Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Lehrstuhl Softwaretechnik und Programmiersprachen
Prof. Dr. Michael Leuschel

21. Juli 2023

Klausur

Theoretische Informatik
Sommersemester 2023

Nachname: ________________________ Vorname: ________________________

Matrikelnummer: ________________________

Zugelassene Hilfsmittel: Skript, Übungsblätter, etc.
Dauer: 90 Minuten

Diese Klausur enthält 17 nummerierte Seiten. Prüfen Sie bitte zuerst, ob alle Seiten vorhanden sind. Mit Ihrer Unterschrift versichern Sie, eine vollständige Klausur erhalten zu haben.

Unterschrift: ____________________________

Schalten Sie bitte jegliche elektronischen Geräte aus

Diesen Teil bitte nicht ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punktzahl	17	6	10	11	9	13	8	6	80
Erreicht									

Aufgabe 1 [17 Punkte]

(a) [3 Punkte] Gegeben sei die Menge von Wörtern $A = \{ab, abc\}$ über dem Alphabet $\{a, b, c\}$. Geben Sie alle Wörter der Länge höchstens 6 aus A^* an.

(b) [3 Punkte] Gibt es eine reguläre Sprache L über $\{a, b, c\}$, so dass $\forall i \geq 0 \Rightarrow a^i b^i c^i \in L$? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(c) [2 Punkte] Finden Sie den Fehler in folgender Argumentation und begründen Sie, warum diese fehlerhaft ist:
$A = \{a^n \mid n \geq 1\}$ ist regulär, genauso $B = \{b^n \mid n \geq 1\}$.
Mit den Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen gilt nun, dass die Konkatenation AB ebenfalls regulär ist, also gilt $\{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in REG$.

(d) [2 Punkte] Wie können Sie zeigen, dass eine Sprache nicht kontextfrei ist? Nennen Sie zwei Möglichkeiten.

(e) [4 Punkte] Welche der folgenden Mengen sind *entscheidbar*? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

1. Die Menge der Turing-Maschinen, die die Eingabe 1101 akzeptieren.
2. Die Menge der Turing-Maschinen, die das erste Eingabefeld des Bandes bei Eingabe 1101 nie verlassen.

(f) [3 Punkte] Man kann zu beliebigen LOOP-Programmen P eine Gödelnummer i_P finden. Gibt es ein LOOP-Programm P', das für alle Programme P

$$f(i_P, x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } P(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ terminiert;} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet?
Falls ja, geben Sie P' an.
Falls nein, begründen Sie.

Aufgabe 2 [6 Punkte]

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{a, -\}, \{S\}, S, P)$ mit

$$P = \{S \to S - S \mid a\}.$$

Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist.

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Gegeben sei $\Sigma = \{0, 1\}$ mit $L = \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge |w|_0 \text{ ist ungerade } \wedge |w|_1 \text{ ist ungerade}\}$. Hierbei steht $|w|_0$ für die Anzahl der 0en im Wort w, $|w|_1$ steht für die Anzahl der 1en im Wort w.

(a) [8 Punkte] Geben Sie einen DFA M als Zustandsgraph an, so dass $L(M) = L$ gilt.

(b) [2 Punkte] Welche anderen Automatenmodelle könnte man nutzen, um L zu akzeptieren? Geben Sie eine kurze Begründung an.

Aufgabe 4 [11 Punkte]

Gegeben sei die Sprache $L = \{a^{n+2}b \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$.

(a) [7 Punkte] Geben Sie alle Äquivalenzklassen der zu L zugehörigen Myhill-Nerode-Relation an. Geben Sie pro Klasse alle darin enthaltenen Wörter (oder alternativ bei unendlichen Mengen mindestens drei Beispiele) an.

(b) [4 Punkte] Welche der Äquivalenzklassen entsprechen Start- bzw. Endzuständen im zugehörigen Minimalautomaten? Geben Sie pro Start- bzw. Endzustand einen kurzen Satz als Begründung an.

Aufgabe 5 [9 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass $L = \{(ab)^n c^{2n} \mid n > 0\}$ nicht regulär ist.

Sie können dafür folgenden Ansatz vervollständigen (achten Sie dabei bitte auf die Benennung der Variablen):

Angenommen, L sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| > 0$
3. $(\forall i \in \mathbb{N})\ [uv^i w \in L]$

Aufgabe 6 [13 Punkte]

Gegeben sei eine teilweise ausgefüllte Tabelle, die durch den CYK-Algorithmus bei Eingabe einer Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ in CNF und dem Wort *caabcabbac* entstanden ist:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	??									
8		??								
7										
6										
5	??				??					
4										
3										
2		S				F				
1			A			A				
0	B, E	C	C	D	B, E	C	D	D	C	B, E
j	c	a	a	b	c	a	b	b	a	c

Einige Einträge, die mit ?? markiert sind, wurden versehentlich gelöscht. Dadurch ist uns der Inhalt dieser Zellen nicht mehr bekannt.

(a) [2 Punkte] Von welchen Elementen der Tabelle wissen Sie, dass sie in Σ bzw. N enthalten sind? Geben Sie die jeweiligen Elemente explizit an.

(b) [4 Punkte] Geben Sie alle diejenigen Regeln an, die anhand der oben stehenden Tabelle auf jeden Fall in P enthalten sind.

(c) [2 Punkte] Welches Wort liegt garantiert in $L(G)$?

(d) [5 Punkte] Warum gilt $caabcabbac \notin L(G)$?

Aufgabe 7 [8 Punkte]

Gegeben sei die Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \Box, \{z_F\})$ mit $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{0, 1, \Box, A\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_F\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
0	(z_1, A, R)	$(z_1, 0, R)$	(z_3, A, L)	$(z_3, 0, L)$
1	(z_1, A, R)	$(z_1, 1, R)$		$(z_3, 1, L)$
A	(z_F, A, N)	(z_2, A, L)		(z_0, A, R)
$\Box$		$(z_2, \Box, L)$		

(a) [4 Punkte] Geben Sie die Konfigurationenfolgen für die Eingabe $x = 1000$ an.

(b) [4 Punkte] Geben Sie die Sprache $L(M)$ als Menge von Wörtern an.

Aufgabe 8 [6 Punkte]

Zeigen Sie über die Normalschemata für primitiv rekursive Funktionen, dass die Funktion

$$mod2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, mod2(n) = n \bmod 2$$

primitiv rekursiv ist.

Geben Sie die beteiligten Funktionen explizit an.