République Algérienne Démocratique et Populaire

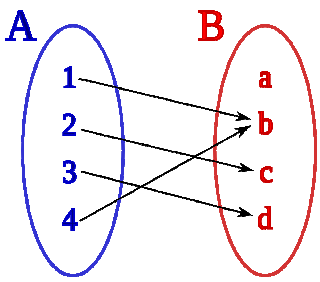
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Ziane Achour de Djelfa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département du Tronc Commun en Sciences et Technologie- Première Année

Support Cours

Résumé de cours, Exercices avec Solutions

en Mathématiques 1

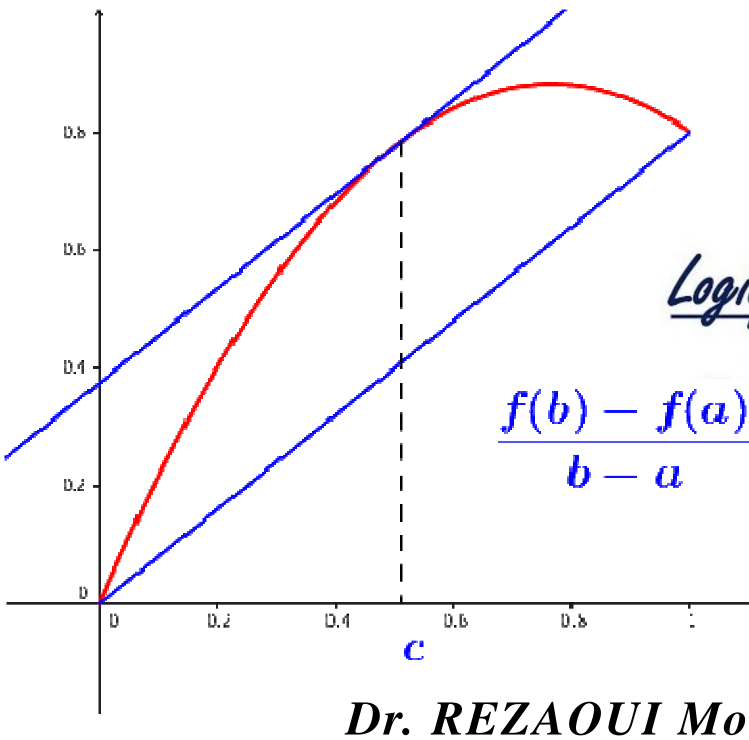
- 1èr Semestre-



Logique

Le raisonnement par l'absurde

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$



Dr. REZAOUI Mohamed Mounir
Mr. ELBAR Mohamed

2021

Sommaire

Introduction

Cet ouvrage est dédié aux étudiants premières années pour les disciplines:

- Sciences et technologies.
- Sciences de la Matières
- Math et informatique.

Qui va permettre aux étudiants de construire une base très forte en mathématiques en qualité d'observation, d'analyse et réflexion de calcul pour les réparés aux futures spécialités d'ingénieur, qui va couvre l'ensemble des unités d'enseignement du programme pédagogique national de premier semestre

Chapitre I:

Théorie des Ensembles

Rappel de Cours

Définitions :

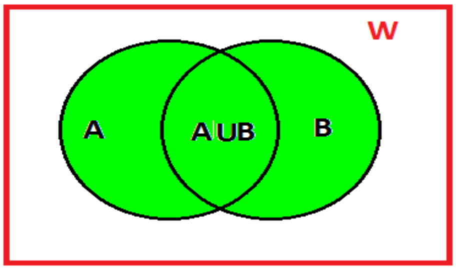
- Les objets mathématiques sont nommés **éléments**. Un **ensemble** est une *collection* ou un *groupement* d'éléments.
- L'assertion " a *appartient à* E " se note $a\in E$. L'assertion " b *n'appartient pas à* E " se note $b\notin E$.
- Un ensemble est dit vide s'il n'a aucun élément et nous notons l'**ensemble vide** ϕ ou par { }.

Exemples d'ensembles

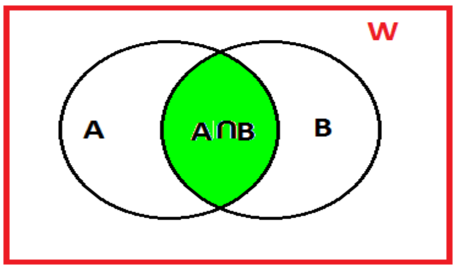
1. Les entiers naturels **0,1, 2, 3, ….** forment un ensemble qui se note □ .
2. Les entiers relatifs **…, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …** forment un ensemble qui se note ℝ.
3. Les nombres rationnels (de la forme **p/q** où q∈□ et q∈□ *) forment un ensemble noté □
4. Les points du plan forment un ensemble.

On peut trouver quelques opérations importantes dans la théorie des ensembles :

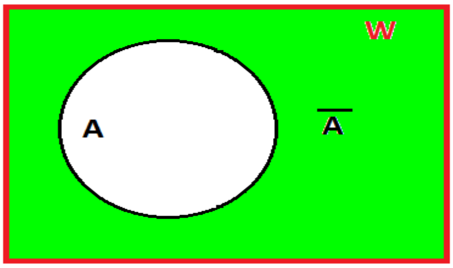
Réunion : La réunion de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A ou à B (ou aux deux). La réunion de A et B est notée $A\cup B$ qui est schématisé par la zone verte:



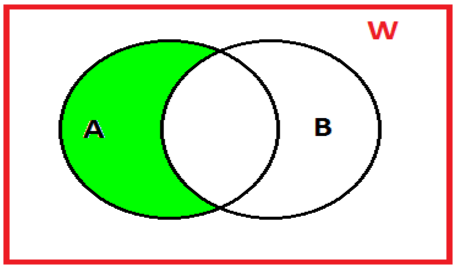
Intersection : L'Intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et à B au même temps. La réunion de A et B est notée $A\cap B$ qui est schématisé par la zone verte.



Complément : Si A est un sous-ensemble de W, le complémentaire de A dans W est l'ensemble des éléments de W qui n'appartiennent pas à E qui est notée A^c ou $\bar{A}$, ce dernier est schématisé par la zone verte.



Différence: La différence de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et pas à B, qui est notée par A\B ou A-B.



Différence symétrique: La différence symétrique de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble W est l'ensemble des éléments de W qui appartiennent à A et pas à B, ou qui appartiennent à B et pas à A noté par $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Cardinal : On dit qu'un ensemble est fini lorsqu'il existe un entier naturel n_0 et une bijection de cet ensemble sur $[1, n_0]$. Dans le cas contraire, il est dit infini.

Définition. **Soit** A un ensemble fini, on appelle cardinal de A, et on le note Card A ou $\sharp A$, le nombre n_0 d'éléments de A. Si $A=\phi$, alors card A=0.

La **formule fondamentale** pour le calcul des cardinaux d'ensembles finis, est :

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$$

Dans ce qui suit A et B sont des ensembles finis.

- Si $A \subset B$, alors card $A \leq$ card F.
- Si $A \subset B$, et $A \neq B$, alors card A<card B
- Card $(A \times B)$ = Card A $\times$ Card B.
- Si E est un ensemble fini à n éléments c'est-à-dire Card E=n, on note: P(E) l'ensemble de toutes les parties (de tous les sous-ensembles) de E et on a le résultat :

$$\text{Card } (P(E)) = 2^n$$

Propriétés des opérations élémentaires

- L'intersection et la réunion sont idempotentes :$\forall A,\ \ \mathrm{A} \cap \mathrm{A} = \mathrm{A}\ et\ \mathrm{A} \cup \mathrm{A} = \mathrm{A}$
- L'intersection et la réunion sont commutatives :

$$\forall A, \forall B,\ \ \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \text{ et } \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$$

- L'intersection et la réunion sont associatives :

$$\forall A, \forall B, \forall C\ \ \ (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cap \mathrm{C} = \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$$

$$\forall A, \forall B, \forall C\ \ \ (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cup \mathrm{C} = \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$$

- L'intersection est distributive par rapport à la réunion : A∩B A∪B

$$\forall A, \forall B, \forall C\ \ \ \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

- La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$\forall A, \forall B, \forall C\ \ \ \mathrm{A} \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$$

Série de TD N°01

Théorie des Ensembles

Exercice 01 : Trouver $P(X)$, $X \cap Y$, $X \cup Y$, $X - Y$, $Y \setminus X$, $X \times Y$, $Y \times X$, $X \triangle Y$ si :

1. $X = \{1,2,3,5\}$, $Y = \{7,3\}$
2. $X = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$, $Y = \{3n, n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 02: Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$, $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.

Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \setminus B$, $\mathbb{R} \setminus A$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B))$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$

Exercice 03: Soient X et Y deux ensembles. Démontrer les propositions suivantes:

a) $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

b) $(Z \subset X \text{ et } Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$

c) $(X \cap Y) \setminus (X \cap Z) = X \cap (Y \setminus Z)$

d) $(X \cup Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$

Exercice 04: Soient A, B et C trois ensembles. Montrer que :

1. $C_A^{A \cap B} = (A \cup B) \setminus B$
2. $A = A \cup (A \cap B)$

Exercice 05 : Soit $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois sous-ensembles de $\boldsymbol{E}$. Montrer que :

1. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap \boldsymbol{B}) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup \boldsymbol{B}) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \setminus C) = (A \cap \boldsymbol{B}) \setminus (A \cap C)$
5. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus \boldsymbol{B}) \cup (A \setminus C)$
6. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus \boldsymbol{B}) \cap (A \setminus C)$
7. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Exercice 06 :

On rappelle que l'on note $A \triangle B = (A \setminus \boldsymbol{B}) \cup (B \setminus A)$

1) Montrer que $(A \cap \boldsymbol{B}) \cap \overline{(A \cap C)} = A \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}}$

$$(A \cap \boldsymbol{C}) \cap \overline{(A \cap B)} = A \cap \boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

   En déduire que $(A \cap \boldsymbol{B}) \Delta (A \cap \boldsymbol{C}) = A \cap (\boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{C})$

2) Montrer que $(A \cup \boldsymbol{B}) \cap \overline{(A \cup C)} = \bar{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \overline{\boldsymbol{C}}$

$$(A \cup \boldsymbol{C}) \cap \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \boldsymbol{C} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$$

   En déduire que $(A \cup \boldsymbol{B}) \Delta (A \cup \boldsymbol{C}) = \bar{A} \cap (\boldsymbol{B} \Delta \boldsymbol{C})$

Exercice 07: Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ des sous-ensembles d'un ensemble$\boldsymbol{E}$.

Démontrer les lois de Morgan :

a. $\boldsymbol{A^c} \cup \boldsymbol{B^c} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{c}}$

b. $\boldsymbol{A^c} \cap \boldsymbol{B^c} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{c}}$

Corrigé type de la Série de TD N°01

Exercice 01 : Trouver $P(X),\ X\cap Y,\ X\cup Y,\ X-Y,\ Y\setminus X,\ X\times Y,\ Y\times X,\ X\triangle Y$ si

1. $X=\{1,2,3,5\}\,,Y=\{7,3\}$

$X\cap Y=\{3\}$

$X\cup Y=\{1,2,3,5,7\}$

$X\text{-}Y=\{1,2,5\}$

$Y\backslash X=\{7\}$ Ensemble de Y Sauf X

$X\backslash Y=\{1,2,5\}$ Ensemble de X Sauf Y

$X\times Y=\{(1,7),(1,3),(2,7),(2,3),(3,7),(3,3),(5,7),(5,3)\}$

$Y\times X=\{(7,1),(3,1),(7,2),(3,2),(7,3),(3,3),(7,5),(3,5)\}$

$X\Delta Y=(X\backslash Y)\cup(Y\backslash X)=\{1,2,5\}\cup\{7\}=\{1,2,5,7\}$

2. $X=\{2n,n\in\mathbb{N}\}\,,Y=\{3n,n\in\mathbb{N}\}$

$$X=2n=\left\{\underbrace{0},2,4,\underbrace{6},8,10,\underbrace{12},14,16,\underbrace{18},20,22,\underbrace{24},......\right\}$$

$$Y=3n=\left\{\underbrace{0},3,\underbrace{6},9,\underbrace{12},15,\underbrace{18},21,\underbrace{24},......\right\}$$

$X\cap Y=\{0,6,12,18,24,...\}=\{6n,n\in\mathbb{N}\}$

$X\cup Y=\{0,2,3,4,6,8,9,10,12,...\}=\mathbb{N}-\{1,5,7,11,13,17,19,...\}=\mathbb{N}-\{6n\pm1,n\in\mathbb{N}\}$

$X\text{ - }Y=\{2,4,8,10,14,16,,20,22,...\}$

$Y\setminus X=\{3,9,15,21,...\}$

$X\times Y=\{(2n,3n)\}$

$Y\times X=\{(3n,2n)\}$

$X\Delta Y=\{\ \},$ *Le* Δ *est appelé la défférence symétrique*

Exercice 03: Soient X et Y deux ensembles. Démontrer les propositions suivantes :

$a)\quad X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

$X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \subset Y$

Si $x \in X \subset Y$, *alors* $x \in Y$, *alors* $x \in X \cup Y$, *par conséquent* $X \cup Y = Y$. *Donc* $X \cup Y \subset Y$

On a montré que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

Supposons que $X \cup Y = Y$

Si $x \in X$, *alors* $x \in X \cup Y = Y$, *Donc* $x \in Y$

On a montré que $X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subset Y$

Finalement $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$

$X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

Supposons que $X \subset Y$

Si $x \in X \subset Y$, *alors* $x \in X$, *alors* $x \in X \cap Y$, *par conséquent* $X \cap Y = X$

On a montré que $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

Supposons que $X \cap Y = X$

Si $x \in X \cap Y$, *alors* $x \in X$, *Donc* $X \subset Y$

On a montré que $X \cap Y = X \Leftrightarrow X \subset Y$

Finalement $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$

$b)\quad (Z \subset X \text{ et } Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$

$(Z \subset X \text{ et } Z \subset Y) \Leftrightarrow Z \subset (X \cap Y)$

Supposons que $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

Si $x \in Z \subset Y$ *et* $x \in Z \subset Y$, *alors* $x \in X \cap Y$, *par conséquent* $x \in Z \subset X \cap Y$

On a montré que $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y \Leftrightarrow Z \subset X \cap Y$

Supposons que $Z \subset X \cap Y$

Si $x \in Z$, *alors* $x \in Z \subset X \cap Y$, *Donc* $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

On a montré que $Z \subset X \cap Y \Leftrightarrow Z \subset X$ *et* $Z \subset Y$

Finalement $Z \subset X$ *et* $Z \subset Y \Leftrightarrow Z \subset X \cap Y$

c) $(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)=X\cap(Y\setminus Z)$

$$\begin{aligned}(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)&=(X\cap Y)\cap\left(\overline{X\cap Z}\right)=(X\cap Y)\cap\left(\overline{X}\cup\overline{Z}\right)\\&=\left((X\cap Y)\cap\overline{X}\right)\cup\left((X\cap Y)\cap\overline{Z}\right)=\left(X\cap Y\cap\overline{X}\right)\cup\left(X\cap Y\cap\overline{Z}\right)\\&=\underbrace{\left(\underbrace{X\cap\overline{X}}_{\varnothing}\cap Y\right)}_{\varnothing}\cup\left(X\cap Y\cap\overline{Z}\right)=X\cap\left(Y\cap\overline{Z}\right)=X\cap(Y\setminus Z)\end{aligned}$$

Alors $(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)=X\cap(Y\setminus Z)$

ou par une autre méthode :

$(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)$

Supposons que $X\cap(Y\setminus Z)$

Si $x\in Z\subset Y$ *et* $x\in Z\subset Y$, *alors* $x\in X\cap Y$, *par conséquent* $x\in Z\subset X\cap Y$

On a montré que $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y\Leftrightarrow Z\subset X\cap Y$

Supposons que $(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)$

Si $x\in Z$, *alors* $x\in Z\subset X\cap Y$, *Donc* $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y$

