Übungsblatt 12 :

Raphael Kaya

Aufgabe 1:

a) $L_1 = \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) = 0 \}$

→ Bei Eingabe 0 liefert TM_i als Ergebnis 0

Demnach kann man folgende Turingmaschine A konzipieren:

1. A erhält i, Gödelnummer für Turingmaschine T_i
2. A lässt T_i mit Eingabe 0 durchlaufen
3. Wenn T_i bei Eingabe 0 anhält, dann gibt sie auch 0 aus. Wenn A dann 0 ließt, hält A an und akzeptiert.

   Wenn T_i nicht akzeptiert, gibt T_i keine 0 aus. A akzeptiert nur 0 und hält demnach nicht an.

$$A = \begin{cases} i & \text{, falls } T_i \text{ bei Eingabe 0 hält / akzeptiert} \\ \text{undefiniert} & \text{, sonst} \end{cases}$$

b) $L_2 = \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = \chi_K \}$

Sei Turingmaschine $\mathcal{M}$:

1. $\mathcal{M}$ bekommt i als Eingabe, für Turingmaschine i (T_i)
2. Als Eingabe bekommt T_i alle möglichen Wörter.
3. Wenn T_i ω akzeptiert, akzeptiert $\mathcal{M}$ Eingabe i und hält an.

   Wenn T_i ω nicht akzeptiert läuft es unendlich weiter, da unendl. Eingaben.

   Damit hält auch $\mathcal{M}$ nicht.

c) $L_3 = \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) = i$

Analog zu a) kann eine Turingmaschine $\mathcal{M}$ konstruiert werden, die Eingabe i erhält, T_i mit Eingabe 0 simuliert und mit Eingabe i vergleicht.

Also
1. Eingabe i
2. Simulation von T_i mit Eingabe 0
3. Warten ob T_i hält oder nicht
4. Wenn hält Ergebnis j vergleichen
5. $j = i$ ⇒ $\mathcal{M}$ akzeptiert & hält
6. $j \neq i$ ⇒ $\mathcal{M}$ hält nicht

(⇒ Vergleich vlt. durch speichern von i auf Band und Abgleich mit späterem Ergebnis)

d) $L_4 = \{ i \in \mathbb{N} \mid$ Es gibt ein Wort $\omega \in D_i$ mit $|\omega| \leq 50 \}$

Turingmaschine $\mathcal{M}$ ließt i, simuliert T_i und generiert alle Wörter bis Länge 50.

Wenn T_i ein ω akzeptiert, hält T_i und damit auch $\mathcal{M}$, welches dann Eingabe i akzeptiert.

Wenn nicht hält, dann $\mathcal{M}$ auch nicht.

Aufgabe 2:

a) $L_1 = \{ i \in \mathbb{N} \mid L(M_i) \text{ ist regulär} \}$

Wir zeigen nicht-trivialität durch zwei Turingmaschinen:

1. TM, die reguläre Sprache akzeptiert, z.B. durch akzeptieren der leeren Menge
2. TM für Sprache $\{ a^n b^n \mid n \geq 0 \}$, diese TM akzeptiert keine regulären Sprachen

Satz von RICE besagt, dass für nicht-triviale Eigenschaft $F \subseteq \mathbb{P}$, ist $N_F \notin REC$. $\Rightarrow L_1 \notin REC$

b) $L_2 = \{ i \in \mathbb{N} \mid |D_i| \geq 1000 \}$

Analog zu a):

1. Turingmaschine, deren Funktion nur für 1 definiert ist $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } 1 \\ \text{n.d.}, & \text{sonst} \end{cases}$
2. " , deren Funktion für alle natürlichen Zahlen definiert ist z.B. $f(n) = n+1$

$\Rightarrow$ TM, die Eigenschaft F erfüllt und eine, die es nicht erfüllt. F ist nicht-trivial $\Rightarrow L_2 \notin REC$

c) $L_3 = \{ i \in \mathbb{N} \mid j \in D_i \}$, wobei $j \in \mathbb{N}$, s.d. φ_j total ist

1. Turingmaschine, D_i die jede Eingabe, also auch j, akzeptiert, wodurch φ_j total ist.
2. " , D_i die keine Eingabe akzeptiert, demnach auch nicht j, wodurch Eig. nicht erfüllt.

$\Rightarrow$ nicht-trivial, wodurch $L_3 \notin REC$

Aufgabe 3:

a) i) $x: 1 \quad 1 \quad 0$

$y: 1 \quad 1 \quad 0$

Instanz: 3 1 $\Rightarrow$ Ist Lösung des PCP Problems, da Instanz zu Deckungsgleichheit von x und y führt,

also $x_3 x_1 = y_3 y_1$

ii) Keine Lösung für das MPCP möglich, da erstes Symbol von x_1 & y_1 sich unterscheiden (0 und 1).
MPCP erwartet in Lösung Indexbeginn von 1.

b) i) Überführung:

1. $\underbrace{(\#, \# z_0 011 \#)}_{\text{für } \omega \text{ aus ii)}}$
2. $(z_0 0, 0 z_0)$
3. $(z_0 1, 1 z_0)$
4. $(0 z_0 \#, z_1 0 \square \#)$
5. $(1 z_0 \#, z_1 1 \square \#)$
6. $(\square z_0 \#, z_1 \square \square \#)$
7. $(0 z_1 0, z_2 01)$
8. $(1 z_1 0, z_2 11)$
9. $(\square z_1 0, z_2 \square 1)$
10. $(\# z_1 0, \# z_2 \square 1)$
11. $(0 z_1 1, z_1 00)$
12. $(1 z_1 1, z_1 10)$
13. $(z_1 \#, z_e 1 \#)$
14. $(0 z_2 0, z_2 00)$
15. $(1 z_2 0, z_2 00)$
16. $(\square z_2 0, z_2 \square 0)$
17. $(\# z_2 0, \# z_2 \square 0)$
18. $(0 z_2 1, z_2 01)$
19. $(1 z_2 1, z_2 11)$
20. $(\square z_2 1, z_2 \square 1)$
21. $(\# z_2 1, \# z_2 \square 1)$
22. $(z_2 \#, \square z_e \#)$
23. $(z_e \#\#, \#)$
24. $(0 z_e, z_e)$
25. $(1 z_e, z_e)$
26. $(\square z_e, z_e)$
27. $(z_e 0, z_e)$
28. $(z_e 1, z_e)$
29. $(z_e \square, z_e)$
30. $(0,0)$
31. $(1,1)$
32. $(\square, \square)$

ii) $f(3) = 3+1 = 4$

$\# z_0 011 \# 0 z_0 11 \# 01 z_0 1 \# 011 z_0 \# 011 z_0 \# 01 z_1 \square \# 0 z_1 100 \# z_1 000\square$

$\# z_0 011 \# 0 z_0 11 \# 01 z_0 1 \# 011 z_0 \# 011 z_0 \# 01 z_1 1 \square \# 0 z_1 10 0 \# z_1 000\square \# z_2 0100\square$

Das Ergebniswort ist $100_2 = 4$, wie erwartet