Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 01.07.2024 bis 07.07.2024, 16:00 Uhr
Besprechung: 08.07.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (Semi-entscheidbarkeit) 16P

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen semi-entscheidbar sind.

(a) $L_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(0) = 0\}$

(b) $L_2 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = \chi_K\}$, wobei χ_K die charakteristische Funktion des speziellen Halteproblems ist.

(c) $L_3 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_0(0) = i\}$

(d) $L_4 = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{Es gibt ein Wort } w \in D_i \text{ mit } |w| \leq 50\}$

Lösungsvorschlag:

(a) Betrachte die partielle charakteristische Funktion

$$\chi'_{L_1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_x(0) = 0 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir geben einen Algorithmus an, der χ'_{L_1} berechnet:

Algorithmus für χ'_{L_1} mit Eingabe x:

- Simuliere M_x mit Eingabe 0.
- Falls M_x mit Ausgabe 0 hält, geben 1 aus.

Der Algorithmus gibt bei Eingabe x offensichtlich “1” aus, falls M_x bei Eingabe 0 die 0 ausgibt und andernfalls läuft er in eine Endlosschleife bei der Simulation von M_x oder gibt nichts aus.

(b) Das spezielle Halteproblem K ist nicht entscheidbar (siehe Vorlesung), also ist dessen charakteristische Funktion χ_K nicht berechenbar. Formal ist demnach $\chi_K \notin \mathbb{P}$. Es gibt also kein $i \in \mathbb{N}$, sodass $\varphi_i = \chi_K$ ($\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ist eine Gödelisierung von $\mathbb{P}$). Damit ist $L_2 = \emptyset$ und somit semi-entscheidbar und sogar entscheidbar.

(c) Es gilt entweder $L_3 = \emptyset$, falls $\varphi_0(0)$ nicht definiert ist oder andernfalls $L_3 = \{\varphi_0(0)\}$. In beiden Fällen ist L_3 endlich und somit semi-entscheidbar. Um genau zu sein ist L_3 sogar regulär.

(d) Betrachte die partielle charakteristische Funktion

$$\chi'_{L_4}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_x(w) \text{ definiert und } |w| \leq 50 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir geben einen nichtdeterministischen Algorithmus an, der χ'_{L_4} berechnet:

Algorithmus für χ'_{L_4} mit Eingabe x:

- Es wird ein Wort w mit $|w| \leq 50$ geraten (d.h. der Algorithmus hat für jedes solcher Wörter einen Berechnungspfad).
- Simuliere M_x für w.
- Falls M_x mit einer Ausgabe hält, gib 1 aus.

Für eine Eingabe x gibt der Algorithmus "1"aus, falls es ein Wort w gibt mit $|w| \leq 50$ für das M_x etwas ausgibt (in diesem Fall führt mindestens einer der Berechnungspfade zum Erfolg). Andernfalls läuft der Algorithmus auf allen Berechnungspfaden in eine Endlosschleife.

Deterministische Alternative:

Wir benutzen hier nun die injektive Paarungsfunktion π aus der Vorlesung und deren Umkehrfunktionen π_1 und π_2. Sei A die Menge aller Wörter w mit $|w| \leq 50$. Da A endlich ist, gibt es eine Aufzählfunktion $f \in \mathbb{R}$ von A mit $A = W_f$. Wir geben nun einen (deterministischen) Algorithmus an, der χ'_{L_4} berechnet:

Algorithmus für χ'_{L_4} mit Eingabe x:

- Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ simuliere M_x für $\pi_1(n)$ Takte auf Eingabe $f(\pi_2(n))$.
- Falls M_w mit einer Ausgabe hält, gib 1 aus.

Der Algorithmus simuliert M_x für Eingabe x nach-und-nach per „dove-tailing“ für alle Eingaben mit Länge höchstens 50 und größer werdenden Takten. Falls es ein Wort gibt mit Länge höchstens 50 wird der Algorithmus irgendwann "1" ausgeben, da die simulierte M_x anhält. Andernfalls wird der Algorithmus nie anhalten.

Aufgabe 2 Satz von Rice 15P

Zeigen Sie mit dem Satz von Rice, dass die folgenden Sprachen nicht entscheidbar sind.

(a) $L_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid L(M_i) \text{ ist regulär}\}$

(b) $L_2 = \{i \in \mathbb{N} \mid |D_i| \geq 1000\}$

(c) $L_3 = \{i \in \mathbb{N} \mid j \in D_i\}$, wobei $j \in \mathbb{N}$, sodass φ_j total ist.

Lösungsvorschlag:

(a)
- Offensichtlich ist L_1 die Nummermenge einer Eigenschaft von $\mathbb{P}$.
- $L_1 \neq \emptyset$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $D_\ell = \emptyset$. Offensichtlich ist $L(M_\ell)$ regulär und somit $\ell \in L_1$.
- $L_1 \neq \mathbb{N}$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $L(M_\ell)$ nicht regulär (so ein ℓ existiert, weil $REG \subset RE$). Dann ist $\ell \notin L_1$.

Insgesamt ist L_1 die Nummermenge einer nichttrivialen Eigenschaft von $\mathbb{P}$ und somit nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

(b)
- Offensichtlich ist L_2 die Nummermenge einer Eigenschaft von $\mathbb{P}$.
- $L_2 \neq \emptyset$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass D_ℓ total. Dann ist $|D_\ell| > 1000$ und somit $\ell \in L_2$.
- $L_2 \neq \mathbb{N}$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $D_\ell = \emptyset$. Dann ist $|D_\ell| < 1000$ und somit $\ell \notin L_2$.