On a montré que $Z\subset X\cap Y\Leftrightarrow Z\subset X$ *et* $Z\subset Y$

Finalement $Z\subset X$ *et* $Z\subset Y\Leftrightarrow Z\subset X\cap Y$

d) $(X\cup Y)\setminus Z=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$

$(X\cup Y)\setminus Z=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$

$*(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)=\left(X\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{Z}\right)=(X\cup Y)\cap\overline{Z}=(X\cup Y)\setminus Z$

$*(X\cup Y)\setminus Z=(X\cup Y)\cap\overline{Z}=\left(X\cap\overline{Z}\right)\cup\left(Y\cap\overline{Z}\right)=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$

Exercice 06 : On rappelle que $A\triangle B=(A\setminus \boldsymbol{B})\cup(B\setminus A)$

3) Montrons que $(A\cap \boldsymbol{B})\cap\overline{(A\cap C)}=A\cap\boldsymbol{B}\cap\overline{\boldsymbol{C}}$

$$(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=(A\cap B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{C}\right)=\underbrace{\left((A\cap B)\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left((A\cap B)\cap\overline{C}\right)=(A\cap B)\cap\overline{C}$$

$$=(A\cap B)\setminus C$$

Et que : $(A\cap \boldsymbol{C})\cap\overline{(A\cap B)} = A\cap\boldsymbol{C}\cap\overline{\boldsymbol{B}}$

$$(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cap C)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\underbrace{\left((A\cap C)\cap\overline{A}\right)}_{\varnothing}\cup\left((A\cap C)\cap\overline{B}\right)=(A\cap C)\cap\overline{B}$$

$$=(A\cap C)\setminus B$$

La déduction que $(A\cap\boldsymbol{B})\Delta(A\cap\boldsymbol{C}) = A\cap(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$

$$\Rightarrow X\setminus Y=\underbrace{(A\cap B)}_{X}\setminus\underbrace{(A\cap C)}_{Y}=(A\cap B)\cap\left(\overline{A\cap C}\right)=(A\cap B)\cap\overline{C}=A\cap(B\setminus C)$$

$$Y\setminus X=\underbrace{(A\cap C)}_{Y}\setminus\underbrace{(A\cap B)}_{X}=(A\cap C)\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=(A\cap C)\cap\overline{B}=A\cap(C\setminus B)$$

$$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left((A\cap B)\setminus C\right)\cup\left((A\cap C)\setminus B\right)$$

$$\Leftrightarrow (A\cap B)\Delta(A\cap C)=\left(A\cap(B\setminus C)\right)\cup\left(A\cap(C\setminus B)\right)=A\cap\left((B\setminus C)\cup(C\setminus B)\right)=A\cap(B\Delta C)$$

$$\Rightarrow (A\cap B)\Delta(A\cap C)=A\cap(B\Delta C)$$

4) Montrer que $(A\cup\boldsymbol{B})\cap\overline{(A\cup C)} = \bar{A}\cap\boldsymbol{B}\cap\overline{\boldsymbol{C}}$

$$(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)=\left(\underbrace{\left(A\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)}_{\varnothing}\cup\left(B\cap\overline{A}\cap\overline{C}\right)\right)=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}$$

$(A\cup\boldsymbol{C})\cap\overline{(A\cup B)} = \bar{A}\cap\boldsymbol{C}\cap\overline{\boldsymbol{B}}$

$$(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)=(A\cup C)\cap\overline{A}\cap\overline{B}=A\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\cup C\cap\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$$

$$=\underbrace{\left(A\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right)}_{\varnothing}\cup\left(C\cap\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}$$

$$A \triangle B = (A\setminus \boldsymbol{B})\cup(B\setminus A)$$

La déduction que $(A\cup\boldsymbol{B})\Delta(A\cup\boldsymbol{C}) = \bar{A}\cap(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{C})$

$$\Rightarrow X\setminus Y=\underbrace{(A\cup B)}_{X}\setminus\underbrace{(A\cup C)}_{Y}=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)=\overline{A}\cap B\cap\overline{C}=\overline{A}\cap(B\setminus C)$$

$$Y\setminus X=\underbrace{(A\cup C)}_{Y}\setminus\underbrace{(A\cup B)}_{X}=(A\cup C)\cap\left(\overline{A\cup B}\right)=\overline{A}\cap C\cap\overline{B}=\overline{A}\cap(C\setminus B)$$

$$X\Delta Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)=(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\left(\overline{A}\cap(B\setminus C)\right)\cup\left(\overline{A}\cap(C\setminus B)\right)$$

$$=\overline{A}\cap\left((B\setminus C)\right)\cup\left((C\setminus B)\right)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$$

$$\Rightarrow(A\cup B)\Delta(A\cup C)=\overline{A}\cap(B\Delta C)$$

Chapitre II:

Raisonnement par Récurrence

Rappel de Cours

Raisonnement par Récurrence

Rappel :

Pour démontrer par récurrence qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes.

Avant de commencer, on note (P_n) la proposition que l'on va démontrer.

- Étape 1 : Initialisation

  On vérifier (P_n) est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0. On dit qu'on a initialisé la récurrence.

- Étape 2 : Hérédité

  On suppose que pour un entier n quelconque $n > n_0$, (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse (dite de récurrence) on démontre que la proposition (P_{n+1}) est vraie. On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « (P_n) vraie » est héréditaire.

- Étape 3 : Conclusion

  Lorsque les deux premières étapes ont été réalisées, on conclut : par récurrence, la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n $(n > n_0)$

Raisonnement par L'absurde

Rappel :

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur règle logique que :

Si "non P" est fausse, alors P est vrai

Le raisonnement consiste à supposer que l'affirmation contraire est vraie et à tirer les conséquences que cela pourrait avoir **une seule conséquence absurde, manifestement fausse ou une contradiction** permet d'affirmer que l'affirmation contraire est fausse et donc d'en conclure que l'affirmation initiale est vraie.

Série de TD N°02

Raisonnement par Récurrence

Exercice 01 **:** Démontrer par **récurrence** que pour tout entier $n \geq 1$:

1. $1 + 2 + 3 + \cdots .. + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 2^2 + 3^2 + \cdots .. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots .. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots .. + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Exercice 02: x est un réel positif.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

Exercice 03: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel$n$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{-5}{2^n} + 6$.

Raisonnement par L'absurde

Exercice 04: Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

1. $\forall n \in \square, n^2$ *est pair* $\Rightarrow n$ *est pair*
2. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ($\sqrt{2} \notin Q$)

Exercice 05: Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$$

Exercice 06 **:** Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que :

1. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}, ac \geq bc \; et \; c > 0 \Rightarrow a \geq b$

Corrigé type de la Série de TD N°02

Raisonnement par Récurrence

Exercice 01:

Démonstration de la formule vue l'introduction, à l'aide du raisonnement par récurrence: Montrons que pour tout entier naturel n

1. $1+2+3+4+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ *Notons* (P_n) *la proposition :*

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car $1=\frac{1(1+1)}{2}$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car $1+2=\frac{2(2+1)}{2}$ =3

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que «(P_n) vraie » entraîne «(P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n\geq 1$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n:

$$P_n: \quad 1+2+3+4+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$P_{n+1}: \quad 1+2+3+4+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans la somme $1+2+3+4+...+(n-1)+n$, on peut remplacer les n premiers termes par $\frac{n(n+1)}{2}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{1+2+3+4+...+(n-1)+n}_{P_n}+(n+1)}_{P_{n+1}}=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Alors $1+2+3+4+...+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$1+2+3+4+...+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

2. $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *Notons* (P_n) *la proposition :*

- Étape 1 : Initialisation

La proposition est vraie car (P_1) est vraie car $1=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1$

La proposition est vraie car (P_2) est vraie car $1+2^2=\frac{2(2+1)(4+1)}{6}=5$

On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que «(P_n) vraie » entraîne «(P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout entier naturel $n\geq 1$.

