

Übung 4:

Aufgabe 1:

a) Angenommen, L sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit:

1. $|uv| \leq p$
2. $|v| > 0$
3. $(\forall i \in \mathbb{N}) [uv^i w \in L]$

$L_1 = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0, n < m\}$ über $\Sigma = \{0, 1\}$ \Rightarrow es muss weniger 0 als 1, damit Wort in L
Bew.:

Wir wählen $x = 0^n 1^m \in L$ und $|x| \geq p$, mit $uv = 0^n, w = 1^m$

- 1.) $uv \subseteq_{\text{pre}} 0^n \Rightarrow uv < p$
- 2.) $|v| > 0$
- 3.) Sei $i \geq |w| \Rightarrow uv^i w \notin L \quad \nexists$

\Rightarrow Sprache ist nicht regulär, da Annahme falsch ist

b) $L_2 = \{a^{2^k} \mid k \geq 0\}$ über $\Sigma = \{a\}$

Angenommen, L sei regulär. Dann existiert nach dem Pumping-Lemma eine Zahl $n \geq 1$, s.d. für alle $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert mit:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| > 0$
3. $(\forall i \in \mathbb{N}) [uv^i w \in L]$

Bew: Wir wählen $x = a^{2^p} \in L$ und $|x| = 2^p \geq p$

Sei $x = uvw$

1. $|uv| \leq p \Rightarrow uv = a^k \quad k \leq p$
 2. $|uv| \geq 1 \Rightarrow v = a^j \quad 0 < j \leq k \leq p$
- } Zerlegung von uv
in v

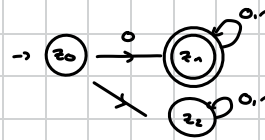
$$i=2 \quad uv^2 w = a^{2^p + j} \in L$$

$$2^p < 2^p + j \leq 2^p + p < 2^p + 2^p \leq 2^{p+1} \quad \nexists$$

$2^p < 2^p + j < 2^{p+1} \Rightarrow$ Dann wären wir zw. den Zweierpotenzen, wodurch nicht in L
beim aufpumpen und damit nicht-regulär

Aufgabe 2:

a) i) $L_1 = \{0\omega \mid \omega \in \Sigma^*\}$ über $\Sigma = \{0,1\}$



Annahme: Sprache L_1 sei regulär. Demnach gilt

für $x, y \in \Sigma^*$ $x R_L y$, da $(\forall z \in \Sigma^*) [xz \in L \Leftrightarrow yz \in L]$ mit $\text{Index}(R_L) < \infty$

Wir haben Äquivalenzklassen:

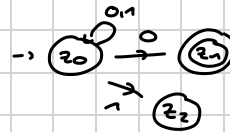
$[\lambda]$ Start

$[0] = \{0\omega \in \Sigma^* \mid \text{jedes Wort beginnt mit 0}\} \in L \Rightarrow \text{alle gelangen in Endzustand}$

$[1] = \{0\omega \in \Sigma^* \mid \text{jedes Wort beginnt mit 1}\} \notin L \Rightarrow \text{alle gelangen in gl. Zustand}$

\Rightarrow Es gibt endliche Zahl an Äquivalenzklassen, demnach liegt eine reguläre Sprache vor

ii) $L_2 = \{\omega 0 \mid \omega \in \Sigma^*\}$ über $\Sigma = \{0,1\}$



Annahme wie bei a)

Äquivalenzklasse:

$[\lambda]$: Start

$[\omega 0] = \{\omega 0 \in \Sigma^* \mid \text{jedes Wort endet mit 0}\} \in L$

$[\omega 1] = \{\omega 1 \in \Sigma^* \mid \text{jedes Wort endet mit 1}\} \notin L$

\Rightarrow Da endliche Anzahl an Klassen ist die Sprache regulär

b) 1. Zustände die wegfallen: z_3

4. Zustandspaar 0 1

2.3.

	z_0	z_1	z_2	z_4	z_5	z_6	z_7
z_3	X	O	X	X	X	X	X
z_6	X	X	X	X	X	X	X
z_5	X	X	X	X	X	X	X
z_4	O	X	X	X	X	X	X
z_2	X	X	X	X	X	X	X
z_1	X	X	X	X	X	X	X
z_0	X	X	X	X	X	X	X

\Rightarrow Fusionierung: $\{z_2, z_3\}, \{z_0, z_4\}$

z_0, z_4	<u>z_1, z_6</u>	z_2, z_5	\Rightarrow bereit gestr.
z_1, z_7	z_6	z_2	
z_5, z_7	<u>z_2, z_6</u>	<u>z_1, z_6</u>	\Rightarrow bereits gestr.
z_0, z_6	<u>z_1, z_6</u>	z_4, z_5	\Rightarrow ber. gestr.
z_0, z_3	<u>z_1, z_2</u>		\Rightarrow "
z_1, z_5	<u>z_6, z_2</u>	<u>z_2, z_6</u>	\Rightarrow "
z_0, z_6	z_1, z_6	<u>z_4, z_5</u>	\Rightarrow "
z_0, z_4	z_1, z_7	z_5	
z_1, z_4		<u>z_2, z_5</u>	
z_0, z_1		<u>z_1, z_5</u>	

5. \Rightarrow alle Zustände:

	0	1
$\{z_0, z_4\}$	$\{z_1, z_7\}$	z_5
$\{z_1, z_7\}$	z_6	z_2
z_5	z_2	z_6
z_6	z_6	$\{z_0, z_4\}$
z_2	$\{z_0, z_4\}$	z_2

Äquivalenzklassen: $[\lambda], [\{z_0, z_4\}], [\{z_1, z_7\}], [z_5], [z_6], [z_2]$

