Theoretische Informatik
Kapitel 10 – Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit

Sommersemester 2024

Dozentin: Mareike Mutz

im Wechsel mit

Prof. Dr. M. Leuschel

Prof. Dr. J. Rothe

Vorbereitungen

- Es sei eine Gödelisierung $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ der Klasse $\mathbb{P}$ fixiert.
- Diese erhält man etwa durch eine Erweiterung der Gödelisierung $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ der Klasse $\mathbb{P}\mathrm{r}$ um den μ-Operator.
- Dazu äquivalent kann man eine Gödelisierung

$$M_0, M_1, M_2, \ldots$$

aller Turingmaschinen angeben, wobei M_i die Funktion φ_i berechnet.

- Für jedes $k \geq 0$ bezeichne

$$\varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \ldots$$

eine Gödelisierung aller k-stelligen Funktionen in $\mathbb{P}$.

Aufzählbarkeitssatz; Satz von der universellen Funktion

Theorem

Es gibt eine zweistellige Funktion $u \in \mathbb{P}$ (die so genannte „universelle Funktion“), so dass für alle $i, x \in \mathbb{N}$: $u(i, x) = \varphi_i^{(1)}(x)$.

Beweis: Setze $u(i, x) = \varphi_i^{(1)}(x)$. Ist u berechenbar?

Ja, nämlich mit dem folgenden Algorithmus: Bei Eingabe von i und x

1. berechne das Programm (d.h. die Turingmaschine M_i) von φ_i,
2. wende es auf die Eingabe x an und
3. gib den Funktionswert $\varphi_i^{(1)}(x) = u(i, x)$ aus.

Es folgt, dass $u \in \mathbb{P}$. ❑

Iterationssatz; *s-m-n*-Theorem

Theorem

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es eine $(m+1)$-stellige Funktion $s \in \mathbb{R}$, so dass für alle $i, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{N}$:

$$\varphi_i^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \varphi_{s(i,y_1,\ldots,y_m)}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n).$$

(Hierbei fasst man die x_i als echte Variablen und die y_j als fixierte Parameter auf.)

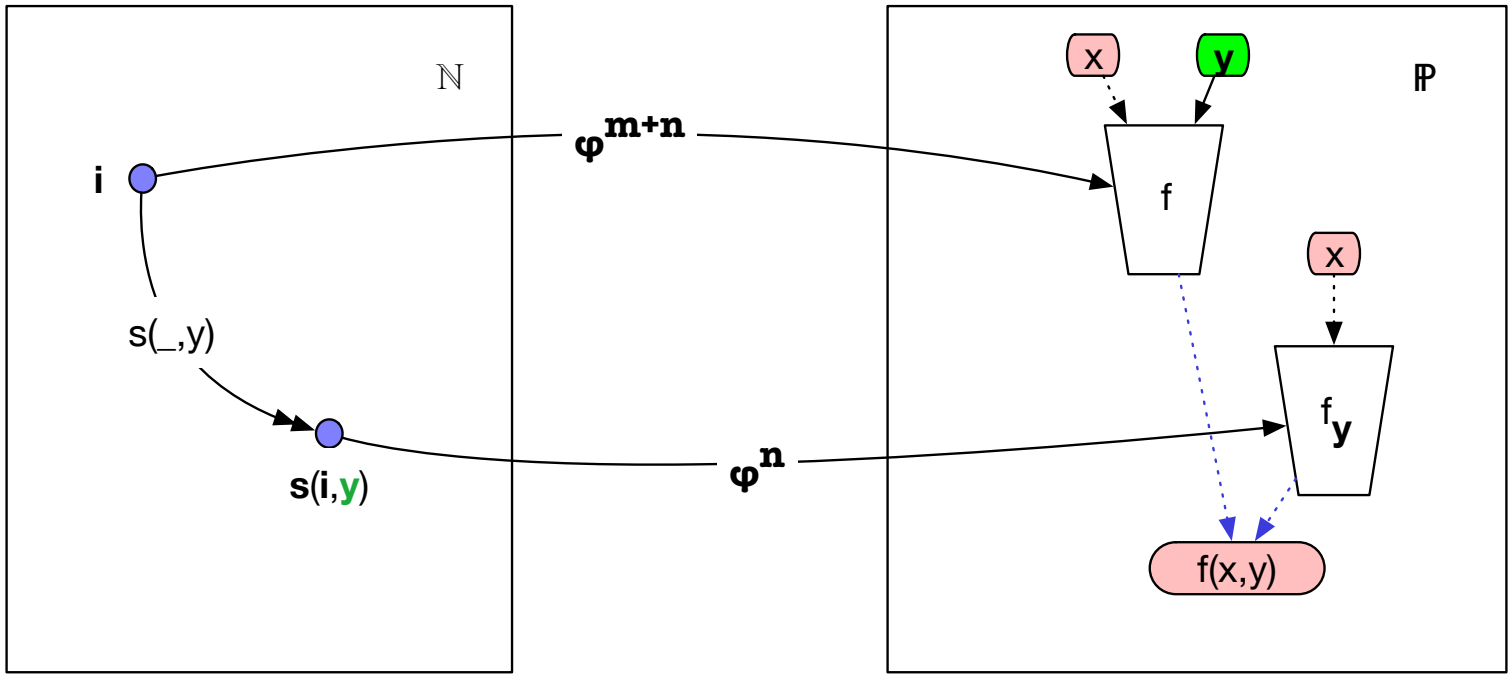
Beweis: Seien $i \in \mathbb{N}$ und $y_1, \ldots, y_m \in \mathbb{N}$ gegeben. Betrachte

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_i^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

als Funktion von $x_1, \ldots, x_n$. Dann gibt es eine TM M, die f berechnet (und in deren Programm die Werte i und $y_1, \ldots, y_m$ hart codiert sind).

Iterationssatz; *s-m-n*-Theorem

$$\varphi_i^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = \varphi_{s(i,y_1,\ldots,y_m)}^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$$



Iterationssatz; *s-m-n*-Theorem

M arbeitet bei Eingabe $x_1, \ldots, x_n$ so:

1. berechne das Programm (d.h. die Turingmaschine M_i) von φ_i,
2. simuliere $M_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

M hat natürlich das Ergebnis $\varphi_i^{(m+n)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

Ist zum Beispiel $f(x_1, \ldots, x_n)$ nicht definiert, so hält M nie an. Es folgt $f \in \mathbb{P}$.

M hat selbst eine Gödelnummer, sagen wir j, die von i und $y_1, \ldots, y_m$ abhängt.

Für gegebenes i und $y_1, \ldots, y_m$ kann diese Nummer j algorithmisch bestimmt werden.

Iterationssatz; *s-m-n*-Theorem

Setzen wir

$$s(i, y_1, \ldots, y_m) = j,$$

so gibt es also ein algorithmisches Verfahren zur Berechnung von s, d.h., $s \in \mathbb{R}$, und es gilt:

$$f \equiv \varphi_j^{(n)} \equiv \varphi_{s(i,y_1,\ldots,y_m)}^{(n)}.$$

Der Satz ist bewiesen. ❑

Kleenescher Fixpunktsatz

Theorem

Ist $h \in \mathbb{R}$, so existiert ein Fixpunkt $a \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,[\varphi_{h(a)}(x) = \varphi_a(x)].$$

Beweis: Sei $h \in \mathbb{R}$.

- Da h somit auch in $\mathbb{P}$ ist, gibt es eine Gödelnummer für h, etwa

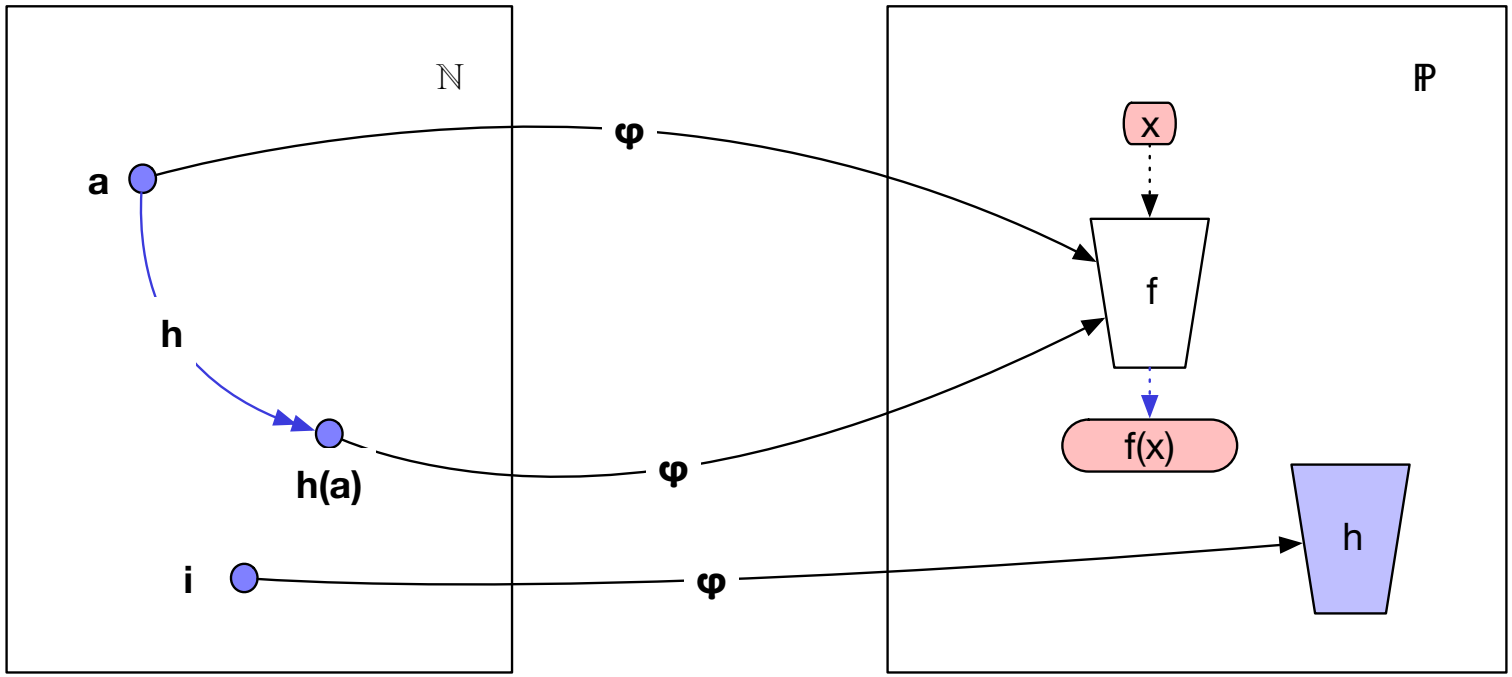
$$h = \varphi_i.$$

- Wir wenden den Iterationssatz auf zweistellige Funktionen in $\mathbb{P}$ an. Demnach existiert eine Funktion $\sigma \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_{\sigma(k,x)}(y). \tag{1}$$

