Institut für Informatik
M. Mutz

Übungsblatt 3

Theoretische Informatik

Bearbeitungszeit: 29.04.2024 bis 05.05.2024, 16:00 Uhr
Besprechung: 06.05.2024, 10:30 Uhr in Hörsaal 5E

Abgabe: als PDF über das ILIAS
Gruppenabgaben möglich und erwünscht

Aufgabe 1 (Reguläre Ausdrücke)10 Punkte
Gegeben sei der reguläre Ausdruck $\gamma = (a + b)^*a(b + bb)a^*$.

a) Geben Sie zwei Wörter an, die in $L(\gamma)$ liegen.

b) Geben Sie zwei Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an, die nicht in $L(\gamma)$ liegen.

c) Geben Sie einen NFA M an, sodass $L(M) = L(\gamma)$ gilt. Sie dürfen sich aussuchen, ob Sie den Zustandsgraphen oder die formale Darstellung wählen.

Lösungsvorschlag:

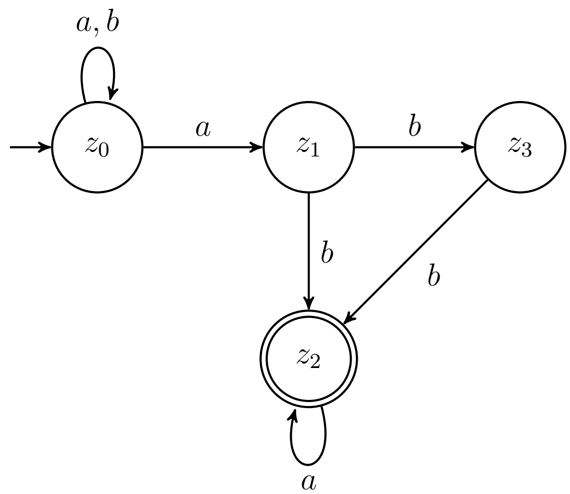
a) z.B. $ab \in L(\gamma)$, $aaaaaaabbbbbabbabab \in L(\gamma)$

b) z.B. $b \notin L(\gamma)$, $bb \notin L(\gamma)$

c) Verschiedenste Darstellungen und Ergebnisse möglich, z.B.
$M = (\{a, b\}, N, \delta, \{z_0\}, F)$ mit $N = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$, $F = \{z_2\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3
a	$\{z_0, z_1\}$	$\emptyset$	$\{z_2\}$	$\emptyset$
b	$\{z_0\}$	$\{z_2, z_3\}$	$\emptyset$	$\{z_2\}$

bzw. als Zustandsgraph:



Aufgabe 2 (NFA → DFA)15 Punkte

Gegeben sei der NFA $N = (\Sigma, Z, \delta, \{z_0\}, F)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $F = \{z_0, z_1, z_2, z_3\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4
a	$\{z_2, z_3\}$	$\{z_4\}$	$\{z_2\}$	$\{z_3\}$	$\{z_4\}$
b	$\{z_1, z_2\}$	$\{z_1\}$	$\{z_2\}$	$\{z_4\}$	$\{z_4\}$
c	$\{z_1, z_3\}$	$\{z_1\}$	$\{z_4\}$	$\{z_3\}$	$\{z_4\}$

(a) Konstruieren Sie mit der Methode aus der Vorlesung einen zu N äquivalenten DFA M. Dabei ist M in der formalen Darstellung anzugeben, nicht als Zustandsgraph. *Überlegen Sie sich, ob Sie wirklich alle möglichen Zustände in der Potenzmenge betrachen müssen. Wenn Sie Ihre Zustände umbenennen wollen müssen Sie dies angemessen definieren.*

(b) Geben Sie $L(M)$ formal als Menge von Wörtern an, ohne weiteren Bezug auf M oder N zu nehmen.

(c) Prüfen Sie schrittweise mit Hilfe der erweiterten Überführungsfunktion von M, ob $w_1 = baac \in L(M)$ gilt.

(d) Prüfen Sie schrittweise mit Hilfe der erweiterten Überführungsfunktion von N, ob $w_2 = aaca \in L(N)$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Wir betrachten nur Zustände, die vom Startzustand aus erreichbar sind. Für eine übersichtlichere Darstellung wird eine Zustandsmenge $\{z_i, z_j\}$ als z_{ij} geschrieben.

