

1 日 1 進次郎 (構成的に証明できないトートロジー集)

2020 年 7 月 27 日, しらそら

<https://sirasolra.github.io/>

2020 年の 7 月 18 日から 7 月 27 日までの 10 日間 Twitter で投稿し続けていた自然演繹の証明木集です. 構成的には証明できない (i.e. 背理法, 排中律, 二重否定の除去, etc. を使う必要がある) 定理のみを敢えて取り扱っています. 使用する推論規則は $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ の導入 (I) および除去規則 (E), 爆発律 (EFQ), 背理法 (RAA) です. $\alpha \leftrightarrow \beta$ は $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ と定義します.

SHINJIRO 1. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \rightarrow P$.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg P]^3}{\perp} \text{RAA}^3}{(Q \rightarrow P) \rightarrow P} \rightarrow I^2}{((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \rightarrow P} \rightarrow I^1$$
$$\frac{\frac{[\neg P]^3}{P} \neg E}{\frac{[Q \rightarrow P]^2}{Q} \rightarrow E} \rightarrow E$$
$$\frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow Q]^1}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^4$$
$$\frac{\frac{[\neg P]^3}{\perp} \text{EFQ}}{Q} \neg E$$
$$\frac{P \rightarrow Q}{Q} \rightarrow E$$

NOTE: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ は \rightarrow と \perp のみで自然演繹体系を定義する際に $\alpha \vee \beta$ を表現する手段として用いられます.

SHINJIRO 2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$.

$$\frac{\frac{[\neg Q]^2}{\neg P} \neg I^3}{\neg Q \rightarrow \neg P} \rightarrow I^2$$
$$\frac{[P \rightarrow Q]^1}{Q} \neg E$$
$$\frac{[P]^3}{Q} \rightarrow E$$
$$\frac{[\neg Q \rightarrow \neg P]^4}{\neg P} \rightarrow E$$
$$\frac{[\neg Q]^6}{Q} \text{RAA}^6$$
$$\frac{[P]^5}{Q} \neg E$$
$$\frac{\neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^5$$
$$\frac{(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P}{(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow P \rightarrow Q} \rightarrow I^4$$
$$\frac{(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}{(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)} \leftrightarrow I$$

NOTE: 対偶の同値性です. 対称性が見て取れますが左側のみ構成的です.

SHINJIRO 3. $\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg(P \wedge Q)]^1}{\frac{\frac{[\neg(\neg P \vee \neg Q)]^2}{\frac{\frac{[\neg P]^3}{\neg P \vee \neg Q} \vee I}{\neg E} \quad \frac{[\neg Q]^4}{\neg P \vee \neg Q} \vee I}{\frac{\perp}{P} \text{RAA}^3} \quad \frac{\perp}{Q} \text{RAA}^4} \wedge I} \neg E} \\
 \frac{\frac{\perp}{\neg P \vee \neg Q} \text{RAA}^2}{\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q} \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: de Morgan の法則の導出です. de Morgan の法則はこれを含めて 4 つありますが構成的な導出ができないのはこの定理のみです.

SHINJIRO 4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P \rightarrow Q]^1}{\frac{Q}{\neg P \vee Q} \vee I} \rightarrow E \\
 \frac{[\neg(\neg P \vee Q)]^2}{\frac{\perp}{\neg P \vee Q} \text{RAA}^2} \neg E \\
 \frac{\frac{Q}{\neg P \vee Q} \vee I}{(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q} \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: 含意の定義を導出しています. 証明木が大きくなりすぎてしまうので省略していますが, 逆は構成的に証明できます.

SHINJIRO 5. $(P \rightarrow Q) \vee P$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee P)]^1}{\frac{[P]^2}{(P \rightarrow Q) \vee P} \vee I} \neg E \\
 \frac{\frac{\perp}{Q} \text{EFQ}}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^2 \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee P)]^1}{(P \rightarrow Q) \vee P} \neg E \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee P} \text{RAA}^1
 \end{array}$$

NOTE: 一般化排中律です. $Q := \perp$ と代入すると通常の排中律になります.

SHINJIRO 6. $(P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \wedge R \rightarrow Q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R]^1 \quad \frac{\frac{[P \wedge R]^2}{P} \wedge E \quad \frac{[\neg Q]^3}{P \wedge \neg Q} \wedge I}{P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R} \rightarrow E \quad \frac{[P \wedge R]^2}{R} \wedge E}{\neg R} \neg E \\
 \frac{\perp}{Q} \text{RAA}^3 \\
 \frac{P \wedge R \rightarrow Q}{(P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \wedge R \rightarrow Q} \rightarrow I^2 \\
 \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: このような構造をしている数学の定理をよく目にすると思います. 覚えておいて損はないはずです.

SHINJIRO 7. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg P]^2 \quad \frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow P]^1}{P} \rightarrow E \quad \frac{\frac{[\neg P]^2}{\perp} \text{EFQ} \quad \frac{[P]^3}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^3}{P \rightarrow Q} \rightarrow E}{\perp} \neg E \\
 \frac{\perp}{P} \text{RAA}^2 \\
 ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: Peirce の法則とよばれる命題です. TaPL の Pierce さんとは別人です.

SHINJIRO 8. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^2}{Q \rightarrow P} \rightarrow I \quad \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))]^1}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \vee I \quad \neg E \\
 \frac{\perp}{Q} \text{EFQ} \\
 \frac{P \rightarrow Q}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \rightarrow I^2 \quad \vee I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))]^1}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \neg E \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \text{RAA}^1
 \end{array}$$

NOTE: 普段はあまり意識しないと思いますが、命題が2つあったらどちらの命題も必要性か充分性のどちらかを満たしているのって面白くないですか。私は面白いと思います。

SHINJIRO 9. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[Q]^2}{P \rightarrow Q} \rightarrow I \quad \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R))]^1}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \vee I \quad \neg E \\
 \frac{\perp}{R} \text{EFQ} \\
 \frac{Q \rightarrow R}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^2 \quad \vee I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R))]^1}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \neg E \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \text{RAA}^1
 \end{array}$$

NOTE: さっきの定理の一般化です。 $R := P$ と代入すると先ほどの定理になります。また $P := \top, R := \perp$ と代入すると排中律になります。対称性が美しいですね。

SHINJIRO 10. $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P \wedge Q \rightarrow R]^1}{R} \quad \frac{[P]^4 \quad [Q]^3}{P \wedge Q} \wedge I \quad \rightarrow E \\
 \frac{P \rightarrow R}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^4 \quad \vee I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))]^2}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \neg E \\
 \frac{\perp}{R} \text{EFQ} \\
 \frac{Q \rightarrow R}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^3 \quad \vee I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))]^2}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \neg E \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \text{RAA}^2 \\
 \frac{(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)}{(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: 割と大きな証明木ですね, 特にコメントすることはありません.

2期もお楽しみに! (やるかわかんないけど)