

# FUNZIONI IMPLICITE

Può capitare di avere a che fare con funzioni di una variabile definite come lungo degli zeri di una funzione di 2 variabili.

## Esempio

$$F(x, y) = x^3 - y + 1$$

$$F=0 \Leftrightarrow x^3 - y + 1 = 0 \rightarrow y = x^3 + 1$$

Questo è il grafico di una funzione.

## Esempio

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$F=0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Globalmente non è grafico di una funzione, ma localmente sì.

A volte posso scriverlo come  $y(x)$ , altre  $x(y)$ .

## Teorema del Dini per funzioni implicite

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $A$  aperto.

$F: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F \in C^1(A)$ .

Sia  $P_0(x_0, y_0) \in A$  f.c.  $F(x_0, y_0) = 0$ .

Sia  $P_0$  regolare (ossia  $\nabla F(P_0) \neq 0$ ), allora:

$\left. \begin{array}{l} \exists U \text{ intorno di } x_0 \\ \exists V \text{ intorno di } y_0 \end{array} \right\} \text{f.c. } \left. \begin{array}{l} F(x, y) = 0 \text{ definisce un grafico di definizione} \\ y = f(x) \text{ oppure } x = g(y) \text{ in } U \times V \text{ intorno di } P_0. \end{array} \right.$

In particolare:

• Se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  allora  $\exists ! y = f(x): U \rightarrow V$  f.c.  $F(x, f(x)) = 0$

$$f \in C^1(U) \quad \text{e} \quad f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in U$$

• Se  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  allora  $\exists! x = g(y) : V \rightarrow U$  f.c.  $F(g(y), y) = 0$

$$g \in C^1(V) \quad \text{e} \quad g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad \forall y \in V$$

### Esempio

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

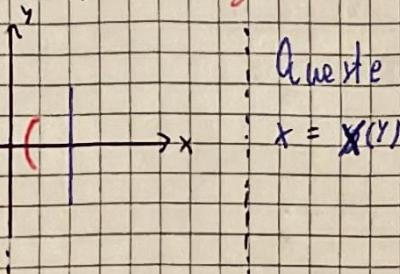
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

L'unico punto critico è  $P(0, 0)$ , che non appartiene alla curva  $\rightarrow$  Tutti i punti di  $F$  sono regolari.

### Osservazione

Cosa vuol dire geometricamente che una curva non è grafico di funzione?



A queste funzioni non sono grafico  $y = y(x)$ , ma sono grafico di

$$x = x(y)$$

### Osservazione

Se  $r(t)$  è una curva piana regolare,  $t \in I$ ,

$\forall t \in I$  il sostegno è localmente grafico.

Si può dimostrare usando il teorema del Dini.

### Osservazione

Se  $F \in C^2$  e vale il teorema del Dini, allora  $f \in C^2$

da cui:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

$\overset{\text{"}}{y_0} \quad \overset{\text{"}}{x}$

Se esplicito ottengo:

$$f'(x) = y_0 + -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} + f''(x)$$

Calcolo  $f''(x)$ :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \right)' = \quad ; \text{ Per semplificare ometto gli argomenti, che sono fatti } (x, f(x)). \\ &= -\frac{F_x' F_y - F_x F_y'}{F_y^2} = \\ &= -\frac{1}{F_y^2} \left[ (F_{xx} + F_{xy} f') F_y - F_x (F_{xy} + F_{yy} f') \right] \Big|_{(x, f(x))} \end{aligned}$$

Il risultato è complicato  $\rightarrow$  Meglio scrivere esplicitamente  $f(x)$  e svilupparlo.

Esempio

$$x^2 - x^4 - y^2 = 0 \rightarrow F(x, y) = x^2 - x^4 - y^2$$

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - 2x^2) \\ -y \end{pmatrix}$$

Punti critici:

$$\begin{cases} x(1 - 2x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} P_0(0, 0) \rightarrow F(P_0) = 0 \\ P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rightarrow F(P_1) \neq 0 \\ P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rightarrow F(P_2) \neq 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Li scarto} \\ \text{è curva} \end{array} \right\}$$

Voglio trovare la retta tangente al grafico di  $F=0$  in  $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$$y = f'\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Mi basta calcolare } f'\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ sapendo } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{F_x\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{F_y\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$$

## Dimostrazione (teorema del Dini)

Sia  $P_0$  regolare,  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ ,  $F_y(x_0, y_0) > 0$

① Voglio dimostrare che  $\exists U$  intorno di  $x_0$

$$\begin{aligned} &\exists U \text{ intorno di } x_0 \\ &\quad \exists V = [y_0 - \delta, y_0 + \delta] \text{ intorno di } y_0 \end{aligned}$$

t.c.  $F_0(x, y_0 - \delta) < 0 \quad \forall x \in U$   
 $F_0(x, y_0 + \delta) > 0 \quad \forall x \in U$

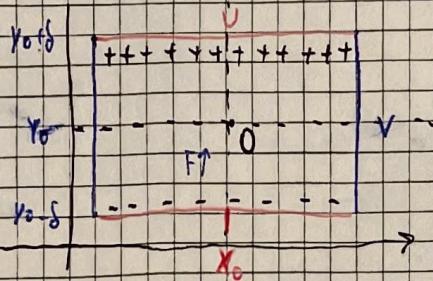
$F_y(x_0, y_0) > 0$ ,  $F_y \in C^0 \Rightarrow \exists R$  rettangolo chiuso  $= W \times V$  t.c.  $F_y(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in W \times V$

$\left\{ \begin{array}{l} W \text{ intorno di } x_0 \\ V \text{ intorno di } y_0 \end{array} \right.$

Allora  $\forall x \in W$  fissato ho  $F(x, y)$  (come funzione di  $y$ ) strettamente crescente:

In particolare  $F(x_0, y)$  è strettamente crescente con  $F(x_0, y_0) = 0$

$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0 \quad \text{e} \quad F(x_0, y_0 + \delta) > 0$$



Considero  $F(x, y_0 - \delta)$  funzione continua. Per la permanenza del segno:  $\boxed{0}$

$$F(x, y_0 - \delta) < 0 \quad \forall x \in U$$

$$F(x, y_0 + \delta) > 0 \quad \forall x \in U$$

$$F_y(x, y_0 - \delta) < 0 \quad \forall x \in U$$

*Primo strumento*

$$F_y(x, y_0 + \delta) > 0 \quad \forall x \in U$$

② Voglio dimostrare che  $\exists f: U \rightarrow V$  t.c.  $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$

