

Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 24.06.2024 bis 30.06.2024, 16:00 Uhr

Besprechung: 01.07.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (Partiell rekursive Funktionen) 14P

- (a) Sei die Funktion $eq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeben mit

$$eq(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ \text{undefiniert}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie μeq .

- (b) Gegeben seien die partiell rekursiven Funktionen $lt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $gt : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, die wie folgt definiert sind:

$$lt(x, y) = \begin{cases} x, & \text{falls } x < y \\ y, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } x = y \end{cases} \quad gt(x, y) = \begin{cases} y, & \text{falls } x < y \\ x, & \text{falls } x > y \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Welche Funktionen berechnen μlt und μgt ? Bitte geben Sie eine formale mathematische Beschreibung für μlt und μgt an.

- (c) Zeigen Sie, dass die Funktion $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$l(m) = \begin{cases} \log_2(m), & \text{falls } \log_2(m) \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert}, & \text{falls } \log_2(m) \notin \mathbb{N} \text{ oder } m = 0 \end{cases}$$

partiell rekursiv ist. Dafür dürfen Sie alle (aus der Vorlesung und den Übungen inklusive dieses Übungsblattes) bekannten primitiv rekursiven Funktionen direkt verwenden. Dass deren Komposition selbst primitiv rekursiv ist, müssen Sie jedoch mit dem Normalschema zeigen.

Aufgabe 2 (Gödelisierung von Typ-1-Grammatiken) 8P

- (a) Geben Sie zu folgendem Gödelwort einer Typ-1-Grammatik die passende Grammatik G an:

$$\begin{aligned} &ba^5bba^3bba^5bba^6bba^4bba^5bba^3bba^2bba^2bba^5bba^4bba^5bba^3bba^2bba^2bba^4b \\ &ba^6bba^3bbabba^4bba^6bba^3bbabba^6b \end{aligned}$$

- (b) Ist die obige Gödelisierung von G in $L(G)$ enthalten?

Aufgabe 3 (Rekursive Aufzählbarkeit) 9P

Zeigen Sie den Satz aus der Vorlesung, dass RE abgeschlossen ist unter Vereinigung.

Aufgabe 4 (Typ-1-Wortproblem) 9P

Gegeben sei die kontextsensitive Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $N = \{S, A, B, C\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ &S \rightarrow SABC \mid ABC, \\ &BA \rightarrow AB, \quad CB \rightarrow BC, \quad CA \rightarrow AC, \\ &AA \rightarrow aa, \quad BB \rightarrow bb, \quad CC \rightarrow cc\}. \end{aligned}$$

Der Algorithmus aus der Vorlesung für das Typ-1-Wortproblem wird nun für G und das Wort $w_1 = aabbcc$ angewendet.

- (a) Geben Sie die Mengen T und T_1 jedem der ersten vier Schleifendurchläufe an.
- (b) Wie oft wird die Schleife durchlaufen und was ist dann die Ausgabe des Algorithmus?
- (c) Geben Sie $\chi_{L(G)}(w_1)$ an.