



ASPETTI AVANZATI DEI LINGUAGGI
DI PROGRAMMAZIONE

**Esercizi - Aspetti avanzati di Linguaggi di
programmazione**

Autori:
Stefano Campese
Enrico Savoca

Contents

1	Introduzione	2
2	Il mini linguaggio funzionale (note 2)	3
3	Il mini linguaggio funzionale (note 3)	12
4	I Tipi Semplici(note 45)	15
5	Estensioni del linguaggio (note 6)	21
6	Estensioni del linguaggio (note 7)	25
7	Eccezioni (note 8)	26
8	Subtyping (note 9)	32
9	Featherweight Java (note 11)	43
10	Imperative Featherweight Java (note 12)	45

1 Introduzione

Il documento è stato realizzato da Stefano Campese ed Enrico Savoca. Lo scopo di esso è quello di raccogliere in un unico posto le soluzioni di tutti gli esercizi del corso di "Aspetti avanzati dei linguaggi di programmazione". Gli esercizi sono stati svolti da entrambi gli autori e la versione ritenuta corretta di ognuno di essi è stata riportata nel presente testo.

2 Il mini linguaggio funzionale (note 2)

Esercizio 1.1

La relazione di riduzione data definisce una strategia efficiente per la valutazione del termine if-then-else, che permette cioè di valutare unicamente il ramo scelto dalla valutazione della guardia booleana. Ridefinire la semantica operativa del linguaggio in modo che adotti una strategia non efficiente per il costrutto if-then-else, valutando entrambi i rami del costrutto condizionale.

Svolgimento

Per ottenere una semantica meno efficiente, si cambiano gli assiomi (IF-TRUE) e (IF-FALSE) e si aggiungono le regole (THEN) ed (ELSE). (IF) si mantiene tale.

Assiomi

$$(IF-TRUE) \frac{}{if\ TRUE\ then\ v_1\ else\ v_2 \rightarrow v_1}$$

$$(IF-FALSE) \frac{}{if\ FALSE\ then\ v_1\ else\ v_2 \rightarrow v_2}$$

Regole

$$(THEN) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{if\ v_1\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ v_1\ then\ M'_2\ else\ M_3}$$

$$(ELSE) \frac{M_3 \rightarrow M'_3}{if\ v_1\ then\ v_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ v_1\ then\ v_2\ else\ M'_3}$$

Esercizio 1.4

La valutazione, cioè l'esecuzione del programma, è deterministica. Se $M \rightarrow M'$ e $M \rightarrow M''$ allora $M'=M''$.

Dimostrare la proposizione precedente per induzione sulla struttura del termine M .

Dimostrazione

Si dimostra per induzione sulla derivazione.

Casi base:

- $M = \text{true}$
 Se $\text{true} \rightarrow M'$ e $\text{true} \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè true è un valore finale;
- $M = \text{false}$
 Se $\text{false} \rightarrow M'$ e $\text{false} \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè false è un valore finale;
- $M = \text{fn } x.M$
 Se $\text{fn } x.M \rightarrow M'$ e $\text{fn } x.M \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè $\text{fn } x.M$ è un valore finale;
- $M = n$
 Se $n \rightarrow M'$ e $n \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Vero perchè n è un valore finale.

Passo induttivo:

- Tesi: $M = M_1 + M_2 \rightarrow M', M_1 + M_2 \rightarrow M'' \implies M' = M''$
 Per ipotesi induttiva:
 - Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
 - Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM-LEFT):

$$(\text{SUM-LEFT}) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 + M_2 \rightarrow M'_1 + M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
 La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM-RIGHT):

$$(\text{SUM-RIGHT}) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1 + M_2 \rightarrow v_1 + M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
 La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (SUM):

$$(SUM) \frac{\text{con } n'=n_1 + n_2}{n_1 + n_2 \rightarrow n'}$$

Il risultato della somma è univoco e di conseguenza la derivazione è deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = M_1 - M_2 \rightarrow M', M_1 - M_2 \rightarrow M'' \implies M'=M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
- Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS-LEFT):

$$(MINUS-LEFT) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 - M_2 \rightarrow M'_1 - M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS-RIGHT):

$$(MINUS-RIGHT) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1 - M_2 \rightarrow v_1 - M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (MINUS):

$$(MINUS) \frac{\text{con } n'=n_1 - n_2}{n_1 - n_2 \rightarrow n'}$$

Il risultato della differenza è univoco e di conseguenza la derivazione è deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M', \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M'' \implies M'=M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$.

3 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (IF):

$$(IF) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{if\ M_1\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow if\ M'_1\ then\ M_2\ else\ M_3 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso dell'assioma (IF-TRUE):

$$(IF-TRUE) \frac{}{if\ true\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow M_2 = M'}$$

In questo caso $M_2 = M' = M''$ per applicazione dell'assioma e la derivazione risulta deterministica.

c) Derivazione tramite l'uso della regola (IF-FALSE):

$$(IF-FALSE) \frac{}{if\ false\ then\ M_2\ else\ M_3 \rightarrow M_3 = M'}$$

In questo caso $M_3 = M' = M''$ per applicazione dell'assioma e la derivazione risulta deterministica.

In tutti e 3 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = M_1\ M_2 \rightarrow M', M_1\ M_2 \rightarrow M'' \implies M' = M''$

Per ipotesi induttiva:

- Se $M_1 \rightarrow M'_1$ e $M_1 \rightarrow M''_1$ allora $M'_1 = M''_1$;
- Se $M_2 \rightarrow M'_2$ e $M_2 \rightarrow M''_2$ allora $M'_2 = M''_2$.

2 Casi possibili:

a) Derivazione tramite l'uso della regola (APP1):

$$(APP1) \frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1\ M_2 \rightarrow M'_1\ M_2 = M'}$$

In questo caso $M'_1 = M''_1$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;
La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

b) Derivazione tramite l'uso della regola (APP2):

$$(APP2) \frac{M_2 \rightarrow M'_2}{v_1\ M_2 \rightarrow v_1\ M'_2 = M'}$$

In questo caso $M'_2 = M''_2$ per ipotesi induttiva e quindi anche $M' = M''$;

La derivazione risulta deterministica applicando questa regola.

In tutti e 2 i casi, i soli possibili, la derivazione è deterministica, quindi la tesi è dimostrata.

- Tesi: $M = \text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M', \text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M'' \implies M' = M''$

Derivazione tramite l'uso dell'assioma (BETA):

$$(BETA) \frac{}{\text{fn } x.M \ v \rightarrow Mx := v = M'}$$

Tramite l'applicazione dell'assioma si ottiene $Mx := v = M' = M''$.

La derivazione risulta quindi deterministica e la tesi risulta dimostrata.

La derivazione è deterministica all'applicazione di tutte le regole e gli assiomi del linguaggio, di conseguenza è deterministica l'esecuzione del programma.

□

Esercizio 1.5

Descrivere la valutazione del termine $((\text{fn } x.3) (\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0) (\text{false}))$. Modificare le regole di valutazione in modo tale che, mantenendo una strategia call-by-value, il termine precedente evolva in un termine stuck in meno passi di riduzione. Scrivere le regole di valutazione della strategia call-by-name e valutare il termine precedente secondo questa strategia.

Svolgimento

Valutazione tramite strategia call-by-value:

passo 1

$$(APP1) \frac{(BETA) \frac{}{(\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y) \rightarrow 3}}{((\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false})) \rightarrow 3 ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false}))}$$

passo 2

$$(APP2) \frac{(BETA) \frac{}{(\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false}) \rightarrow \text{if false then } 1 \text{ else } 0}}{3 ((\text{fn } z.\text{if } z \text{ then } 1 \text{ else } 0)(\text{false})) \rightarrow 3 (\text{if false then } 1 \text{ else } 0)}$$

passo 3

$$\frac{\text{(IF-FALSE)} \frac{}{if\ false\ then\ 1\ else\ 0 \rightarrow 0}}{\text{(APP2)} \frac{}{3\ (if\ false\ then\ 1\ else\ 0) \rightarrow 3\ 0}}$$

3 0 costituisce uno stuck: non esistono regole o assiomi per continuare l'esecuzione di tale programma. Esecuzione terminata dopo 3 passi di derivazione.

Si può mantenere la strategia CBV e terminare l'esecuzione in un numero minore di passi modificando (APP2):

$$\text{(APP2)} \frac{N \rightarrow N'}{(\text{fn } x.M) N \rightarrow \text{fn } x.M\ N'}$$

In questo modo l'esecuzione del programma terminerebbe dopo un solo passo. Infatti, ci si ritroverebbe in una forma in cui non è possibile applicare alcuna regola o assioma (3 non è una funzione).

Con una strategia CBN (Call-by-name) non ho (APP2) e la funzione (BETA) è la seguente:

$$\text{(BETA)} \frac{\checkmark}{(\text{fn } x.M) N \rightarrow Mx := N}$$

Con questa regola mostriamo l'esecuzione del programma:

passo 1

$$\text{(APP1)} \frac{\text{(BETA)} \frac{}{(\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y) \rightarrow 3}}{((\text{fn } x.3)(\text{fn } y.y)) ((\text{fn } z.if\ z\ then\ 1\ else\ 0)(false)) \rightarrow 3 ((\text{fn } z.if\ z\ then\ 1\ else\ 0)(false))}}$$

Stuck! Non esistono regole o assiomi applicabili: APP1 non è applicabile in quanto 3 non è funzione.

Esercizio 1.6

Consideriamo le seguenti definizioni in Scala: `def square(x:Int):Int = x*x` `def sumOfSquare(x:Int,y:Int):Int = square(x)+square(y)` Descrivere i passi di riduzione dell'espressione `sumOfSquare(3,4)` secondo una strategia call- by-value analoga a quella definita nella sezione precedente. Descrivere inoltre la riduzione della stesa espressione secondo la strategia call-by-name. Descrivere i passi di riduzione dell'espressione `sumOfSquare(3,2+2)` secondo le strategie call-by-value e call-by-name.

Svolgimento

Caso $\text{sumOfSquare}(3,4)$.

CBV si comporta come CBN.

passo 1

$$(\text{BETA}) \frac{}{\text{sumOfSquare}(3, 4) \rightarrow \text{square}(3) + \text{square}(4)}$$

passo 2

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(3) \rightarrow 3*3}}{\text{square}(3) + \text{square}(4) \rightarrow 3*3 + \text{square}(4)}$$

passo 3

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{3*3 \rightarrow 9}}{3*3 + \text{square}(4) \rightarrow 9 + \text{square}(4)}$$

passo 4

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(4) \rightarrow 4*4}}{9 + \text{square}(4) \rightarrow 9 + 4*4}$$

passo 5

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{4*4 \rightarrow 16}}{9 + 4*4 \rightarrow 9 + 16}$$

passo 6

$$(\text{SUM}) \frac{}{9 + 16 \rightarrow 25}$$

Caso $\text{sumOfSquare}(3,2+2)$

CBV:

passo 1

$$(\text{APP2}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{\text{sumOfSquare}(3, 2+2) \rightarrow \text{sumOfSquare}(3, 4)}$$

I passi successivi sono gli stessi del caso precedente, quindi i passi di esecuzione sono 7.