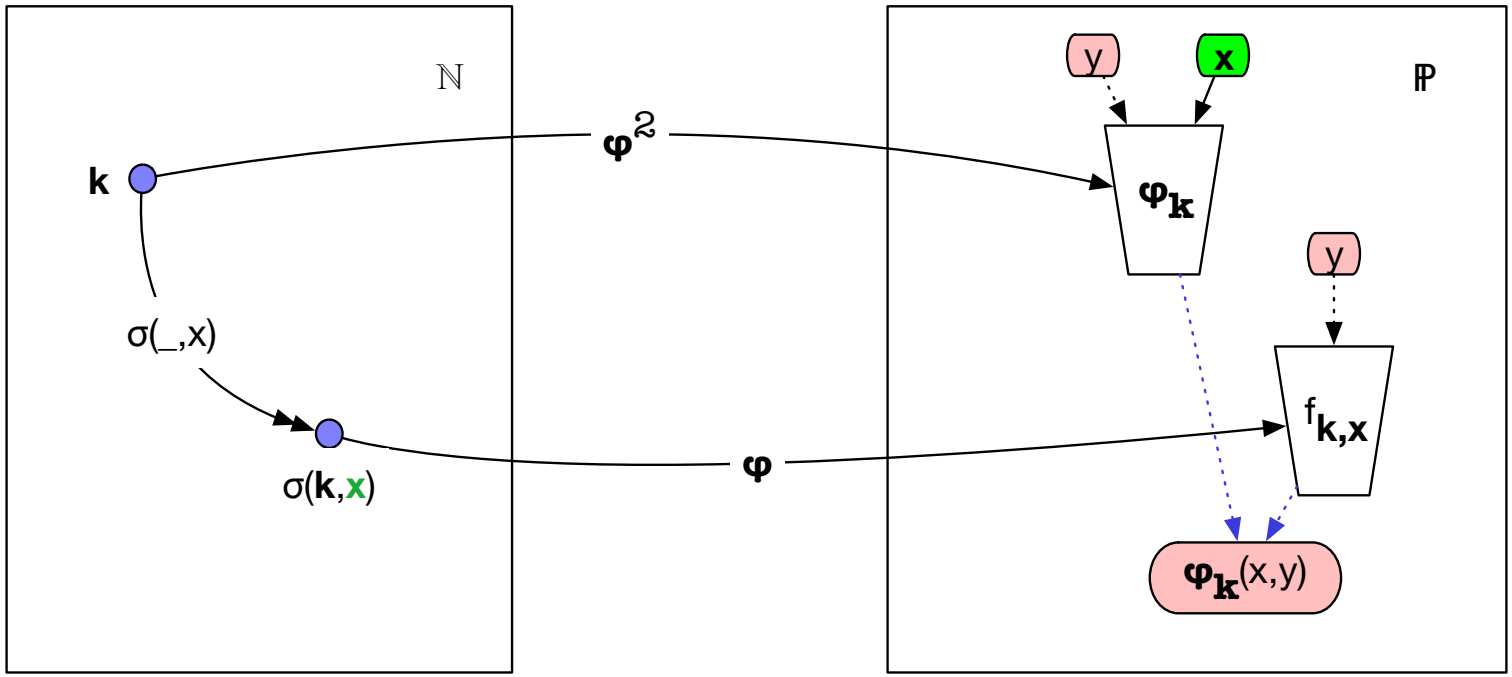
Kleenescher Fixpunktsatz

$$(\forall x \in \mathbb{N})\,[\varphi_{h(a)}(x) = \varphi_a(x)]$$



Kleenescher Fixpunktsatz

$$\varphi_k(x, y) = \varphi_{\sigma(k,x)}(y)$$



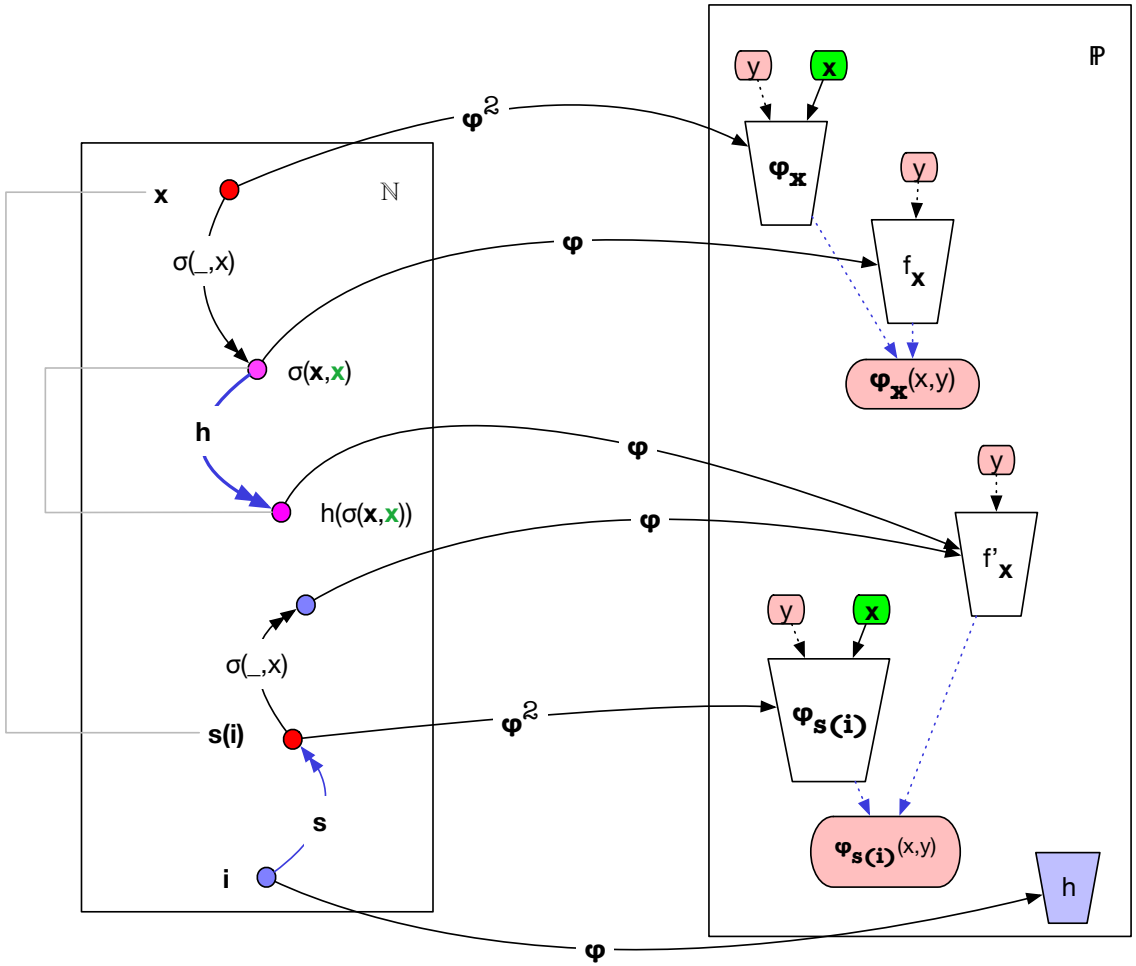
Kleenescher Fixpunktsatz: Der Trick

Der Trick ist der folgende:

$$\begin{aligned}
\varphi_{h(\sigma(x,x))}(y) &= v(i,x,y) && \text{mit } v \in \mathbb{P} \text{ und } v = \varphi_m \\
&= \varphi_m(i,x,y) \\
&= \varphi_{g(m,i)}(x,y) && \text{mit } g \in \mathbb{R} \text{ nach dem Iterationssatz} \\
&= \varphi_{s(i)}(x,y) && \text{denn } m \text{ ist ja fest, } s \in \mathbb{R} \\
&= \varphi_{\sigma(s(i),x)}(y) && \text{nach (1) mit } k = s(i).
\end{aligned}$$

Kleenescher Fixpunktsatz - Trick

Fixpunkt für $\sigma(s(i), s(i))$, d.h., $x = s(i)$:



Kleenescher Fixpunktsatz

Also existieren Funktionen $s, \sigma \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\varphi_{h(\sigma(x,x))} \equiv \varphi_{\sigma(s(i),x)}. \tag{2}$$

Setze

$$a = \sigma(s(i), s(i)).$$

Da $s, \sigma \in \mathbb{R}$, existiert dieser Fixpunkt a stets.

Aus (2) folgt mit $x = s(i)$:

$$\varphi_{h(a)} \equiv \varphi_{h(\sigma(s(i),s(i)))} \equiv \varphi_{\sigma(s(i),s(i))} \equiv \varphi_a.$$

Der Satz ist bewiesen. ❑

Entscheidbarkeit

Definition

Es sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Menge (analog für $A \subseteq \mathbb{N}$). Die *charakteristische Funktion von A* ist definiert durch:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \notin A. \end{cases}$$

A heißt *entscheidbar*, falls $\chi_A : \Sigma^* \to \{0, 1\}$ berechenbar ist.

