Korrektur (JW):
- A1: 6/10
- A2: 2/10
- A3: 7/10
- A4: 2/10

Gesamt: 17/40

Institut für Informatik
M. Mutz

Übungsblatt 6

Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 20.05.2024 bis 26.05.2024, 16:00 Uhr
Besprechung: 27.05.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (CYK-Algorithmus I) 10 Punkte
Gegeben sei die Grammatik $G' = (\Sigma, N', S, P')$ mit $N' = \{S, A, B, C, D_1, D_2, X_0, X_1\}$ und

$$
\begin{aligned}
P' = \{S &\to X_0C \mid X_0X_0,\\
C &\to X_0A,\\
A &\to X_1D_1 \mid X_1D_2 \mid X_0B \mid 0,\\
D_1 &\to AD_2,\\
D_2 &\to X_1X_1,\\
B &\to X_0B \mid 0,\\
X_0 &\to 0,\\
X_1 &\to 1\}.
\end{aligned}
$$

a) Entscheiden Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK-Algorithmus), ob die Wörter

   i) $w_1 = 0011$ und
   ii) $w_2 = 001011$

   in $L(G')$ liegen. Geben Sie die Tabelle bzw. Dreiecksmatrix dabei jeweils vollständig an. *Bitte beachten Sie, dass Ihre Grammatik in CNF sein muss, damit Sie den CYK-Algorithmus anwenden können.*

b) Geben Sie $L(G')$ formal als Menge von Wörtern an. Die Angabe soll als in sich abgeschlossener Mengenausdruck geschehen. Referenzieren Sie keine weiteren Konstrukte wie die Grammatik G', Teile von G', wie die Produktionsregeln P', einen regulären Ausdruck, einen Automaten, oder eine andere Grammatik. Die Ausnahme hier stellt Σ dar, welches Sie referenzieren dürfen. Lösungen wie $L(G') = \{w | w \in L(...)\}$ führen zu 0 Punkten.

Raphael Kaya

Aufgabe 1:

a)

vgl. Musterlösung

(3 P)

3	D1 fehlt			
2	~~D1~~ f	D1		
1	S,B,C,A		D2	
0	X0,A,B	X0,A,B	X1	X1 ✓
	0	0	1	1 ✓

⇒ wir kommen nur bis D1 als Startsymbol, deshalb liegt Wort nicht in Sprache ✓ ok

b)

vgl. Musterlösung

6	S ✓					
5	~~D1~~	C				
4			A			
3	~~C, A, B~~			D1		
2	S,A,B,C				D2	
1	A,B,X0	A,B,X0	X1	A,B,X0	X1	X1
0	0	0	1	0	1	1

$$
\begin{aligned}
P' = \{ & S \to X_0C \mid X_0X_0, \\
& C \to X_0A, \\
& A \to X_1D_1 \mid X_1D_2 \mid X_0B \mid 0, \\
& D_1 \to AD_2, \\
& D_2 \to X_1X_1, \\
& B \to X_0B \mid 0, \\
& X_0 \to 0, \\
& X_1 \to 1\}.
\end{aligned}
$$

⇒ Wort liegt in Sprache des ~~Kellerautomats~~, da mit dem CYK-Algorithmus auf das Startsymbol zurückgeführt werden kann ✓

(3 P)

b) fehlt (0 P)

Aufgabe 2:

G' = (Σ, N', S, P') N' = {S, A, B, X, Y, Z}

P' = { A → AX | a ✓ Y → c | BZ | AZ
X → AX Z → YY | BY
S → XZ B → b }

(2 P)

Schau mal in die Lösung!

X → AB wäre richtig!

↳ Wie kommt das S in Zeile 1, Spalte 5 zustande?

↳ Wenn S → XZ, dann müsste in Zeile 3 Spalte 2 ein S stehen

Aufgabe 2 (CYK-Algorithmus II) 10 Punkte
Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die folgende Tabelle, welche mit dem CYK-Algorithmus für das Wort $w = aabbcc$ erstellt wurde. Aus dem Ergebnis kann gefolgert werden, dass w in der Sprache liegt, welche die zugrundeliegende Grammatik erzeugt.

i	1	2	3	4	5	6
5	S, Z					
4	Y	Y				
3	X		Z, S			
2	A		Y	Y		
1		X		Z	Z, S	
0	A	A	B	B	Y	Y
j	a	a	b	b	c	c

A → AX | a
X → AX
S → XZ
Y → c | BZ
Z → YY | BY
B → b |

Geben Sie eine mögliche Grammatik G an, welche diese Tabelle erzeugen kann.

Aufgabe 3 (Kellerautomat I)10P
Der Kellerautomat $M = (\{a, b\}, \{\#, A, B\}, \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}, \delta, z_0, \#)$ verfügt über die folgenden Regeln um δ zu definieren:

$$\begin{array}{rrr} z_0 a\# \to z_1 AA\# & z_1 bA \to z_1 \lambda & z_2 \lambda\# \to z_0\# \\ z_0 b\# \to z_2 B\# & z_1 \lambda\# \to z_0\# & z_3 \lambda B \to z_2 \lambda \\ z_0 \lambda\# \to z_4 \lambda & z_2 aB \to z_3 \lambda & z_3 \lambda\# \to z_1 A\# \\ z_1 aA \to z_1 AAA & z_2 bB \to z_2 BB & \end{array}$$

a) Liegt das Wort $bababb$ in der Sprache des Kellerautomaten $L(M)$? Verwenden Sie in Ihrer Argumentation die entsprechende(n) Konfigurationsfolge(n).

b) Geben Sie jeweils die Inhalte des Kellers an, nachdem M die folgenden Zeichenketten gelesen hat:

   i) $b^3ab^4a^3$

   ii) a^2b^3

c) Beschreiben Sie die Sprache $L(M)$ möglichst formal. Die Angabe soll als in sich abgeschlossener Mengenausdruck geschehen. Referenzieren Sie keine weiteren Konstrukte wie den Kellerautomaten M, Teile von M, wie die Überführungsfunktion δ, die Relation von Konfigurationenfolgen, einen regulären Ausdruck, eine Grammatik, oder einen anderen Automaten. Die Ausnahme hier stellt $\Sigma = \{a, b\}$ dar, welches Sie referenzieren dürfen. Lösungen wie $L(M) = \{w | w \in L(...)\}$ führen zu 0 Punkten.

d) Zeigen Sie, dass die Überführungsfunktion δ von M nicht deterministisch ist.

Aufgabe 3:

a) $(z_0, bababb, \#) \vdash_M (z_2, ababb, B\#) \vdash_M (z_3, babb, \#) \vdash_M (z_1, babb, A\#) \vdash_M (z_1, abb, \#) \vdash_M (z_0, abb, \#) \vdash_M (z_1, bb, AA\#)$

$\vdash_M (z_1, b, A\#) \vdash_M (z_1, \lambda, \#) \vdash_M (z_0, \lambda, \#) \vdash_M (z_4, \lambda, \lambda)$ ⇒ Das Wort liegt in der Sprache des Kellerautomats

✓ Gut! (2 P)

$z_0 a\# \to z_1 AA\#$	$z_1 aA \to z_1 AAA$	$z_2 aB \to z_3 \lambda$	$z_3 \lambda B \to z_2 \lambda$
$z_0 b\# \to z_2 B\#$	$z_1 bA \to z_1 \lambda$	$z_2 bB \to z_2 BB$	$z_3 \lambda \# \to z_1 A\#$
$z_0 \lambda\# \to z_4 \lambda$	$z_1 \lambda \# \to z_0 \#$	$z_2 \lambda \# \to z_0 \#$	

b) i) $b^3ab^4a^3$ ⇒ Keller: $\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline \# \\ \hline\end{array}$

(2 P)

$z_0, \; b^3ab^4a^3, \; \#$
$z_2, \; b^2ab^4a^3, \; B\#$
$z_2, \; bab^4a^3, \; BB\#$
$z_2, \; ab^4a^3, \; BBB\#$
$z_3, \; b^4a^3, \; BB\#$
$z_2, \; b^4a^3, \; B\#$
$z_2, \; b^3a^3, \; BB\#$
$z_2, \; b^2a^3, \; BBB\#$
$z_2, \; ba^3, \; BBBB\#$
$z_2, \; a^3, \; BBBBB\#$
$z_3, \; aa, \; BBBB\#$
$z_2, \; aa, \; BBB\#$
$z_3, \; a, \; BB\#$
$z_2, \; a, \; B\#$
$z_3, \; \lambda, \; \#$
$z_1, \; \lambda, \; A\#$ ✓

ii) a^2b^3 ⇒ Keller: $\begin{array}{|c|}\hline A \\ \hline \# \\ \hline\end{array}$

$z_0, \; a^2b^3, \; \#$
$z_1, \; ab^3, \; AA\#$
$z_1, \; b^3, \; AAAA\#$
$z_1, \; b^2, \; AAA\#$
$z_1, \; b, \; AA\#$
$z_1, \; \lambda, \; A\#$

✓ (2 P)

c) Für die Zustände $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 \in Z$, Symbole $a, b \in \Sigma$, und Kellersymbole $A, B, \# \in \Gamma$ ist

$(\Sigma, ab, \{z\}, \delta, z, S$

(0 P), vgl. Musterlösung

d) Wir haben die Übergänge: $\delta(z_0, \lambda, \#) = (z_4, \lambda)$

$\boxed{\delta(z_0, \lambda, \#) = (z_0, \#)}$ → das ist kein Übergang?

(1 P)

⇒ Demnach gibt es zwei mögliche Übergänge, wodurch die Überführungsfunktion nicht (✓) deterministisch ist

Aufgabe 4 (Abschlusseigenschaften)10P

(a) Betrachten Sie eine Sprache L und einen DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit totaler Überführungsfunktion δ und mit $L = L(M)$.
Geben Sie einen DFA M' mit $\overline{L} = L(M')$ als Tupel an, um zu zeigen, dass die Klasse der regulären Sprachen unter Komplement abgeschlossen ist.
Hinweis: Ihr DFA M' soll nicht konkret angegeben werden, sondern muss aus jedem beliebigen Automaten M, wie er in der Aufgabenstellung angegeben ist, konstruierbar sein.

(b) Zeigen Sie nur mit Hilfe von Abschlusseigenschaften für kontextfreie Sprachen und Satz 3.36 folgende Behauptungen. Sie dürfen Sprachen, die von regulären Ausdrücken erzeugt werden, direkt als regulär verwenden. Aus der Vorlesung bekannte Sprachen dürfen wieder direkt verwendet werden (z.B. bewiesene Behauptungen aus dem Skript zu spezifischen Sprachen sind also auch erlaubt zu nutzen).

$$L_1 = \{a^i b^{i+j} a^j \mid i, j \geq 0\} \in CF \text{ mit } L_1 \subseteq \{a, b\}^*$$
$$L_2 = \{a^n b^m c^{max(n,m)} \mid n, m \geq 0\} \notin REG \text{ mit } L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$$

Aufgabe 4:

a) Wir suchen nach einem DFA, welcher die Komplemente vom $\mathcal{M}$ akzeptiert.

Dafür definieren wir $\mathcal{M}'$ wie folgt: $\mathcal{M}' = (Z, \Sigma, \delta, z_0, Z \setminus F)$.

Ok (2P)

(Spiegelung und umbenennung)

b) 1. Wir haben bereits in der VL gezeigt, dass $L = \{ a^i b^i c^j \mid \forall i,j \geq 0 \}$ kontextfrei ist.

Dasselbe gilt für $L = \{ a^i b^j c^j \mid \forall i,j \geq 0 \}$ (siehe Behauptung 3.20)

↳ Behauptung 3.20: $L = \{ a^m b^m c^m \mid m \geq 1 \} \notin CF$?

Nun bilden wir die Vereinigung beider, wodurch $L_1 = \{ a^i b^{i+j} c^j \mid \forall i,j \geq 0 \}$ entsteht. Nach den Abschlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen ist L_1 auch kontextfrei.

(0 P)

Das ist nicht die Vereinigung der angegebenen Mengen!

2. $L = \{ a^n b^m c^{max(n,m)} \mid n,m \geq 0 \} \notin REG$

mit was für n, m? Bitte immer Menge richtig angeben

Sei $a^n b^m c^{max(n,m)}$ reg. und $a^n b^m c^n$ kontextfrei (nach VL).

hier kommt eine Menge raus!

$\{a^n b^m c^n\} \cap \{a^n b^m c^{max(n,m)}\} =$ $a^n b^m c^n$ falls n max → das wäre kontextfrei

$a^n b^m c^{m-n}$ falls m max → das ist nach VL nicht kontextfrei, wodurch ein Widerspruch vorliegt.

Demnach gilt $L_2 = \{ a^n b^m c^{max(n,m)} \mid n,m \geq 0 \} \notin$ reg., da wir nicht sagen können, dass $n > m$ immer zutrifft. [nach VL reicht diese Argumentation]

Der Beweis funktioniert so nicht, siehe Musterlösung. (0 P)