Aufgabe 1 (20 Punkte) Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder 'Ja' oder 'Nein' an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d.h. nur solche, bei denen **eindeutig** *entweder 'Ja' oder 'Nein'* angekreuzt wurde - Antworten, bei denen weder 'Ja' noch 'Nein' oder sowohl 'Ja' und 'Nein' angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
☐ Ja ☐ Nein Jedes Wort besteht aus endlich vielen Symbolen.
☐ Ja ☐ Nein Seien A und B beliebige Sprachen über dem Alphabet Σ. Dann gilt $A \cap B \neq \emptyset$.
☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Grammatik ist eine kontextfreie Grammatik.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
☐ Ja ☐ Nein Mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen kann man zeigen, dass eine Sprache regulär ist.
☐ Ja ☐ Nein Es gibt für jede reguläre Sprache einen PDA, der diese Sprache akzeptiert.
☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache, die von einem NFA akzeptiert wird, kann durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
☐ Ja ☐ Nein Für eine reguläre Sprache L gilt, dass Index(R_L) der Anzahl der Zustände im Minimalautomaten entspricht.
☐ Ja ☐ Nein Eine kontextfreie Grammatik kann keine einfachen Regeln enthalten.
☐ Ja ☐ Nein Für jede kontextfreie Sprache L ist $\overline{L}$ auch kontextfrei.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
☐ Ja ☐ Nein Eine LBA ist eine Turingmaschine.
☐ Ja ☐ Nein Es gibt für jede Typ-1-Grammatik G eine Turingmaschine M mit $L(M) = L(G)$.
☐ Ja ☐ Nein Jede totale berechenbare Funktion ist LOOP-berechenbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?
☐ Ja ☐ Nein Es gibt eine Gödelisierung der allgemein rekursiven Funktion.
☐ Ja ☐ Nein DNF-SAT $\leq_m^p$ SAT.
☐ Ja ☐ Nein Jedes Problem aus P liegt in NP.

Aufgabe 2 (12 Punkte) *Reguläre Sprachen*
Betrachten Sie die folgende Anwendung des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen für

$$L = \{a(b)^r c(b)^r a | r \geq 1\} \subseteq \Sigma^* \text{ mit } \Sigma = \{a, b, c\}$$

Vervollständigen Sie die Lücken im folgenden Lückentext so, dass ein Beweis entsteht, welcher zeigt, dass L nicht regulär ist.

Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass L regulär sein. Nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen gibt es dann eine Zahl $n \geq 1$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$, eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit
(1) $|uv| \leq n$,
(2) $|v| \geq 1$,
(3) für alle $i \geq 0$ gilt $uv^i w \in L$.
Für den Widerspruch zeigen wir, dass ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ existiert, so dass für alle Zerlegungen $x = uvw$ mit (1) und (2) nicht (3) gilt.

Wähle $x = ab^{\square} cb^{\square} a \in L$.

Es gilt $|x| = \square \geq n$.

Durch (1) und (2) können wir zwischen zwei Fällen unterscheiden.

Fall 1: $v = ab^q$ mit $\square \leq q \leq \square$.

Dann gilt, dass $u = \square$.

Für $i = \square$ gilt, ____
____

Fall 2: $v = b^q$ mit $\square \leq q \leq \square$.

Für $i = \square$ gilt, ____
____

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass L regulär ist. Somit ist L nicht regulär.

Aufgabe 3 (21 Punkte) *Reguläre Sprachen*

(a) Gegeben sei der NFA $N = (\Sigma, Z, \delta, \{z_0, F\})$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2\}$, $F = \{z_1\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2
0	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_0\}$
1	$\{z_0\}$	$\{z_0, z_2\}$	$\{z_1, z_2\}$

Konstruieren Sie mit der Methode aus der Vorlesung einen zu N äquivalenten DFA M. Dabei ist M in der formalen Darstellung anzugeben, nciht als Zustandsgraph.

(b) Gegeben sei der reguläre Ausdruck $\gamma = (ab + ba)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

i) Geben Sie eine Typ-3-Grammatik G an mit $L(\gamma) = L(G)$. Hierbei ist keine Herleitung gefordert.

ii) Geben Sie einen Syntaxbaum für die Ableitung des Wortes $w = abba$ in Ihrer konstruierten Grammatik G an.

Aufgabe 4 (16 Punkte) *Kontextfreie Sprachen*

(a) Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mi $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B, C\}$ und

$$P = \{ \begin{array}{ll} S \rightarrow & ASB|AB|CB, \\ A \rightarrow & a|aA|C, \\ B \rightarrow & b, \\ C \rightarrow & cC|c|aA\} \end{array}$$

i) Überführen Sie die Grammatik G mit dem Algorithmus der Vorlesung in eine äquivalente Grammatik G' in CNF. Zeigen Sie dabei, welche Schritte Sie durchführen und geben Sie G' am Ende explizit an.

ii) Geben Sie $L(G)$ formal als Menge von Wörtern an ohne dabei auf G oder G' Bezug zu nehmen.

(b) Die nachfolgende Tabelle ist durch Anwendung des CYK-Algorithmus für eine Grammatik G'' fehlerhaft ausgefüllt worden:

i	1	2	3	4	5	6
5	S					
1		C				
3	B, A		A			
2				G		
1	S, A, B, C				F	
0	D, B, A	D, B, A	E	D, B, A	E	E
j	a	a	b	a	b	b

Angenommen, die Zeilen $j = 0$, $j = 1$, $j = 2$ sind noch korrekt.
Wo liegt dann (völlig unabhängig davon, wie G'' genau aussieht) in einer der Zeilen $j > 2$ ein Fehler? Begründen Sie, was daran falsch ist.

Aufgabe 5 (16 Punkte) *Turingmaschinen*

(a) Erstellen Sie einen LBA M mit $L(M) = \{1^n01^n | n \geq 1\} \subseteq \{0,1\}^*$

(b) Beschreiben Sie kurz die Funktion der einzelnen Zustände.

(c) Ist Ihr konstruierter LBA deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(d) Hat Ihr LBA eine totale Überführungsfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 (15 Punkte) *Berechenbarkeit*

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{falls } y \geq x^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und das dazugehörige `WHILE`-Programm, welches f berechnet

$x_0 := x_2 + 0;$
$x_3 := x_1 + 0;$
`LOOP` x_3 `DO`
    `LOOP` x_1 `DO`
        $x_0 := x_0 - 1$
    `END`
`END`

(a) Führen Sie das `WHILE`-Programm für die Eingabe $x = 2$ und $y = 6$ aus.
Geben Sie dazu Folgendes an:

(i) Die Belegung aller verwendeten Variablen zum Start des Programms,

(ii) die Belegung aller verwendeten Variablen nach Halten des Programms, und

(iii) die Ausgabe des Programms.

(b) Ist f `GOTO`-berechenbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Zeigen Sie, dass f primitiv rekursiv ist, indem Sie die aus der Vorlesung bekannten Normalschemata anwenden.
Hinweis: Sie dürfen alle aus der Vorlesung und Übung bekannten primitiv rekursiven Funktionen verwenden.

(d) Sei $g = \mu f$. Bestimmen Sie $g(9)$.