Analisi II - Successioni di funzioni

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Foglio n.1

Analizzare la convergenza puntuale e uniforme della seguenti successioni di funzioni:

1. $f_n(x) = [\sin(x)]^{\frac{1}{n}}$
2. $f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
3. $f_n(x) = \frac{x}{nx-1}$
4. $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$
5. $f_n(x) = e^{-nx} \ \sin(nx)$
6. $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2(x^2-1)^2}$
7. $f_n(x) = \frac{nx+1}{2+n}$
8. $f_n(x) = \frac{n+n^{x^3}}{(n+x^2)^{2x^2}}$
9. $f_n(x) = \left[1 + (x-n)^2\right]^2 \ \left[\cos^2\left(\frac{1}{1+(x-n)^2}\right) - 1\right]$
10. $f_n(x) = \displaystyle\int_{n^x}^{n^{2x}} \frac{1}{t} \ \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \ dt$
11. $f_n(x) = nx \ e^{-nx^2}$
12. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$
13. $f_n(x) = \frac{1}{n} \ \sin(nx)$
14. $f_n(x) = \frac{n^2 \ \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{1+n^2x^2}}$

*esercizi dei prof. *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

15. $f_n(x) = \sin\left[\frac{x}{2+\sin^n(x)}\right]$

16. $f_n(x) = n\ \left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right)$

17. $f_n(x) = \frac{nx\ \arctan(nx)}{\sqrt{n^2+x^2}}$

18. $f_n(x) = x^n\ e^{-(x+1)^n}$

19. $f_n(x) = \left(x^{2n} + 1\right)^{\frac{1}{n}}$

2 Foglio n.2

Analizzare la convergenza puntuale e uniforme della seguenti successioni di funzioni:

1. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < 2$, si ha che $f_n(x)$ converge uniformemente in $I = [-1, 1]$ con:
$$f_n(x) = \frac{n^\alpha \ x}{1 + n^2 x^2}$$

2. $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \le x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

3. $f_n(x) = \frac{n \ (x-1)}{x^n}$
Provare che:
   - $f_n(x)$ converge puntualmente in $[1, +\infty)$.
   - $f_n(x)$ non converge uniformemente in $[1, +\infty)$.
   - $f_n(x)$ non converge uniformemente $[1, 2]$.
   - $f_n(x)$ converge uniformemente in $[2, +\infty)$.

4. $f_n(x) = n \ \sin\left(\frac{x}{n}\right)$
Studiare la convergenza in $\mathbb{R}$ e in $[a, b]$

5. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{a_n\} \to 0$:
   - $f_n(x) = a_n^2 \ x^n$ su $x \in [-1, 1]$
   - $f_n(x) = e^{-(x-a_n)^2}$ su $x \in \mathbb{R}$ e $x \in [a, b]$
   - $f_n(x) = e^{-\left(x - \frac{1}{a_n}\right)^2}$ su $x \in \mathbb{R}$ e $x \in [a, b]$

6. $f_n(x) = 1 + n \ \sin\left[\frac{x \ \arctan(x) \ \ln(x^2+1)}{n^2}\right]$ su $I = [0, +\infty)$

7. $f_n(x) = n \ \int_n^{n+1} \sin(\frac{x}{t}) \ dt$

8. $f_n(x) = e^{-\left(x-\frac{1}{n}\right)^2} \ \cos\left[e^{\left(x-\frac{1}{n}\right)^2}\right]$ in $\mathbb{R}$ e in $[a, b]$

9. $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ n \ \left(x - \frac{1}{2}\right) & x \in \left(\frac{1}{2}; \ \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \\ 1 & x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \ 1\right] \end{cases}$

3 Foglio n.3

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di:
$$f_n(x) = \frac{x\ \cos(nx)}{n}$$
con $x \in \mathbb{R}$

2. Si consideri $f_n:\ [0,1] \to \mathbb{R}$, dove $f_n(x) = x^n\ (1-x^n)$, $n \geq 1$:
   - Determinare l'insieme di convergenza puntuale $L \subseteq [0,1]$, e la funzione limite $f = f(x)$, $f:\ L \subseteq [0,1] \to \mathbb{R}$
   - Studiare la convergenza uniforme di f_n e f sia su L sugli intervalli $[0,l]$ con $0 < l < 1$

3. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:
$$f_n(x) = n^2 x^2\ (1-x)^n$$
su $x \in [0,1]$

4. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:
$$f_n(x) = e^{-nx}\ \arctan(nx)$$
su $x \in \mathbb{R}$

5. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2nx}{n-1} & x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \\ 3 - \frac{n^2}{4}\left(\frac{1-n}{n} + x\right)^2 & x \in \left(1-\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

6. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni:
$$f_n(x) = \frac{n\ x^{\frac{1}{3}}}{2 + n^2 x^2}$$
su $x \in [1, +\infty)$

7. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni al variare del parametro $p \in \mathbb{R}$:
$$f_n(x) = n^p\ x\ e^{-nx}$$
su $x \in [0,1]$

8. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della seguente successione di funzioni:
$$f_n(x) = \sqrt{\cos^2(x) + \frac{1}{n^4}}$$
su $x \in \mathbb{R}$