

1 日 1 進次郎 (構成的に証明できないトートロジー集)

2020 年 7 月 27 日, しらそら

<https://sirasolra.github.io/>

2020 年の 7 月 18 日から 7 月 27 日までの 10 日間 Twitter で投稿し続けていた自然演繹の証明木集です. 構成的には証明できない (i.e. 背理法, 排中律, 二重否定の除去, etc. を使う必要がある) 定理のみを敢えて取り扱っています. 使用する推論規則は $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ の導入 (I) および除去規則 (E), 爆発律 (EFQ), 背理法 (RAA) です. $\alpha \leftrightarrow \beta$ は $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ と定義します.

SHINJIRO 1. $((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \rightarrow P$.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg P]^3}{\perp} \text{RAA}^3}{(Q \rightarrow P) \rightarrow P} \rightarrow I^2}{((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P) \rightarrow P} \rightarrow I^1$$
$$\frac{\frac{[\neg P]^3}{P} \neg E}{\frac{[Q \rightarrow P]^2}{Q} \rightarrow E} \rightarrow E$$
$$\frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow Q]^1}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^4$$
$$\frac{\frac{[\neg P]^3}{\perp} \text{EFQ}}{Q} \rightarrow E$$
$$\frac{[\neg P]^3}{P} \neg E$$

NOTE: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$ は \rightarrow と \perp のみで自然演繹体系を定義する際に $\alpha \vee \beta$ を表現する手段として用いられます.

SHINJIRO 2. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$.

$$\frac{\frac{[\neg Q]^2}{\neg P} \neg I^3}{\neg Q \rightarrow \neg P} \rightarrow I^2$$
$$\frac{[P \rightarrow Q]^1}{Q} \neg E$$
$$\frac{[P]^3}{P} \rightarrow E$$
$$\frac{[\neg Q \rightarrow \neg P]^4}{\neg P} \rightarrow E$$
$$\frac{[\neg Q]^6}{Q} \text{RAA}^6$$
$$\frac{[P]^5}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^5$$
$$\frac{(\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow P \rightarrow Q}{(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)} \leftrightarrow I$$

NOTE: 対偶の同値性です. 対称性が見て取れますが左側のみ構成的です.

SHINJIRO 3. $\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q.$

$$\frac{\begin{array}{c} \frac{\frac{[\neg(P \wedge Q)]^1}{\perp} \text{RAA}^2}{\neg P \vee \neg Q} \rightarrow I^1 \\ \frac{[\neg(\neg P \vee \neg Q)]^2}{\perp} \text{RAA}^3 \quad \frac{[\neg(\neg P \vee \neg Q)]^2}{\perp} \text{RAA}^4 \\ \frac{[\neg(\neg P \vee \neg Q)]^2}{\frac{[\neg P]^3}{\neg P \vee \neg Q} \vee I} \neg E \quad \frac{[\neg(\neg P \vee \neg Q)]^2}{\frac{[\neg Q]^4}{\neg P \vee \neg Q} \vee I} \neg E \end{array}}{P \wedge Q} \wedge I$$

NOTE: de Morgan の法則の導出です. de Morgan の法則はこれを含めて 4 つありますが構成的な導出ができないのはこの定理のみです.

SHINJIRO 4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg P \vee Q$.

$$\frac{\frac{[P \rightarrow Q]^1}{\frac{[\neg(\neg P \vee Q)]^2}{\frac{\perp}{\neg P \vee Q} \text{RAA}^2} \rightarrow \text{I}^1} \quad \frac{\frac{Q}{\neg P \vee Q} \vee \text{I}}{\frac{[\neg(\neg P \vee Q)]^2}{\frac{\perp}{\neg P \vee Q} \text{RAA}^2} \rightarrow \text{E}} \quad \frac{\frac{[P \rightarrow Q]^1}{\frac{Q}{\neg P \vee Q} \vee \text{I}} \rightarrow \text{E} \quad \frac{[\neg(\neg P \vee Q)]^2}{\frac{[\neg(\neg P \vee Q)]^2}{\neg P \vee Q} \vee \text{I}} \rightarrow \text{E}$$

