Beispiellösung zur Übung 11

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Relationsschema $R(A, B, C, D, E)$. Betrachten Sie die beiden FD-Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \{A \to C, AC \to D, E \to AD, E \to B\}\\ \mathcal{G} &= \{A \to CD, E \to AB\}\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ *äquivalent* ($\mathcal{F}^+ = \mathcal{G}^+$) sind.

(a) Zeigen Sie $\mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{F}^+$ mithilfe der **Ableitungsregeln**.
Zeigen Sie also, dass jede FD in $\mathcal{G}$ aus den FD in $\mathcal{F}$ durch schrittweise Anwendung der Ableitungsregeln hergeleitet werden kann.

Lösungsvorschlag:

$A \to CD \in \mathcal{F}^+$, weil:

$$\begin{aligned}\{A \to C\} &\vDash_{R_2} A \to AC\\ \{A \to AC, AC \to D\} &\vDash_{R_3} A \to D\\ \{A \to C, A \to D\} &\vDash_{R_5} A \to CD\end{aligned}$$

oder zB

$$\begin{aligned}\{A \to C, AC \to D\} &\vDash_{R6} (AA =)A \to D\\ \{A \to D, A \to C\} &\vDash_{R_5} A \to CD\end{aligned}$$

$E \to AB \in \mathcal{F}^+$, weil:

$$\begin{aligned}\{E \to B, E \to AD\} &\vDash_{R_5} E \to ADB\\ \{E \to ADB\} &\vDash_{R_4} E \to AB\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{G}^+$ mithilfe von **Membership-Tests**.
Berechnen Sie also für jede FD $\alpha \to \beta \in \mathcal{F}$ die Hülle von α bzgl. $\mathcal{G}$ ($\alpha^*_{\mathcal{G}}$) und zeigen Sie, dass $\beta \subseteq \alpha^*_{\mathcal{G}}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

$A \to C \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\begin{aligned}A^0_G &= A\\ A^1_G &= ACD = A^*_G\\ C &\subseteq A^*_G = ACD\end{aligned}$$

$AC \to D \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\begin{aligned}AC^0_G &= AC\\ AC^1_G &= ACD = AC^*_G\\ D &\subseteq AC^*_G = ACD\end{aligned}$$

$E \to AD \in \mathcal{G}^+$ und $E \to B \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\begin{aligned}
E_G^0 &= E \\
E_G^1 &= ABE \\
E_G^2 &= ABCDE = E_G^* \\
AD &\subseteq E_G^* = ABECD \\
B &\subseteq E_G^*
\end{aligned}$$

(c) *(Bonus)* Zeigen Sie $\mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{F}^+$ mithilfe von Membership-Tests und $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathcal{G}^+$ mithilfe der Ableitungsregeln.

Lösungsvorschlag:

$A \to CD \in \mathcal{F}^+$, weil:

$$\begin{aligned}
A_F^0 &= A \\
A_F^1 &= AC \\
A_F^2 &= ACD = A_F^* \\
CD &\subseteq A_F^*
\end{aligned}$$

$E \to AB \in \mathcal{F}^+$, weil:

$$\begin{aligned}
E_F^0 &= E \\
E_F^1 &= ABDE \\
AB &\subseteq E_F^1 \subseteq E_F^*
\end{aligned}$$

$A \to C \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\{A \to CD\} \vDash_{R4} A \to C$$

$AC \to D \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\begin{aligned}
\{A \to CD\} &\vDash_{R2} AC \to CD \\
\{AC \to CD\} &\vDash_{R4} AC \to D
\end{aligned}$$

$E \to AD \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\begin{aligned}
\{E \to AB\} &\vDash_{R_4} E \to A \\
\{A \to CD\} &\vDash_{R_2} A \to ACD \\
\{E \to A, A \to ACD\} &\vDash_{R3} E \to ACD \\
\{E \to ACD\} &\vDash_{R_4} E \to AD
\end{aligned}$$

$E \to B \in \mathcal{G}^+$, weil:

$$\{E \to AB\} \vDash_{R_4} E \to B$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die folgenden Relationen mit zugehörigen FD-Mengen. Alle Attribute haben atomare Wertebereiche.

1. Bestimmen Sie alle Kandidatenschlüssel und begründen Sie, warum es keine weiteren geben kann.

2. Geben Sie für alle Attribute in R an, welche prim und welche nicht prim sind.
3. Geben Sie für für alle Normalformen (1NF, 2NF, 3NF, BCNF) an, ob sich die Relation in dieser Normalform befindet. Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie ggf. konkrete FDs an, die einer bestimmten Normalform widersprechen.

