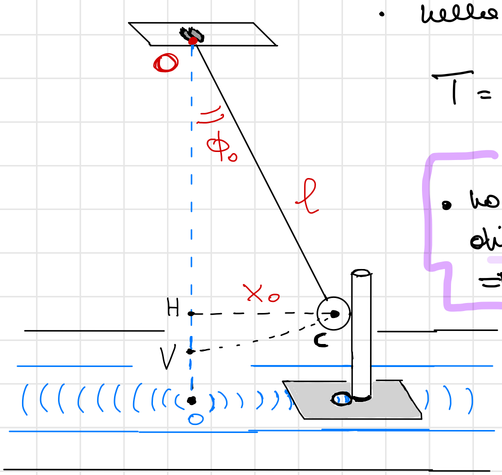
* MISURE DI TEMPO ⟹ PERIODO



- nella nostra configurazione sperimentale

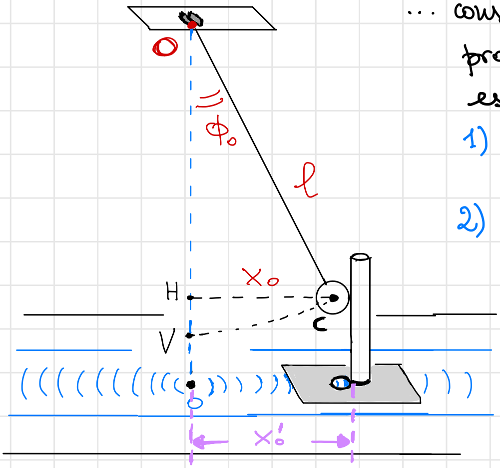
$$T = T(\phi_0) = \underbrace{\left(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)}_{=T_0}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\ \ldots\right)$$

- noi misureremo il periodo $T(\phi_{0i})$ per diversi valori dell'ampiezza angolare ⟹ $\{\phi_{0i},\ i=1\ldots5\}$, che SCEGLIEREMO in modo che siano SUFFICIENTEMENTE DIFFERENTI da consentire anche di mettere in evidenza l'ANISOCRONISMO delle OSCILLAZIONI...

⟹ dovremo quindi scegliere sulla scala centimetrica posta sul bancone 5 valori di x_0 (x_{0i}, $i=1\ldots5$) e per ciascuno di questi ($x_{0i} \Rightarrow \phi_{0i}$) andrà effettuata la serie di misure di intervalli di tempo che ci porterà alla misura del PERIODO di oscillazione corrispondente, $T(\phi_{0i})$, con la sua incertezza sperimentale $\Delta T(\phi_{0i})$.... vedremo come...

* Per la misura DIRETTA degli opportuni intervalli di tempo abbiamo a disposizione un CRONOMETRO MANUALE, con errore di sensibilità pari a 0.01 s, ma che deve essere AZIONATO, in partenza e stop, dallo SPERIMENTATORE ⟹ ci aspettiamo, SULLA MISURA DIRETTA, INCERTEZZE SPERIMENTALI SUPERIORI all'errore di sensibilità, dato che l'AZIONAMENTO MANUALE comporta un contributo alle incertezze a causa della capacità di reazione (riflessi...) dello sperimentatore e alla indeterminazione sull'istante in cui effettivamente il pendolo passa, nel suo moto, dal riferimento (di posizione) scelto.... (ci torneremo più avanti...) ⟹ questa fonte di errore, che indichiamo con Δt_{az} = "errore di azionamento manuale", NON è univocamente quantificabile (dipende dallo sperimentatore e da molti fattori), ma COME ORDINE DI GRANDEZZA "A PRIORI" ci aspettiamo contributi ALL'INCERTEZZA SULLA MISURA DI TEMPO DIRETTA, dell'ordine di $\Delta t_{az} \sim 0.1\,s$

⟹



... consideriamo uno dei valori scelti per $\phi_0 \Rightarrow \phi_{0i}$; procederemo nella descrizione delle misure esaminando:

1) come OTTIMIZZARE le condizioni di misura e le procedure,

2) come effettuare le misure di tempo, come analizzarle e come ricavare il PERIODO $T(\phi_{0i}) \pm \Delta T(\phi_{0i})$.

1) OTTIMIZZAZIONE: PROCEDURE E ACCORGIMENTI

A) ATTENZIONI NEL RILASCIO DELLA SFERETTA

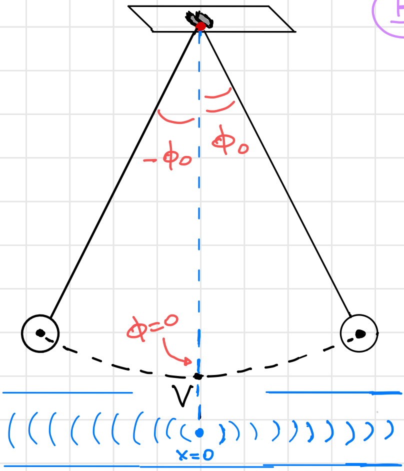
per mettere il pendolo in oscillazione in modo "corretto":

"moto oscillatorio su un piano verticale"

* spostare il pendolo dalla sua posizione di equilibrio mantenendo il filo teso, ma NON TIRANDOLO, e
* traslare la sferetta fino alla posizione di rilascio, EVITANDO di ruotarla (attorno alla direzione del filo) rispetto alla sua orientazione nella posizione di equilibrio
* nell'effettuare una serie di misure (dell'intervallo di tempo da valutare) per un dato valore x_{0i} di x_0, ad ogni rilascio (cioè per ciascuna delle misure della serie in questione) fare attenzione a ricollocare la sferetta a contatto col cilindretto in modo da riprodurre al meglio possibile il valore x_{0i} (e dunque di ϕ_{0i}) scelto (... anche se $\Delta x_0 = 5$ mm ...) $\Rightarrow$ RIPRODUCIBILITA' del valore di ϕ_0 scelto...
* rilasciare la sferetta avendo cura di NON imprimerle spinte iniziali, né longitudinali, né trasversali a quella che sarà la direzione del moto ($\Rightarrow$ vogliamo un moto PIANO e con $v(t=0)=0$!!)

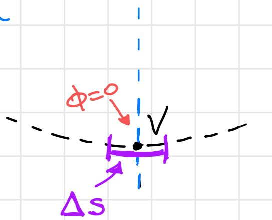
→ una volta rilasciato correttamente il pendolo inizia il suo moto oscillatorio: adesso ci chiediamo quando e come azionare il cronometro e quale intervallo di tempo misurare DIRETTAMENTE →

(B) ACCORGIMENTI E SCELTE PER EFFETTUARE MISURE DI TEMPO CORRETTE



* SCELTA DEL RIFERIMENTO per l'azionamento del cronometro ⇒ per fare partire e fermare il cronometro occorre considerare il passaggio del pendolo dalla posizione più conveniente lungo la sua traiettoria, posizione che sarà il nostro riferimento e che deve dunque essere tale da indurre al minore errore possibile nella determinazione dell'istante di effettivo passaggio, istante in cui va azionato il cronometro.

Analogamente al caso del pendolo di torsione, che avete già visto, il miglior riferimento è il passaggio per la posizione di MASSIMA VELOCITÀ (sia angolare che tangenziale ⇒ $v_\phi = l\dot{\phi}$!!) lungo la traiettoria, ovvero la posizione angolare $\phi=0$, corrispondente alla posizione del punto C (centro della sferetta ≡ punto materiale !!) quando il pendolo è a riposo. ⇒ il nostro occhio è "incerto" su un intervallino spaziale Δs lungo la traiettoria e centrato attorno al punto scelto come riferimento per il passaggio del pendolo; Δs NON dipende dal punto scelto come riferimento, quindi l'intervallo di tempo Δt che il pendolo (punto C) impiega a percorrerlo sarà MINIMIZZATO se scegliamo come riferimento il punto della traiettoria in cui la VELOCITÀ È MASSIMA → $\Delta s = v_\phi \Delta t \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v_\phi} \Rightarrow \Delta t_{min} = \frac{\Delta s}{(v_\phi)_{MAX}}$



⇒ la scelta del riferimento nel punto di massima velocità minimizza l'indeterminazione sull'istante di effettivo passaggio, indeterminazione che è uno dei fattori che contribuiscono a definire l'incertezza dovuta all'azionamento manuale del cronometro.

* POSIZIONE DI OSSERVAZIONE :

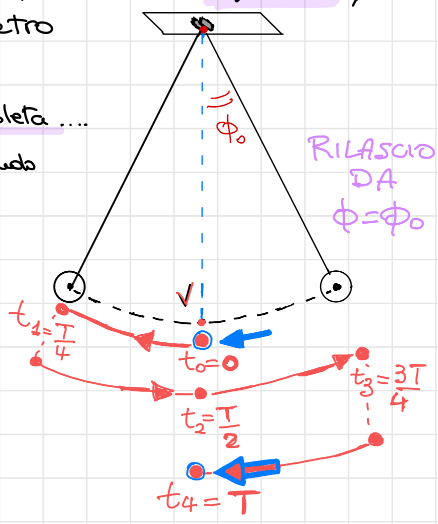
è opportuno porsi in una posizione tale da minimizzare eventuali "errori di parallasse" nel giudicare il passaggio ⇒ per ogni azionamento del cronometro occorre mettersi sempre di fronte alla posizione di riferimento, in modo da avere la linea di vista normale al piano del moto

* VALUTAZIONE DI UNA OSCILLAZIONE COMPLETA

⇒ la durata di una oscillazione completa è pari ad un periodo T.

⇒ poichè consideriamo come riferimento il passaggio da $\phi = 0$ (il punto V sulla traiettoria, corrispondente alla posizione a riposo del "punto materiale" C), dobbiamo assicurarci di saper valutare quando, una volta azionato in partenza il cronometro ($t_0 = 0$) al passaggio dal riferimento, sarà stata compiuta una oscillazione completa ....

⇒ abbiamo una OSCILLAZIONE COMPLETA quando il pendolo ripassa dal punto V ($\phi=0$) CON LA VELOCITÀ NELLO STESSO VERSO che aveva quando ci è passato ALL'INIZIO dell'oscillazione ....



* INTERVALLO DI TEMPO DA MISURARE DIRETTAMENTE

- come già visto nel caso del pendolo di torsione, anche nel nostro caso non conviene misurare DIRETTAMENTE la durata di una singola oscillazione (cioè un intervallo di tempo pari ad un singolo periodo), bensì LA DURATA DI UN CERTO NUMERO DI OSCILLAZIONI, n, ovvero l'intervallo di tempo

$$\boxed{\tau = \tau(n) = nT}$$ (misura DIRETTA)

e poi ricavare T INDIRETTAMENTE dalla misura di τ

⇒ in questo modo, se misuro $\tau(n) \pm \Delta\tau(n)$ direttamente, otterrò il singolo periodo come

$$\boxed{T = \frac{\tau(n)}{n} \pm \frac{\Delta\tau(n)}{n}}$$

⇒

⇒ dunque, alla misura indiretta di T assoceremo come incertezza sperimentale ΔT quella ottenuta come

$$\Delta T = \frac{\Delta \tau(n)}{n} .$$

⇒ misuriamo direttamente la durata di n oscillazioni (con $n>1$) per ridurre l'incidenza sul singolo periodo $T \pm \Delta T$ delle fonti di incertezza dovute all'azionamento manuale del cronometro, cioè l'incertezza sulla determinazione dell'istante effettivo di passaggio del pendolo dal riferimento (sia all'inizio che alla fine dell'intervallo di tempo $\tau(n)$ da misurare) e il tempo di reazione dello sperimentatore.

Questa è una strategia che adottiamo perché anche "a priori" sappiamo che l'uso di un cronometro manuale inevitabilmente introdurrà sulla misura di tempo DIRETTA un'incertezza, che indicheremo con $(\Delta t)_{az}$, sicuramente superiore all'errore di sensibilità del cronometro (pari a $0.01\,s$).

⇒ $(\Delta t)_{az}$ sintetizza l'effetto delle fonti di incertezza dovute all'azionamento manuale e che abbiamo menzionato sopra; come già detto NON è univocamente quantificabile, ma possiamo considerarne un valore rappresentativo come ordine di grandezza per una stima "a priori" del suo effetto sulle misure di tempo ⇒ prendiamo quindi, come valore indicativo un $(\Delta t)_{az}$ intorno a

"A PRIORI"

$$(\Delta t)_{az} \sim 0,1\,s .$$

⇒

⇒ Consideriamo $(\Delta t)_{az}$ come l'incertezza dominante, a priori, sulla misura diretta $\tau(n)$ ⇒ $\tau(n) \pm (\Delta t)_{az}$