REC bezeichne die *Klasse aller entscheidbaren Mengen*.

Bemerkung: Das heißt, eine Sprache A ist entscheidbar, falls es eine DTM gibt, die für jedes $x \in \Sigma^*$ entscheidet, ob $x \in A$ oder $x \notin A$.

Semi-Entscheidbarkeit

Definition

Es sei $A \subseteq \Sigma^*$ eine Menge (analog für $A \subseteq \mathbb{N}$). Die *partielle charakteristische Funktion von A* ist definiert durch:

$$\chi'_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

A heißt *semi-entscheidbar*, falls χ'_A berechenbar ist.

Semi-Entscheidbarkeit

Bemerkung: Das heißt, eine Sprache A ist semi-entscheidbar, falls es eine DTM M gibt, die A akzeptiert, d.h., $L(M) = A$.

- Für $x \in A$ stoppt die Maschine nach endlich vielen Schritten in einem Endzustand.
- Für $x \notin A$ braucht die Maschine nicht zu stoppen – jedenfalls nicht in einem Endzustand.
- Hat die Maschine noch nicht gestoppt, so ist unklar, ob die Maschine noch stoppen wird ($x \in A$) oder nicht ($x \notin A$).

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Beispiel: Die folgenden Mengen sind entscheidbar (und damit natürlich auch semi-entscheidbar), da sich leicht Algorithmen zur Berechnung ihrer charakteristischen Funktion angeben lassen:

1. die Menge der Quadratzahlen: $A_1 = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{REC}$,
2. die Menge der Zweierpotenzen: $A_2 = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathbf{REC}$,
3. die Menge der Primzahlen: $A_3 = \{p \mid p \text{ Primzahl}\} \in \mathbf{REC}$.

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Theorem

A ist entscheidbar $\iff$ A und $\overline{A} = \Sigma^* - A$ sind semi-entscheidbar.

Beweis:

($\Rightarrow$) Eine Turingmaschine, die A entscheidet, kann leicht zu einer Turingmaschine modifiziert werden, die A bzw. $\overline{A}$ akzeptiert.

($\Leftarrow$) Nach Voraussetzung gibt es zwei Turingmaschinen M_A und $M_{\overline{A}}$, die die Sprachen A bzw. $\overline{A}$ akzeptieren.

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Diese beiden Maschinen können wie folgt zu einer Maschine kombiniert werden, die für jedes $x \in \Sigma^*$ entscheidet, ob

- $x \in A$ oder
- $x \notin A$.

INPUT(x);

FOR $i = 1, 2, 3, \ldots$ DO

IF M_A hält bei Eingabe von x nach i Schritten THEN OUTPUT(1);

IF $M_{\overline{A}}$ hält bei Eingabe von x nach i Schritten THEN OUTPUT(0);

END

Abschlusseigenschaften von REC

Theorem

REC *ist abgeschlossen unter*

1. *Schnitt,*
2. *Vereinigung*
3. *Komplement,*
4. *Konkatenation und*
5. *Iteration.*

Abschlusseigenschaften von REC

Beweis:

1. Schnitt:
$$\chi_{A\cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x).$$
2. Vereinigung:
$$\chi_{A\cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}.$$
3. Komplement:
$$\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x).$$
4. Konkatenation:
$$\chi_{AB}(x) = \max_{x\in\Sigma^*,\, x=x_1x_2} \chi_A(x_1) \cdot \chi_B(x_2).$$
5. Iteration:
$$\chi_{A^n}(x) = \max_{x\in\Sigma^*,\, x=x_1\cdots x_n} \chi_A(x_1) \cdot \ldots \cdot \chi_A(x_n).$$

Wiederholung: Chomsky-Hierarchie

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann vom Typ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, wenn es eine Typ-i-Grammatik G gibt mit $L(G) = A$.
- Die *Chomsky-Hierarchie* besteht aus den vier Sprachklassen:

$$\mathfrak{L}_i = \{L(G) \mid G \text{ ist Typ-}i\text{-Grammatik}\},$$

wobei $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Übliche Bezeichnungen:

  - $\mathfrak{L}_0$ ist die Klasse aller Sprachen, die durch eine Grammatik erzeugt werden können;
  - $\mathfrak{L}_1 = \mathrm{CS}$ ist die *Klasse der kontextsensitiven Sprachen*;
  - $\mathfrak{L}_2 = \mathrm{CF}$ ist die *Klasse der kontextfreien Sprachen*;
  - $\mathfrak{L}_3 = \mathrm{REG}$ ist die *Klasse der regulären Sprachen*.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Theorem

$\mathrm{CS} \subset \mathrm{REC} \subset \mathfrak{L}_0$.

Beweis:

$\mathrm{REC} \subseteq \mathfrak{L}_0$.

Es sei L entscheidbar. Dann gibt es eine Turingmaschine M, die χ_L berechnet und somit entscheidet, ob $x \in L$ oder $x \notin L$ gilt.

Also ist

$$L \in \{L(M) \mid M \text{ ist eine Turingmaschine}\} = \mathfrak{L}_0.$$

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

$\mathrm{CS} \subseteq \mathrm{REC}$.

Sei $L \in \mathrm{CS}$, und sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ eine Grammatik für L mit nur nichtverkürzenden Regeln. Sei $x \in \Sigma^*$ ein gegebenes Wort mit $|x| = n$.

Idee:

- Die „Zwischenergebnisse“ x_i in einer beliebigen Ableitung

$$S \vdash_G x_1 \vdash_G x_2 \vdash_G \cdots \vdash_G x_k = x$$

  haben alle die Länge $|x_i| \leq n$.
- Da es in $(\Sigma \cup N)^*$ nur endlich viele Wörter der Länge $\leq n$ gibt, kann man durch systematisches Durchprobieren entscheiden, ob $x \in L$ oder $x \notin L$ gilt, d.h., L ist entscheidbar.
- (Somit ist das Wortproblem für Typ-1 Sprachen entscheidbar.)

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Formal: Wir geben einen Algorithmus an, der diese Entscheidung trifft. Dieser kann z.B. durch eine TM oder sonstwie implementiert werden.

Definiere für $m, n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$T_m^n = \{w \in (\Sigma \cup N)^* \mid |w| \leq n \text{ und } S \vdash_G^{m'} w \text{ mit } m' \leq m\}.$$

Diese lassen sich, für festes $n \geq 1$, wie folgt induktiv über m definieren:

$$\begin{aligned} T_0^n &= \{S\} \\ T_{m+1}^n &= \mathrm{Abl}^n(T_m^n), \end{aligned}$$

wobei für ein beliebiges X der Hüllenoperator Abl^n definiert ist durch

$$\mathrm{Abl}^n(X) = X \cup \left\{ w \in (\Sigma \cup N)^* \;\middle|\; \begin{array}{l} |w| \leq n \text{ und es existiert ein} \\ v \in X \text{ mit } v \vdash_G w \end{array} \right\}.$$

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Dies:

$$\mathrm{Abl}^n(X) = X \cup \left\{ w \in (\Sigma \cup N)^* \;\middle|\; \begin{array}{l} |w| \leq n \text{ und es existiert ein} \\ v \in X \text{ mit } v \vdash_G w \end{array} \right\}.$$

ist nur für Typ-1-Grammatiken korrekt. Bei Typ-0-Grammatiken könnte ein w mit $|w| \leq n$ aus v mit $|v| > n$ ableitbar sein.)

Der folgende Algorithmus liefert die Entscheidung des Wortproblems für Typ-1-Grammatiken. Offenbar läuft dieser Algorithmus in Exponentialzeit.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

```
Algorithmus-Typ-1(G, x) {
    // G ist Typ-1-Grammatik und x ∈ Σ* ein Wort mit |x| = n

T := {S};   T_1 := ∅;
  while (x ∉ T und T ≠ T_1) {T_1 := T;   T := Abl^n(T_1); }
  if (x ∈ T) return „x ∈ L“
  else return „x ∉ L“ }
```

Abbildung: Algorithmus zur Entscheidung des Typ-1-Wortproblems

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

- Da es in $(\Sigma \cup N)^*$ nur endlich viele Wörter der Länge $\leq n$ gibt, folgt für jedes n, dass $\bigcup_{m \geq 0} T_m^n$ eine endliche Menge ist (nämlich mit $2^{c \cdot n}$ Elementen für ein von G abhängiges c).

- Folglich existiert ein m_0 mit

$$T_{m_0}^n = T_{m_0+1}^n = T_{m_0+2}^n = \cdots = \bigcup_{m \geq 0} T_m^n.$$

- Ist $x \in L$, so ist $x \in \bigcup_{m \geq 0} T_m^n = T_{m_0}^n$.

- Ist jedoch $x \notin L$, so ist $x \notin T_{m_0}^n$.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

$\mathrm{CS} \neq \mathrm{REC}$.

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wie definieren eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit

- $L \in \mathrm{REC}$, aber
- $L \notin \mathrm{CS}$.

Dazu brauchen wir eine

Gödelisierung aller Typ-1-Grammatiken mit $\Sigma = \{a, b\}$:

- Die Nichtterminale seien durchnummeriert:

$$X_0, X_1, X_2, \ldots,$$

wobei das Nichtterminal X_i dargestellt werde als $X \underbrace{|| \cdots |}_{i\text{-mal}}$.

- X_0 sei das Startsymbol.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

- Regeln der Form

$$p_1 \to q_1, \qquad p_2 \to q_2, \qquad \cdots, \qquad p_n \to q_n$$

können durch das Wort

$$p_1 \to q_1 \# p_2 \to q_2 \# \cdots \# p_n \to q_n$$

über dem Alphabet $\Gamma = \{X, |, a, b, \to, \#\}$ dargestellt werden.

- Die Grammatik beschreibt Wörter über $\{a, b\}$; für den Beweis müssen wir die Gödelisierung auch als Wort über $\{a, b\}$ darstellen

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

- Die Grammatik beschreibt Wörter über $\{a, b\}$; für den Beweis müssen wir die Gödelisierung über $\Gamma = \{X, |, a, b, \rightarrow, \#\}$ auch als Wort über $\{a, b\}$ darstellen
- Nun codieren wir Wörter, die solche Typ-1-Grammatiken beschreiben, durch den Homomorphismus $\varphi : \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \lambda & \qquad \varphi(\rightarrow) &= ba^3b \\ \varphi(a) &= bab & \qquad \varphi(\#) &= ba^4b \\ \varphi(b) &= ba^2b & \qquad \varphi(X\underbrace{||\cdots|}_{i\text{-mal}}) &= ba^{5+i}b. \end{aligned}$$

- Beispiel: $\{X_0 \rightarrow a, X_0 \rightarrow b\}$
  Gödelisierung über Γ: $X \rightarrow a\#X \rightarrow b$
  Gödelisierung über Σ: $ba^5bba^3bbabba^4bba^5bba^3bba^2b$

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

- Zur Erinnerung: Ein Homomorphismus ist eine Abbildung $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$ mit

$$\begin{aligned} h(xy) &= h(x)h(y), \\ h(\lambda) &= \lambda. \end{aligned}$$

Sind etwa die Regeln der Grammatik gegeben durch

$$X_0 \to \lambda, \qquad X_0 \to X_1X_2, \qquad X_2 \to a, \qquad X_1X_2 \to bX_2,$$

so wird sie codiert durch das Wort

$$ba^5bba^3bba^4bba^5bba^3bba^6bba^7bba^4bba^7b$$
$$ba^3bbabba^4bba^6bba^7bba^3bba^2bba^7b.$$

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

- Eine Ordnung auf Σ (z.B. $a < b$) induziert eine quasilexikographische Ordnung $w_0, w_1, w_2, \ldots$ auf Σ^*, wobei w_i mit $i \in \mathbb{N}$ das i-te Wort ist:

Σ^*	λ	a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	$\cdots$
i-tes Wort	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	$\cdots$

- Entfernen wir nun alle Wörter, die keine syntaktisch korrekte Typ-1-Grammatik codieren, so erhalten wir die gesuchte Gödelisierung von CS: $G_0, G_1, G_2, \ldots$ und die entsprechenden Codierungen als Wörter über $\{a, b\}$: $w_0, w_1, w_2, \ldots$

  Es ist dabei möglich, dass $G_i = G_j$ für $i \neq j$, da eine Permutation der Regeln verschiedene Wörter w_i und w_j induziert.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Wie bei jeder Gödelisierung gilt:

- Jeder Typ-1-Grammatik G entspricht ein Wort $w_G \in \Sigma^*$.
- Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ können wir algorithmisch entscheiden,
  - ob es eine (syntaktisch korrekte) Typ-1-Grammatik codiert,
  - und wenn ja, welche.

Nun definieren wir die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ durch

$$L = \{w_i \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } w_i \notin L(G_i)\}.$$

Beispielsweise ist $\lambda \notin L$, denn $w_0 = \lambda$, aber G_0 ist gegeben durch die eine Regel $X_0 \to \lambda$, so dass $\lambda \in L(G_0)$ gilt.

Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Dass $L \in \mathrm{REC}$ gilt, folgt unmittelbar aus der oben gezeigten Inklusion $\mathrm{CS} \subseteq \mathrm{REC}$. Für gegebenes $x \in \Sigma^*$:

- berechne das i mit $x = w_i$;
- berechne die Grammatik G_i durch den Aufbau der Gödelisierung bis zur Nr. i;
- entscheide mit dem Algorithmus aus der obigen Abbildung, ob $x = w_i \notin L(G_i)$.

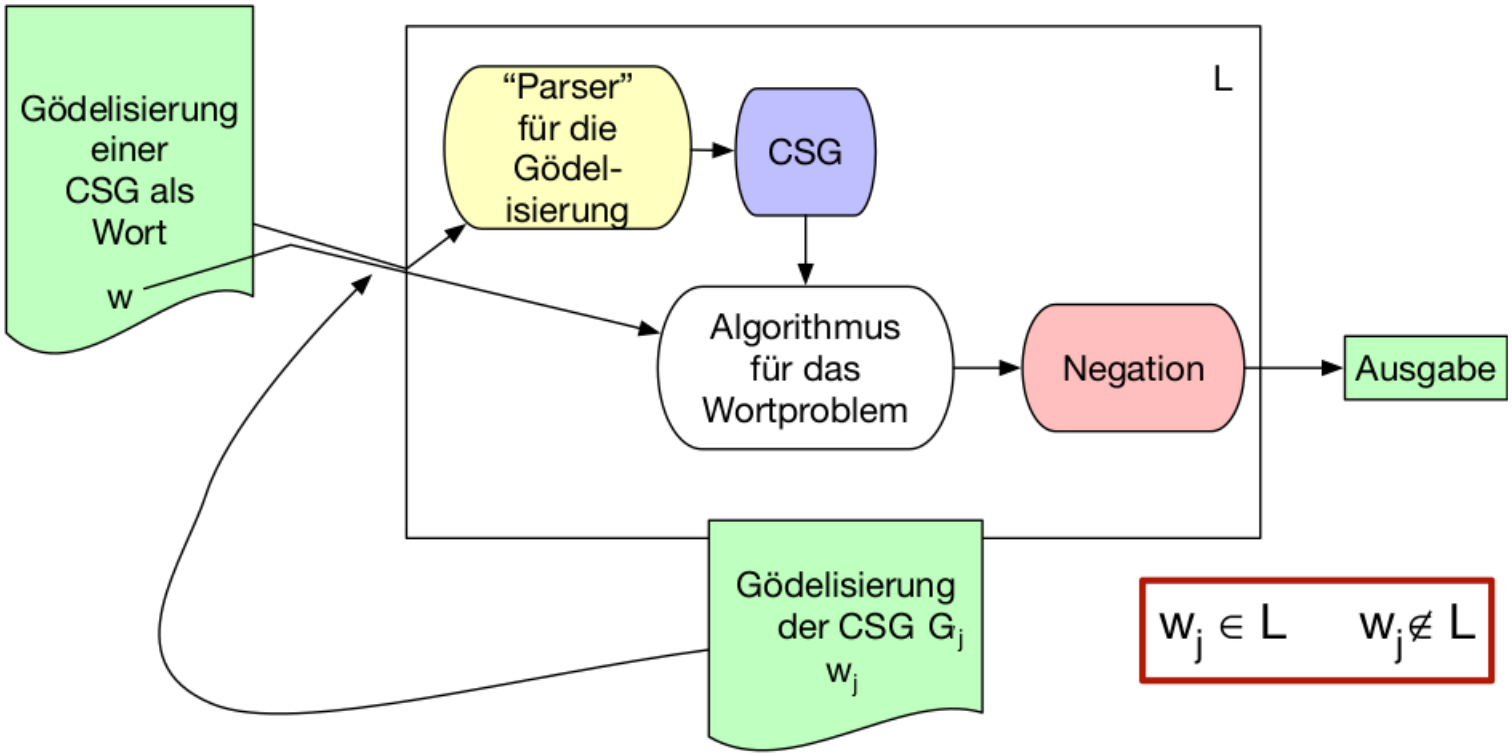
Um zu zeigen, dass $L \notin \mathrm{CS}$, nehmen wir für einen Widerspruch an, dass $L \in \mathrm{CS}$. Dann existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $L = L(G_j)$. Daraus folgt

$$w_j \in L \iff w_j \notin L(G_j) = L,$$

ein Widerspruch.

$\mathrm{REC} \neq \mathcal{L}_0$. Diese Aussage zeigen wir später. ❑

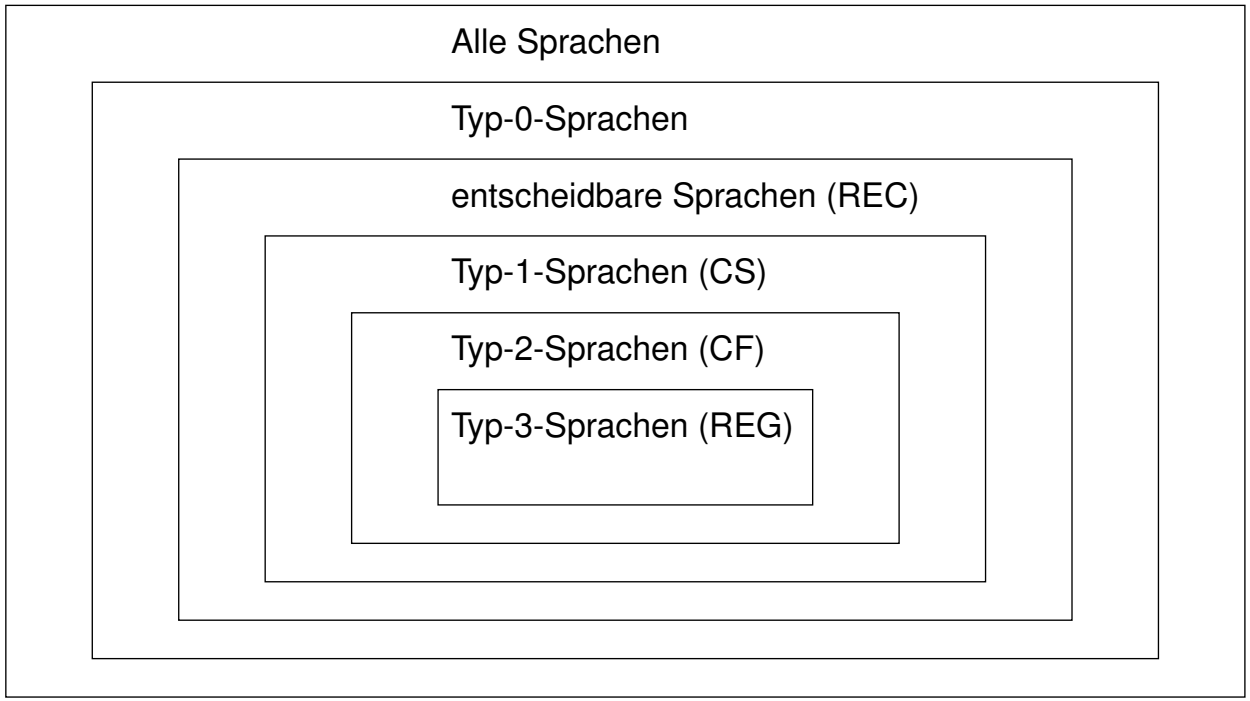
$CS \subseteq REC.$



Wie ordnet sich REC in die Chomsky-Hierarchie ein?

Aus dem letzten Satz folgt insbesondere die Echtheit der letzten (hier noch nicht betrachteten) Inklusion aus dem Fakt:

$$\mathrm{REG} \subset \mathrm{CF} \subset \mathrm{CS} \subset \mathfrak{L}_0.$$



Rekursive Aufzählbarkeit

Definition

- Eine Menge A heißt *rekursiv aufzählbar* (kurz: *A ist r.e.*, nach dem englischen *recursively enumerable*), falls
  - entweder $A = \emptyset$
  - oder $A = W_f$ für ein $f \in \mathbb{R}$.

  Dabei bezeichnet W_f den Wertebereich von f, und f heißt *Aufzählfunktion von A*.

- RE bezeichne die *Klasse aller rekursiv aufzählbaren Mengen*.

Rekursive Aufzählbarkeit

Bemerkung:

- Eine Aufzählfunktion f für eine Menge $A \in \mathrm{RE}$ schöpft also den ganzen Wertebereich A aus, d.h.,

$$A = \{f(i) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

- Rekursive Aufzählbarkeit darf nicht verwechselt werden mit dem Begriff der Abzählbarkeit. Diese verlangt keine effektive (algorithmische) Machbarkeit.

- Umgekehrt verlangt die rekursive Aufzählbarkeit keine 1-1-Zuordnung. Es ist möglich, dass $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$.

Rekursive Aufzählbarkeit

Bemerkung:

- Jede endliche Menge ist rekursiv aufzählbar.
  Eine Aufzählfunktion von $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ ist gegeben durch

$$f(i) = \begin{cases} a_i & \text{falls } 0 \leq i \leq n \\ a_n & \text{falls } i > n. \end{cases}$$

- Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

- Jedoch ist *nicht* jede Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge auch rekursiv aufzählbar.

REC versus RE : Überblick/Wiederholung

- $A \in \mathrm{REC}$ (A entscheidbar):
  χ_A berechenbar, d.h. $\chi_A \in \mathbb{R}$
- A semi-entscheidbar:
  χ'_A berechenbar, d.h. $\chi'_A \in \mathbb{P}$
- $A \in \mathrm{RE}$ (A rekursiv aufzählbar):
  $A = \emptyset \vee A = W_f$ für ein $f \in \mathbb{R}$

REC versus RE

Theorem

$$\mathrm{REC} \subseteq \mathrm{RE}.$$

Beweis: Sei $A \in \mathrm{REC}$. Ist $A = \emptyset$, so ist $A \in \mathrm{RE}$ bereits gezeigt.

Ist $A \neq \emptyset$, so wählen wir ein festes $a \in A$ und konstruieren die Aufzählfunktion f für A so:

$$f(i) = \begin{cases} i & \text{falls } \chi_A(i) = 1 \text{ (d.h., } i \in A) \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist f total und berechenbar:

Da $A \in \mathrm{REC}$, ist $\chi_A \in \mathbb{R}$ und somit auch $f \in \mathbb{R}$.

REC versus RE

Zwischenbeispiel:

- $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\} = \{2i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- $\chi_A = \{0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 3 \mapsto 0, 4 \mapsto 1, \ldots\}$
- $f = \{0 \mapsto 0, 1 \mapsto 100, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 100, 4 \mapsto 4, \ldots\}$ mit $a = 100 \in A$

REC versus RE (Rest vom Beweis)

Es gilt

$$A = W_f,$$

denn:

- $\boldsymbol{A \subseteq W_f}$**:**
  Ist $j \in A$, so ist $\chi_A(j) = 1$, also $f(j) = j$, woraus $j \in W_f$ folgt.

- $\boldsymbol{W_f \subseteq A}$**:**
  Ist $j \in W_f$, so ist
  - entweder $\chi_A(j) = 1$, also $j \in A$,
  - oder $\chi_A(j) = 0$, also $j = a \in A$.

Der Satz ist bewiesen. ❑

REC versus RE

Theorem

$$A \in \mathrm{REC} \iff (A \in \mathrm{RE} \wedge \overline{A} \in \mathrm{RE}).$$

Beweis: $(\Rightarrow)$

- Sei $A \in \mathrm{REC}$.
- Nach dem vorigen Satz ist $A \in \mathrm{RE}$.
- Da REC unter Komplement abgeschlossen ist, ist $\overline{A} \in \mathrm{REC}$.
- Wieder nach dem vorigen Satz ist $\overline{A} \in \mathrm{RE}$.

REC versus RE

($\Leftarrow$) Seien A und $\overline{A}$ in RE.

- Ist $A = \emptyset$ oder $\overline{A} = \emptyset$ (d.h., $A = \Sigma^*$), so ist $A \in \mathrm{REC}$ (χ_A ist eine konstante Funktion, damit berechenbar)

- Sei also $\emptyset \neq A \neq \Sigma^*$, und seien $f, g \in \mathbb{R}$ Aufzählfunktionen mit

$$A = \mathrm{W}_f \quad \text{und} \quad \overline{A} = \mathrm{W}_g.$$

  Der folgende Algorithmus berechnet χ_A bei Eingabe x:

  - Berechne

$$f(0), g(0), f(1), g(1), f(2), \ldots$$

    solange, bis $x = f(i)$ oder $x = g(i)$ für ein i gilt.
    (Alle diese Berechnungen terminieren wegen $f, g \in \mathbb{R}$.)
  - Gilt $x = f(i)$ für ein i, so gib 1 aus;
  - gilt $x = g(i)$ für ein i, so gib 0 aus.

REC versus RE

- Da
  - entweder $x \in A = W_f$
  - oder $x \in \overline{A} = W_g$,

  kann sich x nicht beliebig lange vor dieser Entscheidung drücken, sondern muss sich irgendwann „outen“.

- Folglich terminiert diese Prozedur in endlicher Zeit, und es gilt

$$\chi_A \in \mathbb{R}.$$

- Es folgt $A \in \mathrm{REC}$. ❑

Abschlusseigenschaften von RE

Theorem

RE *ist abgeschlossen unter Schnitt und Vereinigung.* **ohne Beweis**

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass RE *nicht* komplementabgeschlossen ist.

Charakterisierungen von RE

Theorem

$A \in \mathrm{RE} \iff$ *A ist semi-entscheidbar.* **ohne Beweis**

Beweisidee: $\Rightarrow \chi'_A(x) = 1$ falls i existiert so dass $f(i) = x$,

$\Leftarrow \chi'_A$ kontrolliert länger und länger ausführen um Kandidaten für W_f zu finden, wie im folgenden Beweis. (da $D_{\chi'_A} = A$ folgt die Richtung $\Leftarrow$ aus folgendem Theorem.)

Theorem

Sei $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine fixierte Gödelisierung der Klasse $\mathbb{P}$, und $D_i = D_{\varphi_i}$ bzw. $W_i = W_{\varphi_i}$ bezeichne den Definitions- bzw. den Wertebereich der i-ten Funktion $\varphi_i \in \mathbb{P}$. Dann gilt:

$$\mathrm{RE} = \{D_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Charakterisierungen von RE

Beweis: 1. Sei $A \in \mathrm{RE}$. Wir zeigen nun $A = \mathrm{D}_i = \mathrm{D}_{\varphi_i}$ und $A = \mathrm{W}_j = \mathrm{W}_{\varphi_j}$ für geeignete $i, j \in \mathbb{N}$.

Da $A \in \mathrm{RE}$, gilt $\chi'_A \in \mathbb{P}$ nach dem vorigen Satz, oder genauer:

Fall 1: $A = \emptyset$. Dann ist χ'_A die nirgends definierte Funktion, die natürlich in $\mathbb{P}$ liegt.

Fall 2: $A \neq \emptyset$. Dann gibt es (per Def. von r.e.) ein $f \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{W}_f = A$.

Der folgende Algorithmus berechnet χ'_A bei Eingabe x:

- Berechne $f(0), f(1), f(2), \ldots$ (also die Aufzählung von A) solange, bis $x = f(i)$ für ein i gilt.
  (Alle diese Berechnungen terminieren wegen $f \in \mathbb{R}$.)
- Gilt $x = f(i)$ für ein i, so gib 1 aus.

Falls x nie vorkommt, weil $x \notin A$, so terminiert der obige Algorithmus nie.

Charakterisierungen von RE

Da $\chi'_A \in \mathbb{P}$, existiert eine Nr. i mit $\chi'_A = \varphi_i$. Somit ist schon gezeigt:

$$A = \mathrm{D}_{\chi'_A} = \mathrm{D}_i.$$

Um eine Funktion mit A als Wertebereich zu finden definiere

$$g(x) = x \cdot \chi'_A(x).$$

Es gilt:

- $g(x) = x$, falls $x \in A$, und
- $g(x)$ ist nicht definiert, falls $x \notin A$.

Da $\chi'_A \in \mathbb{P}$, ist auch $g \in \mathbb{P}$, und es gibt ein j mit $\varphi_j = g$.

Somit gilt

$$A = \mathrm{W}_g = \mathrm{W}_j.$$

Charakterisierungen von RE

Wir haben also gezeigt, dass

$$A \in \{D_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad A \in \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

gilt. Somit:

$$\mathrm{RE} \subseteq \{D_i \mid i \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad \mathrm{RE} \subseteq \{W_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Anders: jede Menge in RE kann als Definitionsbereich einer partiell rekursiven Funktion oder als Wertebereich einer partiell rekursiven Funktion dargestellt werden.