(a) $R(A, B, C, D, E, F)$ mit $\mathcal{F} = \{A \to BD, AB \to E, B \to EF, C \to AB\}$

Lösungsvorschlag:

- C ist Kandidatenschlüssel, weil $C^* = R$ und C minimal, da es nur aus einem Attribut besteht.
  Es kann keine weiteren geben, weil
  - alle anderen Attributmengen ohne C die Schlüsseleigenschaft nicht erfüllen, weil C nicht auf der rechten Seite einer FD vorkommt
  - alle anderen Attributmengen mit C zwar die Schlüsseleigenschaft erfüllen, aber nicht minimal wären.
- prim: C, nicht prim: A, B, D, E, F
- 1NF gilt, da alle Attribute atomare Wertebereiche haben.
  2NF gilt, da es keine partiellen Abhängigkeiten geben kann (alle Kandidatenschlüssel bestehen aus 1 Attribut)
  3NF gilt nicht wegen der FD $AB \to E$, da diese nicht trivial ist, E nicht prim und AB kein Superschlüssel
  ($C \to AB \to E$ transitive Abhängigkeit mit nicht-primen Attribut E)
  BCNF gilt nicht, da 3NF nicht erfüllt

(b) $R(A, B, C, D, E)$ mit $\mathcal{F} = \{A \to C, D \to AE, AD \to B, AE \to D\}$

Lösungsvorschlag:

- D ist Kandidatenschlüssel, weil $D^* = R$ und D ist minimal, weil es nur aus einem Attribut besteht.
  AE ist Kandidatenschlüssel, weil AEř$* = R$ und minimal, da $A^* = AC \neq R$ und $E^* = E \neq R$.
  Es kann keine weiteren geben, weil alle anderen Attributmengen entweder die Schlüsseleigenschaft nicht erfüllen oder nicht minimal wären. Genauer geprüft:
  - Andere mögliche Attributmengen dürfen nicht D enthalten, sonst wären sie nicht minimal. Außerdem dürfen sie nicht A und E gleichzeitig enthalten. Test von ABC und BCE ($ABC^* = ABC$, $BCE^* = BCE$) ergibt, dass diese nicht die Schlüsseleigenschaft erfüllen, dasselbe muss also für jede Teilmenge von ihnen gelten.
- prim: A, D, E, nicht prim: B, C
- 1NF gilt, da alle Attribute atomare Wertebereiche haben.
  2NF gilt nicht wegen der FD $A \to C$, da C nicht prim und A eine echte Teilmenge des Kandidatenschlüssels AE
  3NF gilt nicht, da 2NF nicht erfüllt
  BCNF gilt nicht, da 2NF und 3NF nicht erfüllt

(c) $R(A, B, C, D, E)$ mit $\mathcal{F} = \{BE \to C, A \to E, CE \to A, AB \to D\}$

Lösungsvorschlag:

- AB und BE sind Kandidatenschlüssel, weil $AB^* = BE^* = R$ und sie sind minimal, weil B nicht auf der rechten Seite einer FD vorkommt und somit in jedem Kandidatenschlüssel enthalten sein muss und $B^* \neq R$ (alternativ einfach, weil $B^* \neq R$, $A^* \neq R$, $E^* \neq R$).
  Es kann keine weiteren geben, weil
  - alle anderen Attributmengen ohne B die Schlüsseleigenschaft nicht erfüllen, weil B nicht auf der rechten Seite einer FD vorkommt
  - alle anderen möglichen Attributmenge mit B dürfen A und E nicht enthalten, da sie sonst nicht minimal wären. Test von BCD ($BCD^* = BCD \neq R$) ergibt, dass die Schlüsseleigenschaft nicht erfüllt ist, dasselbe muss also auch für jede Teilmenge gelten.
- prim: A, B, E, nicht prim: C, D
- 1NF gilt, da alle Attribute atomare Wertebereiche haben.
  2NF gilt, weil es nicht-primen Attribute mit partiellen Abhängigkeiten gibt
  3NF gilt, weil es nicht-primen Attribute mit transitiven Abhängigkeiten
  BCNF gilt nicht wegen der FD $A \to E$, da sie nicht trivial ist und A kein Superschlüssel.

Aufgabe 3 *(Bonus)*

Zeigen Sie folgende Herleitungen mit Hilfe der Armstrong-Axiome (Ableitungsregeln $R_1 - R_3$)

(a) $\{X \to Y, Z \subseteq Y\} \models X \to Z$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \{Z \subseteq Y\} &\models_{R_1} Y \to Z \\ \{X \to Y, Y \to Z\} &\models_{R_3} X \to Z \end{aligned}$$

(b) $R_4 : \{X \to YZ\} \models \{X \to Y, X \to Z\}$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \{Z \subseteq YZ\} &\models_{R_1} YZ \to Z \\ \{X \to YZ, YZ \to Z\} &\models_{R_3} X \to Z \\ X \to Y &\text{ analog} \end{aligned}$$

(c) $R_5 : \{X \to Y, X \to Z\} \models X \to YZ$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \{X \to Y\} &\models_{R_2} XZ \to YZ \\ \{X \to Z\} &\models_{R_2} X \to XZ \\ \{X \to XZ, XZ \to YZ\} &\models_{R_3} X \to YZ \end{aligned}$$

(d) $R_6 : \{X \to Y, WY \to Z\} \models WX \to Z$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} \{X \to Y\} &\models_{R_2} WX \to WY \\ \{WX \to WY, WY \to Z\} &\models_{R_3} WX \to Z \end{aligned}$$