Insgesamt ist L_2 die Nummermenge einer nichttrivialen Eigenschaft von $\mathbb{P}$ und somit nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

(c)
- Offensichtlich ist L_3 die Nummermenge einer Eigenschaft von $\mathbb{P}$.
- $L_3 \neq \emptyset$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass D_ℓ total. Dann ist $\ell \in L_3$.
- $L_3 \neq \mathbb{N}$: Sei $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $D_\ell = \emptyset$. Dann ist $\ell \notin L_3$, denn es gibt totale Funktionen in $\mathbb{P}$ und somit auch ein $j \in \mathbb{N}$, sodass φ_j total ist.

Insgesamt ist L_3 die Nummermenge einer nichttrivialen Eigenschaft von $\mathbb{P}$ und somit nach dem Satz von Rice unentscheidbar.

Aufgabe 3 PCP 9P

(a) Gegeben sei die folgende Probleminstanz des Postschen Korrespondenzproblems:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = ((0, 10), (01, 100), (11, 1))$$

i) Geben Sie eine möglichst kurze Lösung der Probleminstanz an. Begründen Sie kurz, warum es eine Lösung von PCP ist.

ii) Angenommen, es handelt sich um eine Probleminstanz des modifizierten Postschen Korrespondenzproblems. Lässt sich die Instanz dennoch lösen?

(b) Betrachten Sie die folgende Turingmaschine aus der Vorlesung die $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n) = n + 1$ berechnet. $M = (\{0, 1\}, \{0, 1, \Box\}, \{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ mit der folgenden Überführungsfunktion δ:

δ	z_0	z_1	z_2
0	$(z_0, 0, R)$	$(z_2, 1, L)$	$(z_2, 0, L)$
1	$(z_0, 1, R)$	$(z_1, 0, L)$	$(z_2, 1, L)$
$\Box$	$(z_1, \Box, L)$	$(z_e, 1, N)$	$(z_e, \Box, R)$

Im Folgenden soll die Reduktion von H auf MPCP aus der Vorlesung an einem Beispiel illustriert werden.

i) Geben Sie zunächst die Konfigurationenfolge von M für die Eingabe $n = 3$ an.

ii) Geben Sie nun das Lösungswort für die aus M und der Eingabe $n = 3$ konstruierte Probleminstanz von MPCP an. Die Probleminstanz selbst brauchen Sie nicht anzugeben.

Lösungsvorschlag:

(a) i) Die kürzeste Lösung ist $x_3x_1 = y_3y_1 = 110$

ii) Nein, das Problem lässt sich nicht lösen, da mit $(x_1, y_1) = (0, 10)$ begonnen werden muss und dann in jedem Fall das erste Zeichen nicht überein stimmt.

(b) i) Die Konfigurationenfolge lautet wie folgt.

$$z_0 11 \vdash_M 1z_0 1 \vdash_M 11z_0\Box \vdash_M 1z_1 1\Box \vdash_M z_1 10 \vdash_M z_1\Box 00 \vdash_M z_e 100$$

ii) Das Lösungswort lautet wie folgt.

x_1	x_{i_2}	x_{i_3}	x_{i_4}	x_{i_5}	x_{i_6}	x_{i_7}	x_{i_8}	x_{i_9}	$x_{i_{10}}$	$x_{i_{11}}$	$x_{i_{11}}$	$x_{i_{12}}$	$x_{i_{13}}$	$x_{i_{14}}$
$\#$	$z_0 1$	1	$\#$	1	$z_0 1$	$\#$	1	$1 z_0 \#$	$1 z_1 1$	$\square$	$\# z_1 1$	0	$\square$	$\#$
$\# z_0 1 1 \#$	$1 z_0$	1	$\#$	1	$1 z_0$	$\#$	1	$z_1 1 \square \#$	$z_1 1 0$	$\square$	$\# z_1 \square 0$	0	$\square$	$\#$
y_1	y_{i_2}	y_{i_3}	y_{i_4}	y_{i_5}	y_{i_6}	y_{i_7}	y_{i_8}	y_{i_9}	$y_{i_{10}}$	$y_{i_{10}}$	$y_{i_{11}}$	$y_{i_{12}}$	$y_{i_{13}}$	$y_{i_{14}}$

$x_{i_{15}}$	$x_{i_{16}}$	$x_{i_{17}}$	$x_{i_{18}}$	$x_{i_{19}}$	$x_{i_{20}}$	$x_{i_{21}}$	$x_{i_{22}}$	$x_{i_{23}}$	$x_{i_{24}}$	$x_{i_{25}}$	$x_{i_{26}}$	$x_{i_{27}}$	$x_{i_{28}}$	$x_{i_{29}}$	$x_{i_{30}}$	$x_{i_{31}}$
$z_1 \square$	0	0	$\square$	$\#$	$z_e 1$	0	0	$\square$	$\#$	$z_e 0$	0	$\square$	$\#$	$z_e 0$	$\square$	$\#$
$z_e 1$	0	0	$\square$	$\#$	z_e	0	0	$\square$	$\#$	z_e	0	$\square$	$\#$	z_e	$\square$	$\#$
$y_{i_{15}}$	$y_{i_{16}}$	$y_{i_{17}}$	$y_{i_{18}}$	$y_{i_{19}}$	$y_{i_{20}}$	$y_{i_{21}}$	$y_{i_{22}}$	$y_{i_{23}}$	$y_{i_{24}}$	$y_{i_{25}}$	$y_{i_{26}}$	$y_{i_{27}}$	$y_{i_{28}}$	$y_{i_{29}}$	$y_{i_{30}}$	$y_{i_{31}}$

$x_{i_{32}}$	$x_{i_{33}}$	$x_{i_{34}}$
$z_e \square$	$\#$	$z_e \# \#$
z_e	$\#$	$\#$
$y_{i_{32}}$	$y_{i_{33}}$	$y_{i_{34}}$