Lehrstuhl für Softwaretechnik und Programmiersprachen
Professor Dr. Michael Leuschel

Grundlagen der Theoretischen Informatik – Sommersemester 2020

Klausur

Klausurtermin: 21. August 2020

- **BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**
- **TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER EIN!**
- **BEI ANGABE VON MEHREREN LÖSUNGEN WIRD STETS DIE LÖSUNG MIT DER GERINGEREN PUNKTZAHL GEWERTET!**

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Hörsaal:

Sitzplatz:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	15	15	15	19	17	9	90
erreichte Punktzahl							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript, Übungsblätter,
- Bücher, Vorlesungs- und Übungsmitschriften.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Elektronische Geräte,
- Mitstudierende.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (15 Punkte)
Kreuzen Sie **alle** korrekten Aussagen an. Bitte machen Sie klar deutlich, was Ihre Antwort ist. Nicht bearbeitete Fragen werden als falsch bewertet.
Bewertung ($\#R$ steht für die Anzahl der richtigen Teilaufgaben):

$$\text{Punkte} = max\{0,\ 2 \cdot \#R - 3\}$$

Tipp: Sie können sich durch Raten einer gesamten Teilaufgabe **nicht** verschlechtern.

a) Es gibt eine Sprache L, für die es genau eine Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt.

- ☐ ja
- ☐ nein

b) Gegeben zwei Sprachen L_1 und L_2

- ☐ Wenn $L_1 \notin REG$ und $L_2 \in REG$, dann ist $L_1 \cup L_2 \notin REG$
- ☐ Wenn $L_1 \notin REG$ und $L_2 \in REG$, dann ist $L_1 \cup L_2 \in REG$
- ☐ Wenn $L_1 \notin REG$ und $L_2 \notin REG$, dann ist $L_1 \cup L_2 \notin REG$
- ☐ Wenn $L_1 \notin REG$ und $L_2 \notin REG$, dann ist $L_1 \cup L_2 \in REG$
- ☐ Wenn $L_1 \notin REG$ und $L_2 \notin REG$, dann ist $L_1 \notin REG$

c) Mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen kann man zeigen,

- ☐ dass eine Sprache kontextfrei ist.
- ☐ dass eine Sprache kontextsensitiv ist.
- ☐ dass eine Sprache nicht kontextfrei ist.
- ☐ dass eine Sprache nicht kontextsensitiv ist.

d) Wenn ein DFA N mit totaler Überführungsfunktion und n Zuständen gegeben ist, dann hat der zu N äquivalente Minimalautomat M

- ☐ $> n$ Zustände.
- ☐ $\geq n$ Zustände.
- ☐ $\leq n$ Zustände
- ☐ $< n$ Zustände.

e) Der CYK-Algorithmus

- ☐ baut eine dreidimensionale Tabelle auf, hat also für ein Wort der Länge n eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^3)$.
- ☐ baut eine zweidimensionale Tabelle auf, hat also für ein Wort der Länge n eine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^2)$.
- ☐ löst das Wortproblem für Typ-1-Sprachen.
- ☐ ist auch für mehrdeutige kontextfreie Grammatiken anwendbar.

f) Das LOOP-Programm

$x_0 := 0;\ x_2 := 1;$
LOOP x_1 DO $x_0 := x_0 + 2$ END

- ☐ berechnet die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n_1) = 2$.
- ☐ berechnet die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n_1) = 0$.
- ☐ ist auf ganz $\mathbb{N}$ definiert.
- ☐ ist ein WHILE-Programm.

g) Die Ackermann-Funktion ist in

- ☐ $\mathbb{P}r$
- ☐ $\mathbb{P}$
- ☐ $\mathbb{R}$

h) Man kann die Klasse der DPDAs gödelisieren

- ☐ ja
- ☐ nein

i) Alle Sprachen, für die es eine Grammatik gibt, sind entscheidbar

- ☐ ja
- ☐ nein

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 (15 Punkte)
Gegeben der NFA $N = (\{0,1\}, Z, \delta, S, F)$ mit $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}, S = \{z_0, z_3\}, F = \{z_1\}$ und δ wie folgt:

	z_0	z_1	z_2	z_3
0	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_2\}$	$\{z_1, z_3\}$	$\{\}$
1	$\{\}$	$\{z_3\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_2\}$

a) Bestimmen Sie mit dem Algorithmus der Vorlesung einen DFA M, für den $L(N) = L(M)$ gilt und geben Sie diesen als Tupel an.

