Institut für Informatik
M. Mutz

Übungsblatt 1

# Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 15.04.2024 bis 21.04.2024, 16:00 Uhr
Besprechung: 22.04.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

**Aufgabe 1 (Ableitungen) 10 Punkte**
Betrachten Sie die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{S &\to ABSc \mid ABc, \\
BA &\to AB, \\
Bc &\to bc, \\
Bb &\to bb, \\
Ab &\to ab, \\
Aa &\to aa\}.
\end{aligned}
$$

a) Geben Sie eine Ableitung für das Wort $w = aabbcc$ an, wobei Sie nur die unmittelbare Ableitungsrelation nutzen.
*Für LaTeX: Als Symbol können Sie \vdash_G verwenden*

b) Geben Sie $L(G)$ formal als Menge von Wörtern an, ohne weiteren Bezug auf $G$ zu nehmen.

**Lösungsvorschlag:**

a) $S \vdash_G ABSc \vdash_G ABABcc \vdash_G AABBcc \vdash_G AABbcc \vdash_G AAbbcc \vdash_G Aabbcc \vdash_G aabbcc$

b) $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

**Aufgabe 2 (Grammatiken selbst schreiben) 10 Punkte**
Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils eine Grammatik $G_i$ mit $L(G_i) = L_i$ an.

a) $L_0 = \{0^n \mid n \geq 2\}$ über $\Sigma_0 = \{0\}$

b) $L_1 = \{0^{2n} \mid n \geq 2\}$ über $\Sigma_1 = \{0\}$

c) $L_2 = \{bbaab^n \mid n \geq 1\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

d) $L_3 = \{(ab)^n cb^{n+1} \mid n \geq 0\}$ über $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

e) $L_4 = \{w \mid |w| = 5\}$ über $\Sigma_4 = \{0, 1\}$

**Lösungsvorschlag:**

a) $G_0 = (\Sigma_0, N_0, S_0, P_0)$ mit $\Sigma_0 = \{0\}, N_0 = \{S_0, A\}$ und

$$\begin{aligned} P_0 = \{S_0 &\to 0A, \\ A &\to 0A, \\ A &\to 0\}. \end{aligned}$$

Die Grammatik ist von **Typ 3**. Für alle Regeln $p \to q$ in $P_0$ gilt $p \in N_0$ und $q \in \Sigma_0 \cup \Sigma_0 N_0$ und demnach auch $|p| \leq |q|$.

b) $G_1 = (\Sigma_1, N_1, S_1, P_1)$ mit $\Sigma_1 = \{0\}, N_1 = \{S_1, A, B\}$ und

$$\begin{aligned} P_1 = \{S_1 &\to 0A, \\ A &\to 0B, \\ A &\to 0, \\ B &\to 0A\}. \end{aligned}$$

Die Grammatik ist von **Typ 3**. Für alle Regeln $p \to q$ in $P_1$ gilt $p \in N_1$ und $q \in \Sigma_1 \cup \Sigma_1 N_1$ und demnach auch $|p| \leq |q|$.

c) $G_2 = (\Sigma_2, N_2, S_2, P_2)$ mit $\Sigma_2 = \{a, b\}, N_2 = \{S_2, A, B, C, D\}$ und

$$\begin{aligned} P_2 = \{S_2 &\to bA, \\ A &\to bB, \\ B &\to aC \\ C &\to aD \\ D &\to bD, \\ D &\to b\}. \end{aligned}$$

Die Grammatik ist von **Typ 3**. Für alle Regeln $p \to q$ in $P_2$ gilt $p \in N_2$ und $q \in \Sigma_2 \cup \Sigma_2 N_2$ und demnach auch $|p| \leq |q|$.

d) $G_3 = (\Sigma_3, N_3, S_3, P_3)$ mit $\Sigma_3 = \{a, b, c\}, N_3 = \{S_3, A, B\}$ und

$$\begin{aligned} P_3 = \{S_3 &\to AS_3B \mid ccb, \\ A &\to ab, \\ B &\to b\} \end{aligned}$$

Die Grammatik ist von **Typ 2**. Für alle Regeln $p \to q$ in $P_3$ gilt $|p| \leq |q|$ und $p \in N_2$. Allerdings gilt für $S_3 \to AS_3B$, dass $q \notin \Sigma_3 \cup \Sigma_3 N_3$.

e) $G_4 = (\Sigma_4, N_4, S_4, P_4)$ mit $\Sigma_4 = \{0, 1\}, N_4 = \{S_4, C\}$ und

$$\begin{aligned} P_4 = \{S_4 &\to CCCCC, \\ C &\to 0 \mid 1\} \end{aligned}$$

Die Grammatik hier ist von **Typ 2**. Es gibt aber auch eine Grammatik von Typ 3.

**Aufgabe 3** [Chomsky-Hierarchie] **10 Punkte**
Geben Sie für die von ihnen gewählte Grammatik $G_i$ mit $L(G_i) = L_i$ aus Aufgabe 2 den Typ Ihrer Grammatik an. Begründen Sie Ihre Angabe (welche Kritierien machen es zu einer Typ 1, Typ 2, oder Typ 3 Grammatik?). Überlegen Sie, ob Sie eine Grammatik von höherem Typ konstruieren könnten.

a) $L_1 = \{0^{2n} \mid n \geq 2\}$ über $\Sigma_1 = \{0\}$

b) $L_2 = \{bbaab^n \mid n \geq 1\}$ über $\Sigma_2 = \{a, b\}$

c) $L_3 = \{(ab)^n cb^{n+1} \mid n \geq 0\}$ über $\Sigma_3 = \{a, b, c\}$

**Aufgabe 4** [Operationen auf Sprachen] **10 Punkte**
Geben Sie bei folgenden Sprachen die resultierenden Sprachen formal als Menge von Wörtern an und beschreiben Sie sie informal. Nennen Sie zudem pro Aufgabenteil zwei Wörter, wobei eines in der Sprache liegt und eines nicht in der Sprache liegt.

(a) $L_1 = \overline{\emptyset}\{aa\}\overline{\emptyset}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

(b) $L_2 = \overline{\overline{\{\lambda\}}\{b\}}$ über $\Sigma = \{a, b\}$.

**Lösungsvorschlag:**

**a:**
Besteht aus Wörtern mit dem Teilwort $aa$.

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w = uaav, u, v \in \Sigma^*\}$

- $aa \in L_1$
- $\lambda \notin L_1$

**b:**
Besteht aus Wörtern, die nicht auf $b$ enden, es sei denn, $b$ ist das einzige Symbol, aus dem das Wort besteht.

- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = \lambda \text{ oder } w = b \text{ oder } w = xa, x \in \Sigma^*\}$
- $\lambda \in L_2$
- $ab \notin L_2$