\end{array}$$

Esiste un contesto per questo programma, in quanto il programma si puo' ottenere applicando le regole e costruendo l'albero di derivazione.

Fanno parte del contesto le seguenti regole di tipo:

- $f:T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool}$
- $x:T_2$
- $y:T_1$

Caso $f(x y)$:

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:T_1 \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f:T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(VAR)} \frac{x:T_2 \rightarrow T_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:T_2} \quad \text{(VAR)} \frac{y:T_2 \in \Gamma}{\Gamma \vdash y:T_2} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f:T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash x y:T_1}{\Gamma \vdash f(x y):\text{Bool}}
\end{array}$$

Esiste un contesto anche per questo programma.

Fanno parte del contesto le seguenti regole di tipo:

- $f:T_1 \rightarrow \text{Bool}$
- $x:T_2 \rightarrow T_1$
- $y:T_2$

Esercizio 2.2

Il giudizio $\Gamma' \vdash x x : T$ e' derivabile? Se si', trovare una derivazione per qualche Γ, T , altrimenti provare che non e' derivabile.

Svolgimento

$$\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash x:T_1 \rightarrow T \quad \Gamma \vdash x:T_1}{\Gamma \vdash x x:T}$$

No, non e' derivabile. Sarebbe necessario avere un sistema di tipi che ammetta il tipo ricorsivo.

Esercizio 3.1

Provare che ogni sottoterminale di un termine ben tipato è ben tipato.

Svolgimento Per la risoluzione di questo esercizio è necessario utilizzare il metodo dell'induzione sui passi di derivazione, ovvero sull'altezza dell'albero di derivazione.

Caso 0 A questo livello il termine è congruo con il sottoterminale di conseguenza se il termine è ben tipato lo è anche il sottoterminale

Caso $n + 1$ A questo livello il sottoterminale è dato dai sottotermini dei passi $0 \dots n$ e di conseguenza se questi sottotermini sono ben tipati allora lo sarà anche questo. Per induzione infatti sappiamo che se applico:

SUM fdfdsf

Esercizio 3.2

Dimostrare subject reduction per induzione sulla derivazione di $\Gamma \vdash M : T$.

Esercizio 3.4

Vale l'opposto di subject reduction, i.e. se $\Gamma \vdash M' : T$ e $M \rightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M : T$ (detto subject expansion)? Dimostrarlo oppure dare un controesempio.

Esercizio 3.5

Se al posto della regola (*APP*) si definisse la regola seguente:

$$(\text{APP}') \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Esercizio 3.6

Se al posto delle regole (*APP*) e (*FUN*) si definissero le regole seguenti regole:

$$(\text{APP}') \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T}$$

e

$$(\text{FUN}') \frac{\Gamma, x : T1 \vdash M : T}{\Gamma \vdash \text{fn } x : T1. M : \rightarrow T}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Esercizio 3.6

Se si aggiungessero al sistema di tipi i seguenti due assiomi

$$(\text{TRUE}') \frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Nat}}$$

e

$$(\text{FALSE}') \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Nat}}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Esercizio 3.7

Dimostrare il seguente fatto: se $\Gamma \vdash M : T$ e derivabile allora $fv(M) \subseteq Dom(\Gamma)$

Esercizio 3.8

Ricostruire il tipo dei seguenti termini:

- $\text{fn } x:T1. \text{fn } y:T2. \text{if } y \text{ then } x \text{ else true}$
- $\text{fn } x : \text{Nat} : \rightarrow \text{Bool}. x$
- $\text{fn } f : T. \text{fn } x : T'. f(\text{if true then } x \text{ else } f \ x)$
- $\text{fn } f : T1. \text{fn } g : T2. \text{if } (f \ (g \ \text{true})) \text{ then } f \ (\text{fn } x : T3. \text{true}) \text{ else } f \ (\text{fn } x : T4. x)$

4 Estensioni del linguaggio (note 6)

Esercizio 4.1

Discutere quali altre regole/strategie di riduzione sono possibili per i termini coppia.

Svolgimento

Si potrebbero modificare le regole PAIR 1 e PAIR 2 e mantenere le altre:

$$\begin{aligned} \text{(PAIR-NOT-EVAL 1)} & \frac{}{(M_1, M_2)._1 \rightarrow M_1} \\ \text{(PAIR-NOT-EVAL 2)} & \frac{}{(M_1, M_2)._2 \rightarrow M_2} \end{aligned}$$

In questo modo non serve valutare i termini M_1 e M_2 prima di fare la proiezione. A seguito della proiezione, solo il termine estratto viene valutato. Le regole PROJECT 1 e PROJECT 2 vanno mantenute perché il termine M potrebbe per esempio essere il risultato di una funzione ed è necessario che ci siano delle regole di derivazione che portino ad uno stato in cui sono applicabili le due aggiunte. EVAL PAIR 1 ed EVAL PAIR 2, invece, vanno mantenute perché la coppia, ammesso che contenga valori finali, è un buon termine finale anch'essa. Di conseguenza, non è necessario che venga estratto uno dei due valori perché l'esecuzione si possa definire corretta e nel caso in cui ci si trovi come termine finale una coppia con valori non finali, è necessaria una regola di valutazione che porti avanti l'esecuzione.