Osserviamo che  $\forall x \in U \quad y \mapsto F(x, y)$  è strettamente crescente con:

$$F(x, y_0 - \delta) < 0 \quad \forall x \in U \quad | \quad F \in C^0$$

$$F(x, y_0 + \delta) > 0 \quad \forall x \in U$$

Per il teorema di esistenza degli zeri e per la stretta monotonia:

$\Rightarrow \forall x \in U \quad \exists y \in V: F(x, y) = 0$ , cioè  $y = f(x)$  **Dimostrato**

③  $f \in C^0(U)$  Voglio dimostrarlo

Fisso  $x_1 \in U$ , considero  $x \in U$ :

$$G(t) = F\left(\underbrace{(1-t)x_1 + tx}_{{\xi}_t}; \underbrace{(1-t)f(x_1) + tf(x)}_{h_t}\right) \text{ con } t \in [0, 1]$$

$G \in C^1$

$$\left. \begin{aligned} G(0) &= F(x_1; f(x_1)) = 0 \\ G(1) &= F(x; f(x)) = 0 \end{aligned} \right\} ; \text{ per il teorema di Rolle, } \exists \tau \in [0, 1] \text{ t.c.}$$

$$G'(\tau) = 0$$

$$\text{Ho: } 0 = G'(\tau) = F_x({\xi}_\tau, h_\tau)(x - x_1) + F_y({\xi}_\tau, h_\tau)(f(x) - f(x_1)) \text{ in } \tau$$

$$\left. \begin{aligned} (f(x) - f(x_1)) \underbrace{\left(F_y((1-\tau)x_1 + \tau x), (1-\tau)f(x_1) + \tau f(x)\right)}_{\substack{\text{per hp} \\ {\xi}_\tau}} &= -(x - x_1) F_x({\xi}_\tau, h_\tau) \\ F_x({\xi}_\tau, h_\tau) &\neq 0 \end{aligned} \right\}$$

$$f(x) - f(x_1) = -(x - x_1) \frac{F_x({\xi}, h)}{F_y({\xi}, h)} \quad \text{(*)}$$

Voglio dimostrare che  $f(x) - f(x_1)$  è continuo:

$$|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1| \max_{(x,y) \in U} \left| \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \right| \leq |x - x_1| \quad \boxed{\begin{array}{l} \max_{(x,y) \in U} |F_x(x,y)| \\ \min_{(x,y) \in U} |F_y(x,y)| \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{per perché:} \\ F_x \in C^0 \\ F_y \neq 0 \text{ in } \mathbb{R} \end{array}$$

Ma  $|x - x_1|$  è un infinitesimo infinito per  $x \rightarrow x_1$ :

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1)$  oppure  $f \in C^0(U)$  Dimostrato

④  $\exists f'(x) \forall x \in U$  e  $f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \forall x \in U$  Voglio dimostrarlo

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \rightarrow x_1} -\frac{F_x({\xi}_\tau, h_\tau)}{F_y({\xi}_\tau, h_\tau)} \quad \text{per (*)}$$

Osservazione

$F_x, F_y \in C^0(U \times V)$

Per  $x \rightarrow x_1$ :  ${\xi}_\tau = (1-\tau)x_1 + \tau x \rightarrow x_1$

$h_\tau = (1-\tau)f(x_1) + \tau f(x) \rightarrow f(x_1)$  per ③

Ottengo dunque:  $f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} -\frac{F_x(x_1, y_1)}{F_y(x_1, y_1)} = -\frac{F_x(x_1, f(x_1))}{F_y(x_1, f(x_1))}$  Dimostrato

### Osservazione

Il teorema vale anche se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  e solo  $F_y \in C^0$

$F_x(x_0, y_0) \neq 0$  e solo  $F_x \in C^0$

### Teorema del Dini (3 variabili)

$F(x, y, z) \in C^1(A)$  con  $A$  aperto,  $A \subseteq \mathbb{R}^3$

Sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \in A$  regolare e t.c.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

Supponiamo  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ . Allora  $\exists U_{P_0} \subseteq A$  t.c.

$\{F(x, y, z) = 0\} \cap U_{P_0}$  è grafico di  $z = f(x, y)$

Inoltre  $F \in C^1$  e  $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$  Localmente vicino a  $(x_0, y_0)$ .

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$$

### Curve parametriche

Si definisce "curva parametrica":

$$\vec{r}(t): I \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad I = [a, b]$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{con } x, y, z: I \rightarrow \mathbb{R}$$

### Esempio

$$\vec{r}(t) = (1-t)P_0 + tP_1 \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

$$\vec{x}(s) = P_0 + \tan(s)(P_1 - P_0) \quad \text{con } s \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\vec{x}(\mu) = P_0 + \mu^2(P_0 - P_1) \quad \text{con } \mu \in [0, 1]$$

[CEZ, 23/10/2023  
PROF. SIA BLANCHINI]

## Orientazione

Definisco "orientazione" il verso di percorrenza del sostegno.

## Curva semplice

Definisco una curva "semplice" se non ha autointersezioni.  $\leftarrow$  È iniettiva.

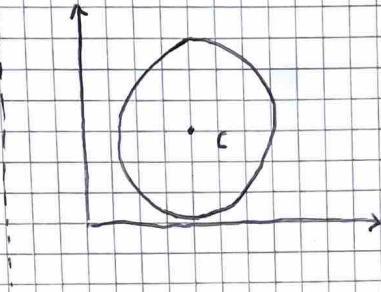
## Curva semplice chiusa

Una curva semplice la definisco "chiusa" se  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ .

## Esempio

Scriviamo la parametrizzazione di una circonferenza nel piano:

$$\vec{x}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) + x_0 \\ R \sin(\theta) + y_0 \end{pmatrix}$$



$\vec{x}(\theta)$  è semplice e chiusa.

## Regolarità

Definisco  $\vec{r}(t)$  "regolare" se  $x(t), y(t), z(t)$  sono derivabili e  $|\dot{\vec{r}}(t)| \neq 0 \forall t \in I$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad \text{con } t \in I$$

$$\rightarrow \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

## Regolarità a tratti

Definisco  $\vec{r}(t)$  "regolare a tratti" se:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} \vec{r}_1(t) & \text{se } t \in [a, t_1] \\ \vec{r}_2(t) & \text{se } t \in [t_1, t_2] \\ \vec{r}_3(t) & \text{se } t \in [t_2, b] \end{cases} \quad \text{con } \vec{r}_i: \text{curve regolari}$$

### Esempio - Sfera Soide

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}} \rightarrow \text{la curva non è semplice} \rightarrow \rho(t) = \rho(s) \Leftrightarrow t = s \\ \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s^3 - s \\ s^2 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - t = s^3 - s \\ t^2 - 1 = s^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t^2 - 1) = s(s^2 - 1) \\ |t| = |s| \end{cases} \Leftrightarrow t^2 = s^2 = 1 \end{aligned}$$

Ma  $\exists t \neq s$  f.c.

