

Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 20.05.2024 bis 26.05.2024, 16:00 Uhr

Besprechung: 27.05.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (CYK-Algorithmus I) 10 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G' = (\Sigma, N', S, P')$ mit $N' = \{S, A, B, C, D_1, D_2, X_0, X_1\}$ und

$$\begin{aligned} P' = \{ & S \rightarrow X_0 C \mid X_0 X_0, \\ & C \rightarrow X_0 A, \\ & A \rightarrow X_1 D_1 \mid X_1 D_2 \mid X_0 B \mid 0, \\ & D_1 \rightarrow A D_2, \\ & D_2 \rightarrow X_1 X_1, \\ & B \rightarrow X_0 B \mid 0, \\ & X_0 \rightarrow 0, \\ & X_1 \rightarrow 1 \}. \end{aligned}$$

- a) Entscheiden Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK-Algorithmus), ob die Wörter

i) $w_1 = 0011$ und

ii) $w_2 = 001011$

in $L(G')$ liegen. Geben Sie die Tabelle bzw. Dreiecksmatrix dabei jeweils vollständig an. *Bitte beachten Sie, dass Ihre Grammatik in CNF sein muss, damit Sie den CYK-Algorithmus anwenden können.*

- b) Geben Sie $L(G')$ formal als Menge von Wörtern an. Die Angabe soll als in sich abgeschlossener Mengenausdruck geschehen. Referenzieren Sie keine weiteren Konstrukte wie die Grammatik G' , Teile von G' , wie die Produktionsregeln P' , einen regulären Ausdruck, einen Automaten, oder eine andere Grammatik. Die Ausnahme hier stellt Σ dar, welches Sie referenzieren dürfen. Lösungen wie $L(G') = \{w \mid w \in L(\dots)\}$ führen zu 0 Punkten.

Aufgabe 1:

a)

4					
3					
2	D_1				
1	S, B, C, A		D_2		
0	X_0, A, B	X_0, A, B	X_1	X_1	
	0	0	1	1	

\Rightarrow Wir kommen nur bis D_1 als Startsymbol, deshalb liegt Wort nicht in Sprache

b)

6	S					
5	D_1	C				
4			A			
3	C, A, B			D_1		
2	S, A, B, C				D_2	
1	A, B, X_0	A, B, X_0	X_1	A, B, X_0	X_1	X_1
0	0	0	1	0	1	1

$P' = \{S \rightarrow X_0 C \mid X_0 X_0,$
 $C \rightarrow X_0 A,$
 $A \rightarrow X_1 D_1 \mid X_1 D_2 \mid X_0 B \mid 0,$
 $D_1 \rightarrow A D_2,$
 $D_2 \rightarrow X_1 X_1,$
 $B \rightarrow X_0 B \mid 0,$
 $X_0 \rightarrow 0,$
 $X_1 \rightarrow 1\}.$

\Rightarrow Wort liegt in Sprache des Kellerautomats, da mit dem CYK-Algorithmus auf das Startsymbol zurückgeführt werden kann

Aufgabe 2:

$$G' = (\Sigma, N', S, P') \quad N' = \{S, A, B, x, y, z\}$$

$$P' = \left\{ \begin{array}{ll} A \rightarrow Ax \mid a & y \rightarrow c \mid Bz \\ x \rightarrow Ax & z \rightarrow yy \mid By \\ S \rightarrow xz & B \rightarrow b \end{array} \right\}$$

Aufgabe 2 (CYK-Algorithmus II) 10 Punkte

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die folgende Tabelle, welche mit dem CYK-Algorithmus für das Wort $w = abbcc$ erstellt wurde. Aus dem Ergebnis kann gefolgert werden, dass w in der Sprache liegt, welche die zugrundeliegende Grammatik erzeugt.

i	1	2	3	4	5	6
5	S, Z					
4	Y	Y				
3	X		Z, S			
2	A		Y	Y		
1		X		Z	Z, S	
0	A	A	B	B	Y	Y
j	a	a	b	b	c	c

$A \rightarrow AX \mid a$
 $X \rightarrow AX$
 $S \rightarrow XZ$
 $Y \rightarrow c \mid BZ$
 $Z \rightarrow YY \mid BY$
 $B \rightarrow b \mid$

Geben Sie eine mögliche Grammatik G an, welche diese Tabelle erzeugen kann.