Esercizio 4.2

Scrivere la valutazione dei termini $(4 - 1, \text{if true then false else false})._1$ e $(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1)$.

Svolgimento

Termine 1: $(4 - 1, \text{if true then false else false})._1$

$$\begin{aligned} & \text{(MINUS)} \frac{}{4 - 1 \rightarrow 3} \\ \text{(EVAL PAIR 1)} & \frac{}{(4 - 1, \text{if true then false else false}) \rightarrow (3, \text{if true then false else false})} \\ \text{(PROJECT 1)} & \frac{}{(4 - 1, \text{if true then false else false})._1 \rightarrow (3, \text{if true then false else false})._1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(IF-TRUE)} \frac{}{\text{if true then false else false} \rightarrow \text{false}} \\
\text{(EVAL PAIR 2)} \frac{}{(3, \text{if true then false else false}) \rightarrow (3, \text{false})} \\
\text{(PROJECT 2)} \frac{}{(3, \text{if true then false else false})._1 \rightarrow (3, \text{false})._1} \\
\text{(PAIR 1)} \frac{}{(3, \text{false})._1 \rightarrow 3}
\end{array}$$

Termine 2: $(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1)$

$$\begin{array}{c}
\text{(MINUS)} \frac{}{4 - 2 \rightarrow 2} \\
\text{(EVAL PAIR 1)} \frac{}{(4 - 2, 3 + 1) \rightarrow (2, 3 + 1)} \\
\text{(APP2)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1) \rightarrow (\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 3 + 1)} \\
\text{(SUM)} \frac{}{3 + 1 \rightarrow 4} \\
\text{(EVAL PAIR 1)} \frac{}{(2, 3 + 1) \rightarrow (2, 4)} \\
\text{(APP2)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 3 + 1) \rightarrow (\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 4)} \\
\text{(BETA)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 4) \rightarrow (2, 4)._2} \\
\text{(PAIR 2)} \frac{}{(2, 4)._2 \rightarrow 4}
\end{array}$$

Esercizio 4.3

Dimostrare il teorema di safety per il linguaggio contenente interi, booleani, funzioni e records.

DA FARE

5 Estensioni del linguaggio (note 7)

Esercizio 5.1

Si ridimostrì il teorema di safety per il linguaggio contenente interi, booleani, funzioni, records e tipi varianti. **DA FARE**

6 Eccezioni (note 8)

Esercizio 6.1

Si dia la semantica operativa dei termini indicati sopra, osservando come il sollevamento delle eccezioni comporti un salto non locale del flusso di controllo.

DA FARE

Esercizio 6.2

Si definisca la semantica operativa per il linguaggio esteso con i costrutti visti in precedenza: unit, records e varianti.

DA FARE

Esercizio 6.3

Si ridimostrì il teorema di safety per il linguaggio contenente interi, booleani, funzioni, records, tipi varianti ed eccezioni.

DA FARE? Non lo so, non l'ho scritto negli appunti,credo di no

7 Subtyping (note 9)

Esercizio 7.1

Scrivere le derivazioni dei giudizi (indicarli) **DA FARE**

Esercizio 7.2

Si scriva la derivazione di $a : Nat, b : Bool, c : Nat <: b : Bool$ **DA FARE**

Esercizio 7.3

Dare la derivazione del giudizio. Esiste una sola derivazione di questo giudizio? **DA FARE**

Esercizio 7.4

Quale potrebbe essere la relazione di sottotipo dei variant types? **DA FARE**

Esercizio 7.5

Quali proprietà del sistema di tipi si perderebbero se avessimo definito la relazione di subtyping con una regola di troppo? E se l'avessimo definita con una regola in meno? ... **DA FARE**

Esercizio 7.12

Ridimostrare il teorema di progressione, preservazione, il substitution lemma e il teorema di safety per il linguaggio con i record e il subtyping. **DA FARE**

Esercizio 7.16

Trovare due termini M e N tali che .. **DA FARE**

8 Featherweight Java (note 11)

Esercizio 8.1

DA FARE

Esercizio 8.2

DA FARE

Esercizio 8.3

DA FARE

Esercizio 8.4

DA FARE

Esercizio 8.5

DA FARE

Esercizio 8.12

DA FARE

9 Imperative Featherweight Java (note 12)

Esercizio 9.2

DA FARE

Esercizio 9.3

DA FARE

Esercizio 9.4

DA FARE