Московский Государственный Университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра МаТИС

Программа государственного экзамена

по направлениям магистратуры
«математика», «математика и компьютерные науки»

по

Рыцари Обеденного Стола

Мая 2024 г.

Содержание

1. Дополнительные главы дифференциальной геометрии

1.1. Параметризованная регулярная кривая, регулярная замена параметра, длина кривой натуральный параметр

1.1.1. Параметризованная регулярная кривая

Опр. 1 ***Параметризованная кривая*** *называются регулярной, если ее вектор скорости $d\vec{r}/dt \neq \vec{0}$ во всеч точках.*

如果一条参数化曲线上的所有点的速度矢量 $d\vec{r}/dt \neq \vec{0}$，那么这条曲线就叫做**正则**曲线。

- 参数化曲线是一种用参数方程来描述的曲线。在数学中，这种表示形式允许我们通过一个或多个参数（通常是时间 t）来表达曲线上的点。这样的表示方法非常适合描述复杂的曲线和运动轨迹。
- 对于一条参数化的曲线，我们通常用向量函数 $\vec{r}(t)$ 来表示，其中 t 是参数，$\vec{t}$ 是从参考点（通常是坐标原点）到曲线上某点的位置向量。当改变参数 t 时，向量 $\vec{r}(t)$ 描述了曲线上的点随 t 的变化而移动的轨迹。
- 如果速度向量在曲线的某点为零，那么在这一点曲线可能有停顿或尖点，这样的点称

为奇点。没有奇点的曲线，即速度向量处处不为零的曲线，提供了更平滑和连续的曲线描述。

1.1.2. Регулярная замена параметра

Опр. 2 *Параметризация гладкой регулярной пара кривой называют натуральной, если в этой пара вектор скорости кривой по модулю равен* 1.

如果平滑正则曲线的一组速度矢量模数为 1，则这对曲线的参数化称为自然参数化。

[圆自然参数化]

假设我们有一个半径为 R 的圆，我们可以使用标准的参数方程来描述它：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$，这里 t 表示从正 x 轴开始的角度，参数 t 的范围通常是从 0 到 2π。

我们可以计算这个参数方程的速度向量：$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-R\sin t, R\cos t)$，速度向量的模长是：$\sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = R$。

因此，我们可以将参数 t 替换为 $\frac{s}{R}$，得到自然参数化的方程：$\vec{r}(s) = (R\cos(\frac{s}{R}), R\sin(\frac{s}{R}))$。在这种情况下，速度向量是：$\frac{d\vec{r}}{ds} = (-\sin(\frac{s}{R}), \cos(\frac{s}{R}))$，这个速度向量的模长是 1，符合自然参数化的要求。

1.1.3. Длина кривой натуральный параметр

Опр. 3 *Длина кривой:* $\vec{r}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, $l = \int_{t_0}^{t} \|\frac{d\vec{r}}{dt}\| dt$.

自然参数化曲线 $\vec{r}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 的长度：$l = \int_{t_0}^{t} \|\frac{d\vec{r}}{dt}\| dt$。

[圆的曲线长度计算]

1. 假设我们有一个半径为 R 的圆，我们可以用以下参数方程来表示这个圆：$\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$，其中 t 是参数，通常表示圆上点的角度，范围从 0 到 2π。这是因为当 t 从 0 变化到 2π 时，描述的点正好绕圆一周。

2. 对给定的圆的参数方程求导，得到速度向量：$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos t, R\sin t) = (-R\sin t, R\cos t)$，

3. 速度向量的模（长度）是：$\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$，这里使用了三角恒等式 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$。

4. 现在我们知道了速度向量的模是 R，我们可以将其带入积分公式计算从 $t_0 = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的积分：$l = \int_0^{2\pi} R\,dt = R\int_0^{2\pi} dt = R \times 2\pi = 2\pi R$，这个结果 $2\pi R$ 正是圆的周长公式，其中 R 是圆的半径。

1.2. Формулы Френе на плоскости и в пространстве. Кривизна и кручение в произвольном параметре

1.2.1. Формулы Френе на плоскости и в пространстве

对于平面上的曲线，主要涉及到两个向量：**切向量** (Tangent vector) 和**法向量** (Normal vector)。这个简化版的框架常常称为平面弗雷内框架。

Пусть $\gamma(s)$ - натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через τ единичный вектор скорости $\dot{\gamma}(s)$ в точке $\gamma(s)$, а через ν —нормированный вектор ускорения в точке $\gamma(s)$, т.е. $\nu = \ddot{\gamma}(s)/\|\ddot{\gamma}(s)\|$. Векторы ν и τ ортогональны.

Пара векторов (τ, ν) называется репером Френе плоской бирегулярной кривой в соответствующей ее точке.

令 $\gamma(s)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的自然参数化双正则曲线。我们用 τ 来表示在点 $\gamma(s)$ 上的单位速度向量 $\dot{\gamma}(s)$，然后用 ν 表示点 $\gamma(s)$ 上的正则化加速度向量，即 $\nu = \ddot{\gamma}(s)/\|\ddot{\gamma}(s)\|$。向量 ν 和 τ 正交的，一对向量 (τ, ν) 被称为平面双正则曲线在其对应点上的 **Frenet** 框架。

Опр. 4 *Регулярная параметрическая кривая $\gamma(s)$ называется бирегулярной, если ее кривизна всюду отлична от нуля.*

如果正则曲线的曲率处处不为 0，则称其为双正则曲线。

---

1. 一个正则曲线是指其速度向量（即第一导数）在任何点都不为零的曲线。这个性质保证了曲线没有尖点或停顿点，使得曲线在每一点都有明确的切线方向。

2. 对于双正则曲线，它不仅需要满足正则性（第一导数非零），还要求其加速度向量（即第二导数）也在任何点都非零。此外，速度向量和加速度向量在曲线上的每一点都必须线性独立，即这两个向量不能共线。

于是，根据这个 Frenet 框架，我们可以给出一个平面上的 Frenet 公式：
В сделанных предположниях，имеет место следующая система уравлений:

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k\nu \\ \dot{\nu} = -k\tau \end{cases}$$

где $k = k(s)$ обозначает кривизну кривой γ в точке $\gamma(s)$.

对于平面上的曲线，主要涉及到三个向量：**切向量** (Tangent vector) 和**法向量** (Normal vector) 以及副法向量。

Пусть $\gamma(s)$ - произвольная натурально параметризованная бирегулярная кривая в евклидовом пространстве. Под репером Френе понимают тройку векторов (τ, ν, β) сопоставленную каждой точке бирегулярной кривой $\gamma(s)$, где:

1. $\tau = \dot{\gamma}(s)$ - единичный касательный вектор,

2. $\nu = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$ - единичный вектор главной нормали,

3. $\beta = [\tau, \nu]$ - единичный вектор бинормали.

令 $\gamma(s)$ 是空间内任意的一条自然参数化的双正则曲线，此时 Frenet 框架可以理解成在该曲线上每个点相匹配的三个向量 (τ, ν, β)，即：

1. $\tau = \dot{\gamma}(s)$ - 单位切向量，（可以这么计算是因为这是一个自然参数化的曲线）

2. $\nu = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}$ - 单位主法向量，

3. $\beta = [\tau, \nu]$ - 单位副法向量。

$\beta = [\tau, \nu] = \tau \times \nu$ 表示的是 τ 和 ν 的外积。

Если s —натуральный параметр вдоль кривой, то векторы τ, ν, β связаны соотношениями:

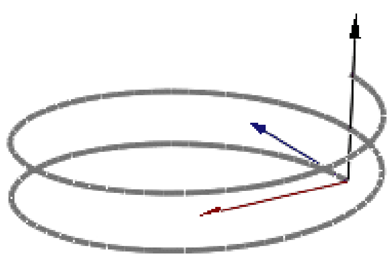
$$\begin{cases} \dot{\tau} = & & k\nu & \\ \dot{\nu} = & -k\tau & & +\kappa\beta \\ \dot{\beta} = & & -\kappa\nu & \end{cases}$$

называемыми формулами Френе. Величины $k = \|\ddot{\gamma}(s)\|$, $\kappa = - < \dot{\beta}, \nu >$ называют, соответственно, кривизной и кручением кривой в данной точке.

Его матрица имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tau} \\ \dot{\nu} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{bmatrix}$$

где матрицы - антисимметричные матрицы.



