

Indice

I	Ottica geometrica	5
1	Le onde elettromagnetiche	6
1.1	Introduzione alle onde elettromagnetiche	6
1.2	La soluzione semplice: le onde piane	8
1.2.1	Materiali dielettrici	9
1.2.2	I metalli	9
1.2.3	Incidenza di onde piane ad un certo angolo e legge di Snell	10
1.2.4	Riflessione totale interna e prisma	10
1.2.5	Uscita da un mezzo dielettrico	11
2	Le lenti	12
2.1	Introduzione alle lenti sferiche	12
2.2	Le lenti sottili	13
2.2.1	La lente convergente	13
2.2.2	La lente divergente	14
2.3	Il problema della formazione delle immagini	15
2.3.1	Sbagliare il piano d'immagine	16
2.4	La legge del costruttore di lenti e i vari tipi di lenti	16
2.4.1	Lente piano convessa	16
2.4.2	Lente biconvessa	16
2.4.3	La lente piano concava	17
2.5	Funzionamento dell'occhio umano	17
2.6	Lenti di ingrandimento e sistema di lenti	18
2.6.1	Il principio di funzionamento di una lente di ingrandimento	18
2.6.2	Sistema di lenti	19
2.7	Principio di funzionamento del telescopio	19
2.8	Principio di funzionamento del microscopio	20
II	Polarizzazione della luce	21
3	Polarizzazione delle onde elettromagnetiche	22
3.1	Definizione di polarizzazione	22
3.1.1	Polarizzazione lineare	22
3.1.2	Polarizzazione circolare	22
3.1.3	Polarizzazione ellittica	23
3.2	Riflessione su di uno specchio metallico	23
3.3	L'energia dell'onda elettromagnetica	23
3.4	Il fenomeno della trasmissione di un mezzo dielettrico	24
3.5	Polarizzatori e lamine di ritardo	25
3.5.1	Funzionamento di un cubo polarizzatore	25
3.5.2	Polarizzatore a fili metallici	25
3.6	Lamine di ritardo	26
3.6.1	La lamina $\frac{\lambda}{2}$	26
3.6.2	La lamina $\frac{\lambda}{4}$	27
3.6.3	Polarizzazione nei due casi	27
3.6.4	Lamine zero e multiple order: cosa accade se si utilizza una lamina con diverse lunghezze d'onda	27
3.7	Aberrazioni delle lamine in condizioni non ideali	28

III	Interferenza	29
4	Aberrazioni e interferenze	30
4.1	Il concetto di interferenza	30
4.1.1	Interferenza semplice	30
4.1.2	Oscillazione di due onde con polarizzazioni diverse	31
4.2	L'onda stazionaria	32
4.3	Interferometro di Michelson	33
4.3.1	Lo specchio con la camera a vuoto	34
4.3.2	Due lunghezze d'onda differenti	34
4.3.3	Luce non monocromatica: il comportamento di più onde con frequenza diversa dentro l'interferometro	35
4.3.4	Lo spettro continuo	36
IV	Diffrazione	38
5	La diffrazione della luce	39
5.1	Il concetto di diffrazione della luce	39
5.2	Singola fenditura	40
5.3	Doppia fenditura	41
5.4	Reticolo di diffrazione: il caso di n fenditure	42
5.4.1	Caso tridimensionale	43
5.5	Diffrazione su una lente	43
5.5.1	Lente singola	43
5.5.2	Diffrazione sul microscopio	43
5.5.3	Diffrazione per un telescopio	44
V	Esperienze	45
6	Ottica Geometrica	46
6.1	Introduzione: obiettivi e finalità	46
6.2	L'apparato sperimentale	46
6.3	La soluzione di Gauss	47
6.4	Applicazione della soluzione di Gauss all'esperienza geometrica	48
6.4.1	Le lenti dell'esperienza	48
6.5	Procedure operative in laboratorio	49
6.5.1	Presa delle misure	49
7	Polarizzazione	51
7.1	Apparato sperimentale	51
7.1.1	Lamina $\frac{\lambda}{2}$	51
7.1.2	Lamina $\frac{\lambda}{4}$	52
7.2	Scopi e finalità	53
7.2.1	Il fit sinusoidale	53
7.2.2	Le lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ nell'esperienza	53
7.2.3	Setup dell'apparato	54
7.3	Funzioni del fit	54
7.3.1	Calibrazione dei laser	54
7.3.2	Lamina $\frac{\lambda}{2}$	54
7.3.3	La lamina $\frac{\lambda}{4}$	55
7.4	Procedure operative	55
7.4.1	Presa delle misure	56
7.4.2	Analisi dati	56
8	Diffrazione	57
8.1	Scopo dell'Esperienza	57
8.2	L'apparato sperimentale	57
8.3	Seconda parte delle esperienze: verifica della legge di diffrazione	58
8.4	Procedure operative in laboratorio	58

9	Interferometro di Michelson	59
9.1	Apparato sperimentale	59
9.2	Sorgente luminosa non monocromatica	60
A	Approfondimenti dell'ottica	62
A.1	Interferenza da film sottili	62
A.1.1	Legge di Fresnel	62
A.1.2	Applicazione della legge di Fresnel	62
A.1.3	Coating ad alta riflettività	63
A.2	Cavità ottiche	63
A.2.1	L'esperimento di Virgo	65
A.2.2	Orologi precisi	65

Introduzione al corso

Il corso di ottica si propone di studiare i quattro fenomeni principali dell'ottica:

1. Ottica geometrica: approssimazione della luce come un insieme di raggi luminosi e come essi si propagano nel vuoto (lenti e formazioni di immagini);
2. Polarizzazione: Dato che la luce è una onda elettromagnetica, e dato che il campo è un campo di vettori, il campo elettrico e luminoso è un vettore che oscilla nel tempo e questa oscillazione è proprio la polarizzazione;
3. Diffrazione: il fenomeno per il quale la luce si diffonde;
4. Interferenza: il fenomeno più complicato e bello della luce: due sorgenti luminose con campi opposti l'uno rispetto all'altro possono interferire distruttivamente e quindi non creare alcuna luce, ovviamente esiste anche l'interferenza costruttiva.

Il peso di ogni relazione è un decimo sul totale del voto. Il restante sessanta per cento del voto è legato ad un compito in classe (molto simili l'uno all'altro). La media pesata di questi voti dà il voto finale (senza orale). Non si potrà essere super rigorosi in questo corso, ma si daranno le basi dell'ottica attraverso un approccio più pragmatico e semplice in quanto sarebbe necessario studiare prima fisica due e fisica quantistica.

Parte I

Ottica geometrica

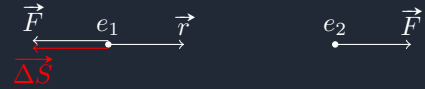
Capitolo 1

Le onde elettromagnetiche

1.1 Introduzione alle onde elettromagnetiche

Prima di poter introdurre il concetto di onde elettromagnetiche è necessario, anche se ancora non si è iniziato il corso di Fisica II, introdurre il concetto di elettromagnetismo: prendiamo per esempio due elettroni, dall'elettromagnetismo si sa che si respingono poiché tra di loro agisce una forza, chiamata forza di Coulomb, che ha modulo:

Figura 1.1: Forze agenti tra due elettroni



$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

Questa forza dipende dalla carica delle due particelle e dalla direzione r congiungente. Se io spostassi il primo elettrone di un certo ΔS , il secondo elettrone non si accorgerebbe di questo spostamento in modo immediato. La relazione precedente non è dunque più valida se la particella si muove. Essendoci dunque un ritardo nel cambiamento dell'interazione rispetto all'istante in cui è avvenuto lo spostamento, siamo costretti ad introdurre due campi vettoriali che si propagano con una velocità finita. Questi campi sono il campo magnetico ed il campo elettrico (\vec{B} ed \vec{E}) secondo delle leggi definite da Maxwell. La forza che agisce sulle due cariche è un vettore e dunque si fa uso di un vettore per studiarne il cambiamento: è possibile esprimere, tramite la legge di Lorentz, come una carica risente della presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico attraverso la seguente relazione:

$$\vec{F}_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

Dalle equazioni di Maxwell nel vuoto (ossia in assenza di cariche e correnti di cariche), si introduce quindi l'operatore **Laplaciano quadro**, ossia un operatore differenziale che si applica al campo elettrico e anche a quello magnetico secondo le seguenti:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

L'operatore Laplaciano agisce su ogni componente del vettore campo elettrico o campo magnetico. Si può vedere cosa succede per \vec{E}_x :

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

Questa equazione esprime il contributo rispetto ad un singolo asse e prende il nome di **equazione delle onde** ed è analoga all'equazione delle onde per tutte le onde che si studiano (sonore, luminose, radio ...):

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

In questo caso v rappresenta la velocità di propagazione dell'onda rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (per ora in quanto non si considera la relatività). Si può trovare una soluzione generale a questa equazione come

$$\psi(x, t) = f(x - vt)$$

Si considera una funzione generica f in modo tale che abbia la stessa forma di ψ , dunque, se calcolata in $x - vt$, sarà soluzione della funzione attraverso la doppia derivata rispetto alle x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x - vt) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''(x - vt) \\ \frac{\partial f}{\partial t} f'(x - vt) \cdot (-v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= f''(x - vt) \cdot (-v) \cdot (-v)\end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione con ψ si può definire

$$f''(x - vt) = \frac{1}{v^2} v^2 f''(x - vt)$$

E quindi si è dimostrato che è soluzione generica dell'equazione. Al tempo $t = 0$ si calcola la funzione $f(x - vt)$ e ci si chiede dopo quale tempo t , e in quale punto dello spazio, la funzione f assumerà lo stesso valore. Se al tempo $f(\alpha)$ la funzione assume un determinato valore, assumerà lo stesso valore al punto $\alpha + vt$ dopo un certo istante di tempo t data la velocità di propagazione v . Dunque l'onda si sarà mossa di una certa quantità vt e dunque in quel punto il campo assumerà nuovamente il valore che aveva nel punto α . E' per questo che si parla di equazione delle onde che si muovono di velocità v poiché queste onde si propagano nello spazio secondo vt .

Le costanti utilizzate fino ad ora sono la costante dielettrica nel vuoto

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{m^2 N} \quad (1.5)$$

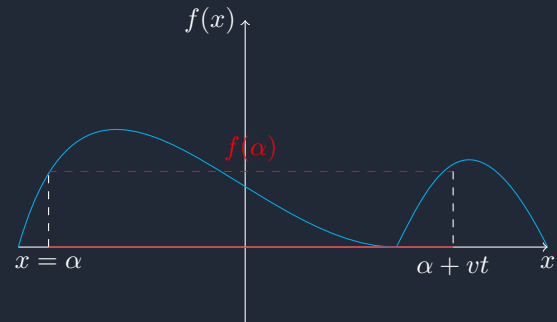
E la permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (1.6)$$

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto è proprio

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{m}{s} \quad (1.7)$$

Figura 1.2: Il grafico della funzione generica $f(x)$



1.2 La soluzione semplice: le onde piane

La soluzione più semplice all'equazione delle onde è l'onda piana: questa equazione ha come ipotesi che \vec{E} e \vec{B} siano uniformi in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Considerando l'asse x come l'asse di propagazione dell'onda e il piano yz il piano sul quale entrambi i campi sono uniformi, e dove le derivate rispetto agli assi y e z siano zero, si ha l'ipotesi di onda piana

$$\begin{aligned}\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Si può ora assumere, dalle equazioni di Maxwell, che il vettore campo elettrico non sia diretto lungo la direzione di propagazione dell'onda ($E_x = 0$), dunque le uniche componenti che rimangono sono le componenti sul piano yz .

Si tratteranno d'ora in poi onde sinusoidali, ossia le onde che hanno la seguente espressione:

$$E_{y,z} = A \cos(k(x - vt) + \phi) \quad (1.8)$$

Il periodo spaziale dopo il quale l'onda torna ad assumere lo stesso valore (ossia dopo 2π) si può ottenere imponendo che

$$k \cdot \lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.9)$$

Si chiameranno, d'ora in poi, λ come **lunghezza d'onda** e k il **vettore d'onda**, le quali sono intrinsecamente legate l'una all'altra. L'altra quantità che si usa per descrivere le onde elettromagnetiche è la **frequenza** e la **pulsazione**. Fissando spazialmente un certo valore di x e lasciando che il tempo trascorra, il campo elettrico nel punto x inizierà ad oscillare nel tempo con un periodo di

$$kvT = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{c \cdot k} \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Chiamo allora $\omega = c \cdot k$ la **pulsazione**. Sostituendo con l'espressione della lunghezza d'onda ottengo

$$T = \frac{\lambda}{c} \implies \omega = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

La direzione del campo elettrico è detta **polarizzazione** e, nel caso più semplice di onda piana, la polarizzazione del campo, così come il modulo, è costante: si può dunque dire che il vettore campo elettrico ha la seguente espressione:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

In questo caso l'onda piana con la direzione del campo elettrico non cambia nel tempo ed è sempre costante nel piano yz , per cui vale la precedente. Se si volesse esprimerla nella direzione generica, si avrebbe la seguente espressione per il vettore posizione e per il vettore campo elettrico:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)\end{aligned}$$

In questo caso il vettore \hat{k} indica la direzione di propagazione dell'onda; dunque si può risolvere così il prodotto scalare con il vettore direzione \vec{r} e

Figura 1.3: Rappresentazione grafica dell'ipotesi

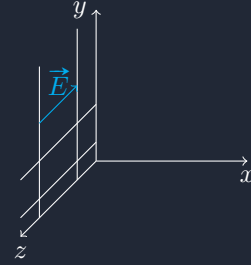


Figura 1.4: L'onda elettromagnetica

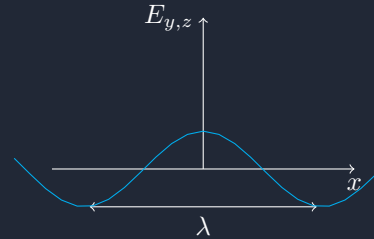


Figura 1.5: Propagazione dell'onda e fronti d'onda



ottenere che la direzione di propagazione, ed il suo verso, sono proprio quelli di \hat{k} . È possibile, inoltre, rappresentare le onde utilizzando solo il fronte d'onda (ossia il picco dell'onda) con larghezza λ . Maxwell considera che il campo magnetico oscilla in fase rispetto al campo elettrico e quindi, tutte le volte che si ha un'onda che si propaga nello spazio, oltre all'oscillazione del campo elettrico, si ha anche l'oscillazione del campo magnetico, il quale oscilla insieme all'onda in fase, ossia traslato rispetto al campo elettrico, perpendicolarmente rispetto a quest'ultimo.

Sempre secondo le equazioni di Maxwell, il modulo del campo magnetico si rapporta al modulo del campo elettrico secondo la seguente relazione:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} \quad (1.10)$$

Dato che la forza su di una carica è esprimibile come

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

È possibile esprimere la forza sulla particella come $q |\vec{E}|$ poiché nell'espressione del prodotto vettoriale si ottiene che il prodotto dei moduli sullo stesso asse diventa

$$q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta = q \frac{|\vec{v}|}{c} |\vec{E}| \sin \theta$$

Data l'espressione del modulo del campo magnetico si può trascurare il termine $\frac{|\vec{v}|}{c}$ solo se la velocità dell'onda è molto piccola (in generale solo nei solidi).

1.2.1 Materiali dielettrici

Si può definire un **mezzo dielettrico** un mezzo nel quale gli elettroni sono liberi di muoversi in modo molto limitato e dunque, avendo una ridotta mobilità, la componente del campo magnetico è molto più piccola rispetto al campo elettrico. Un campo elettrico applicato alle cariche tende a far allontanare gli elettroni dai nuclei, i quali si distribuiscono diversamente nello spazio rispetto allo stato di quiete: la forza elettrica riesce dunque ad influenzare la distribuzione delle cariche senza farle muovere liberamente (nei metalli, invece, le cariche si possono muovere liberamente).

Quando un'onda entra in un materiale dielettrico questo modifica la lunghezza d'onda e quindi la pulsazione dell'onda. La nuova lunghezza d'onda, rispetto a quella che avrebbe l'onda nel vuoto, è data secondo la seguente relazione:

$$\lambda' = \frac{\lambda_v}{n} \quad (1.11)$$

Dove λ_v è la lunghezza d'onda nel vuoto e n l'**indice di rifrazione** del dielettrico in questione. Se l'indice di rifrazione fosse minore di 1, allora la luce andrebbe più veloce di c anche se la sua intensità si attenuerebbe molto in quanto questi dielettrici hanno un forte assorbimento. Quando l'angolo di inclinazione è perfettamente perpendicolare, allora il fronte d'onda esterno al dielettrico è lo stesso che si ha all'interno del dielettrico.

1.2.2 I metalli

All'interno dei metalli gli elettroni si muovono liberamente e, se esposti ad un certo campo elettrico esterno, essi inizieranno ad oscillare generando un campo elettrico in **controfase** al campo elettrico incidente, annullando il campo elettrico in arrivo e incontrando resistenza nel loro movimento; l'effetto è la liberazione di energia sotto forma di calore nel metallo. L'effetto complessivo è che certe lunghezze d'onda sono assorbite mentre altre sono riflesse.

Figura 1.6: Relazione tra campo elettrico e magnetico

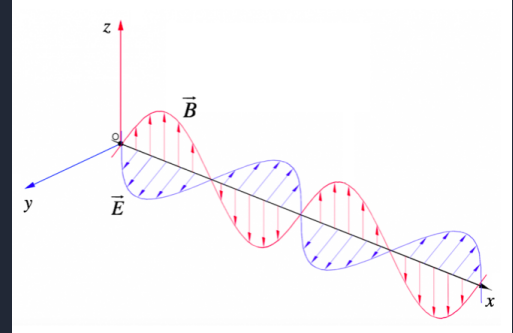


Figura 1.7: Materiali dielettrici



1.2.3 Incidenza di onde piane ad un certo angolo e legge di Snell

Considerando un sistema di riferimento piano e un interfaccia a sinistra della quale si ha l'aria (con indice di rifrazione molto simile al vuoto), mentre dall'altra si ha il vetro (o qualsiasi altro materiale con $n_2 \neq n_1$). Si può studiare cosa accade ai fronti d'onda che attraversano l'interfaccia tra i due materiali con un angolo di incidenza diverso da zero. Si può vedere che l'onda nel dielettrico è un'onda piana anch'essa in quanto si è sempre nella stessa ipotesi di onda piana. Si ha, inoltre, che i fronti d'onda nel dielettrico sono gli stessi che al di fuori del dielettrico ma con lunghezza d'onda minore. Per far sì che i fronti d'onda coincidano, fisicamente l'onda si inclina rispetto all'angolo di incidenza θ_i di un certo angolo θ_f chiamato angolo di **rifrazione**. L'ipotenusa identificata con D al centro del disegno è in relazione alle lunghezze d'onda e agli angoli di incidenza e di rifrazione secondo la seguente formulazione

$$\begin{aligned} D \sin \theta_i &= \lambda \\ D \sin \theta_f &= \lambda' \end{aligned}$$

Combinando le due equazioni si ottiene l'utile relazione (considerando che l'indice di rifrazione dell'aria sia n_1 e quello del vetro n_2):

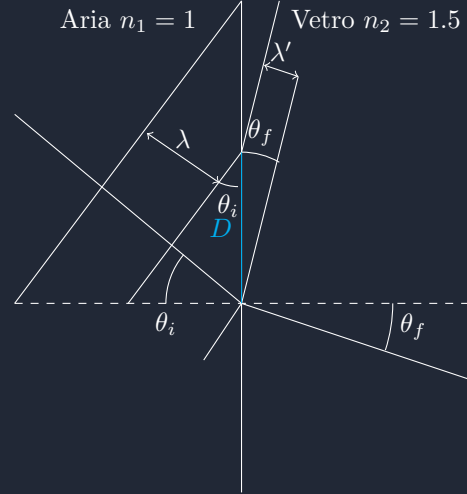
$$\frac{\lambda}{n_2 \sin \theta_f} = \frac{\lambda}{n_1 \sin \theta_i} \implies \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_f}{\sin \theta_i}$$

Ossia la **Legge di Snell**:

$$n_2 \sin \theta_f = n_1 \sin \theta_i \quad (1.12)$$

Le onde che sono riflesse sull'interfaccia, invece, vengono riflesse con un angolo di riflessione $\theta_f = \theta_i$ in quanto, essendo questa una riflessione all'interno dello stesso dielettrico, secondo la legge di Snell se $n_1 = n_2$, allora l'angolo di riflessione è lo stesso con cui incidono.

Figura 1.8: Relazione tra fronti d'onda e angolo di incidenza



1.2.4 Riflessione totale interna e prisma

Supponendo di avere sempre la stessa interfaccia e lo stesso sistema di riferimento, supponiamo adesso che le onde arrivino da dentro il dielettrico con indice di rifrazione maggiore. Quando queste arrivano all'interfaccia si rifrangono con un angolo molto grande. Il raggio di luce dunque, sopra un certo angolo, tenderà a rifrangersi con un angolo sempre più grande: in questo caso si arriva a dire che non si rifrangerà nessun raggio di luce all'esterno del dielettrico; si parla allora di **riflessione totale interna**. Questo si ha quando $\theta_i > \theta_c$, dove θ_c è l'angolo oltre al quale accade questo fenomeno, che prende il nome di **angolo critico** oltre al quale non si rifrangerà più alcun raggio di luce. L'angolo critico si ricava dalla legge di Snell:

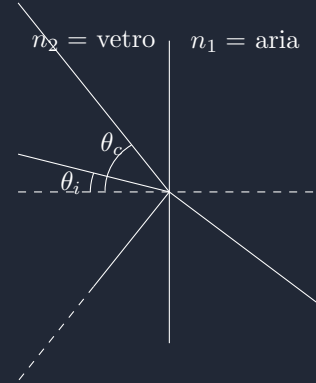
$$\begin{aligned} n_2 \sin \theta_i &= n_1 \sin \theta_f \\ n_2 \sin \theta_c &= n_1 \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Allora l'angolo critico sarà

$$\sin \theta_c = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.13)$$

Dove $n_2 > n_1$. Nel caso del prisma, quando entra il laser dalla parte perpendicolare al fascio di luce, la luce subisce un accorciamento della sua lunghezza d'onda mentre quando dall'interno colpisce le pareti inclinate del prisma (a 45 gradi e quindi maggiore dell'angolo critico), essa è riflessa all'interno rimbalzando fino a che non esce dalla parte nuovamente perpendicolare al fascio iniziale. Ruotando il prisma si può ottenere una parziale rifrazione della luce in modo da inclinare il fascio uscente.

Figura 1.9: Riflessione totale interna



1.2.5 Uscita da un mezzo dielettrico

Quando un fascio di luce entra in un mezzo e poi ne esce, questo esce con lo stesso angolo in entrata ma con un discostamento rispetto alla direzione iniziale di entrata nel mezzo. Questo è dato dal fatto che la legge di Snell modifica l'angolo in entrata e dunque l'angolo in uscita si ottiene applicando nuovamente la legge al contrario.

