Übungsblatt 11: Raphael Kaya

Aufgabe 1:

a) $eq(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } x=y \\ \text{undefiniert} & , \text{sonst} \end{cases}$

⇒ Vergleichsfunktion, demnach gilt:

$\mu eq(0) = 0$
$\mu eq(1) = 1$
$\mu eq(2) = 2$
⋮

⇒ Es ergibt sich $\mu eq(z) = z$, die Fkt. μeq ist partiell rekursiv, da nicht überall def.

b) $lt(x,y) = \begin{cases} x & , \text{falls } x<y \\ y & , \text{falls } x>y \\ \text{undef.} & , \text{falls } x=y \end{cases}$ ⇒ $\mu lt(0) = 1$, $\mu lt(1) = 0$, $\mu lt(2) = 0$

$gt(x,y) = \begin{cases} y & , \text{falls } x<y \\ x & , \text{falls } x>y \\ \text{undef.} & , \text{falls } x=y \end{cases}$ ⇒ $\mu gt(0) = \text{undef.}$, $\mu gt(1) = 0$, $\mu gt(2) = 0$

$\mu lt(x) = \begin{cases} 1 & , \text{falls } x=0 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$ $\mu gt(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ \text{undefiniert} & , x = 0 \end{cases}$

c) $l(m) = \begin{cases} \log_2(m) & , \text{falls } \log_2(m) \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert} & , \text{falls } \log_2(m) \notin \mathbb{N} \text{ oder } m=0 \end{cases}$

$\log_2(m) = \frac{\ln(m)}{\ln(2)}$ ⇒ $\ln(2) \neq 0$; $\ln(0) = \text{undefiniert}$

⇒ Im Skript wurde in 3.10 bewiesen, dass die ganzzahlige Divisionsfkt. partiell rekursiv ist

Damit $\log_2(m) = z$ $z \in \mathbb{N}$, muss $m = 2^k$ $k \in \mathbb{N}$. Demnach muss gelten:

$\log_2(m) \overset{m=2^k}{=} \log_2(2^k) = \frac{\ln(2^k)}{\ln(2)}$ ⇒ partiell rekursiv, da nicht für alle Werte definiert (wenn $m \notin \mathbb{N}$ bzw. $m \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$)
Für diese Werte könnte eine Turingmaschine demnach nicht terminieren.

Aufgabe 2:

~~$ba^5bba^3bba^5bba^6bba^4bba^5bba^3bba^2bba^2bba^5bba^4bba^5bba^3bba^2bba^2bba^4b$~~
~~$ba^6bba^3bbabba^4bba^6bba^3bbabba^6b$~~

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= \lambda \\ \varphi(a) &= bab \\ \varphi(b) &= ba^2b\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\varphi(\rightarrow) &= ba^3b \\ \varphi(\#) &= ba^4b \\ \varphi(X\underbrace{||\cdots|}_{i\text{-mal}}) &= ba^{5+i}b.\end{aligned}$$

a) $x_0 \rightarrow x_0x_n \# x_0 \rightarrow bbx_0 \# x_0 \rightarrow bb\# x_n \rightarrow a \# x_n \rightarrow a x_n$

$G = (\Sigma, N, S, P)$

$P = \{ x_0 \rightarrow x_0x_n \mid bbx_0 \mid bb \,,$
$x_n \rightarrow a \mid ax_n \}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$N = \{x_0, x_n\}$

$S = \{x_0\}$

b) Ja, da $L(G)$ eine Typ-1 Sprache ist und gilt: $p \rightarrow q$, mit $|p| \leq |q|$

Aufgabe 3:

Sei A und B rekursiv abzählbare Mengen.

Demnach gilt $A = \omega_f$ oder $A = \emptyset$ und $B = \omega_g$ oder $B = \emptyset$

1. Fall: $A = B = \emptyset$

Die Vereinigung über die leere Menge ist auch die leere Menge und damit auch rekursiv abzählbar.

2. Fall: $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

Die Vereinigung einer Menge $A = \omega_f$ mit $B = \emptyset$ (äquivalent umgekehrt) ist: $A \cup B = \omega_f$, demnach auch rekursiv abzählbar.

3. Fall: Keine Menge ist leer

Sei $h(x) = f(x) \cup g(x) \Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, wenn } f(x) \text{ definiert} \\ g(x) & \text{, wenn } f(x) \text{ nicht definiert, } g(x) \text{ definiert} \end{cases}$

Demnach gilt $A \cup B = \omega_h$, wodurch auch die Vereinigung zweier rekursiv abzählbarer Mengen, rekursiv abzählbar ist.

Aufgabe 4:

a)

Schritt	T	T_n
0	{S}	∅
1	{S, SABC, ABC}	{S}
2	{S, SABCABC, ABC, SABC}	{S, SABC, ABC}
3	{S, SABCABC, ABC, S, SABCABCABC, SABACBC}	{S, SABCABC, ABC, SABC}
4	{S, SABCABC, ABC, S, SABCABCABC, SABACBC, SABCABCABCABC, SAABCBC, SABACBCABC, SABCABACBC}	{S, SABCABC, ABC, S, SABCABCABC, SABACBC}

b) Der Algorithmus läuft unendlich lange durch, da die Regel S → SABC für immer mehr Erweiterungen sorgt. Sollte jedoch das Wort ω_n = aabbcc dann enthalten sein, so wird dieses ausgegeben.

c) $\chi_L(\omega_n) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \omega \in L(G) \\ 0, & \text{wenn } \omega \notin L(G) \end{cases}$