Analysis2

siriehn_nx
Tsinghua University
siriehn_nx@outlook.com
February 26, 2024

7 多变量函数的连续性

7.1 $\mathbb{R}$ 中的拓扑

Definition 7.1.1 $\mathbb{R}^n = \left\{x = (x^1, ...x^n) \,\middle|\, x^i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\right\}$, 称 x 为 n 元有序数组,为 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 通常的加法和数乘,$\mathbb{R}^n$ 为线性空间.

7.1.1 度量

Definition 7.1.1.2 映射 $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}(x, y) \mapsto d(x, y)$,其中 $d(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

则 d 满足:

1. 正定性,$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \geq 0, " = " \Longleftrightarrow x = y$.
2. 对称性, $d(x, y) = d(y, x)$.
3. 三角不等式, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

若 d 满足三条性质,称 d 为 $\mathbb{R}^n$ 的度量.

Remark

Definition 7.1.1.3

$$p \geq 1, d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x^i - y^i|$$

可以验证,d_p, d_∞ 均为 $\mathbb{R}^n$ 上的度量.

Proposition 7.1.1.4 *(Minkowski 不等式)* $d_\infty(x, y) \leq d(x, y) \leq n d_\infty(x, y)$
$C_{p,1} d(x, y) \leq d_p(x, y) \leq C_{p,2} d(x, y)$,其中 $C_{p,1}, C_{p,2}$ 均为依赖 p 的常数.

7.1.2 开集,闭集,拓扑空间

Definition 7.1.2.5 设 $a \in \mathbb{R}^n, \delta > 0, B(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a, x) < \delta\}$ 称为以 a 为中心,δ 为半径的球 / δ 邻域.

Definition 7.1.2.6 设 $U \subset \mathbb{R}^n, \forall a \in U, \exists \delta > 0, \text{s,t. } B(a; \delta) \subset U$,则称 U 为开集.

Example 7.1.2.7 $B(a; r)$ 为开集(r > 0).

Proposition 7.1.2.8

1. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 为开集.
2. 无穷多个开集的并还是开集.

3. 有限多个开集的交还是开集.

Definition 7.1.2.9 $\mathbb{R}^n$ 中的开集满足以上三条性质,那么称 $\mathbb{R}^n$ 为拓扑空间.

$\mathbb{R}^n$ 中的拓扑空间是由 d 诱导的.

一般而言,有以下定义.

Definition 7.1.2.10 *(拓扑空间)* 设 X 为集合, τ 为 X 的子集簇,满足:
1. $\varphi, X \in \tau$
2. $\forall \tau_\alpha, \alpha \in \Lambda, \bigcup\limits_{\{\alpha\in\Lambda\}} \tau_\alpha \in \tau$
3. 设 $\tau_1, ..., \tau_m \in \tau$ 则 $\bigcap\limits_{\{i=1\}}^{m} \tau_i \in \tau$

那么称 (X, τ) 为拓扑空间.

Definition 7.1.2.11 设 $A \subset \mathbb{R}^n$,若 $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ 为开集,那么称 A 为闭集.

Example 7.1.2.12
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, A = \{x, y\}$ 闭集
- $\overline{B}(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a; x) \leq r\}$ 闭集
- $\mathcal{S}^{n-1}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(a; x) = r\}$ 为闭集

记 $\mathcal{S}^{n-1} = \mathcal{S}^{n-1}(0, 1)$

由 De Morgan 定理可知:

Proposition 7.1.2.13
1. $\mathbb{R}^n, \emptyset$ 是闭集
2. 无穷多个闭集的交仍然是闭集
3. 有限多个闭集的并仍然是闭集

7.1.3 邻域,内点,边界点,聚点

Definition 7.1.3.14 *(邻域,内点,边界点)*
1. 设 $x \in \mathbb{R}^n$,任一包含 x 的开集 U 称为 x 的邻域,$\mathring{U} = U \setminus \{x\}$ 称为 x 的去心邻域
2. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$,若 $x \in D, \exists x$ 的邻域 U, s.t. $U \subset D$, 称 x 为 D 的内点.对应的,若 x 是 D^c 的内点,则 x 为 D 的内点.
3. 设 $D \subset \mathbb{R}^n$, x 即非内点也非外点,则 x 为 D 的边界点. $\partial D = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x\text{为}D \text{ 的边界点}\right\}$,称 ∂D 为 D 的边界,也可定义为 $\partial D = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x \text{ 的任一领域 } U, U \cap D \neq \emptyset, U \cap D^c \neq \emptyset\right\}$

Definition 7.1.3.15 *(聚点)* 设 $D \subset \mathbb{R}^n$,若 D 的任一邻域均含有 D 中的无穷多个点, 称 x 为 D 的一个聚点. $\Longleftrightarrow x$ 的任意邻域 $U, \mathring{U} \cup D \neq \emptyset$

$D' = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, x\text{为}D \text{ 聚点}\right\}$,称其为 D 的导集

称 $\overline{D} = D \cup D'$ 为 D 的闭包.

Theorem 7.1.3.16 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为闭集 $\Longleftrightarrow D' \subset D$.

Proof

"$\Longrightarrow$" $\forall a \in D'$ 要证明 $a \in D$.

(反证法): 若 $a \notin D$ 则 $a \in D^c$, 由于 D 闭集,则 D^c 开集,$\exists \delta > 0, B(a;\delta) \subset D^c, B(a;\delta) \cap D = \emptyset$,这与 a 为聚点矛盾,则 $a \in D$, i.e. $D' \subset D$.

"$\Longleftarrow$" $D' \subset D$ 要证明 D^c 为开集.

$\forall a \in D^c, a$ 不是聚点,则 $\exists \delta > 0$, s.t. $B(a;\delta) \cap D = \emptyset$,则 $B(a;\delta) \subset D^c$,从而 D^c 为开集.

7.2 $\mathbb{R}^n$ 中的紧(致)集

Definition 7.2.1 *(紧集)* 设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 若 A 的任意开覆盖都有有限字符该,称 A 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧集(compet set).

由 Heine-Bored 定理可知 $\mathbb{R}$ 中闭区间为紧集.

Definition 7.2.2 *(长方体)* 设 $a, b \in \mathbb{R}^n, a = (a^1, ..., a^n), b = (b^1, ..., b^n), a^i \leq b^i, i = 1, ..., n, I_{a,b} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a^i \leq x^i \leq b^i\right\}$ 其为长方体.

Proposition 7.2.3 $I_{a,b}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集.

Proof

(反证法): 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为 $I_{a,b}$ 的开覆盖,不存在其的有限子覆盖,令 I_1 分成 2^n 个长方体,则至少有一个长方体没有有限子覆盖,记为 I_2,继续其过程,记为 $I_3, ..., I_n, ...$,满足 $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_k \supset ....$

$I_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_k^i \leq x^i \leq b_k^i, i = 1, ..., n\right\}$

由 Cauchy-Cantor 闭区间套定理 ,$\exists! x_0^i \in \bigcap_{\{k=1\}}^{\infty} [a_k^i, b_k^i]$,令 $x_0 = (x_0^1, ... x_0^n)$,则 $\exists \alpha_0 \in \Lambda$, s.t. $x_0 \in U_{\alpha_0}$,令 $\operatorname{diam} I_k = \sup_{\{x, y \in I_k\}} d(x, y)$

则 $\lim_{k \to \infty} \operatorname{diam} I_k = 0$,$\exists k \in \mathbb{N}^*$, s.t. $k \geq K, x_0 \in I_k \subset U_{\alpha_0}$,从而与构造矛盾! □