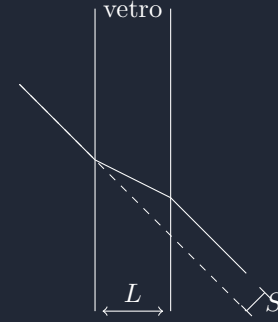
All'interno di un prisma è possibile far cambiare la direzione della luce completamente in quanto si utilizza la rifrazione per creare raggi con angoli diversi a seconda della lunghezza d'onda in entrata: il fascio di luce bianca che entra dentro un prisma è scomposto in tanti fasci luminosi di lunghezza d'onda diversa tutti distinti ed osservabili. Si può ottenere lo scostamento (ossia la distanza tra il raggio di luce rifranto e quello che sarebbe passato indisturbato) in funzione della larghezza del dielettrico, del suo indice di rifrazione e dell'angolo di incidenza:

$$S = \frac{D \sin(\theta_i - \theta_f)}{\cos \theta_f} \quad (1.14)$$

Dove θ_f si ricava attraverso la legge di Snell:

$$\theta_f = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin \theta_i}{n_2}\right)$$

Figura 1.10: Deviazione della luce



Capitolo 2

Le lenti

2.1 Introduzione alle lenti sferiche

Supponendo di avere una superficie sferica di vetro curvilinea all'aria, si vuole vedere cosa accade se le onde piane della luce la colpiscono con un certo angolo rispetto alla direzione del raggio della sfera. Chiamo θ l'angolo di inclinazione rispetto alla congiungente sorgente-centro della circonferenza della lente e p la lunghezza dalla sorgente alla congiungente della verticale dal punto di contatto all'orizzontale. Si può supporre che se l'angolo $\theta \ll 1$, allora si può approssimare la lunghezza p come la distanza da P alla superficie di contatto della lente (che prende il nome di ipotesi **parassiale**). Chiamato allora θ_i l'angolo di incidenza sulla lente e θ_r l'angolo di rifrazione dovuto alla lente rispetto alla congiungente tra il punto di contatto C e il centro O della circonferenza. Si ottengono degli altri angoli: ϕ , ossia l'angolo tra l'orizzontale e la congiungente OC e α , ossia l'angolo che forma la congiungente PQ rispetto all'orizzontale. Chiamato ora q come $PQ - p$ e Q come il punto di contatto tra il fascio e l'orizzontale e l'angolo α di incidenza del fascio rifranto sull'orizzontale, si ottiene allora la seguente relazione vicino al punto di contatto C :

$$\theta_i + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \pi \implies \theta_i = \theta + \phi \quad (1)$$

Inoltre si ottiene un'altra relazione

$$\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \theta_r = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \alpha = \phi - \theta_r \quad (2)$$

Inoltre si ha che

$$h = q \tan \alpha = p \tan \theta = R \sin \phi$$

Dato che si è nell'ipotesi parassiale, le relazioni per h sono tutte uguali l'una all'altra, infatti, per $\theta \ll 1$ si ha che $\sin \theta \approx \theta$, $\tan \theta \approx \theta$:

$$h = q\alpha = p\theta = R\phi \quad (3, 4, 5)$$

Rifacendosi alla legge di Snell, e ricordando l'ipotesi parassiale, si ottiene che

$$n_{\text{aria}} \sin \theta_i = n_{\text{vetro}} \sin \theta_r \implies n_{\text{aria}} \theta_i = n_{\text{vetro}} \theta_r$$

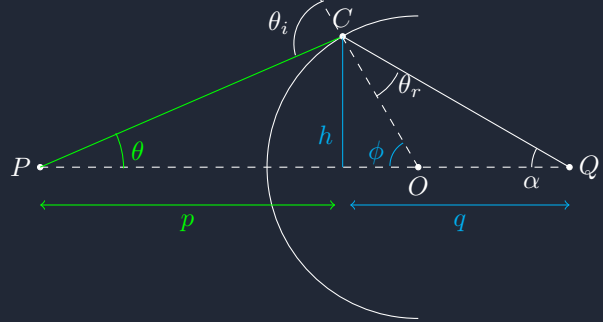
È possibile far sparire gli angoli utilizzando le varie relazioni: utilizzando intanto la (1), poi la (2) si ottiene la seguente:

$$n_{\text{aria}}(\theta + \phi) = n_{\text{vetro}}(\phi - \alpha)$$

Utilizzando la (3, 4, 5) si eliminano definitivamente gli angoli:

$$n_{\text{aria}} \left(\frac{h}{p} + \frac{h}{R} \right) = n_{\text{vetro}} \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{q} \right)$$

Figura 2.1: Le lenti



Semplificando dunque h si ha:

$$n_{\text{aria}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) = n_{\text{vetro}} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \quad (2.1)$$

Con questa equazione tutti i raggi emessi dalla sorgente P giungono tutti nel medesimo punto Q (solamente nel limite parassiale). Se si ripettesse il conto con un'altra interfaccia sferica vetrosa di raggio $R_2 < R$, allora si scoprirà che il punto di convergenza di tutti i raggi luminosi è dato dalla seguente relazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{n_{\text{vetro}} - n_{\text{aria}}}{n_{\text{aria}}} + \frac{n_{\text{vetro}} d}{p(p-d)}$$

2.2 Le lenti sottili

Si può ora analizzare il comportamento di una **lente sottile**, ossia una lente che ha uno spessore molto sottile. Considerando sempre una sorgente posta in P e detta p la distanza tra la sorgente e la prima interfaccia; si può chiamare d come lo spessore della lente e q come la distanza tra il punto di arrivo sull'orizzontale del fascio di luce e la seconda interfaccia. R_1 e R_2 sono > 0 se il centro delle curvature si trova a destra della superficie sferica. Si ottiene da questo modello la seguente relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n_2 d}{p(p-d)}$$

Dove n_2 è il coefficiente di rifrazione della lente e n_1 quello dell'aria. Dato che si sta lavorando con l'ipotesi di lente sottile, questo vuol dire che d è molto piccolo: in questo modo si semplifica la formula in questione con la seguente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (2.2)$$

Dove f è chiamata **lunghezza focale** e questa relazione prende il nome di **formula del costruttore di lenti** poiché per realizzare una lente con una certa focale si devono conoscere i raggi di curvatura delle interfacce e il loro coefficiente di rifrazione. Si ottiene anche la **legge delle lenti sottili**

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad (2.3)$$

Dato il segno di f si possono definire due tipologie di lenti:

- Se $f > 0$ le lenti prendono il nome di **lenti convergenti**.
- Se $f < 0$ le lenti prendono il nome di **lenti divergenti**.

2.2.1 La lente convergente

Le lenti convergenti sono un tipo di lente in grado di convergere i raggi luminosi in un unico punto, chiamato fuoco. Si possono studiare i casi limite per questa tipologia di lenti per capire il significato fisico di f e di come le lenti convergenti, a seconda della distanza della sorgente luminosa, riescano a far convergere i raggi luminosi. Si distinguono dunque quattro casi limite ben definiti:

- $p \rightarrow +\infty$: tutti i raggi convergono nel medesimo punto Q :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} \implies f = q$$

- $p = f$: la lente non riesce a far convergere i fasci luminosi ma solo a defletterli in modo tale che $q \rightarrow +\infty$:

$$\frac{1}{q} = 0 \implies q \rightarrow +\infty$$

Figura 2.2: La lente sottile

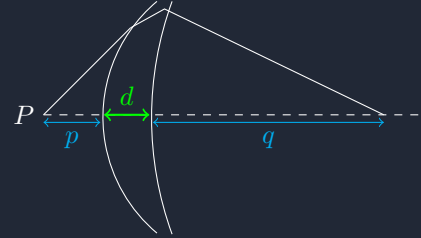
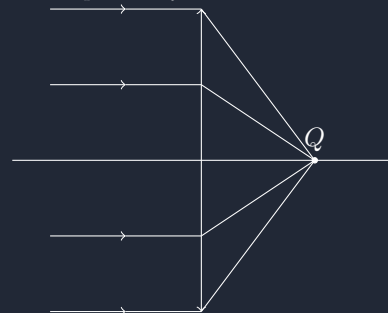


Figura 2.3: Caso A

$p \rightarrow \infty, f > 0$



- Il terzo caso è quello della configurazione $2f - 2f$, ossia la configurazione in cui $p = 2f$

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{2f}$$

E quindi anche $q = 2f$, in questo modo i raggi che partono da P convergono tutti sul punto simmetrico rispetto alla lente Q .

- L'ultima configurazione è quella corrisponde al caso $p < f$: esplicitando q :

$$\frac{1}{q} = \frac{p - f}{fp} \implies \frac{fp}{p - f} = q$$

Dato che $q < 0$, il punto Q si troverà (se la sorgente è a sinistra della lente) a sinistra della lente stessa, individuando un punto di **immagine virtuale** dove convergono le direzioni di tutti i fasci deflessi. La lente non riesce dunque a far convergere i fasci di luce nel fuoco ma riesce solo a defletterli.

Per una lente **convergente** i punti a distanza f dalla lente (supponendo sempre che la sorgente sia a sinistra rispetto alla lente) prendono il nome di **fuochi**: in particolare il punto a destra della lente si chiamerà **fuoco primario** della lente convergente, mentre il fuoco a sinistra della lente è chiamato **fuoco secondario**. Se la formazione dell'immagine è a destra della lente si dice che si ha una **immagine reale della sorgente**, altrimenti se la formazione avviene a sinistra della lente si parla di **immagine virtuale della sorgente**. L'immagine è definita come il luogo dei punti dove si intersecano fisicamente i raggi provenienti da fuori della lente; nel caso dell'immagine virtuale sono i prolungamenti dei fasci di luce deflessi.

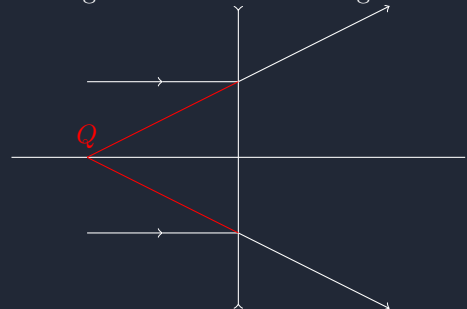
2.2.2 La lente divergente

Le lenti divergenti sono un tipo di lente ottica che ha la capacità di disperdere i raggi luminosi che le attraversano. La legge delle lenti sottili è una valida descrizione anche per questa tipologia di lenti ma, rispetto alla lenti convergenti, viene studiato solamente il caso in cui la sorgente sia posta all'infinito. La legge delle lenti sottili mette in relazione

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies q = f \quad q < 0$$

La lente produrrà dunque delle immagini virtuali sul fuoco secondario: per questo tipo di lenti dunque i fuochi si invertono, così che il fuoco secondario diventerà il fuoco primario e viceversa. Non esistono invece delle immagini reali create da questa lente in quanto i raggi che giungono dall'infinito vengono sempre deflessi (ossia toccano la lente e vengono rifratti a differenza della lente convergente, la quale, invece, fa sì che i fasci luminosi convergano in un medesimo punto Q). La schematizzazione in figura permette di capire perché non esistono immagini reali generati da questa tipologia di lenti.

Figura 2.4: La lente divergente



2.3 Il problema della formazione delle immagini

Fino ad ora si è considerata la sorgente luminosa come punti-forme, cosa accade dunque alla formazione delle immagini da parte di una lente per una immagine estesa? Consideriamo una sorgente P' posta fuori dall'asse ottico, esso sta quindi ad una certa distanza h rispetto all'asse ottico. Si sa, per le proprietà delle lenti convergenti, che tutti i raggi che vengono dall'infinito convergono sul fuoco: il raggio che viene da P' , ed è parallelo all'asse ottico, deve passare per il fuoco F . Il raggio che invece parte da P' passando per il fuoco F' deve necessariamente diventare perpendicolare alla lente. Il punto Q dipende dalla distanza della sorgente rispetto alla lente (il punto Q coincide solo con F quando i raggi vengono dall'infinito). Si può considerare quindi q come la distanza dal punto Q e q' come la distanza da Q' (i quali non sono necessariamente sullo stesso piano). Concentrandosi sui due triangoli simili rossi si ricava la seguente relazione:

$$\frac{q' - f}{f} = \frac{h'}{h}$$

Concentrandosi sui triangoli verdi si ottiene invece

$$\frac{p - f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Uguagliandole si ottiene la seguente espressione per q' :

$$\frac{q' - f}{f} = \frac{f}{p - f} \implies q' - f = \frac{f^2}{p - f} \implies q' = \frac{fp}{p - f}$$

Dato che, dalla legge delle lenti sottili, si ottiene il valore di q come

$$q = \frac{pf}{p - f} \implies q' = q$$

Si è dunque dimostrato che $q = q'$ e dunque i punti Q e Q' giacciono sullo stesso piano perpendicolare all'asse ottico. I triangoli simili viola si ottengono poiché il fascio di luce che viene da P' , passando per il centro della lente, giunge in Q' dato che non c'è alcuna deflessione nel caso di una lente sottile. Considerando l'equazione trovata prima per il rapporto tra h e h'

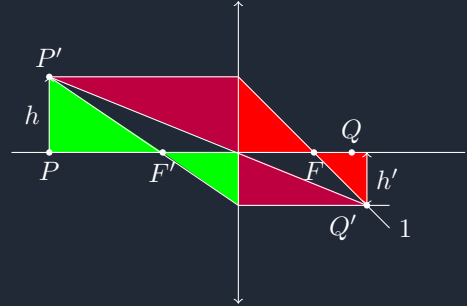
$$\frac{p - f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Moltiplicando per $\frac{p}{p}$ si ottiene la formula dell'**ingrandimento**:

$$I = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \quad (2.4)$$

Il segno meno ricorda che l'immagine si ribalta rispetto alla sorgente nel caso in cui sia p che q siano positivi.

Figura 2.5: Lente convergente e formazione dell'immagine h'



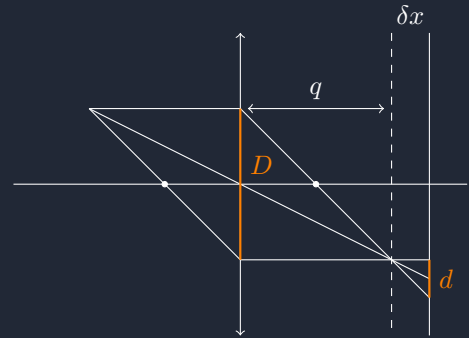
2.3.1 Sbagliare il piano d'immagine

Quando si scatta una foto non si riesce a mettere a fuoco tutti gli oggetti di una scena ma ci si deve concentrare o, in termini di lenti, **mettere a fuoco** solo gli oggetti che risiedono su di un piano immagine ad una determinata distanza dall'obiettivo della fotocamera. Sbagliando il piano dell'immagine, si potrebbe chiamare la distanza del punto di formazione dell'immagine dalla lente come $q + \delta x$ e D come la dimensione della lente; analogamente si può chiamare d la dimensione dell'immagine che risiede sul piano immagine sbagliato. L'unico modo che si ha per mettere a fuoco l'immagine ora è ridurre la dimensione della lente, infatti, per considerazioni geometriche, si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{d}{D} \approx \frac{\delta x}{q} \implies d = \frac{\delta x}{q} D$$

Dove δx è la distanza tra il piano dell'immagine "giusto" e quello sbagliato su cui c'è d : in questo modo si può ridurre lo spread dei raggi luminosi ed ottenere un'immagine nitida. E' simile a quando si cerca di strizzare l'occhio per vedere meglio, anche se in quel caso si modifica anche il cristallino. Come è possibile che in alcune immagini sia sempre tutto a fuoco? È possibile spingere al limite il concetto di messa a fuoco attraverso una **camera stenopeica**: ossia una camera che permette di avere tutti gli oggetti di una scena a fuoco sul medesimo piano immagine. Essa si basa sul diminuire la dimensione della lente D in modo tale che tutto risulti a fuoco. Il prezzo da pagare è che all'interno di questo strumento passa pochissima luce, perdendo dunque molta della luminosità dell'immagine.

Figura 2.6: Piano di immagine scostato di δx rispetto al piano su cui l'immagine osservata risulta a fuoco



2.4 La legge del costruttore di lenti e i vari tipi di lenti

Dalla legge del costruttore di lenti si può ricavare la lunghezza della focale secondo la seguente relazione:

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

Da questa relazione esistono tre tipologie di lenti

2.4.1 Lente piano convessa

Questa lente ha una interfaccia con raggio di curvatura definito ed una interfaccia il cui raggio di curvatura è assimilabile a infinito. Dal costruttore di lenti si ottiene dunque la lunghezza focale come

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

Più la lente è piccola e più la lunghezza focale è piccola e dunque più la lente ha la capacità di far convergere i fasci luminosi. In altre parole, il potere convergente della lente è inversamente proporzionale alla lunghezza focale.



2.4.2 Lente biconvessa

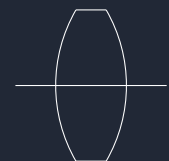
La lente biconvessa è una lente che non ha più una superficie piana ma ha due superficie sferiche con $R_1 > 0$ e $R_2 < 0$. Nel caso in cui $|R_1| = |R_2| = |R|$ si ha la seguente relazione:

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \left(\frac{R(-R)}{-2R} \right)$$

Complessivamente la mia focale sarà data dalla seguente:

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R}{2}$$

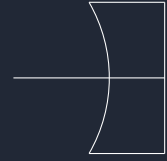
Il potere convergente è due volte maggiore rispetto ad una lente con raggio R (dato che la focale è la metà dell'altra lente).



2.4.3 La lente piano concava

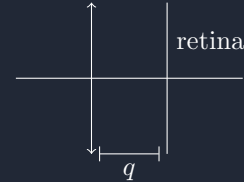
Questa tipologia di lente ha focale negativa ed è esattamente l'opposta di una lente piano convessa: infatti la focale di questa lente sarà la stessa, in modulo, di una piano convessa ma con segno invertito:

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1}R$$

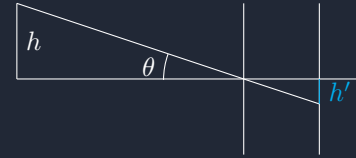


2.5 Funzionamento dell'occhio umano

È possibile schematizzare l'occhio umano attraverso una lente con indice di rifrazione di circa $n = 1.4$. Sulla parte posteriore dell'occhio si ha la retina, ossia il rilevatore dell'occhio, che è in grado di raccogliere la luce in entrata dal cristallino che poi è trasferita al nostro cervello tramite il nervo ottico. La retina dell'occhio umano è dunque equivalente al piano immagine. Poiché non si riesce a cambiare la distanza $q = 0.02$ m tra il cristallino e la retina, la messa a fuoco è possibile utilizzando solo dei muscoli che contraggono il cristallino, il quale contribuisce solo per un terzo del potere convergente dell'occhio. Gli altri due terzi del potere convergente dell'occhio derivano dalla cornea, la quale è posta davanti al cristallino ed immersa nell'umor acqueo mentre l'occhio è immerso nell'umor vitreo (ognuno con i suoi indici di rifrazione). L'occhio è dunque l'analogo del sistema ottico in figura.



La distanza minima di messa a fuoco aumenta con l'età in quanto diminuisce la capacità di strizzare il cristallino da parte dei muscoli del cristallino: la distanza minima è di $p_{\min} \approx 0.3$ m. Un occhio sano riesce inoltre a mettere a fuoco fino ad una distanza $p_{\max} = +\infty$. La distanza focale dell'occhio è di ~ 0.02 m per una sorgente posta all'infinito. Invece, per un oggetto che si trova alla distanza minima di messa a fuoco, la focale diminuisce a



$$\frac{1}{f} = \frac{q + p}{pq} \implies f = \frac{pq}{p + q} \implies f \approx 19.2 \text{ mm}$$

Si può ricavare l'ingrandimento dell'occhio tramite la formula di ingrandimento conoscendo la distanza p dell'oggetto osservato. Dunque, banalmente, più gli oggetti sono vicini e più sono grandi all'interno del nostro occhio dato che q è una distanza fissa:

$$I = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

2.6 Lenti di ingrandimento e sistema di lenti

2.6.1 Il principio di funzionamento di una lente di ingrandimento

Per poter ingrandire gli oggetti si utilizzano dei sistemi di lenti, ossia degli apparati ottici in grado di combinare diverse lenti per poter ingrandire oggetti molto piccoli o molto distanti in modo tale che questi abbiano una dimensione sufficiente per cui il nostro occhio riesce ad osservarli senza problemi. Nel caso di una sola lente, se si ponesse un oggetto prima della focale, si osserverebbe che i raggi luminosi dell'oggetto non si incontrano; l'oggetto apparirà quindi più grande quando arriva all'occhio umano ad una certa distanza d . Data la legge delle lenti sottili, con $p < f$ si ha

$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{fp} < 0$$

I raggi luminosi, per l'occhio, appaiono come se si formino prima dell'oggetto stesso: l'occhio umano osserva allora la sorgente virtuale dell'immagine. Si può studiare l'angolo con cui l'immagine virtuale h' si interseca con l'occhio umano anche se il raggio verde è generato dall'oggetto h . La distanza dove si forma l'immagine virtuale è q , si vuole ora trovare l'angolo verde θ' : si sa che, in assenza della lente, l'oggetto con altezza h formerebbe un angolo

$$\tan \theta = \frac{h}{p+d}$$

L'angolo θ' , invece, sarà dato dalla seguente espressione (con $q < 0$ in quanto l'immagine h' si forma a sinistra della lente):

$$\tan \theta' = \frac{h'}{q+d} \quad (2.5)$$

Possiamo ora determinare quale sarà l'angolo più grande. Dall'espressione dell'ingrandimento possiamo ricavare h' in funzione della lente e di h :

$$\frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} = -\frac{pf}{p-f} \frac{1}{p} \implies h' = \frac{f}{f-p} h$$

Combinando le due espressioni della tangente si può determinare quale è l'angolo più grande

$$\tan \theta' = \frac{f}{f-p} \frac{h}{q+d}$$

Si riscrive q attraverso le relazioni con f e p (si inverte $p-f$ con $f-p$ a causa del segno di q):

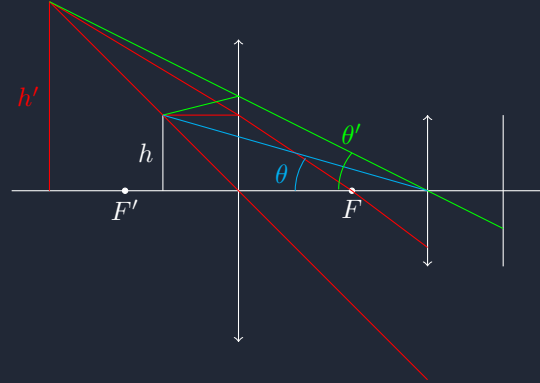
$$q = \frac{pf}{f-p} \implies \tan \theta' = \frac{f}{f-p} \frac{h}{\frac{pf+df-dp}{f-p}}$$

Confrontando le due espressioni direttamente

$$\tan \theta' = \frac{h}{p+d - \left(\frac{dp}{f}\right)} > \tan \theta = \frac{h}{p+d}$$

Si osserva che $\theta' > \theta$ proprio perché il denominatore è più piccolo, dunque l'immagine si ingrandisce.

Figura 2.7: Lente di ingrandimento



2.6.2 Sistema di lenti

In questo paragrafo si vuole dimostrare il comportamento di un sistema di lenti composto da due lenti convergenti: l'ipotesi è che tale sistema aumenti il potere convergente e che quindi il sistema di lenti si possa comportare come una unica lente con un potere convergente maggiore. Ci si aspetta dunque la focale totale sia la somma delle focali, tuttavia questa cosa è sbagliata in quanto il potere convergente è tanto maggiore quanto più piccola la focale della lente: allora il potere convergente deve essere direttamente proporzionale all'inverso delle focali delle lenti

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Questo è dimostrabile a partire dall'applicazione della legge delle lenti sottili a tutto il sistema di lenti (così come si era fatto per l'occhio) e quindi vale per qualsiasi distanza $d_{1,2}$ tra le due lenti.

$$d_{1,2} = q + p'$$

E quindi si ottiene

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (2.6)$$

2.7 Principio di funzionamento del telescopio

Per poter osservare oggetti molto lontani si fa utilizzo di un apparato ottico che prende il nome di **telescopio**: il telescopio è composto da due lenti convergenti poste ad una certa distanza tra di loro in modo tale da ingrandire oggetti molto distanti dallo strumento. Consideriamo allora un asse ottico molto lungo alle cui estremità abbiamo l'oggetto da osservare e dall'altra l'occhio: possiamo tracciare quindi i fasci di luce che partono dall'oggetto e intersecano il centro del cristallino dell'occhio. Esiste allora un certo angolo α tra i due fasci di luce: a seconda dell'angolo, il corpo celeste avrà una certa dimensione sull'occhio. Se si avesse un sistema ottico (ossia il telescopio) tra l'occhio e l'oggetto, potremmo posizionare due lenti in modo tale che il fuoco primario della prima lente coincida con il fuoco secondario della seconda lente. Inoltre, le lenti sono scelte in modo tale che $f_1 > f_2$.

