Übung 5 Raphael Kaya

Aufgabe 1:

$L_1 = \{0^n 1^m 0^k \mid n,m,k \geq 0,\ m-n < k\}$ über $\Sigma = \{0,1\}$ $\Rightarrow$ mehr 1 als führende Nullen, aber weniger als abschl. 0en
$\Leftrightarrow$ $0 \leq 1 \leq 0$

Angenommen, L sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit:

1. $|uv| \leq p$
2. $|v| > 0$
3. $(\forall i \in \mathbb{N})\,[uv^i w \in L]$

Wir wählen $x = 0^n 1^m 0^k$ ($x = uvw$) mit $|x| = 3p \geq p$ $\Rightarrow n+m+k \leq p$

$x = 0^p 1^p 0^{p+1}$ $\Rightarrow p-p=0 < p+1$ $\Rightarrow x \in L$

Fall 1: 0^p in uv $\Rightarrow v = 0^i$, $\forall i > 0$

$uv^iw = 0^{p+i} 1^p 0^{p+1}$ $\Rightarrow$ $p-p-i = -i < p+1$ $\Rightarrow |0|_{\text{vorne}} > |1|$ $\Rightarrow uv^iw \notin L$

Fall 2: $0^p 1^p$ in uv $\Rightarrow v = 0^a 1^b$ mit $\forall a,b > 0$

$uv^iw = 0^{p+a} 1^{p+b} 0^{p+1}$

$m' - n' = (p+b) - (p+a) = b-a < p+1$ $\Rightarrow$ wenn b immer größer durchs pumpen wird, $|1| > |0|_{\text{Ende}}$, wodurch $m'-n' > k$ und ein Widerspruch vorliegt

$\Rightarrow$ nicht regulär

Aufgabe 2:

λ-frei:

$P = \{\ S \to A \mid BCd$
$A \to BC \mid E$
$B \to b \mid Bb$
$C \to c \mid \lambda$
$E \to e \mid F$
$F \to f \mid A\ \}$

$\Rightarrow$

$P = \{\ S \to A \mid BCd \mid Bd$
$A \to BC \mid B \mid E$
$B \to b \mid Bb$
$C \to c \mid \cancel{\lambda}$
$E \to e \mid f$
$F \to f \mid A\ \}$

$\Rightarrow$

$P = \{\ S \to \cancel{A}\ X \mid BCd \mid Bd$
$\cancel{A}\ X \to BC \mid B \mid \cancel{E}$
$B \to b \mid Bb$
$C \to c$
$\cancel{E}\ X \to e \mid \cancel{F}$
$\cancel{F}\ X \to f \mid \cancel{A}$

$\Rightarrow P = \{\ S \to \cancel{X} \mid BCd \mid Bd \mid BC \mid Bb \mid b \mid e \mid f$
$X \to BC \mid \cancel{B} \mid e \mid f \mid b \mid Bb$
$B \to b \mid Bb$
$C \to c\ \}$

$\Rightarrow$

$P = \{\ S \to BCd \mid Bd \mid BC \mid Bb \mid b \mid e \mid f$
$B \to b \mid Bb$
$C \to c\ \}$

$\Rightarrow P' = \{\ S \to BX_0 \mid BD \mid BC \mid BB_1 \mid b \mid e \mid f$
$X_0 \to CD$
$B \to b \mid BB_1$
$B_1 \to b$
$C \to c$
$D \to d\ \}$

$G' = \{\Sigma, N, S, P'\}$

Aufgabe 3:

i) $L_1 = \{ a^i b^j \mid i \geq 0,\ j = i^2 \}$ über $\Sigma = \{a,b\}$

Sei die Sprache L_1 kontextfrei, dann existiert eine Zahl $n \geq 1$, s.d. alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$, wobei gilt:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $(\forall i \geq 0)[uv^iwx^iy \in L]$

Wir wählen $z = a^i b^j \ \forall\ i \geq 0, \forall j = i^2 \Rightarrow a^i b^{i^2}$ $\qquad |z| = n + n^2 > n$

Fall 1: $vwx = a^i$

$\Rightarrow$ beim aufpumpen von vx wäre $j \neq i^2$ $\Rightarrow uv^iwx^iy \notin L_1$

Fall 2: $vwx = b^j$

$\Rightarrow$ beim aufpumpen gilt $j \neq i^2$ $\Rightarrow uv^iwx^iy \notin L_1$

Fall 3: $vwx = a^i b^j$

$\Rightarrow$ Beim aufpumpen erhalten wir: $a^{i+k} b^{j+k}$, wodurch $j = i^2 + k \Rightarrow j \neq i^2$ und $uv^iwx^iy \notin L_1$

$\Rightarrow$ Sprache ist nicht kontextfrei, da das Pumpin

ii) $L_2 = \{ a^i b^i c a^i b^i \mid i \geq 0 \}$ über $\Sigma = \{a,b\}$

Sei die Sprache L_1 kontextfrei, dann existiert eine Zahl $n \geq 1$, s.d. alle Wörter $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lassen in $z = uvwxy$, wobei gilt:

1. $|vx| \geq 1$
2. $|vwx| \leq n$
3. $(\forall i \geq 0)[uv^iwx^iy \in L]$

Wir wählen $x = a^i b^i c a^i b^i$ mit $|x| = 4n+1 > n$

$uvwxy = a^i b^i c a^i b^i$

Fall 1: vwx hat kein c, wähle $i=2$

$\Rightarrow vwx = a^i b^i$ oder $vwx = a^i$ oder $vwx = b^i$ $\Rightarrow$ Dann hat uv^iwx^iy nicht gleiche Anzahl a's b's oder Verteilung falsch

$\Rightarrow$ aufpumpen: $a^{i+k} b^{i+k} c a^i b^i \notin L_2$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$a^i b^i c a^{i+k} b^{j+k} \notin L_2$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$a^{i+k} b^i c a^i b^i \notin L_2$, ...

Fall 2: vwx hat ein c, wähle $i=2$

$\Rightarrow vwx = b^i c$ oder $vwx = c a^i$, da alles andere $|vwx| = n+1 > n$ wäre

$\Rightarrow uv^iwx^iy$ hat mehr a's als b's, wodurch $uv^iwx^iy \notin L_2$