Analisi

Tommaso Miliani

28-10-25

1 Curve in forma polare

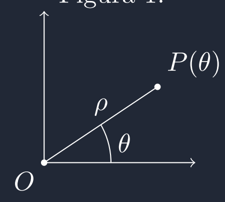
Si possono rappresentare anche le curve in forma polare (come in Fisica 1):

$$\rho = \rho(\theta) \quad \rho(\theta) > 0 \quad \theta \in I$$

Le coordinate polari ci permettono di esprimere i punti con le seguenti coordinate

$$\underline{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

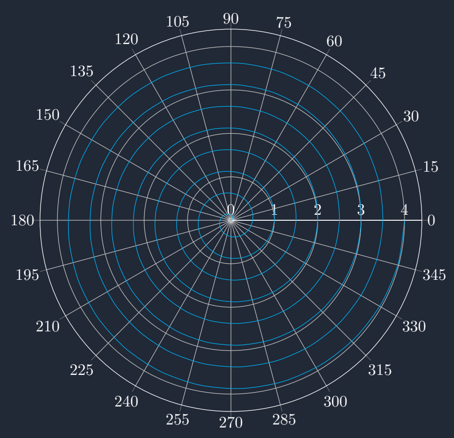
Figura 1:



Esempio 1.1.
La curva

$$\rho(\theta) = A\theta \qquad A > 0, \theta \geq 0$$

ha grafico



2 Integrali di linea di prima specie

SI definiscono ora gli integrali di linea di prima specie e alcuni loro teoremi ed applicazioni generali. La definizione è simile a quella degli integrali di analisi uno, ma si tiene conto del fatto che la curva può muoversi nel tempo.

Definizione 2.1.
Si definisce integrali di linea (o curvilinei) l'integrale come l'area del sottografico di una funzione in cui le variabili spaziali x, y si muovono lungo la curva $\underline{r}(t)$. Rispetto all'integrale dell'analisi uno c'è il termine correttivo dovuto al movimento della curva (che si muove lungo lo spazio e il tempo)

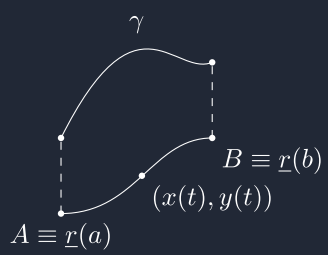
$$|d\underline{r}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt$$

Dunque posso definirlo come

$$\int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\ dt = \int_\gamma f(x, y)\ ds \qquad (1)$$

E si può dimostrare che dipende solamente dal sostegno della curva.

Figura 2: Proiezione dell'integrale di linea di una superficie su di una curva in $\mathbb{R}^2$



Teorema 2.1 (L'integrale di linea di prima specie dipende solo dal sostegno)**.**
Non ho copiato le ipotesi

$$\int_a^b f(\underline{x}(t)) \left|\dot{\underline{x}(t)}\right| \ dt = \int_\alpha^\beta f(\underline{r}(u)) \left|\dot{\underline{r}(u)}\right| \ du \tag{2}$$

E quindi è ben definito

$$\int_\gamma f \ dS = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \left|\dot{\underline{x}(t)}\right| \ dt \tag{3}$$

Il dS è un simbolo che ci permette di ricordare

Dimostrazione. Sia

$$g : [a, b] \to [\alpha, \beta]$$

Un cambio di parametro che mi permetta di dire che $t \to u = g(t)$. Supponiamo che $g \in C^1$ e che la sua derivata sia positiva, allora il cambio di parametro mantiene l'orientazione. Questo vuol dire che

$$\underline{x}(t) = \underline{r}(g(t))$$

Si calcola ora

$$\int_\alpha^\beta f(\underline{r}(u)) \left|\dot{\underline{r}(u)}\right| \ du \underset{u=g(t)}{=} \int_a^b f(\underline{r}(g(t)))g'(t) \left|\dot{\underline{r}(g(t))}\right| \ dt = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \left|\dot{\underline{x}(t)}\right| \ dt$$

La prima uguaglianza è vera perché il minimo dell'immagine è data dal minimo della funzione, dunque, essendo α l'immagine di a e β l'immagine di b, allora è possibile fare quell'uguaglianza. Inoltre, il vettore tangente

$$\left|\dot{\underline{r}(u)}\right| = |\dot{\underline{r}}(g(t))| \, |\dot{g}(t)| \underset{g'>0}{=} g'(t) \left|\dot{\underline{r}(g(t))}\right|$$

E l'ultima uguaglianza è data dalla derivata di vettori. Si vede inoltre che non dipendono nemmeno dal verso scelto: sono infatti legati alla geometria della curva e non alla parametrizzazione. □