CBN:

passo 1

$$(\text{BETA}) \frac{}{\text{sumOfSquare}(3, 2+2) \rightarrow \text{square}(3) + \text{square}(2+2)}$$

passo 2

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(3) \rightarrow 3*3}}{\text{square}(3) + \text{square}(2+2) \rightarrow 3*3 + \text{square}(2+2)}$$

passo 3

$$(\text{SUM-L}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{3*3 \rightarrow 9}}{3*3 + \text{square}(2+2) \rightarrow 9 + \text{square}(2+2)}$$

passo 4

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{BETA}) \frac{}{\text{square}(2+2) \rightarrow (2+2)*(2+2)}}{9 + \text{square}(2+2) \rightarrow 9 + (2+2)*(2+2)}$$

passo 5

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT-L}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{(2+2)*(2+2) \rightarrow (4)*(2+2)}}{9 + (2+2)*(2+2) \rightarrow 9 + (4)*(2+2)}$$

passo 6

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT-R}) \frac{(\text{SUM}) \frac{}{2+2 \rightarrow 4}}{4*(2+2) \rightarrow 4*4}}{9 + 4*(2+2) \rightarrow 9 + 4*4}$$

passo 7

$$(\text{SUM-R}) \frac{(\text{MULT}) \frac{}{4*4 \rightarrow 16}}{9 + 4*4 \rightarrow 9 + 16}$$

passo 8

$$(\text{SUM}) \frac{}{9 + 16 \rightarrow 25}$$

I passi di esecuzione sono 8 in questo caso (CBN).

Esercizio 1.7

Si consideri la seguente definizione in Scala: `def test(x:Int, y:Int):Int = x*x` confrontare la velocità (cioè il numero di passi) di riduzione delle seguenti espressioni secondo le strategie CBV e CBN, indicando quale delle due è più veloce

1. `test(2,3)`
2. `test(3+4,8)`
3. `test(7,2*4)`
4. `test(3+4,2*4)`

Svolgimento

1. CBV=CBN: entrambi terminano l'esecuzione in 2 passi;
2. CBV<CBN: CBV termina prima perchè valuta l'espressione `3+4` subito (una sola volta). CBN invece invocherà prima la funzione, sostituendo ad `x` l'espressione. Essendo `x` presente 2 volte nella funzione, la valutazione dovrà essere effettuata 2 volte.
3. CBV>CBN: CBN termina prima perchè non valuta l'espressione `2*4` che non è utilizzata nella funzione `test`.
4. CBV=CBN: entrambi terminano l'esecuzione in 4 passi; la differenza sta nel fatto che con CBV si svolgeranno prima le due operazioni (somma e moltiplicazione) e poi si chiamerà la funzione. Con CBN invece, si eviterà di calcolare `2*4`, tuttavia si calcolerà `3+4` due volte.

Esercizio 1.8

Definire in Scala una funzione `and` che si comporta come il costrutto logico `x&y`.

Svolgimento

```
// and logico. b1 e b2 passati by-name
def and(b1:=> Boolean, b2:=> Boolean): Boolean =
  if(!b1) false
  else if(b2) true
      else false;
```

3 Il mini linguaggio funzionale (note 3)

Esempi di derivazione svolti

- a) $\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}$
- b) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T$
- c) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}$
- d) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash f \text{ (if false then true else false)} : \text{Bool}$
- e) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

Svolgimento

- a) $\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}$

$$\text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(SUM)} \frac{\text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 5 : \text{Nat}} \quad \text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 7 : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash 5 + 7 : \text{Nat}} \quad \text{(NAT)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash 2 : \text{Nat}}}{\emptyset \vdash \text{if true then } 5 + 7 \text{ else } 2 : \text{Nat}}$$

- b) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T$

$$\text{(FUN)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:T \in x:T}{x:T \vdash x:T}}{\emptyset \vdash (\text{fn } x:T.x) x : T \rightarrow T}$$

- c) $\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}$

$$\text{(APP)} \frac{\text{(FUN)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:\text{Bool} \in x:\text{Bool}}{x:\text{Bool} \vdash x:\text{Bool}}}{\emptyset \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\emptyset \vdash \text{true} : \text{Bool}}}{\emptyset \vdash (\text{fn } x:\text{Bool}.x) \text{ true} : \text{Bool}}$$

- d) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash f \text{ (if false then true else false)} : \text{Bool}$

Sia $\Gamma = f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}}{\Gamma \vdash \text{if false then true else false} : \text{Bool}} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash f (\text{if false then true else false}) : \text{Bool}}
\end{array}$$

e) $f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ Sia $\Gamma = f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma, x:\text{Bool}}{\Gamma, x:\text{Bool} \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(FUN)} \frac{\Gamma, x:\text{Bool} \vdash f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(VAR)} \frac{x:\text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : ?} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \quad \text{(FALSE)} \frac{\checkmark}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}}}{\Gamma \vdash (\text{if } x \text{ then false else } x) : ? \rightarrow \text{Bool}} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash (\text{if } x \text{ then false else } x) : ? \rightarrow \text{Bool}}{\Gamma \vdash \text{fn } x:\text{Bool}.f(\text{if } x \text{ then false else } x) : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}}
\end{array}$$

Quindi $? = \text{Bool}$.

Esercizio 2.1

Trovare un contesto Γ tale che $\Gamma' f x y : \text{Bool}$ sia derivabile.

Svolgimento

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f : T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(VAR)} \frac{x:T_2 \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T_2} \quad \text{(VAR)} \frac{y:T_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash y : T_1} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f : T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash x : T_2}{\Gamma \vdash f x : T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f x : T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash y : T_1}{\Gamma \vdash f x y : \text{Bool}}
\end{array}$$

Esiste un contesto per questo programma, in quanto il programma si puo' ottenere applicando le regole e costruendo l'albero di derivazione.

Fanno parte del contesto le seguenti regole di tipo:

- $f:T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow \text{Bool}$
- $x:T_2$
- $y:T_1$

Caso $f(x y)$:

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{f:T_1 \rightarrow \text{Bool} \in \Gamma}{\Gamma \vdash f:T_1 \rightarrow \text{Bool}} \quad \text{(VAR)} \frac{x:T_2 \rightarrow T_1 \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:T_2} \quad \text{(VAR)} \frac{y:T_2 \in \Gamma}{\Gamma \vdash y:T_2} \\
\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash f:T_1 \rightarrow \text{Bool} \quad \Gamma \vdash x y:T_1}{\Gamma \vdash f(x y):\text{Bool}}
\end{array}$$

Esiste un contesto anche per questo programma.

Fanno parte del contesto le seguenti regole di tipo:

- $f:T_1 \rightarrow \text{Bool}$
- $x:T_2 \rightarrow T_1$
- $y:T_2$

Esercizio 2.2

Il giudizio $\Gamma' \vdash x x : T$ e' derivabile? Se si', trovare una derivazione per qualche Γ, T , altrimenti provare che non e' derivabile.

Svolgimento

$$\text{(APP)} \frac{\Gamma \vdash x:T_1 \rightarrow T \quad \Gamma \vdash x:T_1}{\Gamma \vdash x x:T}$$

No, non e' derivabile. Sarebbe necessario avere un sistema di tipi che ammetta il tipo ricorsivo.

4 I Tipi Semplici (note 45)

Esercizio 3.1

Provare che ogni sottoterminale di un termine ben tipato è ben tipato.

Svolgimento Per la risoluzione di questo esercizio è necessario utilizzare il metodo dell'induzione sui passi di derivazione, ovvero sull'altezza dell'albero di derivazione.

Caso Base $h = 1$ A questo livello il termine e sottotermini coincidono. Quindi, il fatto che ogni sottoterminale risulta essere ben tipato è un assioma.

Caso Induttivo h Questo caso è composto dall'applicazione della regola e dai vari sottotermini che la riguardano. Quindi premesso che questa applicazione sia valida per $h = 0$ e che l'ipotesi sia vera anche per h allora per induzione vale anche su $h + 1$ e suoi sottotermini contenuti al passo h .

Esercizio 3.2

Dimostrare subject reduction per induzione sulla derivazione di $\Gamma \vdash M : T$.

Svolgimento Si vuole quindi dimostrare che:

Se $\Gamma \vdash M : T$ e $M \rightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M' : T$.

TRUE $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}$. Il teorema è vacuamente vero per questa derivazione siccome $\nexists M'. M \rightarrow M'$.

False $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}$. Analogo a True.

Nat $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash n : \text{Nat}$. Analogo a True.

Var $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash x : T$. Analogo a True.

Fun $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash \text{fn } x. T_1 C : T_1 \rightarrow T_2$. Analogo a True.

Sum $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash A + B : \text{Nat}$.

Per quanto assunto dalla regola di tipo *Sum*, sappiamo per certo che anche A e B hanno tipo **Nat** sotto contesto Γ .

Supponiamo che $A + B \rightarrow M'$ (sappiamo che M' è unico poiché l'esecuzione è deterministica). Tale riduzione può essere:

- *Sum*: $M' \equiv n$. Per la regola di tipo *Nat*, si ha che $T \equiv \text{Nat}$ e che $\Gamma \vdash M' : \text{Nat}$;
- *Sum-Left*: $M' \equiv A' + B$. Per gli assunti della regola *Sum* ho che $\Gamma \vdash A : \text{Nat}$ e per *Sum-Left* $A \rightarrow A'$. Posso quindi applicare l'ipotesi induttiva¹ per ottenere il giudizio $\Gamma \vdash A' : \text{Nat}$. Sono quindi soddisfatte le premesse della regola *Sum* per M' e quindi $\Gamma \vdash M' : \text{Nat} \equiv T$;
- *Sum-Right*: $M' \equiv v + B'$. Il ragionamento é analogo al caso *Sum-Left*.

Minus $\Gamma \vdash M : T$ é $\Gamma \vdash A - B : \text{Nat}$. Analogo a *Sum*.

IfThenElse $\Gamma \vdash M : T$ é $\Gamma \vdash \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$.

Dal giudizio di tipo abbiamo che:

- $\Gamma \vdash M_1 : \text{Bool}$;
- $\Gamma \vdash M_2 : T$;
- $\Gamma \vdash M_3 : T$.

Supponiamo che $\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M'$ (sappiamo che M' é unico poiché l'esecuzione é deterministica). Tale riduzione può essere:

- (IF): $M' \equiv \Gamma \vdash \text{if } M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$. Dato che il giudizio $\Gamma \vdash M_1 : \text{Bool}$ richiede una derivazione in meno e che $M_1 \rightarrow M'_1$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva per ottenere il giudizio $\Gamma \vdash M'_1 : \text{Bool}$. Si ha quindi che la regola di tipo (IFTHENELSE) continua a valere per il termine M' e dato che i termini M_2 e M_3 non sono cambiati, anche M' ha tipo T ;
- (IF-TRUE): $M' \equiv M_2$. M_2 ha tipo T e quindi anche M' ha tipo T ;
- (IF-FALSE): $M' \equiv M_3$. Analogo a (IF-TRUE)

App $\Gamma \vdash M : T$ é $\Gamma \vdash A B : T_2$. Dal giudizio di tipo abbiamo che:

- $\Gamma \vdash A : T_1 \rightarrow T_2$;
- $\Gamma \vdash B : T_1$.

Supponiamo che $A B \rightarrow M'$ (sappiamo che M' é unico poiché l'esecuzione é deterministica). Tale riduzione può essere:

- (BETA): $M' \equiv \Gamma \vdash Z[x := B]$ ². Per la regola di tipo (FUN) ho che $Z : T_2$ e quindi, per il Substitution Lemma, $\Gamma \vdash Z[x := B] : T_2$. Per questo motivo si ha che $\Gamma \vdash M' : T_2$ con $T_2 \equiv T$;

¹perch é la derivazione $\Gamma \vdash A : \text{Nat}$ richiede meno passaggi

²dato $A \equiv F N x T_1 Z$

- (APP-1): $M' \equiv A' B$. Dato che il giudizio $\Gamma \vdash A : T_1 \rightarrow T_2$ richiede una derivazione con meno passaggi e che $A \rightarrow A'$ posso applicare l'ipotesi induttiva per ottenere il giudizio $A' : T_1 \rightarrow T_2$. Il termine M' soddisfa le premesse della regola di tipo (APP) e quindi M' ha tipo $T_2 \equiv T$.
- (APP-2): $M' \equiv v B'$. Analogo ad (APP-1).

Esercizio 3.4

Vale l'opposto di subject reduction, i.e. se $\Gamma \vdash M' : T$ e $M \rightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M : T$ (detto subject expansion)? Dimostrarlo oppure dare un controesempio.

Svolgimento La risposta e' no:

E' sufficiente pensare a $M \rightarrow M_1$ con $\Gamma \vdash M_1 : \sigma$ e che $\Gamma \not\vdash M : \sigma$

Esercizio 3.5

Se al posto della regola (APP) si definisse la regola seguente:

$$(APP') \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Svolgimento Si, la dimostrazione si puo' pensando al fatto che APP' non e' altro che una specificazione di APP, ovvero se poniamo X uguale all'insieme dei tipi di APP, Y e' un sottoinsieme di X e corrisponde ai possibili tipi di APP'.

Di conseguenza il teorema di safety vale anche per APP'

Esercizio 3.6

Se al posto delle regole (APP) e (FUN) si definissero le seguenti regole:

$$(APP') \frac{\Gamma \vdash M : T \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : T}{\Gamma \vdash M N : T}$$

e

$$(\text{FUN}') \frac{\Gamma, x : T1 \vdash M : T}{\Gamma \vdash fn\ x : T1.M : \rightarrow T}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Svolgimento La risposta e' no:

In questo caso la FUN_1 non fa alcun controllo sul tipo dell'argomento e quindi esiste la possibilita' di arrivare ad un passo della derivazione che produce un termine STUCK, invalidando il teorema stesso.

Esercizio 3.6

Se si aggiungessero al sistema di tipi i seguenti due assiomi

$$(\text{TRUE}') \frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : Nat}$$

e

$$(\text{FALSE}') \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : Nat}$$

sarebbe ancora vero il teorema di safety?

Svolgimento La risposta e' no:

Data la definizione di Teorema di Safety, e' evidente che viene meno la stessa ipotesi ovvero che M sia un valore o un che non evolva in un termine STUCK.

Con queste regole sarebbe permessa anche l'operazione SUM che genererebbe un termine stuck, invalidando il teorema stesso.

Esercizio 3.7

Dimostrare il seguente fatto: se $\Gamma \vdash M : T$ e derivabile allora $fv(M) \subseteq Dom(\Gamma)$

Svolgimento Si procede con la dimostrazione per induzione:

Caso Base

TRUE $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash \text{true} : Bool$. Il teorema é vacuamente vero per questa derivazione siccome $\nexists M'. M \rightarrow M'$.

False $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}$. Analogo a True.

Nat $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash n : \text{Nat}$. Analogo a True.

Var $\Gamma \vdash M : T \text{ é } \Gamma \vdash x : T$. Analogo a True.

In questo passo il fatto e' un assioma, questo perche' non esistono variabili libere quindi $fv(M)$ e' \emptyset e il vuoto e un sottoinsieme del $Dom(\Gamma)$

Caso Induttivo Al passo h grazie al lemma di inversione e al caso base sappiamo per ipotesi che il fatto e' vero e quindi per induzione lo e' anche al passo h +1

Esercizio 3.8

Ricostruire il tipo dei seguenti termini:

- $fn\ x:T1.fn\ y:T2.if\ y\ then\ x\ else\ true$
- $fn\ x : Nat \rightarrow Bool.x$
- $fn\ f : T.fn\ x : T'.f(\text{if true then } x \text{ else } f\ x)$
- $fn\ f : T1.fn\ g : T2.\text{if } (f\ (g\ true)) \text{ then } f\ (fn\ x : T3.true) \text{ else } f\ (fn\ x : T4.x)$

Svolgimento

a) $fn\ x:T1.fn\ y:T2.if\ y\ then\ x\ else\ true$

$$\begin{array}{c} \text{(VAR)} \frac{y:Bool \in \Gamma}{\Gamma, x:T1, \vdash y : Bool} \quad \text{(VAR)} \frac{x:Bx:Nat \rightarrow Bool \in \Gamma}{\Gamma, x:T1, \vdash x : Bool} \quad \text{(TRUE)} \frac{\checkmark}{\Gamma, x:T1, \vdash true : Bool} \\ \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{}{\Gamma \vdash fn\ x:T1.fn\ y:T2.if\ y\ then\ x\ else\ true} \\ \text{(FUN)} \frac{x:T1, y:T2 \vdash if\ y\ then\ x\ else\ true}{\Gamma \vdash fn\ x:T1.fn\ y:T2.if\ y\ then\ x\ else\ true} \\ \text{(FUN)} \frac{}{\emptyset \vdash fn\ x:T1.fn\ y:T2.if\ y\ then\ x\ else\ true} \end{array}$$

Il risultato finale e' $Bool \rightarrow (Bool \rightarrow Bool)$

b) $fn\ x : Nat \rightarrow Bool.x$

$$\begin{array}{c} \text{(VAR)} \frac{x:Nat \rightarrow Bool \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:Nat \rightarrow Bool} \\ \text{(FUN)} \frac{}{\emptyset \vdash fn\ x : Nat \rightarrow Bool.x} \end{array}$$

Il risultato finale e' $(Nat \rightarrow Bool) \rightarrow (Nat \rightarrow Bool)$

c) $fn\ f : T.fn\ x : T'.f(\text{if true then } x \text{ else } f\ x)$

$$\begin{array}{c}
\text{(APP)} \frac{f:T,x:T_1 \vdash f:T_3 \rightarrow T_2}{f:T,x:T_1 \vdash f:T_3 \rightarrow T_2} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{\text{(APP)} \frac{f:T,x:T_1 \vdash f:T_4 \rightarrow T}{f:T,x:T_1 \vdash f x : T_3} \quad \text{(VAR)} \frac{T_1 = T_4}{f:T,x:T_1 \vdash x : T_4}}{f:T,x:T_1 \vdash f x : T_3} \quad \frac{T_1 = T_3}{f:T,x:T_1 \vdash x : T_3} \quad \text{(TRUE)} \frac{}{f:T,x:T_1 \vdash \text{iftrue then } x \text{ else } f x : T_3} \\
\text{(FUN)} \frac{f:T,x:T_1 \vdash f(\text{iftrue then } x \text{ else } f x)}{f:T \vdash f n x : T_1.f(\text{iftrue then } x \text{ else } f x)} \\
\text{(FUN)} \frac{}{\emptyset \vdash f n f : T.f n x : T_1.f(\text{if true then } x \text{ else } f x)}
\end{array}$$

Il risultato finale e' dato dal fatto che $T = T_1 = T_2 = T_3 = T_4$ quindi $(T \rightarrow T) \rightarrow (T \rightarrow T \rightarrow T)$

d) $f n f : T1.f n g : T2.\text{if } (f (g \text{ true})) \text{ then } f (f n x : T3.\text{true}) \text{ else } f(f n x : T4.x)$

$$\begin{array}{c}
\text{(VAR)} \frac{x:T_4 \in \Gamma}{f:T_1,g:T_2,x:T_4 \vdash x : T_4} \quad \text{(TRUE)} \frac{}{f:T_1,g:T_2,x:T_4 \vdash \text{true} : Bool} \quad \text{(FUN)} \frac{f:T_1,g:T_2 \vdash f n x : T_3.\text{true} : T_3 \rightarrow Bool}{f:T_1,g:T_2 \vdash f(f n x : T_3.\text{true})} \quad \text{(APP)} \frac{f:T_1,g:T_2 \vdash g.Bool \rightarrow T_2}{f:T_1,g:T_2 \vdash g true : T_2} \quad \text{(TRUE)} \frac{}{f:T_1,g:T_2 \vdash \text{true} : Bool} \\
\text{(FUN)} \frac{f:T_1,g:T_2 \vdash f n x : T_4.x : T_4}{f:T_1,g:T_2 \vdash f(f n x : T_4.x)} \quad \text{(IF-THEN-ELSE)} \frac{f:T_1,g:T_2 \vdash f(f n x : T_4.x)}{f:T_1,g:T_2 \vdash f(f n x : T_4.x)} \quad \text{(FUN)} \frac{f:T_1,g:T_2 \vdash \text{if } (f (g \text{ true})) \text{ then } f (f n x : T_3.\text{true}) \text{ else } f(f n x : T_4.x)}{f:T_1,g:T_2 \vdash f(f n x : T_3.\text{true}) \text{ else } f(f n x : T_4.x)} \\
\text{(FUN)} \frac{}{\emptyset \vdash f n f : T1.f n g : T2.\text{if } (f (g \text{ true})) \text{ then } f (f n x : T3.\text{true}) \text{ else } f(f n x : T4.x)}
\end{array}$$

Il risultato finale e' dato dal fatto che:

- $T_4 = Bool$
- $T_1 = T_2 \rightarrow Bool$
- $T_5 = T_3 \rightarrow Bool$
- $T_4 = Bool$
- $T_3 = T_4 = Bool$
- $T_5 = Bool \rightarrow Bool$
- $T_2 = (Bool \rightarrow Bool)$
- $T_1 = (Bool \rightarrow Bool) \rightarrow Bool$

e quindi il tipo del termine e' quindi $(Bool \rightarrow Bool) \rightarrow Bool$

5 Estensioni del linguaggio (note 6)

Esercizio 4.1

Discutere quali altre regole/strategie di riduzione sono possibili per i termini coppia.

Svolgimento

Si potrebbero modificare le regole PAIR 1 e PAIR 2 e mantenere le altre:

$$\begin{aligned} \text{(PAIR-NOT-EVAL 1)} & \frac{}{(M_1, M_2)._1 \rightarrow M_1} \\ \text{(PAIR-NOT-EVAL 2)} & \frac{}{(M_1, M_2)._2 \rightarrow M_2} \end{aligned}$$

In questo modo non serve valutare i termini M_1 e M_2 prima di fare la proiezione. A seguito della proiezione, solo il termine estratto viene valutato. Le regole PROJECT 1 e PROJECT 2 vanno mantenute perché il termine M potrebbe per esempio essere il risultato di una funzione ed è necessario che ci siano delle regole di derivazione che portino ad uno stato in cui sono applicabili le due aggiunte. EVAL PAIR 1 ed EVAL PAIR 2, invece, vanno mantenute perché la coppia, ammesso che contenga valori finali, è un buon termine finale anch'essa. Di conseguenza, non è necessario che venga estratto uno dei due valori perché l'esecuzione si possa definire corretta e nel caso in cui ci si trovi come termine finale una coppia con valori non finali, è necessaria una regola di valutazione che porti avanti l'esecuzione.

Esercizio 4.2

Scrivere la valutazione dei termini $(4 - 1, \text{if true then false else false})._1$ e $(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1)$.