Aufgabe 3 (Kellerautomat I) 10P

Der Kellerautomat $M = (\{a, b\}, \{\#, A, B\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \delta, z_0, \#)$ verfügt über die folgenden Regeln um δ zu definieren:

$$\begin{aligned}
 z_0 a \# &\rightarrow z_1 A A \# & z_1 b A &\rightarrow z_1 \lambda & z_2 \lambda \# &\rightarrow z_0 \# \\
 z_0 b \# &\rightarrow z_2 B \# & z_1 \lambda \# &\rightarrow z_0 \# & z_3 \lambda B &\rightarrow z_2 \lambda \\
 z_0 \lambda \# &\rightarrow z_4 \lambda & z_2 a B &\rightarrow z_3 \lambda & z_3 \lambda \# &\rightarrow z_1 A \# \\
 z_1 a A &\rightarrow z_1 A A A & z_2 b B &\rightarrow z_2 B B
 \end{aligned}$$

- Liegt das Wort $bababb$ in der Sprache des Kellerautomaten $L(M)$? Verwenden Sie in Ihrer Argumentation die entsprechende(n) Konfigurationsfolge(n).
- Geben Sie jeweils die Inhalte des Kellers an, nachdem M die folgenden Zeichenketten gelesen hat:
 - $b^3 a b^4 a^3$
 - $a^2 b^3$
- Beschreiben Sie die Sprache $L(M)$ möglichst formal. Die Angabe soll als in sich abgeschlossener Mengenausdruck geschehen. Referenzieren Sie keine weiteren Konstrukte wie den Kellerautomaten M , Teile von M , wie die Überföhrungsfunktion δ , die Relation von Konfigurationsfolgen, einen regulären Ausdruck, eine Grammatik, oder einen anderen Automaten. Die Ausnahme hier stellt $\Sigma = \{a, b\}$ dar, welches Sie referenzieren dürfen. Lösungen wie $L(M) = \{w \mid w \in L(\dots)\}$ führen zu 0 Punkten.
- Zeigen Sie, dass die Überföhrungsfunktion δ von M nicht deterministisch ist.

Aufgabe 3:

a) $(z_0, bababb, \#) \xrightarrow{\mu} (z_2, ababb, B\#) \xrightarrow{\mu} (z_3, babb, \#) \xrightarrow{\mu} (z_1, babb, A\#) \xrightarrow{\mu} (z_1, abb, \#) \xrightarrow{\mu} (z_0, abb, \#) \xrightarrow{\mu} (z_1, bb, AA\#)$

$\xrightarrow{\mu} (z_1, b, A\#) \xrightarrow{\mu} (z_1, \lambda, \#) \xrightarrow{\mu} (z_0, \lambda, \#) \xrightarrow{\mu} (z_4, \lambda, \lambda) \Rightarrow$ Das Wort liegt in der Sprache des Kellerautomats

$$\begin{array}{llll} z_0 a \# \rightarrow z_1 AA\# & z_0 A \rightarrow z_1 AAA & z_2 aB \rightarrow z_3 \lambda & z_3 \lambda B \rightarrow z_2 \lambda \\ z_0 b \# \rightarrow z_2 B\# & z_1 bA \rightarrow z_1 \lambda & z_2 bB \rightarrow z_2 BB & z_3 \lambda \# \rightarrow z_1 A\# \\ z_0 \lambda \# \rightarrow z_4 \lambda & z_1 \lambda \# \rightarrow z_0 \# & z_2 \lambda \# \rightarrow z_0 \# & \end{array}$$

b) i) $b^3 a b^4 a^3 \Rightarrow$ Keller:

A
#

ii) $a^2 b^3 \Rightarrow$ Keller:

A
#

$$\begin{array}{ll} z_0, & b^3 a b^4 a^3, \# \\ z_1, & b^2 a b^4 a^3, B\# \\ z_2, & b a b^4 a^3, BB\# \\ z_3, & a b^4 a^3, BBB\# \\ z_4, & b^4 a^3, BB\# \\ z_5, & b^4 a^3, B\# \\ z_6, & b^3 a^3, BB\# \\ z_7, & b^2 a^3, BBB\# \\ z_8, & b a^3, BBBB\# \\ z_9, & a^3, BBBB\# \\ z_{10}, & aa, BBBB\# \\ z_{11}, & aa, BBB\# \\ z_{12}, & a, BB\# \\ z_{13}, & a, B\# \\ z_{14}, & \lambda, \# \\ z_{15}, & \lambda, A\# \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} z_0, & a^2 b^3, \# \\ z_1, & a b^3, AA\# \\ z_2, & b^3, AAAA\# \\ z_3, & b^2, AAA\# \\ z_4, & b, AA\# \\ z_5, & \lambda, A\# \end{array}$$

c) Für die Zustände $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 \in Z$, Symbole $a, b \in \Sigma$, und Kellersymbole $A, B, \# \in \Gamma$ ist

$(\Sigma, ab, \{z\}, \delta, z, S$

d) Wir haben die Übergänge:

$\delta(z_0, \lambda, \#) = (z_4, \lambda)$

$\delta(z_0, \lambda, \#) = (z_0, \#)$

\Rightarrow Demnach gibt es zwei mögliche Übergänge, wodurch die Überföhrungsfunktion nicht deterministisch ist

Aufgabe 4 (Abschlusseigenschaften)10P

- (a) Betrachten Sie eine Sprache L und einen DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit totaler Überföhrungsfunktion δ und mit $L = L(M)$.

Geben Sie einen DFA M' mit $\bar{L} = L(M')$ als Tupel an, um zu zeigen, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen ist.

Hinweis: Ihr DFA M' soll nicht konkret angegeben werden, sondern muss aus jedem beliebigen Automaten M , wie er in der Aufgabenstellung angegeben ist, konstruierbar sein.

- (b) Zeigen Sie nur mit Hilfe von Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen und Satz 3.36 folgende Behauptungen. Sie dürfen Sprachen, die von regulären Ausdröcken erzeugt werden, direkt als regulär verwenden. Aus der Vorlesung bekannte Sprachen dürfen wieder direkt verwendet werden (z.B. bewiesene Behauptungen aus dem Skript zu spezifischen Sprachen sind also auch erlaubt zu nutzen).

$$L_1 = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\} \in CF \text{ mit } L_1 \subseteq \{a, b\}^*$$

$$L_2 = \{a^n b^m c^{\max(n,m)} \mid n, m \geq 0\} \notin REG \text{ mit } L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$$

Aufgabe 4:

a) Wir suchen nach einem DFA, welcher die Komplemente von M akzeptiert.

Dafür definieren wir M' wie folgt: $M' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus F)$.

b) 1. Wir haben bereits in der VL gezeigt, dass $L = \{a^i b^j c^i \mid i, j \geq 0\}$ kontextfrei ist.
Dasselbe gilt für $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 0\}$ (siehe Behauptung 3.20)

Nun bilden wir die Vereinigung beider, wodurch $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0\}$ entsteht. Nach den Abchlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen ist L_1 auch kontextfrei.

2. $L = \{a^n b^m c^{\max(n,m)} \mid n, m \geq 0\} \notin REG$

Sei $a^n b^m c^{\max(n,m)}$ reg. und $a^n b^m c^n$ kontextfrei (nach VL).

$$a^n b^m c^n \cap a^n b^m c^{\max(n,m)} = \begin{cases} a^n b^m c^n & \text{falls } n \geq m \\ a^n b^m c^m & \text{falls } m > n \end{cases}$$

falls $n \geq m$ \rightarrow das wäre kontextfrei
falls $m > n$ \rightarrow das ist nach VL nicht kontextfrei, wodurch ein Widerspruch vorliegt.

Demnach gilt $L_2 = \{a^n b^m c^{\max(n,m)} \mid n, m \geq 0\} \notin REG$, da wir nicht sagen können, dass $n > m$ immer zutrifft. [nach VL reicht diese Argumentation]