Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@cs.uni-duesseldorf.de
November 10, 2010

Vorlesung im Sommersemester 2010

Informatik IV

Nachklausurtermin: 18. November 2010

**BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND VORNAMEN
SOWIE STUDIENFACH MIT SEMESTER UND MATRIKELNUMMER EIN!**

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	20	15	10	15	20	100
erreichte Punktzahl							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- Gedächtnis.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Mobiltelefone und ähnliche Kommunikationsgeräte,
- Kommiliton/inn/en,
- Taschenrechner.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe 1 (20 Punkte) Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder Ja oder Nein an.

Bewertung: Für jede richtige Antwort in **(a)** bis **(e)** gibt es $4/3$ Punkte und für jede falsche werden $2/3$ Punkte abgezogen, wobei die 0 nicht unterschritten wird. Für Antworten, bei denen weder Ja noch Nein oder sowohl Ja als auch Nein angekreuzt sind, gibt es keinen Punkt. Insgesamt gibt es also die folgende Punktzahl für Aufgabe **1(a)–(e)**:

$$\lceil \max(0, 4/3\,(\text{Anzahl der richtigen Antworten}) - 2/3\,(\text{Anzahl der falschen Antworten}))\rceil .$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Sprache ist endlich.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede von einem DFA erkannte Sprache kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden.
- ☐ Ja ☐ Nein Kellerautomaten können nur reguläre Sprachen erkennen.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Enthält eine Sprache A das leere Wort, so stimmt die λ-freie Iteration von A mit A^* überein.
- ☐ Ja ☐ Nein Enthält eine Menge eine unentscheidbare Teilmenge, so ist sie unentscheidbar.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede deterministisch kontextfreie Sprache kann durch einen (nichtdeterministischen) Kellerautomaten erkannt werden.

(c) Welche/s der folgenden Probleme ist/sind kontextfrei?

- ☐ Ja ☐ Nein $A = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 1\}$.
- ☐ Ja ☐ Nein Gegeben zwei kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2, ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$?
- ☐ Ja ☐ Nein Gegeben ein Wort $w \in \{a, b\}^*$, ist w ein Palindrom?

(d) Seien $\mathrm{PCP}_{\{0,1\}}$ das Postsche Korrespondenzproblem über dem Alphabet $\{0, 1\}$ und $\overline{\mathrm{PCP}_{\{0,1\}}}$ sein Komplement. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein $\mathrm{PCP}_{\{0,1\}} \cap \overline{\mathrm{PCP}_{\{0,1\}}}$ ist entscheidbar.
- ☐ Ja ☐ Nein $\mathrm{PCP}_{\{0,1\}}$ ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge $\overline{\mathrm{PCP}_{\{0,1\}}}$ ist rekursiv aufzählbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Entscheidbarkeit vererbt sich bzgl. $\leq_m$ nach unten.
- ☐ Ja ☐ Nein Das spezielle Halteproblem lässt sich durch einen (sehr komplizierten) regulären Ausdruck beschreiben.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede entscheidbare Sprache ist kontextsensitiv.

Aufgabe 2 (20 Punkte) Gegeben sei die Sprache $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| = 2^n,\ n \geq 0\}$.

(a) Geben Sie zu den folgenden vier Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen (bzgl. L) jeweils drei weitere Wörter an, die in den entsprechenden Äquivalenzklassen enthalten sind:

(i) $[ab] = \{ab, \ldots\}$,

(ii) $[a^2b] = \{a^2b, \ldots\}$,

(iii) $[b^3c] = \{b^3c, \ldots\}$,

(iv) $[ab^2c^3] = \{ab^2c^3, \ldots\}$.

(b) Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist.

(c) Finden Sie zwei Wörter $w_1, w_2 \in L$, für deren Parikh-Bild $\Psi(w_1) + \Psi(w_2) = (k \quad 2k \quad 3k)$ für ein $k \geq 1$ ist — bzw. beweisen Sie, dass es keine Wörter mit dieser Eigenschaft gibt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(a) Gegeben sei der NFA $N = (\Sigma, Z, \delta, \{z_0\}, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $F = \{z_2\}$ und δ wie folgt:

	z_0	z_1	z_2	z_3
0	$\{z_0\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_3\}$
1	$\{z_0\}$	$\{z_0\}$	$\{z_1, z_3\}$	$\{z_3\}$
2	$\{z_0, z_1\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0, z_3\}$

Bestimmen Sie mit Methoden aus der Vorlesung einen zu N äquivalenten Minimalautomaten M. Wählen Sie eine geeignete Darstellung für M – die Überführungsfunktion allein genügt nicht.

(b) Prüfen Sie mit Hilfe der erweiterten Überführungsfunktion, ob $w = 1220 \in L(N)$ gilt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, R)$ mit dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, der Menge $N = \{S, A, B, C, D\}$ der Nichtterminale und der Regelmenge

$$\begin{aligned} R = \{\, S &\rightarrow AB \mid AC, \\ A &\rightarrow aD, \\ B &\rightarrow SC, \\ C &\rightarrow a, \\ D &\rightarrow b \,\}. \end{aligned}$$

Geben Sie einen PDA K mit $L(K) = L(G)$ an.

(b) Prüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami, ob $w = abba \in L(G)$ gilt. Die Tabelle bzw. Dreiecksmatrix ist dabei vollständig anzugeben.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 5 (15 Punkte) Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \Box, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \Box\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_E\}$, $F = \{z_E\}$ und der folgenden Überführungsfunktion:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
0	$(z_0, 0, R)$	$(z_2, 0, L)$	$(z_3, 1, L)$	$(z_3, 0, L)$
1	$(z_0, 1, R)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_2, 0, L)$	$(z_3, 1, L)$
$\Box$	$(z_1, \Box, L)$	$(z_1, \Box, N)$	$(z_E, 1, N)$	$(z_E, \Box, R)$

Die Beschreibung der Zustände fehlt bewusst.

(a) Ist M deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Ist M sogar ein LBA? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Geben Sie (ohne Abkürzungen) die Konfigurationenfolge von M bei Eingabe von $x = 1111$ an.

(d) Angenommen, wir fassen M als einen Akzeptor auf. Welche Sprache akzeptiert M? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Angenommen, M berechnet eine (Wort-)Funktion $f : \{0, 1\}^* \to \{0, 1\}^*$. Geben Sie f explizit an und begründen Sie Ihre Antwort.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 6 (20 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit dem Normalschema der primitiven Rekursion, dass die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$f(n) \quad = \quad n^2 + 7 \cdot n + 19$$

primitiv rekursiv ist.
In der Vorlesungen wurden auch einige weitere Funktionen vorgestellt, die primitiv rekursiv sind. Sie dürfen die Funktionen aus der Vorlesung (insbesondere die Addition $add(m, n) = m + n$ und die Multiplikation $mult(m, n) = m \cdot n$) hier verwenden. Weitere (Hilfs-)Funktionen müssen Sie erst definieren und zeigen, dass diese Funktionen primitiv rekursiv sind – natürlich dürfen Sie dabei passende Beweise aus Ihren Übungsunterlagen abschreiben.

(b) Gegeben ist die folgende Instanz für das Postsche Korrespondenzproblem über $\Sigma = \{0, 1\}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 = 101 & x_2 = 10 & x_3 = 10 & x_4 = 001 \\ y_1 = 10 & y_2 = \mu & y_3 = 0110 & y_4 = 10 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass dies sogar eine lösbare Instanz des modifizierten Postschen Korrespondenzproblems ist, die unabhängig von μ ist.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.
VIEL SPASS – VIEL GLüCK – VIEL ERFOLG