Svolgimento

Termine 1: $(4 - 1, \text{if true then false else false})._1$

$$\begin{aligned} & \text{(MINUS)} \frac{}{4 - 1 \rightarrow 3} \\ \text{(EVAL PAIR 1)} & \frac{}{(4 - 1, \text{if true then false else false}) \rightarrow (3, \text{if true then false else false})} \\ \text{(PROJECT 1)} & \frac{}{(4 - 1, \text{if true then false else false})._1 \rightarrow (3, \text{if true then false else false})._1} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
\text{(IF-TRUE)} \frac{}{\text{if true then false else false} \rightarrow \text{false}} \\
\text{(EVAL PAIR 2)} \frac{}{(3, \text{if true then false else false}) \rightarrow (3, \text{false})} \\
\text{(PROJECT 2)} \frac{}{(3, \text{if true then false else false})._1 \rightarrow (3, \text{false})._1} \\
\text{(PAIR 1)} \frac{}{(3, \text{false})._1 \rightarrow 3}
\end{array}$$

Termine 2: $(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1)$

$$\begin{array}{c}
\text{(MINUS)} \frac{}{4 - 2 \rightarrow 2} \\
\text{(EVAL PAIR 1)} \frac{}{(4 - 2, 3 + 1) \rightarrow (2, 3 + 1)} \\
\text{(APP2)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (4 - 2, 3 + 1) \rightarrow (\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 3 + 1)} \\
\text{(SUM)} \frac{}{3 + 1 \rightarrow 4} \\
\text{(EVAL PAIR 1)} \frac{}{(2, 3 + 1) \rightarrow (2, 4)} \\
\text{(APP2)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 3 + 1) \rightarrow (\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 4)} \\
\text{(BETA)} \frac{}{(\text{fn } x : \text{Nat} * \text{Nat}.x._2) (2, 4) \rightarrow (2, 4)._2} \\
\text{(PAIR 2)} \frac{}{(2, 4)._2 \rightarrow 4}
\end{array}$$

Esercizio 4.3

Dimostrare il teorema di safety per il linguaggio contenente interi, booleani, funzioni e records.

Svolgimento

Per dimostrare che il teorema di Safety continua a valere anche per l'estensione del linguaggio con i records è necessario andare ad estendere i teoremi di Progressione e di Subject-Reduction.

Per rendere più semplice la dimostrazione, inoltre, è necessario anche aggiornare il Lemma di Inversione.

Teorema di Progressione Se M è un termine chiuso e ben tipato $(\emptyset \vdash M : T)$, allora o M è un valore oppure esiste M' tale che $M \rightarrow M'$.

Per poter procedere con la dimostrazione del teorema di Progressione è necessario aggiungere alla dimostrazione due nuovi casi induttivi, mentre i casi per le altre regole di tipo restano invariati e continuano a valere.

- (TYPE-RECORD) Se $M = \{l_i = M_i \mid i=1 \dots n\}$ e $\emptyset \vdash M : T$, sappiamo che per la regola (TYPE-RECORD) valgono i giudizi di tipo $\emptyset \vdash M_i : T_i \forall i = 1 \dots n$ e che gli alberi di derivazione relativi ai vari giudizi sono di altezza inferiore all'albero del giudizio principale. È quindi possibile applicare l'ipotesi induttiva sui sotto-termini M_i , i quali o sono un valore v_i di tipo T_i oppure possono avanzare in un termine M'_i :
 - Se sono tutti dei valori si ha $M = \{l_i = v_i \mid i=1 \dots n\}$, ovvero M è un valore record di tipo $\{l_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$ e quindi il teorema di Progressione continua a valere banalmente.
 - Se c'è almeno un M_i che non è un valore, è possibile identificare il termine M_j di indice minimo che non è un valore e per il quale continua a valere il giudizio di tipo $\emptyset \vdash M_j : T_j$. Vale quindi l'ipotesi induttiva, ovvero $\exists M'_j$ tale che $M_j \rightarrow M'_j$. Posso quindi applicare la regola (EVAL-RECORD) per far avanzare il termine M al termine M' , dove al posto di M_j compare M'_j . Anche in questo caso il teorema di Progressione continua a valere.
- (TYPE-SELECT) Se $M = N.l_j$ e $\emptyset \vdash M : T$, sappiamo che per la regola (TYPE-SELECT) vale il giudizio di tipo $\emptyset \vdash N : \{l_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$ (con un albero di derivazione più piccolo, ovvero il passo precedente) e che $j \in \{1 \dots n\}$. Si ha quindi che N può essere:
 - un valore di tipo record, ovvero $N = \{l_i = v_i \mid i=1 \dots n\}$ e quindi $M = \{l_i = v_i \mid i=1 \dots n\}.l_j$ con $j \in 1 \dots n$. In questo caso il termine M può avanzare nel termine $M' = v_j$ perchè sono soddisfatte le premesse della regola (SELECT) e quindi il teorema di Progressione continua a valere.
 - un record non ancora completamente valutato, ovvero $N = \{l_i = v_i \mid i=1 \dots x-1, l_x = M_x, l_k = M_k \mid k=x+1 \dots n\}$, $\exists M'_x : M_x \rightarrow M'_x$ e quindi per (EVAL-RECORD) $N \rightarrow N'$ e pertanto anche $M \rightarrow M' = N'.l_j$.
 - $N = \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$ oppure $N = A B$. In entrambi i casi vale il giudizio $\emptyset \vdash N : \{l_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$, ovvero N è un termine chiuso, ben tipato e non è un valore. Quindi per ipotesi induttiva ho che $\exists N'$ tale che $N \rightarrow N'$ e quindi per (EVAL-SELECT) $\exists M' = N'.l_j$ tale che $M \rightarrow M'$. Pertanto il teorema di Progressione continua a valere.

Lemma di Inversione

- (TYPE-RECORD): Se $\Gamma \vdash M = \{l_i = M_i \mid i=1 \dots n\} : \{l_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$ è derivabile, allora $\forall i \in 1 \dots n. \Gamma \vdash M_i : T_i$ è derivabile.
- (TYPE-SELECT): Se $\Gamma \vdash M.l_j : T_j$ è derivabile, allora $\forall i \in 1 \dots n. \exists T_i. \Gamma \vdash M : \{l_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$ è derivabile e $j \in 1 \dots n$.

La dimostrazione di questi casi è banale perchè derivano dall'applicazione delle regole di tipo.

Teorema di Subject-Reduction (Preservazione) Se $\Gamma \vdash M : T$ e $M \rightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M' : T$.

Anche per questo teorema è necessario aggiungere un nuovo caso base per l'assioma (SELECT) e due nuovi casi induttivi per (EVAL-SELECT) e (EVAL-RECORD).

(SELECT): $M \equiv N.l_j$ con $N = \{l_i = v_i^{i=1\dots n} : \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\}$. Per la regola di tipo (TYPE-SELECT) M ha tipo $T \equiv T_j$ per $j \in 1 \dots n$. Oltre a ciò $M' = v_j$ per $j \in 1 \dots n$ e, per la regola (SELECT), v_j è il valore associato all'etichetta l_j di N . Quindi, per il Lemma di Inversione esteso, dato che $\Gamma \vdash N : \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\}$ è derivabile, sono anche derivabili i giudizi $\Gamma \vdash M_i : T_i \forall i \in 1 \dots n$. In particolare, è derivabile il giudizio $\Gamma \vdash v_j : T_j$ e quindi $M' : T_j$, con $T_j \equiv T$.

(EVAL-SELECT): $M \equiv N.l$ ed è derivabile il giudizio $\Gamma \vdash M \equiv N.l : T$. Inoltre, $N \rightarrow N'$ e $M' \equiv N'.l$ con l appartenente all'insieme delle etichette del record. Per il Lemma di Inversione esteso, ho che $\Gamma \vdash N : \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\}$ è derivabile con un albero di derivazione di altezza inferiore. Posso quindi applicare l'ipotesi induttiva per dire che anche $\Gamma \vdash N' : \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\}$ è derivabile, per poi concludere applicando la regola (TYPE-SELECT) a $M' \equiv N'.l$, ottenendo che $\Gamma \vdash N'.l : T$ è derivabile e quindi anche $\Gamma \vdash M' : T$ è derivabile.

(EVAL-RECORD): Essendo $M \equiv \{l_i = v_i^{i=1\dots j-1}, l_j = M_j, l_k = M_k^{k=j+1\dots n}\}$, è derivabile il giudizio $\Gamma \vdash M : T \equiv \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\}$ e $M_j \rightarrow M'_j$. Per il primo caso del Lemma di Inversione esteso, ho che tutti i giudizi $\Gamma \vdash M_i : T_i$ sono derivabili ed in particolare è derivabile $\Gamma \vdash M_j : T_j$. Per ipotesi induttiva sull'altezza dell'albero $M_j \rightarrow M'_j$, ottengo che è derivabile anche il giudizio $\Gamma \vdash M'_j : T_j$. Infine, dato che $M' \equiv \{l_i = v_i^{i=1\dots j-1}, l_j = M'_j, l_k = M_k^{k=j+1\dots n}\}$, posso applicare la regola (TYPE-RECORD) per dire che $\Gamma \vdash M' : \{l_i : T_i^{i=1\dots n}\} \equiv T$ è derivabile e quindi anche $\Gamma \vdash M' : T$ è derivabile.

Teorema di Safety Se $\emptyset \vdash M : T$ e $M \rightarrow^* M'$ con M' tale che $M' \not\rightarrow$, allora M' è un valore.

La dimostrazione è una diretta conseguenza dei due teoremi precedenti: per il teorema di Preservazione anche $\emptyset \vdash M' : T$ è derivabile e, per il teorema di Progressione M' deve essere un valore, perché altrimenti esisterebbe un M'' al quale può ridursi.

6 Estensioni del linguaggio (note 7)

Esercizio 5.1

Si ridimostrì il teorema di safety per il linguaggio contenente interi, booleani, funzioni, records e tipi varianti. **DA FARE**

7 Eccezioni (note 8)

Esercizio 6.1

Si dia la semantica operativa dei termini indicati sopra, osservando come il sollevamento delle eccezioni comporti un salto non locale del flusso di controllo. Sia $M = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x)$

- $\text{try } (M \ 3) \text{ catch fn } y.y + y$
- $\text{try } (\text{fn } y.y - 2 \ (M \ 5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)$
- $\text{try } (\text{fn } y.y - 2 \ (M \ \text{throw } 2)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)$
- $\text{try } (\text{fn } y.y - 2 \ (\text{try } (M \ 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)$
- $\text{try } ((\text{fn } x.x \text{ throw } 1) \ (\text{try } (M \ 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)$

