Institut für Informatik
M. Mutz

Übungsblatt 2

Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 22.04.2024 bis 28.04.2024, 16:00 Uhr
Besprechung: 29.04.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (Grammatiken – Sonderregel für das leere Wort)10 Punkte
Gegeben sei die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{0, 1, 2\}$, $N = \{S, T, U\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to 1T2 \mid 0S1 \mid 1 \\ T &\to 1T2 \mid 0S \mid U1 \\ U &\to 1U \mid 1\} \end{aligned}$$

Modifizieren Sie G zu G', so dass $\lambda \in L(G')$ und $L(G') = L(G) \cup \{\lambda\}$ gelten, indem Sie das Verfahren aus der Vorlesung in dem Abschnitt „Sonderregelung für das leere Wort“ anwenden.
Geben Sie dabei jeweils die Regeln an, die durch die einzelnen Schritte hinzugefügt bzw. modifiziert werden.

Lösungsvorschlag:
1. In allen Regeln der Form $S \to u$ aus P mit $u \in (\Sigma \cup N)^*$ wird jedes Vorkommen von S in u durch ein neues Nichtterminal S' ersezt.

$$\begin{aligned} S &\to 0S'1 \\ T &\to 0S' \end{aligned}$$

2. Zusätzlich enthält P' alle Regeln aus P mit S ersetzt durch S'. Neue Regeln sind

$$S' \to 1T2 \mid 0S'1 \mid 1$$

3. Die Regel $S \to \lambda$ wird hinzugefügt. Man erhält $G' = (\Sigma, N', S, P')$ mit $\Sigma =$

$\{0,1,2\}, N' = \{S, S', T, U\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{S &\to 1T2 \mid 0S'1 \mid 1 \mid \lambda \\ S' &\to 1T2 \mid 0S'1 \mid 1 \\ T &\to 1T2 \mid 0S' \mid U1 \\ U &\to 1U \mid 1\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (Syntaxbaum)10 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A, B\}$ und

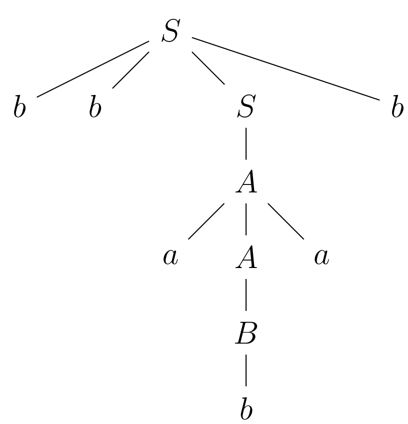
$$\begin{aligned} P = \{S &\to bbSb \;\mid\; A, \\ A &\to aAa \;\mid\; B, \\ B &\to bB \;\mid\; b\}. \end{aligned}$$

a) Geben Sie einen Syntaxbaum für das Wort $w = bbabab$ an.
In LaTeX eignet sich beispielsweise das tikz-Package

b) Geben Sie $L(G)$ formal als Menge von Wörtern an, ohne dabei Bezug auf G zu nehmen.

Lösungsvorschlag:

a) Syntaxbaum für $w = bbabab$:



b) $L(G) = \{b^{2n}a^ib^ja^ib^n \mid n \geq 0, i \geq 0, j \geq 1\}$

Aufgabe 3 (DFAs)10 Punkte
Betrachten Sie den DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit $\Sigma = \{0, 1\}, Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, $F = \{z_4\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
0	z_1	z_5	z_2	z_4	z_2	z_5
1	z_5	z_2	z_3	z_3	z_3	z_5

a) Zeichnen Sie den Zustandsgraphen von M.