Così la distanza tra le due lenti è esattamente $d = f_1 + f_2$. Adesso si deve rappresentare i raggi che arrivano dal corpo celeste sulle due lenti convergenti. Analizzando ora il telescopio, i raggi molto vicini all'asse ottico appaiono paralleli tra di loro. Possiamo considerare il raggio blu che arriva con l'angolo α : nel momento in cui si pone un sistema di lenti davanti all'occhio, i raggi vicini a quello blu arriveranno sulla lente primaria del telescopio venendo fatti convergere sotto l'asse ottico. Per studiare ora cosa accade ai raggi del corpo celeste alla destra del fuoco primario della prima lente, è sufficiente immaginare h (ossia l'immagine del corpo celeste dopo la prima lente) come sorgente posta prima della seconda lente del telescopio. Osservando dunque il disegno si vede che i raggi blu che venivano dall'estremità finale del corpo celeste, arrivano sul nostro occhio con un nuovo angolo β più grande. Si ottengono le seguenti relazioni per i triangoli evidenziati dal tratto più spesso

$$\frac{h}{f_1} = \tan \alpha \quad \frac{h}{f_2} = \tan \beta$$

Si ha l'utile relazione come il rapporto tra le tangenti:

$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (2.7)$$

Figura 2.8: Sistema di due lenti convergenti

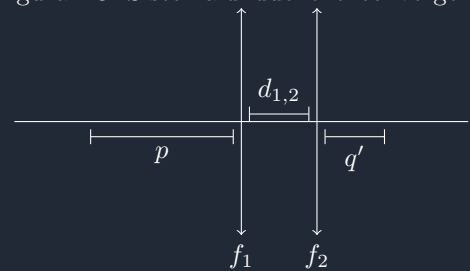


Figura 2.9: Osservare un corpo celeste ad occhio nudo

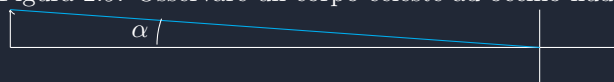
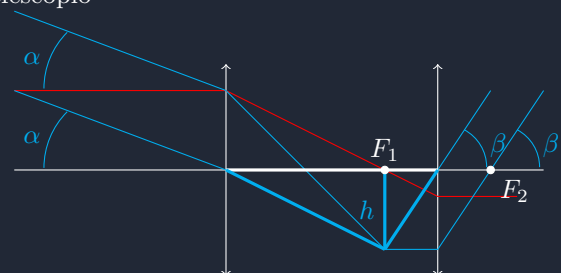


Figura 2.10: Osservare un corpo celeste tramite un telescopio



Se il rapporto tra le tangenti è maggiore di 1 allora

$$\beta > \alpha \implies I > 1$$

Dunque il telescopio riesce ad ingrandire l'oggetto che si sta osservando.

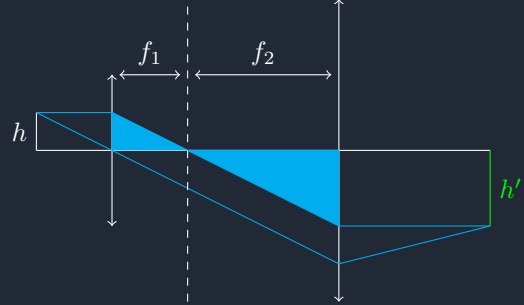
2.8 Principio di funzionamento del microscopio

Quando si vuole osservare un oggetto molto piccolo, invece di usare una sola lente di ingrandimento, possiamo utilizzare un sistema di lenti con l'oggetto posto nel fuoco secondario della prima lente convergente in modo tale che $p = f_1$. Scelgo allora una seconda lente a focale lunga (l'inverso del telescopio) così che la distanza tra le due lenti sia $d = f_1 + f_2$ e che quindi il fuoco primario della prima lente coincida con il fuoco secondario della seconda lente. Si può stimare geometricamente l'ingrandimento dell'immagine, secondo gli stessi procedimenti fatti per il telescopio, ottenendo la seguente espressione:

$$I = \frac{h'}{h} = \frac{f_2}{f_1}. \quad (2.8)$$

Dato che $f_2 > f_1$, segue che $I > 1$ e dunque l'immagine sarà ingrandita. Se si volesse tenere conto del fatto che l'immagine sia ribaltata, allora si dovrebbe mettere un meno davanti al rapporto per tenere conto del ribaltamento.

Figura 2.11: Schematizzazione del microscopio



Parte II

Polarizzazione della luce

Capitolo 3

Polarizzazione delle onde elettromagnetiche

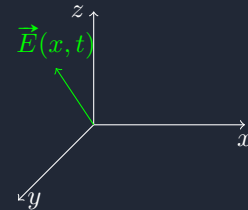
3.1 Definizione di polarizzazione

Si definisce **polarizzazione** la direzione del campo elettrico dell'onda elettromagnetica, si ricorda che per una onda piana la polarizzazione giace in un piano che è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda \hat{k} . Il campo elettrico dell'onda sarà dato in funzione sia della posizione che del tempo. Matematicamente il campo elettrico si propagerà solamente sul piano zy e dunque si può esprimere come

$$\vec{E}(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{z} + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y}$$

Dove ϕ_z e ϕ_y sono le fasi del campo rispetto ai due assi. In questo caso l'onda elettromagnetica si propaga lungo la direzione $\hat{x} \equiv \hat{k}$. Esistono tre tipi di polarizzazione.

Figura 3.1: Polarizzazione di un'onda che il cui vettore di propagazione è \hat{x}



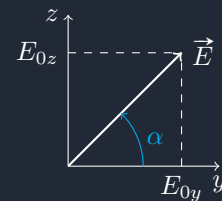
3.1.1 Polarizzazione lineare

La polarizzazione lineare consiste nella polarizzazione di onde il cui campo elettrico, sul piano zy , oscilla con la stessa fase $\phi_y = \phi_z$. Le due componenti z, y del campo elettrico oscillano in fase sia spazialmente che temporalmente e quindi la direzione del campo elettrico totale rimane costante. Si esprime la tangente dell'angolo in funzione del tempo come

$$\tan \alpha(t) = \frac{E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z)}{E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y)} = \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$$

La seconda uguaglianza vale perché le fasi sono le stesse e dunque l'angolo dipende solamente dal modulo delle componenti sulle y e sulle z .

Figura 3.2: Campo elettrico sul piano zy , l'asse x è uscente dal piano



3.1.2 Polarizzazione circolare

La polarizzazione circolare è un altro caso particolare nel quale $E_{0y} = E_{0z}$, mentre le fasi risultano differire di $\frac{\pi}{2}$, per cui $\phi_y = \phi_z \pm \frac{\pi}{2}$. Si osserva cosa accade alla tangente dell'angolo in funzione del tempo:

$$\tan \alpha(t) = \frac{E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z)}{E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y)} = \frac{\cos(kx - \omega t + \phi_z)}{\cos(kx - \omega t + \phi_z \pm \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(kx - \omega t + \phi_z)}{\mp \sin(kx - \omega t + \phi_z)}$$

Per le proprietà trigonometriche del coseno, quando si introduce uno sfasamento di $\frac{\pi}{2}$, il coseno si trasforma nel seno dell'angolo ϕ_z , quindi vale la seconda uguaglianza. Se si indicasse l'argomento dentro al seno e al coseno come θ , si otterrebbe la seguente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{-\sin(\theta - \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

Allora con questi passaggi trigonometrici si ottiene

$$\tan \alpha(t) = \pm \tan \left(kx - \omega t + \phi_z + \frac{\pi}{2} \right)$$

Dunque si ottiene che l'angolo α varia nel tempo ed il simbolo \pm determina se la variazione di fase è positiva o negativa:

$$\alpha(t) = \pm \left(kx - \omega t + \phi_z + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.1)$$

Le due polarizzazioni prenderanno il nome di polarizzazioni **circolari**:

$$+ : \alpha(t) = kt - \omega t$$

$$- : \alpha(t) = kt + \omega t$$

Nel primo caso gira in senso orario e dunque prende il nome di **polarizzazione circolare sinistra** (anche indicata con σ^+), mentre l'altra, girando in senso antiorario, prenderà il nome di **polarizzazione circolare destra** (anche indicata con σ^-).

3.1.3 Polarizzazione ellittica

La polarizzazione ellittica è il caso "generale" della polarizzazione, ossia quello nel quale

$$E_{0y} \neq E_{0z} \quad \phi_y \neq \phi_z$$

Si chiama ellittica proprio perché il campo elettrico, oscillando, disegna un'ellisse sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda.

3.2 Riflessione su di uno specchio metallico

Se si avesse un campo elettrico con polarizzazione circolare sinistra, dunque tale che i moduli $E_{0z} = E_{0y}$ e tale che i vettori siano in fase con $\phi_y = \phi_z + \frac{\pi}{2}$. Se si scegliesse $\phi_z = 0$, e dunque $\phi_y = \frac{\pi}{2}$, allora si potrebbe esprimere il campo elettrico come il seguente vettore:

$$\vec{E} = E_0 \cos \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z$$

Se si mandasse questa onda elettromagnetica con questo determinato campo elettrico su di uno specchio metallico, si osserverebbe che l'interferenza distruttiva causata dal metallo non permetterebbe di avere campo elettrico dentro lo specchio. Gli elettroni che oscillano nel mezzo metallico, oltre che a generare il campo elettrico in controfase, generano un'onda anche verso la direzione di provenienza del campo elettrico e dunque i due campi elettrici si eliminano all'interno del metallo ma non all'esterno di esso. Si scrive dunque il campo elettrico che si propaga verso sinistra cambiando la fase del campo di π :

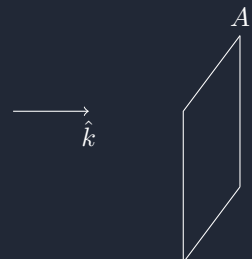
$$\vec{E} = -E_0 \cos \left(-kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{u}_y + E_0 \cos(-kx - \omega t) \hat{u}_z$$

L'effetto dello specchio metallico è dunque quello di invertire il valore del campo elettrico in virtù del fatto che il campo generato è in controfase. Quindi i due campi sono opposti in $x = 0$ ed il nuovo campo si propaga verso destra e non verso sinistra: la polarizzazione quando la luce incide su di uno specchio viene invertita. Nel caso di polarizzazione lineare, si invertono i segni.

3.3 L'energia dell'onda elettromagnetica

Perché ci si scalda al sole? Quando una onda elettromagnetica incide sui nostri elettroni, essa li mette in accelerazione facendo sì che essi guadagnino energia cinetica, rilasciandola poi sotto forma di calore. Come si può determinare l'energia emessa da una data onda elettromagnetica? si può determinare l'**intensità luminosa**, ossia l'energia che passa per una data superficie A :

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A} = I = \epsilon_0 c \vec{E}(t)^2 \quad (3.2)$$



Si può dunque determinare l'energia che attraversa una certa superficie in un certo intervallo di tempo come

$$\Delta E = I A \Delta t. \quad (3.3)$$

Dato che il campo elettrico oscilla sempre, ci sono sia degli istanti in cui il campo elettrico è nullo ma anche degli istanti in cui il campo elettrico è massimo: l'intensità luminosa dunque oscilla anch'essa con un certo periodo e con una certa fase rispetto al campo elettrico. Dato che sussiste la seguente uguaglianza,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

dove λ non è altro che la lunghezza d'onda della radiazione considerata, allora l'intensità luminosa è la media del modulo del campo elettrico durante un suo periodo completo di oscillazione:

$$\langle I \rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2 dt \implies \langle I \rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt$$

Allora si può risolvere la media rispetto al coseno alla seconda e ottenere l'intensità luminosa media di una certa onda elettromagnetica come

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E^2 \quad (3.4)$$

Di conseguenza la media dell'intensità luminosa non è altro che la metà dell'intensità luminosa totale in valore assoluto. Se la polarizzazione del campo elettrico in modulo rimane sempre E_0 allora l'intensità varia poiché si ha il doppio dell'intensità: questa onda polarizzata è la somma del contributo dell'onda piana iniziale e del contributo sfasato rispetto a questa onda.

3.4 Il fenomeno della trasmissione di un mezzo dielettrico

I fenomeni di trasmissione e di riflessione alle interfacce tra dielettrici dipendono dalla polarizzazione delle onde rispetto al piano di incidenza. Il **piano di incidenza** è il piano che contiene il **raggio incidente** definito dal vettore \hat{k} e la direzione normale alla superficie nel punto di incidenza: nel disegno il piano di incidenza coincide con il foglio. Il vettore campo elettrico è dunque scomponibile in due componenti: una parallela ed una perpendicolare al piano di incidenza il cui verso, ossia se entrante o uscente, è arbitrario. Un fenomeno particolare che si incontra è quando una onda incide un dielettrico senza essere riflessa (ossia la luce se ha una polarizzazione con solo \vec{E}_{\parallel}) viene solo trasmessa.

Se avessi un dipolo elettrico oscillante con il campo orientato in una certa direzione, allora esso emetterà solamente campo elettrico con direzione perpendicolare alla direzione del dipolo elettrico oscillante; l'emissione lungo la direzione di oscillazione è nulla. Il risultato delle onde in trasmissione o riflessione sono date dalle cariche all'interno del dielettrico: si immagina di avere la condizione per cui si ha una interfaccia con un raggio di luce che incide ad un certo angolo sul dielettrico in modo tale che si crei un angolo di 90° tra i raggi riflessi e trasmessi: in questo caso si creano dipoli elettrici nel dielettrico che oscillano perpendicolarmente alla direzione dell'onda trasmessa. Questi dipoli possono creare solo delle onde nella direzione dell'onda riflessa e dunque l'onda riflessa non può esistere. Questo angolo particolare prende il nome di **angolo di Brewster** e questo vale solo quando \vec{E} giace sul piano di incidenza e dunque si può verificare solo per una polarizzazione lineare e vale dunque per \vec{E}_{\parallel} . La relazione che si ottiene tra gli angoli sotto mi permette di ricavare l'angolo di Brewster:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \pi \\ n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \end{cases}$$

Figura 3.3: L'interfaccia tra dielettrici

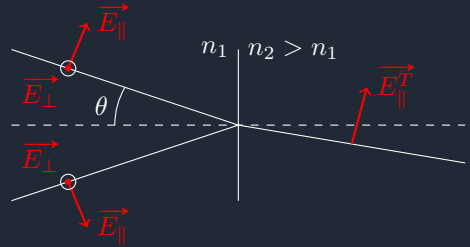
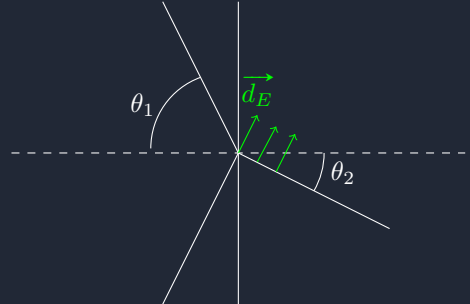


Figura 3.4: L'angolo di Brewster



Si ottiene allora l'angolo critico per il quale si ha questa condizione:

$$\tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.5)$$

L'angolo tra aria e vetro di Brewster è esattamente $\theta = 56^\circ$. Se della luce con polarizzazione ellittica incide con l'angolo di Brewster su di una superficie dielettrica, la riflessione emerge con polarizzazione lineare e perpendicolare. L'interfaccia si comporta come se fosse un polarizzatore: solo la luce con una data polarizzazione può percorrere il cammino di riflessione.

3.5 Polarizzatori e lamine di ritardo

3.5.1 Funzionamento di un cubo polarizzatore

Alcuni materiali dielettrici sono detti **birifrangenti**: ossia hanno due indici di rifrazione per due polarizzazioni lineari ortogonali della luce che li attraversa. Una applicazione è il **cubo polarizzatore**, il cui scopo è proprio quello di separare due polarizzazioni ortogonali di un fascio incidente sul cubo con polarizzazione generica. Si può ora analizzare il funzionamento del cubo polarizzatore attraverso il secondo modello: tra le due facce del cubo è inserito un film sottile birifrangente per cui l'indice di rifrazione per gli assi ortogonali è diverso. Si avrà allora che gli indici di rifrazione $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$. Si vuole ora che l'angolo di incidenza a 45 gradi sia l'angolo di riflessione totale per \vec{E}_{\perp} .

Si possono dunque elencare le ipotesi:

- Si sceglie n_{\perp} in modo tale che $\frac{\pi}{4}$ sia l'angolo di riflessione totale interna per luce con polarizzazione \vec{E}_{\perp} .
- Si sceglie n_{\parallel} in modo tale che l'angolo $\frac{\pi}{4}$ sia l'angolo di Brewster per luce con polarizzazione \vec{E}_{\parallel} .

L'angolo di rifrazione è dunque molto grande e per questo coincide con l'interfaccia e dunque, secondo la legge di Snell, si ha riflessione totale interna:

$$n_{\text{vetro}} \sin \frac{\pi}{4} = n_{\perp} \sin \frac{\pi}{2}$$

L'indice di rifrazione n_{\perp} deve allora soddisfare questa condizione per poter essere un angolo di riflessione totale interna per la luce con polarizzazione \vec{E}_{\perp} :

$$n_{\perp} = n_{\text{vetro}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mentre n_{\parallel} del film birifrangente è in relazione con l'indice di rifrazione del vetro secondo la seguente:

$$\tan \theta = \frac{n_{\parallel}}{n_{\text{vetro}}} \implies n_{\parallel} = n_{\text{vetro}}$$

Dato che l'angolo, per costruzione, è $\frac{\pi}{4}$ allora la relazione a destra vale.

3.5.2 Polarizzatore a fili metallici

Un altro strumento per poter ottenere una sola polarizzazione da un fascio di luce lineare è detto polarizzatore a **fili metallici**. Il polarizzatore a fili metallici è una lastra di materiale sulla quale ci si può depositare dei fili metallici sottili lungo una direzione ben definita (in genere ognuno con un diametro di $10 \sim 100$ nm). Supponendo di avere una luce incidente al filo metallico con componente sia parallela che perpendicolare al fascio di fili e di farla passare attraverso il polarizzatore. La luce che passa dentro questo polarizzatore è quella con \vec{E}_{\perp} poiché il campo parallelo mette in moto gli elettroni nei fili sottili e, dato che sono più alti che larghi, allora c'è più

Figura 3.5: Schematizzazione del campo elettrico

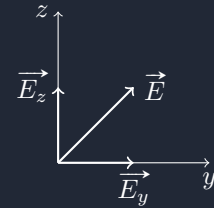
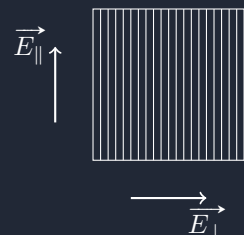
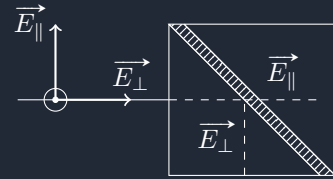


Figura 3.6: Il cubo polarizzatore



movimento degli elettroni che creano un campo elettrico con interferenza distruttiva per la componente parallela. Le onde perpendicolari, invece, passano in quanto il diametro dei microfil è molto piccolo e dunque non c'è abbastanza spazio per poter mettere in movimento gli elettroni per poter creare interferenza distruttiva per quella determinata polarizzazione.

3.6 Lamine di ritardo

Le **lamine di ritardo** si basano su materiali birifrangenti e servono a modificare la polarizzazione della luce. Supponendo di scrivere un campo elettrico lungo una sola direzione con

$$\vec{E}_{\parallel} = E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

Ci si potrebbe chiedere come sia l'onda, rispetto all'origine O , sia il campo elettrico, cambino rispetto al tempo. Si considera un altro sistema di riferimento O' descritto con assi paralleli a quelli del sistema di riferimento O . Concentrandosi ora sul sistema di riferimento O' , dopo un certo istante di tempo, l'onda avrà camminato per una distanza x rispetto a O e per una distanza x' rispetto a O' . Si esprime dunque il campo elettrico rispetto a O' come

$$\vec{E}(x', t) = E_{0z} \cos(k(d + x') - \omega t) \hat{z}$$

Per l'onda, dopo essersi propagata per una distanza d , si può considerare un sistema di riferimento O' attraverso un termine di fase kd che prende il nome di **ritardo di fase**, il quale è dovuto alla propagazione lungo il tratto di lunghezza d che, nel caso si tratti di un mezzo dielettrico con indice di rifrazione n , diventa knd . Si considera ora una lamina di spessore d con materiale birifrangente ed un campo elettrico incidente generico di una onda piana con polarizzazione lineare

$$\vec{E}_{\text{in}} = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

Adesso ci si chiede che cosa accade al campo elettrico dopo che ha attraversato la lamina in funzione di un sistema di riferimento O' posto dopo la lamina. Se il materiale è birifrangente, allora dovrà necessariamente cambiare n a seconda della direzione di oscillazione. Il campo elettrico di uscita dalla lamina allora sarà:

$$\vec{E}_{\text{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t + kn_y d) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx' - \omega t + kn_z d) \hat{z}$$

La polarizzazione in uscita sarà quindi ellittica. La velocità nel mezzo dipende da $\frac{\lambda}{T}$, ma la lunghezza d'onda dipende da n : nel mezzo birifrangente esisterà un asse lungo il quale la velocità dell'onda va più lenta (e quindi si ha un indice di rifrazione maggiore) ed un asse veloce con indice di rifrazione minore.

Cambiando l'origine dei tempi, si potrebbe aggiungere o togliere a piacere un termine di fase comune su due coseni. Se si ponesse come termine di fase $-kn_y d$, allora il campo elettrico uscente sarà

$$\vec{E}_{\text{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx' - \omega t + kd(n_z - n_y)) \hat{z}$$

E quindi la fase dipende dalla differenza tra gli indici di rifrazione.

3.6.1 La lamina $\frac{\lambda}{2}$

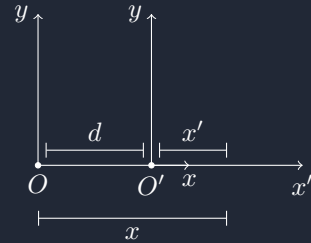
Supponendo di mandare una onda elettromagnetica con polarizzazione lineare, la prima lamina di interesse è quella la cui differenza di fase tra l'asse fast e quello slow è π ,

$$\delta\phi = \pi \quad kd(n_z - n_y) = \pi \implies d\Delta n = \frac{\lambda}{2}$$

La differenza tra i due indici di rifrazione che moltiplicano la distanza prende il nome di **cammino ottico**. La differenza tra i cammini ottici in questa lamina è pari alla metà della lunghezza d'onda in uscita: l'effetto di questa lamina è quello di introdurre un ritardo di fase uguale a π lungo l'asse lento. Inoltre, se la polarizzazione in ingresso è lineare, la luce trasmessa ha polarizzazione ancora lineare ma lungo l'asse riflesso rispetto all'asse veloce della lamina. Dato che la fase è π , allora la componente lungo z cambia di segno a causa del ritardo di fase:

$$\vec{E}_{\text{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t) \hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t) \hat{z} \quad (3.6)$$

Figura 3.7: Ritardo di fase



Analizzando ora il caso di una polarizzazione circolare sinistra σ^+ :

$$\vec{E}_{in} = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

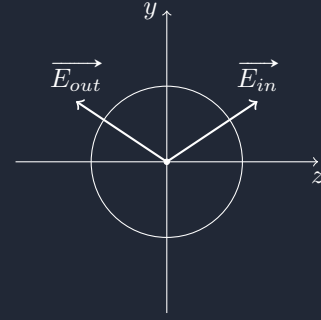
Aggiungendo ora il termine di fase anche per l'asse lento,

$$\vec{E}_{out} = E_0 \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t + \pi) \hat{z}$$

Sottraggo ora un termine $-\pi$ rispetto ad entrambi i termini e quindi

$$\vec{E}_{out}(x', t) = E_{0y} \cos\left(kx' - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t) \hat{z}$$

Figura 3.8: Visualizzazione della polarizzazione in uscita



3.6.2 La lamina $\frac{\lambda}{4}$

La lamina di ritardo $\frac{\lambda}{4}$ è molto simile a quella di $\frac{\lambda}{2}$ anche se causa un ritardo che è la metà, ossia produce un ritardo di fase $kd\Delta n = \frac{\pi}{2}$ per cui la differenza dei cammini ottici sarà $\frac{\lambda}{4}$. Se la polarizzazione in ingresso fosse lineare con angolo di $\frac{\lambda}{4}$ rispetto all'asse slow, essa uscirebbe con polarizzazione circolare destra.