Svolgimento

a) $\text{try } (M \ 3) \text{ catch fn } y.y + y$

passo 1

$$\text{(TRY)} \frac{\text{(BETA)} \quad \overline{M \ 3 = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x) \ 3 \rightarrow \text{if } \text{pari}(3) \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3}}{\text{try } (M \ 3) \text{ catch fn } y.y + y \rightarrow \text{try } (\text{if } \text{pari}(3) \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y}$$

passo 2

$$\text{(TRY)} \frac{\text{(IF)} \quad \frac{\text{(BETA)} \quad \overline{\text{pari}(3) \rightarrow \text{false}}}{\text{if } \text{pari}(3) \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3 \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3}}{\text{try } (\text{if } \text{pari}(3) \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y \rightarrow \text{try } (\text{if } \text{false} \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y}$$

passo 3

$$\text{(TRY)} \frac{\text{(IF-FALSE)} \quad \overline{\text{if } \text{false} \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3 \rightarrow \text{throw } 3}}{\text{try } (\text{if } \text{false} \text{ then } 3/2 \text{ else throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y \rightarrow \text{try } (\text{throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y}$$

passo 4

$$\frac{\text{(TRY HANDLE)}}{\text{try } (\text{throw } 3) \text{ catch fn } y.y + y \rightarrow \text{fn } y.y + y \ 3}$$

passo 5

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{fn } y.y + y \ 3 \rightarrow 3 + 3}$$

passo 6

$$\frac{(\text{SUM})}{3 + 3 \rightarrow 6}$$

b) try (fn y.y - 2 (M 5)) catch fn z.print(z)

passo 1

$$\begin{array}{c} (\text{BETA}) \\ \hline (\text{APP } 2) \frac{M \ 5 = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x) \ 5 \rightarrow \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}{\text{fn } y.y - 2 (M \ 5) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (M\{x=5\})} \\ (\text{TRY}) \frac{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (M \ 5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (M\{x=5\})) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)} \end{array}$$

passo 2

$$\begin{array}{c} (\text{BETA}) \\ \hline (\text{IF}) \frac{\text{pari}(5) \rightarrow \text{false}}{(\text{APP } 2) \frac{(M\{x=5\}) = \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5 \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}{\text{fn } y.y - 2 (M\{x=5\}) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (M'\{x=5\})}} \\ (\text{TRY}) \frac{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (M\{x=5\})) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (M'\{x=5\})) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)} \end{array}$$

passo 3

$$\begin{array}{c} (\text{IF-FALSE}) \\ \hline (\text{APP } 2) \frac{(M'\{x=5\}) = \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5 \rightarrow \text{throw } 5}{\text{fn } y.y - 2 (M'\{x=5\}) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (\text{throw } 5)} \\ (\text{TRY}) \frac{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (M'\{x=5\})) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{throw } 5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)} \end{array}$$

passo 4

$$\begin{array}{c} (\text{RAISE APP } 2) \\ \hline (\text{TRY}) \frac{\text{fn } y.y - 2 (\text{throw } 5) \rightarrow (\text{throw } 5)}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{throw } 5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)} \end{array}$$

passo 5

$$\frac{(\text{TRY HANDLE})}{\text{try (throw 5) catch fn z.print(z) } \rightarrow \text{fn z.print(z) 5}}$$

passo 6

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{fn z.print(z) 5 } \rightarrow \text{print(5)}}$$

passo 7

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{print(5) } \rightarrow \text{"stampa 5"}}$$

c) try (fn y.y - 2 (M throw 2)) catch fn z.print(z)**passo 1**

$$\begin{array}{c} \text{(TRY)} \frac{\frac{(\text{APP 2}) \frac{(\text{RAISE APP 2})}{\text{M throw 2} = \text{fn x.(if pari(x) then x/2 else throw x)} \text{ throw 2 } \rightarrow \text{throw 2}}{\text{fn y.y - 2 (M throw 2) } \rightarrow \text{fn y.y - 2 (throw 2)}}}{\text{try (fn y.y - 2 (M throw 2)) catch fn z.print(z) } \rightarrow \text{try (fn y.y - 2 (throw 2)) catch fn z.print(z)}} \end{array}$$

passo 2

$$\text{(TRY)} \frac{\frac{(\text{RAISE APP 2})}{\text{fn y.y - 2 (throw 2) } \rightarrow \text{throw 2}}}{\text{try (fn y.y - 2 (throw 2)) catch fn z.print(z) } \rightarrow \text{try (throw 2) catch fn z.print(z)}}$$

passo 3

$$\frac{(\text{TRY HANDLE})}{\text{try (throw 2) catch fn z.print(z) } \rightarrow \text{fn z.print(z) 2}}$$

passo 4

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{fn z.print(z) 2 } \rightarrow \text{print(2)}}$$

passo 5

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{print(2) } \rightarrow \text{"stampa 2"}}$$

d) `try (fn y.y - 2 (try (M 5) catch fn z.z+z)) catch fn z.print(z)`

passo 1

$$\begin{array}{c}
 \text{(BETA)} \\
 \text{(TRY)} \frac{M\ 5 = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x) \ 5 \rightarrow \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}{\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z} \\
 \text{(APP 2)} \frac{(\text{TRY}) \frac{M\ 5 = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x) \ 5 \rightarrow \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}{\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z))} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{APP 2}) \frac{(\text{TRY}) \frac{M\ 5 = \text{fn } x.(\text{if } \text{pari}(x) \text{ then } x/2 \text{ else throw } x) \ 5 \rightarrow \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}{\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z))}}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\ 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 2

$$\begin{array}{c}
 \text{(BETA)} \\
 \text{(IF)} \frac{\text{pari}(5) \rightarrow \text{false}}{M\{x=5\} = \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{IF}) \frac{\text{pari}(5) \rightarrow \text{false}}{M\{x=5\} = \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}}{\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z} \\
 \text{(APP 2)} \frac{(\text{TRY}) \frac{(\text{IF}) \frac{\text{pari}(5) \rightarrow \text{false}}{M\{x=5\} = \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}}{\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z))} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{APP 2}) \frac{(\text{TRY}) \frac{(\text{IF}) \frac{\text{pari}(5) \rightarrow \text{false}}{M\{x=5\} = \text{if } \text{pari}(5) \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } 5}}{\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z))}}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 3

$$\begin{array}{c}
 \text{(IF-FALSE)} \\
 \text{(TRY)} \frac{M'\{x=5\} = \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{throw } 5}{\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z} \\
 \text{(APP 2)} \frac{(\text{TRY}) \frac{M'\{x=5\} = \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{throw } 5}{\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\})) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z))} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{APP 2}) \frac{(\text{TRY}) \frac{M'\{x=5\} = \text{if } \text{false} \text{ then } 5/2 \text{ else throw } x \rightarrow \text{throw } 5}{\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow \text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z}}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\})) \rightarrow (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z))}}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (M'\{x=5\}) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 4

$$\begin{array}{c}
 \text{(TRY HANDLE)} \\
 \text{(APP 2)} \frac{\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow 5+5}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (5+5)} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{APP 2}) \frac{\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z \rightarrow 5+5}{(\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (5+5)}}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (\text{try } (\text{throw } 5) \text{ catch fn } z.z+z)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (5+5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 5

$$\begin{array}{c}
 \text{(SUM)} \\
 \text{(APP 2)} \frac{5+5 \rightarrow 10}{\text{fn } y.y - 2 (5+5) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (10)} \\
 \text{(TRY)} \frac{(\text{APP 2}) \frac{5+5 \rightarrow 10}{\text{fn } y.y - 2 (5+5) \rightarrow \text{fn } y.y - 2 (10)}}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (5+5)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (\text{fn } y.y - 2 (10)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 6

$$\begin{array}{c}
 \text{(BETA)} \\
 \text{(TRY)} \frac{\text{fn } y.y - 2 (10) \rightarrow 10-2}{\text{try } (\text{fn } y.y - 2 (10)) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (10-2) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 7

$$\begin{array}{c}
 \text{(MINUS)} \\
 \text{(TRY)} \frac{10-2 \rightarrow 8}{\text{try } (10-2) \text{ catch fn } z.\text{print}(z) \rightarrow \text{try } (8) \text{ catch fn } z.\text{print}(z)}
 \end{array}$$

passo 8

$$\frac{(\text{TRY VAL})}{\text{try } (8) \text{ catch fn z.print(z)} \rightarrow 8}$$

e) try ((fn x.x throw 1) (try (M 5) catch fn z.z+z)) catch fn z.print(z)

passo 1

$$\begin{array}{c} \text{(TRY)} \frac{\text{(APP 1)} \frac{\text{(RAISE APP 2)} \frac{\text{fn x.x throw 1} \rightarrow \text{throw 1}}{(\text{fn x.x throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z}) \rightarrow (\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})}}{(\text{fn x.x throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z}) \rightarrow \text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)}}}{\text{try } ((\text{fn x.x throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)} \rightarrow \text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)}} \end{array}$$

passo 2

$$\text{(TRY)} \frac{\text{(RAISE APP 1)} \frac{(\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z}) \rightarrow \text{throw 1}}{\text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)} \rightarrow \text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)}}}{\text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)} \rightarrow \text{try } ((\text{throw 1}) (\text{try (M 5) catch fn z.z+z})) \text{ catch fn z.print(z)}}$$

passo 3

$$\frac{(\text{TRY HANDLE})}{\text{try } (\text{throw 1}) \text{ catch fn z.print(z)} \rightarrow \text{fn z.print(z)} 1}$$

passo 4

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{fn z.print(z)} 1 \rightarrow \text{print(1)}}$$

passo 5

$$\frac{(\text{BETA})}{\text{print(1)} \rightarrow \text{"stampa 1"}}$$

Esercizio 6.2

Si definisca la semantica operativa per il linguaggio esteso con i costrutti visti in precedenza: unit, records e varianti.

Svolgimento

Unit: Non si aggiungono regole per gestire questo tipo.

Record:

$$\frac{(\text{RAISE PROJECTION 1})}{\text{throw } v.i \rightarrow \text{throw } v}$$

Varianti:

$$\frac{(\text{RAISE MATCH})}{< l_j = v_j > \text{ match } \{ \text{throw } v \} \rightarrow \text{throw } v}$$

$$\frac{(\text{RAISE RED MATCH})}{\text{throw } v \text{ match } \{ \text{case } l_i = x_i \Rightarrow M_i^{i \in 1..n} \} \rightarrow \text{throw } v}$$

DA FINIRE?

Esercizio 6.3

teorema di safety **DA FARE?** Non lo so, Giacomo mi ha detto che non gli sembra

8 Subtyping (note 9)

Esercizio 7.1

Scrivere le derivazioni dei giudizi:

- $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{\}\}$
- $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\}$
- $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}\}$

Svolgimento

A): $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{\}\}$

$$\text{(SUB-DEPTH)} \frac{\text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\} <: l:\{a:\text{Nat}\}} \quad \text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash l':\{m:\text{Nat}\} <: l':\{\}}}{\emptyset \vdash \{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{\}}}$$

B): $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\}$

$$\text{(SUB-DEPTH)} \frac{\text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\} <: l:\{a:\text{Nat}\}} \quad \text{(REFLEX)} \frac{}{\emptyset \vdash l':\{m:\text{Nat}\} <: l':\{m:\text{Nat}\}}}{\emptyset \vdash \{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\}}$$

C): $\{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}\}$

$$\text{(SUB-DEPTH)} \frac{\text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\} <: l:\{a:\text{Nat}\}} \quad \text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash l':\{m:\text{Nat}\} <: l':\{\}} \quad \text{(SUB-WIDTH)} \frac{}{\emptyset \vdash \{l:\{a:\text{Nat}\}, l':\{\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}\}}{\text{(TRANS)} \frac{}{\emptyset \vdash \{l:\{a:\text{Nat}, b:\text{Nat}\}, l':\{m:\text{Nat}\}\} <: \{l:\{a:\text{Nat}\}\}}}$$

Esercizio 7.2

Si scriva la derivazione di $\{a:\text{Nat}, b:\text{Bool}, c:\text{Nat}\} <: \{b:\text{Bool}\}$

Svolgimento

$$\text{PERMUTE} \frac{\{a:\text{Nat}, b:\text{Bool}, c:\text{Nat}\} \text{ e' permutazione di } \{b:\text{Bool}, a:\text{Nat}, c:\text{Nat}\}}{\text{(TRANS)} \frac{\emptyset \vdash \{a:\text{Nat}, b:\text{Bool}, c:\text{Nat}\} <: \{b:\text{Bool}, a:\text{Nat}, c:\text{Nat}\}}{\emptyset \vdash \{a:\text{Nat}, b:\text{Bool}, c:\text{Nat}\} <: \{b:\text{Bool}\}}} \quad \text{(SUB-WIDTH)} \frac{\emptyset \vdash \{b:\text{Bool}, a:\text{Nat}, c:\text{Nat}\} <: \{b:\text{Bool}\}}{\emptyset \vdash \{a:\text{Nat}, b:\text{Bool}, c:\text{Nat}\} <: \{b:\text{Bool}\}}$$

Esercizio 7.3

Dare la derivazione del giudizio $\emptyset \vdash (\text{fn } r:\{l:\text{Nat}\}.r.l + 2) \{l=0, l'=1\}:\text{Nat}$. Esiste una sola derivazione di questo giudizio?

Svolgimento

$$\begin{array}{c} \text{(VAR)} \frac{r.l:\text{Nat} \in \Gamma}{\emptyset, r:\{l:\text{Nat}\} \vdash r.l:\text{Nat}} \quad \text{(NAT)} \frac{}{\emptyset, r:\{l:\text{Nat}\} \vdash 2:\text{Nat}} \\ \text{(SUM)} \frac{}{\emptyset, r:\{l:\text{Nat}\} \vdash (r.l + 2):\text{Nat}} \quad \text{(TYPE-RECORD)} \frac{}{\emptyset \vdash \{l=0, l'=1\}:\{l:\text{Nat}, l':\text{Nat}\}} \quad \text{(SUBSUMPTION)} \frac{}{\emptyset \vdash \{l=0, l'=1\}:\{l:\text{Nat}\}} \\ \text{(FUN)} \frac{}{\emptyset \vdash (\text{fn } r:\{l:\text{Nat}\}.r.l + 2):\{l:\text{Nat}\} \rightarrow \text{Nat}} \quad \text{(SUBWIDTH)} \frac{}{\{l:\text{Nat}, l':\text{Nat}\} <: \{l:\text{Nat}\}} \\ \text{(APP)} \frac{}{\emptyset \vdash (\text{fn } r:\{l:\text{Nat}\}.r.l + 2) \{l=0, l'=1\}:\text{Nat}} \end{array}$$

Esercizio 7.4

Quale potrebbe essere la relazione di sottotipo dei variant types?

Svolgimento

$$\text{(SUBTYPE VARIANT)} \frac{\Gamma \vdash M : T_j \quad j \in 1..n+k}{\Gamma \vdash \langle l_j = M \rangle : \langle l_i : T_i^{i \in 1..n} \rangle}$$

In questo modo, modificando TYPE VARIANT, si ottiene il subtyping in larghezza (WIDTH). Per ottenere il subtyping in profondita' (DEPTH) basta usare SUBSUMPTION.

Esercizio 7.5

Quali proprieta' del sistema di tipi si perderebbero se avessimo definito la relazione di subtyping con una regola di troppo? E se l'avessimo definita con una regola in meno? E se l'avessimo definita con una regola in meno? Se avessimo definito le regole in modo tale che $\{l : \text{Nat}\} <: \{l : \text{Nat}, l' : \text{Nat}\}$, quale proprieta' del sistema non sarebbe piu' vera? Identificarla e darne un controesempio. **DA FARE**

Esercizio 7.12

Ridimostrare il teorema di progressione, preservazione, il substitution lemma e il teorema di safety per il linguaggio con i record e il subtyping.

Svolgimento

(Lemmi di inversione)

- Se $\Gamma \vdash x : T$ allora $\exists S$ tale che $x : S \in \Gamma$ e $S <: T$.
- Se $\Gamma \vdash fnx : S1M : T$ è derivabile, allora $\exists T_1, T_2$ tali che $T = T_1 \rightarrow T_2$, con $T_1 <: S_1$ e $\Gamma, x : S_1 \vdash M : T_2$.
- Se $\Gamma \vdash \{k_r = M_r\}^{r \in 1 \dots m} : T$ è derivabile allora $\exists T_i, i = 1, \dots, n$ tali che $T = \{\ell_i : T_i\}^{i \in 1 \dots n}$, con $\{\ell_i\}^{i \in 1 \dots n} \subseteq \{k_r\}^{r \in 1 \dots m}$ e $\Gamma \vdash M_r : T_i$ per ogni etichetta comune $k_r = \ell_i$.

Inoltre sempre a lezione è stato definito il lemma di inversione della relazione di subtyping: (Lemma di inversione della relazione di subtyping)

1. Se $S <: T_1 \rightarrow T_2$ allora S è della forma $S_1 \rightarrow S_2$ con $T_1 <: S_1$ e $S_2 <: T_2$.
2. Se $S <: \{\ell_i : T_i\}^{i \in 1 \dots n}$ allora S è della forma $\{k_j : S_j\}^{j \in 1 \dots m}$ tale che $\{\ell_i\}^{i \in 1 \dots n} \subseteq \{k_j\}^{j \in 1 \dots m}$ e $S_j <: T_i$ per ogni etichetta comune $\ell_i = k_j$

(Lemma delle Forme Canoniche)

- Se v è un valore di tipo $T_1 \rightarrow T_2$ allora v è della forma $fnx : S1M$.
- Se v è un valore di tipo $\{\ell_i : T_i\}^{i \in 1 \dots n}$, allora v è della forma $\{k_j = v_j\}^{j \in 1 \dots m}$ tale che $\{\ell_i\}^{i \in 1 \dots n} \subseteq \{k_j\}^{j \in 1 \dots m}$

Dimostrazione del substitution Lemma Per provare il substitution Lemma devo estendere la definizione induttiva di $fv(M)$ e la definizione di sostituzione per i tipi record e i tipi select. (Variabili libere) Vengono riportati solo i casi che estendono la definizione fornita in Note 2:

- $fv(\{\ell_i = M_i\}^{i \in 1 \dots n}) = \bigcup_{i=1 \dots n} fv(M_i)$
- $fv(M.l) = fv(M)$

(Sostituzione) Vengono riportati solo i casi che estendono la definizione fornita in Note 2:

- $\{\ell_i = M_i\}^{i \in 1 \dots n} \{x := N\} = \{\ell_i = M_i \{x := N\}\}^{i \in 1 \dots n}$
- $M.l \{x := N\} = M \{x := N\}.l$

(Substitution Lemma) Se $\Gamma, x : S \vdash M : T$ e $\Gamma \vdash N : S$, allora $\Gamma \vdash M\{x := N\} : T$.

Proof. Procedo per induzione sulla lunghezza della derivazione del giudizio $\Gamma, x : S \vdash M : T$. La dimostrazione procede distinguendo l'ultima regola di tipo che è stata applicata per derivare tale giudizio:

- **Casi Base** ($h = 1$): Quelli in cui è stato applicato un assioma per le regole dei tipi.
 - $\boxed{\text{(TRUE)}}$. $\Gamma, x : S \vdash \text{true} : T \equiv \text{Bool}$. La tesi $\Gamma \vdash \text{true}\{x := N\} : \text{Bool}$, visto che $\text{true}\{x := N\} \equiv \text{true}$, si ottiene che la tesi è: $\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}$ che è vera per l'assioma (TRUE).
 - $\boxed{\text{(FALSE)}}$: analogo al caso (TRUE).
 - $\boxed{\text{(TRUE)}}$: analogo al caso (TRUE).
 - $\boxed{\text{(VAR)}}$. Questo caso differisce leggermente da quello visto a lezione, in quanto il lemma di inversione per le variabili è stato modificato e asserisce che se $\Gamma \vdash x : T$, allora $x : S \in \Gamma$ con $S <: T$. Tuttavia, se il giudizio con il tipo preciso non è nel contesto (ovvero $S \neq T$), l'albero non può essere composto dal solo assioma (VAR) ma deve essere presente anche l'applicazione di (SUBSUMPTION). Quindi, per ricondurre questo caso a quello mostrato a lezione dimostro un lemma:

Se il giudizio $\Gamma \vdash z : T$ è stato ottenuto dall'assioma (VAR), allora $z : T \in \Gamma$. (Vale il lemma di inversione del capitolo 45)

Proof. In generale dall'assunzione $\Gamma \vdash z : T$ segue per il lemma di inversione (di note 9) che $\exists S$ tale che $z : S \in \Gamma$ e $S <: T$. Se $S <: T$ possono darsi solo due casi:

- * $\boxed{S = T}$ la regola (VAR) può essere applicata perchè il giudizio $z : T \in \Gamma$
- * $\boxed{S \neq T}$ la regola (VAR) non può essere applicata perchè il giudizio $z : T \notin \Gamma$.

□

Quindi per questo caso vale il lemma di inversione (più forte) del capitolo 45. E quindi la dimostrazione fornita a lezione risulta essere ancora valida in questa estensione del linguaggio.

Ovvero se $\Gamma, x : S \vdash y : T$ viene derivato con la regola (VAR) possono verificarsi due casi:

1. $y = x$: $\Gamma, x : S \vdash x : T$. Per il lemma di inversione (delle note 45), il giudizio deriva da un'asserzione presente nel contesto e quindi per forza $S = T$. Si ha quindi che considerando la sostituzione $\Gamma \vdash x\{x := N\} : T$. Ma N ha tipo S e $S = T$, quindi la tesi continua a valere.

2. $y \neq x$: in questo caso la sostituzione $\Gamma \vdash y\{x := N\} : T$ non altera il termine, in più per l'assioma (VAR) $y : T \in \Gamma, x : S$ e quindi è derivabile il giudizio $\Gamma \vdash y : T$.

Ipotesi induttiva: Da $\Gamma, x : S \vdash_k M : T$ e $\Gamma \vdash N : S$ implica che $\Gamma \vdash M\{x := N\} : T$.

- **Passo Induttivo:** I casi (SUM), (MINUS), (FUN) sono analoghi a quelli visti a lezione. Visto che questo teorema vuole dimostrare giudizi del tipo $\Delta \vdash M : T$ le regole di sottotipo non potranno essere mai l'ultima regola applicata (poichè dimostrano giudizi solo del tipo $\Delta \vdash M <: T$) e quindi non devono essere considerate. Queste hanno infatti un ruolo indiretto nel caso (SUBSUMPTION).

