Theoretische Informatik

Theoretische Informatik: Formale Sprachen und Automaten, Berechenbarkeit und NP-Vollständigkeit

Sommersemester 2024

Dozentin: Mareike Mutz

im Wechsel mit

Prof. Dr. M. Leuschel

Prof. Dr. J. Rothe

Was ist ein korrektes Computerprogramm ?

```
#! /usr/bin/python
def Fib(x):
    if x<2:
        return 1
    else:
        return Fib(x-1)+Fib(x-2)
i = int(raw_input())
print "Fibonacci",i, "=", Fib(i)
```

Was ist ein korrektes Computerprogramm?

```
public static int fib(int n) {
  if (n == 0) {
    return 0;
  } else if (n == 1) {
    return 1;
  } else {
    return fib(n - 1) + fib(n - 2);
  }
}
```

Was ist ein korrekte SVG Datei?

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"
 standalone="no"?>
<svg xmlns="http://www.w3.org/2000/svg"
   width="900" height="400"
   viewBox="5 15 150 30" version="1.1">
   <polygon id = "train_polygon"
       points="0,0 100,0"
       transform="translate(10,16.8)" />
 </svg>
```

Andere Programme/Systeme

- Was ist ein korrekter Ablauf bei einem Zugsteuerungssystem?
- Bei einer Waschmaschine mit Aktionen: Open, Close, Lock, Unlock, StartWash, StopWash?
  - OK: Close, Lock, StartWash, StopWash, Unlock, Open
  - Nicht OK: Close, StartWash
  - Nicht OK: Close, Lock, StartWash, Unlock, Open

Alphabet, Wort und Sprache

Definition

- Ein *Alphabet* ist eine endliche, nichtleere Menge Σ von Buchstaben (oder Symbolen).
  Beispiele: $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$, $\Sigma_2 = \{0, 1\}$,
  $\Sigma_3 = \{Open, Close, Lock, Unlock, StartWash, StopWash\}$, oder
  $\Sigma_4 = 0..255$ *(der ASCII Zeichensatz)*.

- Ein *Wort über* Σ ist eine endliche Folge von Elementen aus Σ.
  Beispiel: $w_1 = aabc$ und $w_2 = caba$ sind Wörter über Σ_1;
  $w_3 = 1110$ und $w_4 = 0101$ sind Wörter über Σ_2.

Alphabet, Wort und Sprache

Definition

- Die *Länge eines Wortes w* (bezeichnet mit $|w|$) ist die Anzahl der Symbole in w.
  Beispiel: $|010| = 3$.

- Das *leere Wort* ist das eindeutig bestimmte Wort der Länge 0 und wird mit dem griechischen Buchstaben λ („Lambda“) bezeichnet.
  (Beachte: λ ist nicht als Symbol eines Alphabets erlaubt.)
  Es gilt $|\lambda| = 0$.

- Die *Menge aller Wörter über* Σ bezeichnen wir mit Σ^*.
  Beispiel: $\{0,1\}^* = \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, \ldots\}$.

Formale Definition von Σ^* ($\models$)

Eine Folge kann als eine Funktion angesehen werden, und eine Funktion als ein Spezialfall einer Relation.
Das Wort *ab* steht also für die Funktion die 1 auf *a* und 2 auf *b* abbildet.
Als Relation ergibt dies eine Menge mit zwei Paaren: $\{1 \mapsto a, 2 \mapsto b\}$.

$$\Sigma^* = \{x | \exists n.(n \in \mathbb{N} \wedge x \in 1..n \to \Sigma)\}$$

Wir haben

- $aabc \in \{x | \exists n.(n \in \mathbb{N} \wedge x \in 1..n \to \Sigma)\}$ für $n = 4$.
- $\lambda \in \{x | \exists n.(n \in \mathbb{N} \wedge x \in 1..n \to \Sigma)\}$ für $n = 0$

Alphabet, Wort und Sprache

Definition

- Eine *(formale) Sprache* (über Σ) ist eine jede Teilmenge von Σ^*.
  Beispiel: $L = \{00, 10\} \subseteq \Sigma^* = \{0, 1\}^*$.
- Die *leere Sprache* ist die Sprache, die keine Wörter enthält, und wird mit $\emptyset$ bezeichnet. (Beachte: $\emptyset \neq \{\lambda\}$.)
- Die *Kardinalität einer Sprache L* ist die Anzahl der Wörter von L und wird mit $\|L\|$ bezeichnet.
  Beispiel: $\|\{00, 10\}\| = 2$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

Seien A und B beliebige Sprachen über dem Alphabet Σ, d.h., $A, B \subseteq \Sigma^*$. Definiere

- die *Vereinigung von A und B* durch

$$A \cup B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \vee x \in B\};$$

Beispiel: $\{10, 1\} \cup \{1, 0\} = \{10, 1, 0\}$.

- den *Durchschnitt von A und B* durch

$$A \cap B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \wedge x \in B\};$$

Beispiel: $\{10, 1\} \cap \{1, 0\} = \{1\}$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

- die *Differenz von A und B* durch

$$A - B = \{x \in \Sigma^* \mid x \in A \wedge x \notin B\};$$

Beispiel: $\{10, 1\} - \{1, 0\} = \{10\}$.

- das *Komplement von A* durch

$$\overline{A} = \Sigma^* - A = \{x \in \Sigma^* \mid x \notin A\}.$$

Beispiel: $\overline{\{10, 1\}} = \{0, 1\}^* - \{10, 1\} = \{\lambda, 0, 00, 11, 01, 000, \ldots\}$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

- Die *Konkatenation (Verkettung) von Wörtern* $u, v \in \Sigma^*$ ist ein Wort $uv \in \Sigma^*$, das wie folgt definiert ist:
  - Ist $u = v = \lambda$, so ist $uv = vu = \lambda$.
  - Ist $v = \lambda$, so ist $uv = u$.
  - Ist $u = \lambda$, so ist $uv = v$.
  - Sind $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ und $v = v_1 v_2 \cdots v_m$ mit $u_i, v_i \in \Sigma$, so ist

$$uv = u_1 u_2 \cdots u_n v_1 v_2 \cdots v_m.$$

Beispiel: $u = 01$, $v = 10$, $uv = 0110$ und $vu = 1001$.

Konkatenation formal ($\models$)

Die Konkatenation vw zweier Wörter v und w kann formal definiert werden als

$$vw = v \cup \{j \mapsto b | \exists i.(i \mapsto b \in w \wedge j = i + |v|)\}$$

Für $v = caba$ und $w = aabc$ haben wir $vw = \{(1 \mapsto c), (2 \mapsto a), (3 \mapsto b), (4 \mapsto a), (5 \mapsto a), (6 \mapsto a), (7 \mapsto b), (8 \mapsto c)\}$, oder kompakt geschrieben als $cabaaabc$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

- Die *Konkatenation (Verkettung) von Sprachen A und B* (also von Mengen von Wörtern) ist die Sprache

$$AB = \{ab \mid a \in A \ \wedge \ b \in B\}.$$

Beispiel: $\{10, 1\}\{1, 0\} = \{101, 100, 11, 10\}$.

- Die *Iteration einer Sprache* $A \subseteq \Sigma^*$ (die *Kleene-Hülle von A*) ist die Sprache A^*, die induktiv definiert ist durch

$$A^0 = \{\lambda\}, \quad A^n = AA^{n-1}, \quad A^* = \bigcup_{n \geq 0} A^n.$$

Definiere die *λ-freie Iteration von A* durch $A^+ = \bigcup_{n \geq 1} A^n$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Beispiel:

$\{10,1\}^0 = \{\lambda\}$,

$\{10,1\}^1 = \{10,1\}$,

$\{10,1\}^2 = \{10,1\}\{10,1\} = \{1010,101,110,11\}$,

$\{10,1\}^3 = \{10,1\}\{10,1\}^2 = \{101010,\ldots\}$.

Es gilt: $A^+ \cup \{\lambda\} = A^*$.

Es gilt nicht: $A^+ = A^* - \{\lambda\}$. Warum nicht?

Diese Aussage ist falsch, wenn $\lambda \in A$, z.B. für A = $\{\lambda\}$:

$\{\lambda\}^+ = \{\lambda\}$, $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$, $A^* - \{\lambda\} = \emptyset$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

- Die *Spiegelbildoperation* für ein Wort $u = u_1 u_2 \cdots u_n \in \Sigma^*$ ist definiert durch

$$sp(u) = u_n \cdots u_2 u_1.$$

Beispiel: $sp(0100101) = 1010010$.

- Die *Spiegelung einer Sprache* $A \subseteq \Sigma^*$ ist definiert durch

$$sp(A) = \{sp(w) \mid w \in A\}.$$

Beispiel: $sp(\{100, 011\}) = \{001, 110\}$.

Operationen auf Wörtern und Sprachen

Definition

- Die *Teilwortrelation* auf Σ^* ist definiert durch

$$u \sqsubseteq v \iff (\exists v_1, v_2 \in \Sigma^*)\,[v_1 u v_2 = v].$$

Gilt $u \sqsubseteq v$, so bezeichnen wir u als ein *Teilwort* (einen *Infix*) von v.
Beispiel: 100 $\sqsubseteq$ 10100010.

- Die *Anfangswortrelation* auf Σ^* ist definiert durch

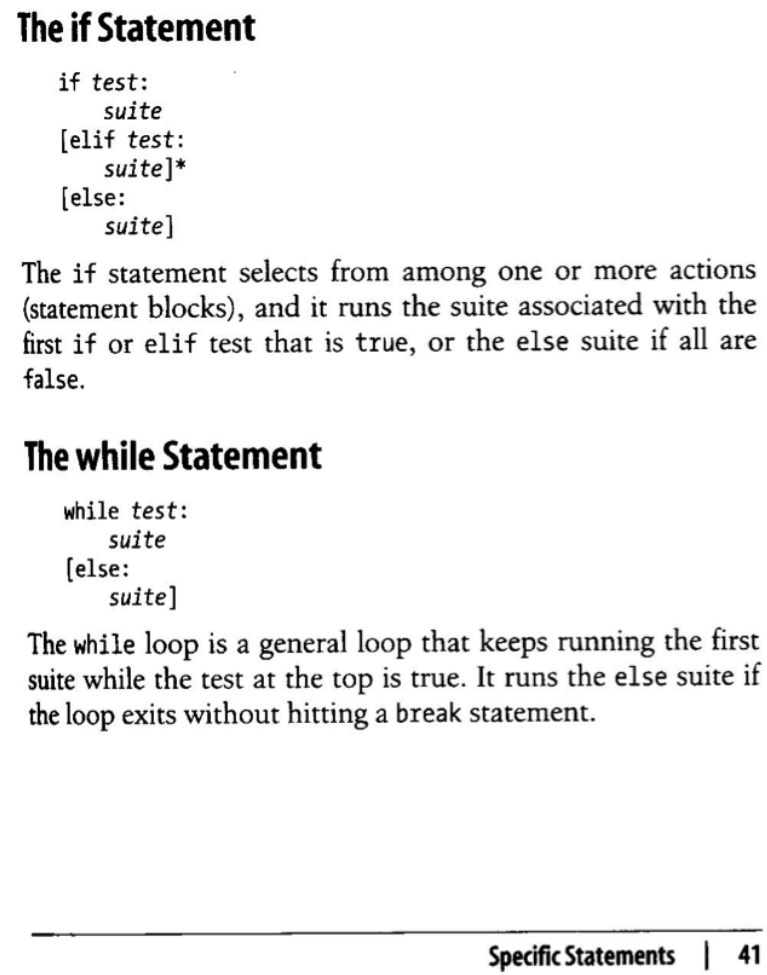
$$u \sqsubseteq_a v \iff (\exists w \in \Sigma^*)\,[uw = v].$$

Gilt $u \sqsubseteq_a v$, so bezeichnen wir u als ein *Anfangswort* (einen *Präfix*) von v.
Beispiel: 101 $\sqsubseteq_a$ 10100010.

Grammatik

- Sprachen die uns interessieren:
  - Alle korrekten Java, Python, C, ... Programme
  - Die Eingabe-Ausgabepaare die ein Computerprogramm generiert (siehe Fib.py)
  - Alle Tautologien oder erfüllbaren Formeln in Aussagenlogik, Prädikatenlogik,...
  - Alle Programme die korrekt sind: keine Typfehler, keine Laufzeitfehler, Terminierung
  - Alle Zeilen, Texte die ein gewisses Suchwort (oder kleine Abänderungen davon) beinhalten
  - Andere Gebiete: Genomsequenzen
- Wie beschreiben wir diese Sprachen ?

Beschreibung aus dem Handbuch - Python



The if Statement

```
if test:
    suite
[elif test:
    suite]*
[else:
    suite]
```

The `if` statement selects from among one or more actions (statement blocks), and it runs the suite associated with the first `if` or `elif` test that is `true`, or the `else` suite if all are `false`.

The while Statement

```
while test:
    suite
[else:
    suite]
```

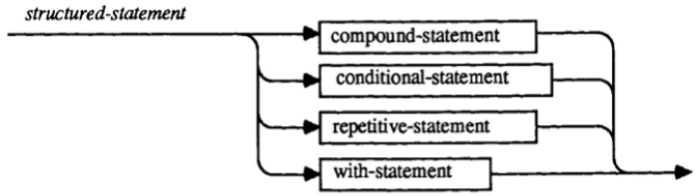
The `while` loop is a general loop that keeps running the first suite while the test at the top is true. It runs the `else` suite if the loop exits without hitting a `break` statement.

Abbildung: Quelle: O'Reilly. Python Pocket Reference.

Beschreibung aus dem Handbuch - Pascal

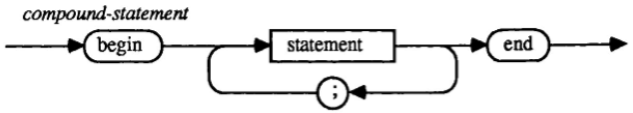
6.2 Structured-Statements

Structured-statements are made up of other statements that are to be executed either conditionally (conditional-statements), repeatedly (repetitive-statements), or in sequence (compound-statement or with-statement).



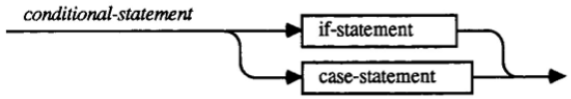
6.2.1 Compound-Statement

The compound-statement specifies the execution of its statement-sequence in its textual order.



6.2.2 Conditional-Statements

A conditional-statement selects one or none of its component statements for execution.



6.2.2.1 If-Statement

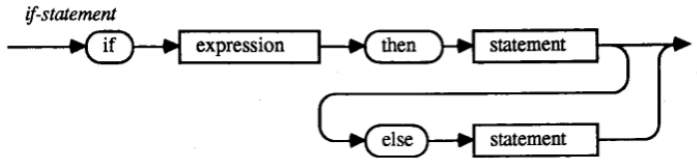


Abbildung: Quelle: TML Systems. TML Pascal: User's guide and Reference

Beschreibung aus dem Handbuch - C

hexadecimal-constant : (LEXICAL)
hex-marker
hexadecimal-constant hex-digit

identifier : (LEXICAL)
underscore
letter
identifier following-character

if-else-statement :
`if` (*expression*) *statement* `else` *statement*

if-statement :
`if` (*expression*) *statement*

indirect-component-selection :
postfix-expression –> *name*

indirection-expression :
* *unary-expression*

initialized-declaration :
declaration-specifiers initialized-declarator-list ;

initialized-declarator :
declarator initializer-part$_{opt}$

initialized-declarator-list :
initialized-declarator
initialized-declarator-list , *initialized-declarator*

initializer :
expression
{ *initializer-list* ,$_{opt}$ }

initializer-list :
initializer
initializer-list , *initializer*

Abbildung: Quelle: Harbison, Steele Jr. C: A Reference Manual. Prentice-Hall.

Beschreibung aus dem Handbuch - Java

14.9. The `if` Statement

The `if` statement allows conditional execution of a statement or a conditional choice of two statements, executing one or the other but not both.

```
IfThenStatement:
    if ( Expression ) Statement

IfThenElseStatement:
    if ( Expression ) StatementNoShortIf else Statement

IfThenElseStatementNoShortIf:
    if ( Expression ) StatementNoShortIf else StatementNoShortIf
```

The *Expression* must have type `boolean` or `Boolean`, or a compile-time error occurs.

14.9.1. The `if-then` Statement

An `if-then` statement is executed by first evaluating the *Expression*. If the result is of type `Boolean`, it is subject to unboxing conversion (§5.1.8).

If evaluation of the *Expression* or the subsequent unboxing conversion (if any) completes abruptly for some reason, the `if-then` statement completes abruptly for the same reason.

Otherwise, execution continues by making a choice based on the resulting value:

- If the value is `true`, then the contained *Statement* is executed; the `if-then` statement completes normally if and only if execution of the *Statement* completes normally.
- If the value is `false`, no further action is taken and the `if-then` statement completes normally.

14.9.2. The `if-then-else` Statement

An `if-then-else` statement is executed by first evaluating the *Expression*. If the result is of type `Boolean`, it is subject to unboxing conversion (§5.1.8).

If evaluation of the *Expression* or the subsequent unboxing conversion (if any) completes abruptly for some reason, then the `if-then-else` statement completes abruptly for the same reason.

Otherwise, execution continues by making a choice based on the resulting value:

- If the value is `true`, then the first contained *Statement* (the one before the `else` keyword) is executed; the `if-then-else` statement completes normally if and only if execution of that statement completes normally.
- If the value is `false`, then the second contained *Statement* (the one after the `else` keyword) is executed; the `if-then-else` statement completes normally if and only if execution of that statement completes normally.

Abbildung: Quelle: Gosling et al.: The Java(TM) Language Specification.

Grammatik

Definition

Eine *Grammatik* ist ein Quadrupel $G = (\Sigma, N, S, P)$, wobei

- Σ ein Alphabet (von so genannten Terminalsymbolen) ist,
- N eine endliche Menge (von so genannten Nichtterminalen) mit $\Sigma \cap N = \emptyset$,
- $S \in N$ das Startsymbol und
- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$ die endliche Menge der Produktionen (Regeln).

Dabei ist $(N \cup \Sigma)^+ = (N \cup \Sigma)^* - \{\lambda\}$.

Regeln (p, q) in P schreiben wir auch so:

$$p \to q.$$

Grammatik

Für Grammatikregeln mit gleicher linker Seite $A \in N$ schreiben wir auch kurz

$$A \to q_1 \mid q_2 \mid \cdots \mid q_n \quad \text{statt} \quad \begin{array}{l} A \to q_1 \\ A \to q_2 \\ \vdots \\ A \to q_n \end{array}$$

(aus der so genannten *BNF (Backus-Naur-Form)*).

Ableitungsrelation, Sprache einer Grammatik

Definition

Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ eine Grammatik, und seien u und v Wörter in $(N \cup \Sigma)^*$.

- Definiere die *unmittelbare Ableitungsrelation bzgl. G* so:

$$u \vdash_G v \iff u = xpz, v = xqz,$$

wobei $x, z \in (N \cup \Sigma)^*$ und $p \to q$ eine Regel in P ist.

- Durch n-malige Anwendung von $\vdash_G$ erhalten wir $\vdash_G^n$. Das heißt:

$$u \vdash_G^n v \iff u = x_0 \vdash_G x_1 \vdash_G \cdots \vdash_G x_n = v$$

für $n \geq 0$ und für eine Folge von Wörtern $x_0, x_1, \ldots, x_n \in (\Sigma \cup N)^*$. Insbesondere ist $u \vdash_G^0 u$.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Beispiel: Sei $G_1 = (\Sigma_1, \Gamma_1, S_1, R_1)$ die folgende Grammatik:

- das terminale Alphabet ist $\Sigma_1 = \{a, b\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $\Gamma_1 = \{S_1\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$R_1 = \{S_1 \to aS_1b \mid \lambda\}.$$

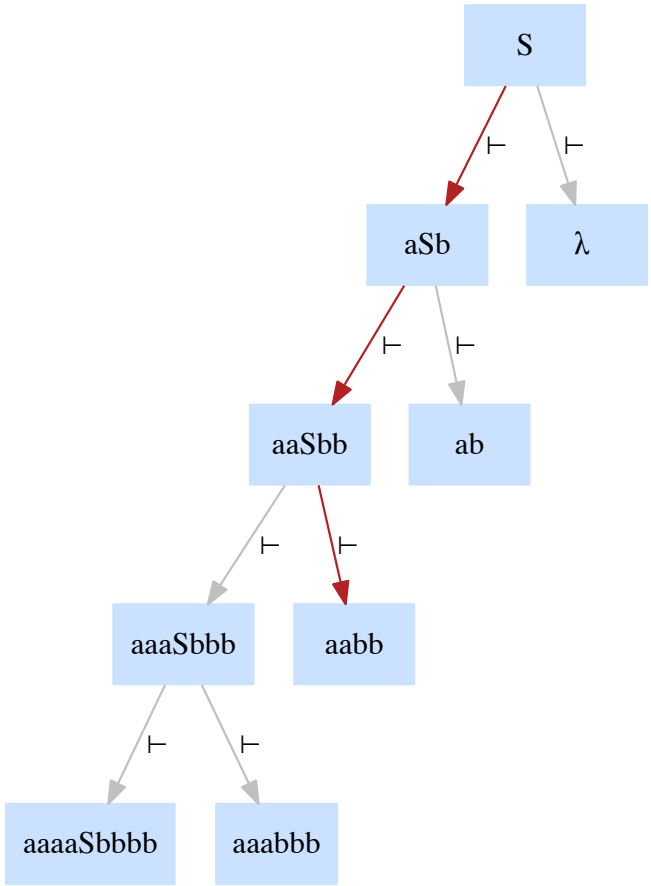
Eine Folge von Ableitungsschritten für G_1:

$$S_1 \vdash_{G_1} aS_1b \vdash_{G_1} aaS_1bb \vdash_{G_1} aabb$$

$$\begin{aligned} S_1 &\vdash^1_{G_1} aS_1b \\ S_1 &\vdash^2_{G_1} aaS_1bb \\ S_1 &\vdash^3_{G_1} aabb \end{aligned}$$

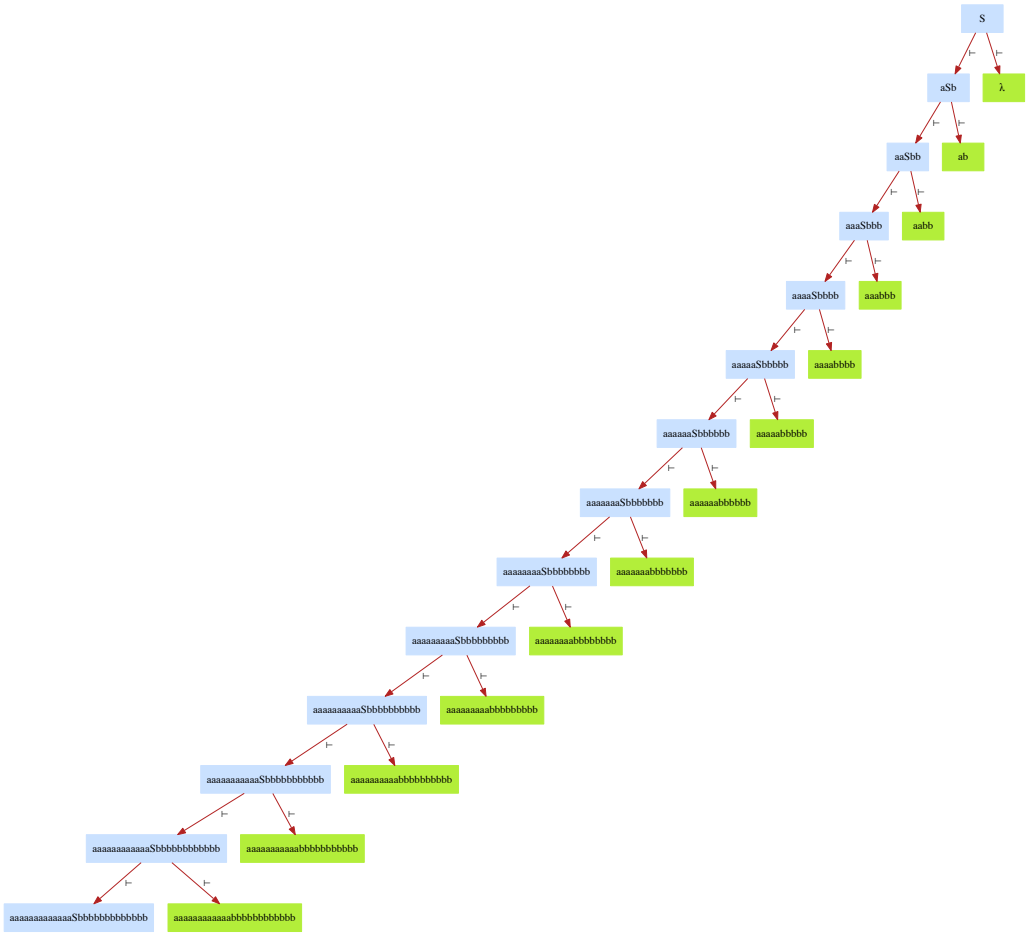
Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

$$R_1 = \{S_1 \to aS_1b \mid \lambda\}$$



Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

$$R_1 = \{S_1 \to aS_1b \mid \lambda\}$$



Ableitungsrelation, Sprache einer Grammatik

Definition

- Die Folge $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in (\Sigma \cup N)^*$, $x_0 = S$ und $x_n \in \Sigma^*$ heißt *Ableitung von x_n in G*, falls $x_0 \vdash_G x_1 \vdash_G \cdots \vdash_G x_n$.
- Definiere $\vdash_G^* = \bigcup_{n \geq 0} \vdash_G^n$. Man kann zeigen, dass $\vdash_G^*$ die reflexive und transitive Hülle von $\vdash_G$ ist, d.h. die kleinste binäre Relation, die reflexiv und transitiv ist und $\vdash_G$ umfasst.
- Die *von der Grammatik G erzeugte Sprache* ist definiert als

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \vdash_G^* w\}.$$

- Zwei Grammatiken G_1 und G_2 heißen *äquivalent*, falls

$$L(G_1) = L(G_2).$$

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Beispiel: Sei $G_1 = (\Sigma_1, \Gamma_1, S_1, R_1)$ die folgende Grammatik:

- das terminale Alphabet ist $\Sigma_1 = \{a, b\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $\Gamma_1 = \{S_1\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$R_1 = \{S_1 \to aS_1b \mid \lambda\}.$$

Eine Ableitung für G_1:

$$S_1 \vdash_{G_1} aS_1b \vdash_{G_1} aaS_1bb \vdash_{G_1} aabb \Rightarrow aabb \in L(G_1).$$

Offenbar erzeugt G_1 die Sprache $L(G_1) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

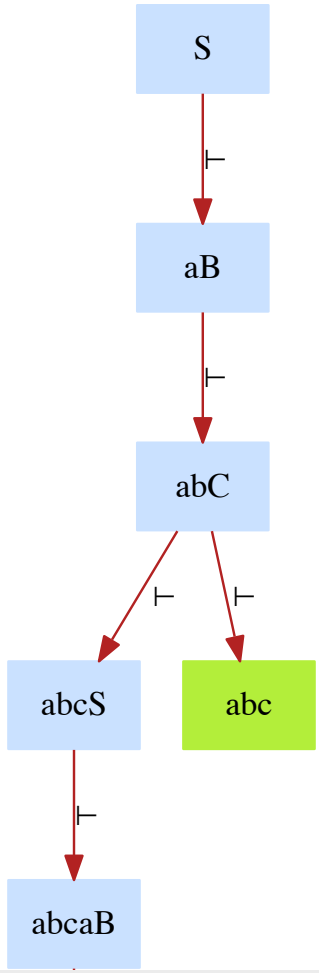
Beispiel: Sei $G'_2 = (\Sigma_2, \Gamma_2, S'_2, R'_2)$ die folgende Grammatik:

- das terminale Alphabet ist $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $\Gamma_2 = \{S'_2, B, C\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R'_2 \quad = \quad \{ \quad & S'_2 \to aB, \\ & B \to bC, \\ & C \to cS'_2 | c \quad \}. \end{aligned}$$

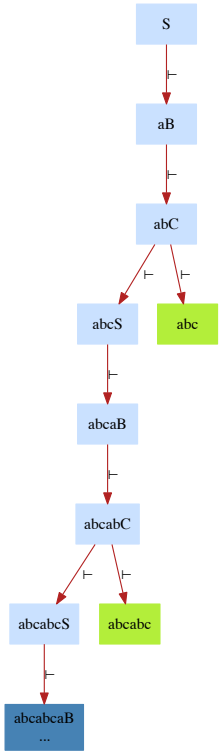
Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

$$R_2' = \{S_2' \to aB, B \to bC, C \to cS_2', C \to c\}$$



Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

$$R_2' = \{S_2 \to aB, B \to bC, C \to cS_2', C \to c\}$$



Offenbar erzeugt G_2' die Sprache $L(G_2') = \{(abc)^n \mid n \geq 1\}$.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

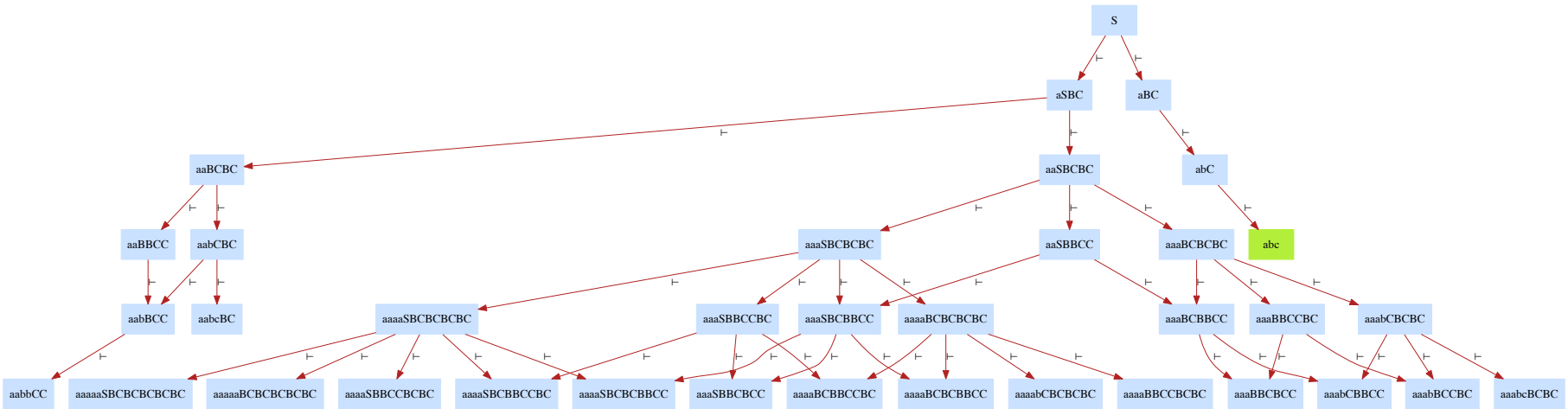
Beispiel: Sei $G_2 = (\Sigma_2, \Gamma_2, S_2, R_2)$ die folgende Grammatik:

- das terminale Alphabet ist $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $\Gamma_2 = \{S_2, B, C\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$\begin{aligned} R_2 \quad = \quad \{ \quad & S_2 \to aS_2BC \mid aBC, \\ & CB \to BC, \\ & aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc \quad \}. \end{aligned}$$

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

$$R_2 = \{S_2 \to aS_2BC, S_2 \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$$



Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Beispiel: Eine Ableitung für G_2:

$$
\begin{aligned}
S_2 &\vdash_{G_2} aS_2BC &&\vdash_{G_2} aaS_2BCBC &&\vdash_{G_2} aaaBCBCBC \\
&\vdash_{G_2} aaaBBCCBC &&\vdash_{G_2} aaaBBCBCC &&\vdash_{G_2} aaaBBBCCC \\
&\vdash_{G_2} aaabBBCCC &&\vdash_{G_2} aaabbBCCC &&\vdash_{G_2} aaabbbCCC \\
&\vdash_{G_2} aaabbbcCC &&\vdash_{G_2} aaabbbccC &&\vdash_{G_2} aaabbbccc
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow aaabbbccc \in L(G_2)$.

Die von G_2 erzeugte Sprache ist

$$L(G_2) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}.$$

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Beispiel: Sei $G_3 = (\Sigma_3, \Gamma_3, S_3, R_3)$ die folgende Grammatik:

- das terminale Alphabet ist $\Sigma_3 = \{*, +, (,), a\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $\Gamma_3 = \{S_3\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$R_3 = \{S_3 \to S_3 + S_3 \mid S_3 * S_3 \mid (S_3) \mid a\}.$$

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Beispiel: Eine Ableitung für G_3:

$$
\begin{array}{llll}
S_3 & \vdash_{G_3} & S_3 + S_3 & \vdash_{G_3} \quad S_3 * S_3 + S_3 \\
 & \vdash_{G_3} & (S_3) * S_3 + S_3 & \vdash_{G_3} \quad (S_3 + S_3) * S_3 + S_3 \\
 & \vdash_{G_3} & \cdots & \vdash_{G_3} \quad (a + a) * a + a
\end{array}
$$

$\Rightarrow (a + a) * a + a \in L(G_3)$.

G_3 erzeugt die Sprache aller verschachtelten Klammerausdrücke mit den Operationen $+$ und $*$ und einem Zeichen a.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Bemerkung:

- Der Prozess des Ableitens von Wörtern ist inhärent nichtdeterministisch, denn im Allgemeinen kann mehr als eine Regel in einem Ableitungsschritt angewandt werden.
- Verschiedene Grammatiken können dieselbe Sprache erzeugen.
- Tatsächlich hat jede durch eine Grammatik definierbare Sprache unendlich viele sie erzeugende Grammatiken.
- Das heißt, eine Grammatik ist ein syntaktisches Objekt, das ein semantisches Objekt erzeugt, nämlich ihre Sprache.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Bemerkung:

- Es gibt “natürlich” auch Grammatiken für natürliche Sprachen
- Hier eine Grammatik für eine ganz kleine Untermenge der deutschen Sprache:
  - $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots, -\}$, $N = \{\mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{V}, \mathcal{O}\}$.
  - $\mathcal{S} \to \mathcal{P}\ \mathcal{V}\ \mathcal{O}$
  - $\mathcal{P} \to \mathit{Er} \mid \mathit{Sie} \mid \mathit{Es}$
  - $\mathcal{V} \to \mathit{angelt} \mid \mathit{baut} \mid \mathit{isst}$
  - $\mathcal{O} \to \mathit{Fische} \mid \mathit{Schiffe} \mid \mathit{Himbeeren}$

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

- Franz Kafka. Auf der Galerie. Satz 1 von 2:

  Wenn irgendeine hinfällige, lungensüchtige Kunstreiterin in der Manege auf schwankendem Pferd vor einem unermüdlichen Publikum vom peitschenschwingenden erbarmungslosen Chef monatelang ohne Unterbrechung im Kreise rundum getrieben würde, auf dem Pferde schwirrend, Küsse werfend, in der Taille sich wiegend, und wenn dieses Spiel unter dem nichtaussetzenden Brausen des Orchesters und der Ventilatoren in die immerfort weiter sich öffnende graue Zukunft sich fortsetzte, begleitet vom vergehenden und neu anschwellenden Beifallsklatschen der Hände, die eigentlich Dampfhämmer sind ? vielleicht eilte dann ein junger Galeriebesucher die lange Treppe durch alle Ränge hinab, stürzte in die Manege, rief das: Halt! durch die Fanfaren des immer sich anpassenden Orchesters.

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

- Marcel Proust. À l'ombre des jeunes filles en fleurs. Erster Satz:
  Ma mère, quand il fut question d'avoir pour la première fois M. de Norpois à dîner, ayant exprimé le regret que le Professeur Cottard fût en voyage et qu'elle-même eût entièrement cessé de fréquenter Swann, car l'un et l'autre eussent sans doute intéressé l'ancien Ambassadeur, mon père répondit qu'un convive éminent, un savant illustre, comme Cottard, ne pouvait jamais mal faire dans un dîner, mais que Swann, avec son ostentation, avec sa manière de crier sur les toits ses moindres relations, était un vulgaire esbrouffeur que le Marquis de Norpois eût sans doute trouvé selon son expression, «puant».

Grammatik, Ableitung, erzeugte Sprache

Bemerkung:

- Die Struktur und benötigte Grammatik bei Programmiersprachen ist zum Glück einfacher.
- Es gibt viele unterschiedliche Notationen für Grammatiken.
- Aufgabe: Schauen Sie sich die Handbücher der Programmiersprachen noch einmal an. Was sind die Terminale, Nichtterminale, Regeln? Gibt es Unterschiede?

Beschreibung aus dem Handbuch - Python (Wiederholug)

The if Statement

```
if test:
    suite
[elif test:
    suite]*
[else:
    suite]
```

The `if` statement selects from among one or more actions (statement blocks), and it runs the suite associated with the first `if` or `elif` test that is `true`, or the `else` suite if all are `false`.

The while Statement

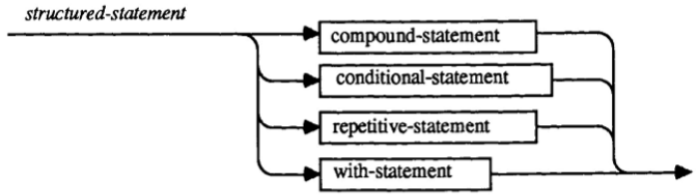
```
while test:
    suite
[else:
    suite]
```

The `while` loop is a general loop that keeps running the first suite while the test at the top is true. It runs the `else` suite if the loop exits without hitting a `break` statement.

Beschreibung aus dem Handbuch - Pascal (Wiederholug)

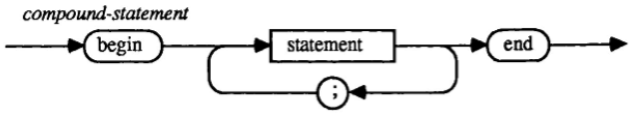
6.2 Structured-Statements

Structured-statements are made up of other statements that are to be executed either conditionally (conditional-statements), repeatedly (repetitive-statements), or in sequence (compound-statement or with-statement).



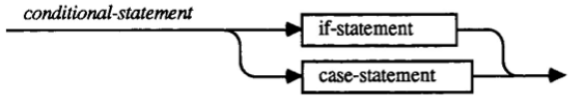
6.2.1 Compound-Statement

The compound-statement specifies the execution of its statement-sequence in its textual order.

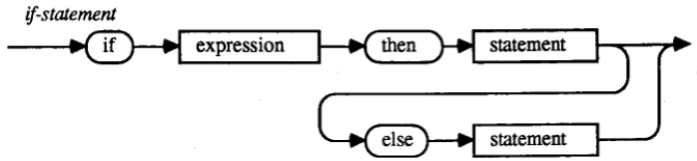


6.2.2 Conditional-Statements

A conditional-statement selects one or none of its component statements for execution.



6.2.2.1 If-Statement



Beschreibung aus dem Handbuch - C (Wiederholug)

hexadecimal-constant : (LEXICAL)
hex-marker
hexadecimal-constant hex-digit

identifier : (LEXICAL)
underscore
letter
identifier following-character

if-else-statement :
`if` (*expression*) *statement* `else` *statement*

if-statement :
`if` (*expression*) *statement*

indirect-component-selection :
postfix-expression –> *name*

indirection-expression :
* *unary-expression*

initialized-declaration :
declaration-specifiers initialized-declarator-list ;

initialized-declarator :
declarator initializer-part$_{opt}$

initialized-declarator-list :
initialized-declarator
initialized-declarator-list , *initialized-declarator*

initializer :
expression
{ *initializer-list* ,$_{opt}$ }

initializer-list :
initializer
initializer-list , *initializer*

Abbildung: Quelle: Harbison, Steele Jr. C: A Reference Manual. Prentice-Hall.

Beschreibung aus dem Handbuch - Java (Wiederholug)

14.9. The `if` Statement

The `if` statement allows conditional execution of a statement or a conditional choice of two statements, executing one or the other but not both.

```
IfThenStatement:
    if ( Expression ) Statement

IfThenElseStatement:
    if ( Expression ) StatementNoShortIf else Statement

IfThenElseStatementNoShortIf:
    if ( Expression ) StatementNoShortIf else StatementNoShortIf
```

The *Expression* must have type `boolean` or `Boolean`, or a compile-time error occurs.

14.9.1. The `if-then` Statement

An `if-then` statement is executed by first evaluating the *Expression*. If the result is of type `Boolean`, it is subject to unboxing conversion (§5.1.8).

If evaluation of the *Expression* or the subsequent unboxing conversion (if any) completes abruptly for some reason, the `if-then` statement completes abruptly for the same reason.

Otherwise, execution continues by making a choice based on the resulting value:

- If the value is `true`, then the contained *Statement* is executed; the `if-then` statement completes normally if and only if execution of the *Statement* completes normally.
- If the value is `false`, no further action is taken and the `if-then` statement completes normally.

14.9.2. The `if-then-else` Statement

An `if-then-else` statement is executed by first evaluating the *Expression*. If the result is of type `Boolean`, it is subject to unboxing conversion (§5.1.8).

If evaluation of the *Expression* or the subsequent unboxing conversion (if any) completes abruptly for some reason, then the `if-then-else` statement completes abruptly for the same reason.

Otherwise, execution continues by making a choice based on the resulting value:

- If the value is `true`, then the first contained *Statement* (the one before the `else` keyword) is executed; the `if-then-else` statement completes normally if and only if execution of that statement completes normally.
- If the value is `false`, then the second contained *Statement* (the one after the `else` keyword) is executed; the `if-then-else` statement completes normally if and only if execution of that statement completes normally.

Abbildung: Quelle: Gosling et al.: The Java(TM) Language Specification.

Chomsky-Hierarchie

Definition

$G = (\Sigma, N, S, P)$ sei eine Grammatik.

- G ist *Typ-0-Grammatik*, falls P keinerlei Einschränkungen unterliegt.
- G ist *Typ-1-Grammatik* (bzw. *kontextsensitiv* bzw. *nichtverkürzend* oder *monoton*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $|p| \leq |q|$.
- Eine Typ-1-Grammatik G ist *vom Typ 2* (bzw. *kontextfrei*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $p \in N$.
- Eine Typ-2-Grammatik G ist *vom Typ 3* (bzw. *regulär* bzw. *rechtslinear*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $p \in N$ und $q \in \Sigma \cup \Sigma N$.

Chomsky-Hierarchie

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann vom Typ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, wenn es eine Typ-i-Grammatik G gibt mit $L(G) = A$.

- Die *Chomsky-Hierarchie* besteht aus den vier Sprachklassen:

$$\mathfrak{L}_i = \{L(G) \mid G \text{ ist Typ-}i\text{-Grammatik}\},$$

wobei $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Übliche Bezeichnungen:

  - $\mathfrak{L}_0$ ist die Klasse aller Sprachen, die durch eine Grammatik erzeugt werden können;
  - $\mathfrak{L}_1 = \mathrm{CS}$ ist die *Klasse der kontextsensitiven Sprachen*;
  - $\mathfrak{L}_2 = \mathrm{CF}$ ist die *Klasse der kontextfreien Sprachen*;
  - $\mathfrak{L}_3 = \mathrm{REG}$ ist die *Klasse der regulären Sprachen*.

Wiederholung: Grammatik

Definition

Eine *Grammatik* ist ein Quadrupel $G = (\Sigma, N, S, P)$, wobei

- Σ ein Alphabet von Terminalsymbolen ist,
- N eine endliche Menge von Nichtterminalen mit $\Sigma \cap N = \emptyset$,
- $S \in N$ das Startsymbol und
- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$ die endliche Menge der Produktionen (Regeln).

$\vdash_G$ ist die unmittelbare Ableitungsrelation (einmalige Anwendung einer Regel aus P).

Die *von der Grammatik G erzeugte Sprache* ist definiert als

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \vdash_G^* w\}.$$

Wiederholung: Beispiel Grammatik

Beispiel: $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, x, y, z\}$, $N = \{S, B, C, V\}$ und den Regeln
$P = \{S \to aBV, aB \to x, aC \to y, BV \to C, BV \to BVz, xV \to x\}$.

Wir haben z.B. $x \in L(G)$ und $yz \in L(G)$ und $xz \in L(G)$.

- $S \vdash_G aBV \vdash_G xV \vdash_G x$
- $S \vdash_G aBV \vdash_G aBVz \vdash_G aCz \vdash_G yz$
- $S \vdash_G aBV \vdash_G aBVz \vdash_G xVz \vdash_G xz$

Wiederholung Chomsky-Hierarchie

Definition

$G = (\Sigma, N, S, P)$ sei eine Grammatik.

- G ist *Typ-0-Grammatik*, falls P keinerlei Einschränkungen unterliegt.
- G ist *Typ-1-Grammatik* (bzw. *kontextsensitiv* bzw. *nichtverkürzend* oder *monoton*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $|p| \leq |q|$.
- Eine Typ-1-Grammatik G ist *vom Typ 2* (bzw. *kontextfrei*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $p \in N$.
- Eine Typ-2-Grammatik G ist *vom Typ 3* (bzw. *regulär* bzw. *rechtslinear*), falls für alle Regeln $p \to q$ in P gilt: $p \in N$ und $q \in \Sigma \cup \Sigma N$.

Wiedeholung: Chomsky-Hierarchie

Definition

- Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann vom Typ $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, wenn es eine Typ-i-Grammatik G gibt mit $L(G) = A$.

Chomsky-Hierarchie

Fakt

$$\mathrm{REG} \subseteq \mathrm{CF} \subseteq \mathrm{CS} \subseteq \mathfrak{L}_0.$$

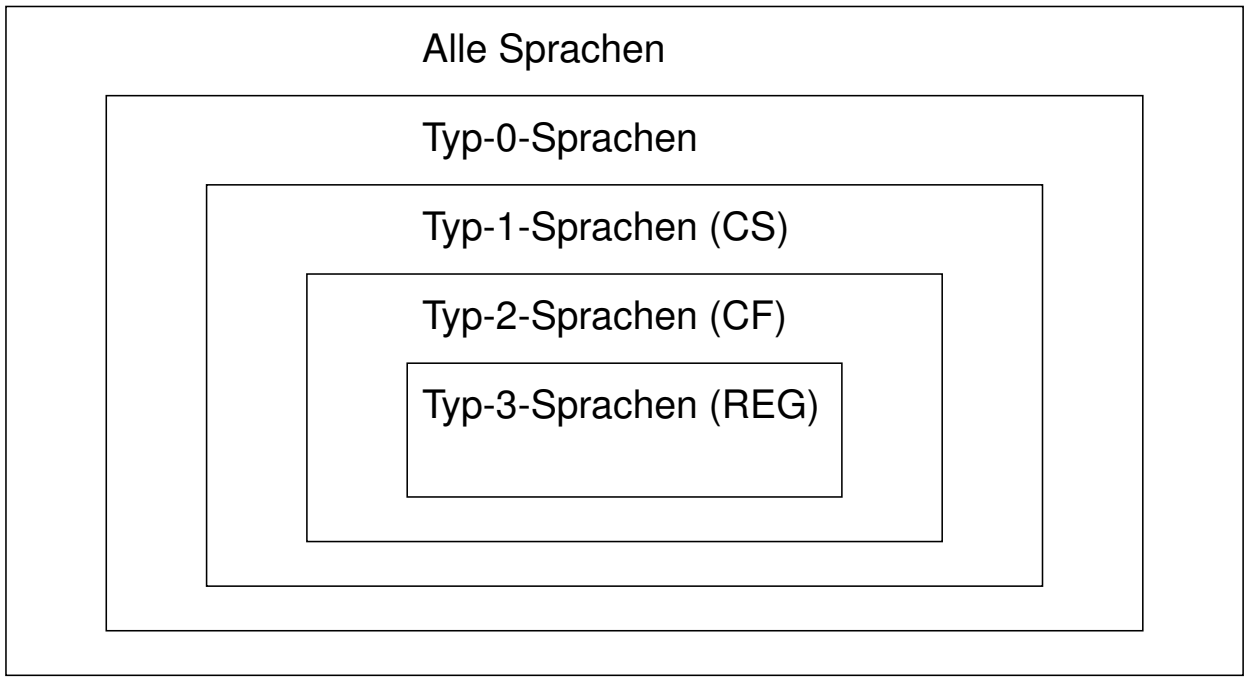


Abbildung: Die Chomsky-Hierarchie

Chomsky-Hierarchie

Beispiel:

- Offensichtlich sind die Grammatiken G_2 mit $R_2 = \{S_2 \to aS_2BC, S_2 \to aBC, CB \to BC, aB \to ab, bB \to bb, bC \to bc, cC \to cc\}$ und G_3 mit $R_3 = \{S_3 \to S_3 + S_3 \mid S_3 * S_3 \mid (S_3) \mid a\}$ aus dem vorigen Beispiel kontextsensitiv.

- Offensichtlich ist die Grammatik G_3 aus dem vorigen Beispiel sogar kontextfrei.

Chomsky-Hierarchie

Beispiel:

- Die Grammatik G_1 mit $R_1 = \{S_1 \to aS_1b \mid \lambda\}$ enthält die Regel

$$S_1 \to \lambda$$

und ist wegen $|S_1| = 1 > 0 = |\lambda|$ nach Definition nicht kontextsensitiv (vgl. „Sonderregelung für das leere Wort“).
Da G_1 eine Grammatik ist, ist G_1 eine Typ-0-Grammatik.

Sonderregelung für das leere Wort

Um das leere Wort in Sprachen von Typ-i-Grammatiken für $i \in \{1, 2, 3\}$ aufzunehmen, treffen wir die folgende Vereinbarung:

(a) Die Regel

$$S \to \lambda$$

ist als einzige verkürzende Regel für Grammatiken vom Typ $1, 2, 3$ zugelassen.

(b) Tritt die Regel $S \to \lambda$ auf, so darf S auf keiner rechten Seite einer Regel vorkommen.

Sonderregelung für das leere Wort

Dies ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn:
Gibt es in P Regeln mit S auf der rechten Seite, so verändern wir die Regelmenge P zur neuen Regelmenge P' wie folgt:

1. In allen Regeln der Form $S \to u$ aus P mit $u \in (N \cup \Sigma)^*$ wird jedes Vorkommen von S in u durch ein neues Nichtterminal S' ersetzt.
2. Zusätzlich enthält P' alle Regeln aus P, mit S ersetzt durch S'.
3. Die Regel $S \to \lambda$ wird hinzugefügt.

Die so modifizierte Grammatik $G' = (\Sigma, N \cup \{S'\}, S, P')$ ist (bis auf $S \to \lambda$) vom selben Typ wie G und erfüllt $L(G') = L(G) \cup \{\lambda\}$.

Sonderregelung für das leere Wort

Beispiel: Wir betrachten die Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit

- das terminale Alphabet ist $\Sigma = \{a, b\}$,
- das nichtterminale Alphabet ist $N = \{S\}$ und
- die Menge der Regeln ist gegeben durch

$$P = \{S \to aSb \mid ab\}.$$

Man sieht leicht, dass G kontextfrei ist und die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ erzeugt, d.h., $L(G) = L$.

Wir modifizieren die Grammatik G nun gemäß der Sonderregelung für das leere Wort, um eine kontextfreie Grammatik für die Sprache

$$\{a^n b^n \mid n \geq 0\} = L \cup \{\lambda\}$$

zu gewinnen.

Sonderregelung für das leere Wort

Beispiel: Nach obiger Konstruktion erhalten wir eine kontextfreie Grammatik $G' = (\Sigma, \{S, S'\}, S, P')$ mit

$$
\begin{array}{rcll}
P' & = & \{ \quad S \to aS'b \mid ab & \text{gemäß 1.)} \\
 & & \quad S' \to aS'b \mid ab & \text{gemäß 2.)} \\
 & & \quad S \to \lambda \qquad\qquad \} & \text{gemäß 3.)}
\end{array}
$$

und $L(G') = L(G) \cup \{\lambda\}$.

Mehrdeutigkeit: Finden einer Definition 1

Gegeben $\Sigma = \{a, b\}$ welche dieser Grammatiken sind eindeutig und warum?

$R_1 = \{S \to aSb \mid ab\}$

