Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Institut für Informatik
Jun.-Prof. Dr. D. Baumeister

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: O2, Raum: 38
Tel.: +49 211 8111634
E-Mail: d.baumeister@uni-duesseldorf.de
19. August 2021

Vorlesung im Sommersemester 2021

Theoretische Informatik

Hauptklausurtermin: 19. August 2021

**BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN!
TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN, VORNAMEN
UND IHRE MATRIKELNUMMER SOWIE ZUSÄTZLICH AUF DEM
DECKBLATT STUDIENFACH MIT SEMESTER UND ANZAHL DER
ABGEGEBENEN BLÄTTER EIN, UND UNTERSCHREIBEN SIE
ALS STUDIERENDE DER INFORMATIK, DASS SIE ANGEMELDET SIND!**

Name, Vorname:

Studienfach, Semester:

Matrikelnummer:

Anzahl der abgegebenen Blätter: 7 Aufgabenblätter + ☐

(Nur für Studierende der Informatik) Hiermit bestätige ich, dass ich mich im Studierendenportal oder beim akademischen Prüfungsamt für diese Klausur angemeldet habe:

____
Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	12	22	16	15	15	100
erreichte Punktzahl							

<u>Erlaubte Hilfsmittel</u>:

- Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter.

<u>Nicht erlaubte Hilfsmittel</u>:

- Elektronische Geräte aller Art.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe 1 (20 Punkte) Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja“ oder „Nein“ an.

/20 Punkte

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja“ oder „Nein“* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja“ noch „Nein“ oder sowohl „Ja“ als auch „Nein“ angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Sprache ist kontextfrei.
☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache über einem endlichen Alphabet ist regulär.
☐ Ja ☐ Nein Die Iteration einer Sprache mit endlich vielen Wörtern ist endlich.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Es gibt eine kontextfreie Sprache, die die Bedingungen des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen nicht erfüllt.
☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache, die von einem NFA akzeptiert wird, kann auch von einem PDA akzeptiert werden.
☐ Ja ☐ Nein Jede deterministisch kontextfreie Sprache ist kontextfrei.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Die kontextsensitiven Sprachen sind unter Konkatenation abgeschlossen.
☐ Ja ☐ Nein Die Bänder einer Turingmaschine haben endlich viele Felder.
☐ Ja ☐ Nein Jede Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird, ist kontextsensitiv.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Für jede partielle Funktion $f : A \to B$ gilt $A \neq D_f$.
☐ Ja ☐ Nein Jedes LOOP-Programm ist ein WHILE-Programm.
☐ Ja ☐ Nein Die Ackermannfunktion ist nicht berechenbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

☐ Ja ☐ Nein Jede semi-entscheidbare Menge ist entscheidbar.
☐ Ja ☐ Nein Wenn A entscheidbar ist, dann ist auch $\overline{A}$ entscheidbar.
☐ Ja ☐ Nein Sei A ein NP-vollständiges Problem. Dann gilt $B \leq_m^p A$ für alle $B \in \mathrm{NP}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte) *Reguläre Sprachen* **/12 Punkte**

Betrachten Sie die folgende Anwendung des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen für

$$L = \{bz \mid z \in \Sigma^*, |z|_a = 2 \cdot |z|_b\} \text{ mit } \Sigma = \{a, b\},$$

wobei $|z|_c$ mit $c \in \Sigma$ die Anzahl der Vorkommen des Zeichens c in z angibt. Vervollständigen Sie die Lücken im folgenden Lückentext so, dass ein Beweis entsteht, welcher zeigt, dass L nicht regulär ist.

Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass L regulär sei. Nach dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen gibt es dann eine Zahl $n \geq 1$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$, eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit

(1) $|uv| \leq n$,

(2) $|v| \geq 1$,

(3) für alle $i \geq 0$ gilt $uv^iw \in L$.

Für den Widerspruch zeigen wir, dass ein $x \in L$ mit $|x| \geq n$ existiert, so dass für alle Zerlegungen $x = uvw$ mit (1) und (2) nicht (3) gilt.