Charakterisierungen von RE

2. Wir zeigen $D_i \in \mathrm{RE}$ für jedes $i \in \mathbb{N}$;
der Fall $W_i \in \mathrm{RE}$ wird analog bewiesen.

Ist $D_i = \emptyset$, so gilt trivialerweise $D_i \in \mathrm{RE}$.

Sei also $D_i \neq \emptyset$. Wähle ein festes $a \in D_i$.

Definiere eine injektive Paarungsfunktion $\pi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- π ist berechenbar.
- Die Umkehrfunktionen $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die für $\pi(x, y) = n$ definiert sind durch $\pi_1(n) = x$ und $\pi_2(n) = y$, sind ebenfalls berechenbar.
- $W_\pi \in \mathrm{REC}$.

Charakterisierungen von RE

Ein solches π kann so definiert werden:

$$\pi(x, y) = 2^{x+y} + x.$$

Anschaulich bedeutet dies:

y \ x	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	$2^0 = 1$	3	6	11	20	$\cdots$
1	$2^1 = 2$	5	10	19	$\ddots$	$\ddots$
2	$2^2 = 4$	9	18	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
3	$2^3 = 8$	17	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
4	$2^4 = 16$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$

Charakterisierungen von RE

Klar ist, dass $\pi \in \mathbb{R}$ und $W_\pi \in \mathrm{REC}$, denn es gilt

$$n \in W_\pi \iff 2^k + k \geq n,$$

wobei k die größte Zahl in $\mathbb{N}$ mit $2^k \leq n$ ist.

Wir zeigen $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{P}$:

- Für $n \in W_\pi$ sei $\pi(x, y) = n$.
- Bestimme das größte $k \in \mathbb{N}$ mit $2^k \leq n$ und berechne

$$x = n - 2^k \quad \text{und} \quad y = k - x.$$

Charakterisierungen von RE

Wir suchen nun ein $f \in \mathbb{R}$ mit $W_f = D_i$. Dieses f werde durch den folgenden Algorithmus bei Eingabe $n \in \mathbb{N}$ berechnet:

- Berechne $x = \pi_1(n)$ und $y = \pi_2(n)$, falls $n \in W_\pi$.
  Andernfalls setze $x = y = 0$.
- Berechne aus der fixierten Nr. i das Programm der i-ten TM M_i in der fixierten Gödelisierung von $\mathbb{P}$.
- Simuliere die Berechnung von M_i auf Eingabe x für y Takte.
- Terminiert die Simulation, so gib x aus, sonst das fest gewählte Element $a \in D_i$.

Charakterisierungen von RE

Da der Algorithmus nur Elemente von D_i ausgibt, gilt

$$W_f \subseteq D_i.$$

Umgekehrt gilt auch

$$D_i \subseteq W_f,$$

denn wenn $j \in D_i$, so ist $\varphi_i(j)$ definiert und $M_i(j)$ hält nach t Takten an, für ein geeignetes t.

Setze $n = \pi(j, t)$. Dann ist $f(n) = j$ für ein geeignetes n, also $j \in W_f$.

Somit gilt $W_f = D_i$ für $f \in \mathbb{R}$.

Es folgt $D_i \in \mathrm{RE}$. ❑

Charakterisierungen von RE

Theorem

$A \in \mathfrak{L}_0 \iff A$ *ist semi-entscheidbar.* **ohne Beweis**

Folgerung: Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent.

1. $A \in \mathrm{RE}$.
2. A ist semi-entscheidbar.
3. A ist vom Typ 0, d.h., $A \in \mathfrak{L}_0$.
4. $\chi'_A \in \mathbb{P}$.
5. $A = L(M)$ für eine deterministische TM M.
6. $A = L(M)$ für eine nichtdeterministische TM M.
7. $A = \mathrm{D}_f$ für ein $f \in \mathbb{P}$.
8. $A = \mathrm{W}_f$ für ein $f \in \mathbb{P}$. **ohne Beweis**

Das Halteproblem

- Wir wissen: $\mathrm{REC} \subseteq \mathrm{RE}$.
- Um zu zeigen, dass diese Inklusion echt ist, definieren wir nun das Halteproblem.
- Bei diesem Problem kommen Turingmaschinen als Eingaben vor.
- Dazu erläutern wir zunächst, wie man Turingmaschinen

$$M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \square, F)$$

als ein Wort über dem Alphabet $\{0, 1\}$ schreiben kann (Gödelisierung).

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Anmerkungen:

- wir nehmen an, dass Endzustände von DTMs keine ausgehenden Kanten haben. Dies ist auch sinnvoll für Def. 7.1 (Turing-Berechenbarkeit) aus dem Skript.
- für die Entscheidung ob eine DTM auf einer Eingabe hält ist die Menge F nicht relevant und muss nicht in der Gödelisierung dargestellt werden.
- wir betrachten hier DTMs die Funktionen mit einem Argument darstellen.

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Wir nummerieren zunächst die Elemente aus Z und Γ, also

$$\begin{aligned} Z &= \{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n\} \\ \Gamma &= \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k\}. \end{aligned}$$

Jeder δ-Regel

$$\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, r)$$

ordnen wir ein Wort $w_{i,j,i',j',r}$ zu, wobei

$$w_{i,j,i',j',r} = \#\#\text{bin}(i)\#\text{bin}(j)\#\text{bin}(i')\#\text{bin}(j')\#\text{bin}(r)$$

$$r = \begin{cases} 0 & \text{falls } r = L \\ 1 & \text{falls } r = R \\ 2 & \text{falls } r = N. \end{cases}$$

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Für alle Regeln aus δ schreiben wir diese Wörter in beliebiger Reihenfolge hintereinander und erhalten so eine Codierung von M über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$.

Um M über dem Alphabet $\{0, 1\}$ zu codieren, nehmen wir die folgende Ersetzung vor:

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 00 \\ 1 &\mapsto 01 \\ \# &\mapsto 11 \end{aligned}$$

Das so erhaltene Wort zu Turingmaschine M bezeichnen wir mit

$$\text{code}(M).$$

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Beispiel: Wir geben eine Codierung der Turingmaschine

$$M = (\{0,1\}, \{0,1,\square\}, \{z_0, z_1, z_2, z_e\}, \delta, z_0, \square, \{z_e\})$$

für die Nachfolgerfunktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f : n \to n+1$$

aus einem früheren Beispiel an:

$(z_0, 0) \mapsto (z_0, 0, R)$	$(z_1, 0) \mapsto (z_2, 1, L)$	$(z_2, 0) \mapsto (z_2, 0, L)$
$(z_0, 1) \mapsto (z_0, 1, R)$	$(z_1, 1) \mapsto (z_1, 0, L)$	$(z_2, 1) \mapsto (z_2, 1, L)$
$(z_0, \square) \mapsto (z_1, \square, L)$	$(z_1, \square) \mapsto (z_e, 1, N)$	$(z_2, \square) \mapsto (z_e, \square, R)$

Tabelle: Liste δ der Turingbefehle von M für die Funktion $f(n) = n+1$

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Nummerierung der Zustände

z_0	z_1	z_2	z_e
z_0	z_1	z_2	z_3

und des Arbeitsalphabets

0	1	$\square$
a_0	a_1	a_2

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

ergibt die folgende Codierung der Funktion δ:

$\delta(z_i, a_j) = (z_{i'}, a_{j'}, r)$	$w_{i,j,i',j',r}$
$\delta(z_0, 0) = (z_0, 0, R)$	##0#0#0#0#1
$\delta(z_0, 1) = (z_0, 1, R)$	##0#1#0#1#1
$\delta(z_0, \square) = (z_1, \square, L)$	##0#10#1#10#0
$\delta(z_1, 0) = (z_2, 1, L)$	##1#0#10#1#0
$\delta(z_1, 1) = (z_1, 0, L)$	##1#1#1#0#0
$\delta(z_1, \square) = (z_e, 1, N)$	##1#10#11#1#10
$\delta(z_2, 0) = (z_2, 0, L)$	##10#0#10#0#0
$\delta(z_2, 1) = (z_2, 1, L)$	##10#1#10#1#0
$\delta(z_2, \square) = (z_e, \square, R)$	##10#10#11#10#1

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

Dies ergibt die Codierung:

##0#0#0#0#1##0#1#0#1#1##0#10#1#10#0
##1#0#10#1#0##1#1#1#0#0##1#10#11#1#10
##10#0#10#0#0##10#1#10#1#0##10#10#11#10#1

von M über dem Alphabet $\{0, 1, \#\}$.

Mit der Ersetzung

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto 00 \\ 1 &\mapsto 01 \\ \# &\mapsto 11 \end{aligned}$$

erhalten wir $\mathrm{code}(M) = 1111001100110011001101 \cdots$.

Das Halteproblem: Gödelisierung von TMs

- Offensichtlich ist nicht jedes Wort über dem Alphabet $\{0,1\}$ eine so definierte Codierung einer Turingmaschine.

- Um die Umkehrabbildung der obigen Codierung anzugeben, sei M_0 eine beliebige feste Turingmaschine.

  Dann ist für jedes Wort $w \in \{0,1\}^*$ eine Turingmaschine M_w definiert durch:

$$w \in \{0,1\}^* \mapsto M_w = \begin{cases} M & \text{falls } w = \text{code}(M) \\ M_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das spezielle Halteproblem

Definition

Die Sprache

$$\begin{aligned} K &= \{w \in \{0,1\}^* \mid M_w(w) \text{ hält nach endlich vielen Schritten}\} \\ &= \{i \in \mathbb{N} \mid i \in D_i\} \end{aligned}$$

wird als das *spezielle Halteproblem* bezeichnet.