Osservazione 2.1.
Deriva direttamente dalla dimostrazione del problema

$$f = 1 \qquad \int_\gamma f \ dS = \int_a^b |\dot{\underline{x}}(t)| \ dt = \mathfrak{L}(\gamma) \tag{4}$$

Le applicazioni di questi integrali sono varie:

- Massa di un filo con densità:

$$\rho(x, y, z) \quad M_\gamma = \int_\gamma \rho \ dS = \int_a^b \rho(x(t), y(t), z(t)) \, |\dot{\underline{x}}(t)| \ dt$$

  Oppure, se è data la densità

$$\rho(t) = M_\gamma \int_a^b \rho(t) \, |\dot{\underline{x}}(t)| \ dt$$

- Centro di massa del filo materiale $G(x_G, y_G, z_G)$:

$$x_G = \frac{1}{m_G} \int_\gamma \rho \ dS$$

  In maniera analoga si ottengono anche le altre due coordinate.

Osservazione 2.2.
Se $\rho \equiv 1$ e $M_\gamma = \mathfrak{L}_\gamma$ allora il centro di massa corrisponde con il centro geometrico:

$$B(x_B, y_B, z_B) \qquad x_B = \frac{1}{L} \int_\gamma x \ dS$$

Esempio 2.1.

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$$

Sia γ il sostegno della funzione. Si determini

- *Provare che x è parametro di riferimento (lasciata per esercizio)*
- *Calcolare $\mathfrak{L}(\gamma) = L$ (lasciata per esercizio)*
- *Calcolare il baricentro geometrico*
- *Calcolare la massa di un filo con densità*

iii) Si trova il baricentro come

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}_{t \in 0,2}$$

Sia il punto del baricentro definito come $B(x_B, y_B)$, allora

$$Lx_B = \int_\gamma x \ dS = \int_0^2 t^2 \left|\underline{\dot{x}}(t)\right|$$

Dato che

$$\left|\underline{\dot{x}}(t)\right| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4+9t^2}$$

Allora

$$\int_0^2 t^3\sqrt{4+9t^2} \ dt \overset{Parti}{=}$$

Analogamente posso ottenere

$$Ly_B = \int_\gamma \int_0^2 (t^3+1)t\sqrt{4+9t^2} \ dt$$

(DA finire per esercizio).
iv) Si determina ora la massa del filo come

$$m_\gamma = \int_\gamma \rho \ dS = \int_0^2 \rho(x(t), y(t)) \left|\underline{\dot{x}}(t)\right| \ dt = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} t\sqrt{4+9t^2} \ dt$$

Lasciata per esercizio.

3 Esercizi sul teorema del Dini

Esempio 3.1.
Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}$$

Dove

$$y = f(x) = x + \ln x - y - \ln y - 1 - \ln 2 = 0$$

E' definita in un intorno di $x = 2$ e $y = 1$. Dunque per il teorema del Dini esiste un $y = f(x)$ tale che $f \in C^1$ e dunque $F(x, f(x)) = 0$, ossia il punto $(2,1)$ appartiene alla linea di livello zero e dunque sappiamo che

$$f(2) = 1 \implies \lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

E dunque il limite è un infinitesimo. Posso allora applicare Taylor di primo grado (in quanto il denominatore è di grado 1), allora scopro che

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + o(x-2)$$

Per sapere chi è $f'(2)$ si ricorre al teorema del Dini per cui

$$f'(2) = -\frac{F_x(2,1)}{F_y(2,1)} = \frac{3}{4}$$

Dunque lo sviluppo diventa

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4}(x-2) + o(x-2)$$

E dunque segue che

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-1}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{3}{4}(x-2) + o(x-2)}{x-2} = \frac{3}{4}$$

Calcolare ora il limite per

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 1 - \frac{3}{4}(x-2)}{(x-2)^2}$$

Posso sviluppare ora Taylor al secondo ordine e poter risolvere ora il limite, per il Dini

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,f)}{F_y(x,f)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \in C^1$$

E dunque

$$f''(x) = \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{f}\right) - \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{f'}{f^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{f}\right)^2}$$

Dunque ho tutti i valori

$$f(2) = 1 \qquad f'(2) = \frac{3}{4} \qquad f''(2) = \frac{5}{32}$$

E dunque lo sviluppo diventa

$$f(x) = 1 + \frac{3}{4}(x-2) + \frac{5}{64}(x-2)^2 + o(x-2)^2$$

E quindi il limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 2 - \frac{3}{4}(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{5}{64}$$