- Se scegliessimo $n = 1$ ⇒ misura DIRETTA: $\tau(n) = \tau(1) = T$

$$\Rightarrow \tau(n=1) \pm (\Delta t)_{az} = T \pm (\Delta t)_{az} \Rightarrow (\Delta T)_{AP} = (\Delta t)_{az} \quad e \quad \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{AP} = \frac{(\Delta t)_{az}}{T}$$

(AP = "a priori")

- Se invece misuriamo direttamente la durata di un numero $n > 1$ di oscillazioni allora avremo

$$\tau(n) \pm (\Delta t)_{az} \quad \text{ma} \quad T = \frac{\tau(n)}{n} \pm \frac{(\Delta t)_{az}}{n} \Rightarrow (\Delta T)_{AP} = \frac{(\Delta t)_{az}}{n}$$

$$e \quad \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{AP} = \frac{(\Delta t)_{az}}{T} \cdot \frac{1}{n}$$

⇒ è evidente che misurando DIRETTAMENTE la durata di un numero $n\ (>1)$ di oscillazioni, si riduce l'effetto dell'azionamento manuale sulla misura INDIRETTA del periodo T: $(\Delta t)_{az}$ è come "redistribuito" sulle n oscillazioni e incide (molto) meno sulla misura del periodo, per la quale possiamo ottenere una maggiore precisione.

⇒ LIMITAZIONI SUL NUMERO DI OSCILLAZIONI n

- Perchè allora non è il caso di armarsi di pazienza e misurare la durata $\tau(n)$ di un numero molto elevato n di oscillazioni [$\tau(n=100)$ o $\tau(n=1000)$!!] e dunque ridurre di più ordini di grandezza l'incidenza dell'errore di azionamento sulla misura del periodo ??

- Per rispondere a questa domanda occorre tenere presente che l'osservazione del moto reale del pendolo mostra che le oscillazioni risultano lentamente, ma progressivamente SMORZATE (cioè diminuisce l'ampiezza angolare). Questo avviene a causa dell'azione degli attriti sul pendolo, INTRINSECAMENTE DI PICCOLA ENTITÀ MA CON AZIONE CONTINUA durante il moto (resistenza dell'aria ....).

$\Rightarrow$ è un effetto piccolo, ma, con l'aumentare del numero di oscillazioni compiute dal rilascio del pendolo, risulta progressivamente visibile sull'ampiezza angolare dell'oscillazione $\Rightarrow$ col crescere di n diventa sensibile ...

$\Rightarrow$ vedremo meglio in seguito che nel LIMITE P.O. l'effetto sul periodo, T_0, risulta essenzialmente trascurabile, MA NEL REGIME DI OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA, in cui operiamo, abbiamo $T = T(\phi_0)$ e, dopo un numero cospicuo di oscillazioni, avremo $\phi_0(n) \neq \phi_0(n=0)$ in modo che $T(\phi_0(n))$ può risultare SENSIBILMENTE DIVERSO da $T(\phi_0(n=0))$ ....

[$\Rightarrow$ rispetto all'incertezza di misura su T]

($\phi_0(n=0)$ = ampiezza angolare INIZIALE, al rilascio...)

$\Rightarrow$ misurando $\tau = nT$ per n troppo elevato, ricaverei un

$$T^* = \frac{\tau(n)}{n} \pm \frac{\Delta\tau}{n} \quad \text{con un} \quad \Delta T^* = \frac{\Delta\tau}{n}$$

MOLTO PICCOLO $\Rightarrow$ la misura sarebbe molto precisa, ma T^* così ottenuto non rappresenterebbe più correttamente $T(\phi_0(n=0))$ $\Rightarrow$ misura SCORRETTA!!

$\Rightarrow$ in definitiva, dovremo scegliere un valore di n che sia un giusto compromesso fra le necessità di abbattere l'incertezza sul periodo T e quella di mantenere il risultato della misura correttamente rappresentativo del $T(\phi_0)$ che vogliamo misurare.

$\Rightarrow$ nella nostra specifica configurazione sperimentale in laboratorio, operando un'analisi dello smorzamento dei vari pendoli, è stato verificato che, PER AVERE LA CERTEZZA DI MISURARE CORRETTAMENTE IL PERIODO $T(\phi_0)$, è opportuno limitarsi a $\boxed{n = 10-12}$ ....