三个向量的位置关系可以记忆成：[右手定则] 食指指向点运动的方向，中指即是法向量的方向，拇指即是副法向量的方向。

蓝色的箭头 - 切向量，
红色的箭头 - 法向量，
黑色的箭头 - 副法向量。

1.2.2. Кривизна и кручение в произвольном параметре

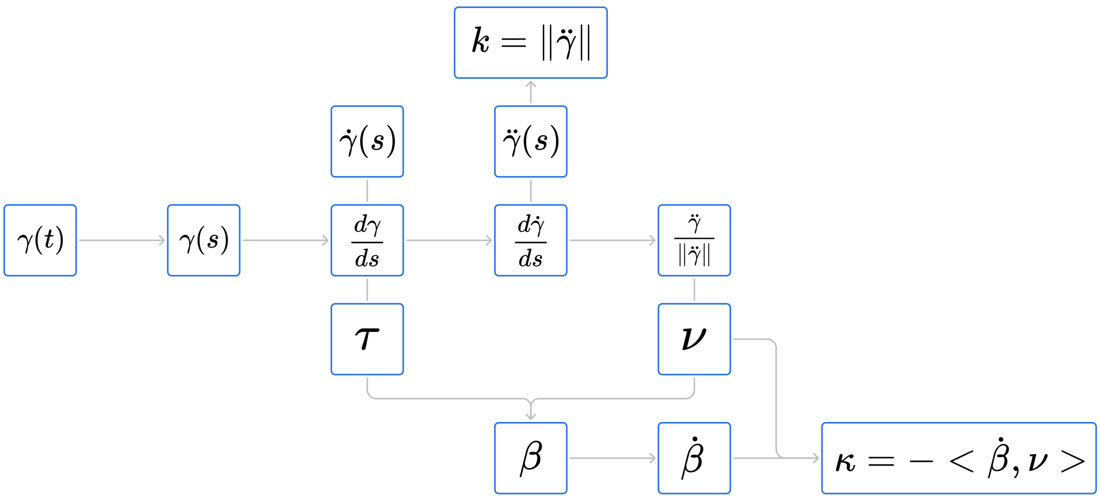
Опр. 5 *Величины* $k = \|\ddot{\gamma}(s)\| = \|\frac{d\dot{\gamma}}{ds}\|$, $\kappa = -<\dot{\beta}, \nu>$ *называют, соответственно, кривизной и кручением кривой в данной точке.*

$$k = \frac{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

$$\kappa = \frac{(\gamma'(t) \times \gamma''(t)) \cdot \gamma'''(t)}{\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\|^2}$$

这里，$\gamma'(t)$ 是曲线的一阶导数（速度向量），$\gamma''(t)$ 是二阶导数（加速度向量），$\cdot$ 和 $\times$ 表示向量的内积和外积，公式分号下的部分起到归一化的作用，可以理解成抵消掉若干次幂的 dt。

当曲线用非自然参数（即非弧长参数）描述时，曲率和扭率的计算需要更多的导数运算，因为需要调整由于参数变化率不均匀带来的影响。这与用弧长参数化的曲线不同，后者的速度向量的模长恒为 1，简化了曲率和扭率的计算。



1.3. Первая и вторая квадратичная формы поверхности. Изометрии поверхности. Главные кривизны, гауссова и средняя кривизны. Теорема Менье, теорема Эйлера

1.3.1. Первая и вторая квадратичная формы поверхности

Опр. 6 *Гладкая параметрическая поверхность называется регулярной, если ее базисные касательные векторы линейно независимы в каждой точке параметризующей области.*

如果平滑参数曲面的基切线向量在参数化区域的每一点上都线性独立，则该曲面称为**正则曲面**。

- 平滑参数曲面：通过一个平滑的映射函数 $\gamma(u, v)$ 从一个参数域（通常是二维的 (u, v) 域）映射到三维空间的曲面。这个函数应该是连续可微的，以确保曲面的平滑性。

- 基切线向量：对于曲面 $\gamma(u,v)$，其基础切向量由这个映射函数关于参数 u 和 v 的偏导数给出，即 $\gamma_u = \frac{\partial\gamma}{\partial u}, \gamma_v = \frac{\partial\gamma}{\partial v}$。这两个向量在曲面上每一点处的切平面内，描述了曲面在 u 和 v 方向的变化率。
- 基切向量 γ_u, γ_v 在曲面的每一点上线性独立的意义在于，这两个向量不共线。
- 曲面的正则性保证了切平面在曲面的每一点都是良定义的，这对于曲面的微分几何分析至关重要。如果曲面在某点的基础切向量不是线性独立的（即这些向量在某些点共线或者某个向量为零），那么在这些点上的切平面是未定义的，这可能意味着曲面在那些点上有奇异性，如尖点或褶皱。

首先，我们以无穷小距离度量入手：

1. 假设 $\vec{r}(u,v)$ 是一个曲面 S 的参数化表示，其中 u 和 v 是曲面上的参数（这里是任意参数，不一定非得是自然化参数）。该函数 $\vec{r}$ 将参数空间中的点 (u,v) 映射到三维空间中的曲面 S 上的点。
2. 考虑曲面上两个无穷接近的点，这两点在参数空间中对应于 (u,v) 和 $(u+du, v+dv)$。这两点间的位移矢量 $d\vec{r}$ 可以通过曲面函数 $\vec{r}(u,v)$ 的全微分来计算：
$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}dv = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$
这里，$\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 分别是 $\vec{r}$ 关于 u 和 v 的偏导数，它们在曲面上的每一点形成切平面的一组基向量。
3. 要求两点间的无穷小距离，我们需要计算 $d\vec{r}$ 的长度的平方，这就是第一基本形式 ds^2：
$$ds^2 = (d\vec{r}) \cdot (d\vec{r})$$
将 $d\vec{r}$ 代入，我们得到：
$$ds^2 = (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv) \cdot (\vec{r}_u du + \vec{r}_v dv)$$
展开这个点积，我们有：
$$ds^2 = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)du^2 + 2(\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)dudv + (\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v)dv^2$$
$$ds^2 = (du, dv)\begin{pmatrix} (r_u, r_u) & (r_u, r_v) \\ (r_u, r_v) & (r_v, r_v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$
定义 $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$，$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$，$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$，这样我们得到了第一基本形式的经典表达式：
$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Опр. 7 *1-ая квадратичная форма поверхности M в точке P - это квадратичная форма на T_pM.*

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

曲面 M 上某一点 P 的第一基本形式 - 该点切空间上的二次型函数。

如果有一个曲面 S 被参数化为 $\vec{r}(u,v)$，其中 u 和 v 是曲面上的坐标参数，那么曲面的第一基本形式 I 定义为：

$$I = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

其中：

1. $E = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_u \rangle$ 是 $\vec{r}_u$ 的长度的平方。
2. $F = \langle \vec{r}_u, \vec{r}_v \rangle$ 是 $\vec{r}_u$ 和 $\vec{r}_v$ 的点积。
3. $G = \langle \vec{r}_v, \vec{r}_v \rangle$ 是 $\vec{r}_v$ 的长度的平方。

这些量 E, F, G 称为曲面的第一基本形式的系数，它们反映了曲面的局部拉伸和压缩的情况。在这里，参数选用 s 还是 t 并不重要，因为公式主要依赖于 u 和 v 来描述。

1.3.2. Вторая квадратичная формы поверхности

Опр. 8

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

首先，我们以衡量曲面在其单位法向量方向上变化的量入手：
第二基本形式通常定义为一个描述曲面在其单位法向量方向上变化的量。
具体来说，它是曲面在给定点上的切向量变化投影到法线方向的量。

$$II(\vec{a}) = <\vec{r}'', \vec{n}>, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

这里的系数 $L, M,$ 和 N 定义为：

1. $L = \langle \vec{r}_{uu}, \vec{n} \rangle,$
2. $M = \langle \vec{r}_{uv}, \vec{n} \rangle,$
3. $N = \langle \vec{r}_{vv}, \vec{n} \rangle.$

其中，$\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{uv},$ 和 $\vec{r}_{vv}$ 分别是曲面的二阶偏导数，$\vec{n}$ 是曲面在对应点的单位法向量。Репер $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{m})$ - 自然标架。

$$(\vec{r}(u,v))' = \vec{r}_u \cdot \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$(\vec{r}(u,v))'' = \vec{r}_{uu} \cdot (\frac{du}{dt})^2 + \vec{r}_{uv} \cdot (\frac{du}{dt})(\frac{dv}{dt}) + \vec{r}_{vv} \cdot (\frac{dv}{dt})^2 + \vec{r}_u \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \vec{r}_v \cdot \frac{d^2v}{dt^2}$$

$$\begin{aligned} < \vec{r}'', \vec{n} > &= (\vec{r}_{uu} \cdot \vec{n}) \cdot (\frac{du}{dt})^2 + 2(\vec{r}_{uv}, \vec{n})(\frac{du}{dt}) \cdot (\frac{dv}{dt}) + \vec{r}_u \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + \vec{r}_v \cdot \frac{d^2v}{dt^2} \\ &= (u', v') \begin{pmatrix} (\vec{r}_{uu}, n) & (\vec{r}_{uv}, n) \\ (\vec{r}_{uv}, n) & (\vec{r}_{vv}, n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= (u', v') \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3.3. Главные кривизны, гауссова и средняя кривизны

Т.ч. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$: λ_1, λ_2 называются главной кривизной поверхности в точке P, а соотв. векторы e_1 и e_2 - главная направление.