b) Zeigen Sie, dass es mindestens 3 verschiedene Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen von $L(N)$ bezüglich $R_{L(N)}$ gibt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{0,1\}, N, S, P)$ mit $N = \{S, A, B, C\}$ und P wie folgt:

$$\begin{aligned} P = \{S &\to AB \mid ASB \mid C, \\ A &\to 01, \\ B &\to 1, \\ C &\to S1\} \end{aligned}$$

a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $w = 01111$ an.

b) Welche Sprache wird durch diese Grammatik erzeugt? Benutzen Sie möglichst eine präzise mathematische Notation.

c) Überführen Sie mit dem Algorithmus der Vorlesung die Grammatik G in eine Grammatik G' in CNF, sodass $L(G) = L(G')$ gilt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 (19 Punkte)
Wir haben das Alphabet $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.

a) Ordnen Sie die vier Sprachen

$$L_0 = \{2^j 0^n 1^n 2 1^n \mid j, n \geq 0\},$$
$$L_1 = \{2^j 0^n 1^n 1^n \mid j, n \geq 0\},$$
$$L_2 = \{2^j 0^n 1^n \mid j, n \geq 0\} \text{ und}$$
$$L_3 = \{2^j 0^n \mid j, n \geq 0\}$$

in die Chomsky-Hierarchie ein (ohne die Einordnung zu beweisen).

b) Zeigen Sie, dass L_1 wirklich in der angegebenen Klasse der Typ-i-Sprachen liegt.

c) Beweisen Sie, dass L_1 keine Typ-j-Sprache für $j > i$ ist.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 (17 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \Box, F)$ mit

- $\Sigma = \{0, 1, \#\}$,
- $\Gamma = \{0, 1, \hat{0}, \hat{1}, \#, \Box\}$,
- $Z = \{z_e, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$,
- $F = \{z_e\}$,
- δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
0	$(z_0, 0, R)$	$(z_1, \Box, R)$	$(z_3, 0, L)$	$(z_3, 0, L)$	$(z_e, \Box, R)$
1	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, \Box, R)$	$(z_3, \Box, L)$	$(z_3, 1, L)$	$(z_e, 1, N)$
#	$(z_1, 0, R)$				
$\Box$		$(z_2, \Box, L)$	$(z_2, \Box, L)$	$(z_4, \Box, R)$	

a) Ist M deterministisch? Ist M ein LBA?

b) Geben Sie jeweils eine Konfigurationenfolge von M für die Eingaben $x_1 = 1\#1$ und $x_2 = 10$ und an. Gilt $x_1 \in L(M)$, gilt $x_2 \in L(M)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Geben Sie $L(M)$ möglichst formal als Menge an.

d) Betrachten Sie die Turingmasche nun als Maschine zur Berechnung einer Funktion. Geben Sie formal an, welche Funktion $g(x, y)$ die Turingmaschine M berechnet.

e) Ist g auch WHILE-berechenbar? Ist g LOOP-berechenbar? Begründen Sie Ihre Antworten kurz.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 (9 Punkte)

a) Betrachten Sie die Funktion $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$-te Dreieckszahl. Also $D(n) = \sum_{i=0}^{n} i$. Zeigen Sie mit dem Normalschema, dass diese Funktion primitiv rekursiv ist.

b) Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $f(n_1, n_2, n_3) = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Welche Funktion g wird durch μf erzeugt?

c) Betrachten Sie die Funktion $f' : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $f'(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + 1) \cdot n_2 \cdot n_3$. Welche Funktion g' wird durch $\mu f'$ erzeugt?

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer**:

Name: **Matrikelnummer:**

Zusätzlicher Platz, falls der Platz bei einer Aufgabe nicht ausreicht:
Bitte kennzeichnen Sie hier deutlich, zu welcher Aufgabe Ihre Bearbeitungen gehören und **verweisen Sie auf dem eigentlichen Aufgabenblatt direkt darauf, dass hier noch Teilaufgaben bearbeitet sind.**

Bitte die Kopfzeile auf allen Seiten ausfüllen.
Viel Spaß, viel Glück, viel Erfolg!