3.6.3 Polarizzazione nei due casi

In generale la polarizzazione in ingresso, ed in uscita, sarà ellittica, anche se è possibile verificare che, se si avesse una polarizzazione ellittica e scegliendo un angolo opportuno in una lamina $\frac{\lambda}{4}$, si potrebbe ottenere una polarizzazione lineare e agire sulla spanciatura dell'ellisse. Poi con una $\frac{\lambda}{2}$ si può ottenere una polarizzazione lineare rispetto all'asse preferito.

3.6.4 Lamine zero e multiple order: cosa accade se si utilizza una lamina con diverse lunghezze d'onda

Si studia ora che accade se si prova ad utilizzare una determinata lamina, che è stata progettata per funzionare solamente con determinate lunghezze d'onda, se si utilizzano onde diverse da quelle specificate. Una lamina birifrangente è progettata in modo tale che il ritardo di fase tra le due polarizzazioni principali sia

$$\phi = kd(n_z - n_y) = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = \pi + 2\pi i \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Nel caso di una lamina $\frac{\lambda}{2}$, i indica l'ordine della lamina. Se si volesse ora utilizzare questa lamina con una lunghezza d'onda differente $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$, supponendo che non ci sia molta differenza tra i due ordini di rifrazione, si può determinare il ritardo di fase ϕ' :

$$\phi' = \frac{2\pi}{\lambda'} d\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} d\Delta n$$

Se la variazione d'onda è molto piccola, il termine al denominatore è sviluppabile con Taylor:

$$\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} \approx \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Ottenendo dunque

$$\phi' \approx \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) \implies \phi' \approx \phi \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Data la prima equazione, si trasforma in

$$\phi' \approx (\pi + 2i\pi) \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Dunque l'errore sul ritardo sarà dato dalla seguente:

$$\Delta\phi \approx \phi \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \implies \Delta\phi \propto (\pi + 2\pi i) \quad (3.8)$$

Si possono allora considerare i seguenti casi

- $i = 0$: prendono il nome di **lamine zero-order** ed hanno uno spessore ridotto e risultano poco sensibili alle variazioni di lunghezza d'onda e di angolo di incidenza;
- $i \gg 1$: prendono il nome di **lamine multiple-order** e sono più spesse ed economiche, ma presentano un'elevata sensibilità alle variazioni di lunghezza d'onda e di incidenza.

3.7 Aberrazioni delle lamine in condizioni non ideali

Quando si opera con delle lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ che non hanno ritardi di fase ideali, ossia quando la polarizzazione non è lineare oppure si è in condizioni di umidità e temperatura che differiscono da quelle specificate dal costruttore, si introducono inevitabilmente delle aberrazioni. Si è detto, fino ad ora, che esistono degli assi relativi ai cubi paralleli e degli assi ortogonali relativi alla lamina. Si potrebbe avere che la lamina di ritardo abbia gli assi lenti e veloci inclinati di un certo angolo θ rispetto agli assi paralleli al polarizzatore. Per poter analizzare questa situazione, si ricorda l'espressione dei complessi in forma esponenziale

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ricordando ora l'espressione del campo elettrico generico

$$\vec{E} = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{k} + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y}$$

Utilizzando i complessi si esprime il campo elettrico come una componente lungo l'asse reale e l'altra lungo l'asse degli immaginari. Ricordandosi di prendere solamente la parte reale di questa espressione si ha

$$\vec{E} = \text{Re} \left(E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \hat{z} + E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \hat{y} \right)$$

Utilizzando una matrice 2×1 si esprime il campo elettrico in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix}$$

Allora lungo gli assi a, b , che sono orientati di un certo θ rispetto agli assi paralleli ed ortogonali, si esprime il campo elettrico come:

$$\vec{E}_{a,b} = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) (\cos \theta \hat{a} - \sin \theta \hat{b}) + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_z) (\sin \theta \hat{a} + \cos \theta \hat{b})$$

Questa espressione si può allora riscrivere come le coordinate del campo rispetto ai versori \hat{a} e \hat{b} . Si può dunque pensare a questa espressione come il prodotto tra una matrice due per due e il vettore del campo elettrico nelle sue componenti:

$$\text{Re} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

La matrice a sinistra prende il nome di matrice delle rotazioni in funzione dell'angolo θ , questa matrice permette di ottenere l'espressione di un vettore rispetto a degli assi ruotati di un certo angolo θ , e si indica con $R(\theta)$. La matrice che serve per tornare agli assi di partenza è la matrice inversa (ossia quella coi segni invertiti per il seno). Adesso, data l'espressione del campo elettrico generico rispetto alla base \hat{a}, \hat{b}

$$\vec{E}_{a,b} = E_{0a} \cos(kx - \omega t + \phi_a) \hat{a} + E_{0b} \cos(kx - \omega t + \phi_b) \hat{b}$$

Attraverso i numeri complessi, si esprime il vettore parte reale del campo come

$$\text{Re} \begin{pmatrix} E_{0a} e^{i(kx - \omega t + \phi_a)} \\ E_{0b} e^{i(kx - \omega t + \phi_b)} \end{pmatrix}$$

Se si introducesse sull'asse lento un ritardo di fase, il campo elettrico uscente è dato dal campo rispetto al versore \hat{b} e dal campo rispetto al versore \hat{a} con un certo ritardo di fase $\delta\phi$:

$$\vec{E}_{a,b}^{OUT} = E_{0a} \cos(kx - \omega t + \phi_a + \delta\phi) \hat{a} + E_{0b} \cos(kx - \omega t + \phi_b) \hat{b}$$

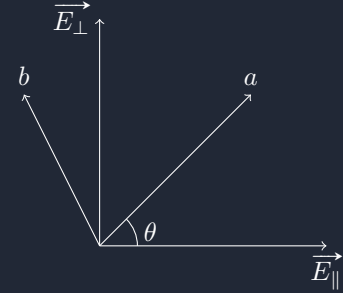
Si ottiene dunque l'espressione del campo in uscita attraverso il prodotto tra matrici

$$\text{Re} \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0a} e^{i(kx - \omega t + \phi_a)} \\ E_{0b} e^{i(kx - \omega t + \phi_b)} \end{pmatrix}$$

Analogamente a quanto detto prima, se si volesse ottenere il campo elettrico in entrata a partire dal campo elettrico in uscita, si può applicare la matrice inversa. Si riassume che l'espressione del campo elettrico in uscita da una lamina, che è entrato con un certo angolo, ha espressione

$$\vec{E}_{a,b}^{OUT} = \text{Re} \left(R(-\theta) \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix} \right) \quad (3.10)$$

Figura 3.9: Scomposizione del campo elettrico



Parte III

Interferenza

Capitolo 4

Aberrazioni e interferenze

4.1 Il concetto di interferenza

L'Interferenza si verifica quando sono presenti due o più campi elettromagnetici con fasi differenti. Di fatto, quando si sommano i campi elettromagnetici si utilizzano le formule di prostaferesi per il coseno:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (4.1)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (4.2)$$

Dato che ci sono molte variabili per cui i campi potrebbero differire, possiamo partire dall'analisi del caso semplice in cui solamente la fase differisce per i due campi elettrici.

4.1.1 Interferenza semplice

Il caso semplice di interferenza si ha quando i due campi elettromagnetici hanno la stessa direzione di propagazione e quindi stessa frequenza (o pulsazione); inoltre, per rimanere nel caso semplice, hanno anche stessa polarizzazione e stessa ampiezza. L'unica differenza è la fase.

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_1) \hat{y} \\ \vec{E}_2 &= E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_2) \hat{y} \end{aligned}$$

Secondo le formule di prostaferesi si ottiene il campo elettrico totale:

$$\vec{E}_{TOT} = 2E_0 \cos \left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

L'intensità totale mediata nel tempo si ottiene come

$$\langle I_{TOT} \rangle = c\epsilon_0 \left\langle \vec{E}_{TOT} \right\rangle^2 = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T 4E_0^2 \cos^2 \left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) dt \quad (4.3)$$

Ossia la media temporale dell'integrale del campo elettrico è l'intensità totale media in un certo intervallo di tempo $\Delta t = T$, dove T corrisponde al periodo di oscillazione del campo. Questo permette di esprimere l'intensità delle due onde come l'intensità di una unica onda "somma".

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \quad (4.4)$$

Se $\phi_1 = \phi_2$ c'è un istante in cui l'intensità è molto maggiore dell'intensità generata dalla semplice somma delle onde, mentre c'è un istante in cui si "distrugge" l'energia delle due onde, ossia quando $\phi_1 = \pi + \phi_2$. Si può dunque riassumere che

- Se $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n$: le onde sono in **fase**, e si ha interferenza costruttiva;
- Se $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n + \pi$: le onde sono in **controfase** e si ha interferenza distruttiva.

4.1.2 Oscillazione di due onde con polarizzazioni diverse

Si considera il caso in cui due onde oscillino insieme ma con polarizzazioni diverse: l'ampiezza e la direzione dei campi elettrici non sono mai gli stessi per le due onde. Supponiamo ancora che abbiano lo stesso \hat{k} ma con due polarizzazioni lineari diverse:

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} \cos(kx - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} \cos(kx - \omega t + \phi_2)\end{aligned}$$

Si può ora scrivere il campo elettrico totale e poi determinarne l'intensità totale. Dato che i due campi adesso hanno stessa ampiezza e direzione ma con polarizzazioni diverse, si può determinare la somma totale del vettore campo elettrico come il modulo

$$|\vec{E}_{TOT}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Questo deve essere equivalente alla seguente espressione, ossia il modulo del vettore campo elettrico totale:

$$|\vec{E}_{01}|^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_1) + |\vec{E}_{02}|^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_2) + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(kx - \omega t + \phi_1) \cdot \cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

Il terzo termine si può pensare come il prodotto scalare tra i due vettori che compongono il campo elettrico:

$$|\vec{E}_{01}| \cdot |\vec{E}_{02}| \cos \alpha$$

Dove α è l'angolo compreso tra i due vettori del campo elettrico come nel disegno. Con le formule di prostaferesi inverse si esprime il coseno che moltiplica il terzo termine in funzione di angoli generici β e γ (gli argomenti dei due coseni) e ottenendo il terzo termine del modulo del campo totale come

$$2 |\vec{E}_{01}| \cdot |\vec{E}_{02}| \cos \alpha + \frac{1}{2} (\cos(2kx - \omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

Si può esprimere allora l'intensità totale del campo elettrico come la somma delle intensità delle due onde più l'intensità dovuta al terzo termine dell'espressione del modulo totale (Ossia l'espressione di prima).

$$\langle I_{TOT} \rangle = I_1 + I_2 + c\epsilon_0 \frac{2 |\vec{E}_{01}| |\vec{E}_{02}| \cos \alpha}{2} \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Sapendo ora che le due intensità si esprimono come

$$I_1 = c\epsilon_0 \cdot \frac{|\vec{E}_{01}|^2}{2} \quad I_2 = c\epsilon_0 \cdot \frac{|\vec{E}_{02}|^2}{2}$$

Si può determinare l'intensità del terzo termine attraverso l'integrale

$$c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{E}_{01}| |\vec{E}_{02}| \cos \alpha \cos(\phi_1 - \phi_2) dt = 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \alpha \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Che si può sostituire nell'espressione dell'intensità totale al terzo termine:

$$\langle I_{TOT} \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \alpha \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

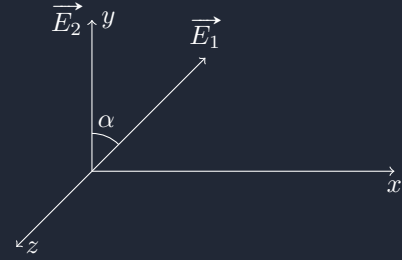
Il terzo termine dell'intensità totale è chiamato **termine di interferenza**. Questo termine determina se c'è interferenza oppure no. Si possono dunque riassumere tre casi:

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$: non c'è alcuna interferenza poiché le polarizzazioni sono perpendicolari tra di loro.
- Se $I_1 = I_2$ e $\alpha = 0$, allora si ritrova il caso trattato nel paragrafo precedente:

$$I_{TOT} = 2I_0(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \implies 4I_0 \cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

- Se $\alpha \neq 0$ e $\neq \frac{\pi}{2}$: si ha il caso con interferenza generale ricavato ora.

Figura 4.1: Campo elettrico lungo gli assi y e z



4.2 L'onda stazionaria

Considerate due onde elettromagnetiche che abbiano stessa polarizzazione e i cui vettori d'onda \vec{k}_1 e \vec{k}_2 non sono paralleli tra di loro, se queste onde interferiscono tra loro si ottiene un'onda stazionaria.

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \hat{y} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2 &= E_0 \hat{y} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)\end{aligned}$$

Nel caso del modulo totale del campo elettrico:

$$|\vec{E}_{TOT}| = E_0^2 \left(\cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \right)^2$$

Applicando nuovamente le formule di prostaferesi al contrario si ha la seguente espressione per il campo elettrico totale:

$$E_{TOT} = 4E_0^2 \left(\cos^2 \left(\frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cdot \cos^2 \left(\frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right)$$

C'è una parte del campo che ha dipendenza temporale ed una parte del campo che non ha dipendenza temporale. Se si volesse calcolare l'intensità totale mediata nel tempo, si osserverà che la parte dipendente dal tempo risulterà essere mediata (e non dipenderà più dal tempo), mentre rimane la parte dipendente dallo spazio

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4c\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \cos^2 \left(\frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Si trova allora che l'intensità dipende dalla posizione in cui si posiziona il rilevatore: l'intensità è diventata funzione della posizione e non dipende dal tempo (dunque è una onda stazionaria). Si potrebbe esprimere questa espressione attraverso il vettore differenza $\vec{\Delta k}$ tra i due vettori d'onda (si noti come abbia direzione lungo \hat{x}):

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{|\vec{\Delta k}|}{2} \cdot x + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Si esprime il prodotto del vettore d'onda come δx , ossia la periodicità spaziale dell'onda stazionaria. Se si considera θ l'angolo tra i due vettori d'onda, allora il vettore dentro il coseno è esattamente:

$$|\vec{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cdot \delta x = \pi \implies \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \delta x = 1$$

Dunque possiamo scegliere δx in modo arbitrario

$$\delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \theta \ll 1 \implies \delta x = \frac{\lambda}{\theta}$$

Se l'angolo tra le due onde è molto piccolo, allora si può approssimare con l'argomento e dunque la lunghezza d'onda si amplifica. Dato che l'onda stazionaria ha una lunghezza d'onda

$$\delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}$$

A sinistra dell'interfaccia le interferenze dell'onda in ingresso e quella in uscita generano un'onda complessiva che è ferma nello spazio ma oscilla nel tempo e prende proprio il nome di onda stazionaria. Questa onda ha sempre dei punti in cui il campo elettrico è totalmente nullo e dunque l'intensità media viene diversa da zero. Se invece $\theta = \pi$, le due onde sono **copropaganti** e di periodicità pari a $\frac{\lambda}{2}$.

Figura 4.2: Onda stazionaria

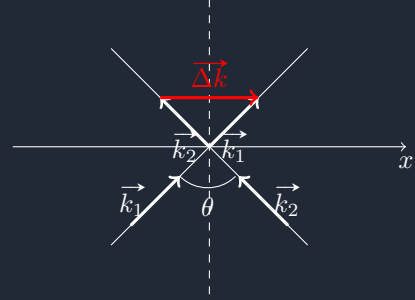
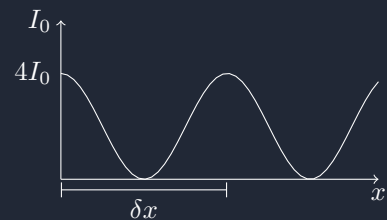


Figura 4.3: Grafico interferenza



4.3 Interferometro di Michelson

L'**interferometro di Michelson** è l'interferometro che si utilizza durante l'esperienza dell'interferenza. Una prima onda piana è inviata su di un componente ottico, che prende il nome di **separatore di fascio**, che è un componente che ha un substrato di materiale dielettrico su una delle sue superfici: il materiale dielettrico ha la caratteristica per cui la luce ha il 50% di probabilità di essere riflessa o trasmessa.

Il fascio riflesso compie un cammino L_1 prima di incontrare uno specchio e venire riflesso e tornare nuovamente sul separatore. Il fascio che inizialmente era stato trasmesso procede per un cammino L_2 fino ad un nuovo specchio e poi torna indietro. Questo interferometro permette di ottenere da un solo fascio di luce ben 4 fasci di luce distinti.

Sotto all'interferometro è posto un rivelatore per determinare l'interferenza tra le due onde che giungono al rivelatore stesso. Dato che il campo elettrico va come il quadrato mediato nel tempo, ogni volta che il fascio attraversa l'interferometro (da sinistra verso destra) il suo campo elettrico diventa $E_r = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ per il fascio riflesso (che accumula un ritardo di fase di π) mentre per la parte trasmessa $E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, la quale non accumula ritardo di fase. Ogni interferometro è tarato per trasmettere o riflettere una certa percentuale del campo elettrico in entrata. Se invece si propagasse il fascio di luce da destra verso sinistra si ha che sia la parte riflessa, che quella trasmessa, hanno come campo elettrico

$$E_r = E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

La definizione di destra o sinistra dipende da dove è messo il materiale dielettrico prima del substrato di vetro. Questa tipologia di interferometro è utilizzato all'interno dei rilevatori di onde gravitazionali; è anche uno degli strumenti più sensibili mai costruiti dall'uomo.

Fascio riflesso Il campo elettrico che inizialmente va verso l'interferometro ha la seguente espressione:

$$E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

L'onda inizialmente riflessa avrà come modulo del campo elettrico $-\frac{E_0}{\sqrt{2}}$. Dato che alla fine si formano quattro fasci, il fascio che inizialmente è stato riflesso, e poi trasmesso, avrà come modulo del campo elettrico

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \pi + 2kL_1 + \pi)$$

Il primo π è dovuto al ritardo di fase dovuto alla riflessione dell'interferometro, mentre il termine $2kL_1$ è il termine di ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio sopra all'interfaccia, ossia la distanza che percorre la luce prima di tornare all'interfaccia. Il termine π è dovuto invece al ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza L_1 .

Fascio trasmesso L'altro contributo è quello del fascio che prima è trasmesso e poi è riflesso allo specchio a distanza L_2 e poi è riflesso sull'interfaccia. Si può dunque esprimere il campo elettrico di quel fascio di luce che giunge sul rivelatore come

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \pi + 2kL_2)$$

Qui si ha un termine π , che è il ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza L_2 , e anche il contributo $2kL_2$ che invece è dovuto alla distanza dall'interfaccia dello specchio. Per questo fascio di luce non c'è il termine π in quanto il fascio in riflessione non accumula ritardo

Figura 4.4: L'interferometro di Michelson

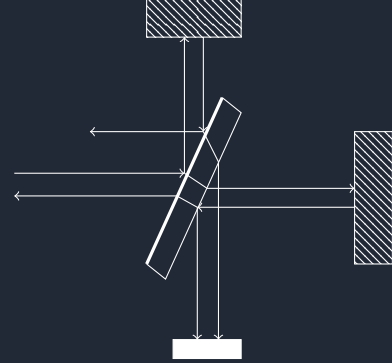


Figura 4.5: Fascio riflesso

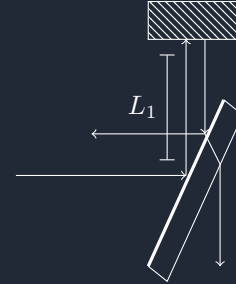
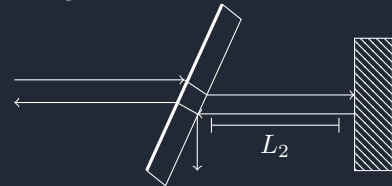


Figura 4.6: Fascio trasmesso



di fase. A questo punto si deve fare la somma dei campi elettrici complessivi in modo tale da poter ottenere il campo elettrico risultante sul rilevatore come

$$\frac{E_0}{2} \left(\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + 2kL_2 + \pi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + 2kL_1) \right)$$

Adesso si applicano le formule di Prostaferesi per ottenere il campo elettrico totale come

$$E_{TOT} = \frac{E_0}{2} \cdot \left(2 \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + k(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(k(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Mediando il modulo del campo elettrico nel tempo si ottiene l'intensità media del fascio:

$$\langle I_{TOT} \rangle = \epsilon \epsilon_0 \left\langle \left| \overrightarrow{E_{TOT}} \right|^2 \right\rangle = I_0 \cos^2 \left(k(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \sin^2(k(L_2 - L_1))$$

Infine, si ottiene una nuova espressione per l'intensità esplicitando k :

$$I_{TOT} = I_0 \sin^2 \left(\pi \frac{L_2 - L_1}{\frac{\lambda}{2}} \right) \quad (4.5)$$

Da questa si evince come basta cambiare la differenza tra i cammini ottici di solo $\frac{\lambda}{2}$ affinché il seno compia una oscillazione completa. Basta dunque cambiare la distanza degli specchi di meno di una lunghezza d'onda per potersi accorgere della variazione dell'intensità del campo elettrico.

4.3.1 Lo specchio con la camera a vuoto

Supponendo di avere una impostazione simile, se lo specchio su cui deve riflettersi la luce è nel vuoto ed è lasciato cadere, la luce che torna indietro dai due specchi interferirà sul rilevatore. Si può esprimere lo spostamento dello specchio come

$$\Delta L(t) = L_1 - L_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \cos t$$

Allora l'intensità dovrà anch'essa dipendere dal tempo, secondo la seguente espressione:

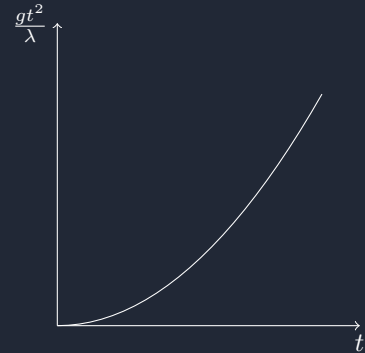
$$I(t) = I_0 \sin^2 \left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda}{2}} \right) = \sin^2 \left(\pi \frac{gt^2}{\lambda} \right)$$

Immaginando di avere uno oscilloscopio al rilevatore, ci si aspetta che l'intensità possa sempre variare tra zero ed uno e man mano ci si aspetta che il periodo di oscillazione avvenga sempre più velocemente. Questo vuol dire che il termine dentro al seno è tale per cui

$$\frac{gt_1^2}{\lambda} = 1 \quad \frac{gt_2^2}{\lambda} = 2, \quad \dots$$

Se si volesse riportare tutti i t_i nei quali l'intensità del campo elettrico è zero, si otterrebbe un andamento congruente con quello di una parabola, dal quale è possibile ricavare un valore di g con precisione fino all'ottava cifra decimale.