Die Konstruktion ergibt folgenden DFA $M = (\Sigma, Z', \delta', z_0, F')$ mit

$Z' = \{z_0, z_4, z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34}\}$, $F' = Z' \setminus \{z_4\}$ und δ' wie folgt:

δ'	z_0	z_4	z_{12}	z_{13}	z_{14}	z_{23}	z_{24}	z_{34}
a	z_{23}	z_4	z_{24}	z_{34}	z_4	z_{23}	z_{24}	z_{34}
b	z_{12}	z_4	z_{12}	z_{14}	z_{14}	z_{24}	z_{24}	z_4
c	z_{13}	z_4	z_{14}	z_{13}	z_{14}	z_{34}	z_4	z_{34}

(b) $L = \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält nicht alle verschiedenen Buchstaben$\}$

(c) $w_1 = baac$

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta'}(z_0, baac) &= \delta'(\delta'(\delta'(\delta'(z_0, b), a), a), c) \\
&= \delta'(\delta'(\delta'(z_{12}, a), a), c) \\
&= \delta'(\delta'(z_{24}, a), c) \\
&= \delta'(z_{24}, c) \\
&= z_4 \notin F
\end{aligned}$$

(d) $w_2 = aaca$

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(\{z_0\}, aaca) &= \widehat{\delta}(\delta(z_0, a), aca) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_2, z_3\}, aca) = \widehat{\delta}(\delta(z_2, a), ca) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_3, a), ca) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_2\}, ca) \cup \widehat{\delta}(\{z_3\}, ca) \\
&= \widehat{\delta}(\delta(z_2, c), a) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_3, c), a) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_4\}, a) \cup \widehat{\delta}(\{z_3\}, a) \\
&= \widehat{\delta}(\delta(z_4, a), \lambda) \cup \widehat{\delta}(\delta(z_3, a), \lambda) \\
&= \widehat{\delta}(\{z_4\}, \lambda) \cup \widehat{\delta}(\{z_3\}, \lambda) = \{z_3, z_4\} \\
&\{z_3, z_4\} \cap F \neq \emptyset \\
&\implies w_2 \in L(N)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Endliche Automaten und Grammatiken)15 Punkte

(a) Betrachten Sie folgenden DFA $M = (\Sigma, Z, \delta, z_0, F)$ mit $\Sigma = \{a, b\}$, $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, $F = \{z_3, z_4\}$ und δ wie folgt:

δ	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
a	z_1	z_2	z_3	z_1	z_5	z_5
b	z_5	z_5	z_5	z_4	z_4	z_5

Geben Sie eine reguläre Grammatik G mit $L(G) = L(M)$ an. Konstruieren Sie dazu die Grammatik wie im Beweis von Satz 2.7, bzw. Kapitel 2 Folie 18.

(b) Geben Sie zu folgender Grammatik formal einen NFA M an. Verwenden Sie das Verfahren aus dem Beweis zu Satz 2.16, bzw. Kapitel 2 Folie 47.

$G = (\Sigma', N, S, P)$ mit $\Sigma' = \{0, 1\}$, $N = \{S, W_1, A_1, B_1, C_1, W_2, A_2, B_2\}$ und

$$\begin{aligned}
P = \{S &\to 0W_1 \mid 0W_2,\\
W_1 &\to 0A_1 \mid 1A_1,\\
A_1 &\to 0B_1 \mid 1B_1,\\
B_1 &\to 0C_1 \mid 1C_1,\\
C_1 &\to 0 \mid 1 \mid 0A_1 \mid 1A_1,\\
W_2 &\to 0A_2 \mid 1A_2,\\
A_2 &\to 0B_2 \mid 1B_2,\\
B_2 &\to 0 \mid 1 \mid 0A_2 \mid 1A_2\}
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag:

a) 7 Punkte:

Die Konstruktion ergibt folgende Grammatik $G = (\Sigma, Z, z_0, P)$ mit

$$\begin{aligned}
P = \{z_0 &\to az_1 \mid bz_5,\\
z_1 &\to az_2 \mid bz_5,\\
z_2 &\to az_3 \mid bz_5 \mid a,\\
z_3 &\to az_1 \mid bz_4 \mid b,\\
z_4 &\to az_5 \mid bz_4 \mid b,\\
z_5 &\to az_5 \mid bz_5\}.
\end{aligned}$$

b) 8 Punkte:

Die Konstruktion ergibt folgenden NFA $M = (\Sigma', Z, \delta, \{S\}, F)$ mit $Z = N \cup \{X\}$, $F = \{X\}$ und δ wie folgt:

δ	S	W_1	A_1	B_1	C_1	W_2	A_2	B_2
0	$\{W_1, W_2\}$	$\{A_1\}$	$\{B_1\}$	$\{C_1\}$	$\{A_1, X\}$	$\{A_2\}$	$\{B_2\}$	$\{A_2, X\}$
1	$\emptyset$	$\{A_1\}$	$\{B_1\}$	$\{C_1\}$	$\{A_1, X\}$	$\{A_2\}$	$\{B_2\}$	$\{A_2, X\}$