

## Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 03.06.2024 bis 09.06.2024, 16:00 Uhr

Besprechung: 10.06.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS  
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

### Aufgabe 1 (Turingmaschine I) 7P

- Konstruieren Sie eine Turingmaschine  $M = (\{0, 1\}, \Gamma, Z, \delta, z_0, \square, F)$ , mit  $L(M) = \{(01)^n \mid n \geq 1\}$ .
- Geben Sie für alle Zustände Zustandsbeschreibungen ähnlich wie in dem Beispiel auf Kapitel 5 Folie 18 an.

**Lösungsvorschlag:**  $M = (\{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \{z_0, z_1, z_e\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$  mit  $\delta$  wie folgt:

$\delta$	$z_0$	$z_1$	$z_2$
0	$(z_1, 0, R)$		$(z_1, 0, R)$
1		$(z_2, 1, R)$	
$\square$			$(z_e, \square, N)$

### Aufgabe 2 (Turingmaschine II) 13P

Gegeben sei die Sprache  $L = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 0\}$ .

- Konstruieren Sie eine Turingmaschine  $M$ , die die Sprache  $L$  akzeptiert, d.h.  $L = L(M)$ .
- Geben Sie für alle Zustände Zustandsbeschreibungen ähnlich wie in dem Beispiel auf Kapitel 5 Folie 18 an.
- Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationenfolge für die Eingabe  $w_1 = 010$  an.
- Geben Sie eine Konfigurationenfolge für die Eingabe  $w_2 = 00110$  an, um zu zeigen, dass  $w_2$  nicht in  $L(M)$  liegt.

### Lösungsvorschlag:

(a) Die Turingmaschine

$$M = (\{0, 1\}, \{0, 1, \$, \square\}, \{z_0, z_1, \dots, z_5, z_e\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$$

mit den folgenden Turingbefehlen:

$$\begin{aligned} (z_0, \square) &\mapsto (z_e, \square, R) & (z_2, 0) &\mapsto (z_3, \$, R) & (z_4, 0) &\mapsto (z_5, 0, L) \\ (z_0, 0) &\mapsto (z_1, \$, R) & (z_2, 1) &\mapsto (z_2, 1, R) & (z_4, \$) &\mapsto (z_4, \$, L) \\ (z_0, \$) &\mapsto (z_0, \$, R) & (z_2, \$) &\mapsto (z_2, \$, R) & (z_5, 0) &\mapsto (z_5, 0, L) \\ (z_1, 0) &\mapsto (z_1, 0, R) & (z_3, \square) &\mapsto (z_4, \square, L) & (z_5, 1) &\mapsto (z_5, 1, L) \\ (z_1, 1) &\mapsto (z_2, \$, R) & (z_3, 0) &\mapsto (z_3, 0, R) & (z_5, \$) &\mapsto (z_5, \$, L) \\ (z_1, \$) &\mapsto (z_1, \$, R) & (z_4, \square) &\mapsto (z_e, \square, R) & (z_5, \square) &\mapsto (z_0, \square, R) \end{aligned}$$

erkennt die Sprache  $L$ .

(b) Interpretation der Zustände:

$Z$	Bedeutung	Absicht
$z_0$	Anfangszustand.	Wechsle in Zustand $z_1$ , nachdem 0 gelesen und durch \$ ersetzt wurde. Wechsle in Endzustand, wenn das Wort leer ist.
$z_1$	Eine 0 wurde getilgt.	Die nächste 1 suchen und diese durch \$ ersetzen und dann in $z_2$ wechseln.
$z_2$	Eine 1 wurde getilgt.	Die nächste 0 suchen und diese durch \$ ersetzen und dann in $z_3$ wechseln.
$z_3$	Nach rechts laufen.	Rechten Rand erreichen und in $z_4$ wechseln
$z_4$	Nach links laufen, solange \$-Symbole gelesen werden.	Überprüfe, ob alle 0en und 1en getilgt wurden.
$z_5$	Nach links laufen.	Linken Rand erreichen, um neuen Zyklus zu beginnen.
$z_e$	Endzustand.	Wort akzeptieren.

(c) Die Konfigurationenfolge von  $M$  bei Eingabe von 010 ist:

$$\begin{aligned} z_0 010 &\vdash_M \$ z_1 10 \vdash_M \$\$ z_2 0 \vdash_M \$\$\$ z_3 \square \vdash_M \$\$ z_4 \$ \\ &\vdash_M \$ z_4 \$\$ \vdash_M z_4 \$\$\$ \vdash_M z_4 \square \$\$\$ \vdash_M \underline{z_e \$\$\$} \end{aligned}$$

(d) Die Konfigurationenfolge von  $M$  bei Eingabe von 00110 ist:

$$\begin{aligned}
 z_0 00110 \vdash_M \$z_1 0110 \vdash_M \$0z_1 110 \vdash_M \$0\$z_2 10 \vdash_M \$0\$1z_2 0 \\
 \vdash_M \$0\$1\$z_3 \square \vdash_M \$0\$1z_4\$ \vdash_M \underline{\$0\$z_4 1\$}
 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3 (Turingmaschine III)10P

Gegeben sei die Turingmaschine  $M = (\{a\}, \{a, \square, /\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_e\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$  mit folgender Überföhrungsfunktion  $\delta$ :

$\delta$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$
$a$	$(z_1, /, R)$	$(z_0, a, R)$	$(z_2, a, L)$	
$\square$	$(z_2, \square, L)$	$(z_3, \square, L)$	$(z_0, \square, R)$	$(z_e, \square, R)$
$/$	$(z_0, /, R)$	$(z_1, /, R)$	$(z_2, /, L)$	$(z_3, /, L)$

- Ist die angegebene Turingmaschine deterministisch? Begründen Sie.
- Geben Sie eine akzeptierende Konfigurationenfolge für die Eingabe  $w_1 = aaaa$  an.
- Geben Sie alle möglichen Konfigurationenfolgen für die Eingabe  $w_2 = aaaaa$  an, um zu zeigen, dass  $w_2$  nicht in  $L(M)$  liegt.
- Geben Sie für alle Zustände Zustandsbeschreibungen ähnlich wie in dem Beispiel auf Kapitel 5 Folie 18 an.
- Geben Sie die Sprache  $L(M)$  wie gewohnt formal als Menge von Wörtern an.

#### Lösungsvorschlag:

- $M$  ist deterministisch, da jede Konfiguration durch ihre Vorgängerkonfiguration eindeutig bestimmt ist, da  $\delta$  auf höchstens ein Tupel abbildet.
- $$\begin{aligned}
 & z_0aaaa \vdash_M /z_1aaa \vdash_M /az_0aa \vdash_M /a/z_1a \vdash_M /a/az_0\square \vdash_M /a/z_2a\square \vdash_M \\
 & /az_2/a \vdash_M /z_2a/a \vdash_M z_2/a/a \vdash_M z_2\square/a/a \vdash_M \square z_0/a/a \vdash_M /z_0a/a \vdash_M //z_1/a \vdash_M \\
 & ///z_1a \vdash_M ///az_0\square \vdash_M ///z_2a\square \vdash_M //z_2/a \vdash_M /z_2//a \vdash_M z_2///a \vdash_M z_2\square///a \vdash_M \\
 & \square z_0///a \vdash_M /z_0//a \vdash_M //z_0/a \vdash_M ///z_0a \vdash_M ////z_1\square \vdash_M ///z_3/\square \vdash_M \\
 & //z_3// \vdash_M /z_3/// \vdash_M z_3//// \vdash_M \\
 & z_3\square//// \vdash_M \square z_e////
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 & z_0aaaaa \vdash_M /z_1aaaa \vdash_M /az_0aaa \vdash_M /az_0aaa \vdash_M /a/z_1aa \vdash_M /a/az_0a \vdash_M \\
 & /a/a/z_1\square \vdash_M /a/az_3/\square \vdash_M /a/z_3a/\square \text{ Es gibt keine definierte Folgekonfigura-} \\
 & \text{tion und, da } M \text{ deterministisch ist, auch vorher keine alternative Konfigurations-} \\
 & \text{folgen.}
 \end{aligned}$$
- Zustandsbeschreibungen:

Zustand	Beschreibung
$z_0$	Start, je erstes $a$ markieren und zu $z_1$ wechseln oder, falls Wortende (d. h. leeres Wort oder im vorherigen Durchlauf wurde eine gerade Anzahl von $a$ s markiert) zu $z_2$ wechseln
$z_1$	Sucht je zweites $a$ , wechselt wieder zu $z_0$ oder, falls Wortende aber eine ungerade Anzahl von $a$ s in diesem Durchlauf gefunden, zu $z_3$ wechseln
$z_2$	Es wurde eine gerade Anzahl von $a$ s im letzten Durchlauf gefunden, also zurücklaufen (Ausnahme im letzten Durchlauf); falls das Wort am Anfang leer war, Endlosschleife
$z_3$	Überprüft, ob kein unmarkiertes $a$ mehr vorhanden ist.
$z_e$	Endzustand, sobald dieser erreicht ist, wird akzeptiert.

(e)  $L(M) = L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a\}^*$

#### Aufgabe 4 (LBAs)10P

Geben Sie einen LBA  $M$  an mit  $L(M) = \{a^{2^n}b^n \mid n \geq 1\}$ .  
Beschreiben Sie *kurz* die Funktion der genutzten Zustände.

##### Lösungsvorschlag:

$M = (\{a, b, \hat{a}, \hat{b}\}, \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, \square\}, Z, \delta, z_0, \square, \{z_f\})$  mit  $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_f\}$  und  $\delta$  wie folgt:

$\delta$	$z_0$	$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$
$a$	$(z_1, \hat{a}, R)$	$(z_2, \hat{a}, R)$	$(z_2, a, R)$		$(z_4, a, L)$
$b$			$(z_2, b, R)$	$(z_4, \hat{b}, L)$	$(z_4, b, L)$
$\hat{a}$				$(z_f, \hat{a}, N)$	$(z_0, \hat{a}, R)$
$\hat{b}$			$(z_3, \hat{b}, L)$		

Zustandsbeschreibungen:

Zustand	Beschreibung
$z_0$	Start, erstes $a$ mit einem Dach markieren und zu $z_1$ wechseln
$z_1$	zweites $a$ mit einem Dach markieren und zu $z_2$ wechseln
$z_2$	Es wurden zwei $a$ s markiert, laufe nun nach rechts zum Wortende, das mit einem $\hat{b}$ markiert sein muss (bzw ab dem zweiten Durchlauf bis zum ersten markierten $b$ )
$z_3$	Markiert nächstes $b$ (von rechts aus) mit einem Dach, das nun für $z_2$ als "Wortende" gilt. Falls stattdessen ein $\hat{a}$ dort vorgefunden wird, ist also das komplette Wort markiert und wird akzeptiert.
$z_4$	laufe nach links zum letzten markierten $a$ und beginne einen neuen Zyklus
$z_f$	Endzustand, sobald dieser erreicht ist, wird akzeptiert.