- Étape 2 : Hérédité

Supposons donc que (P_n) est vraie pour un entier naturel n , c'est-à-dire que pour un entier naturel n :

$$P_n: \quad 1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$P_{n+1}: \quad 1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Comme (P_n) est vraie, alors dans la somme $1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n-1)^2+n^2$, on peut remplacer les n premiers termes par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On obtient alors :

$$\underbrace{\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n-1)^2+n^2}_{P_n}+(n+1)^2}_{P_{n+1}}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Alors $1^2+2^2+3^2+4^2+...+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ est vraie, Donc (P_{n+1}) vraie

- Étape 3 : Conclusion

(P_n) est vraie pour tout entier naturel $n>0$, c'est-à-dire pour tout entier naturel n

$$1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Raisonnement par L'absurde

Exercice 04: Montrez en utilisant un raisonnement par l'absurde que:

1. Montrons $\forall n \in □ , n^2$ *est pair* $\Rightarrow n$ *est pair*

Raisonnement par l'absurde, $\forall n \in □ , n$ *est impair* $\Rightarrow n^2$ *est pair*

Supposons que :

$$n=2.k+1 \text{ est } \textit{impair} \Longrightarrow n^2=(2.k+1)^2=4k^2+4.k+1=\underbrace{\underbrace{4(k^2+k)}_{\textit{nombre pair}}+1}_{\text{Nombre impair}}$$

$\Longrightarrow$ *Une contradiction*

Alors la formule : $\forall n \in □ , n^2$ *est pair* $\Rightarrow n$ *est pair* est vraie

2. $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel $\left(\sqrt{2} \notin Q\right)$

Raisonnement par l'absurde, Supposons $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel $\left(\sqrt{2} \in Q\right)$

On sait que les nombres de l'ensemble Q s'écrivent a/b

Telle que le $p\gcd(a,b)=1$ (i.e. : a et b sont premiers entre eux), $a,b \in □^2$

Donc $\sqrt{2}=a/b$ avec $p\gcd(a,b)=1$

$\left(\sqrt{2}\right)^2=(a/b)^2 \Rightarrow a^2=2.b^2$

➔ Donc a^2 est un nombre pair➔

$$a^2=2.b^2..............(1)$$

Puisque a est un nombre pair ➔ $a=2.k$

$$a \quad pair..............(2)$$

➔ Donc $a^2=(2.k)^2=4.k^2$ ➔

$$a^2=2.k^2..............(3)$$

(3) *dans* $(1) \Rightarrow a^2 = 2.b^2 = 4.k^2$

$\Leftrightarrow b^2 = 2.k^2 \ \Rightarrow b^2$ *est pair* $\Leftrightarrow b$ *est pair* $b \quad pair$...............(4)

De (2) *et* $(4) \Rightarrow$ *Les nombres* a, b *se divisent par deux, ce qui nous ramène à une contradiction, puisque* $p\,\mathrm{gcd}(a,b) = 1 \ \Rightarrow$ *Alors* $\sqrt{2} \in \mathrm{Q}$

Donc : $\sqrt{2}$ *est un nombre irrationnel* est vraie.

Chapitre III:

Applications et Relations binaires

Rappel de Cours

Les Applications

Définition :

Soient E et F deux ensembles quelconques et $f: \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{F}$ une application

- Application **Injective :** Nous disons que f est une application **injective** ou est une **injection** si deux éléments quelconques de E ayant même image par f sont nécessairement égaux, c'est-à-dire: $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- Application **Surjective:** Nous disons que f est une application **surjective** ou est une **surjection** si tout élément y de F possède au moins un antécédent par f, c'est-à-dire :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \Rightarrow \textit{On peut ecrire } x \textit{ en fonction de } y$$
$$\Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Application **Bijective :** Nous disons que f est une application **bijective** ou est une **bijection** si elle est à la fois injective et surjective.

Les Relations binaires

Relation d'équivalence: Pour que la relation soit une Relation d'équivalence, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- Réféxive
- Symétrique
- Transitive

Relation d'ordre : Pour que la relation soit une Relation d'équivalence, il faut satisfaire les conditions suivantes :

- Réféxive
- Anti- Symétrique
- Transitive

Série de TD N°03

Les Applications

Exercice 01 : Soient f et g deux applications définie de IN dans IN par :

$$f(x)=2x \quad , \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \ \ x \ est \ pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \ \ x \ est \ impair \end{cases}$$

a) Est-ce que f , g sont surjectives ? Injectives ?

b) Calculer $f\circ g$, $g\circ f$

Exercice 02: Soient f et g deux applications définie de IR dans IR par :

$$f(x)=3x+5 \quad , \quad g(x)=\frac{1}{2}x-1$$

a) Montrer que f , g sont des applications bijectives.

b) Calculer les applications suivantes : $f^{-1}, g^{-1}, (f^{-1}\circ g^{-1}), (g^{-1}\circ f^{-1})$

c) Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont des applications bijectives.

d) Vérifier que : $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$ et $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

Exercice 03: Soit f une application définie par :

$$\begin{aligned} f:\ & IR \to IR \\ & x \mapsto f(x)=|x|+2x \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer l'application réciproque f^{-1}.

Les Relations binaires

Exercice 04: Soit $\Re$ une relation définie dans Z par :

$$\forall(x,y)\in Z^2 : x\Re y \Leftrightarrow (x-y) \text{ est un multiple de 5.}$$

a) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

b) Trouver l'ensemble quotient $Z/5Z$.

Exercice 05 : On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\boldsymbol{\rho}$,

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') \Leftrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$$

1) Montrer que $\boldsymbol{\rho}$ est une relation d'équivalence.
2) Trouver la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

Exercice 06 :

1. Soit $\Re$ une relation dans IR^* définie par :

   $x\Re y \Leftrightarrow x.y>0$

   a) Montrer que $\Re$ est une relation d'équivalence.

   b) Calculer l'ensemble des classes d'équivalence.

2. Soit $\Re'$ une autre relation dans IR définie par :

   $x\Re' y \Leftrightarrow x.y>0$

   Montrer que $\Re'$ n'est pas une relation d'équivalence.

Exercice 07 : Soit $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^3-3\boldsymbol{x}+2$ et soit $\boldsymbol{S}$ la relation dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$$

Montrer que $\boldsymbol{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 08: Soit $\Re$ une relation dans IR définie comme suit :

$$a\Re b \Leftrightarrow a^3-b^3\geq 0$$

a) Montrer que $\Re$ est une relation d'ordre.

b) Cette relation, est-elle d'ordre total ?

Exercice 09: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\leq\boldsymbol{x}' \text{ et } \boldsymbol{y}\leq\boldsymbol{y}'.$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

Corrigé type de la Série de TD N°03

Les Applications

Exercice 01 : Soient f et g deux applications définie de *IN* dans *IN* par :

$$f(x) = 2x \quad , \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x\, est\;\, pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x\, est\;\, impair \end{cases}$$

a) Est-ce que f , g sont Surjective $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

$y = f(x) = 2x \Rightarrow x = y/2$

Donc il existe une solution, Alors *f(x)* est surjective.

$$y = g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x\, est\;\, pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x\, est\;\, impair \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 2y \\ 2y+1 \end{cases}$$

Donc il existe deux solutions, Alors f(x) n'est pas surjective.

Injectives $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$f(x) = f(x') \Leftrightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'$: *f(x)* est une Fonction Injective.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & si \;\; x\, est\;\, pair \\ \dfrac{x-1}{2} & si \;\; x\, est\;\, impair \end{cases}$$: g*(x)* est une Fonction Injective.

b) Calculer $f \circ g \, , g \circ f$

$$(fog)(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \; est \; pair \\ x-1 & si \;\; x \; est \; impair \end{cases}$$

$$(gof)(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \; est \; pair \\ \dfrac{2x-1}{2} & si \;\; x \; est \; impair \end{cases}$$

Les Relations binaires

Exercice 04: Soit $\Re$ une relation définie dans Z par :

$$\forall (x, y) \in Z^2 : x \Re y \Leftrightarrow (x-y) \text{ est un multiple de 5.}$$

a) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence.