⇒ abbiamo discusso la SCELTA del numero n di oscillazioni:
per garantire la correttezza della misura di $T(\phi_{oi})$
NON deve esser troppo elevato ....
⇒ PER I NOSTRI PENDOLI DI LABORATORIO scegliendo
⊛ $n \simeq 10 \div 12$, la nostra procedura di misura resta ben affidabile ⇒ anche per l'n-esima (ultima) oscillazione la durata della singola oscillazione, cioè il periodo T_n, sarà ben rappresentativa, ENTRO LA PRECISIONE DELLA MISURA, del periodo $T(\phi_{oi})$, riferito al valore dell'ampiezza angolare AL RILASCIO scelta per la misura, ovvero

$T_n = T(\phi_{oi})$ ENTRO L'INCERTEZZA DI MISURA, nonostante l'effettiva lenta ma progressiva diminuzione dell'ampiezza angolare con il crescere del tempo trascorso dal rilascio nel moto "reale" del pendolo (attriti, di piccola entità, presenti nella situazione "reale"....).

⇒ con queste accortezze, $\Delta T = \dfrac{\Delta \tau(n)}{n}$ ⇒ nella MISURA INDIRETTA, incertezza sperim. sul periodo più piccola secondo un fattore $\frac{1}{n}$ rispetto a $\Delta\tau(n)$, incertezza sperim. sulla MISURA DIRETTA $\tau(n) = nT$ ⇒ miglioriamo la precisione della misura di T, mantenendola accurata con l'opportuna limitazione sulla scelta di n ⊛ .....

⇒ COME PROCEDIAMO per fare ed analizzare le misure di tempo?

⟹

2) MISURE DI TEMPO: procedure e analisi

• scelta delle ampiezze angolari ϕ_{oi} (o meglio delle distanze x_{oi}) ⟹ compatibilmente con la configurazione fisica del sistema, vanno scelte il più distanziate fra loro possibile; tipicamente fra $x_o \simeq 30.0$ cm e $x_o \simeq 90.0$ cm
[⟹ anisocronismo] ⟹ $\{x_{oi}, i = 1 \dots 5\} \Rightarrow \{\phi_{oi}, i = 1 \dots 5\}$

• scelta di n, da specificare sul tabulato

• PER OGNI i $(i = 1 \dots 5)$, cioè per ogni valore ϕ_{oi} (ovvero $x_{oi} \dots$) fra quelli pianificati, deve essere fatta una SERIE (6-7 MISURE) di MISURE DIRETTE della DURATA DI n OSCILLAZIONI,

$$\boxed{\tau_i(n) = (nT)_i}$$

[il pedice "i" indica l'i-esimo valore di ϕ_{oi}....]

⟹ serie di misure: $\{\tau_{i1}, \tau_{i2} \dots \tau_{ij} \dots \tau_{i7}\}$ ⟹ media e scarto massimo dalla media

* $\bar{\tau}_i = \overline{(nT)}_i \Rightarrow \tau_i = \bar{\tau}_i \pm \Delta\tau_i$

da confrontare con errore di sens. del cronometro (MISURA DIRETTA!!) MA $\Delta\tau_i$ SARÀ SICURAMENTE SUPERIORE (⟹ cronometro manuale...)

⟹ NOTA BENE: mi aspetto che $\Delta\tau_i$, incertezza sperimentale, possa essere dell'ordine di $(\Delta t)_{az} \sim 0.1$ s, ma può essere anche inferiore ⟹ l'errore da associare a $\bar{\tau}_i$ (fatto salvo il confronto con l'err. di sens. del cronometro) resta COMUNQUE definito dall'incertezza sperimentale ("a posteriori"!) DEFINITA dall'ANALISI DEI DATI RACCOLTI!!

* sempre per ogni ϕ_{oi}, da $\bar{\tau}_i \pm \Delta\tau_i$ posso ricavare il PERIODO come MISURA INDIRETTA ⟹

$$\boxed{T(\phi_{oi}) = T_i = \frac{\bar{\tau}_i(n)}{n} \pm \frac{\Delta\tau_i}{n}}$$

con $\Delta T_i = \dfrac{\Delta\tau_i}{n}$ ⟹ attenzione: ΔT = incertezza sperimentale su una misura INDIRETTA: il suo valore, ottenuto dall'analisi dei dati sperimentali NON è limitato dall'errore di sensibilità dello strumento (USATO per la MISURA DIRETTA!) e può essere (... anzi, per misure ben fatte SARÀ) INFERIORE a 0.01 s!! OK!