Theorem

Das spezielle Halteproblem ist rekursiv aufzählbar, aber nicht entscheidbar, d.h.,

$$K \in \mathrm{RE} \quad \textit{und} \quad K \notin \mathrm{REC}.$$

Das spezielle Halteproblem

Beweis: Der Beweis von $K \in \mathrm{RE}$ ist analog zum Beweis von

$$\mathrm{RE} = \{\mathsf{D}_i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\mathsf{W}_i \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Um zu zeigen, dass $K \notin \mathrm{REC}$, nehmen wir für einen Widerspruch $K \in \mathrm{REC}$ an.

Dann ist die charakteristische Funktion χ_K berechenbar mittels einer Turingmaschine M.

Das spezielle Halteproblem

Wir modifizieren M wie folgt zu einer TM M':

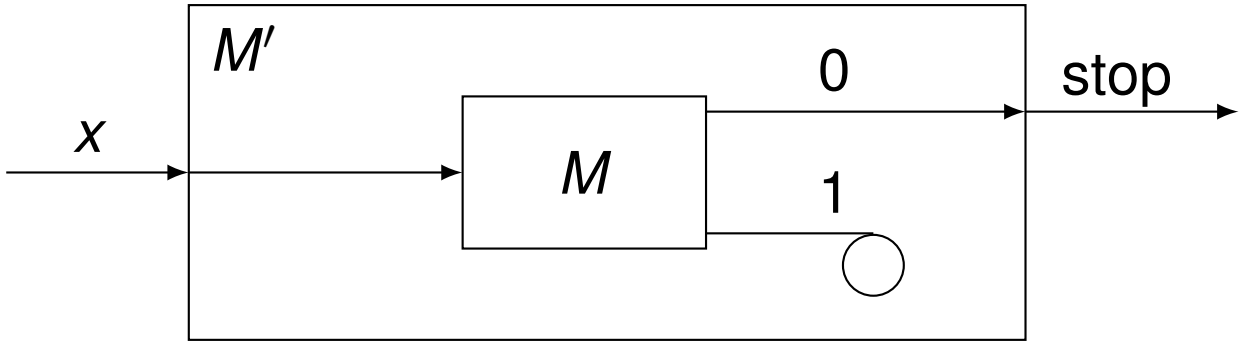
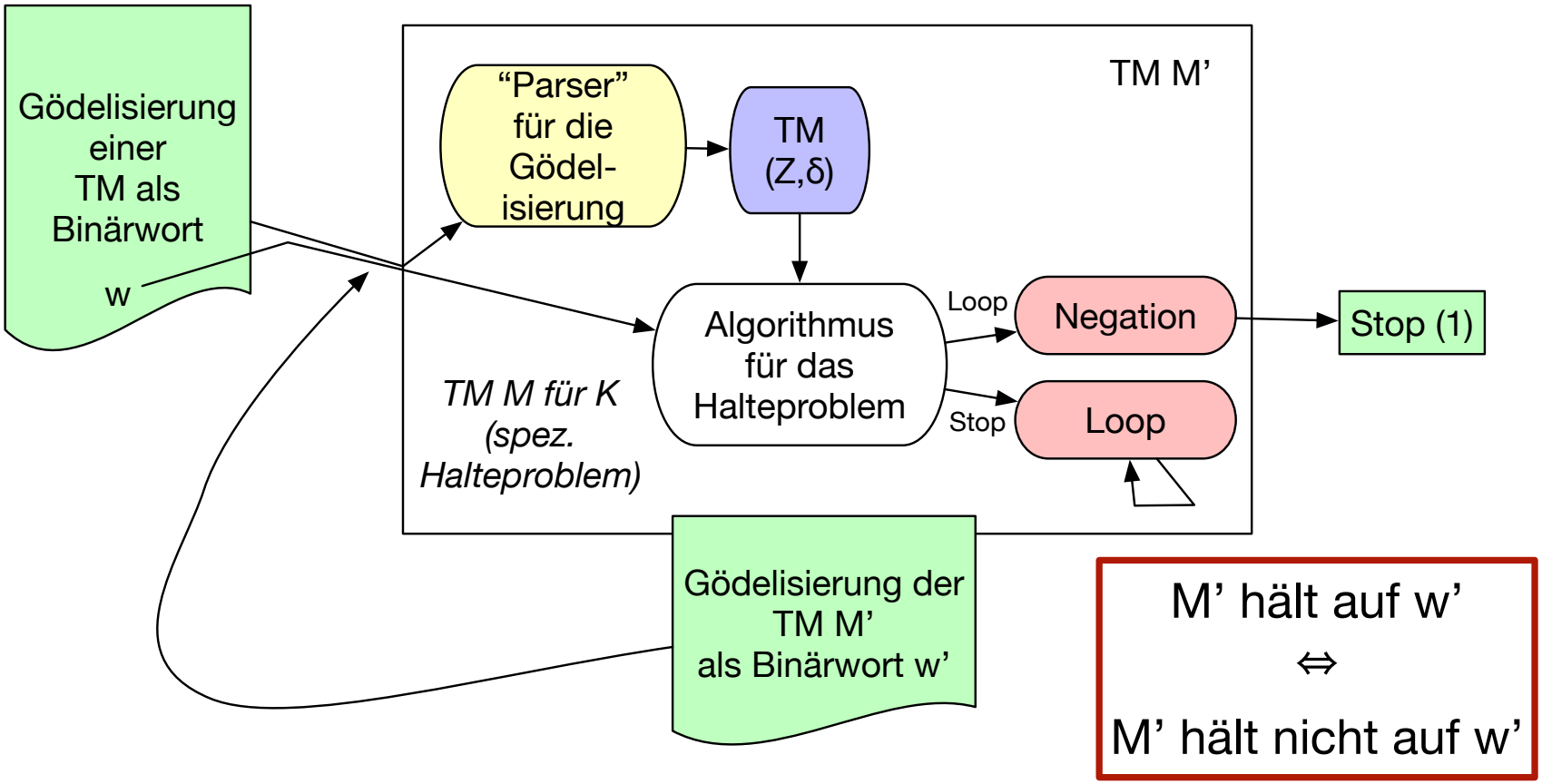


Abbildung: Zum Beweis von $K \notin \mathrm{REC}$

- M' hält, falls M eine 0 ausgibt, und
- M' geht in eine Endlosschleife, falls M eine 1 ausgibt, siehe die obige Abbildung.

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem



Das spezielle Halteproblem

Es sei nun $w' \in \{0,1\}^*$ mit $M_{w'} = M'$, d.h., w' sei das Codewort der Turingmaschine M'. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält} \\
\Leftrightarrow\ & M \text{ angesetzt auf } w' \text{ gibt 0 aus} && \text{(nach Def. von } M') \\
\Leftrightarrow\ & \chi_K(w') = 0 && \text{(nach Def. von } M) \\
\Leftrightarrow\ & w' \notin K && \text{(nach Def. von } \chi_K) \\
\Leftrightarrow\ & M_{w'} \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält nicht} && \text{(nach Def. von } K) \\
\Leftrightarrow\ & M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält nicht} && \text{(nach Def. von } M_{w'}).
\end{aligned}
$$

Das spezielle Halteproblem

Damit haben wir die Aussage

$$M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält} \Leftrightarrow M' \text{ angesetzt auf } w' \text{ hält nicht}$$

hergeleitet, die offenbar einen Widerspruch darstellt.

Damit ist die Annahme, dass K entscheidbar ist, falsch. ❑

Folgerung: REC ist echt in RE enthalten. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$\mathrm{REG} \subset \mathrm{DCF} \subset \mathrm{CF} \subset \mathrm{CS} \subset \mathrm{REC} \subset \mathrm{RE}$$

und die Chomsky-Hierarchie echt ist:

$$\mathfrak{L}_3 \subset \mathfrak{L}_2 \subset \mathfrak{L}_1 \subset \mathfrak{L}_0.$$

Das spezielle Halteproblem

Folgerung: RE ist nicht komplementabgeschlossen.

Beweis: Nach dem obigen Satz ist $K \in \mathrm{RE}$, aber $\overline{K} \notin \mathrm{RE}$, denn sonst wäre $K \in \mathrm{REC}$.

Behauptung: Es gibt Funktionen in $\mathbb{P}$, die nicht zu Funktionen in $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden können. **ohne Beweis**

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java

Anstatt Turing Maschinen kann man den Beweis genauso mit einstelligen Java Programmen führen.

- Annahme: einstellige Java Programme lesen Eingabe auf StdIn und schreiben am Ende eine Ausgabe auf StdOut
- J_w ist das durch den Quelltext w beschriebene einstellige Java Programm falls valide, “return 0” sonst
- $K_{Java} = \{w \in \Sigma^* \mid J_w$ hält nach endlich vielen Schritten mit w als Eingabe $\}$.

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java

Ist dieses Programm ein Element von K_{Java}?

```
import java.io.InputStreamReader;
import java.io.IOException;
public class Kgoedel_1 {
    public static void main(String args[]) throws IOException {
        int ch;
        int count = 0;
        while ((ch = System.in.read()) != -1) {
            if (ch != '\n' && ch != '\r')
             count = count+1;
        }
        System.out.println(count);
    }
}
```

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java

Ja, das Programm ist valide und ist ein Element von K_{Java}: es terminiert mit seinem eigenen Quellcode als Eingabe:

```
$ javac Kgoedel_1.java
$ java Kgoedel_1 <Kgoedel_1.java
396
```

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java

Ist dieses Programm ein Element von K_{Java}?