$Relation\ d'équivalence:$

$Réféxive:\ Soit\ x \in \mathbb{Z} \qquad x - x = 5k \Leftrightarrow\ 0 = 5k \quad Donc\ x\ \Re\ x$

$symétrique:\ Soitent\ x,\ y \in \mathbb{Z}\ :$

$x\ \Re\ y:\ x - y = 5k,\ multiplions\ par\ -1 \Rightarrow y - x = 5k' \ \ Donc\ \ y\ \Re\ x$

$$Transitive: \begin{cases} x\ \Re\ y:\ x - y = 5k..............(1) \\ y\ \Re\ z:\ y - z = 5k'..............(2) \end{cases}$$

$(1)+(2) \Rightarrow x - z = 5k'' \qquad Donc\ x\ \Re\ z$

b) Trouver l'ensemble quotient $Z/5Z$.

$\overset{*}{x} = \{y \in Z |\ \ y \Re x\}$

$\overset{*}{0} = \{y \in Z |\ \ y \Re 0\} \Rightarrow y - 0 = 5k \Rightarrow y = 5k$

$\overset{*}{1} = \{y \in Z |\ \ y \Re 1\} \Rightarrow y - 1 = 5k \Rightarrow y = 5k - 1$

$$\overset{*}{2}=\{y\in Z|\ \ y\Re 2\}\Rightarrow y-2=5k\Rightarrow y=5k-2$$

$$\overset{*}{3}=\{y\in Z|\ \ y\Re 3\}\Rightarrow y-0=5k\Rightarrow y=5k-3$$

$$\overset{*}{4}=\{y\in Z|\ \ y\Re 4\}\Rightarrow y-0=5k\Rightarrow y=5k-4$$

Exercice 05 **:** On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\boldsymbol{\rho}$, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}') \Leftrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'$

1) Montrons que $\boldsymbol{\rho}$ est une relation d'équivalence.

$$(x,y)\rho(x',y')\Leftrightarrow x+y=x'+y'$$

$$\text{Re}\,lation\ d'\acute{e}quivalence:$$

$$R\acute{e}f\acute{e}xive:\ Soit\ x\in\square \qquad x+y=x+y \quad Donc\ x\ \Re\ y$$

$$sym\acute{e}trique:\ Soitent\ x,\ y\in\square\ :$$

$$(x,y)\Re(x',y'):\ x+y=x'+y'\Leftrightarrow x'+y'=x+y\ \ Donc\ \ (x',y')\Re(x,y)$$

$$Transitoire:\begin{cases}(x,y)\Re(x',y')\Leftrightarrow x+y=x'+y'..............(1)\\(x',y')\Re(z,u)\Leftrightarrow x'+y'=z+u..............(2)\end{cases}$$

$$(1)+(2)\Rightarrow x+y=z+u \qquad Donc\ \ (x,y)\Re(z,u)$$

2) Trouver la **classe d'équivalence** du couple$(0,0)$.

$$C(x,y)=\{(x',y')\in\square\ |\,x+y=x'+y'\}$$

$$C(x,y)=\{(x',y')\in\square\ |\,f(x,y)=f(x',y')\}$$

$$f(x,y)=x+y$$

$$Alors\quad f(0,0)=x+y=x'+y'=0\Rightarrow x'+y'=0\Rightarrow x'=-y'$$

$$Ensemble=\{(1,-1),(2,-2),(3,-3),....\}$$

Chapitre IV:

Les Fonctions réelles à une variable réelle

Rappel de Cours

Domaine de définition:

1) $Arc\sin(x)$ définie sur $[-1,1]$

2) $Arc\cos(x)$ définie sur $[-1,1]$

3) $Arctg(x)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

4) $Argsh(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ définie sur $[1,+\infty[$

5) $Argch(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ définie sur $\mathfrak{R}$

6) $Argth(x)=\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ définie sur $]-1,1[$

7) $Sh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $Ch(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $Th(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Les limites:

1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

2) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x}=1$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=1$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

7) $\lim_{x\to 0^+}x^x=1$

8) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

9) $\lim_{x\to 0+}x\ln(x)=0$

10) $\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$

11) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

12) $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$

La continuité d'une fonction :

$$\lim_{x \xrightarrow[<]{>} a} f(x) = f(a)$$

La dérivabilité d'une fonction :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Note :

Rappel :

Si f(x) est dérivable ➔f(x) est continue

La réciproque n'est pas toujours valable.

Règle de l'Hôpital :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Théorème des accroissements finis

Soit f une application de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

1. f est continue sur $[a, b]$,
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Théorème de Rolle

Théorème (de Rolle) :

Soit f une fonction numérique continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$

Alors, il existe un point c de $]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Développement de Maclaurin

Définition : On appelle **polynôme de Maclaurin** d'une fonction $f(x)$ qui admet des dérivées de tous ordres en $x=0$ l'expression :

$$m_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

où $f^{(k)}(0)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x=0$.

On appelle **polynôme de Taylor** d'une fonction $f(x)$ qui admet des dérivées de tous ordres en $x=a$ l'expression :

$$t_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

où $f^{(k)}(a)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x=a$.

Série de TD N°04

Les Fonctions

Exercice 01 : Donner **le domaine de définition** des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}$

3) $f(x)=x^x$

4) $f(x)=Arc\sin\left(1-x^2\right)$

5) $f(x)=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

6) $f(x)=\sqrt{\cos(2x)}$

7) $f(x)=\sqrt{tg(x)}$

8) $f(x)=\log\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$

9) $f(x)=th\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

10) $f(x)=arctg\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$

11) $f(x)=\arg sh(3x+2)$

12) $f(x)=\arg th\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$

Exercice 02 : calculer **les limites** suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(2x)}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{1-sin(x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}log\dfrac{(e^x-1)}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xsin(x)}{1-\cos(x)}$

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x)-sin(2x)}{x^2}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin(x)}$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(2x)}{\sqrt{1-cos\,(x)}}$

16) $\lim\limits_{x\to 0}log\dfrac{(e^x-1)}{x}$

Exercice 03 : Etudier **la continuité** des fonctions suivantes :

01) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \; si \;\; x \leq 2 \\ 5 - x \;\; si \;\; x > 2 \end{cases}$

02) $f(x) = \begin{cases} -2x - 3 \; si \; x \leq -1 \\ x \qquad si - 1 < x \leq 1 \\ -3x \qquad\quad si \;\; x > 1 \end{cases}$

03) $f(x) = \begin{cases} 0 & si \; x < 0 \\ x & si \; 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & si \; 1 \leq x < 3 \\ 4 - x & si \; x \geq 3 \end{cases}$

04) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \; si \;\; x \neq 0 \\ 0 \;\; si \;\; x = 0 \end{cases}$

05) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & si \;\; x \neq 2 \\ 3 & si \;\; x = 2 \end{cases}$

06) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \; x < 0 \\ x - 1 & si \; x \geq 0 \end{cases}$

Exercice 04 : Peut-on **prolonger par la continuité** (au point $x_0 = 0$) les fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$
- $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$
- $f(x) = x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\, e^{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}$
- $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 05 : Etudier la **continuité et la dérivabilité** des fonctions suivantes

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & si \quad |x| \leq 1 \\ \dfrac{1}{e} \quad si & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x \sin x} - \cos(2x)}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 + x|}{x + 1} & si \;\; x \neq -1 \\ \text{-1} & si \;\; x = -1 \end{cases}$$

Exercice 06 : Soit *f(x)* une fonction définie sur $\mathbb{R}$par :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $f$est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.
2. Ecrire $f'(x)$ sous sa forme prolongée.