⟹

$\Rightarrow \Delta T \simeq$ qualche $\cdot 10^{-3}$ s ....

* procediamo così PER OGNUNO DEI ϕ_{0i} scelti e possiamo costruirci una TABELLA dei risultati ottenuti dall'analisi dei dati raccolti

ϕ_0 (rad)	$\tau(n)$ (s)	$\Delta\tau$ (s)	T (s)	ΔT (s)
ϕ_{01}	$\overline{\tau}_1$	$\Delta\tau_1$	T_1	ΔT_1
ϕ_{02}	$\overline{\tau}_2$	$\Delta\tau_2$	T_2	ΔT_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ϕ_{05}	$\overline{\tau}_5$	$\Delta\tau_5$	T_5	ΔT_5

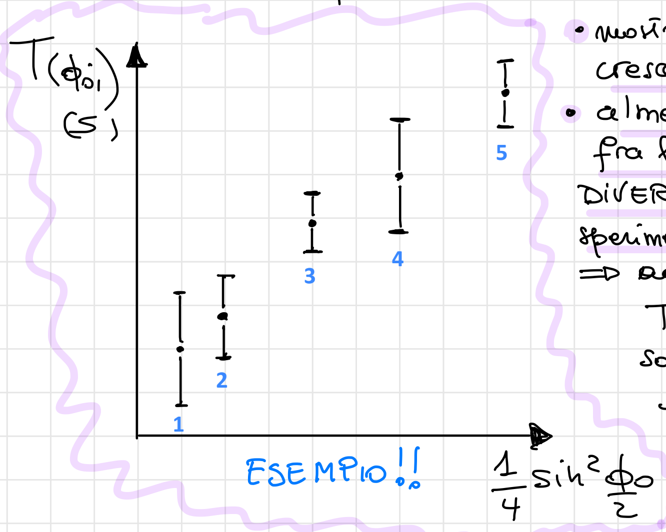
$\Rightarrow$ Nell'ambito della schematizzazione fisica adottata per descrivere il pendolo, i valori dei periodi misurati, $T_i \pm \Delta T_i$ (con l'indice "i" che identifica il particolare valore ϕ_{0i} dell'ampiezza angolare della oscillazione) devono essere interpretati e trattati come

$$T_i = \left(2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_{0i}}{2}\right) = T_0\cdot\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_{0i}}{2}\right) = T(\phi_{0i})$$

- come procediamo ?

1) VERIFICHIAMO L'ANISOCRONISMO DELLE OSCILLAZIONI

$\Rightarrow$ ci aspettiamo che i valori misurati $T(\phi_{0i}) \pm \Delta T_i$

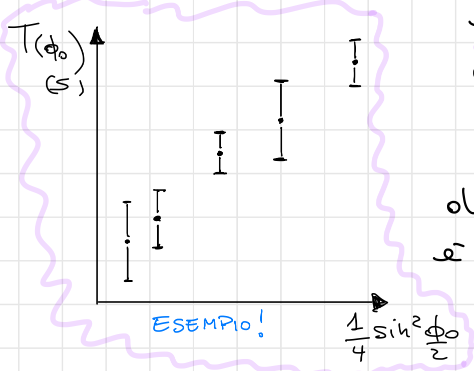


- mostrino un andamento di crescita col crescere di ϕ_0 (e quindi di $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$!),
- almeno per i valori di ϕ_{0i} più distanti fra loro, siano SIGNIFICATIVAMENTE DIVERSI in relazione alle incertezze sperimentali ad essi associate

$\Rightarrow$ ad esempio, $\phi_{05} > \phi_{03}$ e

$T_3 + \Delta T_3 < T_5 - \Delta T_5$: non c'è sovrapposizione fra le barre d'errore e i valori $T_3 \pm \Delta T_3$ e $T_5 \pm \Delta T_5$ sono SIGNIFICATIVAMENTE DIVERSI

ANISOCRONISMO $\Rightarrow$



⇒ per visualizzare il fenomeno possiamo riportare in grafico i valori misurati di $T(\phi_{0i})$, IN FUNZIONE DI $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$

⇒ Se, come è ragionevole per la nostra esperienza, la funzione di dipendenza del periodo da ϕ_0, $f(\phi_0)$ è ben rappresentata come $f(\phi_0) \simeq 1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$, allora ci aspettiamo una crescita di $T(\phi_{0i})$ con andamento LINEARE al crescere di $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$ ⇒

$$\boxed{T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) = T_0 + T_0 \cdot \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} = T_0 + T_0 \cdot x}$$

con $x = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$

⇒ NON vi viene richiesto NESSUN TIPO DI FIT, ma il grafico che illustra l'ANISOCRONISMO è istruttivo...