Figura 4.7: Il grafico dei valori di t



4.3.2 Due lunghezze d'onda differenti

Supponendo di mandare dentro all'interferometro di Michelson due fasci di luce con due lunghezze d'onda differenti, ci si aspetterebbe una lettura diversa al rilevatore. Quello che accade però è che il campo elettrico non subisce alcuna modifica in quanto i due fasci con lunghezze d'onda diverse non interferiscono tra di loro:

$$E_{TOT1} = \frac{E_{01}}{2} \cdot \left(2 \cos \left(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + k_1(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(k_1(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$E_{TOT2} = \frac{E_{02}}{2} \cdot \left(2 \cos \left(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + k_2(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(k_2(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Ci interessa solamente della dipendenza temporale del campo elettrico. Dato che alcuni dei termini sono fissati, allora si può utilizzare una certa approssimazione per evidenziare questa dipendenza temporale ottenendo, rispettivamente, per i due campi totali:

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Dunque si ha il seguente campo elettrico sul rivelatore:

$$E_{TOT} = A_1 \cos(\omega_1 + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 + \phi_2)$$

Il modulo del campo elettrico totale è dunque:

$$\left| \overrightarrow{E_{TOT}} \right|^2 = A_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Il terzo termine è esattamente l'interferenza tra le due lunghezze d'onda nel tempo. Si può ora dimostrare che quel terzo termine mediato nel tempo è nullo: infatti si può, da prodotto, trasformarlo in una somma di coseni attraverso la formula di Prostaferesi:

$$\cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) + \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right)$$

Mediando ora temporalmente questa espressione, si osserva che è zero. Adesso l'intensità totale del campo mediata nel tempo sarà

$$I_{TOT}(t) = I_1 \sin^2 \left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_1}{2}} \right) + I_2 \sin^2 \left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_2}{2}} \right) \quad (4.6)$$

Dunque non c'è interferenza.

4.3.3 Luce non monocromatica: il comportamento di più onde con frequenza diversa dentro l'interferometro

Nel caso in cui si facciano entrare nell'interferometro più lunghezze d'onda, si parla di luce **non monocromatica**. Si analizza il caso semplice nel quale solamente due lunghezze d'onda siano mandate dentro l'interferometro, ma con l'approssimazione secondo la quale le intensità siano equivalenti per entrambi i fasci di luce $I_1 = I_2 = I_0$. Sfruttando le formule di Prostaferesi e le considerazioni trigonometriche sul seno quadro per cui $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$, si esprime l'intensità totale dei due fasci luminosi come

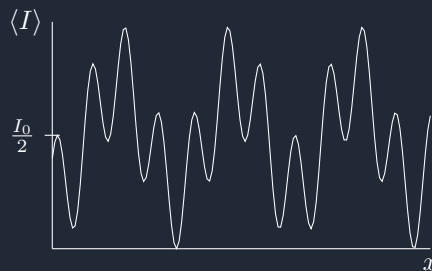
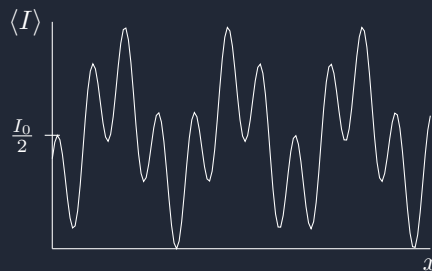
$$I(\Delta L) = \frac{I_0}{2} (1 - \cos((k_1 + k_2)\Delta L) \cdot \cos((k_1 - k_2)\Delta L))$$

Il primo contributo del coseno rappresenta l'oscillazione più lunga mentre il secondo è una oscillazione più corta (spazialmente) per cui le variazioni di lunghezza d'onda δl per entrambi i fasci sono date dalle seguenti relazioni:

$$\delta l_1 = \frac{2\pi}{k_1 + k_2}$$

$$\delta l_2 = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}$$

L'ampiezza del secondo termine determina la modulazione dell'onda che introduce una dipendenza spaziale all'oscillazione delle onde. Spostando gli specchi di un certo ΔL nell'interferometro, la luce in ingresso risulta modulata. La rappresentazione grafica di questa interferenza è la seguente



4.3.4 Lo spettro continuo

Si studia ora il caso di una distribuzione continua di frequenza, ossia una sorgente luminosa di luce bianca: questa conterrà tutte le lunghezze d'onda del visibile in maniera continua. Si può ora andare ad analizzare cosa accade nell'interferometro al variare di ΔL . La luce emessa da un led bianco è centrata intorno ad un valore di ω_0 e λ_0 secondo una certa distribuzione dell'intensità luminosa. Dalla teoria sulle onde elettromagnetiche si definisce la pulsazione attorno alla quale è centrata l'emissione come

$$\omega_0 = ck_0 \implies \omega_0 = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Un led bianco ha $\lambda_0 \approx 550$ nm e $\Delta\lambda \approx 150$ nm. Per trovare il corrispettivo intervallo in termini di ω si può usare, dato che esiste una relazione lineare tra ω e λ , la seguente relazione:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Conosciuto $\Delta\lambda$, allora è possibile trovare $\Delta\omega$, ossia l'intervallo della pulsazione della luce. Il $\Delta\lambda$ e $\Delta\omega$ sono delle stime qualitative della distanza del centro della distribuzione gaussiana della lunghezza d'onda dal punto di metà altezza. Con queste considerazioni è possibile determinare l'intensità luminosa che riceve il rivelatore in funzione dello scostamento delle distanze dei due specchi ΔL in maniera discreta:

$$I(\Delta L) = \sum I_i \sin^2(k_i \Delta L)$$

È possibile anche passare al caso continuo attraverso l'integrale nella seguente maniera:

$$I(\Delta L) = \int I(\omega) \Delta\omega \sin^2(k(\omega) \Delta L) = \int I(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \Delta L\right) d\omega$$

Il led non ha necessariamente una distribuzione gaussiana delle lunghezze d'onda centrate intorno ad un certo λ_0 , ma supponiamo che lo sia entro certe approssimazioni. Si può cercare di risolvere l'integrale della funzione dell'intensità luminosa secondo la distribuzione Gaussiana:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{\pi}\Delta\omega} \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2$$

Di conseguenza la risoluzione dell'integrale di $I(\Delta L)$ è:

$$I(\Delta L) = \frac{I_0}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{(\Delta L \Delta\omega)^2}{c}\right) \cos\left(\frac{2\Delta L \omega_0}{2}\right)\right) \quad (4.7)$$

Da questo si può vedere cosa succede quando $\Delta L \rightarrow 0$:

$$\frac{I_0}{2} \left(1 - \cos\left(2\frac{\Delta L \omega_0}{2}\right)\right) \implies \frac{I_0}{2} \sin^2(k_0 \Delta L)$$

Per ΔL molto piccoli i fasci luminosi oscillano normalmente mentre per ΔL non piccoli c'è da considerare anche il termine esponenziale. Il coefficiente $\frac{I_0}{\sqrt{\pi}\Delta\omega}$ è tale per cui si ottiene

$$\int I(\omega) d\omega = I_0$$

Si determina il valore minimo di ΔL tale per cui si può osservare l'oscillazione dell'intensità luminosa. Questa lunghezza è detta **lunghezza di coerenza**, e si indica con L_c e si definisce come l'ampiezza di oscillazione tale per cui l'esponente di e diventa 1, dunque

$$\frac{L_c \cdot \Delta\omega}{c} = 1$$

Figura 4.8: L'intensità luminosa in funzione della pulsazione

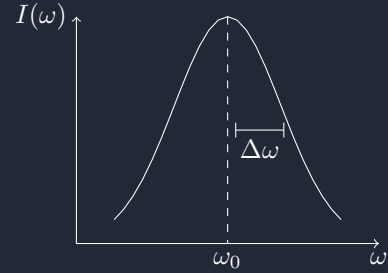
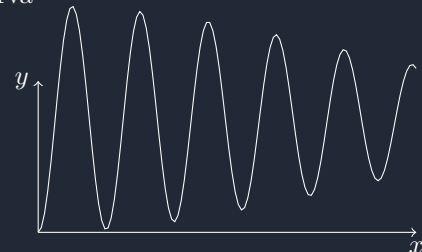


Figura 4.9: Il grafico di $I(\Delta L)$. Il termine esponenziale determina quanto velocemente è smorzata mentre il termine nel coseno determina l'entità dello "smorzamento" della curva



Si ha quindi

$$L_c = \frac{c}{\Delta\omega} \implies L_c = \frac{c}{\omega_0} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \quad (4.8)$$

Si è sostituito $\Delta\omega$ in funzione di λ_0 ma si può anche esprimere ω_0 in funzione di λ_0 come $\omega_0 = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Dunque

$$L_c = \frac{\lambda_0^2}{2\pi \cdot \Delta\lambda} \quad (4.9)$$

Si scopre, facendo i conti, che per un led che emette luce bianca nel visibile, la lunghezza di coerenza è di 400 nm. Se si volesse dunque vedere l'oscillazione della luce per un led a luce bianca bisogna utilizzare una lunghezza di coerenza di questa dimensione.

Parte IV

Diffrazione

Capitolo 5

La diffrazione della luce

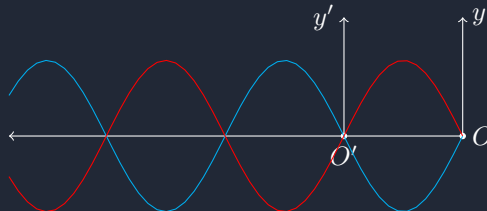
5.1 Il concetto di diffrazione della luce

L'effetto della diffrazione compare quando l'estensione dei fronti d'onda piana non è più infinita ma viene limitata spazialmente, per esempio da delle fessure. Dato che i fotoni oscillano lungo il loro fronte d'onda, ci si aspetta una propagazione ondulatoria della luce quando passa attraverso la fessura. Avrò dunque una funzione oscillatoria del tipo $f(x - vt)$, per cui l'intensità di una onda elettromagnetica è direttamente proporzionale al modulo del suo campo elettrico:

$$I \propto E^2 \implies I(R) \cdot 4\pi R^2 \implies I \sim \frac{1}{R^2}$$

Ossia, per un'onda sferica che viene generata da una sorgente puntiforme, l'intensità va come uno sul quadrato della distanza rispetto alla sorgente in questione che l'ha generata.

Dunque i fronti d'onda che giungono alla fenditura devono essere pensati come se fossero fronti d'onda di onde sferiche generati da sorgenti puntiformi poste sulla fenditura stessa. Si sommano allora i loro contributi per determinare l'interferenza tra loro, quando passano attraverso la fenditura, se i fronti d'onda sono limitati spazialmente: l'onda si propaga allora nella direzione trasversa. Questo prende il nome di **principio di Huygens**. Dunque, dato $L \gg \lambda$, si può considerare la propagazione dell'onda attraverso la fenditura come se l'onda generata dalla fenditura fosse in controfase rispetto all'onda in ingresso e creasse dunque interferenza. A seconda della differenza di fase (dato che hanno la stessa lunghezza d'onda), si può creare interferenza distruttiva se $OO' = \frac{\lambda}{2}$, altrimenti costruttiva e distruttiva, o solo costruttiva se $OO' = 0 + k\pi$. Nel caso di $\frac{\lambda}{2}$:



Questo accade perché se si considera la somma del campo elettrico dovuta alla sorgente uno e alla sorgente due, si vede che

$$E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) + E_0 \cos(ky' - \omega t + \phi) = E_0 \cos\left(\left(y - \frac{\lambda}{2}\right) - \omega t + \phi\right)$$

Ossia, diventa che

$$-E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) = 0$$

Figura 5.1: La luce in arrivo ad una fenditura

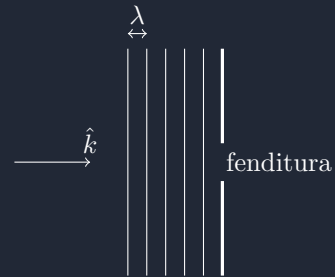
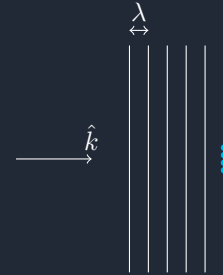


Figura 5.2: Le sorgenti sulla fenditura



Che vale per due sorgenti poste a distanza $\frac{\lambda}{2}$, così come per la fenditura, a patto che si abbia $L \gg \lambda$, altrimenti non funzionerebbe. L'intensità che passa dunque lungo y è molto debole, ossia

$$I = \frac{I_0 \lambda}{L 2}$$

5.2 Singola fenditura

Considerata adesso una fenditura di larghezza D investita da un'onda piana, si vuole studiare la distribuzione di luce su di una superficie a grande distanza dalla fenditura ($l \gg D$). In ciano sono rappresentati i contributi delle sorgenti puntiformi poste sulla fenditura stessa, adesso, poiché $r_0 \approx r'_y$, l'ampiezza delle due onde è circa la stessa in corrispondenza dell'asse y . Di conseguenza θ , ossia l'angolo che si forma tra l'asse che congiunge la fenditura con la superficie del rivelatore e r_0 , è piccolo, dunque si può esprimere la dipendenza del campo elettrico E_0 e E'_y in funzione dell'inverso delle rispettive distanze dal rivelatore:

$$E_0 \propto \frac{1}{r_0} \quad E'_y \propto \frac{1}{r'_y}$$

E, dato che $r_0 \gg y'$, in laboratorio si avrà

$$\frac{y'}{r_0} \approx 10^{-4}.$$

Tuttavia, la piccola differenza tra r_0 e r'_y influenza la fase dell'onda. Il valore di r'_y , che corrisponde alla distanza tra il punto più alto della fenditura con il punto più alto del rivelatore, può essere ricavato attraverso la trigonometria (e utilizzando gli sviluppi di Taylor in quanto θ è piccolo):

$$x'_y = \sqrt{y'^2 + r_0^2 - 2y'r_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \implies r'_y \approx r_0 \left(1 - \frac{y'}{r_0} \sin \theta\right) = r_0 - y' \sin \theta$$

Il campo generato dall'onda piana sulla fenditura sarà dunque dato dalla somma dei contributi su tutta la lunghezza della fenditura: si può dunque esprimere il singolo contributo infinitesimo di ogni piccola sorgente puntiforme e dunque integrare:

$$dE(y') \propto E_0 \left(\frac{dy'}{D}\right) \cos(kx'_y - \omega t)$$

Per cui il campo complessivo sarà dato dal seguente integrale:

$$\frac{E_0}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} dy' \cos(kr_0 - \omega t - ky' \sin \theta)$$

Dunque

$$E(\theta) \propto \frac{E_0}{D} \cos(kr_0 - \omega t) \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(ky' \sin \theta) dy' \quad (5.1)$$

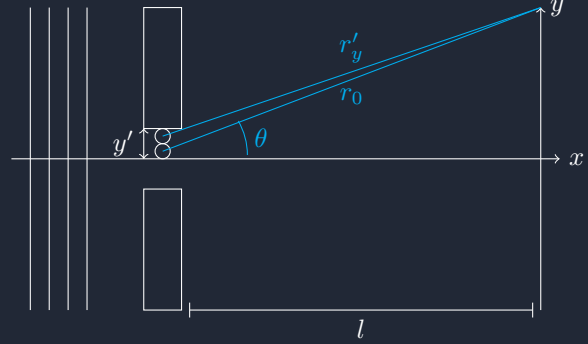
Si risolve l'integrale attraverso il seguente cambio di variabile

$$x = ky' \sin \theta \quad dx = k \sin \theta dy'$$

Dunque si ottiene la seguente espressione

$$\frac{E_0}{kD \sin \theta} \cos(kr_0 - \omega t) \int_{-\frac{kD}{2} \sin \theta}^{\frac{kD}{2} \sin \theta} \cos x \, dx = \frac{E_0}{kD \sin \theta} \cos(kr_0 - \omega t) 2 \sin \left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right)$$

Figura 5.3: L'onda che passa attraverso una fenditura



Si può introdurre il **seno cardinale**, ossia una funzione definita come $\text{sinc} = \frac{\sin x}{x}$, la quale fa 1 per valori molto vicini allo zero, la quale è possibile sostituirla nell'espressione dell'integrale risolto per ottenere una soluzione più compatta.

$$E(\theta) = E_0 \cos(kr_0 - \omega t) \text{sinc} \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) \quad (5.2)$$

Si può allora studiare l'intensità che passa attraverso la fenditura attraverso la seguente espressione

$$I(\theta) = \langle E(\theta)^2 \rangle_t c\epsilon_0 = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) \quad (5.3)$$

Dato che

$$\frac{c\epsilon_0 E_0^2}{2} = I_0 \quad \langle \cos^2(kr_0 - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Allora

$$I(\theta) = 0 \iff x = \pi$$

La funzione presenta dunque un massimo sia a $x = 0$ che in $x = \frac{3}{2}\pi$ e un minimo sia in $x = \pi$ che in $x = 2\pi$. Per capire perché c'è un minimo in π , si studia il caso delle due sorgenti puntiformi in $y' = 0$ e l'altra in $y' = \frac{D}{2}$. Studiando la differenza tra i loro cammini ottici per raggiungere il punto sul rivelatore ad un angolo $\theta = \pi$: la differenza tra i cammini ottici è proprio

$$\frac{D}{2} \sin \theta \implies kD \frac{1}{2} \sin \theta = \pi$$

Se il ritardo di fase è π , allora le due onde sono in controfase dunque le onde si annullano tra di loro. Si è, fino ad ora, considerato solamente due sorgenti puntiformi, ma questo ragionamento vale per qualsiasi coppia di sorgenti luminose lungo l'intera fenditura. La diffrazione è dunque un effetto direttamente proporzionale a $\frac{\lambda}{D}$.

5.3 Doppia fenditura

Supponendo di avere due fenditure distanziate tra loro di a , la quale è necessariamente maggiore di D , e ponendoci sempre nel limite di **Fraunhofer** per cui $l \gg D$, la relazione che intercorre tra il cammino compiuto dalla luce nella fenditura rispetto a O' si esprime come $r'_y = r_0 - y' \sin \theta$, allora il campo elettrico di ogni sorgente sarà dato dalla seguente:

$$E(\theta) \propto \int E_0 \frac{dy'}{2D} \cos(kr_0 - \omega t - ky' \sin \theta)$$

Seguendo il ragionamento per la prima fenditura, si possono determinare gli estremi di integrazione attraverso la considerazione sulle due sorgenti:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} - \frac{D}{2} &< y' < -\frac{a}{2} + \frac{D}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{D}{2} &< y' < \frac{a}{2} + \frac{D}{2} \end{aligned}$$

Utilizzando le formule di prostaferesi si ottiene che, dato che il seno è una funzione dispari, il suo integrale da $-a$ ad a è nullo. Dunque, poiché si sta integrando su y' e le sorgenti compaiono su due intervalli di y' , si deve avere che

$$E(\theta) \propto \frac{E_0}{2} \left(\int dy' \cos(kr_0 - \omega t) \cos(ky' \sin \theta) + \int dy' \cos(kr_0 - \omega t) \cos(ky' \sin \theta) \right)$$

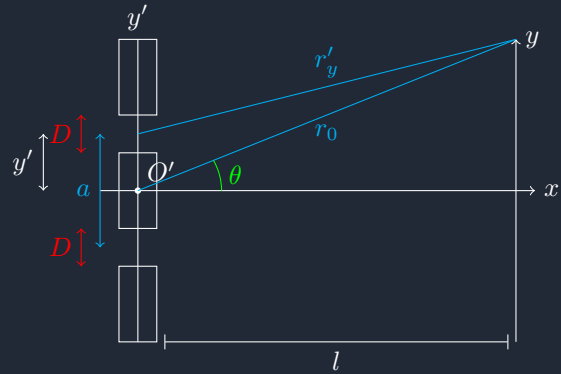
Per semplificare i calcoli si può eseguire la seguente sostituzione:

$$y'' = y' + \frac{a}{2} \quad y'' = y' - \frac{a}{2}$$

In questo modo si può integrare sempre tra $\pm \frac{D}{2}$.

$$\frac{E_0}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \cos(kr_0 - \omega t) \cos(k \sin \theta y'') \cos(k \sin \frac{a}{2}) dy''$$

Figura 5.4: La doppia fenditura



Risolvendo ora l'integrale si ottiene la seguente espressione per il campo elettrico generato da due fenditure come

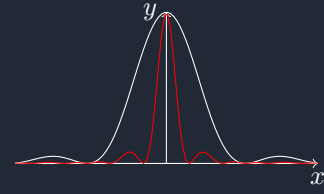
$$\frac{2E_0}{kD \sin \theta} \cos(kr_0 - \omega t) \sin\left(\frac{kD \sin \theta}{2}\right) \cos\left(\frac{ka \sin \theta}{2}\right) \quad (5.4)$$

Adesso si può valutare l'intensità luminosa attraverso la sorgente secondo la seguente formulazione

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \cos^2\left(k \frac{a}{2} \sin \theta\right) \quad (5.5)$$

Dato che il coseno quadro varia più velocemente del seno cardinale, quando $a > 0$ ci si aspetta che la funzione sia contenuta dal seno cardinale. La funzione dunque si annulla in $\frac{kD}{2} \sin \theta = \frac{\pi}{2}$, ossia quando $\sin \theta = \frac{\lambda}{2a}$.

Figura 5.5: Seno cardinale e intensità totale (in rosso)



5.4 Reticolo di diffrazione: il caso di n fenditure

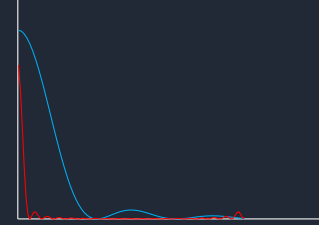
Si vuole ora studiare il caso in cui ci siano n fenditure, ognuna spaziata tra loro di una certa distanza $a > D$, sempre nel limite di Fraunhofer $l \gg D$. Per ottenere il campo totale passante attraverso le fenditure, si deve semplicemente sommare tutti i contributi

$$E^T(\theta) = \sum_{i=-\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}} \frac{E_0}{n} \cos(kr_0 - \omega t) \text{sinc}\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \cos(ik \sin \theta a)$$

Si deve necessariamente avere che il campo in funzione dell'angolo θ sia in funzione di

$$E(\theta) \propto \frac{E_0}{n} \cos(kr_0 - \omega t) \text{sinc}\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \sum_{i=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \cos(ik \sin \theta a)$$

Figura 5.6: Grafico intensità totale: l'intensità totale, anche in questo caso, è contenuta nel seno cardinale



Si può dunque esprimere l'intensità totale uscente dalle fenditure come

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2} ak \sin \theta\right)}{n^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)} \quad (5.6)$$

Partendo dal seno cardinale, esso si annulla quando l'argomento è π , ossia

$$I(\theta) = 0 \implies \frac{kD}{2} \sin \theta = \pi \implies \sin \theta = \frac{\lambda}{D}$$

Di conseguenza si avranno anche altri minimi per $m \in \mathbb{Z}$, ossia per tutti i multipli di π , dunque

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{D} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Adesso, per trovare i massimi, si impone che il denominatore della frazione a moltiplicare si annulli, dunque si deve imporre

$$I(\theta) = 0 \quad \frac{ak}{2} \sin \theta = \pi \implies \sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m \in \mathbb{Z}$$

Adesso, il primo minimo si ha quando il seno quadro si annulla, ossia quando

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{na}$$

Se l'angolo $\theta \ll 1$, allora è possibile determinare il numero di fenditure illuminate da una certa lunghezza d'onda che passa attraverso delle fenditure spaziate di a secondo la seguente equazione:

$$\sin \theta \approx \theta \approx \frac{\lambda}{na}$$

Questo perché la condizione $\sin \theta = \frac{\lambda}{na}$ corrisponde al primo minimo (zona di buio).

5.4.1 Caso tridimensionale

Nel caso tridimensionale si ha che l'intensità totale

$$I(\theta, \phi) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kDx}{2} \sin \phi \right) \text{sinc}^2 \left(\frac{kDy}{2} \sin \theta \right)$$

Nel caso di una fenditura circolare per esempio, si ha una diffrazione maggiore della luce.