Exercice 07 : En utilisant **la Règle d'Hôpital**, calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}\right)$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\log x}{e^x-e}$
- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)}\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(x))\operatorname{ctan}(x)$

Exercice 08 :

1- En utilisant **le théorème accroissement fini**, montrer que :

* $\forall x\,,y\in IR\ \ ;\ |\sin x-\sin y|\le|x-y|$

* $\forall x\in IR^+\ \ ;\ 0\le\log(1+x)<x$

* $\forall x\in IR\ \ : e^x>1+x$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1).e^{\frac{1}{x+1}}-x.e^{\frac{1}{x}}\right]=1$

* $Pour\ tout\ 0<\alpha<1,\ et\ i\in IN\ \ :\dfrac{\alpha}{(i+1)^{1-\alpha}}\le(i+1)^\alpha-i^\alpha\le\dfrac{\alpha}{\mathrm{i}^{1-\alpha}}$

* $\forall x\in IR^+\ \ ;\ \dfrac{x}{x^2+1}\le Arctg(x)\le x$

* $0\le x<1\ ;\ x\le Arc\sin(x)\le\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ tq: $Arc\sin(x)\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

* $\forall x\in IR^+\ \ ;\ \dfrac{1}{x+1}<\log(1+x)-\log(x)<x$

* $\forall x\in IR\ \ :|\sin(x)|\le|x|$

* $\forall x\in IR\ \ :0\le Arctg(x+1)-Arctg(x)\le 1$

2- a) En utilisant le **théorème des valeurs intermédiaires** monter que l'équation $xe^{\sin x}=\cos x$

Admet au moins une solution dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Par le **théorème de Rolle**, montrer que cette solution est unique

Exercice 09 : Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition et calculer **la dérivée** :

$$f_1(x) = ln\,(\sqrt{x^2+1}) \qquad f_2(x) = \sqrt{1 + x^2 cos^2(x)} \qquad f_3(x) = \frac{exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f_4(x) = ln\,\left(\frac{1 + sin\,(x)}{1 - sin\,(x)}\right) \qquad f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad f_6(x) = \frac{sin\,(x^3+1)}{cos\,(2x+1)}$$

Exercice 10 :

1-Calculer les dérivées n[ièmes] des fonctions :

$$f(x) = xe^x \qquad f(x) = \frac{1}{1-x} \qquad f(x) = x^2 \sin x$$

2-Montrer que la dérivée n[ième] de la fonction f(x) :

$$f : \left]-1,1\right[\to IR \text{ définie par } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$s'écrit \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \forall x \in \left]-1,1\right[\quad ou \quad P_n(x) \quad est \ le \ polynome \ de \ \deg ré \ n$$

Exercice 11 :

1- En utilisant le **Développement de Mac Laurin**, donner le développement des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin x \qquad f(x) = \cos x \qquad f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f(x) = e^x$$

2- Calculer $\sqrt{e}$ avec 3 chiffres exacts en utilisant le D de Mac Laurin

En utilisant **le développement limité** quand $x \to 0$. Calculer les fonctions suivantes

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \qquad h(x) = \frac{\sin x - tgx}{x(\cos x - 1)} \qquad g(x) = \frac{e^x \sin x - x}{3x^2 + x^5}$$

Corrigé type de la Série de TD N°04

Exercice 01: **Domaine de définition**:

$$1)\ f(x)=\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\Rightarrow 1-x^2>0\Leftrightarrow x\in\,]-1,1[$$

$$2)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2-x}}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2-x\geq 0\\ \sqrt{x}+\sqrt{2-x}\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x\leq 2\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0,2]$$

$$3)\ f(x)=x^x=e^{\ln\left(x^x\right)}=e^{x\ \ln(x)}\Rightarrow x>0\Leftrightarrow x\in\,]0,+\infty[$$

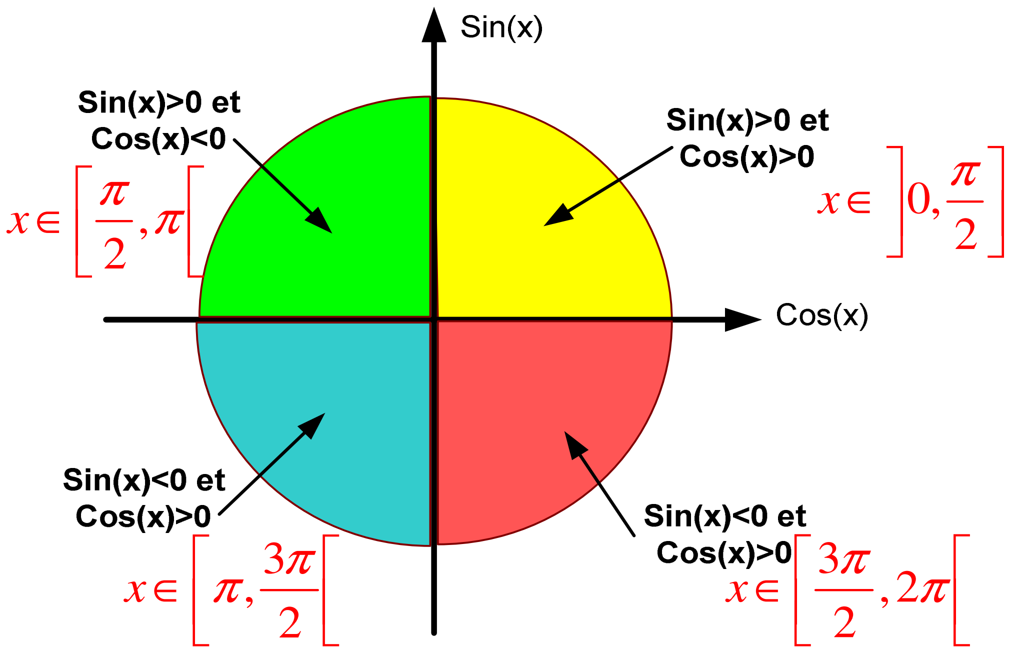
$$4)\ f(x)=Arc\sin\left(1-x^2\right)\Rightarrow -1\leq 1-x^2\leq 1\Leftrightarrow -1\leq x^2-1\leq 1\Leftrightarrow 0\leq x^2\leq 2\Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

$$5)\ f(x)=\sqrt{-x}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Rightarrow\begin{cases}-x\geq 0\\ 1-x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\,]-\infty,0]$$

$$6)\ f(x)=\sqrt{\cos(2x)}\Rightarrow\cos(2x)\geq 0\Rightarrow\frac{-\pi}{2}\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{-\pi}{4}\leq x\leq\frac{-\pi}{4}\Rightarrow x\in\left[\frac{-\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

$$7)\ f(x)=\sqrt{tg(x)}=\sqrt{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}\Rightarrow\begin{cases}\sin(x).\cos(x)\geq 0\\ \cos(x)\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin(x)\geq 0\ et\ \cos(x)>0\\ \qquad Ou\\ \sin(x)\leq 0\ et\ \cos(x)<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x\in[0,\pi/2[\,\cup\,[\pi,3\pi/2[$$



Alors le domaine de définition est $\Rightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

Une autre méthode pour trouver le domaine de définition :

Puisque $\begin{cases} \sin(x).\cos(x) \geq 0 \\ \cos(x) \neq 0 \end{cases}$

	0 … $\pi/2$	$\pi/2$ … π	π … $3\pi/2$	$3\pi/2$ … 2π
Cos(x)	+	-	-	+
Sin(x)	+	+	-	-
$\sin(x).\cos(x) > 0$	+	-	+	-

Alors le domaine de définition est $\Rightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$

$$8)\ f(x)=\log\left(\frac{1+x}{3-x}\right)\Rightarrow (1+x)(3-x)>0\Rightarrow x\in\ ]-1,3[$$

$$9)\ f(x)=th\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=\frac{e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}-e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}}{e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}+e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}}\Rightarrow\begin{cases}e^{\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}+e^{-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}\neq 0\\ x^2+1\neq 0\end{cases}$$

les deux conditions sont toujours conclues $\Rightarrow x\in\Re$

Exercice 03 **:** Etude de **la continuité** des fonctions suivantes :

$$\lim_{x\xrightarrow[<]{>}a} f(x)=f(a)$$

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x^2-1 & si\ x\leq 2\\ 5-x & si\ x>2\end{cases}$$

Domaine de définition $\Re$,

Par l'application de la regle de continuité, *on trouve que* :

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(5-x)=3\\ f(2)=(2^2-1)=3\end{cases}$$

Donc $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$, *Alors* $f(x)$ *est continue au* $x_0=2$

$$2)\ f(x)=\begin{cases}-2x-3 & si\ x\leq -1\\ x & si\ -1<x\leq 1\\ -3x & si\ x>1\end{cases}$$

Domaine de définition $\Re$,

Par l'application de la regle de continuité, on trouve que :

Pour $x_0 = -1$:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1}(x) = -1 \\ f(-1) = (-2(-1) - 3) = -1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$, *Alors* $f(x)$ *est continue au* $x_0 = -1$

Pour $x_0 = +1$:

$$\lim_{x \to +1} f(x) = f(+1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to +1} f(x) = \lim_{x \to +1}(3x) = 3 \\ f(+1) = (+1) = +1 \end{cases}$$

Donc $\lim_{x \to +1} f(x) \neq f(+1)$, *Alors* $f(x)$ *n'est pas continue au* $x_1 = +1$

Exercice 11 :

Rappel :

Définition : On appelle **polynôme de Maclaurin** d'une fonction $f(x)$ qui admet des dérivées de tous ordres en $x = 0$ l'expression :

$$m_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

où $f^{(k)}(0)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x = 0$.