2) PROCEDURA PER LA MISURA DI g

* il valore di T_0, periodo nel limite delle piccole oscillazioni è di fatto una CARATTERISTICA DEL PENDOLO DI LUNGHEZZA ℓ (MISURATA) NELLO SPECIFICO LUOGO in cui si opera (che definisce il valore di g) ⇒ $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = T_0(\ell, g)}$
* DATA LA RELAZIONE CHE LEGA $T(\phi_0)$ e T_0, da ciascuno dei valori di $T(\phi_{0i}) = T_i \pm \Delta T_i$ misurati possiamo ricavare una stima di T_0

⇒ $T(\phi_0) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$ ⇒ $\boxed{T_0 = \dfrac{T(\phi_0)}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}}$

⇒ da ogni T_i misurato ricavo $\boxed{T_{0i} = \dfrac{T_i}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_{0i}}{2}}}$ ⇒ ottengo tante stime di T_0 quanti sono i valori di $T_i = T(\phi_{0i})$ misurati.

⇒

$\Rightarrow T_{0i} = \dfrac{T_i}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_{0i}}{2}}$ $\Rightarrow$ le varie stime di T_0 che otteniamo sono funzione dei corrispondenti T_i e ϕ_{0i} $\Rightarrow$ $\boxed{T_0 = T_0(T_i, \phi_{0i})}$

$\Rightarrow$ propagando le incertezze su T_i e ϕ_{0i} possiamo ricavare anche ΔT_0 formalmente e valutarlo numericamente (lo vedremo in dettaglio fra poco).

$\Rightarrow$ possiamo allora aggiungere alla nostra tabella di analisi dati due colonne con i T_{0i} e i rispettivi ΔT_{0i} ....

ϕ_0 (rad)	$\tau(n)$ (s)	$\Delta\tau$ (s)	T (s)	ΔT (s)	T_0 (s)	ΔT_0 (s)
ϕ_{01}	$\bar\tau_1$	$\Delta\tau_1$	T_1	ΔT_1	T_{01}	ΔT_{01}
ϕ_{02}	$\bar\tau_2$	$\Delta\tau_2$	T_2	ΔT_2	T_{02}	ΔT_{02}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
ϕ_{05}	$\bar\tau_5$	$\Delta\tau_5$	T_5	ΔT_5	T_{05}	ΔT_{05}

$\Rightarrow$ così come le incertezze ΔT_i, anche i vari ΔT_{0i} dovrebbero risultare dello stesso ordine di grandezza, ma con valori numericamente diversi $\Rightarrow$ in queste condizioni per VALUTARE LA MIGLIORE STIMA del valore DI T_0 NON possiamo fare la media dei T_{0i} ottenuti, ma occorrerà

(A) verificare che le stime $\{T_{0i} \pm \Delta T_{0i}\,;\ i = 1 \ldots 5\}$ siano CONSISTENTI in relazione alle incertezze associate (STIME DIVERSE DELLA STESSA GRANDEZZA T_0 ...)

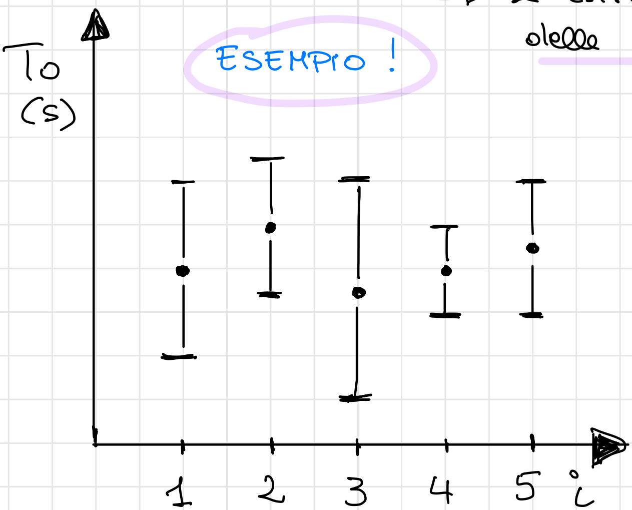
(B) ADOTTARE COME MIGLIORE STIMA DI T_0 $[= (T_0)_{best}]$ IL VALORE $T_{0i} \pm \Delta T_{0i}$, fra quelli consistenti, caratterizzato dalla MINORE INCERTEZZA RELATIVA $\left(\dfrac{\Delta T_{0i}}{T_{0i}}\right)_{MIN}$.