Wähle $x = b\, a^{\boxed{}}\, b^{\boxed{}} \in L$.

Es gilt $|x| = \boxed{} \geq n$.

Durch (1) und (2) können wir zwischen zwei Fällen unterscheiden.

Fall 1: $v = ba^q$ mit $\boxed{} \leq q \leq \boxed{}$.

Dann gilt, dass $u = \boxed{}$.

Für $i = \boxed{}$ gilt, ____

____

Fall 2: $v = a^q$ mit $\boxed{} \leq q \leq \boxed{}$.

Für $i = \boxed{}$ gilt, ____

____

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass L regulär ist. Somit ist L nicht regulär. □

Aufgabe 3 (22 Punkte) *Äquivalenzklassen und Minimalautomaten* **/22 Punkte**

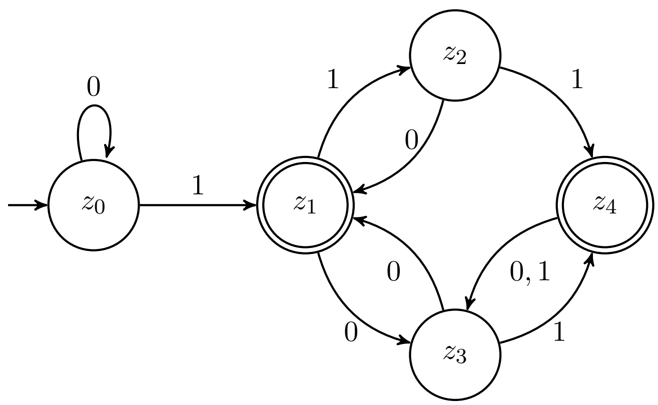
(a) Gegeben seien die folgenden Sprachen L_1, L_2 und L_3 . Geben Sie jeweils alle paarweise verschiedenen Myhill-Nerode Äquivalenzklassen explizit in der Form [*Repräsentant*] an. Hierbei müssen Sie nicht begründen, dass die von Ihnen angegeben Äquivalenzklassen tatsächlich paarweise verschieden sind.

i) $L_1 = \{0^n \mid n \text{ ist ungerade}\} \subseteq \{0\}^*$

ii) $L_2 = \{0^n \mid n \text{ ist ungerade}\} \subseteq \{0,1\}^*$

iii) $L_3 = \{000, 111\} \subseteq \{0,1\}^*$

(b) Gegeben sei der folgende Zustandsgraph des DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit $\Sigma = \{0,1\}$:



i) Geben Sie Z, F und δ explizit an.

ii) Bestimmen Sie mit Mitteln aus der Vorlesung – unter Angabe der Tabelle mit Markierungen – einen zu M äquivalenten Minimalautomaten M' und geben Sie M' in einer geeigneten Form an.

iii) Geben Sie die Sprache $L(M)$ formal an.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Leerseite zur Bearbeitung von Aufgabe 3

Aufgabe 4 (16 Punkte) *Kontextfreie Sprachen* **/16 Punkte**

a) Geben Sie einen PDA M an mit $L(M) = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \wedge (n = 3m \vee 3n = m)\} \subseteq \{a, b\}^*$.

b) Gibt es auch einen DPDA M' mit $L(M') = L(M)$? Wenn ja, geben Sie M' an. Wenn nein, begründen Sie intuitiv, warum ein solcher M' nicht existieren kann.

c) Die folgende Tabelle wurde durch Anwendung des CYK-Algorithmus auf eine Grammatik G, deren Startsymbol S ist, erzeugt. Die Tabelle zeigt, dass $w = abbba$ in $L(G)$ liegt.

S				
	A, S			
D	A, D	D		
D	C, D	C, D	S, C	
A	B, C	B, C	B, C	A
a	b	b	b	a

Für welche echten Teilwörter von $abbba$ kann man aus der CYK-Tabelle direkt ablesen, dass sie ebenfalls in $L(G)$ enthalten sind?