On appelle **polynôme de Taylor** d'une fonction $f(x)$ qui admet des dérivées de tous ordres en $x = a$ l'expression :

$$t_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

où $f^{(k)}(a)$ exprime la $k^{\text{ième}}$ dérivée de f évaluée en $x = a$.

1- En utilisant le Développement de Mac Laurin, donner le développement des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\sin(x)$

$$\begin{cases} f(x)=\sin(x) \\ f^{(1)}(x)=+\cos(x) \\ f^{(2)}(x)=-\sin(x) \\ f^{(3)}(x)=-\cos(x) \\ f^{(4)}(x)=+\sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f^{(1)}(0)=+1 \\ f^{(2)}(0)=0 \\ f^{(3)}(0)=-1 \\ f^{(4)}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots \\ f(x)=\sin(x)=x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dots \end{cases}$$

2) $f(x)=\cos(x)$

$$\begin{cases} f(x)=\cos(x) \\ f^{(1)}(x)=-\sin(x) \\ f^{(2)}(x)=-\cos(x) \\ f^{(3)}(x)=+\sin(x) \\ f^{(4)}(x)=+\cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0)=+1 \\ f^{(1)}(0)=0 \\ f^{(2)}(0)=-1 \\ f^{(3)}(0)=0 \\ f^{(4)}(0)=1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\cos(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=\dfrac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0+\dfrac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1+\dfrac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2+\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\dots \\ f(x)=\cos(x)=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4\dots \end{cases}$$

Annexe:

Lois Algébriques

Développements limités usuels en 0

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e^x} &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{sh}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{ch}\ \boldsymbol{x} &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)\\
\textbf{sin}\,\boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{cos}\,\boldsymbol{x} &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\mathrm{O}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(1+x)^\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1-x}} &= 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{ln}\boldsymbol{(1-x)} &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{1+x}} &= 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{ln}\boldsymbol{(1+x)} &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\sqrt{1+x}} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-3)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}x^n+\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)\\
\textbf{Arctan}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Argth}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Arcsin}\ \boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)\\
\textbf{Argsh}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1\times 3\times\cdots(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\mathrm{O}\left(x^{2n+3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textbf{th}\ \boldsymbol{x} &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)\\
\textbf{tan}\,\boldsymbol{x} &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{O}\left(x^9\right)
\end{aligned}
$$

Développements en série entière usuels

e^{ax}	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}\, x^n$		$a \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{sh}\, x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\, x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$		$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$		$x \in \mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$	$(\alpha \in \mathbb{R})$	$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\frac{1}{a-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\frac{1}{(a-x)^2}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a^{n+2}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\frac{1}{(a-x)^k}$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{C}_{n+k-1}^{k-1}}{a^{n+k}}\, x^n$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	$x \in \,]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert\,[$
$\ln(1-x)$	$=$	$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$		$x \in [-1\,;1\,[$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,]$
$\sqrt{1+x}$	$=$	$1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$=$	$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, x^n$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathrm{Arctan}\, x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in [-1\,;1\,]$
$\mathrm{Argth}\, x$	$=$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\, x^{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathrm{Arcsin}\, x$	$=$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$
$\mathrm{Argsh}\, x$	$=$	$x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$		$x \in \,]-1\,;1\,[$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \|x\|$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{cotan} x$		$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$		$1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}^*$
$\operatorname{Arcsin} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arccos} x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arctan} x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argsh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argch} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\,;+\infty[$
$\operatorname{Argth} x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1\,;1[$

Primitives usuelles

I Polynômes et fractions simples

Fonction		Primitive	Intervalles
$(x-x_0)^n$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$: $x \in \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{-1\})$: $x \in \,]-\infty\,;x_0\,[\,,\,]\,x_0\,;+\infty\,[$
$(x-x_0)^\alpha$	$x_0 \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]\,x_0\,;+\infty\,[$
$(x-z_0)^n$	$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(x-z_0)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x-a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$]-\infty\,;a\,[\,,\,]\,a\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{x-(a+\mathrm{i}b)}$	$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2}\ln\left[(x-a)^2+b^2\right]$ $+\,\mathrm{i}\ \mathrm{Arctan}\ \dfrac{x-a}{b}$	$\mathbb{R}$

II Fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$	$]\,0\,;+\infty\,[$
$e^{\alpha x}\quad \alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$
$\mathrm{cotan}\ x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}\ x$	$\ln(\mathrm{ch}\ x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{coth}\ x$	$\ln\lvert\mathrm{sh}\ x\rvert$	$]-\infty\,;0\,[\,,\,]\,0\,;+\infty\,[$

III Puissances et inverses de fonctions usuelles

Fonction	Primitive	Intervalles
$\sin^2 x$	$\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\cos^2 x$	$\dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4}$	$\mathbb{R}$
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x - x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\operatorname{sh}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} - \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch}^2 x$	$\dfrac{\operatorname{sh} 2x}{4} + \dfrac{x}{2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th}^2 x$	$x - \operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth}^2 x$	$x - \operatorname{coth} x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\sin x}$	$\ln\left\vert\tan\dfrac{x}{2}\right\vert$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos x}$	$\ln\left\vert\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right\vert$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$	$\ln\left\vert\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right\vert$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$	$2\operatorname{Arctan} e^x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \operatorname{cotan}^2 x$	$-\operatorname{cotan} x$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{coth}^2 x - 1$	$-\operatorname{coth} x$	$]-\infty\,;0\,[\;,\;]\,0\,;+\infty\,[$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sin^4 x}$	$-\operatorname{cotan} x - \dfrac{\operatorname{cotan}^3 x}{3}$	$]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,[$
$\dfrac{1}{\cos^4 x}$	$\tan x + \dfrac{\tan^3 x}{3}$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi\,;\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction		Primitive	Intervalles
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\operatorname{Arctan} x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a} \operatorname{Arctan} \dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$		$\begin{cases} \operatorname{Argth} x \\ \dfrac{1}{2} \ln \left\lvert \dfrac{1+x}{1-x} \right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1\,;1[\\ ]-\infty\,;-1[\,, \\ ]-1\,;1[\,,\ ]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a} \operatorname{Argth} \dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a} \ln \left\lvert \dfrac{a+x}{a-x} \right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\\ ]-\infty\,;-\lvert a\rvert[\,, \\ ]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\,,\ ]\lvert a\rvert\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\operatorname{Arcsin} x$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\operatorname{Arcsin} \dfrac{x}{\lvert a\rvert}$	$]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\begin{cases} \operatorname{Argch} x \\ -\operatorname{Argch}(-x) \\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]1\,;+\infty[\\ ]-\infty\,;-1[\\ ]-\infty\,;-1[\text{ ou }]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$a \in \mathbb{R}^*$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$	$\begin{cases} a>0\ :\ \mathbb{R} \\ a<0\ : \\ \quad]-\infty\,;-\sqrt{-a}[\\ \quad \text{ou }]\sqrt{a}\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$		$\dfrac{1}{2} \operatorname{Arctan} x - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

