Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: O2, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@hhu.de

21. Juli 2022

Vorlesung im Sommersemester 2022

Theoretische Informatik

Hauptklausurtermin: 18. Juli 2022

**BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN, VORNAMEN
UND IHRE MATRIKELNUMMER SOWIE ZUSÄTZLICH AUF DEM
DECKBLATT STUDIENFACH MIT SEMESTER UND ANZAHL DER
ABGEGEBENEN BLÄTTER EIN, UND UNTERSCHREIBEN SIE
ALS STUDIERENDE DER INFORMATIK, DASS SIE ANGEMELDET SIND!**

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter: 7 Aufgabenblätter + ☐

(Nur für Studierende der Informatik) Hiermit bestätige ich, dass ich mich im Studierendenportal oder beim akademischen Prüfungsamt für diese Klausur angemeldet habe:

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	22	15	12	14	17	100
erreichte Punktzahl							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Elektronische Geräte aller Art.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe 1 (20 Punkte) **/20 Punkte**

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja" oder „Nein" an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja" oder „Nein"* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja" noch „Nein" oder sowohl „Ja" als auch „Nein" angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein $\lambda \notin \{a, b\}^*$.
☐ Ja ☐ Nein Jede endliche Sprache ist regulär.
☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Sprache ist endlich.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Ist L regulär, so ist die Anzahl der durch die Myhill–Nerode-Relation R_L induzierten Äquivalenzklassen endlich.
☐ Ja ☐ Nein Es gibt eine von einem NFA akzeptierte Sprache, die durch keinen DFA akzeptiert werden kann.
☐ Ja ☐ Nein Durch Angabe eines regulären Ausdrucks kann man zeigen, dass eine gegebene Sprache nicht regulär ist.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung.
☐ Ja ☐ Nein Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen unter Schnitt.
☐ Ja ☐ Nein $\{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextsensitiv, aber nicht kontextfrei.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jede totale Funktion ist LOOP-berechenbar.
☐ Ja ☐ Nein Jedes WHILE-Programm ist ein LOOP-Programm.
☐ Ja ☐ Nein Jede primitiv rekursive Funktion ist total.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Menge ist entscheidbar.
☐ Ja ☐ Nein Es gibt kontextfreie Mengen, die nicht entscheidbar sind.
☐ Ja ☐ Nein Das Komplement der Menge $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ ist entscheidbar.

Aufgabe 2 (22 Punkte) *Reguläre Sprachen* **/22 Punkte**

(a) Gegeben sei $L_1 = \{aa, bbb\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

(i) Geben Sie einen Minimalautomaten M als Zustandsgraphen an, für welchen $L(M) = L_1$ gilt. Hierbei ist keine Herleitung gefordert.

(ii) Geben Sie drei paarweise verschiedene Myhill–Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache L_1 explizit in der Form [*Repräsentant*] an und zeigen Sie formal, dass diese tatsächlich paarweise verschieden sind.

(iii) Geben Sie die Anzahl aller paarweise verschiedenen Myhill–Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache L_1 an und begründen Sie. Bei der Begründung dürfen Sie sich auf vorherige Aufgabenteile beziehen.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt $\text{Index}(L) \leq \text{Index}(L^*)$. Hierbei bezeichnet $\text{Index}(L)$ die Anzahl der paarweise verschiedenen Myhill–Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache L.

(c) Betrachten Sie die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $N = \{A, B, S\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{&S \to 1A \mid 0B, \\ &A \to 1A \mid 0B \mid 1, \\ &B \to 0B \mid 1\}. \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass $w = 11001$ in $L(G)$ liegt. Nutzen Sie dazu ausschließlich die Ableitungsrelationen der Grammatik G. Geben Sie alle Zwischenschritte an.

(ii) Erstellen Sie mittels des Verfahrens aus der Vorlesung (siehe Satz 2.16, Kapitel 2, Folie 36) einen NFA M mit $L(G) = L(M)$. Geben Sie dabei Ihren NFA formal – also nicht als Zustandsgraph – an.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 3 (15 Punkte) *Kontextfreie Sprachen* **/15 Punkte**

(a) Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten (DPDA) an, der die Sprache $L = \{(01)^n 1^n \mid n \geq 0\} \subseteq \{0,1\}^*$ akzeptiert.

(b) Gegeben sei der PDA $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \#)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{\#, A\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$ und δ wie folgt:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
z_0 a\# & \to & z_1 AA, & z_0 a\# & \to & z_3 A\#, \\
z_1 aA & \to & z_1 AAA, & z_3 aA & \to & z_3 AA, \\
z_1 bA & \to & z_2 \lambda, & z_3 bA & \to & z_4 \lambda, \\
z_2 bA & \to & z_2 \lambda, & z_4 \lambda A & \to & z_5 \lambda, \\
z_0 \lambda\# & \to & z_0 \lambda, & z_5 \lambda A & \to & z_6 \lambda, \\
 & & & z_6 bA & \to & z_4 \lambda, \\
 & & & z_6 \lambda\# & \to & z_0 \lambda
\end{array}
$$

Wenn der Algorithmus zum Erstellen einer kontextfreien Grammatik G' mit $L(G') = L(M)$ angewendet wird, wieviele Produktionsregeln hat diese Grammatik G' dann?
Bitte geben Sie die Anzahl der Regeln für jeden der vier Teilschritte an, die Produkte müssen nicht ausgerechnet werden.
Sie brauchen den Algorithmus **nicht** *durchzuführen!*

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Leerseite zur Bearbeitung von Aufgabe 3

Aufgabe 4 (12 Punkte) *Pumping-Lemma für REG* **/12 Punkte**

Zeigen Sie mit dem Pumpinglemma für reguläre Sprachen, dass die folgende Sprache nicht regulär ist:

$$L = \{0^k \mid k = 2^m, m \geq 0\} \subseteq \{0\}^*$$

Vervollständigen Sie dazu den folgenden Beweis. Hierbei dürfen Sie verwenden, dass $x < 2^x$ für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt, ohne dies explizit zu beweisen.

Behauptung: L ist nicht regulär.

Beweis: Wir nehmen für einen Widerspruch an, L wäre regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen eine Zahl $n \geq 1$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit

(1) $|uv| \leq n$,

(2) $|v| \geq 1$,

(3) für alle $i \geq 0$ gilt $uv^iw \in L$.

Für den Widerspruch zeigen wir, dass ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ existiert, so dass für alle Zerlegungen $x = uvw$ mit (1) und (2) nicht (3) gilt.

[Ab hier weiter argumentieren.]

Hinweise: Achten Sie dabei auf eine gut ersichtliche Beweisstruktur (was ist zu zeigen, was wird zu einem Widerspruch geführt, etc.) sowie darauf, dass alle Einzelschritte nachvollziehbar sind (führen Sie verwendete Regeln auf, begründen Sie, warum Sie mit diesem Wort/dieser Zahl argumentieren dürfen, welche Eigenschaften eine Variable hat, etc.); und definieren Sie alle verwendeten Variablen.

Aufgabe 5 (14 Punkte) *Turingmaschinen* **/14 Punkte**

Betrachten Sie die folgende Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \square, F)$ mit

- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $\Gamma = \{0, 1, \square\}$,
- $Z = \{z_e, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$,
- $F = \{z_e\}$,
- δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
0	$(z_1, 0, R)$	$(z_3, 0, R)$	$(z_4, 0, R)$	$(z_5, 1, R)$		
1	$(z_2, 1, R)$	$(z_3, 1, R)$	$(z_4, 1, R)$		$(z_5, 0, R)$	
$\square$						$(z_e, \square, L)$

(a) Welche Sprache akzeptiert M?

(b) Geben Sie alle Konfigurationenfolgen von M für die Eingabe $x_1 = 101$ an. Gilt $x_1 \in L(M)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Gegeben sei die Sprache $A = \{xwx \mid x \in \{0, 1\}, w \in \{0, 1\}^*\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$. Konstruieren Sie einen LBA M' mit $L(M') = A$.

(d) Geben Sie ein Wort x_2 an, für das $x_2 \in L(M')$ und $x_2 \notin L(M)$ gilt.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Leerseite zur Bearbeitung von Aufgabe 5

Aufgabe 6 (17 Punkte) *Berechenbarkeit*

/17 Punkte

(a) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $f(x, y, z) = \min(x, y, z)$. Geben Sie ein `LOOP`-Programm an, welches die Funktion f berechnet.

(b) Gegeben sei die primitiv rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x - y < 2 \\ x - y - 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g = \mu f$ und geben Sie g explizit an. Begründen Sie Ihre Antwort.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.
VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG