Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Jun.-Prof. Dr. D. Baumeister

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: O2, Raum: 38
Tel.: +49 211 8111634, Fax: +49 211 8113462
E-Mail: baumeister@cs.uni-duesseldorf.de
3. Juli 2018

Vorlesung im Sommersemester 2018

Theoretische Informatik

Probeklausurtermin: 17. Juli 2018

BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN! TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN, VORNAMEN UND IHRE MATRIKELNUMMER SOWIE ZUSÄTZLICH AUF DEM DECKBLATT STUDIENFACH MIT SEMESTER UND ANZAHL DER ABGEGEBENEN BLÄTTER EIN, UND UNTERSCHREIBEN SIE ALS INFORMATIK-STUDENT, DASS SIE ANGEMELDET SIND!

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:

(Nur für Informatik-Studenten) Hiermit bestätige ich, dass ich mich im Studierendenportal / beim akademischen Prüfungsamt für diese Klausur angemeldet habe:

____

Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	20	20	25	15	100
erreichte Punktzahl						

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Elektronische Geräte aller Art.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe 1 **(20 Punkte)** **/20 Punkte**

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja" oder „Nein" an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja" oder „Nein"* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja" noch „Nein" oder sowohl „Ja" als auch „Nein" angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und 0 Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge der natürlichen Zahlen ist ein Alphabet.
- ☐ Ja ☐ Nein Sei $\Sigma = \{0,1\}$ dann gilt $\{n \mid n = |w|,\ w \in \Sigma^*\} = \mathbb{N}_0$.
- ☐ Ja ☐ Nein Sei Σ ein Alphabet, dann ist Σ^* eine Sprache.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
- ☐ Ja ☐ Nein Zu jedem NFA M gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(M) = L(G)$.
- ☐ Ja ☐ Nein Mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen kann man zeigen, dass eine Sprache regulär ist.
- ☐ Ja ☐ Nein Für jede reguläre Sprache ist die Anzahl der Elemente in jeder Äquivalenzklasse bezüglich der Myhill-Nerode-Relation unendlich.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
- ☐ Ja ☐ Nein Sei L eine kontextfreie Sprache, dann gibt es eine Grammatik G mit $L(G) = L$, so dass für ein $w \in L$ jede Ableitung von w in G aus genau $|w|$ Schritten besteht.
- ☐ Ja ☐ Nein Mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen kann man nachweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache L mit $||L|| < \infty$ ist regulär.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
- ☐ Ja ☐ Nein Bei einem PDA können in einem Schritt mehrere Symbole aus dem Keller gelesen werden.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache, die von einem PDA akzeptiert werden kann, kann auch von einem DPDA akzeptiert werden.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede Funktion, die primitiv rekursiv ist, ist Turing-berechenbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
- ☐ Ja ☐ Nein Es gibt totale Funktionen, die nicht primitiv rekursiv sind.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede allgemein rekursive Funktion ist total.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede entscheidbare Sprache ist kontextsensitiv.

Aufgabe 2 (20 Punkte) *Reguläre Sprachen.* /20 Punkte

(a) Gegeben sei der NFA $N = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_3, z_e\}, \delta, \{z_0\}, \{z_e\})$ mit

δ	z_0	z_1	z_3	z_e
0	$\{z_e\}$	$\{z_1, z_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{z_1\}$	$\{z_1, z_e\}$	$\{z_e\}$	$\emptyset$

(i) Konstruieren Sie mit Hilfe des Verfahrens aus der Vorlesung einen zu N äquivalenten DFA M und geben Sie alle relevanten Zwischenschritte mit an. P.

(ii) Die Sprache $L(N)$ lässt sich in die Äquivalenzklassen $[\lambda], [0], [1], [00]$ und $[11]$ bzgl. der Myhill-Nerode Äquivalenzrelation zerlegen. Zeigen Sie, dass die Klasse $[0]$ sich von der Klasse $[11]$ unterscheidet. Geben Sie außerdem für die Klassen $[00]$ und $[11]$ je einen weiteren Repräsentanten dieser Klasse an. P.

(b) Zwei Kinder, Luisa und Jan, spielen ein Spiel mit einem sechsseitigen Würfel, auf dem jede Zahl zweimal vorkommt. Das Würfelergebnis ist immer eine der Zahlen 1, 2 oder 3. Nach jedem Wurf wird das aktuelle Ergebnis zu allen vorangegangenen Ergebnissen hinzuaddiert. Ein Kind hat gewonnen, wenn die Summe aller Würfelergebnisse nach seinem Wurf genau 3 ist. Sollte die Summe 3 überschreiten, so kann keines der Kinder mehr gewinnen.

Beispiel:

	Kind	Ergebnis	Summe	Spiel gewonnen?
Bsp. 1	Jan	1	1	nein
	Luisa	1	2	nein
	Jan	3	5	keiner gewinnt
Bsp 2.	Jan	2	2	nein
	Luisa	1	3	Luisa gewinnt
Bsp. 3	Jan	3	3	Jan gewinnt

(i) Geben Sie die Sprache, die die Würfelergebnisse der Spiele, bei denen eines der Kinder gewinnt, beschreibt, als Menge von Wörtern über dem Alphabet $\{1,2,3\}$ an. Nutzen Sie hierbei keine regulären Ausdrücke. P.

(ii) Geben Sie formal (nicht als Zustandsgraph) einen DFA M an, der eine Zahlenfolge genau dann akzeptiert, wenn sie ein gewonnenes Spiel darstellt. M soll über dem Alphabet $\{1,2,3\}$ arbeiten und eine totale Überführungsfunktion haben. Ungültige Zahlenfolgen, das heißt Folgen, bei denen nach einem Gewinn weitergespielt wurde, dürfen nicht akzeptiert werden. Ihr Automat soll nicht kodieren, welches der Kinder gewinnt. P.

(iii) Nutzen Sie die erweiterte Überführungsfunktion um zu zeigen, wie Ihr Automat auf der Eingabe $e = 113$ arbeitet. Geben Sie dabei jeden Schritt explizit an. P.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 3 **(20 Punkte)** *Kontextfreie Sprachen.* /20 Punkte

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G = (\{a, b, c\}, \{S, C, X, B\}, S, P)$. Hierbei sei

$$\begin{aligned} P = \{S &\to cB \mid Cc, \\ C &\to Cc \mid X, \\ X &\to aXB \mid aB, \\ B &\to b\}. \end{aligned}$$

(a) In der folgenden Tabelle sind alle Regeln aus P dargestellt. Kreuzen Sie in dieser Tabelle für jede Regel an, ob es eine einfache Regel ist oder nicht. Kreuzen Sie außerdem an, ob die Regel in Chomsky-Normalform erlaubt ist oder nicht. P.

Regel	einfache Regel?		Regel in CNF erlaubt?	
	ja	nein	ja	nein
$S \to cB$				
$S \to Cc$				
$C \to Cc$				
$C \to X$				
$X \to aXB$				
$X \to aB$				
$B \to b$				

(b) Entfernen Sie mit Methoden aus der Vorlesung alle einfachen Regeln von G. Geben Sie nur an, welche Regeln entfernt und welche hinzugefügt werden. P.

(c) Wandeln Sie die Grammatik G mit Methoden aus der Vorlesung in einen äquivalenten PDA (Kellerautomaten) M um und geben Sie diesen formal korrekt und vollständig an. P.

(d) Geben Sie zwei verschiedene vollständige Konfigurationenfolgen für den konstruierten PDA M und die Eingabe abc an. Am Ende Ihrer Konfigurationenfolge sollte es keine mögliche Folgekonfiguration geben. Eine Ihrer Konfigurationenfolgen sollte mit (z, λ, λ) enden. Hierbei soll z ein Zustand Ihres Automaten sein. P.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 4 (25 Punkte) *Chomsky-Hierarchie.* **/25 Punkte**

Betrachten Sie die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$:

- L_1 enthält alle Binärzahlen (auch mit führenden Nullen), welche durch 2, aber nicht durch 4 teilbar sind.
- $L_2 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*, 10 \sqsubseteq_e w\}$ ist eine nicht kontextfreie Sprache.
  Hinweis: $10 \sqsubseteq_e w$ *bedeutet dabei, dass* 10 *Endwort des Wortes* w *ist.*
- $L_3 = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$, welche nicht regulär ist.
- $L_4 = \{0^k 1^n \mid 0 \leq k < n, n, k \in \mathbb{N}_0\}$.

Die folgende Tabelle fasst zusammen, welche Informationen bereits als bekannt vorausgesetzt werden. Mit # markierte Felder interessieren uns für diese Aufgabe nicht.

	$\in$ REG	$\in$ CF	$\in$ CS	$\in \mathcal{L}_0$
L_1				
L_2	nein	nein	#	#
L_3	nein		#	#
L_4		#	#	#

Hinweis: Überlegen Sie beim Bearbeiten dieser Aufgabe, ob es Zusammenhänge zwischen den Sprachen gibt.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L_4 nicht regulär ist. P.

(b) Geben Sie die Sprache L_1 als Menge von Wörtern an. Nutzen Sie hierbei keine regulären Ausdrücke. P.

(c) Ordnen Sie die Sprache L_1 möglichst genau in die Chomsky-Hierarchie ein. Begründen Sie Ihre Argumentation. P.

(d) Betrachten Sie die Sprache L_3. Zeigen Sie (ohne Verwendung des Pumping-Lemmas), dass diese Sprache nicht kontextfrei ist. P.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 5 (15 Punkte) *Berechenbarkeit.* /15 Punkte

(a) Zeigen Sie durch Angabe eines entsprechenden Programms, dass die Funktion P.

$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, g(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0, \\ x - 1, & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

GOTO-berechenbar ist.
Benutzen Sie dabei nur die elementaren Befehle eines GOTO-Programms.

(b) Gegeben sei folgendes LOOP-Programm, welches eine Funktion $f : \mathbb{N}_0^3 \to \mathbb{N}_0$ berechnet. P.

```
LOOP x2 DO
  x1 := x1 + 1
END;
LOOP x3 DO
  LOOP x1 DO
    x0 := x0 + 1
  END
END
```

Geben Sie f explizit an.

(c) Ist die Funktion f partiell rekursiv? Begründen Sie Ihre Antwort. P.

(d) Gegeben sei die primitiv rekursive Funktion P.

$$\text{unbekannt} : \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0, \text{unbekannt}(x, y) = \text{add}(\text{id}_1^2(x, y), \text{dm}(x, y)),$$

wobei add die Additionsfunktion ist und $\text{dm}(x, y) = \text{md}(y, x)$ für die modifizierte Differenz md gilt.
Füllen Sie folgende Fallunterscheidung aus:

$$\text{unbekannt}(x, y) = \begin{cases} \qquad , & \text{falls } x > y \\ \qquad , & \text{falls } x < y \\ \qquad , & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Welche Funktion verbirgt sich semantisch hinter der Funktion unbekannt?

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)