HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT
DÜSSELDORF
Institut für Informatik
PD Dr. Frank Gurski

23. September 2008

# Nachklausur zur Vorlesung Informatik IV - Sommersemester 2008

**Name, Vorname:**

**Studienfach, Semester:**

**Matrikelnummer:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 30 | 15 | 25 | 15 | 15 | 100 | |
| erreichte Punktzahl | | | | | | | |

**Erlaubte Hilfsmittel:** keine

**Aufgabe 1 (30 Punkte)** Kreuzen Sie für jede der folgenden 30 Fragen in jeder Zeile entweder „Ja" oder „Nein" an. (Jede falsche Antwort wird mit 1/2 Punktabzug gewertet.)

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^n \mid 1 \leq n \leq 1000\}$ ist eine reguläre Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^n \mid 1001 \leq n\}$ ist eine reguläre Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\} \cap \{(01)^n \mid n \geq 1\}$ ist eine reguläre Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^m \mid n \neq m\}$ ist eine reguläre Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ ist eine deterministisch kontextfreie Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ ist eine LR(0)-Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n0^m \mid n = m\}$ ist eine reguläre Sprache. |
| ☐ | ☐ | $L = \{0^n0^m \mid n \neq m\}$ ist eine reguläre Sprache. |

(b) Es sei $\Sigma$ ein einelementiges Alphabet, $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ und $L_1 \subseteq L_2$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | $L_1$ ist kontextfrei. $\Rightarrow$ $L_1$ ist regulär. |
| ☐ | ☐ | $L_2$ ist nicht regulär. $\Rightarrow$ $L_2$ ist nicht kontextfrei. |
| ☐ | ☐ | $L_1$ ist regulär. $\Rightarrow$ $L_2$ ist regulär. |
| ☐ | ☐ | $L_2$ ist regulär. $\Rightarrow$ $L_1$ ist regulär. |

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Jede Turing-berechenbare Funktion ist LOOP-berechenbar. |
| ☐ | ☐ | Es gibt WHILE-berechenbare Funktionen, welche nicht GOTO-berechenbar sind. |
| ☐ | ☐ | $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n_1, n_2, n_3) = n_1 + 4n_2 + 8n_3$ ist $\mu$-rekursiv. |
| ☐ | ☐ | Die Ackermann Funktion ist Turing-berechenbar. |

**(d)** Welche der folgenden Aussagen über das allgemeine Halteproblem $H$ ist/sind wahr?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | $H$ ist entscheidbar. |
| ☐ | ☐ | $H$ ist semi-entscheidbar. |
| ☐ | ☐ | $H$ ist in NP. |
| ☐ | ☐ | $H$ ist NP-vollständig. |
| ☐ | ☐ | $H$ ist eine Typ-0 Sprache. |

**(e)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | 4-SAT ist eine NP-vollständige Sprache. |
| ☐ | ☐ | 5-SAT ist nicht entscheidbar. |
| ☐ | ☐ | 5-SAT $\subseteq$ 3-SAT |
| ☐ | ☐ | SAT ist eine Typ-0 Sprache. |
| ☐ | ☐ | 3-SAT ist in NP. |

**(f)** Was sagt der Satz von Cook aus?

| Ja | Nein | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | SAT ist in P. |
| ☐ | ☐ | SAT ist in P und SAT ist NP-hart. |
| ☐ | ☐ | SAT ist in NP und SAT ist NP-hart. |
| ☐ | ☐ | $\mathrm{SAT} \in \mathrm{NP} \wedge (\forall A \in \mathrm{P})\,[A \leq_{\mathrm{p}} \mathrm{SAT}]$ |

**Aufgabe 2** ($4 + 5 + 6 = 15$ Punkte) Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Geben Sie für die folgenden drei Sprachen jeweils einen regulären Ausdruck über $\Sigma$ an, welcher diese Sprache beschreibt.

(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } 01\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ist gerade oder Null}\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält höchstens drei Einsen}\}$

**Aufgabe 3** ($7 + 3 + 2 + 3 + 3 + 7 = 25$ Punkte) Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b, \$\}$ und die Sprache

$$L = \{w\$sp(w) \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$

Hierbei ist $sp : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ die in der Vorlesung definierte Spiegelbildoperation für Wörter.

(a) Beweisen Sie, dass $L$ nicht regulär ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Sprache $L$ kontextfrei ist, indem Sie eine $\epsilon$-freie kontextfreie Grammatik $G$ ohne einfache Regeln für $L$ angeben.

(c) Bestimmen Sie das Parikh-Bild $\Psi(L)$.

(d) Zeigen Sie, dass $\Psi(L)$ semilinear ist, indem Sie geeignete Vektoren $x, y, z \in \mathbb{N}^3$ angeben, so dass

$$\Psi(L) = \{x + n \cdot y + m \cdot z \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

gilt.

(e) Geben Sie mit Hilfe der drei Vektoren $x, y, z$ nach dem Schema der Vorlesung einen regulären Ausdruck $\alpha$ über $\Sigma$ an, so dass $\Psi(L) = \Psi(L(\alpha))$. Vereinfachen Sie $\alpha$ möglichst weit.

(f) Geben Sie den Zustandsgraphen eines NEA an, welcher die Sprache $L(\alpha)$ akzeptiert.

**Aufgabe 4** (12 + 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, durch Angabe eines LOOP-Programms, dass die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{0, 1, 2\} \\ F(n-1) + F(n-2) + F(n-3) & \text{falls } n \geq 3 \end{cases}$$

LOOP-berechenbar ist.

Hinweis: Wie in der Vorlesung definiert, steht das zu betrachtende Argument bei LOOP-Programmen für $F$ in Variable $x_1$ und das Ergebnis $F(n_1)$ soll am Ende in Variable $x_0$ stehen.

Zusätzlich zu den LOOP-Operationen aus der Vorlesung, darf hier innerhalb von Zuweisungen auch die Addition *zweier* Variablen (z.B. $x_2 := x_1 + x_4$) verwendet werden.

(b) Erläutern Sie kurz die Arbeitsweise Ihres Programms bei Eingabe $n_1 = 5$. Welchen Wert berechnet Ihr Programm für $F(5)$?

**Aufgabe 5** $(5 + 5 + 5 = 15$ Punkte)

(a) Definieren Sie, wann eine Sprache NP-hart ist.

(b) Wie kann man von einer Sprache zeigen, dass sie NP-hart ist, ohne die Definition zu verwenden? Begründen Sie kurz, warum diese Vorgehensweise korrekt ist.

(c) Beschreiben und begründen Sie kurz die bekannten (Inklusions-)Beziehungen zwischen NP, der Klasse der NP-harten Sprachen und der Klasse der NP-vollständigen Sprachen.