Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: 02, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@cs.uni-duesseldorf.de
14. November 2011

Vorlesung im Sommersemester 2011

Informatik IV

Nachklausurtermin: 17. November 2011

BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN UND VORNAMEN SOWIE STUDIENFACH MIT SEMESTER UND MATRIKELNUMMER EIN!

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	10	20	25	10	15	100
erreichte Punktzahl							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter,
- Gedächtnis.

Nicht erlaubte Hilfsmittel:

- Mobiltelefone und ähnliche Kommunikationsgeräte,
- Kommiliton/inn/en,
- Taschenrechner.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe 1 (20 Punkte) Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder Ja oder Nein an.

Bewertung: Für jede richtige Antwort in **(a)** bis **(e)** gibt es $\frac{4}{3}$ Punkte, für jede falsche werden $\frac{2}{3}$ Punkte abgezogen und für Antworten, bei denen weder Ja noch Nein oder sowohl Ja als auch Nein angekreuzt sind, gibt es keinen Punkt. Insgesamt gibt es also die folgende Punktzahl für Aufgabe **1(a)–(e)**:

$$\lceil \max\left(0, {}^4\!/_3\,(\text{Anzahl der richtigen Antworten}) - {}^2\!/_3\,(\text{Anzahl der falschen Antworten})\right)\rceil .$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Keine unendliche Sprache hat eine reguläre Teilmenge.
☐ Ja ☐ Nein Jede Teilmenge einer endlichen Sprache ist regulär.
☐ Ja ☐ Nein Der reguläre Ausdruck $(\emptyset + \emptyset^*)$ repräsentiert die Sprache $\{\lambda\}$.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Die Klasse der Typ-2-Sprachen ist unter Schnittbildung abgeschlossen.
☐ Ja ☐ Nein Jede entscheidbare Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge ist endlich.
☐ Ja ☐ Nein Jede endliche Teilmenge einer rekursiv aufzählbaren Menge ist regulär.

(c) Welche/s der folgenden Probleme ist/sind entscheidbar?

☐ Ja ☐ Nein Gegeben eine Gödelnummer i, hat φ_i einen unendlichen Wertebereich?
☐ Ja ☐ Nein Gegeben zwei reguläre Grammatiken G_1 und G_2, ist $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$?
☐ Ja ☐ Nein Gegeben ein LBA M und ein Wort x, gilt $x \notin L(M)$?

(d) Seien $K = \{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{D}_i\}$ das spezielle Halteproblem und $\overline{K}$ sein Komplement, und seien $H = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i \in \mathrm{D}_j\}$ das allgemeine Halteproblem und $\overline{H}$ sein Komplement. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein $H \cap \overline{H}$ ist entscheidbar.
☐ Ja ☐ Nein $\overline{K}$ ist in RE.
☐ Ja ☐ Nein $K \leq_{\mathrm{m}} H$ und $H \leq_{\mathrm{m}} K$.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind beweisbar wahr?

☐ Ja ☐ Nein Die Nummernmenge einer jeden nichttrivialen Eigenschaft partiell rekursiver Funktionen ist unentscheidbar.
☐ Ja ☐ Nein Jede formale Sprache lässt sich durch eine Typ-0-Grammatik erzeugen.
☐ Ja ☐ Nein Regelmäßiges Reinigen der Bänder und Köpfe einer Turingmaschine verlängert ihre Lebensdauer.

Aufgabe 2 (10 Punkte) *Reguläre Sprachen.* Gegeben sei die Sprache L der Wörter x über $\Sigma = \{a, b\}$ mit Länge $|x| \geq 2$, die auf b enden. Zu dieser Sprache sei auch der NFA $N = (\Sigma, Z, \delta, S, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $S = \{z_0, z_1\}$, $F = \{z_3\}$ und

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
a	$\{z_2\}$		$\{z_2, z_4\}$		
b		$\{z_2\}$	$\{z_2, z_3\}$		

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass der reguläre Ausdruck $\gamma = (a+b)(a+b)^*b$ diese Sprache beschreibt (also $L(\gamma) = L$ gilt), indem Sie ein entsprechendes Gleichungssystem lösen.

(b) Betrachten Sie die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen $[\lambda]$, $[b]$ und $[bb]$ bezüglich der Relation R_L. Ordnen Sie die folgenden zehn Wörter den korrekten Äquivalenzklassen zu (ohne Begründung):

$$a,\ aa,\ ab,\ ba,\ aab,\ aba,\ abb,\ baa,\ bab,\ bba.$$

$$\begin{aligned} [\lambda] &= \{\lambda, \ldots \qquad\qquad\qquad \} \\ [b] &= \{b, \ldots \qquad\qquad\qquad \} \\ [bb] &= \{bb, \ldots \qquad\qquad\qquad \} \end{aligned}$$

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 3 (20 Punkte) *Kontextfreie Sprachen*

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^n a^n b^n b^n \mid n \geq 2\}$. In der im Folgenden angegebenen Ausführung wird versucht zu zeigen, dass L nicht kontextfrei ist. Es haben sich allerdings ein paar Fehler eingeschlichen. Finden Sie vier Fehler in der Argumentation und begründen Sie kurz, warum dies Fehler sind.

Behauptung: *L ist nicht kontextfrei.*

Beweisversuch: *Angenommen, L sei kontextfrei. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen eine Zahl $p \geq 1$, sodass für jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq p$ eine Zerlegung $z = uvwxy$ existiert, sodass die folgenden drei Aussagen gelten:*

1. $|vwx| \leq p$
2. $|vx| \geq 1$ *und*
3. $(\neg\exists j \geq 0)[uv^j wx^j y \notin L]$

Wähle als Gegenbeispiel $z = a^p a^p b^p b^p$. Offensichtlich gilt $z \in L$ und $|z| = 4p > p$. Setze außerdem

$$u = a^k,\ v = a^\ell,\ w = a^m,\ x = a^q \text{ und } y = a^{2p-k-\ell-m-q} b^{2p}.$$

für Variablen k, ℓ, m, q mit $0 \leq \ell + k + m + q \leq 2p$. Offensichtlich gilt $z = uvwxy$. Aus den ersten beiden Aussagen des Pumping-Lemmas folgt

$$k + \ell + m + q \leq p$$

und

$$\ell \geq 1 \text{ und } q \geq 1.$$

Wähle nun $j = 0$ um die dritte Aussage zu einem Widerspruch zu führen. Es gilt

$$uv^j wx^j y = uwy = a^k a^m a^{2p-k-l-m-n} b^{2p} = a^{2p-\ell-q} b^{2p}$$

Hierbei implizieren $\ell \geq 1$ und $q \geq 1$, dass $|uwy|_a \leq |uwy|_b$ gilt, wobei $|s|_a$ bzw. $|s|_b$ für ein Wort s die Anzahl der Symbole a bzw. b in s angibt. Demnach kann $uv^j wx^j y$ nicht die Form $a^n a^n b^n b^n$ für ein $n \geq 2$ annehmen, liegt also nicht in L. Dies ist ein Widerspruch zur dritten Aussage. Also war die Annahme falsch, d. h., L ist nicht kontextfrei.

(Bitte geben Sie Ihre Argumente detailliert und präzise an!)

Aufgabe 4 (25 Punkte) *Kontextsensitive und $\mathcal{L}_0$-Sprachen.*
Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\{0,1,\hat{0},\hat{1}\},\{0,1,\hat{0},\hat{1},\square\},\{z_0,z_1,z_2,z_3,z_E\},\delta,z_0,\square,\{z_E\})$ mit

$$\delta(z_0,0) = (z_1,0,R),\quad \delta(z_0,1) = (z_1,\hat{1},R),\quad \delta(z_0,\hat{0}) = (z_E,\hat{0},N),\quad [\delta(z_0,\hat{1}) = (z_0,\hat{1},N)],$$
$$\delta(z_1,0) = (z_1,0,R),\quad \delta(z_1,1) = (z_1,1,R),\quad \delta(z_1,\hat{0}) = (z_2,\hat{0},L),\quad [\delta(z_1,\hat{1}) = (z_1,\hat{1},N)],$$
$$\delta(z_2,0) = (z_3,0,L),\quad [\delta(z_2,1) = (z_2,1,N)],\quad [\delta(z_2,\hat{1}) = (z_2,\hat{1},N)],$$
$$\delta(z_3,0) = (z_E,0,N),\quad \delta(z_3,1) = (z_E,1,N)\quad \text{und}\quad \delta(z_3,\hat{1}) = (z_E,\hat{1},N).$$

Die Überführungen in eckigen Klammern erzeugen jeweils eine Endlosschleife – die Klammern sollen Ihnen helfen, diese einfacher zu erkennen und haben keinen weiteren Sinn.

(a) Ist M deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Geben Sie die Konfigurationenfolgen von M bei Eingabe $w_1 = 1\hat{0}$, $w_2 = 10\hat{0}$ und $w_3 = 0\hat{0}$ an.

(c) Das Eingabealphabet $\Sigma = \{0,1,\hat{0},\hat{1}\}$ legt nahe, dass es sich bei M sogar um einen LBA handelt. Überprüfen Sie diese These.

(d) M akzeptiert bestimmte Folgen von 0en und 1en. Nehmen Sie nun an, dass die Eingabe eine korrekt formatierte Binärzahl (also ohne führende Nullen) ist, wobei das letzte Zeichen, $\hat{0}$ bzw. $\hat{1}$, als 0 bzw. 1 zu interpretieren ist. Welche Zahlen akzeptiert M dann? Bitte formulieren Sie die Antwort mathematisch präzise in einem kurzen Satz.

(e) Angenommen, die Eingabe x habe eine Länge von $|x| = n$. Wieviele Schritte führt M im Falle einer Akzeptanz maximal aus?

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 5 (10 Punkte) *Berechenbarkeit*

Betrachten Sie eine Gödelisierung der primitiv rekursiven Funktionen. Welche Funktion verbirgt sich hinter dem Gödelwort

$$\mathrm{PR}[0, \mathrm{id}|| * |](x|)$$

unter Verwendung der Notation aus der Vorlesung?

(Bitte geben Sie die Lösung sowohl unter Verwendung des Normalschemas als auch als Funktion in der „üblichen“ mathematischen Schreibweise an!)

Aufgabe 6 (15 Punkte) *Entscheidbarkeit*

Sei A die Menge der natürlichen Zahlen, die als Funktionswerte der Ackermann-Funktion (wie in der Vorlesung definiert) auftreten.

(a) Zeigen Sie, dass A semi-entscheidbar ist.

(b) Ist A auch entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.
VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG