Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Institut für Informatik
Prof. Dr. J. Rothe

Universitätsstr. 1, D-40225 Düsseldorf
Gebäude: 25.12, Ebene: O2, Raum: 26
Tel.: +49 211 8112188, Fax: +49 211 8111667
E-Mail: rothe@hhu.de
3. September 2019

Vorlesung im Sommersemester 2019

Theoretische Informatik

Nachklausurtermin: 10. September 2019

BITTE NICHT MIT BLEISTIFT ODER ROTSTIFT SCHREIBEN! TRAGEN SIE AUF JEDEM BLATT IHREN NAMEN, VORNAMEN UND IHRE MATRIKELNUMMER SOWIE ZUSÄTZLICH AUF DEM DECKBLATT STUDIENFACH MIT SEMESTER UND ANZAHL DER ABGEGEBENEN BLÄTTER EIN, UND UNTERSCHREIBEN SIE ALS STUDIERENDE/R DER INFORMATIK, DASS SIE ANGEMELDET SIND!

- **Name, Vorname:**
- **Studienfach, Semester:**
- **Matrikelnummer:**
- **Anzahl der abgegebenen Blätter, inklusive Aufgabenblätter:**
- **(Nur für Studierende der Informatik) Hiermit bestätige ich, dass ich mich beim akademischen Prüfungsamt für diese Klausur angemeldet habe:**

____
Unterschrift

Erlaubte Hilfsmittel: Vorlesungsmitschriften, Bücher, Übungsblätter.

In der Klausur nicht erlaubte Hilfsmittel: Elektronische Geräte aller Art.

Achten Sie darauf, dass Rechenwege und Zwischenschritte vollständig und ersichtlich sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6 (Bonus)	Gesamt
erreichbare Punktzahl	20	25	25	15	15	10	100+10
erreichte Punktzahl							

Aufgabe 1 (20 Punkte) *Multiple Choice* **/20 Punkte**

Kreuzen Sie für jede der folgenden Fragen in jeder Zeile entweder „Ja" oder „Nein" an.

Bewertung: Bezeichnet $\#R$ die Anzahl der von Ihnen richtig angekreuzten Antworten und $\#K$ die Anzahl der von Ihnen insgesamt angekreuzten Antworten (d. h. nur solche, bei denen *entweder „Ja" oder „Nein"* angekreuzt wurde – Antworten, bei denen weder „Ja" noch „Nein" oder sowohl „Ja" als auch „Nein" angekreuzt wurde, zählen nicht zu $\#K$), so ergibt sich die folgende Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe:

$$\#R + \left\lfloor \frac{5 \cdot \#R}{\#K} \right\rfloor \text{ Punkte, falls } \#K > 0, \text{ und } 0 \text{ Punkte, falls } \#K = 0.$$

(a) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Das leere Wort ist stets ein Element der leeren Menge.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge der natürlichen Zahlen ist ein Alphabet.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede endliche Sprache kann von einem DFA akzeptiert werden.

(b) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Mit dem Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen kann man nachweisen, dass eine Sprache nicht regulär ist.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede reguläre Sprache hat endlich viele Äquivalenzklassen bezüglich der Myhill–Nerode-Relation.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen ist unter Komplementbildung abgeschlossen.

(c) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Jede kontextfreie Sprache ist regulär.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge $\{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 1\}$ ist kontextsensitiv, aber nicht regulär.
- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge $\{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 1\}$ ist entscheidbar, aber nicht kontextsensitiv.

(d) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Jede `LOOP`-berechenbare Funktion ist total.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede `WHILE`-berechenbare Funktion ist `LOOP`-berechenbar.
- ☐ Ja ☐ Nein Jede primitiv rekursive Funktion ist `LOOP`-berechenbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr?

- ☐ Ja ☐ Nein Die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{D}_i\}$ ist entscheidbar.
- ☐ Ja ☐ Nein Das Komplement der Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{D}_i\}$ ist entscheidbar.
- ☐ Ja ☐ Nein Das Komplement der Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathrm{D}_i\}$ ist in RE.

Aufgabe 2 (25 Punkte) *Reguläre Sprachen* | /25 Punkte |

(a) Gegeben sei die reguläre Grammatik $G = (\Sigma, N, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $N = \{S, A\}$ und

$$P = \{S \to aS \mid aA \mid b,\\ A \to b\}.$$

(i) Geben Sie zu der Grammatik G formal (nicht als Zustandsgraph) den NFA N mit $L(G) = L(N)$ an, welcher durch Verwendung des Verfahrens aus der Vorlesung (Beweis zu Satz 2.16 im Skript) entsteht.

(ii) Geben Sie einen regulären Ausdruck γ an, für den $L(\gamma) = L(G)$ gilt. Hierbei ist keine Herleitung gefordert.

(iii) Geben Sie einen zu N Äquivalenten Minimalautomaten M als Zustandsgraph an. Hierbei ist keine Herleitung gefordert.

(iv) Geben Sie $L(G)^0$, $L(G)^1$ und $L(G)^2$ jeweils formal als Menge von Wörtern an. | P. |

(b) Betrachten Sie den regulären Ausdruck $\gamma' = a(b)^*$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie den Zustandsgraphen eines NFA N' mit $L(N') = L(\gamma')$ an. Konstruieren Sie dazu N' wie in der Vorlesung beschrieben (Beweis zu Satz 2.23 im Skript) und geben Sie dabei jeden Teilautomaten als Zustandsgraphen an. | P. |

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Name: **Matrikelnummer:**

Aufgabe 3 (25 Punkte) *Kontextfreie Sprachen* **/25 Punkte**

(a) Gegeben sei der Kellerautomat $M = (\{a,b\}, \{\#, A, B\}, \{z_0, z_1, z_2\}, \delta, z_0, \#)$, wobei δ durch die folgenden Regeln definiert wird:

$$z_0\lambda\# \to z_0\lambda, \qquad z_0 a\# \to z_0 A, \qquad z_0 aA \to z_0 AA,$$
$$z_0 bA \to z_1 B, \qquad z_1\lambda B \to z_2 AAAA, \qquad z_2 bA \to z_2\lambda.$$

(i) Ist M deterministisch? Begründen Sie Ihre Antwort. P.

(ii) Betrachten Sie die Sprachen

- $L_1 = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m = n + 4 \text{ oder } n = m = 0\}$,
- $L_2 = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m = n + 4\}$,
- $L_3 = \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq n + 4 \text{ oder } n = m = 0\}$.

Geben Sie die Sprache L_i mit $i \in \{1,2,3\}$ an, für die $L_i = L(M)$ gilt. Zeigen Sie für die anderen beiden Sprachen L_j und L_k, dass $L_j \neq L(M)$ und $L_k \neq L(M)$ gilt. P.

(iii) Sei G die kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L(M)$, welche durch Anwendung des Verfahrens aus der Vorlesung (Beweis zu Satz 3.42 im Skript) aus M konstruiert wurde. Wie viele Regeln beinhaltet G? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie brauchen die Regeln von G nicht explizit angeben. P.

(b) Für eine kontextfreie Grammatik $G' = (\{a,b,c\}, \{S, A, B_1, C, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1\}, S, P)$ mit einer unbekannten Regelmenge P und für ein Wort $w = aabccb$ wurde mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami (CYK) die folgende Tabelle ausgefüllt.

i	1	2	3	4	5	6
5	S					
4						
3			Y_2			
2	Y_1, Z_1	Z_1				
1	X_1	Y_1	X_2		X_3	
0	A	A	B_1	C	C	B_1
j	a	a	b	c	c	b

Geben Sie mithilfe dieser Tabelle eine Ableitung von w für G' an. P.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 4 (15 Punkte) *Berechenbarkeit* | /15 Punkte |

Betrachten Sie die Paritätsfunktion $par : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$par(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

Im Folgenden ist eine Turingmaschine $M = (\Sigma, \Gamma, Z, \delta, z_0, \Box, F)$ gegeben, welche par berechnet.

- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- $\Gamma = \{0, 1, \Box\}$,
- $Z = \{z_e, z_0, z_1, z_2, z_3\}$,
- $F = \{z_e\}$,
- δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
0	$(z_0, 0, R)$	$(z_2, \Box, L)$	$(z_2, \Box, L)$	$(z_3, \Box, L)$
1	$(z_0, 1, R)$	$(z_3, \Box, L)$	$(z_2, \Box, L)$	$(z_3, \Box, L)$
$\Box$	$(z_1, \Box, L)$		$(z_e, 0, N)$	$(z_e, 1, N)$

(a) Berechnen Sie $par(5)$. Geben Sie dazu die Konfigurationenfolge von M bei Eingabe der Binärdarstellung $bin(5)$ von 5 an und geben Sie danach die Ausgabe der Turingmaschine M an. | P. |

(b) Ändern Sie M zu einer Turingmaschine M' ab, so dass M' die Funktion $par' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ berechnet mit | P. |

$$par'(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ ungerade,} \\ \text{undefiniert} & \text{falls } x \text{ gerade.} \end{cases}$$

(c) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen: | P. |

(i) par' ist `LOOP`-berechenbar.

(ii) par' ist partiell rekursiv.

(Hinweis: Sie sollten für Teilaufgabe **(c)** kurze Antworten finden können.)

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 5 (15 Punkte) *Pumping-Lemma für REG* **/15 Punkte**

Gegeben sei über dem Alphabet $\Sigma = \{a, m, p, u\}$ die Sprache

$$L = \{(pump)^k a^l \mid 1 \leq k < l\}.$$

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Beweis.

Behauptung: L ist nicht regulär.

Beweis: Angenommen, L wäre regulär. [Ab hier weiter argumentieren.]

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)

Aufgabe 6 (10 Bonuspunkte) *Abschlusseigenschaften* **/10 Punkte**

Gegeben sei die Sprache $L_1 = \{a^{n!} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a\}^*$, die durch folgende Grammatik G erzeugt wird: $G = (\{a\}, N, S, P)$, mit $N = \{S, A, B, C, D, L, M, N, R, X, Y\}$ und

$$\begin{array}{lll} P = \{S \to a \mid aa \mid XBMAAY, & XB \to XCDR, & DB \to DCDR, \\ \quad DM \to LMNRR, & RB \to BCR, & RM \to MCR, \\ \quad RA \to ACR, & RC \to CR, & RY \to ACY, \\ \quad XCL \to XBB, & DCL \to LBA, & AM \to MA, \\ \quad AB \to BA, & NC \to AN, & NA \to AN, \\ \quad NY \to AY, & X \to a, & B \to a, \\ \quad M \to a, & A \to a, & Y \to a\} \end{array}$$

Zeigen Sie mithilfe der Abschlusseigenschaften formaler Sprachen, dass $L = \{a^{n!}b^{n!} \mid n \geq 0\} \subseteq \{a, b\}^*$ kontextsensitiv ist.

(Bitte geben Sie alle Argumente vollständig und verständlich an!)