Appunti di Fluidodinamica

Tommaso Miliani

11-12-25

Energia ed informazione attraverso un fluido

1 Onde di compressione

Le onde sonore sono delle onde di compressione che diffondono l'informazione in un fluido. Per trattarle si ipotizza di trattare un sistema uniforme che dunque abbia le seguenti ipotesi:

- $p = p_0 = \text{const}$;
- $\rho = \rho_0 = \text{const}$;
- $\vec{u} = 0$.
- Gravità trascurabile per comodità.

Si considera dunque un certo elemento fluido ad una certa posizione $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ che si sposta da questa posizione per qualche motivo. Posso descrivere il suo spostamento tramite lo spostamento Lagrangiano $\vec{\zeta}(\vec{r}, t)$, il quale è una funzione di una coordinata: dato un punto diverso, si sposterà in modo diverso e dipenderà dal tempo. Evidentemente il cambiamento dell'elemento fluido definisce la velocità dell'elemento fluido, che si esprimerà come

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t}$$

Si può provare, dalle equazioni di Eulero e di continuità, a descrivere i moti di compressione

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = 0$$
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} p$$

Il termine nelle parentesi nella seconda è l'accelerazione nel sistema Euleriano; nell'ottica Lagrangiana è invece la derivata seconda rispetto al tempo di $\vec{\zeta}$, allora si può trasformare in:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} p$$

Si introduce ora un'altra ipotesi per la trattazione, ossia che le fluttuazioni siano molto piccole: dunque $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ e $p = p_0 \delta p$. L'ipotesi che si compie è che

$$\frac{|\delta\rho|}{\rho_0} << 1 \qquad \frac{|\delta p|}{p_0} << 1$$

Giustamente devo mettere il modulo poiché una variazione può essere anche negativa. Questa ipotesi, che prende il nome di **ipotesi di piccole perturbazioni**, mi permette di definire l'equazione Lagrnagiana di prima come

$$(\rho_0 - \delta\rho) \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}(p_0 - \delta p) = -\vec{\nabla} \delta p$$

Dato che il termine derivato è molto più piccolo della differenza $\rho_0 - \delta\rho$, è possibile ridurre l'equazione a

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \delta p$$

Suppongo adesso che esita una legge Barotropica per la quale si può legare la densità alla pressione, dunque vale che $p_0 = p(\rho_0)$ e $p = p(\rho)$. Si può anche esprimere $\delta p = p(\rho + \delta\rho) - p(\rho_0)$. Sviluppando in Taylor il primo termine in un intorno di ρ_0, è possibile dire che

$$\delta p = p(\rho_0) + \delta p \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + o(\delta\rho^2) - p(\rho_0)$$

Dunque nell'equazione di continuità:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \delta p$$

Posso togliere dal gradiente la quantità ρ_0 dunque

$$-\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 \vec{\nabla}\delta p$$

Dimensionalmente

$$\left[\frac{dp}{d\rho}\right] = \left[\frac{J}{m^3}\right] = \left[\frac{m}{s}\right]^2$$

Allora posso esprimere l'equazione di prima come

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -C_s^2 \vec{\nabla}\delta p$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} - \vec{\nabla}(\rho_0 - \delta\rho)\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = 0$$

Dato che il termine derivato è ancora una volta più piccolo del termine posso toglierlo e posso anche togliere

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + p_0 \vec{\nabla} + \frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} = 0$$

Derivando nuovamente rispetto al tempo, si ha

$$\frac{\partial^2}{\partial \delta\rho} - p_0 \vec{\nabla}\frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = 0$$

L'ultimo termine è uguale a

$$p_0 \vec{\nabla}\frac{\partial^2 \vec{\zeta}}{\partial t^2} = -C_s^2 \vec{\nabla}\vec{\nabla}\delta\rho \implies \boxed{\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - C_s^2 \nabla^2 \delta\rho = 0}$$

Dunque si suppone che tutte le quantità dipendano esclusivamente da una coordinata nell'ipotesi di onda piana:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - C_s^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} = 0$$

Questa equazione ha le seguenti soluzioni:

$$\delta\rho = f_{\pm}(x \mp C_s t)$$

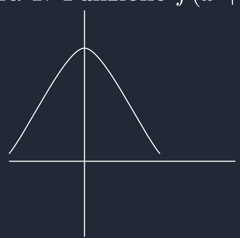
Ossia qualunque funzione esprimibile in questa forma è soluzione della differenziale, infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{df}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{d^2 f}{dz^2}$$

Inoltre, rispetto al tempo

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt}\frac{\partial t}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dt^2} C_s^2$$

Figura 1: Funzione $f(x \mp C_s t)$



Dunque qualunque funzione fatta in questa maniera è soluzione dell'equazione, qualunque essa sia. L'onda con $f(x+C_s t)$ è un onda che si sposta indietro, mentre l'altra si sposta in avanti. Le soluzioni sono dunque delle coppie di onde (o segnali) che si propagano in direzioni diverse: le onde di compressione dunque si muovono in avanti e indietro nel fluido per generare differenza di densità e dunque di pressione. QUesto non vuol dire che si debba necessariamente raggiungere la velocità di propagazione dell'onda nel mezzo, infatti quando si parla le corde vocali non vibrano alla velocità del suono ma la voce di propaga alla velocità del suono. Molto spesso le onde sono identificate dal vettore d'onda e dalla pulsazione. Si ha dunque il segnale che si identifica dal seno o dal coseno e si scrive

$$\delta\rho = \cos(kx \pm \omega t) \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Chiaramente esiste una relazione tra il vettore d'onda e la frequenza verificando o che questa equazione è soluzione della differenziale, oppure che

$$\delta\rho = \cos\left(k\left(x \pm \frac{\omega t}{k}\right)\right) \implies \frac{\omega}{k} = \pm C_s$$

Il rapporto ci da sempre la velocità di fase, ossia è una relazione di dispersione per un sistema di onde che non sono dispersive. Si può calcolare la velocità delle onde di compressione secondo la seguente

$$C_s^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0$$

Che cambia, ovviamente, dal tipo di fluido. Se volessi considerare la velocità del suono dovrei, innanzitutto, che il gas sia perfetto e descrivere cosa succede quando il fluido è compresso oppure decompresso. Si pul pensare che la compressione sia così veloce che gli elementi fluidi non riescono a scambiare calore con quelli adiacenti; si può dire allora che il processo è adiabatico ed utilizzare una legge barotropica.

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

Se $\gamma = 1$ si ha la situazione isoterma del fas perfetto:

$$C_s^2 = \gamma\frac{p_0}{\rho_0}$$

Dato che siamo in regime di gas perfetto, possiamo esprimere

$$p = \frac{R\rho T}{\mu} \qquad p_0 = \frac{R\rho_0 T}{\mu}$$

Dove μ è la massa molecolare media del gas considerato. Allora

$$C_s^2 = \gamma\frac{RT_0}{\mu}$$

Utilizzando il coefficiente di comprimibilità

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta p}{\xi} \approx \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\xi} \qquad \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

Allora,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\xi} \implies \frac{dp_0}{d\rho_0} = \frac{\xi}{\rho_0}$$

1.1 Geometria sferica a simmetria radiale

In questo caso dipende solo da r, dunque

$$\nabla^2\delta\rho = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d\delta\rho}{dr}$$

Derivando rispetto al tempo si ha

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} = \dots$$

Prendendo una funzione di appoggio ψ

$$\psi = r\delta\rho \qquad \frac{\partial\psi}{\partial r} = \delta\rho + r\frac{\partial\delta\rho}{\partial r} \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = r\frac{\partial\delta\rho}{\partial r} + r\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial r^2}$$

Sviluppando l'equazione di prima con questa funzione ausiliaria

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - C_s^2\frac{2}{r}\frac{\partial\delta\rho}{\partial r} - \frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - C_s^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = 0$$

Ossia si ottiene l'equazione d'onda tradizionale, dunque se si prende $\psi = f(r \pm C_s t)$, ψ mantiene la stessa ampiezza ma $\delta\rho$ diminuisce come $\frac{1}{r}$. Da questo si spiega come la lampadina diminuisce di intensità quando ci si allontana da essa.