- * $\boxed{\text{(SUM)}}$: Invariato rispetto a quanto visto a lezione.
- * $\boxed{\text{(MINUS)}}$: Invariato rispetto a quanto visto a lezione.
- * $\boxed{\text{(FUN)}}$: Invariato rispetto a quanto visto a lezione.
- * $\boxed{\text{(APP)}}$: Invariato rispetto a quanto visto a lezione
- * $\boxed{\text{(TYPE-RECORD)}}$ In questo caso $M \equiv \{\ell_i = M_i \mid i \in 1 \dots n\}$. Assumo le due ipotesi per questo termine quindi

1. $\Gamma, x : S \vdash_{k+1} \{\ell_i = M_i \mid i \in 1 \dots n\} : \{\ell_i : T_i\}$
2. $\Gamma \vdash N : S$

Siccome l'ultima regola applicata è (TYPE-RECORD) le sue premesse (al passo precedente) devono essere verificate quindi $\forall i \in 1 \dots n \Gamma, x : S \vdash_{k_i} M_i : T_i$. Siccome le derivazioni dei giudizi per i sottotermini sono strettamente inferiori (di almeno un'unità) rispetto a quella di partenza e vale $\Gamma \vdash N : S$, ottengo per ipotesi induttiva (applicata agli n M_i) che $\forall i \in 1 \dots n \Gamma \vdash M_i\{x := N\} : T_i$. Applicando la regola (TYPE-RECORD) ottengo $\Gamma \vdash \{\ell_i : M_i\{x := N\} \mid i \in 1 \dots n\} : \{\ell_i : T_i \mid i \in 1 \dots n\}$ che è proprio la tesi da dimostrare visto che per definizione:

$$\{\ell_i : M_i \mid i \in 1 \dots n\}\{x := N\} = \{\ell_i : M_i\{x := N\} \mid i \in 1 \dots n\}$$

- * $\boxed{\text{(TYPE-SELECT)}}$: $M \equiv M.\ell_j$ Assumo che valgano le due ipotesi ovvero:
 1. $\Gamma, x : S \vdash_{k+1} M.\ell_j : T$, lo rinomino T_j per comodità.
 2. $\Gamma \vdash N : S$

Ora siccome vale la prima ipotesi e l'ultima regola applicata è (TYPE-SELECT) le premesse devono essere soddisfatte quindi $\Gamma, x : S \vdash M : \{\ell_i : T_i \mid i \in 1 \dots n\}$ con $j \in 1 \dots n$. Siccome questo giudizio ha una derivazione di lunghezza strettamente inferiore rispetto a quello di

partenza e vale $\Gamma \vdash N : S$ posso applicare l'ipotesi induttiva e ottenere che $\Gamma \vdash M\{x := N\} : \{\ell_i : T_i \mid i \in 1..n\}$ quindi riapplicando (TYPE-SELECT) ottengo:

$$\Gamma \vdash M\{x := N\}.\ell_j : T_j$$

che è proprio la definizione di $M.\ell_j\{x := N\}$

* (SUBSUMPTION): Assumo le due ipotesi per questa derivazione ovvero:

1. $\Gamma, x : S \vdash_{k+1} M : T$
2. $\Gamma \vdash N : S$

Visto che l'ultima regola applicata è stata (SUBSUMPTION) posso dire che valgono le sue premesse:

$$(\text{SUBSUMPTION}) \Gamma, x : S \vdash_k M : UU <: T \Gamma, x : S \vdash_{k+1} M : T$$

Ora siccome vale $\Gamma, x : S \vdash_k M : U$ e $\Gamma \vdash N : S$ posso applicare l'ipotesi induttiva e ottenere che $\Gamma \vdash M\{x := N\} : U$. E visto che U è un sottotipo di T l'asserto è dimostrato per la regola (SUBSUMPTION).

$$(\text{SUBSUMPTION}) \Gamma \vdash M\{x := N\} : UU <: T \Gamma \vdash M\{x := N\} : T$$

□

Dimostrazione del teorema di preservazione (per induzione su $M \rightarrow M'$) Se $\Gamma \vdash M : T$ e $M \rightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M' : T$

Procedo per induzione sull'altezza della derivazione di $M \rightarrow M'$. Inizio dai casi base, che sono quelli in cui $M \rightarrow M'$ viene da un assioma.

- Caso Base I casi base per le regole di derivazione (SUM), (MINUS), (IF-TRUE), (IF-FALSE) rimangono invariati rispetto a quelli mostrati a lezione. Il caso (BETA) è leggermente diverso rispetto a quello mostrato a lezione per via del lemma di inversione modificato, e infine va aggiunto il nuovo assioma (SELECT).

- (BETA) $M \equiv (fnx : S1M_1 \ v) : T \rightarrow M_1\{x := v\}$ Dall'ipotesi $\Gamma \vdash fnx : S1M_1 \ v : T$ segue per il lemma di inversione che esiste T_A tale che $\Gamma \vdash v : T_A$ e $\Gamma \vdash fnx : S1M_1 : T_A \rightarrow T$.

Da $\Gamma \vdash fnx : S1M_1 : T_A \rightarrow T$ segue per il lemma di inversione di note 9:

1. $T_A <: S_1$
2. $\Gamma, x : S_1 \vdash M_1 : T$

Visto che

$$(\text{SUBSUMPTION}) \Gamma \vdash v : T_A T_A <: S_1 \Gamma \vdash v : S_1$$

ho ricavato che $\Gamma \vdash v : S_1$. Considerato che vale 2 posso applicare il lemma di sostituzione e ottenere la tesi $\Gamma \vdash M_1\{x := v\} : T$.

- (SELECT) $\{\ell_i = v_i^{i \in 1 \dots n}\}.\ell_j \longrightarrow v_j$, grazie all'assioma (SELECT) (con $j \in 1 \dots n$). Per ipotesi $\Gamma \vdash \{\ell_i = v_i^{i \in 1 \dots n}\}.\ell_j$ ha tipo T . Per comodità e in linea con la regola (TYPE-SELECT) rinomino T in T_j . Quindi per il lemma di inversione della regola (TYPE-SELECT) ottengo che: $\Gamma \vdash M : \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$ con $j \in 1 \dots n$. Ora, siccome per la regola (SELECT) v_j è stato ottenuto dalla selezione del valore della label ℓ_j che ha tipo T_j , deduco che v_j ha il tipo T_j cercato. Visto che T_j non è altro che un alias per T la tesi è dimostrata.

- Passo Induttivo Procedo ora con i casi induttivi, quelli cioè che in cui $M \longrightarrow M'$ è stato derivato con una derivazione di altezza $k + 1$. Distinguendo i vari casi a seconda dell'ultima regola usata: i casi (SUM-LEFT), (SUM-RIGHT), (MINUS-LEFT), (MINUS-RIGHT), (IF) sono invariati visto che vale il lemma di inversione di note 2.

- (EVAL-SELECT) $M \equiv N.\ell_j \longrightarrow N'.\ell_j \equiv M'$. Assumo le due ipotesi per questo termine:
 1. $N.\ell_j \longrightarrow N'.\ell_j$: Visto che ho assunto che $N.\ell_j \longrightarrow N'.\ell_j$ è stato derivato con un albero di derivazione alto $k + 1$ e l'ultima regola applicata è stata (EVAL-SELECT) la premessa della regola $N \longrightarrow N'$ deve essere verificata. Graficamente:

$$(\text{EVAL-SELECT}) N \longrightarrow N' N.\ell_j \longrightarrow N'.\ell_j$$

2. $\Gamma \vdash N.\ell_j : T$ rinomino T in T_j . Quindi per il lemma di inversione della regola (TYPE-SELECT) $\Gamma \vdash N : \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$ con $j \in 1 \dots n$.

Quindi applicando l'ipotesi induttiva sulla derivazione $N \longrightarrow N'$ (che è alta k), si ottiene che:

$$\Gamma \vdash N' : \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$$

Applicando la regola (TYPE-SELECT) ottengo $N'.\ell_j : T_j$ che è la tesi visto che T_j è un altro nome per T .

- (EVAL-RECORD) Assumo come di consueto le due ipotesi:
 - 1.

$$(\text{EVAL-RECORD}) M_x \longrightarrow M'_x \{\ell_i : v_i^{i \in 1 \dots x-1}, \ell_x : M_x, \ell_j : M_j^{j \in x+1 \dots m}\} \longrightarrow \{\ell_i : v_i^{i \in 1 \dots x-1}, \ell_x :$$

Con $M_x \rightarrow M'_x$ che viene derivato con un albero di derivazione di altezza inferiore rispetto a quello per $M \rightarrow M'$. Si può quindi applicare l'ipotesi induttiva ad M'_x , ottenendo che è derivabile il giudizio $\Gamma \vdash M'_x : T_x$.

2. $\{\ell_i : v_i^{i \in 1 \dots x-1}, \ell_x : M_x, \ell_j : M_j^{j \in x+1 \dots m}\} : T$ è derivabile. Quindi per il lemma di inversione $\exists T_i, i = 1 \dots n$ tale che $T = \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$ con $\{\ell_i^{i \in 1 \dots n}\} \subseteq \{k_r^{r \in 1 \dots m}\}$ e per ogni etichetta in comune $k_r = \ell_i$. $\Gamma \vdash M_r : T_i$. Sostanzialmente stiamo dicendo che M può essere un'istanza di un sottotipo S di T e non necessariamente il tipo T .

Dal momento che $M' = \{\ell_i : v_i^{i \in 1 \dots x-1}, \ell_x : M'_x, \ell_j : M_j^{j \in x+1 \dots m}\}$ posso applicare la regola di tipo (TYPE-RECORD) per derivare il giudizio $\Gamma \vdash M' : T$ con $T = \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$. Sono infatti soddisfatte le premesse della regola perchè i termini M_i associati alle ℓ_i con $i \in 1 \dots n, i \neq x$ non sono cambiati e quindi anche il loro tipo non è cambiato, mentre per ipotesi induttiva $\Gamma \vdash M'_j : T_j$. La tesi è quindi provata.

Dimostrazione del teorema di preservazione (per induzione su $\Gamma \vdash M : T$) Se $\Gamma \vdash M : T$ e $M \longrightarrow M'$, allora $\Gamma \vdash M' : T$

Proof. Procedo in analogia all'esercizio 3.12, che dimostra $\Gamma \vdash M : T$ per induzione sull'altezza dell'albero della prova.

- **Casi Base** ($h = 1$): Casi in cui è stato applicato uno degli assiomi. Si veda l'esercizio 3.12.
- **Passo Induttivo** Ora siccome l'ipotesi è verificata per i casi base dimostro che vale anche per i casi induttivi a seconda dell'ultima regola usata. Rispetto all'esercizio 3.12 sono state aggiunte solo 3 regole di tipo:

– (TYPE-RECORD) assumendo le due ipotesi, ovvero:

1. $\Gamma \vdash M : T$ visto che l'ultima regola applicata è (TYPE-RECORD), allora $M \equiv \{\ell_i = M_i^{i \in 1 \dots n}\}$ e $T = \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$. Dal momento che la sua premessa deve essere verificata si ha quindi $\forall i \in 1 \dots n. \Gamma \vdash M_i : T_i$.
2. $M \longrightarrow M'$

Per il lemma delle forme canoniche dalla premessa 1 segue che M potrebbe essere un valore, ma in questo caso la seconda ipotesi non verrebbe verificata.

Visto che M non è un valore, l'unica regola che fa ridurre un M di tipo $\{\ell_i : M_i^{i \in 1 \dots n}\}$ è:

$$(\text{EVAL-RECORD}) M_j \longrightarrow M'_j \{\ell_i = v_i^{i \in 1 \dots j-1}, \ell_j = M_j, \ell_p = M_p^{p \in j+1 \dots n}\} \longrightarrow \{\ell_i = v_i^{i \in 1 \dots j-1}, \ell_j = M'_j, \ell_p\}$$

Siccome il giudizio $\Gamma \vdash M_j : T_j$ è più corto di un passo rispetto a $\Gamma \vdash M_j : T_j$ e $M_j \longrightarrow M'_j$, allora per ipotesi induttiva concludo che $\Gamma \vdash M'_j : T_j$. Ora devo dimostrare che $\{\ell_i = v_i^{i \in 1 \dots j-1}, \ell_j = M'_j, \ell_p = M_p^{p \in j+1 \dots n}\}$ ha tipo T . Dal momento che $M' = \{\ell_i : v_i^{i \in 1 \dots j-1}, \ell_j : M'_j, \ell_p : M_p^{p \in j+1 \dots m}\}$ posso applicare la regola di tipo (TYPE-RECORD) per derivare il giudizio $\Gamma \vdash M' : T$ con $T = \{\ell_i : T_i^{i \in 1 \dots n}\}$. Sono infatti soddisfatte le premesse della regola perchè i termini M_i associati

alle ℓ_i con $i \in 1 \dots n$, $i \neq j$ non sono cambiati e quindi anche il loro tipo non è cambiato, mentre per ipotesi induttiva $\Gamma \vdash M'_j : T_j$. La tesi è quindi provata.