$\Rightarrow$ per effettuare la VERIFICA DI CONSISTENZA DELLE STIME DI T_0 ottenute, dobbiamo fare UN APPOSITO GRAFICO $\Rightarrow$

⇒ VERIFICA GRAFICA DELLA CONSISTENZA delle varie stime di T_0 ($T_{0i} \pm \Delta T_{0i}$, $i = 1 \dots 5$) ottenute nella nostra misura

⇒ riportiamo (sulle ORDINATE) i valori di T_0 con le rispettive barre d'errore IN FUNZIONE di una qualunque quantità che indichi da quale specifico $T_i \pm \Delta T_i$ ogni valore di T_0 è stato ricavato ⇒ STIAMO CONFRONTANDO STIME DIVERSE DELLA STESSA GRANDEZZA (T_0) ⇒ in ascisse possiamo quindi riportare sia X_{0i} che ϕ_{0i} o semplicemente "i".

⇒ se esiste una regione di sovrapposizione delle barre d'errore di tutti i valori $T_{0i} \pm \Delta T_{0i}$, allora questi sono tutti CONSISTENTI.



... o X_{0i}

... o Φ_{0i}

⇒ $(T_0)_{best}$ = valore, tra i $T_{0i} \pm \Delta T_{0i}$ CONSISTENTI, con $\left(\frac{\Delta T_0}{T_0}\right)_{MIN}$

⇓

avendo ricavato la stima migliore di T_0, ovvero ottenuto una MISURA INDIRETTA di T_0, grandezza CARATTERISTICA del pendolo di LUNGHEZZA ℓ in un dato luogo (per noi il LAB. del Dip. di Fisica e Astronomia...), posso usare, per OTTENERE la MISURA di g, la relazione che lega g a T_0 ed ℓ ⇒ $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

⇒ $g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T_0^2}$

⇒

* RICAVIAMO L'INCERTEZZA SULLE MISURE INDIRETTE DI T_0

- sapendo che $T = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$, abbiamo ricavato T_0 come

$$T_0 = \frac{T}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} = T_0(T, \phi_0)$$

$\Rightarrow$ dobbiamo propagare le incertezze su T e ϕ_0 per ricavare quella su T_0

- ricaveremo $\frac{\Delta T_0}{T_0}$, incertezza RELATIVA su T_0, utilizzando il metodo delle "derivate logaritmiche"....

$$\Rightarrow d(\ln T_0) = d\ln\left(\frac{T}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = d\ln T - d\ln\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) = \frac{dT}{T} - \frac{d\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} - \frac{2}{4}\,\frac{\sin\frac{\phi_0}{2}\cdot\cos\frac{\phi_0}{2}\cdot\frac{1}{2}\,d\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} = \frac{dT}{T} - \frac{1}{4}\,\frac{\left(2\sin\frac{\phi_0}{2}\cos\frac{\phi_0}{2}\right)}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\,\frac{d\phi_0}{2}$$

$(\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha$!!)

$$\Downarrow$$

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} - \frac{1}{8}\,\frac{\sin\phi_0\ d\phi_0}{\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$ a questo punto possiamo passare "ai valori finiti"

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T} + \left|\left(-\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\right)\right|\Delta\phi_0$$

$$\Downarrow$$

$(\phi_0 > 0$, essendo una ampiezza angolare)

$$\boxed{\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\phi_0}{\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)}\cdot\Delta\phi_0}$$

$\Rightarrow$ questa è la relazione di propagazione degli errori che cercavamo

$\Rightarrow$ per comprendere meglio le caratteristiche della nostra misura, può essere utile fare una STIMA ESEMPLIFICATIVA per ordine di grandezza dei contributi al $\frac{\Delta T_0}{T_0}$, usando QUI valori rappresentativi delle quantità in gioco, mentre nell'esperienza le INCERTEZZE SPERIMENTALI andranno valutate sulla base delle MISURE specifiche da voi ottenute .... $\Longrightarrow$