$\rho(t) = \rho(s)$  cioè  $f$  non è iniettiva  $\rightarrow f$  non è semplice

$$t = 1 \wedge s = -1$$

$$t = -1 \wedge s = 1$$

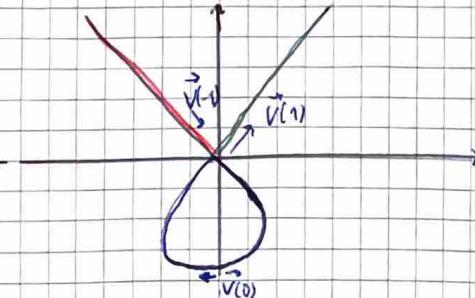
$$(t = s = 1 \vee t = s = -1)$$

Scrivo il vettore derivato:

$$\dot{\rho}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$$

$\rho$  è regolare a tratti:

$$\rho(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} & \text{se } t \in [-1, 1] \\ " & \text{se } t \in [-\infty, -1) \\ " & \text{se } t \in (1, +\infty) \end{cases}$$



### Esempio - Cardioidi

Questo esempio fa vedere che la regolarità dipende anche dalla parametrizzazione:

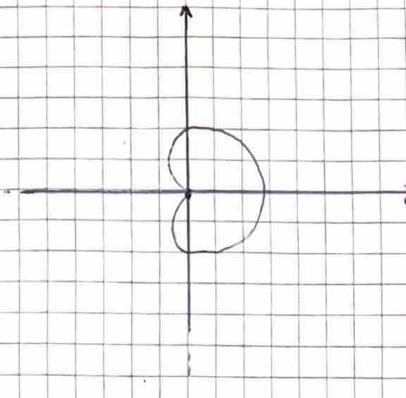
$$\rho(\theta) = \begin{pmatrix} (1 + \cos(\theta)) \cos(\theta) \\ (1 + \sin(\theta)) \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in [0, 2\pi]$$

Scrivo il vettore derivato:

$$\dot{\rho}(\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ -\sin^2(\theta) + \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix}$$

$$\text{Ma lo } \dot{\rho}(\theta) = 0 \text{ se } \theta = \pi$$

e non è regolare in  $\theta = \pi$



Potrei rendere la curva regolare, semplicemente cambiando parametrizzazione.

Il mio problema è ovviamente la cuspidate  $\rightarrow$  posso "saltarla" prendendo quello come punto di partenza  $\Rightarrow$  il vettore non dovrà mai attraversare la cuspidate.

Siccome le funzioni sono periodiche, prendo la stessa parametrizzazione, ma in  $[-\pi, \pi]$ , e osservo che è regolare.

## Retta tangente alla curva

Sia  $\vec{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare.

Sia  $P_0 = \vec{r}(t_0)$ .

$\exists t_0 \in (a, b)$  f.c. la retta tangente al sostegno di  $\vec{r}$  in  $P_0$  è:

$$\text{Rtg: } \vec{x} = \tau \vec{r}(t_0) + P_0 \quad \text{con } \tau \in \mathbb{R}$$

## Versore tangente

$$\vec{t}(t) = \frac{\dot{\vec{r}}(t)}{\|\dot{\vec{r}}(t)\|} \quad \text{con } t \in (a, b)$$

Si ricorda inoltre che:

- $\vec{r}(t)$  è la traiettoria.
- $\dot{\vec{r}}(t)$  è la velocità.
- $\ddot{\vec{r}}(t)$  è l'accelerazione.

## Parametrizzazioni equivalenti

Due parametrizzazioni:  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\varphi} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$  sono "equivalenti" se:

$\exists \psi : I \rightarrow J$ ,  $\psi \in C^1$  f.c.

$$g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I \quad \text{f.c.} \quad \vec{\varphi}(t) = \vec{r}(g(t)) \quad \forall t \in I$$

## Oss

$g$  è invertibile.

## Oss

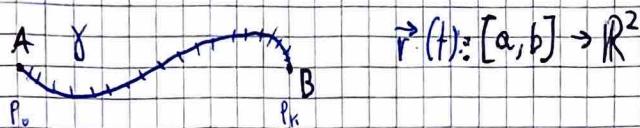
Se  $\vec{r}$  e  $\vec{\varphi}$  sono equivalenti, allora:

$\vec{t}_\varphi = \vec{t}_\psi$  nei punti corrispondenti, oppure

$\vec{t}_\varphi = -\vec{t}_\psi \rightarrow$  è cambiato il verso di percorrenza

Ciò è vero perché se cambio parametrizzazione sto cambiando velocità  $\rightarrow$  La curva è la stessa, ma cambio il modo in cui la percorro.

## Lunghezza di una curva



Per calcolarne la lunghezza, dividere la curva in segmenti infinitesimi;

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_K = b$$

Scrivo la poligona inserta:

$$P_i = P(t_i) = \vec{\gamma}(t_i)$$

Oss.  $P_i \in \gamma$

$$i = 0, \dots, K$$

$$\mathcal{L}(\tilde{P}) \geq \mathcal{L}(P) \quad \text{dove } \tilde{P} \text{ è la poligonale}$$

## Rettificabile

Definisco  $\vec{\gamma}(t)$  "rettificabile" se  $\sup\{\text{poligoni inseriti}\} = L < +\infty$ .

In tal caso  $\mathcal{L}(\gamma) = L$ .

È una definizione molto complicata.

## Teorema di rettificabilità

Sia  $\vec{\varphi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{\varphi} \in C^1([a, b])$  regolare a tratti, allora:

$\vec{\varphi}$  è rettificabile e  $\mathcal{L}(\vec{\varphi}) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt$

## Proposizione

Se  $\vec{\varphi}$  e  $\vec{\psi}$  sono parametrizzazioni equivalenti,  $\mathcal{L}(\vec{\varphi}) = \mathcal{L}(\vec{\psi})$ , cioè:

$$\int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b |\psi'(t)| dt \quad \text{dipende solo dal sostegno}$$

## Arco curvilinea

Sia  $\vec{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare, sia  $t_0 \in [a, b]$

$\forall t \in [a, b]$  definisco l'arco curvilineo  $s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau$

L'arco curvilineo di  $\vec{r}$  centrata in  $t_0$  è la lunghezza dell'arco di curva  $\gamma$  tra  $p_0$  e  $\vec{r}(t)$ .