5.5 Diffrazione su una lente

5.5.1 Lente singola

Per schematizzazione supponiamo che la lente sia investita da più onde piane ad angolazioni diverse. Tenendo conto della diffrazione, l'immagine non è più un punto: infatti, considerando δy come la dimensione dell'immagine sorgente posta all'infinito che passa attraverso una lente di dimensione D , si può esprimere δy come

$$\delta y = 1.22 \frac{\lambda}{D} f \theta \approx f \frac{\lambda}{D}$$

5.5.2 Diffrazione sul microscopio

Il principio di funzionamento di un microscopio è quello di ingrandire di molto oggetti molto piccoli, spesso non visibili all'occhio umano. Per determinare gli ingrandimenti di un microscopio, si utilizza, a partire dalla relazione del costruttore di lenti, la seguente relazione:

$$I = \frac{f_2}{f_1}$$

La diffrazione dopo la prima lente è data da

$$\delta y_1 \approx f_2 \frac{\lambda}{D_1}$$

Dove D_1 è la dimensione della lente 1, mentre la diffrazione sulla seconda lente è data da

$$\delta y_2 \approx f_2 \frac{\lambda}{D_2}$$

Allora la diffrazione totale che si ha sull'immagine diventa:

$$\delta y_t = f_2 \left(\frac{\lambda}{D_1} + \frac{\lambda}{D_2} \right)$$

Si deve avere che $f_1 \ll f_2$ in modo tale da avere grande magnificazione, allora per la legge del costruttore di lenti, si considera una lente biconvessa, la cui focale totale sarà data da:

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Dove $R_2 < 0$ e $R_1 > 0$. Si suppone allora che $|R_2| = |R_1| = R$, e che n_1 sia il coefficiente di rifrazione del vetro e n_2 il coefficiente di rifrazione dell'aria, allora

$$f = 2 \frac{-R^2}{-2R} = R$$

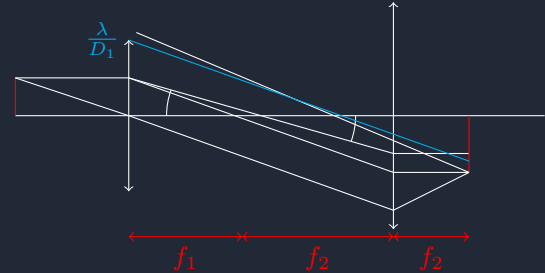
Per avere $f \equiv f_1$, si deve avere un R_1 molto piccolo, il che porta ad avere anche un D_1 molto piccolo, aumentando notevolmente la diffrazione sulla prima lente. Questo vuol dire che

$$\frac{\lambda}{D_1} \gg \frac{\lambda}{D_2}$$

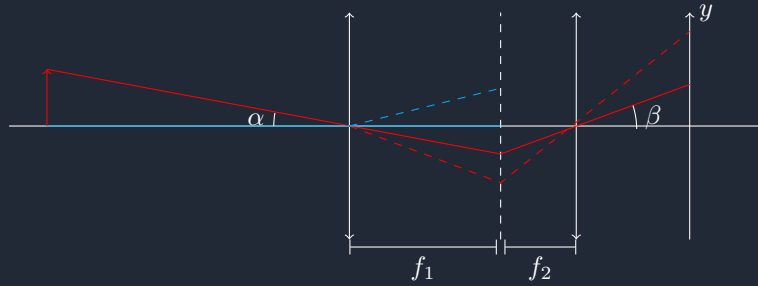
E dunque la diffrazione totale rispetto alla sorgente terrà conto solo della prima lente:

$$\delta y_1 \approx I \delta y_s \implies \delta y_s \approx f_1 \frac{\lambda}{D_1}$$

Figura 5.7: Schematizzazione di un microscopio



5.5.3 Diffrazione per un telescopio



Riassumendo il principio di funzionamento di un telescopio, per avere ingrandimento di una certa sorgente luminosa, dovrei costruire un sistema di lenti tali che $f_1 > f_2$. Questo vuol dire che

$$f_1 \tan \alpha = f_2 \tan \beta$$

Ossia i rapporti tra gli angoli mi permettono di ottenere un ingrandimento maggiore di zero:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\beta}{\alpha} > 1$$

Dato che le sorgenti che si osservano non sono puntiformi ma estese, ci si deve immaginare che ci siano altri raggi luminosi che impattano sulla lente, i quali risultano deflessi di un certo angolo rispetto ai raggi che arrivano dalla sorgente luminosa. L'immagine in corrispondenza del fuoco primario della prima lente ha un allargamento (spread), a causa della diffrazione della prima lente pari a

$$\delta y_1 = f_1 \cdot \frac{\lambda}{D_1}$$

I dettagli dell'oggetto osservato non sono più definiti e l'immagine tende dunque a sfocarsi. La differenza angolare associata a questo spread è esprimibile come

$$\delta \beta_1 = \frac{\delta y_1}{f_2} = f_1 \frac{\lambda}{D_1} \frac{1}{f_2}$$

Anche la seconda lente sarà responsabile di un certo spread dei raggi luminosi, il suo contributo angolare è esprimibile dunque come

$$\delta \beta_2 = \frac{\lambda}{D_2}$$

L'effetto combinato dello spread di questo sistema di lenti è dunque dato dalla seguente relazione

$$\delta \beta = \frac{\lambda}{D_1} \frac{f_1}{f_2} + \frac{\lambda}{D_2}$$

Dove si è usato $\tan \beta_1 \approx \beta_1$ e $\tan \beta_2 \approx \beta_2$ secondo l'approssimazione parassiale. È possibile, inoltre, trascurare il secondo termine dello spread su β in quanto è molto piccolo e considerare solamente il termine dovuto dal rapporto delle focali. Ricordando ora le considerazioni fatte per il telescopio, è possibile trovare il minimo angolo osservabile dal telescopio mettendolo in relazione con lo spread dei raggi luminosi attraverso la seguente:

$$\delta \alpha \frac{f_1}{f_2} = \delta \beta \implies \delta \alpha \approx \frac{\lambda}{D_1}$$

Così come nel caso del microscopio, tutto dipende dalla prima lente.

Parte V

Esperienze

Capitolo 6

Ottica Geometrica

6.1 Introduzione: obiettivi e finalità

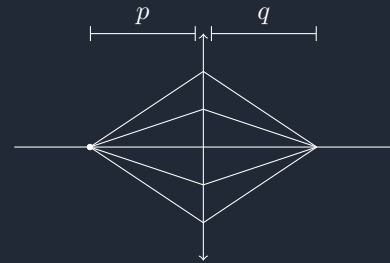
L'esperienza dell'ottica geometrica è la verifica della legge delle lenti sottili e di una misura della focale di una lente convergente incognita. Ricordando la legge delle lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Si eseguono seguenti procedure in laboratorio

1. Ogni sperimentatore misura $f \pm \Delta f$ ad un valore diverso p (e di conseguenza di q);
2. Se tutte le misure sono consistenti entro le barre di errore, allora si sarà dimostrata la legge delle lenti sottili.
3. Determinare la migliore stima di f mediante la media pesata del valore di f trovato da ogni sperimentatore.

Figura 6.1: Lente convergente con sorgente nel punto focale



6.2 L'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale consiste in un regolo lungo circa un metro e mezzo con precisione di un millimetro. Una lente è posta ad una certa distanza con una scala graduata (nonio) che mi permette di ottenere una precisione di posizionamento del decimo di millimetro. La sorgente è realizzata mediante un led che illumina una diapositiva in modo tale che il led giaccia esattamente sull'asse ottico rispetto alla lente e parallelo alla guida. Per determinare la distanza della diapositiva dalla lente, devo fare in modo di creare una immagine virtuale utilizzando la lente convergente con $f = 50 \text{ mm}$ nella configurazione $2f - 2f$ (dove f è quella della lente conosciuta).

La lente che si utilizza prende il nome di **lente di servizio** per cui:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2f}$$

Per cui $d = 2f$. L'incertezza associata a questa distanza non è fondamentale in quanto l'immagine nella sorgente virtuale si formerà (più o meno sfuocata) a prescindere dalla precisione. Ad una certa distanza c'è un oculare che mi permette di osservare l'immagine ottenuta. Sull'oculare c'è un crocefilo che mi permette di osservare l'allineamento dell'immagine sull'oculare. Il fatto che si utilizza un oculare con una lente davanti (che è possibile ruotare con una ghiera), vuol dire che si utilizza l'occhio per osservare

Figura 6.2: Rappresentazione apparato Lente di servizio e oculare-occhio

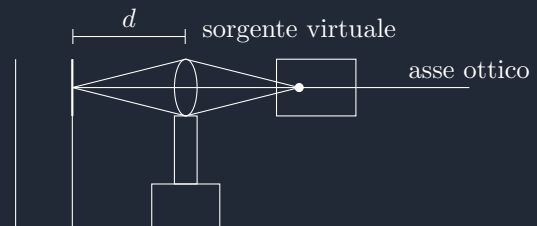
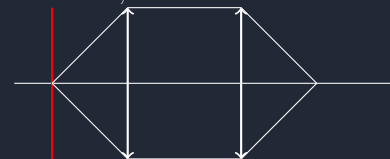
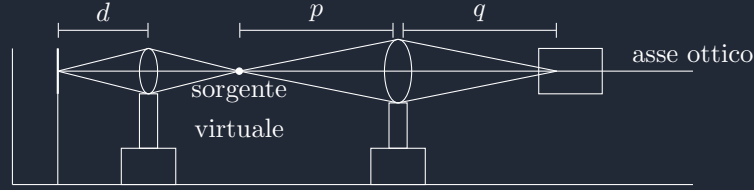


Figura 6.3: Schematizzazione del sistema oculare-occhio, in rosso il crocefilo



l'immagine. Si dispone l'oculare in modo tale che il crocefilo sia visibile e anche l'immagine (questo accade quando il mio occhio li vede nitidi entrambi) e in modo tale che l'immagine sia sovrapposta esattamente sul crocefilo. La schematizzazione oculare-occhio comprende il crocefilo con una lente associata ed il cristallino dell'occhio (che deve essere completamente rilassato in modo tale da avere il fuoco all'infinito). Nel disegno il tratto rosso è il crocefilo, le due lenti convergenti sono invece la lente prima dell'occhio e poi il cristallino. Adesso si può spostare l'oculare dal punto dove si forma l'immagine virtuale e mettere una lente ad una certa distanza p dall'immagine virtuale ed una certa distanza q dall'oculare nuovo.



6.3 La soluzione di Gauss

Il problema principale con la configurazione in laboratorio è che il centro di formazione dell'immagine virtuale ha un certo offset rispetto allo zero del nonio: l'allineamento centro della lente - lettura del nonio introduce dunque un errore ϵ per cui bisogna trovare un modo alternativo per poter misurare p e q . Gauss ha proposto una soluzione a questa problematica: se esistesse una configurazione per p e q per cui la legge delle lenti sottili è soddisfatta, allora esiste anche una configurazione simmetrica per cui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1}{f} \\ \implies p_1 &= q_2 \wedge q_1 = p_2 \end{aligned}$$

Ossia si invertono le distanze rispetto alla lente convergente considerata. si può dunque pensare che se si disponesse la lente ad una certa distanza $p_2 \neq p_1$, si otterrebbe una situazione in cui la stessa sorgente S possa far formare la stessa immagine in I . si può ora introdurre delle lunghezze (diverse da p e q , ma comunque loro funzione) che io conosco a priori e che sono definite come

1. $s = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$: ossia la distanza tra la sorgente e l'immagine;
2. $l = p_2 - p_1 = q_1 - p_1$: ossia la distanza tra le due lenti nelle due differenti configurazioni.

Con queste definizioni e con la legge delle lenti sottili si ottiene un sistema per cui, conosciuto s e l , si può ottenere p_1 e q_1 :

$$\begin{cases} s = p_1 + q_1 \\ l = q_1 - p_1 \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \end{cases}$$

Dunque, risolvendo, si esprimono p_1 e q_1 :

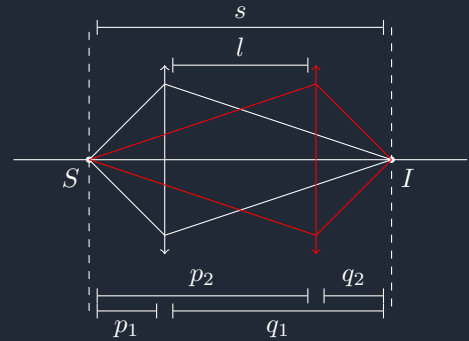
$$\begin{cases} q_1 = \frac{s+l}{2} \\ p_1 = \frac{s-l}{2} \end{cases}$$

Adesso possiamo sostituire queste nella legge delle lenti sottili:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{s-l} + \frac{2}{s+l} = \frac{4s}{s^2 - l^2} \implies f = \frac{s^2 - l^2}{4s}$$

Ossia l'espressione della focale della lente in funzione di soli s ed l .

Figura 6.4: Schematizzazione della soluzione di Gauss



6.4 Applicazione della soluzione di Gauss all'esperienza geometrica



Per poter trovare s e l per porci nelle condizioni della soluzione di Gauss, si possono ora indicare le posizioni:

- I_1^N la posizione misurata con il nonio dell'oculare quando la sorgente virtuale coincide con il crocefile dell'oculare: ossia quando per il nostro occhio è a fuoco. Ci possiamo immaginare che a causa della differente posizione tra il nonio ed il crocefile ci sia un certo ϵ di differenza tra le due posizioni.
- I_1^V diventa la posizione vera della sorgente virtuale rispetto alla scala graduata della guida.

Dato che c'è questo offset rispetto alla formazione dell'immagine virtuale, da qualche parte dietro la lente ci sarà un I_2^V dove c'è la formazione dell'immagine vera. Quando l'immagine è a fuoco allora vuol dire che l'immagine vera si sta generando sul crocefile. I_2^V è dunque l'immagine reale, ossia la posizione dell'immagine vera rispetto alla scala graduata, ovviamente in corrispondenza della I_2^V ci sarà la lettura del nonio che è chiamata come I_2^N , ossia la posizione misurata dal nonio dell'oculare quando l'immagine è a fuoco. Dunque si può dire che

$$s = I_2^V - I_1^V$$

E, per l'offset di ϵ :

$$\begin{aligned} I_1^N &= I_1^V + \epsilon \\ I_2^N &= I_2^V + \epsilon \end{aligned}$$

Per ricavare le misure vere bisogna fare in modo da ottenere una espressione per ϵ attraverso la distanza s :

$$s = (I_2^N - \epsilon) - (I_1^N - \epsilon)$$

Ho dunque legato la distanza tra due posizioni che non conosco, ma che sono traslate della medesima quantità; dunque, si può determinare la distanza come

$$s = I_2^N - I_1^N$$

Ossia semplicemente la distanza tra le due posizioni trovate dall'oculare. Bisogna ora trovare la distanza l e determinare se effettivamente esiste sempre questa distanza per la quale si ottiene la situazione simmetrica nella soluzione di Gauss. Dato un certo s , c'è una condizione matematica per la quale ci sono solamente certi valori di s per cui si osserva la formazione dell'immagine. Fissata la focale f e dato s , si può ora ricavare la distanza l in funzione delle altre due:

$$l^2 = s^2 - 4sf$$

In questo modo si può ottenere che se $s^2 - 4sf \geq 0$, allora l^2 ha una soluzione. si può allora risolvere la disequazione (considerando che s è positivo in quanto è una distanza):

$$s(s - 4f) \geq 0 \implies s \geq 4f$$

Dunque la formazione di questa situazione simmetrica è possibile solamente per questa condizione. Dire che $s = 4f$, equivale a porci nel caso limite in una configurazione $2f - 2f$. Si pone il nonio e la lente misurando la prima posizione e poi la seconda in modo tale che la sorgente virtuale e l'oculare siano fissati e si deve spostare le lenti per far sì che si veda sempre a fuoco l'immagine

6.4.1 Le lenti dell'esperienza

Si possono determinare le posizioni vere e misurate dal nonio delle lenti con un altro offset diverso

- L_1^V : posizione vera della prima lente
- L_1^N : posizione dello zero del nonio della prima lente

- L_2^V : posizione vera della seconda lente
- L_2^N : posizione dello zero del nonio della seconda lente

si può allora chiamare ϵ' l'incertezza tra le due misure e dunque si può ottenere la relazione

$$\begin{aligned} L_2^V &= L_2^N + \epsilon' \\ L_1^V &= L_2^N + \epsilon' \end{aligned}$$

Dunque si può ottenere la distanza tra le due lenti l con la stessa procedura che si è utilizzato per determinare s :

$$l = L_2^V - L_1^V = L_1^N - L_1^N$$

6.5 Procedure operative in laboratorio

I banchi ottici che si utilizzano hanno un piano di acciaio che sono pesanti e rigidi in modo che le vibrazioni non giungano ai componenti ottici. Si inizia facendo delle procedure preliminari:

1. Si deve indirizzare l'oculare verso una parete bianca e regolare la ghiera fino a che non si vede il crocifilo non sia a fuoco per ogni sperimentatore.
2. Si procede dunque a rendere parallelo l'asse ottico alla guida utilizzando un laser al termine della guida: il laser costituisce dunque l'asse ottico.
3. Si regola dunque il laser in modo che il fascio di luce sia parallelo alla guida prendendo prima il montaggio con la lente di servizio e posizionarla in modo che la sorgente laser possa passare attraverso la lente sia quando è vicino che quando è lontano.
4. Si regola ora la posizione della lente incognita secondo la stessa procedura.
5. Ci si assicura ora che il fascio laser colpisca la sorgente vera spostando il montaggio della sorgente con la scala graduata

Adesso si procede con la presa delle misure: si procede montando il filtro e la lente e l'oculare e aggiustare la posizione dell'oculare (misurandola) in modo tale che si veda chiaramente l'immagine. L'incertezza è dovuta all'occhio dello sperimentatore e anche nel togliere e riposizionare l'oculare riposizionando l'oculare (metodo più preciso), oppure trovando l'intervallo di posizioni per le quali si vede a fuoco l'immagine (metodo più veloce ma meno preciso). Si sfrutta ora il metodo di Gauss posizionando l'oculare distante quattro volte la lunghezza focale trovata per la lente incognita. Si posiziona dunque la lente nella posizione L_1 in modo tale che si formi l'immagine sull'oculare e misuro con il nonio L_1 con una delle due tecniche. Si misura poi L_2 con uno dei due metodi di prima. Infine si ripetono tutte le misure per tutti gli sperimentatori e si verifica la consistenza delle misure per verificare la legge del costruttore di lenti.

6.5.1 Presa delle misure

Ci sono due metodi di misura: si può riposizionare le lenti tutte le volte (meno errore) oppure cercare un intervallo di posizioni in cui si vede a fuoco (più errore). Scegliere la posizione per cui un osservatore vede a fuoco l'immagine e leggere il nonio (per cui ci sarà l'errore di sens del nonio); si sposta dunque l'oculare e ripeto questa misura un certo numero di volte (almeno 5 misure) di I_1 . Adesso si può ottenere media e scarto massimo per la posizione

$$I_1 = \overline{I_1} \pm \Delta I_1$$

A questo punto si può posizionare l'oculare ad una posizione fissata rispetto alla guida (la sua incertezza è solo la sens del nonio). Si sceglie quindi I_2 in modo tale che $s \geq 4f$ e si ottiene la posizione

$$I_2 = \overline{I_2} \pm \Delta I_2$$

Dove la posizione è misurata una sola volta e l'incertezza è proprio la sensibilità del nonio. Adesso si misura L_1 ossia la posizione per la quale si vede a fuoco l'immagine in I_2 5/6/7 volte in modo che si ottenga

$$L_1 = \overline{L_1} \pm \Delta L_1$$

E la stessa cosa faccio per la posizione della seconda lente

$$L_2 = \overline{L_2} \pm \Delta L_2$$

Si determina ora s come

$$\begin{aligned} \overline{s} &= \overline{I_2} - \overline{I_1} & \Delta s &= \Delta I_1 + \Delta I_2 \\ \implies s &= \overline{s} + \Delta s \end{aligned}$$

E lo stesso si fa per l :

$$\begin{aligned} \overline{l} &= \overline{L_2} - \overline{L_1} & \Delta l &= \Delta L_1 + \Delta L_2 \\ \implies l &= \overline{l} + \Delta l \end{aligned}$$

Adesso si può riprendere la formulazione che mi permette di trovare f :

$$f = \frac{s^2 - l^2}{4s}$$

Dunque per determinare \overline{f} si può determinare i valori \overline{l} e \overline{s} e sostituirli mentre per l'incertezza si fa la propagazione degli errori:

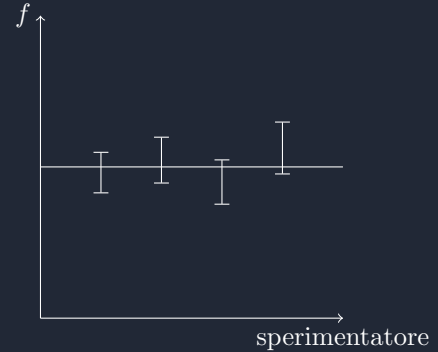
$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| \Delta s + \left| \frac{\partial f}{\partial l} \right| \Delta l$$

E dunque si ottiene

$$\Delta f = \left| \frac{1}{4} + \frac{l^2}{4s^2} \right| \Delta s + \left| \frac{l}{2s} \right| \Delta l$$

Bisogna anche assicurarsi che si riesca sempre a vedere l'immagine anche spostando indietro l'oculare perché in questo modo si è più suscettibili al cattivo allineamento dei componenti ottici: si verifica che l'asse ottico sia ben allineato prima di procedere con la determinazione delle altre misure di f_i . Ogni sperimentatore può ottenere il valore di f e della sua incertezza; si verifica dunque che tutte le misure di f siano consistenti tra di loro entro le rispettive barre di errore. si può prendere la media pesata e confrontarla con le singole incertezze (dovrebbe essere minore).

