Übungsblatt 13.

Aufgabe 1:

a) z.z.: $\leq_m^p$ ist reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch

Bew.: Reflexivität: Sei $f(x) = x$. Sei $x \in \mathbb{N}$, dann ist $x \in A \Leftrightarrow f(x) = x \in A$. Somit ist $A \leq_m^p A$

Transitivität: Es sei $A \leq_m^p B$ $B \leq_m^p C$, dann muss $f, g \in FP$, s.d. $\forall x \in \mathbb{N}$ gilt: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ und $x \in B \Leftrightarrow g(x) \in C$.

sei $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, so gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow h(x) = g(f(x)) \in C$.

h ist in Polynomialzeit lösbar, da erst Turingmaschine für f und dann Turingmaschine g mit Ergebnis von f durläuft. Beides in Polynomialzeit. Demnach auch h.

Nicht-Antisymmetrisch: Sei A Sprache mit allen Wörtern $x \in \Sigma^*$ $|x|$-gerade

sei B " " " " " " " $|x|$-ungerade.

$f(x) = xy$ mit $y \in \Sigma^*$ A und B werden mit f berechnet, wodurch

gilt: $A \leq_m^p B$ und $B \leq_m^p A$. Demnach sind beide in Polynomialzeit lösbar und obwohl $A \neq B$,

können sie sich gegenseitis reduzieren.

b) $A \leq_m^p B \Leftrightarrow \bar{A} \leq_m^p \bar{B}$

Da $A \leq_m^p B$ gilt $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$ mit $f \in FB$.

Dann gilt $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow f(x) \notin \bar{B} \Leftrightarrow f(x) \in B$. Somit ist $\bar{A} \leq_m^p \bar{B}$

Aufgabe 2:

Damit Reduzierbarkeit gilt, muss $w_n \in L_n \Leftrightarrow f(w_n) \in K$, damit $K \leq_m L_n$.

M_{w_n} hält, wenn $0 \in w_n$. M_w simuliert M_{w_n}. Sollte M_w nach endlich Schritten anhalten, so muss $0 \in w_n$ und damit $w_n \in L_n$.

Wenn M_w nicht hält, dann $0 \notin w_n$ und $w_n \notin L_n$. Gleiches lässt sich mit M_{w_n} und M_w machen, wobei M_w bei M_{w_n} immer hält.

Demnach lässt sich L_n in mehreren kleineren Probleminstanzen von K lösen. Also L_n lässt sich auf mehrere K Alg. aufteilen.

Damit gilt $K \leq_m L_n$, da K unentscheidbar, so auch L_n.

Aufgabe 3

a) $L_1 = \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist ein Palindrom} \}$

Sei L_1 eine reguläre Sprache, dann gibt es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = vwx$ existiert, wobei gilt:

1. $|vw| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. $(\forall i \geq 0)(uv^iw \in L)$

Da Palindrom, wird Wort ab Mitte gespiegelt, demnach gilt: $\alpha^n\alpha^n$ (ganze ginge auch analog für $\alpha^n\alpha^n$. Das ist einfach nur eine Präferenz)

Wähle Zerlegung $x = \alpha^n\alpha^n = \alpha^a\alpha^k\alpha^n \Rightarrow 2n \geq n$

Mit $u = \alpha^a$, $v = a^k$, $w = \alpha^n$

Wir pumpen v auf:

Für $i=2$: $uv^2w = \alpha^a\alpha^{k+2}\alpha^n = \alpha^2\underbrace{\alpha^a\alpha^k}_{a+k=n}\alpha^n = \alpha^2\alpha^n\alpha^n = \alpha^{n+2}\alpha^n \notin L$

$\Rightarrow$ Es liegt ein Widerspruch vor, demnach ist L_1 nicht regulär.

b) $L_2 = \{ y^k \mid y \in \{a,b\}^*, k \geq 2 \} \subseteq \{0,1\}^*$

Sei L_2 eine reguläre Sprache, so existiert eine Zahl $n \geq 0$, sodass für alle Wörter $x \in \Sigma^*$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung $x = uvw$ existiert, wobei gilt:

1. $|uv| \leq n$
2. $|v| \geq 1$
3. $(\forall i \geq 0)(uv^iw \in L)$

Wähle $x = y^{2n} \Rightarrow 2n \geq n$

Mit Zerlegung $u = y^a$, $v = y^k$, $w = y^{2n-a-k} \Rightarrow a+k \leq n$ und $k > 0$

Pumpen $i=2$: $uv^2w = y^a y^{2k} y^{2n-a-k} = y^{a+2k+2n-a-k} = y^{k+2n}$

y^{k+2n} kann nicht Form y^{2n} einhalten, da $k > 0$, demnach $y^{k+2n} \notin L$

$\Rightarrow$ Widerspruch, L ist nicht regulär

Aufgabe 4:

Sei L_1 eine kontextfreie Sprache, dann existiert eine Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass für alle Wörter $r \in \Sigma^*$ mit $|r| \geq n$ eine Zerlegung $r = uvwxy$ existiert, wobei gilt:

1. $|vwx| \leq n$
2. $|vx| \geq 1$
3. $(\forall i \geq 0)(uv^iwx^iy \in L)$

Wähle $r = a^{n^2} \Rightarrow |r| = n^2 \geq n$ mit $uvwxy = a^{n^2}$

Demnach gilt $u = a^l$, $y = a^{n^2-k-l}$, $vwx = a^k$, mit $k \leq n$ und $v = a^a$, $x = a^b$, $a,b \geq 1$

Pumpen: $uv^2wx^2y = a^l a^{2a} a^{k-a-b} a^{2b} a^{n^2-k-l} = a^a a^k a^b a^{n^2-k} = a^a a^b a^{n^2} \Rightarrow a^a a^b a^{n^2} \notin L$, da keine Quadratzahl für bel. $a,b \geq 1$.

Es liegt ein Widerspruch vor. Demnach ist L nicht kontextfrei.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie mit Hilfe der Abschlusseigenschaften von kontextfreien Sprachen, dass $L = \{0^m 1^n \mid m, n \geq 1, n \neq m\} \subseteq \{0,1\}^*$ kontextfrei ist.

Hinweis: Sie dürfen die aus der Vorlesung bekannten Sprachen $\{0^n \mid n \geq 1\}$ und $\{0^m 1^m \mid m \geq 1\}$ nutzen.

z.z. $L = \{0^m 1^n \mid m,n \geq 1 \ , \ m \neq n\}$ kontextfrei

Nutze $L_1 = \{0^n \mid n \geq 1\}$ $L_2 = \{0^m 1^m \mid m \geq 1\}$

$L_3 = \{1^n \mid n \geq 1\}$

Bilde Vereinigung und Konkenation von L_1 und L_2