$t_0 = a$  nel mio caso

$\cdot s : [a, b] \rightarrow [0, L]$  con  $L = \ell(\gamma)$

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau \quad \begin{aligned} & \cdot s(a) = 0 \\ & \cdot s(b) = \end{aligned}$$

$\cdot s$  è crescente,  $s \in C^1 \rightarrow \dot{s}(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| > 0$

Per come si era visto nelle parametrizzazioni equivalenti, quello che ho fatto è un cambio di parametro ammissibile.

$\exists t(s) : [0, L] \rightarrow [a, b]$

$$t = t(s)$$

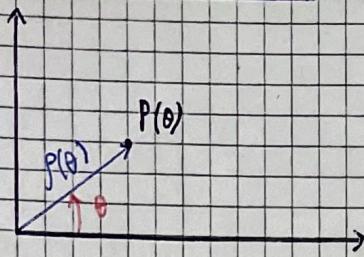
$s = s(t) \rightarrow$  (cambio di parametro)

$$\vec{\varphi}(s) = \vec{r}(t(s))$$

$$\dot{\vec{\varphi}}(s) = \dot{\vec{r}}(t(s)) \dot{t}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(t(s))}{|\dot{\vec{r}}(t(s))|} \Rightarrow |\dot{\vec{\varphi}}(s)| = 1$$

$$\dot{t}(s) = \frac{1}{\dot{\vec{r}}(t(s))} = \frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t(s))|} \text{ per la derivazione della funzione inversa}$$

## Curve in forma polare



LEZ. 28/10/2023  
PROF.SSA BIANCHI

Finora abbiamo scritto le curve in **forma cartesiana**, ma possiamo anche indirizzarle in **forma polare**.

Osserviamo la presenza di una circonferenza di raggio  $p(\theta) = R > 0$ .

### Equazione polare

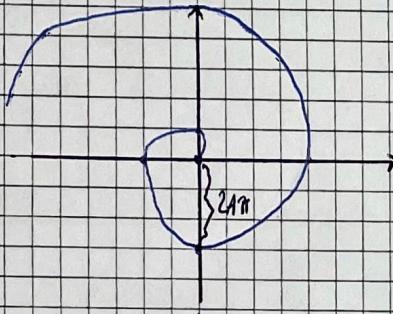
Poiché scrivere in fatti un' **equazione polare**  $p = p(\theta)$  con  $p(\theta) > 0$  e  $\theta \in I$

$$r(\theta) = \begin{pmatrix} p(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ p(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in I$$

Presentiamo ora una lista di **curve famose**:

### Spirale di Archimede

$$p(\theta) = A\theta \quad \text{con } A = \text{cost.} > 0 \quad \theta \geq 0.$$

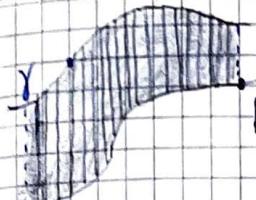


## Integrali di linea di 1<sup>a</sup> specie

Finora abbiamo sempre avuto a che fare con integrali del tipo:

$\int_a^b g(t) dt \rightarrow$  Questo è l'area del sottografico della funzione  $g$  nell'intervallo  $[a, b]$ .

Per integrale di linea di 1<sup>a</sup> si intende l'area del sottografico delle curva in più dimensioni descritta da una particella in moto:



$$A = r(a)$$

$\|d\vec{r}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$  è il modulo della velocità, che quantifica la variazione della posizione.

Di conseguenza, l'area del sottografico di  $f(x, y)$  lungo la curva  $r(t)$  è:

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_{\gamma} f(x, y) ds$$

Questo risultato non dipende dalla parametrizzazione, ma solo dal sostegno.

### Teorema

Siano:  $\vec{x}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

parametrizzazioni equivalenti e regolari a tratti di  $\gamma$

$$\vec{r}(u) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ;  $A \ni \gamma$ , allora:

$$\int_a^b f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}(u)) |\vec{r}'(u)| du,$$

e quindi è bene definito  $\int f ds = \int_a^b f(\vec{x}(t)) |\vec{x}'(t)| dt$ , ossia non dipende dalla parametrizzazione.

Nota L'integrale lo esprimiamo in  $ds$  perché, non avendo dipendenza dalla parametrizzazione, lo scrivo in funzione della sola ascissa curvilinea.

## Osservazione

Se  $f = 1$ ,  $\int f ds = \int_a^b |\dot{x}(t)| dt = L(x)$ .

Posso ora dimostrare il teorema.

## Dimostrazione

Sia  $g: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  con  $t \mapsto u = g(t)$  cambio di parametro.

Supponiamo  $g' > 0$  (viene mantenuta l'orientazione).

\*  $x(t) = r(g(t))$  perché le parametrizzazioni sono equivalenti.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\vec{r}(u)) |\dot{\vec{r}}(u)| du &= \rightarrow u = g(t) \rightarrow du = g'(t) dt \\ &= \int_a^b f(\vec{r}(g(t))) |\dot{\vec{r}}(g(t))| g'(t) dt \rightarrow \text{Ho cambiato parametro.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\dot{\vec{x}}(t)| &\stackrel{*}{=} |\dot{\vec{r}}(g(t)) g'(t)| = |\dot{\vec{r}}(g(t))| |g'(t)| = \\ &= |g'(t)| |\dot{\vec{r}}(g(t))| = \text{con } g'(t) < 0 \\ &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\dot{\vec{x}}(t)| dt \quad \text{Dimostrato} \end{aligned}$$

Anche cambiando l'orientazione, la lunghezza è quella, ed è positivo.

## Applicazioni

Prendiamo  $\rho$  sostegno di  $\vec{x}(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

### Massa di un filo con densità

$$\rho(x, y, z) \quad M_x = \int_0^b \rho(s) ds = \int_a^b \rho(x(t), y(t), z(t)) |\dot{\vec{x}}(t)| dt$$

### Centro di massa di un filo materiale

$$G = (x_G, y_G, z_G)$$

$$x_G = \frac{1}{m_x} \int s x \, ds = \frac{1}{m_x} \int_a^b g(\vec{x}(t)) x(t) |\dot{\vec{x}}(t)| dt$$

(campi conservativi)

L'analisi dei campi vettoriali e delle forme differenziali è uno strumento utilissimo in fisica.

Campo vettoriale e forma differenziale

Sia  $A \subset \mathbb{R}^3$ .

Si dice "campo vettoriale" su  $A$  una funzione  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ossia:  
ad ogni punto dello spazio è associato un vettore.

Sia  $(x, y, z) \in A$   $\xrightarrow{F} F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  con:

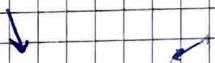
$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} \quad \text{dove } F_1, F_2 \text{ e } F_3 \text{ sono funzioni scalari.}$$

Esempio - massa puntiforme

Supponiamo di avere una massa puntiforme  $m$  che si trova nel punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ .

Definisco il campo gravitazionale come:

$$F(x, y, z) = -cm \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = -cm \frac{(P - P_0)}{\|P - P_0\|^3}$$

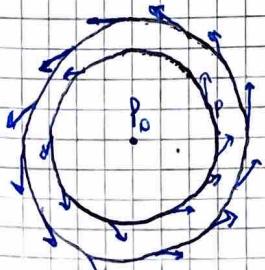


$m$

Esempio - Campo di velocità

Potrei definire il campo di velocità di un corpo rigido che ruota intorno all'asse  $z$  con velocità angolare  $\Omega$ :

$$V(x, y, z) = -\Omega y \underline{i} + \Omega x \underline{j} + 0 \underline{k}$$



## Esempio

Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è differenziabile, allora  $\nabla f(x, y, z)$  è un campo vettoriale.

## Forme differenziali

Ad ogni punto dello spazio è associato un elemento del duale.

### Duale

Sia  $V$  uno spazio vettoriale.

Si definisce "duale" l'insieme delle applicazioni lineari:  $V \rightarrow \mathbb{R}$  e si indica con  $V^*$ .

## Esempio

$$(\mathbb{R}^3)^* \rightarrow L \quad \begin{aligned} a_1 &= L(l_1) & \text{Note } V \in \mathbb{R}^3 \\ a_2 &= L(l_2) & V = (v_1, v_2, v_3) \\ a_3 &= L(l_3) \end{aligned}$$

$$L(V) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$$

Definisco una base di  $(\mathbb{R}^3)^*$ :  $\rightarrow$  è una base canonica di  $(\mathbb{R}^3)^*$

$$\begin{array}{ll} dx_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & dx_1(V) = v_1 \\ dx_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & dx_2(V) = v_2 \quad \rightarrow L = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \\ dx_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} & dx_3(V) = v_3 \end{array}$$

Sia  $A \in \mathbb{R}^3$ . Una forma differenziale  $w$  su  $A$  è una funzione che, ad ogni punto di  $A$  associa un elemento di  $(\mathbb{R}^3)^*$ .

$$A \ni (x, y, z) \rightarrow L(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

||

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

$$\therefore L: (\mathbb{R}^3)^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\therefore w: (\mathbb{R}^3)^* \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$$

Ma, al variare di  $L$ , variano  $a_1, a_2$  e  $a_3$ , qui mi posso dire:

$$a_1(x, y, z) dx_1 + a_2(x, y, z) dx_2 + a_3(x, y, z) dx_3 = w(x, y, z)$$

Si capisce che il parallelismo con i campi vettoriali è forte:

$$w(x, y, z) = a_1(x, y, z) dx_1 + a_2(x, y, z) dx_2 + a_3(x, y, z) dx_3$$



$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_1(x, y, z) \\ a_2(x, y, z) \\ a_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

### Differenziale

Se  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile. Chiamiamo differenziale di  $f$ :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) dx_1 + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) dx_2 + \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) dx_3$$

### Definizione - Forma differenziale esatta

Sia  $w: A \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$  una forma differenziale.  $w$  si dice "esatta" se  $\exists f: A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile t.c.

$$w = df$$

$$\frac{w}{f} = \frac{df}{f}$$

cioè ( $w = a_1(x, y, z) dx_1 + a_2(x, y, z) dx_2 + a_3(x, y, z) dx_3$ ) se  $\exists f$  t.c.

$$a_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} f \quad a_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} f \quad a_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} f$$

Tale  $f$  si dice "primitiva" di  $w$ .

### Osservazione

Se  $f$  è primitiva di  $w$ , anche  $f + c$  lo è.

### Definizione - Campo conservativo

Sia  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Un campo vettoriale  $F = (F_1, F_2, F_3)$  si dice "conservativo" se  $\exists f: A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile t.c.

$$F = \nabla f$$

$f$  si dice inoltre "potenziale" di  $F$ .

## Esempi

- Il campo gravitazionale è conservativo.
- Ci sono campi non conservativi.
- Ci sono forme differenziali non esatte.

Es  $w(x,y) = 3x^2 dx - xy dy$  non è esatta. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -xy \rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -y}$$

Ho  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva orientata  
integrale curvilineo di  $\mathbb{I}^2$  specie

$F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sia  $\gamma$  una curva orientata  $\in A$ .

Sia  $\gamma$  regolare a tratti, sia  $F$  continuo ( $f_1, f_2, f_3$  continue).

Sia  $\varphi: [a, b] \rightarrow A$  una parametrizzazione regolare a tratti, concorde con l'orientamento di  $\gamma$ . Sia  $\varphi(a) = P_0$ ,  $\varphi(b) = P_1$ .

Sto chiedendo  $T(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|}$  concorde con il verso di percorrenza.

Si definisce lavoro di  $F$  su  $\gamma$ :

$$\int_a^b \langle F(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt$$

Potrei scrivere anche come:

$\int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds$  dove, in ogni punto di  $\gamma$ ,  $T$  è un versore tangente concorde con l'orientazione di  $\gamma$ .

In fatti

$$\int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds = \int_a^b \langle F(\varphi(t)), T(\varphi(t)) \rangle \|\dot{\varphi}(t)\| dt =$$

$$= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \rangle > \|\dot{\varphi}(t)\| dt =$$

$$= \int_a^b \langle F(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle dt$$

### Caratteristiche

- Dipende dall'orientazione su  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma^-} \langle F, T \rangle ds = - \int_{\gamma} \langle F, T \rangle ds$$

- Non dipende dalla parametrizzazione.

### Esempio

$$F = (xy, y, 0)$$

$$\star \psi_1 = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcola il lavoro su  $\gamma$  del campo  $F$ .

$$\int_0^{2\pi} \langle (\cos(t) \sin(t), \sin(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t) dt = -\frac{\sin^3(t)}{3} + \frac{\sin^2(t)}{2} \Big|_0^{2\pi} = 0 = W_1$$

$$\star \psi_2(t) = (2, 0, 0) + (\cos(t), \sin(t), 0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + 2 \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Calcola il lavoro

$$\int_{-\pi}^{\pi} \langle (2 + \cos(t), \sin(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} -2\sin^2(t) + \text{l'integrandi di prima} = \left[ -2 \left( t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right) - \frac{\sin^3(t)}{3} + \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = -2\pi$$

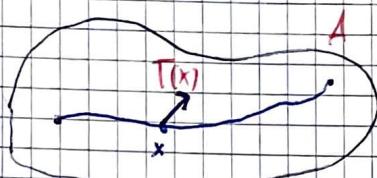
Integrale di una forma differenziale su una curva orientata

E' il concetto analogo all'integrale curvilineo per un campo vettoriale.

Sia  $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$ ,  $A \subset \mathbb{R}^3$ , una forma differenziale continua:

Se  $w = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$  (ossia  $a_1, a_2, a_3$  continue).

Sia  $\gamma$  una curva orientata con supporto  $C$  regolare a tratti e sia  $\varphi(t): [a, b] \rightarrow A$  una sua parametrizzazione concorde con l'orientazione.



Definisco  $\int \omega := \int \omega(x)[T(x)] ds$ , ossia l'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  corrispondente a  $x$  applicata al versore tangente  $T(x)$  alla curva  $\gamma$  nel suo punto  $x$ .

$$\begin{aligned} \int \omega(x)[T(x)] ds &= \int_a^b \omega(\varphi(t)) \left[ \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \right] \|\dot{\varphi}(t)\| dt = \text{perché } \omega \text{ è lineare} \rightarrow \text{la costante} \\ &= \int_a^b (a_1(\varphi(t)) dx_1 + a_2(\varphi(t)) dx_2 + a_3(\varphi(t)) dx_3) [\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t), \dot{\varphi}_3(t)] dt = \\ &= \int_a^b a_1(\varphi(t)) \dot{\varphi}_1(t) + a_2(\varphi(t)) \dot{\varphi}_2(t) + a_3(\varphi(t)) \dot{\varphi}_3(t) dt \end{aligned}$$

### Nota

- Non dipende dalla parametrizzazione.

- Dipende dal verso:

$$\int \omega = - \int \omega$$

### Esempio

$$\omega(x, y) = y dx - xy dy$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, \pi] \quad \text{percorso in senso orario}$$

$$\int \omega = - \int_0^\pi \sin(t)(-\sin(t)) + (-\sin(t)\cos(t))/\cos(t) dt =$$

$$= \int_0^\pi \sin^2(t) + \sin(t)\cos(t) dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t) - \frac{\cos^2(t)}{3} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$$



Teorema (integrazione delle forme esatte)

Sia  $w$  una forma differenziale esatta e continua definita nell'aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^3$ .

Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti con sostegno  $C \subset A$  di estremi  $P_0$  e  $P_1$ , orientata nel verso  $P_0 \rightarrow P_1$ . Sia  $f$  una primitiva di  $w$ . Allora:

$$\oint_C w = f(P_1) - f(P_0)$$

Dimostrazione

In gergo di en te:  $w$  è esatta e  $f$  è una sua primitiva. Vuol dire che:

$$\begin{aligned} a_1(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, y, z) && | \text{Semplicemente perché } w \text{ è esatta e } f \text{ è una sua primitiva} \\ a_2(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x, y, z) \\ a_3(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x, y, z) \end{aligned}$$

corris-  
to  $x$ .

Sia  $\varphi: [a, b] \rightarrow A$  una parametrizzazione di  $\gamma$  concorde con l'orientazione. In particolare:  $f(P_1) = a$  e  $f(P_0) = b$ .

$$\begin{aligned} \oint_C w &= \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t)) \dot{\varphi}_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t)) \dot{\varphi}_2(t) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\varphi(t)) \dot{\varphi}_3(t) \right] dt = \text{ma:} \\ &\int_a^b \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) dt = \rightarrow \text{Infatti } f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)) \\ &= \left[ f(\varphi(t)) \right]_a^b = \\ &= f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(P_1) - f(P_0) \quad \text{Dimostrato} \end{aligned}$$

Questo risultato spiega inoltre perché, se ho un campo conservativo, il lavoro è la differenza del potenziale fra il punto di arrivo e il punto di partenza.

## Teorema (caratterizzazione delle forme esatte)

Sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  un aperto connesso,  $w$  una sua forma di classe continua in  $A$  e  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  curve regolari a tratti con sostegno contenuto in  $A$ .

Le seguenti tre proprietà sono equivalenti:

- 1)  $w$  è esatta.
- 2) Per ogni curva chiusa  $\gamma$  contenuta in  $A$  risulta  $\int_{\gamma} w = 0$ .
- 3) Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza si ha:

$$\int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w$$

## Dimostrazione

Le varie implicazioni si dimostrano separatamente.

$$\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}$$

Sia  $f$  una primitiva di  $w$ :  $p_1 = p_0$

Dal teorema dell'integrazione delle forme esatte ho:

$$\int_{\gamma} w = f(p_0) - f(p_1) = 0 \quad \text{Dimostrato}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \textcircled{3}$$

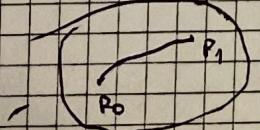
Se sfrutto il punto  $\textcircled{2}$  e calcolo il lavoro su  $\gamma_1 \cup \gamma_2$ :

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} w = \int_{\gamma_1} w + \int_{\gamma_2} w =$$

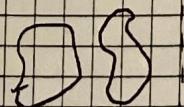
$$0 = \int_{\gamma_1} w - \int_{\gamma_2} w \Rightarrow \int_{\gamma_1} w = \int_{\gamma_2} w \quad \text{Dimostrato}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \textcircled{1}$$

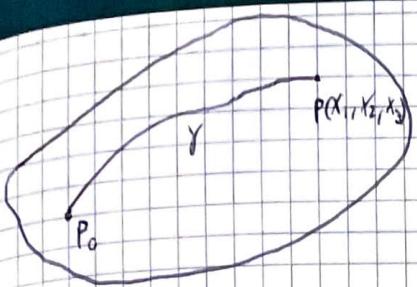
Si ricorda che un insieme è connesso se ogni suo punto può essere collegato a ogni altro punto dell'insieme mediante un cammino continuo infernante contenuto nell'insieme.



Insieme connesso

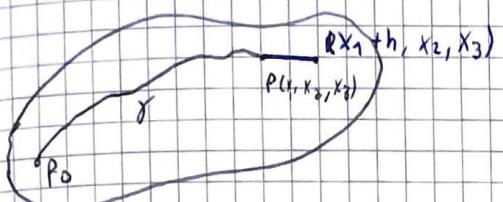


Insieme non connesso.



Fisso un punto  $P_0$  e prendo un altro punto  $P$ . Definisco una funzione che mi manda da  $P_0$  a  $P$ , e dimostro che essa è l'integrale di  $w$ , che risulterà così esatta.

Per prima cosa sposto leggermente il punto  $P_0$  lungo la curva  $\gamma$ .



Ho un nuovo segmento  $t$  che passa per il punto  $P$ :

$$t = (x_1 + t_1, x_2, x_3) \quad t \in [0, h]$$

Allora:

$$f(x_1 + h, x_2, x_3) = \int_{\gamma_0}^{\gamma} w$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \int_{\gamma} w$$

Dato questo piccolo incremento, faccio il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} w - \int_{\gamma} w}{h} = \frac{\int_{\gamma} w + \int_{\gamma}^{\gamma+h} w - \int_{\gamma} w}{h} =$$

$$= \frac{\int_{\gamma}^{\gamma+h} w}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h (a_1(x_1 + t, x_2, x_3) + a_2(\cdot) \cdot 0 + a_3(\cdot) \cdot 0) dt = \text{perché } T = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3) dt$$

$$(chiamiamo) \quad P(h) = \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3) dt \quad ; \quad P(0) = 0$$

Faccio il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - P(0)}{h} = P'(0)$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale garantisce che  $P'(0)$  è che coincide con l'integrandi calcolata per  $t=0$ , cioè con  $a_1(x_1, x_2, x_3)$ .

Ho dunque dimostrato che:

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_1, x_2, x_3)}$$

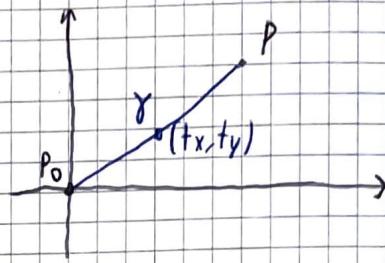
Dimostrato

### Esempio

$$\omega = d\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right) = 2xydx + (x^2 + y^2)dy$$

$$A = \mathbb{R}^2 \quad P_0(0,0) \quad P(x,y)$$

$$\gamma = (tx, ty) \quad t \in [0,1] \rightarrow T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\int \omega = \int_0^1 (2tx + y)x + ((tx)^2 + (ty)^2)y dt =$$

$$= \int_0^1 2t^2x^2y + t^2(x^2 + y^2)y dt =$$

$$= \left[ \frac{2}{3}t^3x^2y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3}x^2y + \frac{1}{3}(x^2 + y^2)y =$$

$$= x^2y + \frac{y^3}{3} \quad \text{è la funzione di partenza}$$

### Forme chiuse e forme esatte

Sia  $\omega$  una forma differenziale  $C^1$  in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n \quad \text{dove } x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Si dice che  $\omega$  è "chiusa" se:

$\forall i, j = 1 \dots n$  con  $i \neq j$  risulta:

$$\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \quad \forall x \in A$$

### Caso $n=2$

$$\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 \quad \text{ho:}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}$$

### Caso $n=3$

$$\omega = a_1(x)dx_1 + a_2(x)dx_2 + a_3(x)dx_3 \rightarrow \text{Prendo } i, j = 1, 2, 3, i \neq j$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = \frac{\partial a_1}{\partial x_3}$$

## Teorema

Sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  e  $w$  una forma differenziale  $C^1$  su  $A$ .

Se  $w$  è esatta, allora è chiusa.

Vale anche in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\forall n \geq 2$

## Dimostrazione

Se  $w$  è esatta, allora  $w = df$ , con  $f$  potenziale di  $w$ .

Scelgo  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$ .

$$w = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

Poiché  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  sono  $C^1$ , sono derivabili, e le loro derivate sono continue.

In particolare, esistono e sono continue:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \rightarrow \text{Per il teorema di Schwartz, queste sono uguali (sono } C^1\text{).}$$

$$\text{Allora } \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \quad \text{Dimostrato}$$

## Rotore di un campo - Ricorso

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(A)$ . Definisco "rotore di  $f$ "  $\text{rot}(\vec{F})$ :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} =$$

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = i \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) + j \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + k \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

## Teorema

Sia  $F \in C^1(A)$ .

Se  $F$  è conservativo, allora:

$$\text{rot}(F) = 0$$

e  $F$  si dice "irrotazionale".

Posso quindi chiedermi: se  $w$  è una forma chiusa, allora è esatta?

se  $F$  è un campo irrotazionale, allora è conservativo?

Risposta: No.

Esempio

$$w = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \quad \text{definita e } C^1 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}. w \text{ è chiusa.}$$

$$\text{Infatti: } \frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{\partial a_2}{\partial x} \quad (\text{Provare})$$

Mi chiedo se sia esatta o meno.

Punto  $(0,0)$

In tale punto la forma è esatta.

Punti  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\exists f$  definita in tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  t.c.  $w = df$ ? No.

Se scelgo  $\gamma$  circonferenza unitaria, ho sì  $\int w = 2\pi \neq 0$

Posso renderla esatta mediante un cambio di dominio.

Brendo  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \rightarrow$  Qui è esatta:

ad esempio se prendo  $f = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$  va bene. Infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

## Teorema

Se  $\omega$  è una forma differenziale definita e  $C^1$  in un insieme semplicemente连通的 A, con la forma differenziale chiusa, allora:

Esiste una primitiva di  $\omega$  definita in A.

Cio vale anche in  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

## Insieme semplicemente连通的

Un insieme si dice "semplicemente连通的" se, prendendo ogni curva chiusa di esso, posso deformarla con continuità fino a ridurla ad un punto, senza mai uscire dal sistema.

Mi concentro sulla definizione di connessione semplice.

LEZ. 04/11/2023  
PROF. BIANCHI

## 1a Definizione - Connessione semplice

Un aperto A si dice "semplicemente连通的" se è连通的, e inoltre ogni sua curva chiusa e interamente contenuta in A può essere ridotta mediante una deformazione continua a un unico punto senza mai uscire da A.

## Esempi ( $\mathbb{R}^2$ )

Sono semplicemente连通的 cerchi, ellissi, poligoni, semicirconi, il piano stesso, il piano privato di una retta.

Non sono semplicemente连通的 il piano, il cerchio, un ellisse o un poligono privato di un punto interno, una corona circolare, "un insieme che presenta un buco".

## Esempi ( $\mathbb{R}^3$ )

Sono semplicemente连通的 sfere, ellisoidi, poliedri convessi, una corona stereica, un semispazio, lo spazio privato di un numero finito di punti.

Non sono semplicemente连通的 il toro (ciambella), la sfera privata di un diametro, lo spazio privato di una retta.

In generale, tutti gli insiemi convessi e quelli stellati sono semplicemente连通的.

## Definizione - Insieme stellato

Un insieme  $A$  si dice "stellato" se  $\forall p \in A, \exists p_0 \in A$  f.c. il segmento di estremi  $p_0$  e  $p$  è contenuto in  $A$ .

## Omotopia tra curve

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve contenute in un aperto连通的  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ .

Supponiamo inoltre:

•  $\varphi_1: [a, b] \rightarrow A$  parametrizzazione di  $\gamma_1$ .

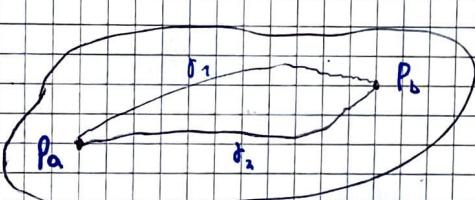
•  $\varphi_2: [a, b] \rightarrow A$  parametrizzazione di  $\gamma_2$ .

tali che  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$  e  $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$  (sono due curve con gli stessi estremi).

$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono "omotope in  $A$ " se esiste una funzione continua  $\varphi(t, \lambda)$  con  $t \in [a, b]$  e  $\lambda \in [0, 1]$  f.c.:

$$1) \quad \varphi(t, 0) = \varphi_1(t) \quad \varphi(t, 1) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$2) \quad \varphi(a, \lambda) = P_a \quad \varphi(b, \lambda) = P_b \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$



A

E infine  $\forall \lambda \in [0, 1]$  la curva  $\varphi_\lambda = \varphi(t, \lambda)$  sia contenuta in  $A$ .

In pratica, questa funzione mi permette di passare da una curva all'altra:

• Se  $\lambda = 0$  ho  $\gamma_1$

• Se  $\lambda = 1$  ho  $\gamma_2$

• Se  $0 < \lambda < 1$  ho una curva intermedia ma con gli stessi estremi.

## Ombinoria fra curve chiuse

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono curve chiuse, quindi si ha  $\varphi_1(a) = \varphi_1(b)$  e  $\varphi_2(a) = \varphi_2(b)$ , esse si dicono omootope in  $A$  se vale la condizione precedente con la condizione 2 sostituita da:

$$(2'): \varphi(a, 1) = \varphi(b, 1) \quad \forall a \in [0, 1]$$

## Insieme semplicemente连通 - Definizione

di  $\mathbb{R}^2$

Un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  o di  $\mathbb{R}^3$  si dice "semplicemente connesso" se è connesso e due curve qualsiasi contenute in  $A$  e aventi gli stessi estremi sono omotope.

La definizione può essere data con termine di "curve chiuse": un insieme di curve

chiuse: Un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  si dice "semplicemente connesso" se è connesso per ogni coppia di curve chiuse contenute in  $A$  (cioè omotope) una delle quali costante (cioè riduces ad un solo punto). E' ovviamente a curva costante (cioè che si riduce a un solo punto).

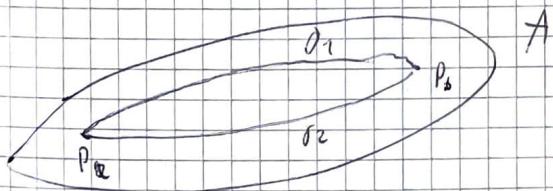
## Teorema

Sia  $w = a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy$  una forma differenziale  $C^1$  e chiusa in un insieme  $A \subset \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso. Allora:

(1) è esatta.

Vale un enunciato analogo in  $\mathbb{R}^3$ .

## Dimostrazione



Poiché  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope, voglio dimostrare che il loro lavoro è lo stesso.

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve in  $A$  che hanno gli stessi estremi. Poiché  $A$  è semplicemente connesso,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope.

$\exists \gamma(t, \lambda) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$  che soddisfa le proprietà elencate nella definizione di omotopia.

Definisco,  $\forall \lambda \in [0, 1]$  la funzione:

$$I(\lambda) = \int_a^b w = \int_a^b a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) dt$$

Voglio dimostrare che  $I$  non dipende da  $\lambda$  ( $I(0) = I(1)$ ).

Suppongo che  $y(t, \lambda)$  sia  $C^1([a, b] \times [0, 1])$ , e che le derivate seconde miste  $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}$  e  $\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}$  siano continue  $\rightarrow$  E' un'ipotesi semplificativa.

Derivo  $I(\lambda)$  rispetto a  $\lambda$  e provo che è zero.

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (I(\lambda)) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \int w$$

Per ipotesi, che in questo caso sono verificate, posso passare la derivata dentro l'integrale.

$$\frac{\partial I(\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right] dt.$$

Voglio dimostrare che l'ipotesi di  $w$  chiusa implica che:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (\dots) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (\dots) dt \quad (*)$$

Se  $(*)$  fosse vero, avrei:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (F(t)) dt = F(b) - F(a)$$

In realtà  $(*)$  è:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{d}{dt} (\dots) dt &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right] dt = \\ &= \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right]_{t=a}^{t=b} = 0 \end{aligned}$$

Per l'omotopia false curve. Dimostrato

Devo dimostrare  $\textcircled{1}$ :

$$\frac{d}{dt} \left[ \alpha_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + \alpha_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right] =$$

$\textcircled{1}$

$$= \frac{d}{dt} \left[ \alpha_1(t) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + \alpha_2(t) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right]$$

$\textcircled{2}$

Voglio dimostrare che  $\textcircled{1} = \textcircled{2}$ .

$$\frac{d}{dt}(\textcircled{1}) = \left[ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(t) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(t) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t) \right] \frac{\partial x}{\partial t}(t) + \alpha_1(t) \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}(t) + \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(t) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(t) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t) \right] \frac{\partial y}{\partial t}(t) + \alpha_2(t) \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\textcircled{2}) = \left[ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x}(t) \frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(t) \frac{\partial y}{\partial t}(t) \right] \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t) + \alpha_1(t) \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda}(t) + \left[ \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(t) \frac{\partial x}{\partial t}(t) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial y}(t) \frac{\partial y}{\partial t}(t) \right] \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t) + \alpha_2(t) \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \lambda}(t)$$

So inoltre che  $w$  è chiusa, cioè che  $\forall x, y \in A, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x}(x, y)$

Sfruttando questo fatto, si dimostra che i termini sono uguali.

Dimostrato