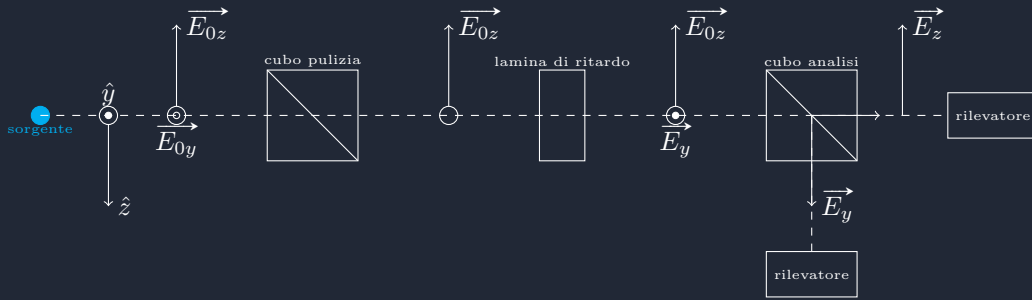
Figura 6.5: Queste misure della focale sono consistenti tra di loro



Capitolo 7

Polarizzazione

7.1 Apparato sperimentale



Si studiano le leggi di trasformazione della polarizzazione di una onda polarizzata linearmente che incide su di una lamina di ritardo con angolo generico tra polarizzazione incidente e gli assi della lamina. z e y sono gli assi del cubo polarizzatore mentre gli assi a e b sono gli assi della lamina rispettivamente dell'asse lento e di quello veloce. Il campo magnetico uscente dal cubo polarizzatore è dato da

$$\vec{E}_{tot} = (E_{0z} \cos^2 \theta (\psi + \delta\phi) + E_{0z} \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} + (E_{0z} \cos \theta \sin \theta \cos(\psi + \delta\phi) - E_{0z} \sin \theta \cos \psi \cos \theta) \hat{y}$$

Il fascio di luce passa dopo attraverso una lamina di ritardo e dunque il campo elettrico sarà modificato ed è possibile esprimerlo attraverso gli assi fast e slow come:

$$\vec{E}_{out} = E_{0z} \cos \theta \cos(\psi + \delta\phi) \hat{a} - E_{0z} \sin \theta \cos \psi \hat{b}$$

Dove

$$\hat{a} = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{y} \quad \hat{b} = -\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{y}$$

7.1.1 Lamina $\frac{\lambda}{2}$

La prima lamina è una lamina $\frac{\lambda}{2}$ e il suo $\delta\phi = \pi$, il campo elettrico totale uscente dalla lamina può essere espresso come

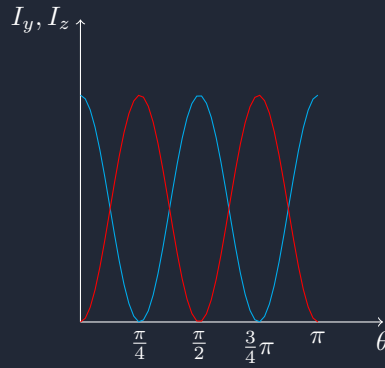
$$\begin{aligned} \vec{E}_{out} = E_{0z} & (-\cos^2 \theta \cos \psi + \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} - 2E_{0z} \sin \theta \cos \theta \cos \psi \hat{y} = \\ & -E_{0z} \cos \psi (\cos 2\theta) \hat{z} - E_{0z} \sin 2\theta \cos \psi \hat{y} \end{aligned}$$

Allora l'intensità media rispetto all'asse z in uscita dalla lamina di ritardo sarà

$$I_z = c\epsilon_0 \langle E_z^2 \rangle = c\epsilon_0 \langle E_{0z}^2 \cos^2 \psi \rangle \cos^2 2\theta \quad (7.1)$$

Dove il termine $c\epsilon_0 \langle E_{0z}^2 \cos^2 \psi \rangle$ indica l'intensità luminosa iniziale prima di attraversare la lamina di ritardo. Si può esprimere ora l'intensità luminosa della luce rispetto all'asse y e tracciarne il grafico (per I_y e I_z):

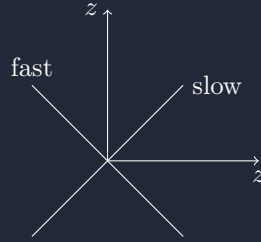
$$I_y = I_0 \sin^2 2\theta$$



Dove il tratto rosso corrisponde all'intensità sull'asse y ed il tratto ciano rappresenta l'intensità sull'asse z . La lamina ha un asse slow diretto lungo \hat{a} diretto lungo l'asse \hat{z} ; dunque rimane una polarizzazione lineare in quanto la lamina ritarda solamente l'oscillazione dell'onda. la prima lamina con $\theta = 0$ non cambia la polarizzazione mentre una lamina con angolo $\theta \neq 0$ lo fa.

7.1.2 Lamina $\frac{\lambda}{4}$

Mettendo la lamina a $\frac{\pi}{4}$ rispetto alla posizione iniziale e non ho più luce polarizzata nel verso \hat{z} ma sarà tutta polarizzata verso \hat{y} dunque I_y ha un minimo. $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$.



Il campo elettrico in uscita dalla lamina ha la seguente espressione (derivata dall'espressione all'inizio della sezione):

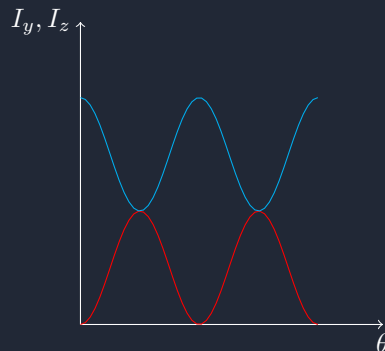
$$\vec{E}_{out} = E_{0z} (\cos^2 \theta (-\sin \psi) + \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} + E_{0z} (-\sin \psi \cos \theta \sin \theta - \cos \psi \sin \theta \cos \theta) \hat{y}$$

si può ottenere i moduli dei campi elettrici nelle due direzioni elevando al quadrato e poi, moltiplicando per ϵ_0 e c e mediando nel tempo si ha che

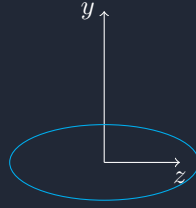
$$I_z = c\epsilon_0 \langle E_z^2 \rangle = c\epsilon_0 \langle E_0^2 (\sin^2 \psi \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \psi) \rangle = I_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \right)$$

$$I_y = I_0 \frac{1}{2} \sin^2(2\theta)$$

La lamina $\frac{\lambda}{4}$ spaccia l'ellisse che descrive il luogo dei punti che attraversano il campo elettrico.



Di conseguenza, lungo y non ho mai l'intensità riflessa dal mio cubo, al minimo ne ho la metà. Se la lamina introduce shift di fase lungo z non cambia la mia polarizzazione quindi lungo y ho zero luce e dunque avrò una polarizzazione ellittica.



7.2 Scopi e finalità

7.2.1 Il fit sinusoidale

Nella polarizzazione si deve validare le leggi della polarizzazione per le lenti $\frac{\lambda}{4}$ e per le lenti $\frac{\lambda}{2}$. Si deve realizzare un fit (non lineare) di una funzione sinusoidale: per realizzarlo dobbiamo fare le seguenti assunzioni (così come per i fit lineari):

- l'incertezza σ sulla variabile aleatoria x sia trascurabile: questo vuol dire che si ha uno strumento che misura x con una precisione di diversi ordini di grandezza superiore delle y .
- La funzione g , ossia la funzione del fit, abbia una distribuzione gaussiana e con i vari σ_{y_i} costanti per tutte le misure $\Rightarrow \sigma_{y_i} \approx \sigma_y$.
- Devo minimizzare il χ^2 .

Nel nostro caso non si può applicare le regole del fit lineare ma si può supporre di avere una funzione generica ottenuta con dei certi valori sperimentali (x_i, y_i) dove i dati sono legati tra di loro mediante una determinata legge

$$f(a, b, c, \dots)$$

Tuttavia questa funzione non è completamente arbitraria ma è del tipo

$$f = a \cos^2(bx + \phi) + \text{offset}$$

Questa funzione sarà ovviamente una funzione dell'angolo x (ossia la rotazione della lamina) e descrive l'intensità luminosa del cubo in analisi in trasmissione e riflessione. Dunque si può determinare il χ^2 come

$$\chi^2 = \frac{\sum (y_i - f(a, b, \phi, \text{offset}, x))^2}{\sigma_y^2}$$

si può ottenere la minimizzazione del χ^2 mediante l'utilizzo di un calcolatore e delle $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$. Inoltre è capace di ottenere anche le incertezze associate alle singole variabili.

7.2.2 Le lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ nell'esperienza

Le lamine possono riflettere il campo elettrico lungo le due direzioni

$$E_z = E_{z0} \cos(kx - \omega t + \phi_z)$$

$$E_y = E_{y0} \cos(kx - \omega t + \phi_y)$$

Con la lamina $\frac{\lambda}{4}$ si può cambiare la spanciatura dell'ellisse che descrive la polarizzazione ellittica generica senza modificare la direzione degli assi: per quello si utilizza la $\frac{\lambda}{2}$.

Figura 7.1: La funzione generica

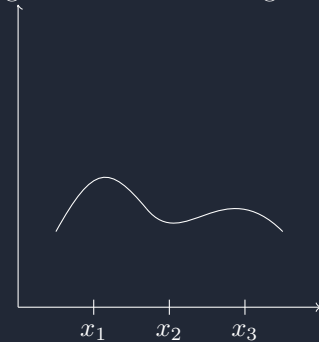
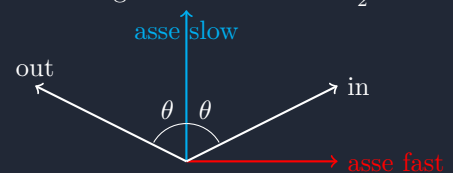
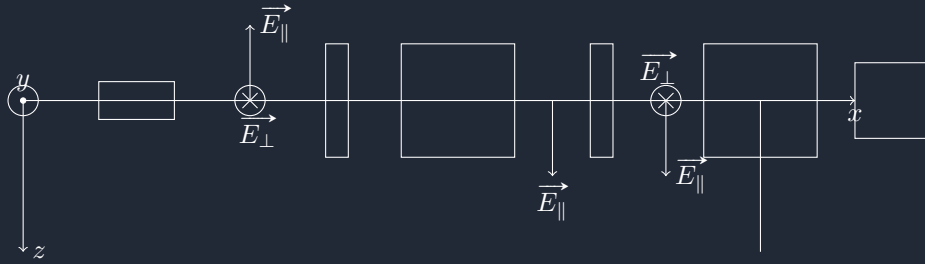


Figura 7.2: La lamina $\frac{\lambda}{2}$



7.2.3 Setup dell'apparato

Si ha un tavolo con una breadboard: ossia un piano di alluminio con dei fori che permette di fissare gli strumenti ottici. La polarizzazione in uscita dal laser non la conosciamo e potrebbe aver qualsiasi tipo di polarizzazione ma si conosce la lunghezza d'onda che è di 532 nm .



Si fa passare il campo attraverso un filtro variabile che permette di cambiare (variando il suo angolo di rotazione) l'intensità luminosa che passa. La luce passa poi attraverso un cubo di pulizia, che permette di filtrare il campo perpendicolare e di far passare solo il campo \vec{E}_{\parallel} che risulta avere verso contrario a quello di entrata.

Si utilizza un supporto con goniometro che permette di ruotare la lamina; dato che il laser passa dentro la lamina, si può fare in modo che l'asse slow e quello fast possano ruotare rispetto alla scala goniometrica. Questo componente ottico sta dopo il cubo di pulizia e permette di cambiare la polarizzazione in base all'angolo di rotazione θ . Dopo si pone un altro cubo di pulizia che permette di filtrare nuovamente il campo perpendicolare (che prende il nome di cubo di analisi) e porre i due rilevatori.

7.3 Funzioni del fit

7.3.1 Calibrazione dei laser

Si presentano vari problemi nella raccolta dei dati sperimentali:

- Il rilevatore non è perfetto e dunque non riesce a misurare perfettamente tutta l'intensità;
- Il rilevatore ha una sensibilità diversa da quella dell'altro rilevatore
- I rilevatori sono sporchi oppure tarati male
- L'allineamento dell'apparato ottico non è perfetto

E' possibile ovviare alla calibrazione dei rilevatori sfruttando la lamina $\frac{\lambda}{2}$: dopo aver posizionato i rilevatori si ruota la lamina $\frac{\lambda}{2}$ e si misura il valore massimo che si ottiene in ognuno dei rilevatori.

7.3.2 Lamina $\frac{\lambda}{2}$

Si può ora descrivere le leggi di Malus per i vari assi

$$I_{\parallel}(\theta) = I_0 \cos^2(2\theta)$$

$$I_{\perp}(\theta) = I_0 \sin^2(2\theta)$$

SI ottiene allora le seguenti condizioni



Facendo ora ruotare le polarizzazioni, si ottengono tanti dati sperimentali: in funzione dell'angolo si può allora disegnare il grafico della legge di Malus (circa 20 punti per gli angoli da zero a 360° equispaziati, ossia ogni $\sim 20^\circ$) Mentre si collezionano i dati per l'intensità trasmessa, si collezionano anche i dati per l'intensità riflessa e si disegnerà anche il grafico attraverso quei punti. La funzione del fit sarà ora data da

$$f(a, b, \phi, \text{offset}, x) = a \cos^2(bx + \phi) + \text{offset}$$

Supponendo ora di avere questa funzione da farne il fit, dividendo $I_{\parallel}(\theta)$ e $I_{\perp}(\theta)$ per i loro valori massimi ci si aspetta che l'ampiezza dell'oscillazione del coseno e del seno sia $\bar{a} \approx 1$. si può invece dire che $\bar{b} \approx 2$ in quanto nella legge di Malus deve risultare 2θ e dove offset = 0. Tra la fase del coseno e del seno ci si aspetta una differenza di circa $\approx \frac{\pi}{2}$, e dunque, arbitrariamente, si può dire che $\bar{\phi} \approx 0$. Riassumendo

$$\bar{a} \approx 1 \quad \bar{b} \approx 2 \quad \bar{\phi} \approx 0 \quad \text{offset} \approx 0$$

Tuttavia in condizioni non ideali l'offset del laser non sarà zero ma sarà un valore molto piccolo da dover sottrarre a tutti i valori trovati in laboratorio. Si può ora vedere che

$$\cos^2(2\theta) = 1 - \sin^2(2\theta) = 1 - \cos^2(2\theta + \frac{\pi}{2})$$

Data questa legge, si osserva che si trova un altro set di valori con

$$\bar{a} \approx -1 \quad \bar{b} \approx 2 \quad \bar{\phi} \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{offset} = 1$$

In questo caso si vede che χ^2 ha due minimi e permette di ottenere due funzioni dal programma di fit.

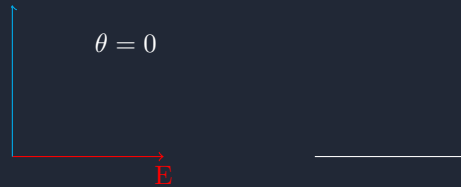
7.3.3 La lamina $\frac{\lambda}{4}$

Con la lamina $\frac{\lambda}{4}$ si per la legge di Malus che

$$I_{\parallel} = I_0 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \right)$$

$$I_{\perp} = \frac{I_0}{2} (\sin^2(2\theta))$$

Dato che questa lamina mi permette di spanciare l'ellisse, se ruotassi la lamina di un certo angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$, il ritardo di fase è lungo una direzione dove il campo elettrico non oscilla neanche, allora la polarizzazione rimane tutta \vec{E}_{\parallel} e dunque tutta la potenza è trasmessa.

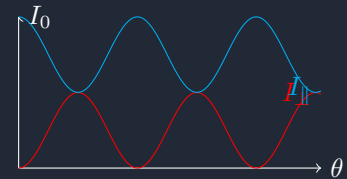


L'ellisse si spaccia solamente quando $\theta = \frac{\pi}{4}$. Allora, la polarizzazione in uscita diventa circolare.

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad I_{\parallel} = \frac{I_0}{2} \quad I_{\perp} = \frac{I_0}{2}$$

Dato che la lamina $\frac{\lambda}{2}$ permette di ruotare il campo di un certo angolo θ e, quando la luce passa nuovamente all'interno della lamina viene riportata alla polarizzazione iniziale, tutta la luce che torna sul cubo analisi sarà totalmente riflessa. Invece, una $\frac{\lambda}{4}$ attraversata due volte si comporta come una $\frac{\lambda}{2}$: l'effetto complessivo del doppio passaggio è una riflessione rispetto all'asse slow della lamina.

Figura 7.3:



7.4 Procedure operative

Si inizia bloccando sempre i componenti ottici attraverso delle staffe e bulloni che vengono strinti attraverso una chiave a brugola. Le procedure iniziali prima della raccolta dati sono le seguenti:

1. Si regola l'angolo di inclinazione sul cubo polarizzatore attraverso i due cubi polarizzatori: il cubo di analisi è utilizzato davanti al cubo di pulizia in modo tale che il fascio di luce colpisca il centro della fascia del cubo. In buona approssimazione, il fascio uscente dal cubo è polarizzato linearmente: il fascio riflesso deve essere minimizzato regolando l'angolo del cubo di analisi. Per fare questa regolazione si fa alla massima potenza del laser in modo da ottenere una polarizzazione parallela al tavolo.

2. a questo punto si può mettere il cubo di analisi e di pulizia nella loro posizione finale in modo che tra di loro si possa inserire la lamina.
3. Si regola ora l'angolo del cubo di analisi minimizzando la potenza che incide sul foglio per la polarizzazione perpendicolare (qui, dato che la polarizzazione è lineare e parallela, non trasmette niente) e si fissa con il bullone.
4. Si inserisce la lamina in modo che sia centrata sul fascio del laser e in modo tale che sia perpendicolare al fascio incidente del laser (attraverso un pezzo di carta).

Il rilevatore è un disco di silicio che sente la luce in ingresso e la legge come voltaggio ed il fotodiodo al silicio è sensibile a tutte le lunghezze d'onda, dunque vi è posto un filtro che lascia passare solamente un intervallo di lunghezze d'onda in modo tale che sia vicino alla lunghezza d'onda. I rilevatori vanno posizionati senza il filtro e successivamente si controlla che il rilevatore sia posizionato correttamente. Il funzionamento dei fotodiodi è assicurato essere lineare e inoltre direttamente proporzionale all'intensità dell'onda elettromagnetica se e solo se la differenza di potenziale è $< 10V$.

7.4.1 Presa delle misure

Adesso si possono prendere le misure sparando il laser:

- Le misure si prendono ruotando la lamina di $\approx 18^\circ$ per ogni misura per un totale di 20 misure.
- Si misura la differenza di potenziale tra i due rilevatori
- Le misure si fanno velocemente in quanto il laser tende a variare intensità nel tempo.

7.4.2 Analisi dati

Una volta presi i dati si procede con l'analisi dati attraverso il programma scritto in Mathematica sul computer del laboratorio che fornisce il grafico del fit e dei residui con i rispettivi valori veri ed incertezze. SI hanno due set di parametri con errori in quanto si hanno due funzioni e si confronta la coppia di valori alle funzioni teoriche per poter verificare le leggi. Si ha anche il programma per il calcolo della variazione di intensità delle lamine $\frac{\lambda}{2}$ e $\frac{\lambda}{4}$ in modo da evidenziare differenze tra i dati sperimentali dai modelli teorici. c

Capitolo 8

Diffrazione

8.1 Scopo dell'Esperienza

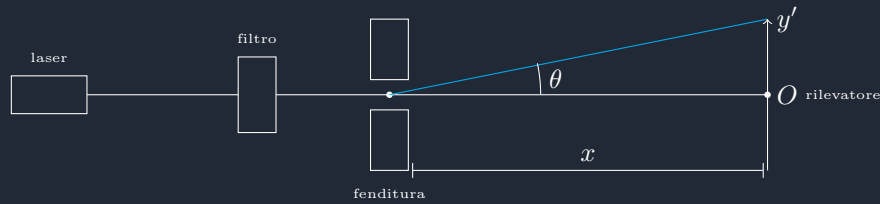
Gli scopi dell'esperienza sono i seguenti:

- Verifica delle legge di una onda piana da una fenditura nel limite di campo lontano (legge di Fraunhofer);

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right)$$

- Verifica della legge di rifrazione di una onda piana incidente su di un reticolo di diffrazione.

8.2 L'apparato sperimentale



Il laser che si utilizza è un laser a $668,66 \pm 0.01 \text{ nm}$ che punta su di un filtro in assorbimento variabile. Dopo il filtro c'è una fenditura larga circa $30 - 40 \text{ }\mu\text{m}$ che è posta ad una distanza x rispetto al rilevatore. Ogni posizione y' sul rilevatore corrisponde ad un certo angolo θ per il seno cardinale. Nel limite di Fraunhofer, ossia quando $x \gg D$, in più ci si mette nel limite in cui $x \gg y'$ (che è possibile in quanto il rilevatore ha una dimensione di circa un centimetro). Dunque

$$\theta \ll 1 \implies \sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$$

Il rilevatore è composto da 1032×1032 pixel ognuno di una dimensione di $d \approx 5 \text{ }\mu\text{m}$. Ogni raggio di luce eccita gli elettroni dei led e dunque il rilevatore restituisce la misura dell'intensità incidente in base alla quantità di elettroni eccitati. Dato che ogni pixel è in grado di restituire un valore di intensità al massimo di 2^8 , bisogna regolare il filtro in modo tale che nessun led possa saturare; se i pixel saturassero, non riuscirei a determinare se l'intensità è effettivamente massima oppure il led arriva a saturazione troppo presto.

Si utilizza un programma in Mathematica per poter fittare il seno cardinale in funzione degli indici dei pixel. La coordinata y' di ogni pixel dipende dalla larghezza del pixel e dal suo indice. Dunque l'intensità diventerà la seguente funzione:

$$I(y') = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \frac{d}{x} y \right)$$

Si introduce inoltre un parametro che mi possa centrare il seno cardinale proprio sull'asse che congiunge il centro del rilevatore e la sorgente del fascio di luce:

$$I(y') = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \frac{d}{x} (y - y_0) \right)$$

Dal fit non lineare del profilo di intensità misurato con la CCD ricavo $B \pm \Delta B$, dove $B = \frac{kD}{2} \frac{d}{x}$. L'idea è ora confrontare tale misura con il valore teorico nel quale sostituisco i valori di k conoscendo λ e le loro incertezze. I dati da trovare sono dunque:

- $k \pm \Delta k$: si ricava conoscendo $\lambda \pm \Delta \lambda$;
- $D \pm \Delta D$: $\begin{cases} 40 \pm 2 \mu m \\ 30 \pm 2 \mu m \end{cases}$ a seconda della fenditura in dotazione;
- $d = 5.20 \pm 0.01 \mu m$;
- $x \pm \Delta x$: si misura con il calibro.

Infine confronto i $B_i \pm \Delta B_i$ sperimentali ottenuti e li confronto con quello teorico verificando che siano consistenti per poter dimostrare la legge. I valori B_i sono tutti diversi ognuno per ogni riga di pixel poiché la fenditura non è perfetta, inoltre ogni valore dipende dalla posizione rispetto alla fenditura. Inoltre, se vi sono n fenditure con larghezza D , il seno cardinale presenterà anche un termine in funzione delle n fenditure spaziate di a :

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{kD}{2} \sin \theta \right) \frac{\sin^2 \left(\frac{nak}{2} \sin \theta \right)}{n^2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \sin \theta \right)}$$

E dunque

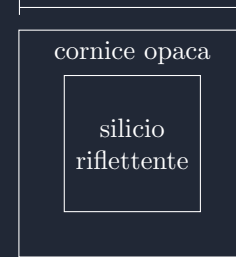
$$\frac{ka}{2} \sin \theta = m\pi \implies \sin \theta = \frac{2m\pi}{ka} \implies m \frac{\lambda}{a}$$

In corrispondenza di multipli interi di questa quantità si osservano i picchi dell'intensità.

Utilizzando dunque la CCD come un reticolo di diffrazione in riflessione, il singolo pixel è fatto di una parte in silicio che riflette la luce ed una parte che contorna il pixel che invece assorbe la luce. La distanza tra i pixel è quindi a_p e la larghezza della parte riflettente è D_p . Si vedrà dunque in riflessione il pattern dell'intensità sulla parete del laboratorio. Si può dunque stimare l'angolo di riflessione del primo ordine rifratto e di quello -1 . si può prendere la distanza sulla parete l tra i due ordini uno e meno uno e la distanza tra la parete e la CCD come L :

$$\sin \theta \approx \tan \theta \approx \frac{l}{2L}$$

Figura 8.1: Il singolo led
 $\approx 5.20 \pm 0.01 \mu m$



8.3 Seconda parte delle'esperienza: verifica della legge di diffrazione

Nella seconda parte dell'esperienza si verifica la legge di diffrazione di un'onda piana incidente su di un reticolo diffrazione. Misuro allora θ_i per valori diversi di λ_i ricavando a_i . Mi assicuro allora che i vari valori di a_i trovati siano consistenti tra di loro. Utilizzando una lampada a gas di Mercurio, si prende una cella di vetro all'interno della quale ci si mette un gas di interesse: ci si mette un catodo ed un anodo e ci si attacca un generatore ad alta tensione. Mediante degli impulsi ad alta tensione si eccitano gli elettroni degli atomi di Mercurio, i quali saltano da un orbitale all'alto emettendo dei fotoni che hanno energia

$$\Delta E = h\nu$$

In corrispondenza di un angolo più piccolo si avrà dunque una luce più violacea e, più cresce l'angolo, più la luce tenderà verso il rosso. Per ogni λ_i per lo spettro goniometro si va ad osservare un θ_i^+ ed un θ_i^- , per trovare dunque l'angolo per una data lunghezza d'onda si avrà

$$\theta = \frac{\theta_i^+ - \theta_i^-}{2} \implies \sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$$

Questa misura θ_i^+ e θ_i^- si fa perché, dato che la lettura è fatta con un crocifilo, vicino allo zero la luce è talmente intensa che il crocifilo non è visibile, dunque si osserva cosa accade a destra e a sinistra del laser per ottenere θ . Si ottiene le incertezza sia per θ_i^+ che per θ_i^- .