– $\boxed{\text{(TYPE-SELECT)}} M = N.\ell_j$

1. $\Gamma \vdash N.\ell_j : T_j$. Visto che l'ultima regola applicata è stata (TYPE-SELECT) le sue premesse devono essere verificate quindi $\Gamma \vdash N : \{\ell_i : T_i \mid i \in 1 \dots n\}$ con $j \in 1 \dots n$.
2. $M \longrightarrow M'$. Per questi tipi possono valere due opzioni:
 - a) $N = \{\ell_i = v_i \mid i \in 1 \dots n\}$ è un valore. Ma questo caso è immediato (non ha bisogno dell'ipotesi induttiva) perchè per l'assioma (SELECT) si conclude che $N.\ell_j \longrightarrow v_j$, per quanto mostrato dall'ipotesi 1, ha tipo T_j .
 - b) N non è un valore valutato e quindi $M' = N'.\ell_j$.

Considero dunque solo il caso in cui N non è un valore.

Visto che la lunghezza della derivazione del giudizio di tipo per N è strettamente inferiore di quella per $N.\ell_j$ e vale $N.\ell_j \longrightarrow N'.\ell_j$ (perchè N non è un valore) vale anche la premessa alla regola (EVAL-SELECT) e quindi $N \longrightarrow N'$. Quindi posso applicare l'ipotesi induttiva e concludere che N' ha lo stesso tipo di N , ovvero $\{\ell_i : T_i \mid i \in 1 \dots n\}$. Applicando la regola (TYPE-SELECT) ed usando $N' : \{\ell_i : T_i \mid i \in 1 \dots n\}$ come premessa ottengo il risultato cercato, ovvero $N'.\ell_j : T_j$.

– $\boxed{\text{(SUBSUMPTION)}} M = \{\ell_i = M_i \mid i \in 1 \dots n\}$ Assumo le due ipotesi:

1. $\Gamma \vdash M : T$
2. $M \longrightarrow M'$

Visto che l'ultima regola applicata è stata (SUBSUMPTION) posso assumere che le sue premesse siano verificate:

$$(\text{SUBSUMPTION}) \Gamma \vdash M : SS <: TT \vdash M : T$$

Visto che il giudizio $\Gamma \vdash M : S$ è più corto di almeno un'unità rispetto a $\Gamma \vdash M : T$ e $M \longrightarrow M'$ allora per ipotesi induttiva concludo che $\Gamma \vdash M' : S$. Quindi ho ottenuto le premesse per poter applicare la regola (SUBSUMPTION) a M' :

$$(\text{SUBSUMPTION}) \Gamma \vdash M' : SS <: T \text{ (vero per quanto mostrato prima)} \Gamma \vdash M' : T$$

$\Gamma \vdash M' : T$ era la tesi da dimostrare, perciò la dimostrazione del teorema di preservazione è conclusa.

□

Dimostrazione del teorema di progressione (Progressione). Sia M un termine chiuso e ben tipato, i.e. $\emptyset \vdash M : T$, allora o M è un valore, oppure esiste un termine M' tale che $M \longrightarrow M'$.

Proof. Procedo per induzione sull'altezza dell'albero di prova che dimostra $\emptyset \vdash M : T$.

- **Casi Base**($h = 1$): I casi base rimangono quelli mostrati a lezione, visto che gli assiomi per i giudizi di tipo non sono stati estesi.

Ipotesi induttiva ($h = k$): Se $\emptyset \vdash_k \bar{M} : T$ allora \bar{M} è un valore oppure $\exists \bar{M}' : \bar{M} \longrightarrow \bar{M}'$

- **Passo induttivo**($h = k + 1$): I casi che rimangono invariati rispetto a lezione vengono omessi. Per via del lemma di inversione delle forme canoniche per il subtyping, la dimostrazione per (TYPE-SELECT) e (TYPE-RECORD) è leggermente differente a quella mostrata nell'esercizio 6.3. Mentre la regola (SUBSUMPTION) è "inedita":
 - (TYPE-RECORD) Se $M = \{\ell_i = M_i\}_{i=1..n}$ e $\emptyset \vdash M : T$, sappiamo che per la regola (TYPE-RECORD) valgono i giudizi di tipo $\emptyset \vdash M_i : T_i \ \forall i = 1 \dots n$ e che gli alberi di derivazione relativi ai vari giudizi sono di altezza inferiore all'albero del giudizio principale. è quindi possibile applicare l'ipotesi induttiva sui sotto-termini M_i , i quali o sono un valore v_i di tipo T_i oppure possono avanzare in un termine M'_i :
 - * Se sono tutti dei valori si ha $M = \{\ell_i = v_i\}_{i=1..n}$, ovvero M è un valore record di tipo $\{\ell_i : T_i\}_{i=1..n}$ e quindi il teorema di Progressione continua a valere banalmente.
 - * Se c'è almeno un M_i che non è un valore, è possibile identificare il termine M_j di indice minimo che non è un valore e per il quale continua a valere il giudizio di tipo $\emptyset \vdash M_j : T_j$. Vale quindi l'ipotesi induttiva, ovvero $\exists M'_j$ tale che $M_j \rightarrow M'_j$. Posso quindi applicare la regola (EVAL-RECORD) per far avanzare il termine M al termine M' , dove al posto di M_j compare M'_j . Anche in questo caso il teorema di Progressione continua a valere.
 - (TYPE-SELECT) Se $M = N.\ell_j$ e $\emptyset \vdash M : T$, sappiamo che per la regola (TYPE-SELECT) vale il giudizio di tipo $\emptyset \vdash N : \{\ell_i : T_i\}_{i=1..n}$ (con un albero di derivazione più piccolo) e che $j \in \{1 \dots n\}$. Si ha quindi che N o è un buon valore finale oppure $\exists N' : N \longrightarrow N'$.
 - * Se N è un valore v per il lemma delle forme canoniche di note 9 ottengo che v è della forma $\{k_q = v_q\}_{q \in 1..m}$ tale che $\{\ell_i\}_{i \in 1..n} \subseteq \{k_q\}_{q \in 1..m}$. Siccome l'etichetta $\ell_j \in \{k_q\}_{q \in 1..m}$ allora \exists un indice $p \in 1 \dots m : \ell_j = k_p$ e quindi $M = N.\ell_j$ si riscrive grazie alla regola (SELECT) nel valore v_p .
 - * Un record non ancora completamente valutato, ovvero $N = \{\ell_i = v_i\}_{i=1..x-1}, l_x = M_x, l_k = M_k\}_{k=x+1..n}, \exists M'_x | M_x \rightarrow M'_x$ e quindi per (EVAL-RECORD) $N \rightarrow N'$ e pertanto anche $M \rightarrow M' = N'.\ell_j$.

- * Un termine generico di tipo record, ovvero $N = \text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$ oppure $N = A B$. In entrambi i casi vale il giudizio $\emptyset \vdash N : \{\ell_i : T_i \mid i=1 \dots n\}$, cioè N è un termine chiuso, ben tipato e non è un valore. Quindi per ipotesi induttiva ho che $\exists N'$ tale che $N \rightarrow N'$ e quindi per (EVAL-SELECT) $\exists M' = N'.\ell_j$ tale che $M \rightarrow M'$. Pertanto il teorema di Progressione continua a valere.

– (SUBSUMPTION)

$$(\text{SUBSUMPTION}) : \emptyset \vdash_k M : S : S <: T \quad \emptyset \vdash_{k+1} M : T$$

Ora, siccome la derivazione del giudizio $\emptyset \vdash M : S$ è più corta di (almeno) un passo di derivazione rispetto a quella di partenza, posso concludere per ipotesi induttiva che M o è un buon valore finale o che $\exists M' : M \rightarrow M'$. Siccome questo M corrisponde a quello di partenza, la tesi è dimostrata.

□

Teorema di Safety Se $\emptyset \vdash M : T$ e $M \rightarrow^* M'$ con M' tale che $M' \not\rightarrow$, allora M' è un valore.

La dimostrazione è una diretta conseguenza dei due teoremi precedenti: per il teorema di Progressione anche $\emptyset \vdash M' : T$ è derivabile e, per il teorema di Subject-Reduction M' deve essere un valore, perchè altrimenti esisterebbe un M'' al quale può ridursi.

Esercizio 7.16

Trovare due termini M e N tali che $M \rightarrow N$, $\Gamma \vdash M : T$, $\Gamma \vdash N : S$ con $S <:: T$ e $T \not<:: S$, cioè esibire un caso in cui il tipo di un termine decresce durante la computazione. **DA FARE OPZIONALE**

9 Featherweight Java (note 11)

Esercizio 8.1

Si noti che una class table puo' contenere definizioni di classi mutuamente ricorsive. Scrivere un esempio.

DA FARE

Esercizio 8.2

Descrivere la semantica operativa dei seguenti termini:

- `new Pair(new A(), new B()).snd`
- `(Pair)new Pair(new A(), new B())`
- `new Pair(new A(), new B()).setfst(new B())`
- `((Pair) (new Pair(new Pair(new A(), new B()), new A()).fst)).snd`
- `(B) ((A)new C())`

DA FARE

Esercizio 8.3

Scrivere un programma con override di un metodo e descriverne la valutazione, evidenziando il binding dinamico per la chiamata del metodo riscritto.

DA FARE

Esercizio 8.4

Perche' c'e' una regola di tipo sia per l'upcast che per il downcast, mentre c'e' la sola regola di valutazione per upcast, nella semantica operativa? **DA FARE**

Esercizio 8.5

Ha senso aggiungere a FJ la regola di subtyping per i tipi freccia $A \rightarrow B$?

DA FARE**Esercizio 8.12**

Aggiungere a FJ il termine `ClassCastException`: come cambia la semantica operativa? Le regole di tipo? Il teorema di Safety e i teoremi di Preservazione e Progressione? Aggiungere in seguito anche la possibilità di gestire le eccezioni.

DA FARE

10 Imperative Featherweight Java (note 12)

Esercizio 9.2

Scrivere una regola analoga per eliminare i riferimenti non piu' usati. **DA FARE**

Esercizio 9.3

Descrivere il comportamento del seguente programma:

```
class D extends Object {
  Object f;
  D(Object f) { super(); this.f=f;}
  Object m() { return this; }
}

class C extends D {
  C(Object f) { super(f); }
  Object m() {return this;}
}

Object z=new Object();
C x=new C(z);
C y=new D(x);
x.m(); x=y; x.m()
y.f=new Object();
z=null; x.f=z; y.f.m();
```

DA FARE

Esercizio 9.4

Dare una derivazione di tipo per il termine $C\ X=O_1; O_1.f=y; X=O_2$ **DA FARE**