当 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，这表明我们在分析曲面的局部属性时使用的坐标系是一个**正交坐标系**，并且这个坐标系是在曲面上度量属性“平整”的，即没有缩放的畸变。此时，$II = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ 的对应位置上就是两个主曲率，对应的基向量就是两个主方向。

Как искать λ_1, λ_2?

$$\det(II - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(I^{-1}II - \lambda E) = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$$

$$(II - \lambda_1 I)\vec{e}_1 = 0, (II - \lambda_2 I)\vec{e}_2 = 0 \Rightarrow \vec{e}_1, \vec{e}_2$$

Средняя кривизна -

$$H = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(I^{-1} \cdot II)$$

$$H = \frac{EN - 2MG + FL}{EG - F^2}$$

Гауссова кривизна -

$$K = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(I^{-1} \cdot II)$$

$$K = \frac{\det II}{\det I} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Есть: $\lambda^2 - H\lambda + K = 0$, λ_1, λ_2 - Корень этого уравнения.

1.3.4. Теорема Менье

曲面的平面截面曲率（剖面曲率）

曲面的平面截面曲率是指曲面与通过其上一点的某一平面的交线的曲率。对于曲面上的任一点，可以通过该点作多个不同方向的剖面，每个剖面会切出曲面上的一条曲线，这些曲线的曲率称为该点的剖面曲率。

1. 当截面平面包含曲面在该点的法线时，交线的曲率称为法曲率。
2. 不同的截面方向会产生不同的剖面曲率，其中的最大值和最小值对应于曲面在该点的两个主曲率。

Опр. 9 *Для кривизны нормального сечения имеет место формула:* $k_n(a) = \frac{II(a)}{I(a)}$.

对于法向截面的曲率，该公式成立，这里的 a 指的是在切平面上的某一个方向的方向向量。

Теорема 1 ***Теорема Менье (о кривизне наклонного сечения)***. *Пусть через точку P в направлении вектора $a \in T_p$ проведено сечение плоскостью, образующей угол $\theta \in (0, \pi/2)$ с плоскостью нормального сечения в точке , проходящего в направлении того же вектора . Тогда кривизна кривой, полученной наклонным сечением, в точке P равна $\|k_n(a)\|/\cos\theta$.*

假设在矢量 $a \in T_p$ 的方向上经过点 P 的平面与经过同一矢量 a 的方向上的点 P 的法线截面形成一个角度 $\theta \in (0, \pi/2)$ 。那么在点 P 的斜截面得到的曲线的曲率为 $\|k_n(a)\|/\cos\theta$。

---

1. **斜截面上的曲率**：在点 P 处，由斜截面与曲面的交线形成的曲线，其曲率 κ_s 与法截面上曲线的曲率 $k_n(a)$ 之间有特定的关系。法截面上的曲率 $k_n(a)$ 是沿向量 a 方向的正常截面（法截面）曲率。
2. **曲率的关系式**：斜截面上的曲率 κ_s 等于法截面曲率 $k_n(a)$ 除以 $\cos\theta$。数学表达为：

$$\kappa_s = \frac{\|k_n(a)\|}{\cos\theta}$$

这里的 $\cos\theta$ 是因为当截面与法线方向的夹角 θ 增大时，截面上的曲率相对于法截面上的曲率在数值上会增加（即曲面在斜截面上显得更弯曲）。

1.3.5. Терема Эйлера

Теорема 2 ***Теорема (терема Эйлера)***. *Пусть направление вектора v образует с направлением вектора e_1 угол φ. Тогда для нормальной кривизны в направлении вектора и имеет место равенство:*

$$k_n(v) = \lambda_1 \cos^2\varphi + \lambda_2 \sin^2\varphi$$

假设向量 v 形成的角度与向量 e_1 的角度为 φ。则对于法向曲率在向量 v 方向上的值，有如下关系式成立：

这个公式说明，在曲面上一个给定点处，沿任何方向的法向曲率 $k_n(v)$ 可以通过该点的两个主曲率 λ_1 和 λ_2 来计算。这里，φ 是向量 v 与第一个主曲率方向 e_1 之间的角度。该公式利用三角函数的平方来加权两个主曲率，提供了一个计算曲面在任意方向上曲率的强大工具。

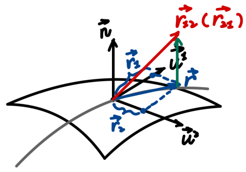
1.4. Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена, теорема Гаусса

1.4.1. Деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена

$\vec{r}(u,v) : (u,v) \to (u^1, u^2), \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{u}^i}, \vec{n}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{u}^i}$

$\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle = g_{ij}, \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = g$ - 1-ая кв. форма,

$\langle \vec{r}_{ij}, \vec{n} \rangle = b_{ij}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = b$ - 2-ая кв. форма, $\vec{r}_{ij} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^i \partial u^j}$.



$$\vec{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^1 \vec{r}_1 + \Gamma_{ij}^2 \vec{r}_2 + c_{ij} \vec{n}$$

$$\vec{n}_i = l_i^1 \vec{r}_1 + l_i^2 \vec{r}_2 + d_i \vec{n}$$

- 切向量 $\vec{r}$ 对两个基向量方向的混合偏导 $\vec{r}_{ij}$，本质反映了这个方向上“扭动”的程度，等于投影在切平面上的部分加上法向量分量。
- $\vec{n}_i = \frac{\partial \vec{n}}{\partial \vec{u}^i}$ 表示法向量在基切向量方向的变化趋势，由于这里的 $\vec{n}$ 是单位法向量，所以 $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = 1$，于是对 u^i 求导，$\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \frac{\partial}{\partial u^i} 1 = 0$，而 $\frac{\partial}{\partial u^i} \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle = \left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i}, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i} \right\rangle$，根据对称性原理，$2 \left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i}, \vec{n} \right\rangle = 0$，所以 $\left\langle \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^i}, \vec{n} \right\rangle = 0$，可以看出法向量对基切向量方向的偏导与单位法向量是正交的，于是 $d_i = 0$。
- 克里斯托夫符号的定义：$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$

[二维曲面上的克里斯托夫符号特例]
这里主要突出去和指标 l 的作用，其值就是维度数。

1. 假设我们有一个二维曲面，其度量张量 g_{ij} 以及其逆 g^{ij} 定义如下：

   $$g_{ij} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}$$

   $$g^{ij} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix}$$

   这里，g_{ij} 可以代表曲面的局部度量，例如，对于简单的球面或椭球面的某个区域。

2. 根据定义，克里斯托夫符号 Γ_{ij}^k 计算如下：

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

在二维曲面上，索引 i, j, k, l 只能取值 1 或 2。我们将详细计算 Γ^1_{11} 作为一个特例：

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} g^{1l} \left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{1l}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^l} \right)$$

3. 在这个表达式中，指标 l 被求和，意味着我们需要分别计算 $l = 1$ 和 $l = 2$ 的情况，并将结果相加：

   1. 当 $l = 1$ 时：
   $$g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right)$$

   2. 当 $l = 2$ 时：
   $$g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} \right)$$

   最终，Γ^1_{11} 就是这两个表达式的和。

Опр. 10 *Формулами Гаусса-Вейнгартена называются следующие соотношения, связывающие производные векторов репера $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ по u^1, u^2 с векторами репера:*

$$\mathbf{r}_{ij} = \Gamma^1_{ij}\mathbf{r}_1 + \Gamma^2_{ij}\mathbf{r}_2 + b_{ij}\mathbf{n} \quad (1)$$

$$\mathbf{n}_i = b^k_i \mathbf{r}_k \quad (2)$$

Очевидными свойствами коэффициентов в этих формулах являются:

- *симметричность коэффициентов Γ^k_{ij} по нижним индексам, т.е. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, что вытекает из равенства $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$.*
- *в формуле 1 коэффициент при $\mathbf{n}$ равен b_{ij}, что легко получить, домножив равенство 1 скалярно на $\mathbf{n}$.*
- *в правой части формулы 2 коэффициент при $\mathbf{n}$ равен 0, что легко получить, продифференцировав по и равенство $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$.*

高斯-韦因斯坦公式是指下列关系，这些关系将框架向量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 关于 u^1, u^2 的导数与框架向量联系起来：公式1和2

系数 Γ^k_{ij} 在下标交换时对称，即 $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$，这是从等式 $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{ji}$ 中推导出的。

在公式 1 中，向量 $\mathbf{n}$ 的系数为 b_{ij}，这可以通过将等式 1 与 $\mathbf{n}$ 进行点乘来容易获得。

在公式 2 的右侧，向量 $\mathbf{n}$ 的系数为 0，这可以通过对等式 $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 1$ 进行求导来得到。