8.4 Procedure operative in laboratorio

Ci si assicura che il laser passi dalla fenditura e dal filtro in modo perfettamente centrato e vada verso la telecamera. Sul computer si apre la telecamera e e si può osservare il profilo a seno cardinale. Si deve dunque calibrare la fotocamera, la quale sta raccogliendo anche la luce a 50hz della stanza.

Capitolo 9

Interferometro di Michelson

9.1 Apparato sperimentale

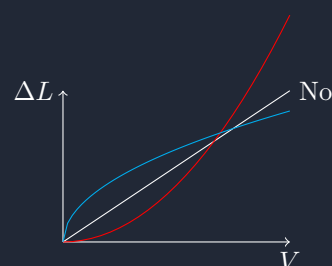
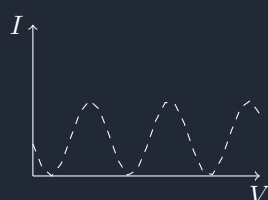
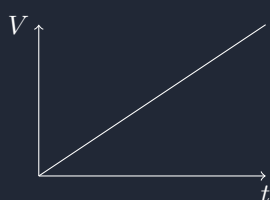
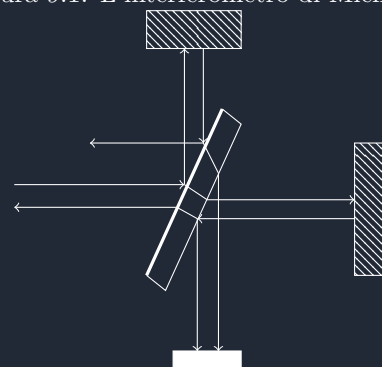
L'interferometro di Michelson è un beam splitter e non un polarizer: dunque non polarizza la luce ma semplicemente divide il fascio luminoso in base al campo incidente. Il laser che si utilizza è un laser che spara una luce a lunghezza d'onda ignota. Dunque il primo scopo dell'esperienza è proprio quello di misurare la lunghezza d'onda incognita che viene sparata dal laser elio-neon. Si può esprimere l'intensità totale del campo elettrico in funzione della distanza dei due rilevatori come

$$I = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi(L_1 - L_2)}{\frac{\lambda}{2}} \right)$$

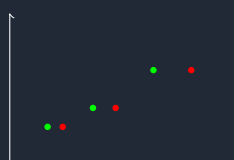
La lunghezza d'onda incognita è quella del laser verde utilizzato per l'esperienza della polarizzazione. Il segnale del fotodiodo sui rilevatori è misurato tramite un oscilloscopio digitale che misura una tensione analogica in Volt a 12 bit.

Montando uno dei due specchi su di una ceramica piezoelettrica: ossia una ceramica al quale applico una tensione variabile, lo spessore della ceramica cambia: si dilata dunque in base alla tensione che gli è applicata. Questo fenomeno permette di cambiare dunque la lunghezza di uno dei due cammini ottici attraverso della tensione. Si deve dunque misurare, in funzione della tensione, l'intensità del fascio di luce e tracciare un fit sinusoidale attraverso i dati raccolti dall'oscilloscopio digitale. Si genera dunque una rampa lineare della tensione applicata alla ceramica piezoelettrica che dovrebbe, in linea teorica, determinare un allungamento ΔL lineare, anche se in realtà è un andamento monotono che non si conosce (ma sicuramente non lineare).

Figura 9.1: L'interferometro di Michelson



Sul grafico si deve avere sia la tensione in uscita dal rilevatore di luce, che la tensione alla ceramica piezoelettrica: dunque sullo schermo del computer si hanno entrambe le tensioni. Il grafico è tratteggiato in quanto la sinusoide è calcolata ottenendo dati ogni pochi millisecondi. I dati sono caricati sul programma scritto in Mathematica in modo tale che si analizzino i punti per trovare i massimi locali per determinare la curva $V - \Delta L$.



Si toglie ora il laser elio-neon e si sostituisce con il laser verde dell'esperienza della polarizzazione in modo tale che si possa ottenere un grafico in funzione della tensione l'intensità e si ottiene un grafico simile a quello ricavato con la lampada elio-neon. I grafici dell'intensità sono leggermente sfasati tra di loro. L'intensità del seno quadro del laser rosso ha un massimo per

$$I_R(\Delta L(v)) = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta L(v)}{\frac{\lambda_R}{2}} \right) \Rightarrow \max \frac{\pi \Delta L(v)}{\frac{\lambda_R}{2}} = \frac{\pi}{2} + m_R \pi$$

Mentre per il laser verde ha un max per

$$I_R(\Delta L(v)) = I_0 \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta L(v)}{\frac{\lambda_V}{2}} \right) \Rightarrow \max \frac{\pi \Delta L(v)}{\frac{\lambda_V}{2}} = \frac{\pi}{2} + m_V \pi$$

Si possono dunque ottenere le curve dei massimi delle due sorgenti rosse e verde.

$$\begin{cases} m_R = \frac{\Delta L(v)}{\frac{\lambda_R}{2}} - \frac{1}{2} \\ m_V = \frac{\Delta L(v)}{\frac{\lambda_V}{2}} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si deve immaginare ogni volta che ci sia un certo valore di tensione della ceramica piezoelettrica in modo tale che si possa far coincidere la curva di tensione rossa con quella verde. Matematicamente è possibile farlo attraverso $m_R \frac{\lambda_R}{\lambda_V}$ per cui la curva rossa viene moltiplicata per il rapporto tra le lunghezze d'onda ottenendo

$$\frac{\Delta L(v)}{\frac{\lambda_V}{2}} - \frac{1}{2} \frac{\lambda_R}{\lambda_V}$$

Per far coincidere le curve devo aggiungere un certo offset opportuno, ossia $\frac{1}{2} \frac{\lambda_R}{\lambda_V} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Delta L(v)}{\frac{\lambda_V}{2}} - \frac{1}{2}$$

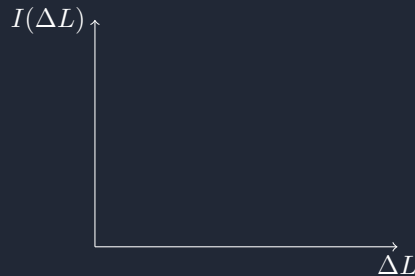
Si misura il coefficiente F , ossia il rapporto tra le lunghezze d'onda: si misura dunque questo coefficiente per qualche volta in modo da ricavare anche lo scarto massimo su questo: il λ_R è dato dalle caratteristiche della lampada a elio neon.

$$\langle \lambda_V \rangle = \frac{\langle \lambda_R \rangle}{\langle F \rangle} \Rightarrow \frac{\Delta \lambda_V}{\lambda_V} = \frac{\Delta \lambda_R}{\lambda_R} + \frac{\Delta F}{F}$$

In generale lo spettro è centrato intorno ad una certa lunghezza d'onda con un certo intervallo: si stabilisce dunque tramite l'interferometro di Michelson questa ampiezza: per farlo si deve ricordare la teoria. In presenza di una intensità luminosa che è distribuita secondo una gaussiana con parametro di larghezza $\sigma = \Delta\omega$: se questa è spedita attraverso Michelson, si vede che l'intensità in funzione del ΔL modificherà la Gaussiana totalmente:

$$I(\Delta L) = \frac{I_0}{2} \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{\Delta L - \Delta\omega}{c} \right)^2 \right) \cos \left(\frac{2\Delta L\omega_0}{c} \right) \right) \quad (9.1)$$

Il grafico che si vede facendo questo esperimento è il seguente:



9.2 Sorgente luminosa non monocromatica

Se si avesse una sorgente di luce non monocromatica, l'intensità in uscita dall'interferometro di Michelson è data dalla seguente (con le formule di bisezione):

$$I(\Delta L) = I_0 \sin^2 \left(\frac{\Delta L \omega_0}{c} \right)$$

E si riscrive nel modo più canonico:

$$I_0 \sin^2 \left(\pi \frac{\Delta L}{\frac{\lambda_0}{2}} \right)$$

L'uscita dipende dal seno al quadrato perché l'onda riflessa acquisisce un termine di fase negativo, dunque il campo elettrico, e di conseguenza l'intensità, sono zero. Per $\Delta L \ll 1$ è come se la sorgente fosse monocromatica. Quando invece

$$\frac{\Delta L \Delta \omega}{c} \approx 1$$

Allora questa lunghezza $l_c = \Delta L$ per cui è uguale ad uno prende il nome di lunghezza di coerenza: questa fa sì che il coseno sia molto piccolo e dunque si ottiene che l'ampiezza dell'oscillazione tende all'asintoto $\frac{I_0}{2}$. Dunque si sceglie questa lunghezza di coerenza in modo tale che

$$I(l_c) = \frac{I_0}{2} (1 + e^{-1})$$

Ossia che si trovi un massimo per la funzione. Per stimare la lunghezza di coerenza devo anche dare una stima per $\Delta \omega$: dunque si può relazionare questa grandezza con la lunghezza d'onda

$$\frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \implies \Delta \omega = \frac{\Delta \lambda \omega_0}{\lambda_0}$$

Allora

$$l_c = \frac{c \lambda_0}{\Delta \lambda} \frac{\lambda_0}{2 \pi c}$$

Ponendo $\lambda_0 \approx 550 \text{ nm}$ e $\Delta \lambda \approx 150 \text{ nm}$, si ha che $l_c \approx 350 \text{ nm}$. È fondamentale non toccare lo specchio con la ceramica piezoelettrica in quanto se si sposta dalla condizione di $\Delta L = 0$ non si vedrà più niente. Sperimentalmente per trovare l_c , si deve misurare λ_0 e poi si utilizza il programma in Mathematica.

- Si ricava una traccia per $I(\Delta L)$ attorno a $\Delta L \approx 0$.
- Si determina la lunghezza d'onda λ_0
- Si identificano il numero di oscillazioni n affinché si ottenga il valore massimo dell'oscillazione sia da I_0 a $\frac{I_0}{2} (1 + e^{-1})$ e moltiplico per $\frac{\lambda_0}{2}$ per trovare l_c .
- Si trova $\Delta \lambda_0$ con la formula per la lunghezza di coerenza.

La luce è filtrata da un filtro verde in modo tale che la lunghezza d'onda sia centrata intorno a $\lambda_0 \approx 552 \pm 2 \text{ nm}$ e che ha un intervallo di misura di circa $\Delta \lambda \approx 5 \pm 2 \text{ nm}$. In questo modo il rilevatore vede una lunghezza d'onda molto stretta e dunque la lunghezza di coerenza aumenta.

Appendice A

Approfondimenti dell'ottica

A.1 Interferenza da film sottili

Consideriamo cosa succede ad un'onda piana che attraversa un sottile strato di materiale dielettrico a facce piane e parallele con indice di rifrazione $n > 1$.

A.1.1 Legge di Fresnel

La legge di Fresnel sulla riflessione e trasmissione ad una interfaccia stabilisce la quantità di luce riflessa e quella trasmessa:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (\text{A.1})$$

Questo coefficiente stabilisce che il campo riflesso e quello trasmesso è dato dalle seguenti relazioni

$$E_r = rE_{in} \quad E_t = tE_{in}$$

Già da qui si scopre che nel caso tipico Aria-Vetro, si scopre che $r = -0.2$ e dunque si può quantificare l'intensità e le relazioni tra l'intensità riflessa e quella trasmessa:

$$I_r = 0.04I_{in}$$

Ossia si ha una riflessione dell'ordine del 4%. si può dunque indicare con R il coefficiente di riflessione dell'intensità luminosa; per le regole di conservazione dell'energia $T = 1 - R$, dunque

$$I_T = TI_{in}$$

Allora si può dire che

$$T = 1 - R = 1 - r^2 \quad t = \sqrt{1 - r^2}$$

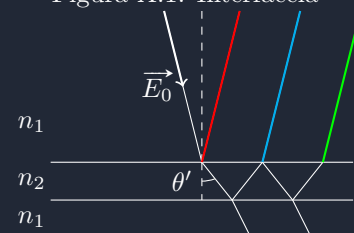
Ottenendo allora la relazione generale che lega il coefficiente di trasmissione a quello di riflessione: nel caso specifico, dato $R = 0.04$, allora si può dire che $t = 0.98$: dunque il campo elettrico trasmesso nel dielettrico è ben il 98% del campo totale.

A.1.2 Applicazione della legge di Fresnel

Preso l'interfaccia dielettrica con indice di rifrazione n_2 immerso nell'aria, supponendo che i raggi di luce incidano con un angolo $\theta \ll 1$, sull'interfaccia aria-vetro si ha una prima riflessione e trasmissione: per cui si ottiene che una parte del fascio di luce viene trasmessa e una parte riflessa, così accade per tutti i fasci riflessi all'interno del vetro che provano ad uscire. Dunque, considerato che la luce che viene riflessa all'interno del vetro, devo aggiungere un ritardo di fase per tenere conto di questo cammino extra che è stato compiuto. Il cammino che compie in più il campo che esce dal vetro è dato da

$$l = 2 \frac{d}{\cos \theta'}$$

Figura A.1: Interfaccia



Il fascio rosso dunque ha modulo del campo:

$$-|r|E_0 \cos(kx - \omega t)$$

Il fascio rosso invece ha come modulo (dato dalla differenza del cammino):

$$E_0 t^2 r \cos \left(kx - \omega t + 2 \frac{kn_2 d}{\cos \theta'} \right)$$

Mentre il fascio verde è dato da

$$E_0 t^2 r^3 \cos \left(kx - \omega t + 4 \frac{kn_2 d}{\cos \theta'} \right)$$

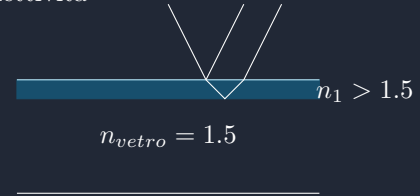
Dunque per studiare riflessione e trasmissione basterà studiare semplicemente i primi due fasci in quanto dal terzo in poi i contributi sono molto piccoli e dunque valgono i risultati che si sono ottenuti nell'interferometro di Michelson. Il motivo per il quale le bolle di sapone risultano colorate (dei colori dello spettro luminoso) è dato dal fatto che la luce che esce e rientra nel sapone genera interferenza. Tutte le volte che si usa un laser si deve considerare che ogni volta che il fascio di laser passa attraverso i componenti ottici si perde il 4% dell'intensità.

Per ovviare al problema si può depositare sulla superficie delle lenti un materiale dielettrico molto sottile con un indice di rifrazione $n_1 > n_2$, ossia maggiore dell'indice di rifrazione del vetro. Lo spessore del **coating** fatto da questo materiale dielettrico lo scelgo in modo tale che tra i due fasci riflessi ci sia interferenza distruttiva. Dunque l'intensità di luce che viene riflessa dopo che entra nel dielettrico (che deve essere in interferenza con quella inizialmente riflessa) è data da

$$I_r = I_0 t^4 r^6$$

E dunque si perde solamente lo 0.06% della luce.

Figura A.2: Il coating delle lenti a bassa riflettività

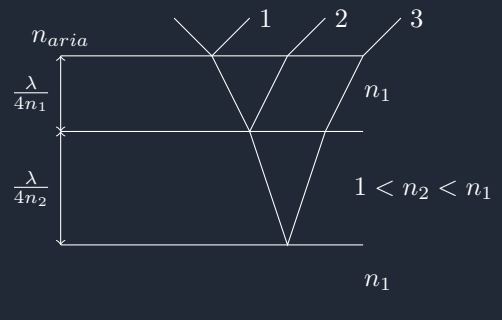


A.1.3 Coating ad alta riflettività

Si considera un coating ad alta riflettività: si può sfruttare la legge di Snell, e di Fresnel e l'interferenza costruttiva in riflessione per creare specchi ad elevata riflettività. Si utilizzano film sottili alternati a vetro in modo tale che si possa sfruttare l'interferenza costruttiva. Si definiscono allora le proprietà dei seguenti raggi luminosi (quando ovviamente $\theta < 1$):

1. Ha uno shift di π dovuto alla riflessione dovuta all'interfaccia aria-mezzo dielettrico con $n_{aria} < n_d$.
2. Il secondo raggio ha un ritardo di fase di π dovuto alla doppia propagazione all'interno del dielettrico di spessore di $\frac{\lambda}{4n_1}$.
3. Il terzo fascio ha un ritardo di fase di π rispetto al fascio 2 dovuto alla propagazione all'interno del film spesso $\frac{\lambda}{4n_2}$ ed un ritardo di fase di π dovuto alla riflessione $n_2 \rightarrow n_1$.

Figura A.3: Coating ad alta riflettività



Anche questo coating deve necessariamente essere utilizzato con una certa lunghezza d'onda e con un determinato angolo di incidenza.

A.2 Cavità ottiche

Supponendo di avere uno specchio ad alta riflettività e di avere un'infinità di strati sulle superfici di questo specchio; la probabilità di riflessione $R \approx 1$. Se si ponesse un'altra interfaccia sotto allo specchio ad alta riflettività, mi aspetto che lo specchio sotto non interferisca con lo specchio sopra. Quello che accade, invece, è che il primo specchio fa trasmettere tutta la luce sullo specchio posto sotto.

Si studiano dunque i contributi totali

1. $t^2 E_0 \cos(kx' - \omega t)$
2. $t^2 r^2 E_0 \cos(kx' - \omega t + 2kn \frac{d}{\cos \theta'})$
3. $t^2 r^4 E_0 \cos(kx' - \omega t + 4kn \frac{d}{\cos \theta'})$

Complessivamente dunque, il campo elettrico totale in trasmissione diventa la somma di tutti i contributi trasmessi dopo l'interfaccia:

$$E_T = \sum_{j=0}^{+\infty} t^2 r^{2j} E_0 \cos \left(kx' - \omega t + 2j \frac{knd}{\cos \theta'} \right)$$

Si può dunque chiamare

$$\delta = \frac{2knd}{\cos \theta'}$$

Allora, utilizzando i complessi, si può ricavare l'intensità totale del campo trasmesso sotto l'interfaccia come:

$$\begin{aligned} E_T &= (1 - R) E_0 \sum_{j=0}^{+\infty} R^j \operatorname{Re} \left[e^{i(kx' - \omega t + j\delta)} \right] \\ \Rightarrow (1 - R) E_0 \operatorname{Re} \left[e^{i(kx' - \omega t)} \sum_{j=0}^{+\infty} R^j e^{ij\delta} \right] \end{aligned}$$

Si ricorda dunque la serie notevole

$$\sum_{i=1}^{+\infty} h^i = \frac{1}{1 - h}$$

E dunque

$$E_T = (1 - R) E_0 \operatorname{Re} \left[e^{i(kx' - \omega t)} \frac{1}{1 - R e^{i\delta}} \right]$$

si può dunque risolvere prendendo il modulo del secondo numero complesso ed il coseno della somma delle fasi complesse:

$$E_T = (1 - R) E_0 \left| \frac{1}{1 - R e^{i\delta}} \right| \cos(kx' - \omega t + \phi)$$

Il fatto che questo campo elettrico oscilli con qualsiasi fase ϕ è irrilevante in quanto poi si medierà l'intensità nel tempo e dunque il termine di fase non influirà:

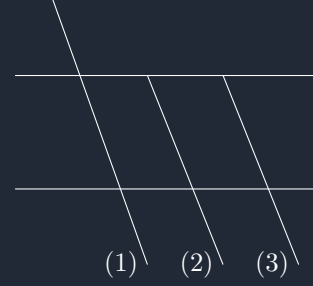
$$\begin{aligned} I_T &= I_0 (1 - R) \left| \frac{1}{1 - R e^{i\delta}} \right|^2 = \\ &= \frac{I_0 (1 - R)^2}{|1 - R(\cos \delta + i \sin \delta)|} = \\ &= \frac{I_0 (1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \delta} \Rightarrow I_0 \end{aligned}$$

A questo punto, dato che si è preso degli specchi con un alto indice di riflettività $R = 1 - \epsilon$, in genere dovrebbe passare un termine ϵ dallo specchio. Se però c'è un altro specchio ad alta riflettività sotto il primo specchio, accade che l'intensità trasmessa è proprio I_0 in quanto il coseno fa 1. Se la cavità tra gli specchi è largo d , l'intensità all'interno della cavità è dato da

$$\frac{I_0}{1 - R} = \frac{I_0}{1 - \epsilon}$$

Dunque, se si sceglie $\epsilon = 10^{-4}$, allora passerà una luce pari a $10^4 I_0$: la potenza dentro la cavità è molto maggiore di quella in entrata. Il motivo di questo paradosso è che quando il campo elettrico incide sulla prima superficie riflettente, c'è una piccola probabilità che essa si possa trasmettere. Se si accende un laser per poco tempo, è impossibile che dentro la cavità ci sia della luce: accendendo allora il laser, si osserva che i pacchetti luminosi in ingresso arrivano uno dopo l'altro.

Figura A.4:



- Arriva il pacchetto rosso, che ha una piccola probabilità di riflettere e si trasmette quindi poca intensità.
- Arriva il pacchetto blu, che ha anch'esso una piccola probabilità di trasmettere e dunque si trasmette poca intensità ed entra in controfase con il pacchetto rosso in uscita.
- Arrivando gli altri pacchetti, si sommano sempre di più i contributi in uscita degli altri pacchetti (sono i contributi che si sono trasmessi all'interno e che stanno uscendo dall'interfaccia) che sono in controfase con quelli riflessi e dunque più pacchetti arrivano e più si attenua la riflessione del primo specchio, annullando, dopo un tempo molto lungo la riflessione.

A questo punto si ha solo trasmissione all'interno della cavità ottica dopo un tempo infinito poiché tutti i contributi che sono stati trasmessi all'interno hanno completamente annullato qualsiasi riflessione. Dunque aspettando un tempo infinito, si arriva alla condizione di intensità luminosa trovata prima e a quel punto tutta l'intensità del laser viene trasmessa all'interno della cavità. Se si vuole studiare la condizione per il quale δ sia un multiplo di 2π , allora

$$2\pi m = \frac{2knd}{\cos \theta} \implies m \frac{nd}{\lambda \cos \theta}$$

La condizione di risonanza della cavità ottica si ha quando

$$\frac{nd}{\cos \theta} = \frac{\lambda}{2} m$$

La condizione fisica dunque per la risonanza è a multipli della metà della lunghezza d'onda e si realizzano le condizioni per la trasmissione totale dell'intensità luminosa all'interno della cavità. Si può dunque studiare il picco di questa funzione (che è una Gaussiana centrata intorno a questi valori ottenuti): Si impone allora che il delta larghezza a metà altezza è dato da:

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{2}$$

Quando

$$\cos \delta = 1 - \frac{(1-R)^2}{2R} \implies \cos \delta \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2}$$

Si ha dunque un modo molto preciso per poter confrontare λ con distanze macroscopiche di distanze tra specchi.

Utilizzi pratici dell'ottica

A.2.1 L'esperimento di Virgo

L'esperimento di Virgo utilizza le cavità ottiche in modo tale da aumentare l'intensità del laser utilizzato per trovare le onde gravitazionali. La potenza del laser utilizzato è a 80 Watt, ma con un *finesse* $\frac{1}{\epsilon} = 5400$, dunque aumenta la cavità aumenta la potenza del laser. La limitazione di questo esperimento è sicuramente l'assorbimento degli specchi che iniziano a scaldarsi quando passa il laser.

A.2.2 Orologi precisi

Si utilizzano degli **orologi** realizzati con le cavità ottiche che permettono di stabilizzare in maniera molto precisa la lunghezza d'onda della radiazione e dunque la frequenza della lunghezza d'onda grazie a questi orologi che hanno una dilatazione termica quasi nulla per temperature vicine alla temperatura ambiente.