NOTE: 含意の定義を導出しています。証明木が大きくなりすぎてしまうので省略していますが、逆は構成的に証明できます。

SHINJIRO 5. $(P \rightarrow Q) \vee P$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee P)]^1 \quad \frac{[P]^2}{(P \rightarrow Q) \vee P} \vee I}{\neg E} \\
 \frac{\frac{\frac{\perp}{Q} \text{EFQ}}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^2}{(P \rightarrow Q) \vee P} \vee I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee P)]^1 \quad \frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee P} \text{RAA}^1}{\neg E}
 \end{array}$$

NOTE: 一般化排中律です. $Q := \perp$ と代入すると通常の排中律になります.

SHINJIRO 6. $(P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \wedge R \rightarrow Q$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P \wedge R]^2}{P} \wedge E \quad \frac{[\neg Q]^3}{P \wedge \neg Q} \wedge I \quad \frac{[P \wedge R]^2}{R} \wedge E \\
 \frac{[P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R]^1 \quad \frac{P \wedge \neg Q}{\neg R} \rightarrow E}{\neg R} \rightarrow E \\
 \frac{\frac{\perp}{Q} \text{RAA}^3}{P \wedge R \rightarrow Q} \rightarrow I^2 \\
 \frac{(P \wedge \neg Q \rightarrow \neg R) \rightarrow P \wedge R \rightarrow Q}{\neg R} \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: このような構造をしている数学の定理をよく目にすると思います. 覚えておいて損はないはずです.

SHINJIRO 7. $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[\neg P]^2 \quad \frac{[P]^3}{\perp} \neg E}{\frac{\perp}{Q} \text{EFQ}} \rightarrow E \\
 \frac{[(P \rightarrow Q) \rightarrow P]^1 \quad \frac{P \rightarrow Q}{P} \rightarrow I^3}{P} \rightarrow E \\
 \frac{[\neg P]^2 \quad P}{\perp} \neg E \\
 \frac{\perp}{P} \text{RAA}^2 \\
 \frac{((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P}{\perp} \rightarrow I^1
 \end{array}$$

NOTE: Peirce の法則とよばれる命題です。TaPL の Pierce さんとは別人です。

SHINJIRO 8. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$.

$$\begin{array}{c}
 \frac{[P]^2}{Q \rightarrow P} \rightarrow I \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))]^1 \quad \frac{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)}{Q \rightarrow P} \vee I}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \neg E \\
 \frac{\perp}{Q} \text{EFQ} \\
 \frac{P \rightarrow Q}{P \rightarrow Q} \rightarrow I^2 \\
 \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))]^1 \quad \frac{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)}{P \rightarrow Q} \vee I}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \neg E \\
 \frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)} \text{RAA}^1
 \end{array}$$

NOTE: 普段はあまり意識しないと思いますが、命題が2つあったらどちらの命題も必要性か十分性のどちらかを満たしているのって面白くないですか。私は面白いと思います。

SHINJIRO 9. $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$.

$$\frac{\frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R))]^1}{\frac{\frac{\frac{[Q]^2}{P \rightarrow Q} \rightarrow I}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \vee I}{\neg E}} \quad \frac{\frac{\frac{\perp}{R} \text{ EFQ}}{Q \rightarrow R} \rightarrow I^2}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \vee I}{\neg E} \quad \frac{[\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R))]^1}{\frac{\perp}{(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)} \text{ RAA}^1}$$

NOTE: さっきの定理の一般化です. $R := P$ と代入すると先ほどの定理になります. また $P := \top, R := \perp$ と代入すると排中律になります. 対称性が美しいですね.

SHINJIRO 10. $(P \wedge Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$.

$$\frac{\frac{\frac{[P]^4 \quad [Q]^3}{P \wedge Q} \wedge I}{[P \wedge Q \rightarrow R]^1} \rightarrow E}{\frac{\frac{R}{P \rightarrow R} \rightarrow I^4}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \vee I} \neg E$$

NOTE: 割と大きな証明木ですね, 特にコメントすることはありません.

2期もお楽しみに！(やるかわかんないけど)