Lehrstuhl für Softwaretechnik und Programmiersprachen
Professor Dr. Michael Leuschel

Grundlagen der Theoretischen Informatik - Sommersemester 2012

Nachklausur

Nachklausurtermin: 05. Oktober 2012

- **BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!**
- **TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND MATRIKELNUMMER EIN!**
- **BEI ANGABE VON MEHREREN LÖSUNGEN WIRD STETS DIE LÖSUNG MIT DER GERINGEREN PUNKTZAHL GEWERTET!**

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	5	20	15	15	20	15	90
erreichte Punktzahl							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsskript, Übungsblätter,
- Bücher, Vorlesungs- und Übungsmitschriften.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Elektronische Geräte,
- Kommiliton/inn/en.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Kreuzen Sie für jede der folgenden fünf Fragen in jeder Zeile entweder Ja oder Nein an.

Bewertung: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche oder nicht angekreuzte Antwort gibt es Null Punkte.

Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Sei L eine reguläre Sprache. Jeder totaler DFA M mit $L(M) = L$ hat mindestens so viele Zustände wie R_L Äquivalenzklassen.

☐ Ja ☐ Nein Die kontextfreie Grammatik

$$G = (\{a, b, c, d, v, w, x\}, \{S, B, C, V, W\}, S, P)$$

mit der Regelmenge

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S \to BC \mid Va, \\ & B \to aBc \mid b, \\ & C \to d, \\ & V \to Wx \mid v, \\ & W \to Sw \ \} \end{aligned}$$

ist linksrekursiv.

☐ Ja ☐ Nein Sei $G = (\{a, b, c\}, \{S, B, C, D\}, S, P)$ eine Grammatik mit der Regelmenge

$$\begin{aligned} P = \{ \quad & S \to aB \mid c, \\ & B \to CD, \\ & C \to b, \\ & D \to c \ \}. \end{aligned}$$

Die Sprache $L(G)$, die die Grammatik G erzeugt, ist regulär.

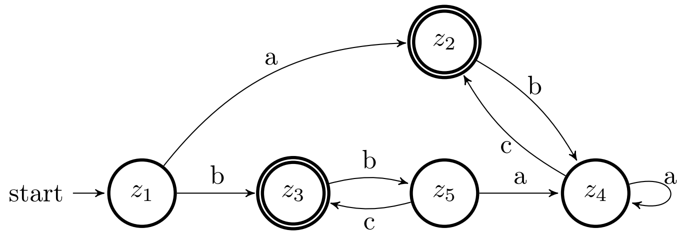
☐ Ja ☐ Nein Sei $L_1 \in \mathrm{CF} \setminus \mathrm{REG}$ und $L_1 \subseteq L_2$, dann kann L_2 regulär sein.

☐ Ja ☐ Nein Die Sprache $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid L(M_w) = \emptyset\}$ ist entscheidbar.

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 2 (20 Punkte)

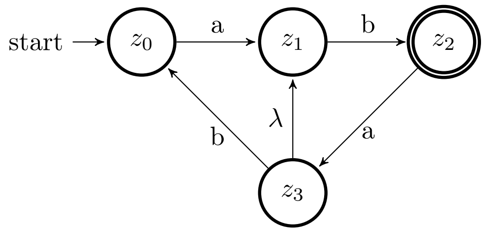
(a) [8 Punke] Sei folgender DFA $M = (\{a, b, c\}, \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}, \delta, z_1, \{z_2, z_3\})$ gegeben:



Konstruieren Sie einen zu M äquivalenten Minimalautomaten N.

Anmerkung: Der oben abgebildete DFA ist nicht vollständig, d.h. die Überführungsfunktion δ ist nicht total. Sie können den Automaten vervollständigen, indem Sie einen Müllzustand hinzufügen.

(b) [12 Punkte] Sei folgender NFA $M = (\{a, b\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \delta, z_0, \{z_2\})$ gegeben:



Anmerkung: Der Übergang von z_3 nach z_1 ist der sogenannte λ-Übergang. Wir nehmen hier an, dass $\delta(\{z_3\}, \lambda) = \{z_1\}$ definiert ist.

(i) [6 Punkte] Zeigen Sie anhand der erweiterten Überführungsfunktion $\hat{\delta}$, dass das Wort *abab* in der Sprache des NFAs $L(M)$ liegt.

(ii) [3 Punkte] Geben Sie eine Grammatik vom Typ 3 an, die $L(M)$ erzeugt.

(iii) [3 Punkte] Geben Sie eine Turingmaschine an, die $L(M)$ akzeptiert.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 (15 Punkte)
Zeigen Sie, entweder durch Angabe einer kontextfreien Grammatik oder durch Angabe eines nichtdeterministischen Kellerautomaten, dass folgende Sprache kontextfrei ist:

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \forall w = uv \text{ gilt } |u|_a \geq |u|_b\}.$$

L ist die Sprache aller Wörter über $\{a,b\}^*$, dessen Präfixe (damit sind alle Präfixe des jeweiligen Wortes gemeint, z.B.: *aba* hat die Präfixe λ, a, ab und aba) mehr a's als b's haben oder gleich so viele a's wie b's. Dabei stehen $|u|_a$ und $|u|_b$ für die Anzahl der a's und die Anzahl der b's in $u \in \{a,b\}^*$.

Zum Beispiel gehören die Wörter *abaa*, *abab* und *aababba* zu L, während *abba*,*ababb* und *aababbabb* nicht zu L gehören.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 4 (15 Punkte)
Sei $M = (\{a, b, c\}, \{a, b, c, \Box\}, \{z_0, z_1, \ldots, z_6\}, \delta, z_0, \Box, \{z_6\})$ eine Turingmaschine mit den folgenden Turingbefehlen:

$$\begin{array}{lll}
(z_0, a) \mapsto (z_1, \Box, R) & (z_2, c) \mapsto (z_2, c, R) & (z_4, c) \mapsto (z_4, c, L) \\
(z_0, b) \mapsto (z_5, b, R) & (z_2, \Box) \mapsto (z_3, \Box, L) & (z_4, \Box) \mapsto (z_0, \Box, R) \\
(z_1, a) \mapsto (z_1, a, R) & (z_3, c) \mapsto (z_4, \Box, L) & (z_5, b) \mapsto (z_5, b, R) \\
(z_1, b) \mapsto (z_1, b, R) & (z_4, a) \mapsto (z_4, a, L) & (z_5, \Box) \mapsto (z_6, \Box, N) \\
(z_1, c) \mapsto (z_2, c, N) & (z_4, b) \mapsto (z_4, b, L) &
\end{array}$$

(a) [6 Punkte] Geben Sie die drei Konfigurationenfolgen von M bei Eingabe von $w_1 = abbc$, $w_2 = abcc$ und $w_3 = bbb$ an.

(b) [4 Punkte] Geben Sie eine mögichst präzise mathematische Beschreibung für die Sprache $L(M)$ an.

(c) [5 Punkte] Modifizieren Sie die Turingmaschine M so, dass die neue Turingmaschine nur noch Wörter mit doppelt so vielen c's als die Wörter aus der Sprache $L(M)$ akzeptiert.
D.h. falls *abbc* ein Wort aus der Sprache $L(M)$ ist, dann akzeptiert die neue Turingmaschine das Wort *abbcc*.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 (20 Punkte)

(a) [10 Punkte] Sei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\phi(n) = |\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \wedge ggT(m, n) = 1\}|$$

gegeben. Dabei ist ggT die Funktion, die die den größten gemeinsamen Teiler von zwei Zahlen berechnet. ϕ gibt für jede natürliche Zahl n an, wie viele zu n teilerfremde positive ganze Zahlen es gibt, die nicht größer als n sind.

Geben Sie ein WHILE-Programm an, die ϕ berechnet. Dabei dürfen Sie benutzen, dass ggT und die Anweisung `IF x = 0 THEN P ELSE Q END;` WHILE-berechenbar sind. Beim Benutzen anderer Versionen der IF-THEN-ELSE-Anweisung zeigen Sie wie im Vorlesungsskript zunächst, dass diese auch WHILE-berechenbar sind.

(b) [10 Punkte] Gegeben seien die partiell rekursiven Funktionen $lt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $gt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die wie folgt definiert sind:

$$lt(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } x = y \end{cases} \qquad gt(x, y) = \begin{cases} y, & \text{falls } x < y \\ x, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Welche Funktionen berechnen $\mu\, lt$ und $\mu\, gt$? Bitte geben Sie eine formale mathematische Beschreibung für $\mu\, lt$ und $\mu\, gt$ an.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer**:

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 6 (15 Punkte)

(a) [10 Punkte] Sei die Grammatik $G = (\{a, b, c\}, \{S, B, C, D\}, S, P)$ gegeben mit der Regelmenge

$$
\begin{aligned}
P = \{ \quad & S \to aB \mid c \\
& B \to CD \\
& C \to b \mid ac \\
& D \to bc \ \}
\end{aligned}
$$

Geben Sie die Sprache $L(G)$ an, die G erzeugt, und berechnen Sie alle Mengen T_m^n der Grammatik G für $n = 4$.

Die Mengen

$$T_m^n = \{w \in (\Sigma \cup N)^* \mid |w| \leq n \text{ und } S \vdash_G^m w\}, \text{ wobei } m, n \in \mathbb{N}$$

lassen sich für festes $n \geq 1$, wie folgt induktiv über m definieren:

$$T_0^n = \{S\}$$

$$T_{m+1}^n = \mathrm{Abl}^n(T_m^n),$$

wobei für eine beliebige Menge X der Hüllenoperator Abl^n definiert ist durch

$$\mathrm{Abl}^n(X) = X \cup \{w \in (\Sigma \cup N)^* \mid |w| \leq n \text{ und es existiert ein } v \in X \text{ mit } v \vdash_G w\}.$$

(b) [5 Punkte] Codieren Sie die Regeln der Grammatik $G_1 = (\{a, b, c\}, \{S, B\}, S, \{S \to aB \mid c,\ B \to b\})$ in ein entsprechendes Gödelwort.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)