

**Grundlagen der Theoretischen Informatik - Sommersemester 2012**

**Klausur**

Klausurtermin: 10. Juli 2012

- Bitte nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben!
- Tragen Sie auf jedem Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein!
- Bitte geben Sie zu jeder Aufgabe/Teilaufgabe eine Lösung an. Bei Angabe von mehreren Lösungen wird stets die Lösung mit der geringeren Punktzahl gewertet!
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten. Gesamtpunktzahl: 90 Punkte.

Name, Vorname:

Studiengang, Semester:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	15	20	15	10	15	15	90
erreichte Punktzahl							

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- Vorlesungsskript, Übungsblätter,
- Bücher, Vorlesungs- und Übungsmitschriften.

**Nicht erlaubte Hilfsmittel:**

- Elektronische Geräte,
- Kommiliton/inn/en.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.  
**VIEL ERFOLG!**

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 1 (15 Punkte)**

(a) [5 Punkte] Kreuzen Sie für jede der folgenden fünf Fragen in jeder Zeile entweder Ja oder Nein an.

**Bewertung:** Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und für Antworten, bei denen weder Ja noch Nein oder sowohl Ja als auch Nein angekreuzt sind, gibt es keinen Punkt. Falls die falschen Antworten mehr als die richtigen Antworten sind, dann gibt es Null Punkte, d.h. die kleinste Punktzahl für diese Aufgabe ist 0.

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- Ja**  **Nein** Die Aussageformel  $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$  ist eine Tautologie.
- Ja**  **Nein** Jeder PDA  $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$ , der keine Übergänge der Form  $z\lambda A \rightarrow z'B_1 \dots B_k$  hat, ist deterministisch. Wobei  $A, B_1, \dots, B_k \in \Gamma$  und  $z, z' \in Z$ .
- Ja**  **Nein** Anhand der Parikh-Abbildung kann man zwischen kontextfreien und regulären Sprachen unterscheiden.
- Ja**  **Nein** Jede linkslineare reguläre Grammatik ist in Greibach-Normalform.
- Ja**  **Nein** Die Sprache  $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \neq \emptyset\}$  ist nicht entscheidbar.

(b) [10 Punkte] Gegeben sei die Sprache  $L = \{a^{(n^3)} \mid n \geq 1\}$  über dem Alphabet  $\Sigma = \{a\}$ . Zeigen Sie, dass  $L \notin CF$  gilt.

(**Hinweis:**  $|\Sigma| = 1$ .)

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen Teilaufgabe (b) an!)

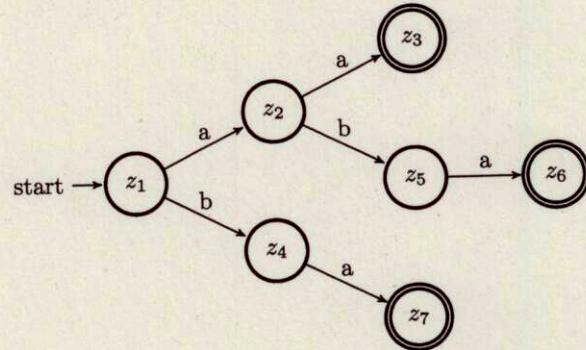
Name:

Matrikelnummer:

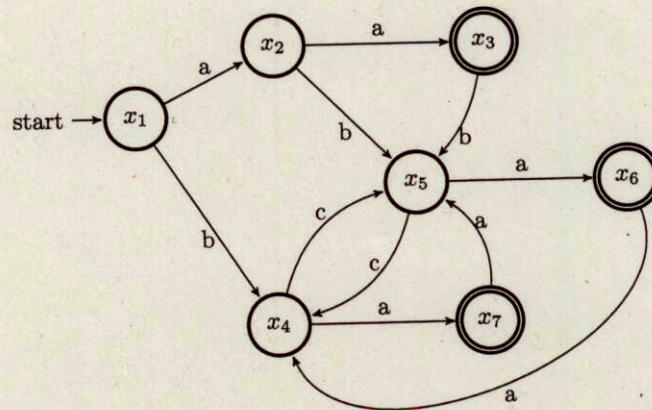
**Aufgabe 2 (20 Punkte)**

Seien folgende DFA's gegeben:

$M_1 = (\{a, b\}, \{z_1, z_2, \dots, z_7\}, \delta_1, z_1, \{z_3, z_6, z_7\})$  mit dem Zustandsgraphen:



$M_2 = (\{a, b, c\}, \{x_1, x_2, \dots, x_7\}, \delta_2, x_1, \{x_3, x_6, x_7\})$  mit dem Zustandsgraphen:



- (a) [10 Punkte] Geben Sie für beide DFAs  $M_1$  und  $M_2$  jeweils einen äquivalenten DFA mit einer minimalen Anzahl an Zuständen an.

**Anmerkung:** Die oben abgebildeten DFAs sind nicht vollständig, d.h. die Überführungsfunktionen  $\delta_1$  und  $\delta_2$  sind nicht total. Sie können die entsprechenden Automaten vervollständigen, indem Sie einen Müllzustand hinzufügen.

- (b) [10 Punkte] Geben Sie für beide DFAs  $M_1$  und  $M_2$  jeweils einen möglichst kleinen (aber nicht unbedingt minimalen) äquivalenten regulären Ausdruck an.

**Anmerkung:** Sie müssen nicht unbedingt bei allen DFAs ein Gleichungssystem lösen.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 3 (15 Punkte)**

Zeigen Sie, entweder durch Angabe einer kontextfreien Grammatik oder durch Angabe eines nicht-deterministischen Kellerautomaten, dass folgende Sprache kontextfrei ist:

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i = j + 1 \text{ oder } j = k + 1, \text{ wobei } i, j, k \geq 0\}.$$

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in der Aufgabe an!)

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 4 (10 Punkte)**

Gegeben sei die Sprache  $L = \{a^i b^j c^k \mid i = k, i, j, k \geq 1\}$ . Geben Sie eine Turingmaschine an, die die Sprache  $L$  erkennt. Geben Sie eine Zustandsbeschreibung an.  
**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in der Aufgabe an!)**

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 5 (15 Punkte)**

(a) [8 Punkte] Zeigen Sie mit Hilfe des Normalschemas, dass die Funktion  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (m!) \bmod n = 0 \\ 0, & \text{falls } n = 0, \text{ oder } (m!) \bmod n \neq 0 \end{cases}$$

primitiv rekursiv ist. Sie dürfen folgende primitiv rekursive Funktionen für die Beschreibung von  $f$  mit dem Normalschema benutzen, ohne zeigen zu müssen, dass diese primitiv rekursiv sind:

Die Fakultätsfunktion  $fak : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die definiert ist durch

$$fak(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Die Divisionsfunktion  $div : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die definiert ist durch

$$div(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } m \bmod n = 0 \\ 0, & \text{falls } n = 0, \text{ oder } m \bmod n \neq 0 \end{cases}$$

(b) [7 Punkte] Gegeben sei die partiell rekursive Funktion  $and : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , die definiert ist durch

$$and(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \text{ und } y = 1 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \text{ und } y = 0, \text{ oder } x = 1 \text{ und } y = 0, \text{ oder } x = 0 \text{ und } y = 1 \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } x > 1 \text{ oder } y > 1, \text{ oder } x > 1 \text{ und } y > 1. \end{cases}$$

Welche Funktion berechnet  $\mu and$ ? Bitte geben Sie eine formale mathematische Beschreibung für  $\mu and$  an.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name:

Matrikelnummer:

**Aufgabe 6 (15 Punkte)**

Gegeben sei folgendes PCP Problem:

$$((10, 101), (1, 110), (1101, 1))$$

(a) [5 Punkte] Geben Sie eine Lösung des PCP Problems an.

(b) [10 Punkte] Wandeln Sie das PCP Problem in eine kontextfreie Grammatik  $G$  um, so dass jede Lösung des PCP Problems einem Wort von  $L(G)$  entspricht für welches es mindestens zwei verschiedene Parsebäume gibt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)