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 5 (15 Punkte) *Turingmaschinen* **/15 Punkte**

Sei $M = (\{a,b,c\}, \{a,b,c,\$,\Box\}, \{z_0,z_1,z_2,z_3,z_4,z_e\}, \delta, z_0, \Box, \{z_e\})$ eine Turingmaschine mit folgender Überführungsfunktion:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
a	$(z_1,\$,R)$	$(z_2,\$,R)$	(z_2,a,R)		(z_4,a,L)
b	$(z_1,\$,R)$	$(z_2,\$,R)$	(z_2,b,R)		(z_4,b,L)
c			(z_2,c,R)	$(z_4,\Box,L)$	(z_4,c,L)
$\$$	$(z_0,\$,R)$				$(z_4,\$,L)$
$\Box$	$(z_e,\Box,N)$		$(z_3,\Box,L)$		$(z_0,\Box,R)$

a) Geben Sie die Konfigurationenfolgen von M bei Eingabe von

   i) $w_1 = abc$

   ii) $w_2 = ac$

   an.

b) Geben Sie eine möglichst präzise mathematische Beschreibung für die Sprache $L(M)$ an.

c) Betrachten Sie nun die Turingmaschine $M' = (\{a,b,c\}, \{a,b,c,\$,\Box\}, \{z_0,z_1,z_2,z_4,z_e\}, \delta', z_0, \Box, \{z_e\})$, mit δ' wie folgt:
   δ' wurde gegenüber δ lediglich in z_2 geändert (und z_3 ist weggefallen):

δ'	z_0	z_1	z_2	z_4
a	$(z_1,\$,R)$	$(z_2,\$,R)$	(z_2,a,R)	(z_4,a,L)
b	$(z_1,\$,R)$	$(z_2,\$,R)$	(z_2,b,R)	(z_4,b,L)
c			$(z_4,\$,L)$	(z_4,c,L)
$\$$	$(z_0,\$,R)$		$(z_2,\$,R)$	$(z_4,\$,L)$
$\Box$	$(z_e,\Box,N)$			$(z_0,\Box,R)$

   i) Beschreiben Sie kurz, wie sich die Funktionsweise von M' von der von M unterscheidet.

   ii) Geben Sie ein Wort w an, das $L(M) \neq L(M')$ zeigt.
   Hierbei brauchen Sie die Konfigurationenfolgen nicht angeben, die $w \in L$ bzw. $w \notin L$ zeigen.
   Es reicht aus, wenn Sie sich diese zur Beantwortung der Aufgabe überlegen.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Aufgabe 6 (15 Punkte) *Entscheidbarkeit* **/15 Punkte**

Sei Σ ein Alphabet. Betrachten Sie die folgende Variante des modifizierten Postschen Korrespondenzproblems.

$$\text{MPCP}'_\Sigma = \left\{ ((x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)) \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \text{ und } x_i, y_i \in \Sigma^+ \text{ für } 1 \leq i \leq k \\ \text{und es gibt } i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, k\} \\ \text{so dass } x_k x_{i_2} \cdots x_{i_n} = y_k y_{i_2} \cdots y_{i_n} \end{array} \right\}$$

Sei $\text{MPCP}' = \bigcup_{\Sigma \text{ ist ein Alphabet}} \text{MPCP}'_\Sigma$.

- **(a)** Beschreiben Sie informell den Unterschied zwischen MPCP und MPCP'.
- **(b)** Sei $((1,0), (000,0), (0,011))$ eine Probleminstanz von MPCP' über dem Alphabet $\{0,1\}$. Ist $(3,1,1,2)$ eine Lösung von MPCP' für die Probleminstanz? Begründen Sie Ihre Antwort.
- **(c)** Zeigen Sie, dass MPCP' unentscheidbar ist, indem Sie von MPCP_Σ auf MPCP'_Σ reduzieren und die Korrektheit Ihrer Reduktion beweisen.

(Bitte geben Sie alle Zwischenschritte der Rechnungen in allen Teilaufgaben an!)

Leerseite zur Bearbeitung von Aufgabe 6

Die Aufgabenblätter bitte mit ausgefüllten Kopfzeilen abgeben.
VIEL SPASS – VIEL GLÜCK – VIEL ERFOLG