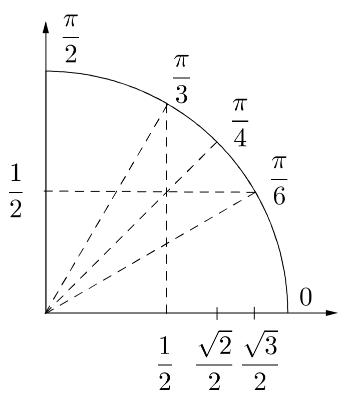
Trigonométrie

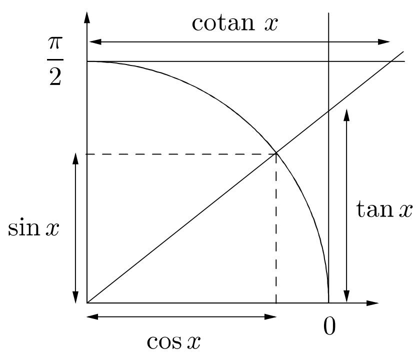
I Fonctions circulaires

1 Premières propriétés

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
Ensemble de définition	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Période	2π	2π	π	π
Parité	impaire	paire	impaire	impaire
$f(\pi - x)$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\tan x$	$-\text{cotan } x$
$f(\pi + x)$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\tan x$	$\text{cotan } x$
$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$\cos x$	$\sin x$	$\text{cotan } x$	$\tan x$
$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\text{cotan } x$	$-\tan x$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
Dérivée	$\cos x$	$-\sin x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$-1 - \text{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

2 Valeurs remarquables





	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	0
$\tan x$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\text{cotan}\ x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

II Fonctions réciproques des fonctions circulaires

1 Définition

Les périodicités et les symétries des fonctions trigonométriques introduisent une difficulté pour résoudre les équations du type $\sin x = \lambda$. Par exemple, $\pi/6$, $5\pi/6$ et $\pi/6 + 4\pi$ ont tous la même image par la fonction sinus. Les « fonctions circulaires réciproques » Arcsin , Arccos , Arctan et Arccot ne sont pas de vraies réciproques, puisque les fonctions de départ ne sont pas des bijections ; ajoutons qu'elles ne sont *pas* périodiques. Il faut les combiner avec la périodicité et, pour sinus et cosinus, avec les symétries par rapport à l'axe des ordonnées et l'axe des abscisses respectivement.

- Si $\sin x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = \pi - \text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\cos x = \lambda \in [-1\,;1]$, alors $x = \text{Arccos}\ \lambda \mod 2\pi$
  ou $x = -\text{Arcsin}\ \lambda \mod 2\pi$
- Si $\tan x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arctan}\ \lambda \mod \pi$
- Si $\text{cotan}\ x = \lambda \in \mathbb{R}$, alors $x = \text{Arccot}\ \lambda \mod \pi$

Le problème réciproque est, lui, sans difficulté : si $x = \text{Arcsin}\ \lambda$, alors $\sin x = \lambda$.

2 Propriétés

	Arcsin x	Arccos x	Arctan x	Arccot x
Ensemble de définition	$[-1\,;1]$	$[-1\,;1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Ensemble image	$[-\pi/2\,;\pi/2]$	$[0\,;\pi]$	$]-\pi/2\,;\pi/2[$	$]0\,;\pi[$
Période	aucune	aucune	aucune	aucune
Parité	impaire	aucune	impaire	aucune
Ensemble de dérivabilité	$]-1\,;1[$	$]-1\,;1[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Dérivée	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

3 Relations

$$\text{Arccos}\ x + \text{Arcsin}\ x = \pi/2$$

$$\text{Arctan}\ x + \text{Arctan}\ y = \text{Arctan}\ \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi \quad \text{où} \quad \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \\ 1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } xy > 1 \text{ et } x, y \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\ x + \text{Arccot}\ x = \pi/2$$

$$\text{Arccot}\ x = \begin{cases} \text{Arctan}\ 1/x & \text{si } x > 0 \\ \pi + \text{Arctan}\ 1/x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Arctan}\ x + \text{Arctan}\ 1/x = \text{sign}(x) \times \pi/2$$

III Formules

1 Corollaires du théorème de Pythagore

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{1+\cot^2 x} = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

2 Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

3 Arc double, arc moitié

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \end{aligned}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$$

En notant $t = \tan\dfrac{x}{2}$ comme dans les règles de Bioche, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

4 Formule de Moivre

$$(\cos a + \mathrm{i}\ \sin a)^n = \cos na + \mathrm{i}\ \sin na$$

d'où

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos^3 a - 3\cos a\ \sin^2 a\\ &= 4\cos^3 a - 3\cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3a &= 3\cos^2 a\ \sin a - \sin^3 a\\ &= 3\sin a - 4\sin^3 a\end{aligned}$$

$$\tan 3a = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

5 Arcs en progression arithmétique

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \frac{\sin\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}} \qquad \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\cos\dfrac{nx}{2}\sin\dfrac{(n+1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

IV Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$$

$$\mathrm{ch}\,(a+b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p + \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a+b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b + \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p + \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a+b) = \frac{\mathrm{th}\ a + \mathrm{th}\ b}{1 + \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p + \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p+q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\mathrm{ch}\,(a-b) = \mathrm{ch}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{sh}\ b \qquad \mathrm{ch}\ p - \mathrm{ch}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p+q}{2}\ \mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}$$

$$\mathrm{sh}\,(a-b) = \mathrm{sh}\ a\,\mathrm{ch}\ b - \mathrm{sh}\ b\,\mathrm{ch}\ a \qquad \mathrm{sh}\ p - \mathrm{sh}\ q = 2\,\mathrm{sh}\ \frac{p-q}{2}\ \mathrm{ch}\ \frac{p+q}{2}$$

$$\mathrm{th}\,(a-b) = \frac{\mathrm{th}\ a - \mathrm{th}\ b}{1 - \mathrm{th}\ a\ \ \mathrm{th}\ b} \qquad \mathrm{th}\ p - \mathrm{th}\ q = \frac{\mathrm{sh}\,(p-q)}{\mathrm{ch}\ p\ \ \mathrm{ch}\ q}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}\ 2x &= \mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x\\ &= 2\,\mathrm{ch}^2\, x - 1\\ &= 1 + 2\,\mathrm{sh}^2\, x\end{aligned} \qquad \mathrm{ch}^2\, x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x + 1}{2}$$

$$\mathrm{sh}\ 2x = 2\,\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{ch}\ x \qquad \mathrm{sh}^2\, x = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{2}$$

$$\mathrm{th}\ 2x = \frac{2\,\mathrm{th}\ x}{1 + \mathrm{th}^2\, x} \qquad \mathrm{th}\ x = \frac{\mathrm{sh}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x + 1} = \frac{\mathrm{ch}\ 2x - 1}{\mathrm{sh}\ 2x}$$

En notant $t = \text{th}\,\dfrac{x}{2}$, on a :

$$\text{sh}\;x = \frac{2t}{1-t^2} \qquad\qquad \text{ch}\;x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$(\text{ch}\;a + \text{sh}\;a)^n = \text{ch}\;na + \text{sh}\;na$$

d'où

$$\begin{aligned}\text{ch}\;3a &= \text{ch}^3 a + 3\,\text{ch}\;a\,\text{sh}^2 a\\ &= 4\,\text{ch}^3 a - 3\,\text{ch}\;a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{sh}\;3a &= 3\,\text{ch}^2 a\,\text{sh}\;a + \text{sh}^3 a\\ &= 4\,\text{sh}^3 a + 3\,\text{sh}\;a\end{aligned}$$

$$\text{th}\;3a = \frac{3\,\text{th}\;a + \text{th}^3 a}{1 + 3\,\text{th}^2 a}$$

Bibliographie

[1] Seymour LIPSCHUTZ « *Série schaum- Algèbre Linéaire- Cours et problèmes* », Edition McGraw-Hill Inc, New York, 1973.

[2] Daniel Fredon, Myriam MAUMY-BERTRAND et Frédéric BERTRAND « *Mathématiques Algèbre et géométrie en 30 fiches* », Edition DUNOD- Paris 2009.

[3] Jean-Marie MONIER, « *Les Méthodes Et Exercices De Mathématiques PCSI-PTSI* », Edition DUNOD- Paris 2008.

[4] http://ticewims.unice.fr/wims/wims.cgi?module=H6/set/docset.fr

[5] https://fr.wikibooks.org/wiki/Algèbre/Théorie_élémentaire_des_ensembles