

# Algebralliset Rakenteet I

Kevät 2026

## Harjoitus 1

Palautettava Moodleen viimeistään sunnuntaina 25.01.2026.

Kaikki harjoitustehtävät ovat kurssikirjasta

1. (a) Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus kaavalla  $x * y = x - xy - y$ . Onko laskutoimitus vaihadannainen?  
(b) Määritellään reaaliluvuille laskutoimitus kaavalla  $x * y = x^2 + y^2$ . Onko laskutoimitus liitännäinen?
2. Tarkastellaan kokonaislukujen laskutoimitusta  $x * y = x + 5y$ . Onko laskutoimituksella neutraalialkiota?
3. Jos  $x$  ja  $y$  ovat reaalilukuja, olkoon  $\max(x, y)$  niistä suurin.
  - (a) Osoita että  $(x, y) \mapsto \max(x, y)$  määrittelee laskutoimituksen välillä  $[-5, 5]$ . Onko tämä laskutoimitus liitännäinen? Entä onko sillä neutraalialkiota?
  - (b) Miten tilanne muutuu jos suljetun välin sijaan tarkastellaan avointa välää  $(-5, 5)$ ?
4. Määritellään kokonaislukujen joukossa laskutoimitus  $n * m = n + m + 1$ . Osoita, että  $(\mathbb{Z}, *)$  on ryhmä.
5. Määritellään reaalilukujen joukossa laskutoimitus kaavalla  $x \oplus y = 3xy$ . Onko  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \oplus)$  ryhmä?
6. Olkoon  $G$  ryhmä ja  $g \in G$ . Oletetaan, että on olemassa  $a \in G$  siten että  $ga = e$ , missä siis  $e$  on  $G$ :n neutraalialkio. Osoita, että  $a$  on  $g$ :n käänteisalkio.