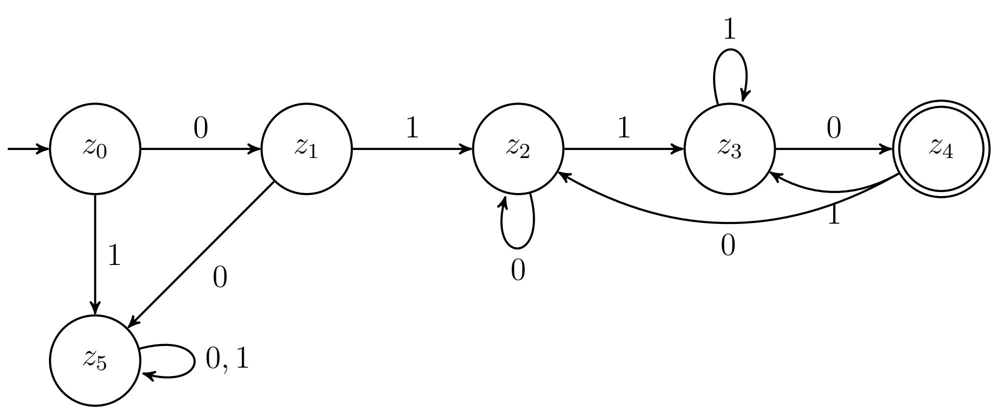
b) Wenden Sie die erweiterte Überführungsfunktion $\widehat{\delta}$ schrittweise auf das Wort $w_1 = 011001$ an. Begründen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses, ob M das Wort w_1 akzeptiert oder nicht.

c) Geben Sie $L(M)$ formal als Menge von Wörtern an, ohne weiteren Bezug auf M zu nehmen.

d) Ist die Überführungsfunktion δ total? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag:

a)



b)

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(z_0, 011001) &= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_0,0),1),1),0),0),1)\\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(\delta(z_1,1),1),0),0),1)\\ &= \delta(\delta(\delta(\delta(z_2,1),0),0),1)\\ &= \delta(\delta(\delta(z_3,0),0),1)\\ &= \delta(\delta(z_4,0),1)\\ &= \delta(z_2,1)\\ &= z_3\end{aligned}$$

$z_3 \notin F$, demnach akzeptiert M das Wort w_1 nicht.

c) $L(M) = \{01w10 \mid w \in \{0,1\}^*\}$

d) δ ist total, da δ für jedes Element aus $Z \times \Sigma$ definiert ist.

Aufgabe 4 (DFAs, Weiterführend)10 Punkte

(a) Geben Sie jeweils die Sprachen in Form von Mengenausdrücken (Set Comprehensions) an, die von den unteren zwei DFAs M_1 und M_2 akzeptiert werden:
(Hinweis zur Bearbeitung der Aufgabe: Betrachten Sie die Wörter aus der Sprache als Binärzahlen. Wandeln Sie diese zu Dezimalzahlen um. Vielleicht fällt ihnen etwas auf.)

(i) $M_1 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \delta_1, z_0, \{z_0\})$

δ_1	z_0	z_1	z_2
0	z_0	z_2	z_1
1	z_1	z_0	z_2

(ii) $M_2 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \delta_2, z_0, \{z_0\})$

δ_2	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
0	z_0	z_3	z_1	z_4	z_2
1	z_1	z_2	z_3	z_0	z_4

(b) Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Konstruieren Sie jeweils DFAs, die die folgenden regulären Sprachen akzeptieren:

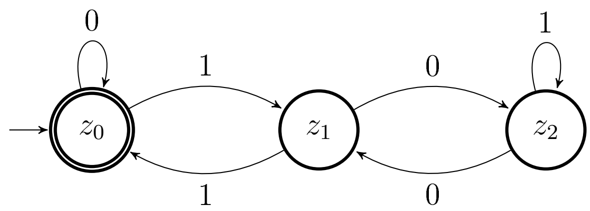
(i) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält weder 00 noch 11 als Teilwort}\}$

(ii) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ Die Länge von } w \text{ } (|\, w \,|) \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl}\}$

Lösungsvorschlag:

(a)

(i) Der DFA $M_1 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \delta_1, z_0, \{z_0\})$ kann man wie folgt mit Hilfe des Zustandsgraphen darstellen:



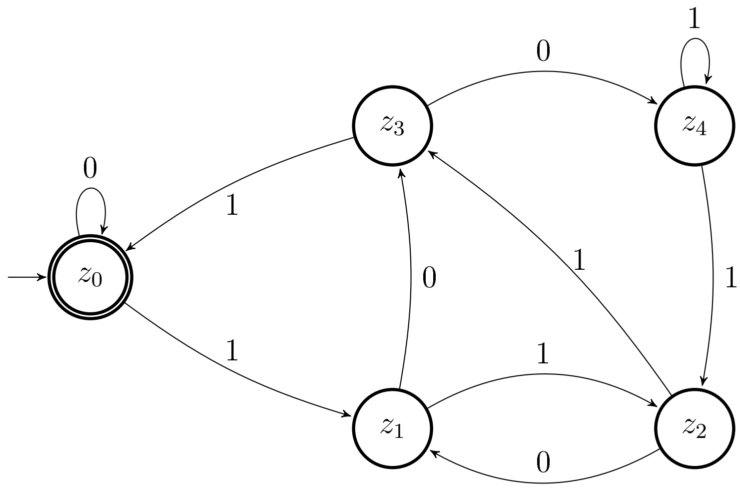
Aus dem Zustandsgraphen lässt sich den folgenden regulären Ausdruck γ bestimmen, der die Sprache $L(M_1)$ beschreibt:

$$\gamma = (0 + 1(01^*0)^*1)^*$$

$[L((0 + 1(01^*0)^*1)^*) = L(M_1)]$. Das Ziel ist die Sprache $L(M_1)$ anhand ihrer Wörter zu charakterisieren. Deshalb schauen wir uns am besten zunächst die kürzesten Wörter, die in der Sprache enthalten sind, an und dann versuchen wir anhand dieser $L(M_1)$ näher zu erläutern. Die kürzesten Wörter der Sprache $L(M_1)$, die nicht mit Null anfangen, sind: 11, 110, 1001, 1100, 1111, 10010, 10101, ... Wenn wir diese nach Dezimalzahlen umwandeln, bekommen wir folgende Zahlen: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... Es ist dann leicht zu sehen, dass die Reihenfolge aus Zahlen besteht, die Vielfaches von 3 sind. Daraus lässt sich schließen, dass der DFA M_1 alle Binärzahlen (auch solche mit führenden Nullen) akzeptiert, die in Dezimaldarstellung Vielfaches von 3 sind:

$$L(M_1) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist binäres Wort (Zahl), die in Dezimaldarstellung Vielfaches von 3 ist}\}$$

(ii) Der DFA $M_2 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \delta_2, z_0, \{z_0\})$ kann wie folgt dargestellt werden:

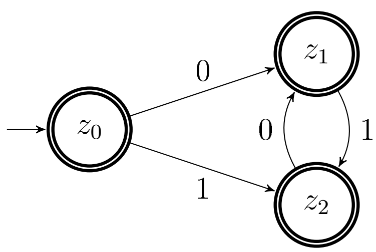


Auf die gleiche Art und Weise wie in Teil (i) kann man herausfinden, dass $L(M_2)$ alle Binärzahlen akzeptiert, die in Dezimalderstellung Vielfaches von 5 sind:

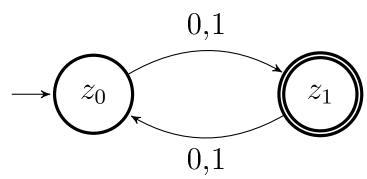
$$L(M_2) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ ist binäres Wort (Zahl),} \\ \text{die in Dezimaldarstellung Vielfaches von 5 ist}\}$$

(b)

(i) Der DFA $M_1 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \delta, z_0, \{z_0, z_1, z_2\})$ akzeptiert alle Wörter der Sprache $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält weder 00 noch 11 als Teilwort}\}$



(ii) Der DFA $M_2 = (\{0,1\}, \{z_0, z_1\}, \delta, z_0, \{z_1\})$ akzeptiert alle Wörter der Sprache $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{ Die Länge von } w \ (\mid w \mid) \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl}\}$


0,1
z_0
z_1
0,1