$R_2 = \{S \to aSb \mid ab \mid aabb\}$

$R_3 = \{S \to ASB \mid ab, A \to a, B \to b\}$

Mehrdeutigkeit: Finden einer Definition 1

$R_1 = \{S \to aSb \mid ab\}$ Es gibt nur eine Ableitung für das Wort *aabb*:

$S \vdash aSb \vdash aabb$

$R_2 = \{S \to aSb \mid ab \mid aabb\}$ Es gibt zwei Ableitungen für das Wort *aabb*:

1. $S \vdash aSb \vdash aabb$
2. $S \vdash aabb$

$R_3 = \{S \to ASB \mid ab, A \to a, B \to b\}$ Es gibt sechs Ableitungen für das Wort *aabb*:

1. $S \vdash ASB \vdash aSB \vdash aabB \vdash aabb$
2. $S \vdash ASB \vdash aSB \vdash aSb \vdash aabb$
3. $S \vdash ASB \vdash AabB \vdash aabB \vdash aabb$
4. $S \vdash ASB \vdash AabB \vdash Aabb \vdash aabb$
5. $S \vdash ASB \vdash ASb \vdash aSb \vdash aabb$

Syntaxbaum

Um Ableitungen von Worten in Grammatiken vom Typ 2 oder 3 anschaulich darzustellen, verwenden wir einen wie folgt definierten Syntaxbaum.

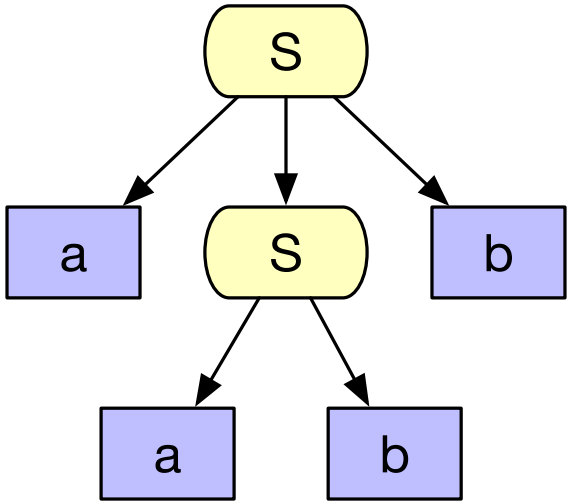
- Sei $G = (\Sigma, N, S, P)$ eine Grammatik vom Typ 2 oder 3, und sei $S = w_0 \vdash_G w_1 \vdash_G \cdots \vdash_G w_n = w$ eine Ableitung von $w \in L(G)$.
- Die Wurzel (d.h. die Etage 0) des Syntaxbaums ist das Startsymbol S.
- Untere Etagen: Wird wegen der Regel $A \to z$ im i-ten Ableitungsschritt ($w_{i-1} \vdash_G w_i$) das Nichtterminal A in w_{i-1} durch das Teilwort z von w_i ersetzt, so hat der entsprechende Knoten A im Syntaxbaum $|z|$ Söhne, die v.l.n.r. mit den Symbolen aus z beschriftet sind. Falls $z = \lambda$ wird ein mit λ beschrifteter Sohn generiert.
- Die Blätter des Baumes ergeben von links nach rechts gelesen w.

Beispiel 1: Syntaxbaum

Die Blätter eines Syntaxbaumes für eine Ableitung von w ergeben von links nach rechts gelesen w.

$R_1 = \{S \to aSb \mid ab\}$ Es gibt nur eine Ableitung für das Wort $aabb$:

$S \vdash aSb \vdash aabb$, dem entspricht dieser Syntaxbaum:

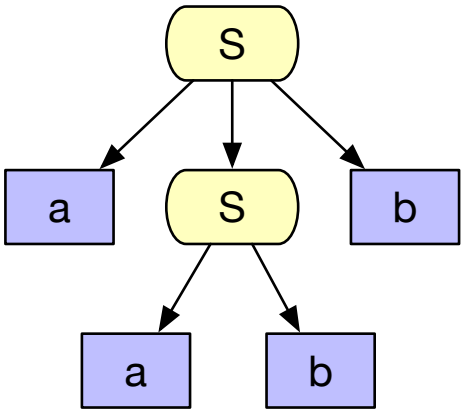


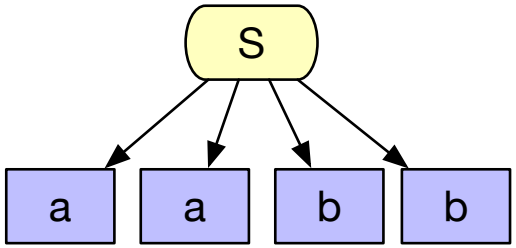
Beispiel 2: Syntaxbaum

$R_2 = \{S \to aSb \mid ab \mid aabb\}$ Es gibt zwei Ableitungen für das Wort *aabb*:

1. $S \vdash aSb \vdash aabb$
2. $S \vdash aabb$

Hier gibt es zwei unterschiedliche Syntaxbäume:

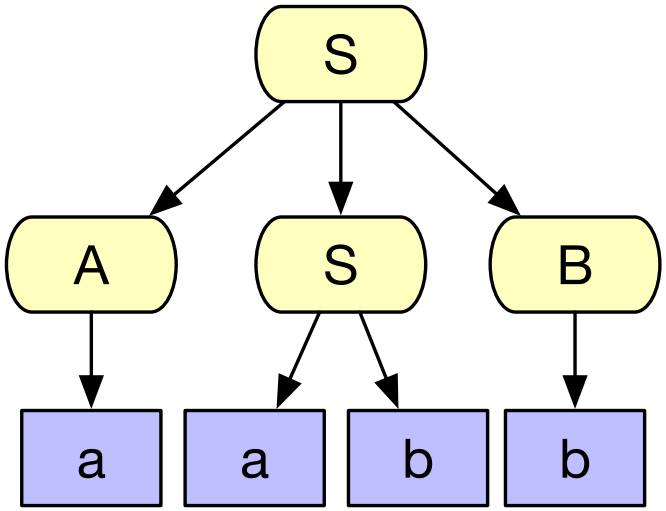




Beispiel: Syntaxbaum

$R_3 = \{S \to ASB \mid ab, A \to a, B \to b\}$ Es gibt 6 Ableitungen für *aabb*:

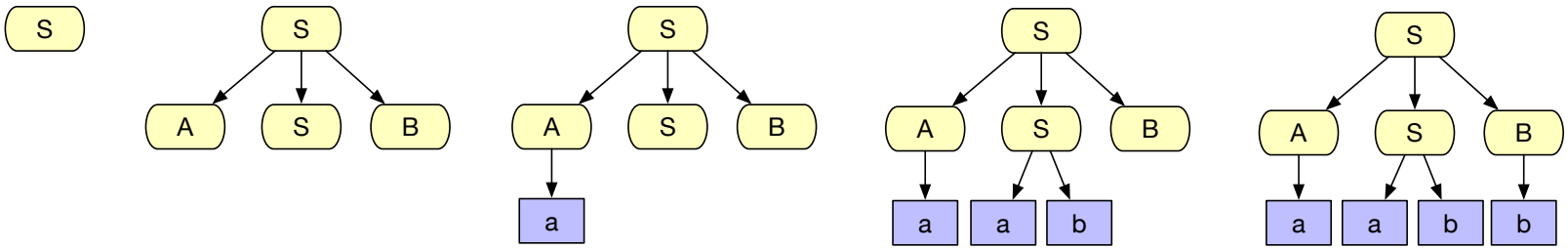
1. $S \vdash ASB \vdash aSB \vdash aabB \vdash aabb$
2. $S \vdash ASB \vdash aSB \vdash aSb \vdash aabb$
3. $S \vdash ASB \vdash AabB \vdash aabB \vdash aabb$
4. $S \vdash ASB \vdash AabB \vdash Aabb \vdash aabb$
5. $S \vdash ASB \vdash ASb \vdash aSb \vdash aabb$
6. $S \vdash ASB \vdash ASb \vdash Aabb \vdash aabb$



Beispiel: Syntaxbaum

$R_3 = \{S \to ASB \mid ab, A \to a, B \to b\}$ Eine Ableitung kann als Folge von partiellen Syntaxbäumen dargestellt werden, der letzte Baum ist der Syntaxbaum:

1. $S \vdash ASB \vdash aSB \vdash aabB \vdash aabb$



Alle sechs Ableitungen erzeugen den selben finalen Syntaxbaum.

Syntaxbaum

Beispiel:

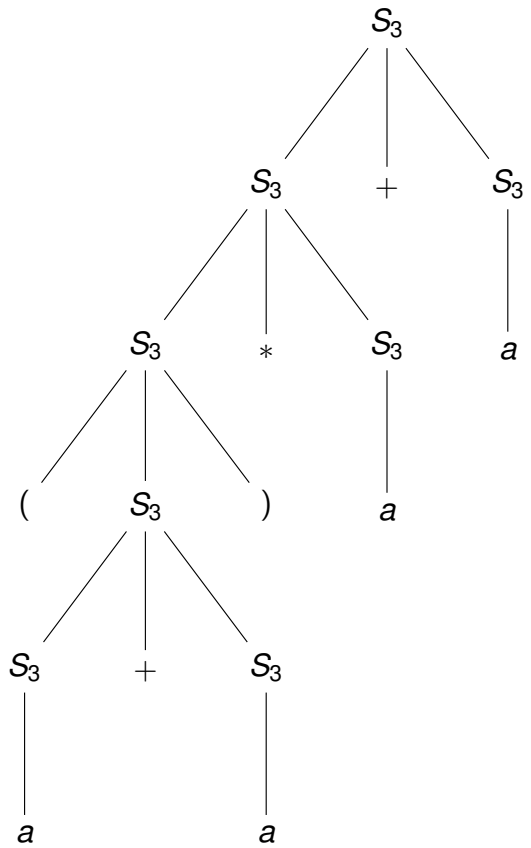


Abbildung: Syntaxbaum für die Ableitung des Wortes $(a + a) * a + a$ in der Typ 2-Grammatik G_3 mit $R_3 = \{S_3 \to S_3 + S_3 \mid S_3 * S_3 \mid (S_3) \mid a\}$ von oben

Mehrdeutige Grammatik

Definition

- Eine Grammatik G heißt *mehrdeutig*, falls es ein Wort $w \in L(G)$ gibt, das zwei verschiedene Syntaxbäume hat.

- Eine Sprache A heißt *inhärent mehrdeutig*, falls jede Grammatik G mit $A = L(G)$ mehrdeutig ist.

Mehrdeutige Grammatik

Beispiel:

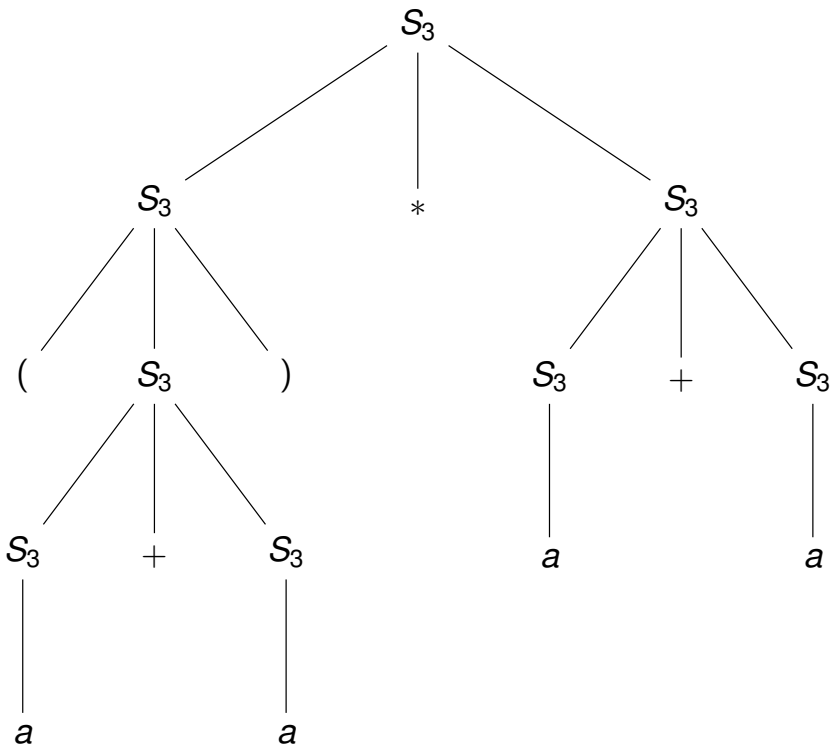
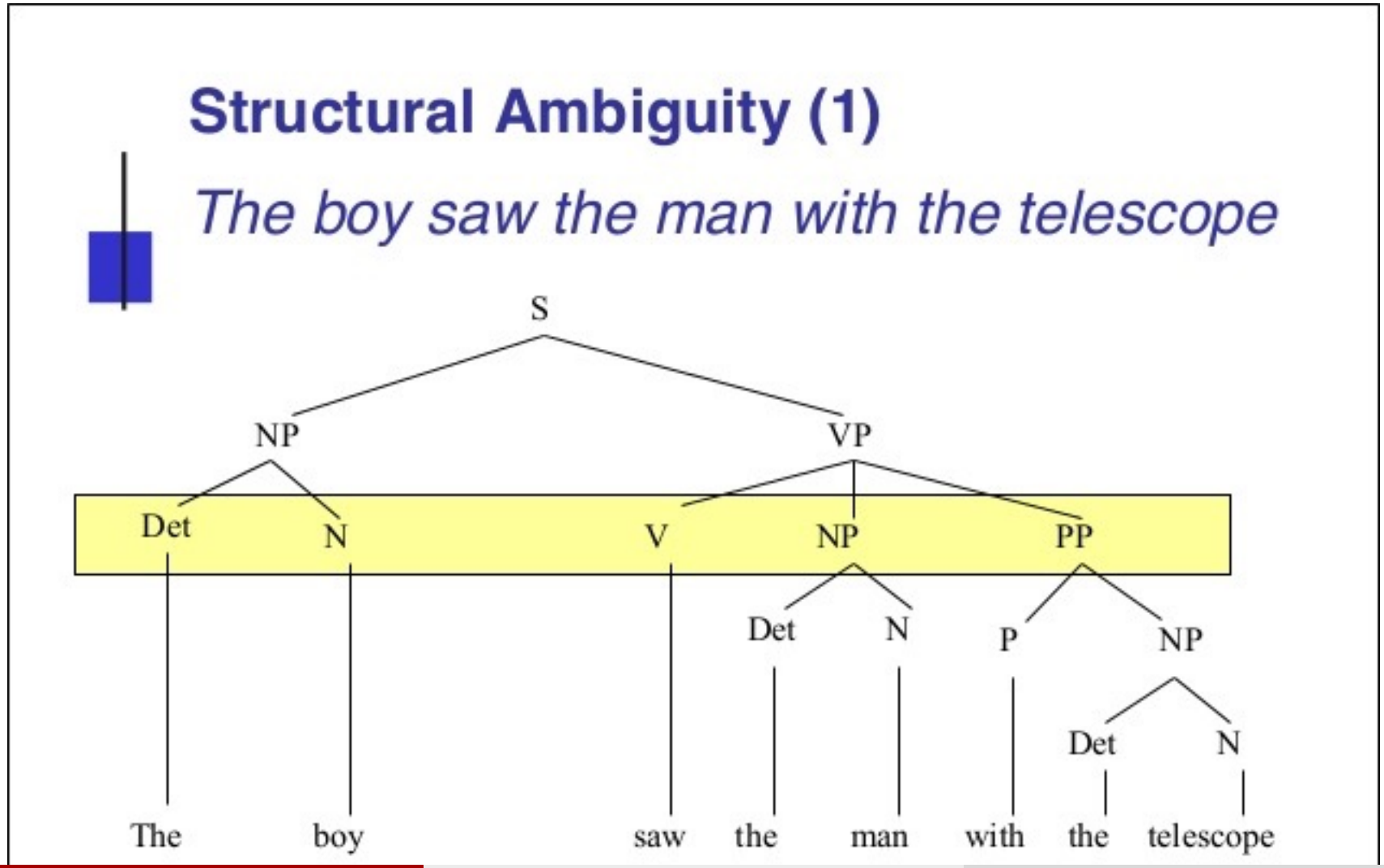


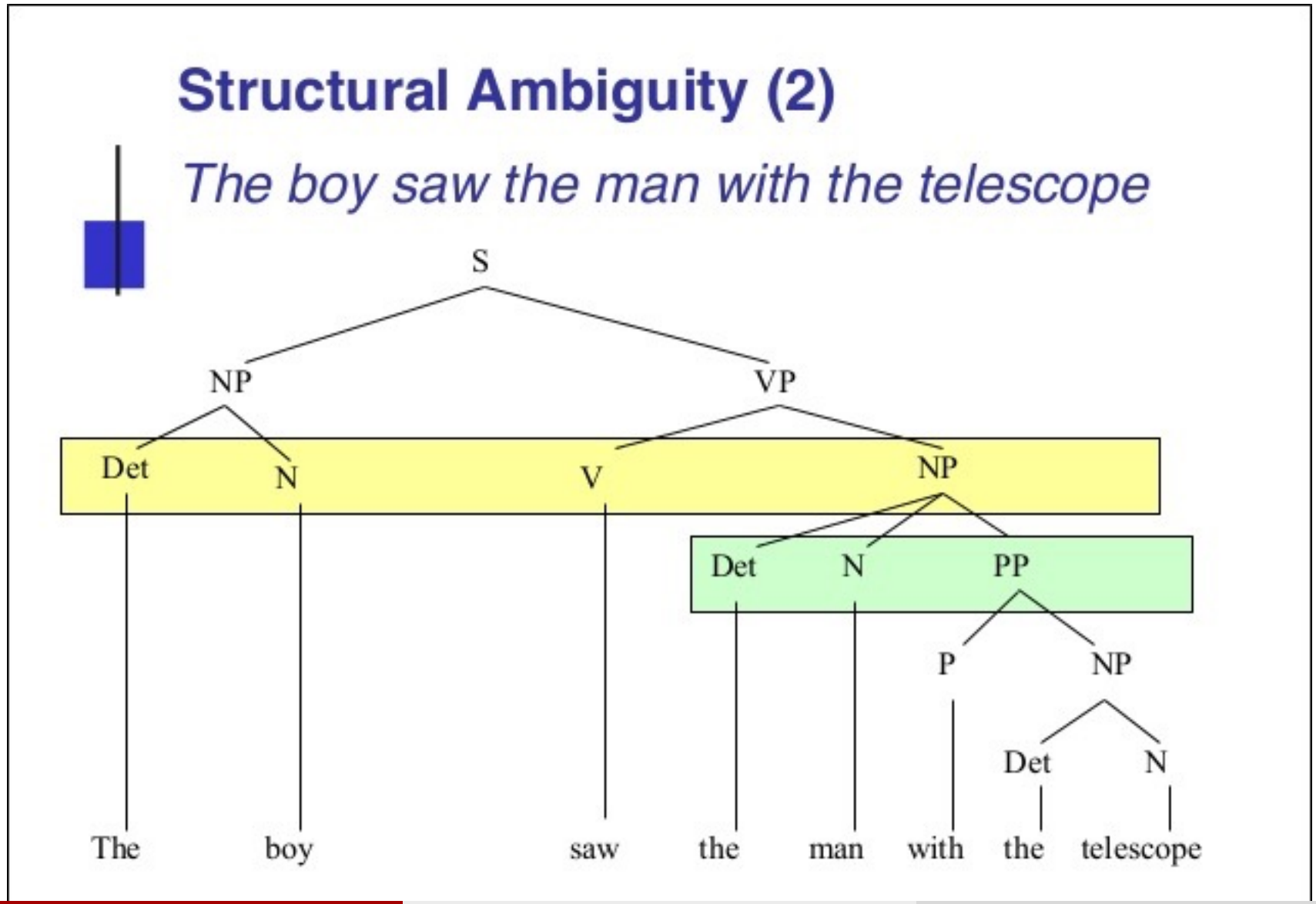
Abbildung: Ein weiterer Syntaxbaum für die Ableitung des Wortes $(a + a) * a + a$ in der Typ 2-Grammatik G_3 aus dem vorigen Beispiel

Mehrdeutigkeit in natürlicher Sprache

Quelle: http://www.slideshare.net/blessedkkr/syntax-course



Mehrdeutigkeit in natürlicher Sprache



Wichtige Konzepte vm Foliensatz 1:

- Formale Sprachen
- Konkatenation von Sprachen, Kleene Hülle
- Grammatiken
- Ableitungsrelation, formale Definition von L(G)
- Chomsky Hierarchie: Typ 0, 1, 2, 3 Sprachen
- Regelung für das leere Wort
- Mehrdeutigkeit, Syntaxbäume für kfG