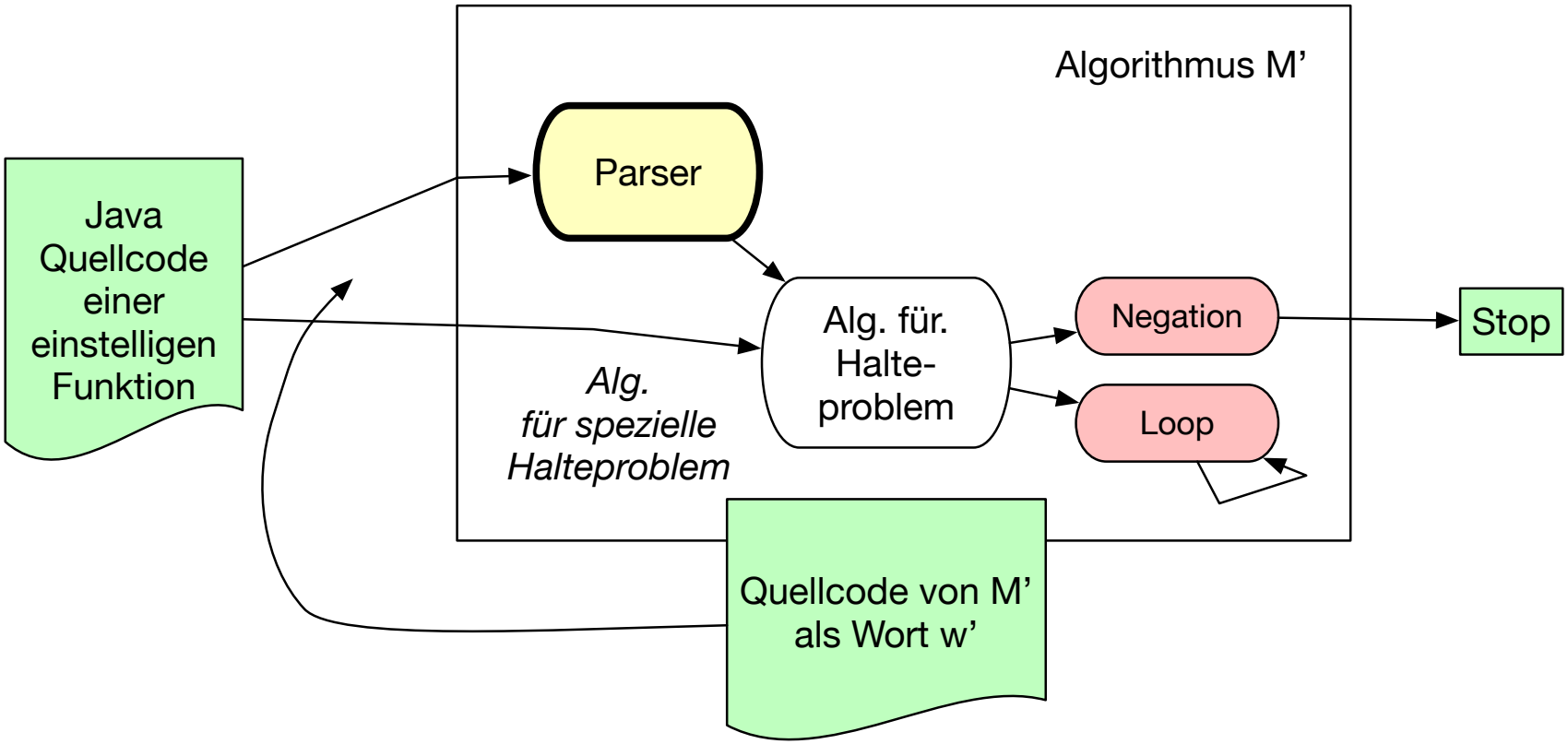
```
import java.io.InputStreamReader;
import java.io.IOException;
public class Kgoedel_2 {
    public static void main(String args[])
        throws IOException {
        int ch;  int count = 0;
        while ((ch = System.in.read()) != -1) {
            if (ch != '\n' && ch != '\r')
                count = count+1;
        }
        if (count != 473)
           System.out.println(count);
        else
           while (true) {count = 0;};
    }
}
```

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java

Nein, das Programm ist zwar valide und aber ist kein Element von K_{Java}: es terminiert nicht mit seinem eigenen Quellcode als Eingabe:

```
$ javac Kgoedel_2.java
$ java Kgoedel_2 <Kgoedel_1.java
396
$ java Kgoedel_2 <Kgoedel_2.java
^C
```

Gödelisierung für das spezielle Halteproblem in Java



Der Projektionssatz

Definition

Seien $A \subseteq \mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Mengen.

A ist *Projektion von B*, falls für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x \in A \iff (\exists y \in \mathbb{N})\,[(x, y) \in B].$$

Theorem (Projektionssatz)

$A \in \mathrm{RE} \iff$ *A ist Projektion einer Menge $B \in \mathrm{REC}$.*

ohne Beweis

Anwendung des Projektionssatzes

Nachweis der rekursiven Aufzählbarkeit, z.B.:

1. K ist in RE:

$$\begin{aligned} i \in K &\iff \varphi_i(i) \text{ ist definiert} \\ &\iff (\exists t)\,[M_i(i) \text{ hält nach } t \text{ Takten}] \\ &\iff (\exists t)\,[(i,t) \in B], \end{aligned}$$

wobei die Menge $B \in \mathrm{REC}$ so definiert ist:

$$B = \{(i,t) \mid M_i(i) \text{ hält nach } t \text{ Takten}\}.$$

Anwendung des Projektionssatzes

2. $X = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathsf{D}_i \neq \emptyset\}$ ist in RE:

$$
\begin{aligned}
i \in X &\iff \mathsf{D}_i \neq \emptyset \\
&\iff (\exists j)\,[j \in \mathsf{D}_i] \\
&\iff (\exists j)\,[\varphi_i(j) \text{ ist definiert}] \\
&\iff (\exists j)\,(\exists t)\,[M_i(j) \text{ hält nach } t \text{ Takten}] \\
&\iff (\exists z)\,[(i,z) \in B],
\end{aligned}
$$

wobei die Menge $B \in \mathrm{REC}$ so definiert ist:

$$B = \{(i,z) \mid z = \pi(j,t) \text{ und } M_i(j) \text{ hält nach } t \text{ Takten}\}.$$

Anwendung des Projektionssatzes

3. $Y = \{i \in \mathbb{N} \mid 17 \in W_i\}$ ist ebenso in RE.
4. ...

REC und RE in der Chomsky-Hierarchie

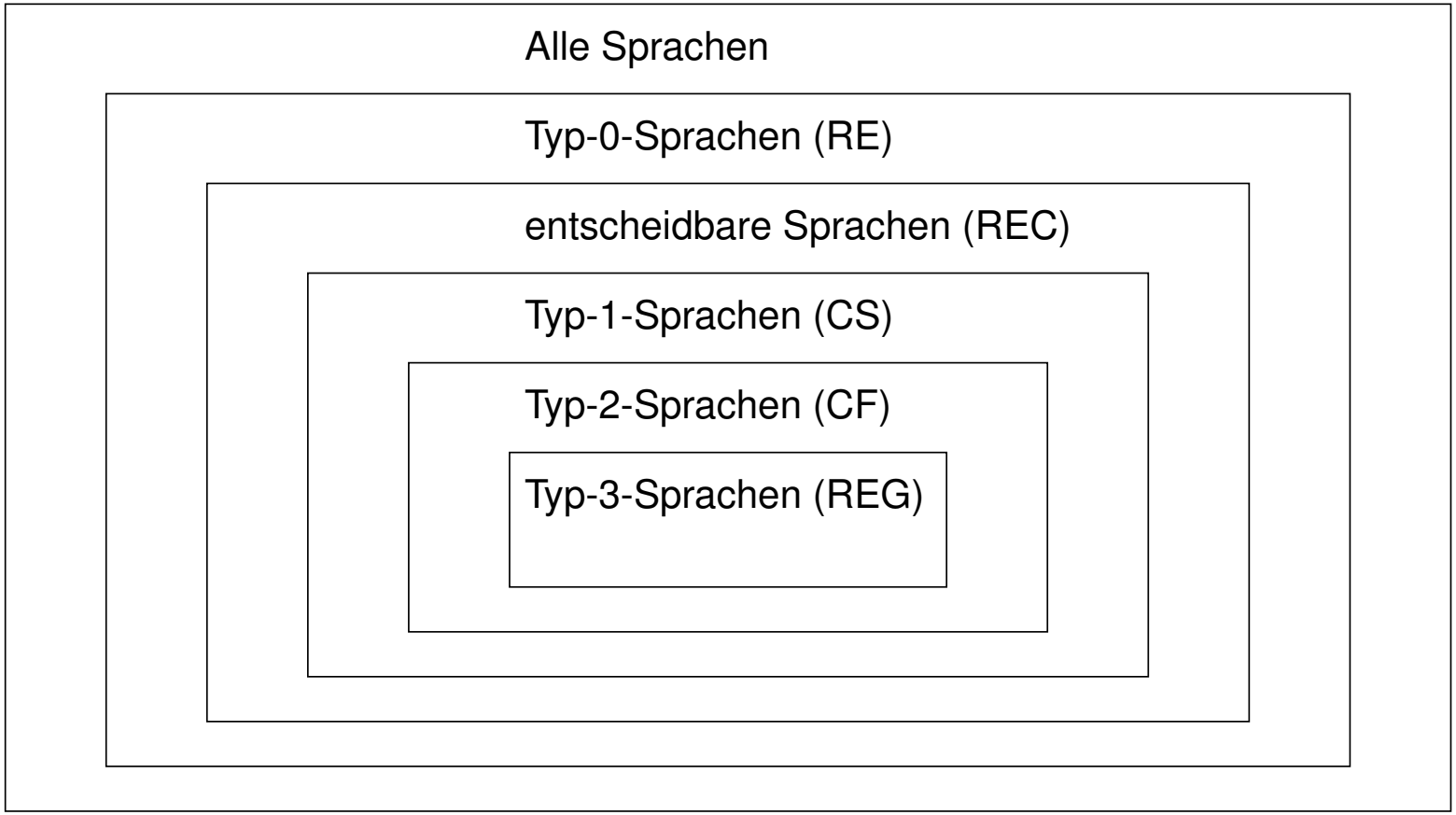


Abbildung: Einordnung von REC und RE in die Chomsky-Hierarchie