Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@cs.uni-duesseldorf.de
4. Juli 2011

**Vorlesung im Sommersemester 2011**

# Informatik IV

**Klausurtermin: 8. Juli 2011**

**BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**
**TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND VORNAMEN SOWIE STUDIENFACH MIT SEMESTER UND MATRIKELNUMMER EIN!**

**Name, Vorname:**

**Studienfach, Semester:**

**Matrikelnummer:**

**Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punktzahl | 20 | 20 | 15 | 20 (+3) | 25 | 100 (+3) |
| erreichte Punktzahl | | | | | | |

**Erlaubte Hilfsmittel:**

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- Gedächtnis.

**Nicht erlaubte Hilfsmittel:**

- Mobiltelefone und ähnliche Kommunikationsgeräte,
- Kommiliton/inn/en,
- Taschenrechner.

**Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.**

**Aufgabe 1 (20 Punkte)** Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder Ja oder Nein an.

**Bewertung:** Für jede richtige Antwort in **(a)** bis **(e)** gibt es $\frac{4}{3}$ Punkte, für jede falsche werden $\frac{2}{3}$ Punkte abgezogen und für Antworten, bei denen weder Ja noch Nein oder sowohl Ja als auch Nein angekreuzt sind, gibt es keinen Punkt. Insgesamt gibt es also die folgende Punktzahl für Aufgabe **1(a)–(e)**:

$$\lceil \max(0, 4/3\,(\text{Anzahl der richtigen Antworten}) - 2/3\,(\text{Anzahl der falschen Antworten})) \rceil .$$

**(a)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jeder endliche Automat erkennt eine endliche Sprache.

☐ Ja ☐ Nein Jede endliche Sprache wird von einem endlichen Automaten erkannt.

☐ Ja ☐ Nein Endliche Automaten halten stets nach einer endlichen Zahl von Rechenschritten.

**(b)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Für jede Typ-2-Sprache $A$ gibt es einen DPDA $M$ mit $L(M) = \overline{A}$.

☐ Ja ☐ Nein Jede Teilmenge einer $\mathcal{L}_0$-Sprache ist entscheidbar.

☐ Ja ☐ Nein Es gibt allgemein rekursive Funktionen, die nicht primitiv rekursiv sind.

**(c)** Welche/s der folgenden Probleme ist/sind entscheidbar?

☐ Ja ☐ Nein Gegeben eine Gödelnummer $i$, ist $\varphi_i$ monoton wachsend?

☐ Ja ☐ Nein Gegeben eine natürliche Zahl $n$, ist $n$ das Quadrat einer Primzahl?

☐ Ja ☐ Nein Gegeben eine nichtverkürzende Grammatik $G$ und ein Wort $x$, gilt $x \notin L(G)$?

**(d)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein $A = \{a^n a^n b^n b^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextfrei, aber nicht regulär.

☐ Ja ☐ Nein $B = \{a^n b^n b^n a^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextfrei, aber nicht regulär.

☐ Ja ☐ Nein $C = \{a^n b^{2n} a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$ ist entscheidbar, aber nicht kontextsensitiv.

**(e)** Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

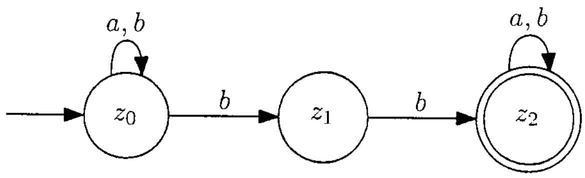
☐ Ja ☐ Nein Jede $\leq_{\mathrm{m}}$-vollständige Menge in RE lässt sich auf das spezielle Halteproblem $\leq_{\mathrm{m}}$-reduzieren und umgekehrt.

☐ Ja ☐ Nein Das Komplement des speziellen Halteproblems lässt sich auf das allgemeine Halteproblem $\leq_{\mathrm{m}}$-reduzieren.

☐ Ja ☐ Nein Die Bänder einer Mehrband-Turingmaschine dürfen nur von einem staatlich geprüften TM-Administrator gewechselt werden, aber ihre Lese-/Schreibköpfe kann man (und sollte man mindestens halbjährlich) selbst reinigen.

**Aufgabe 2 (20 Punkte)** *Reguläre Sprachen.*

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bb\}$. Weiterhin sei der folgende NFA $N$ mit $L(N) = L$ gegeben.




**(a)** Bestimmen Sie mit Mitteln aus der Vorlesung einen zu $N$ äquivalenten DFA $M$ und wählen Sie eine geeignete Darstellung für $M$.

**(b)** Bestimmen Sie die Anzahl der Myhill-Nerode Äquivalenzklassen bzgl. $L$.

**(c)** Geben Sie explizit die Myhill-Nerode Äquivalenzklassen bzgl. $L$ an und begründen Sie jeweils, warum diese paarweise verschieden sind.

**(d)** Zeigen Sie, dass der reguläre Ausdruck $\gamma = (a+b)^*bb(a+b)^*$ die Sprache $L$ beschreibt – also dass $L(\gamma) = L$ gilt – indem Sie ein entsprechendes Gleichungssystem lösen.

**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)**

**Aufgabe 3 (15 Punkte)** *Kontextfreie Sprachen*

Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, R)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B, C, D, E, F\}$ und

$$\begin{aligned} R = \{\ S &\to DC \mid EB \mid FF \\ A &\to DB \mid ES \mid aS \\ B &\to DS \mid EC \\ C &\to EA \mid FS \\ D &\to a \\ E &\to b \\ F &\to c\}. \end{aligned}$$

**(a)** Geben Sie eine zu $G$ äquivalente Grammatik $G'$ in Greibach-Normalform an.

**(b)** Ist die Sprache $L(G)$ deterministisch kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.

**(c)** Prüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, ob $acccb \in L(G)$ gilt. Die Tabelle bzw. Dreiecksmatrix ist dabei in jedem Fall vollständig anzugeben.

**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)**

**Aufgabe 4 (20 Punkte)** *Kontextsensitive und $\mathcal{L}_0$-Sprachen.*

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ und die Sprache $L = \{0^n 1^{n!} \mid n \geq 2\} \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass die Sprache $L$ nicht kontextfrei ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Beweis.

**Behauptung:** $L$ ist nicht kontextfrei.

**Beweis:** Angenommen, $L$ wäre kontextfrei, dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl $p$, sodass für jedes Wort $z = uvwxy \in L$ mit $|z| \geq p$

1. $|vwx| \leq p$,
2. $|vx| \geq 1$ und
3. $(\forall j \geq 0)[uv^j wx^j y \in L]$.

*[Ab hier weiter argumentieren.]*

**(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)**

**Bonusaufgabe (3 Bonuspunkte):** Welche der drei folgenden Aussagen ist/sind wahr:

☐ Ja ☐ Nein $L$ ist kontextsensitiv.

☐ Ja ☐ Nein $L$ ist eine $\mathcal{L}_0$-Sprache.

☐ Ja ☐ Nein Für das allgemeine Halteproblem $H$ gilt: $H \leq_m L$.

**Aufgabe 5 (25 Punkte)** *Berechenbarkeit*

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet auf } a\}$ und die folgende induktiv definierte Funktion $\tau : \Sigma^* \to \Sigma^*$ mit

$$\begin{aligned} \tau(\lambda) &= \lambda \\ \tau(va) &= \tau(v)b \\ \tau(vb) &= \tau(v)a \end{aligned}$$

für alle Wörter $v \in \Sigma^*$.

**(a)** Bestimmen Sie schrittweise $\tau(abba)$.

**(b)** Geben Sie eine deterministische Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \Box, F)$ an, die bei Eingabe $x \in \Sigma^*$ folgende Wortfunktion berechnet:

- gilt $x \in L$, so sei die Ausgabe $\tau(x)$,
- gilt $x \notin L$, so sei die Ausgabe $\lambda$.

**Hinweis:** *Die „naive" Maschine benötigt fünf Zustände (inkl. Endzustand) und zwölf Regeln; es geht auch mit weniger (und natürlich auch mit mehr) Zuständen und Regeln. Achten Sie nicht darauf, wie viele Ihre Turingmaschine hat, das soll hier egal sein. Denken Sie aber an die Beschreibung der Zustände.*

**(c)** Geben Sie die Konfigurationenfolgen von $M$ bei Eingabe von $w_1 = ab$, $w_2 = ba$ und $w_3 = \lambda$ an.

**(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)**

**Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.**
**VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG**