

Teorema della divergenza e di Stokes in \mathbb{R}^2

LEZ. 27/11/25
PROF. BIANCHI

Questi teoremi sono casi particolari delle formule di Gauss - Green.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\int_a^b \frac{d f(x)}{dx} dx = f(b) - f(a)$$

È il teorema fondamentale del calcolo integrale \rightarrow l'insieme $[a, b]$ è semplicemente un intervallo \rightarrow questo teorema lega l'integrale di f su questo intervallo a qualcosa che dipende solo dagli estremi di tale intervallo.

Una relazione simile vale anche per le forme differenziali:

sia w una forma differenziale esatta t.c.

$$w = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

e sia γ una curva orientata, allora:

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(P_2) - f(P_1)$$

dove P_1 e P_2 sono gli estremi di γ \rightarrow Anche in questo caso, l'integrale dipende solo dagli estremi della curva monodimensionale.

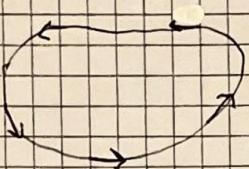
Cosa simile si ha con gli integrali doppi \rightarrow Esistono infatti relazioni t.c.:

sia $D \subset \mathbb{R}^2$ che soddisfa certe ipotesi, e sia ∂D la sua frontiera (orientata):

$$\int_D (\text{espressione che coinvolge } f) dx dy = \int_{\partial D} f$$

Iniziamo ora a specificare meglio.

Sia D un insieme limitato di \mathbb{R}^2 . Supponiamo che ∂D sia una curva semplice, chiusa e regolare a tratti:



Chiamiamo "orientazione positiva" di ∂D quella antioraria.

Osservo che, percorrendo ∂D nel verso positivo, l'insieme D mi rimane sempre sulla destra.

Lemme

Sia F un campo vettoriale piano:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, e sia $F \in C^1(\bar{D})$:

- Se D è y -semplice e ∂D è una curva regolare a tratti, allora:

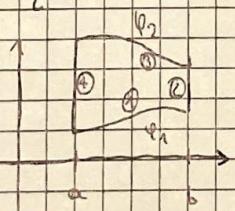
$$\textcircled{1} \quad \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \int_{\partial D} P(x, y) dx$$

- Se D è x -semplice e ∂D è una curva regolare a tratti, allora:

$$\textcircled{2} \quad \iint_D \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{\partial D} Q(x, y) dy$$

Dimostrazione

① $D = \{(x, y) : x \in [a, b], \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$ con ψ_1, ψ_2 regolari a tratti:



$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \iint_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ & = \int_a^b \left(P(x, \psi_2(x)) - P(x, \psi_1(x)) \right) dx \end{aligned}$$

Richiama $\cos' e'$ $\int_C g dx$ con $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ è orientata.

$$\int_C g dx = \int_a^b g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

$$\int_{\partial D} P dx = \int_{\textcircled{1}^+} + \int_{\textcircled{2}^+} + \int_{\textcircled{3}^+} + \int_{\textcircled{4}^+}$$

Li calcolo separatamente:

- $\int_{\textcircled{2}^+} P dx + \int_{\textcircled{4}^+} P dx = 0$ sono i tratti verticali ($\vec{\gamma} = 0$).

- $\int_{\textcircled{1}^+}$ parametrizo come: $\textcircled{1}^+ = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}_{t \in [a, b]} \Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}_{t \in [a, b]}$

$$\int_{\textcircled{1}^+} (P(x, y) dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) \cdot 1 \cdot dt$$

$$\int_{\textcircled{3}^+} P(x, y) dx = \int_b^a P(t, \varphi_2(t)) \cdot 1 \cdot dt = - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt \quad \text{parametrizo analogamente}$$

Ho ottenuto (invertendo il segno):

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_a^b (P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))) dx = - \int_{\textcircled{3}^+} P dx - \int_{\textcircled{1}^+} P dx = \int_{\partial D} P dx$$

Dimostro

Il lemma può però essere implementato:

Lemma Sia F un campo vettoriale piano.

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow$ supponiamo che $F \in C^1(\bar{D})$.

Suppongo che ∂D sia una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.
Se D è sia x -semplice che y -semplice, allora:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\partial D} \langle F, T \rangle ds$$

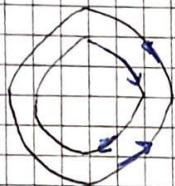
Stiamo supponendo che il dominio sia sia x -semplice che y -semplice \rightarrow In realtà
è un'ipotesi troppo forte.

Definizione - Insieme s-decomponibile

Dico che un insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ è "s-decomponibile" se esso è decomponibile in un numero finito di sottodomini D_1, D_2, \dots, D_K semplici rispetto ad entrambi gli assi, le cui frontiere sono curve semplici, chiuse e regolari a tratti.

Esempio La corona circolare è s-decomponibile.

Se D è s-decomponibile, come orientazione positiva si intende quella data dalle singole componenti di ∂D in modo che, percorrendole, si lasci il dominio sempre alla propria sinistra.



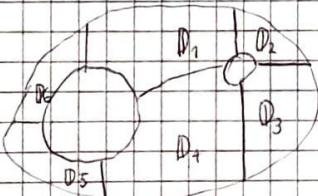
Teorema

Se D è s-decomponibile e $F \in C^1(\bar{D})$, allora vale la formula:

$$\iint_D \left(\frac{\partial a(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + a dy$$

Dimostrazione

Prendo un dominio complicato:



Applico la mia formula a ognuno dei "sottodomini":

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_{i=1}^K \iint_{D_i} \left(\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \sum_{i=1}^K \int_{\partial D_i} P dx + a dy = \int_{\partial D} P dx + a dy \end{aligned}$$

Ogni ~~interna~~ frontiera interna viene percorsa due volte \Rightarrow Siccome sono sempre in percorrenza antioraria, quei contributi avranno segno opposto e si annulleranno. Rimarranno solo le frontiere esterne: quelle esterne saranno percorse in verso anti-

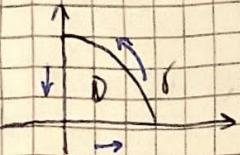
orario, mentre quelle interne in senso orario. Dimostrato

Esempio

Usare le formule di Gauss-Green per calcolare:

$$\oint_{\gamma} (x-y^3) dx + (y^3+x^3) dy$$

dove γ è la frontiera della circonferenza di centro nell'origine e raggio 1.



$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (x-y^3) dx + (y^3+x^3) dy &= \int_D \frac{\partial}{\partial x} (y^3+x^3) - \frac{\partial}{\partial y} (x-y^3) dx dy = \int_D 3x^2 + 3y^2 dx dy = \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r \cdot r^2 dr \end{aligned}$$

Teorema di Stokes nel piano

Supponiamo di avere un campo tridimensionale che ha però la terza componente nulla:

$$\vec{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y), 0)$$

Ne calcolo il rotore:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\begin{array}{ccc} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{array} \right) = k \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Se D è s-decomponibile e $F \in C^1(\bar{D})$, allora:

$$\iint_D \text{rot}(\vec{F}) dx dy = \int_{\partial D} \langle F, T \rangle ds$$

Nel caso di tre variabili prendo la componente del rotore normale al piano. Il teorema dice che tale integrale (il flusso del campo rispetto a quell'area) è uguale al lavoro lungo la frontiera.

Teorema della divergenza nel piano

Sia D s-decomponibile, Sia $\vec{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y)) \in C^1(D)$, allora:

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle dS$$

dove in ogni punto di ∂D \vec{N} indica il versore normale a ∂D , orientato in modo da puntare all'esterno.

Divergenza

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad \text{nel caso di tre variabili.}$$

Il versore \vec{N} giace sul piano, ed è sempre normale a ∂D .

In realtà sto ancora riscrivendo le formule di Gauss - Green, in fatti:

$$\iint_D \operatorname{div}(\vec{F}) = \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy$$

Definisco $P \in A$ in modo che $\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$, ciò è definito:
 $a = F_1$ e $P = -F_2$. Ottengo:

$$\iint_D \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\partial D} P dx + a dy = \int_{\partial D} -F_2 dx + F_1 dy$$

Se $(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t))$ è una parametrizzazione coerente con l'orientazione di ∂D , allora:

$$\begin{aligned}
 & \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_a^b -F_2(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) + F_1(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) dt = \\
 & = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_1(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \\ F_2(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\
 & = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} F_1(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \\ F_2(\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t)) \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = \\
 & = \int_D \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle dS
 \end{aligned}$$

Formule di Gauss - Green per calcolo delle aree

Si possono usare le formule di Gauss - Green per calcolo delle aree;

Scelgo $A = 0$ e $P = Y \rightarrow$ ottengo:

$$\iint_D 0 - 1 dx dy = \int_{\partial D} Y dx \quad o \text{ anche:}$$

$$\text{Area } D = - \int_{\partial D} Y dx$$

In modo analogo:

$$\text{Area } D = \int_{\partial D} X dy \quad o \text{ anche:}$$

$$\text{Area } D = \frac{1}{2} \int_{\partial D} X dy - Y dx$$

Superfici parametriche regolari

LEZ. 2/11/2025
PROF. BLANCHINI

Esempio

Grafico di una funzione:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$$

Esempio

Possono anche essere in forma implicita:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 2)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$$

Definizione

Sia A un aperto connesso di \mathbb{R}^2 . Sia $D = \bar{A}$. Sia $\vec{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(u, v) \mapsto \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

Suppongo $\vec{r} \in C^1(A)$, $r|_A$ è invertibile, $\forall (u, v) \in A$ la matrice Jacobiana $D\vec{r}(u, v)$ ha $\text{rk} = 2$ (rango massimo).

$$D\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{P}_u & \vec{P}_v \end{pmatrix} = J\vec{r}(u, v)$$

Allora \vec{r} è una superficie parametrica regolare

Osservazione

$\text{rk}(\overrightarrow{J_f}) = 2 \Leftrightarrow \vec{r}_u, \vec{r}_v$ sono linearmente indipendenti

Posto studiarlo con il **prodotto vettoriale** → Infatti per vedere se $\text{rk}(\overrightarrow{J_f}) = 2$ basta osservare che:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0 \quad \forall (u, v) \in A$$

con:

$$\vec{r}_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} \quad \vec{r}_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}$$

Esempi

Scriviamo alcuni insiemini noti in forma parametrica:

Grafico di $f: D \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix} \quad (u, v) \in D$$

Sfera

Scrivo una sfera di centro $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ e raggio R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

$$r(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x_0 + R \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y_0 + R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z_0 + R \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi], \varphi \in [0, \pi]$$

Elicoide

Parte dall'elica cilindrica:

$$\vec{r}(u) = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ Ku \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R}, \text{ oppure} \\ \vec{r}(u) = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ Ku \end{pmatrix} \quad u \in [0, \pi]$$

L'elicoide Ψ_E sarà ottenuto collegando ogni punto di \vec{r} con l'asse $z \rightarrow$ Tale segmento è sempre parallelo al piano XY .

Considero il segmento da \vec{r}_E a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ku \end{pmatrix}$, cioè da $\begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ Ku \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ku \end{pmatrix}$ $\forall u \in I$

Eso sarà:

$$\begin{pmatrix} v(R \cos(u)) \\ v(R \sin(u)) \\ (1-v)Ku + vKu \end{pmatrix} \quad v \in [0, 1] \\ = \vec{r}_E$$

Ottengo:

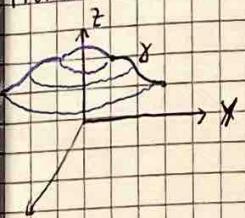
$$\psi_E(u, v) = \begin{pmatrix} Rv \cos(u) \\ Rv \sin(u) \\ ku \end{pmatrix} \quad u \in I, v \in [0, 1]$$

Si può osservare che l'elioide è regolare verificando le ipotesi precedenti.

Su per fici di rotazione

Parliamo di superfici di rotazione generate da una curva γ piana (giacente su un piano coordinato) che ruota attorno ad un asse coordinato (per semplicità).

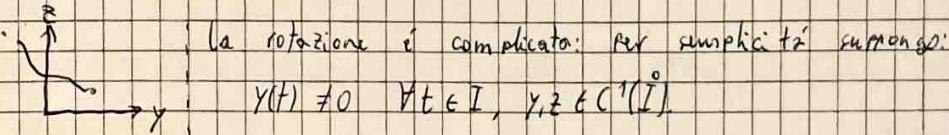
Prendo γ sul piano XY ($X=0$), e ruota attorno all'asse z :



Ho:

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + t \mathbf{e}_I$$

Ma così potrei avere dei problemi di "sfioramento" di γ oltre z , nel senso



Nel caso possiamo comunque spezzare $\gamma(t)$ in due curve.

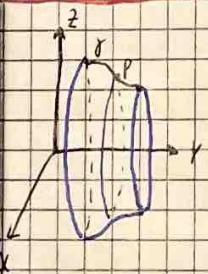
Osservo che P descrive una circonferenza parallela al piano XY , di centro $(0, 0, z_p)$ e raggio y_p .

Possiamo parametrizzarla:

$$\vec{\psi}_\gamma(t, \theta) = \begin{pmatrix} y_p \sin(\theta) \\ y_p \cos(\theta) \\ z_p \end{pmatrix} \quad t \in I, \theta \in [0, 2\pi]$$

Così ho che per $\theta=0$ sono in γ se avessi invertito $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ non sarebbe successo. Se il mio intento è fare un giro completo questo non è un problema, ma se la mia rotazione è meno di un giro potrei avere problemi (in tal caso posso sostituire su I intervalli).

Su per fici di rotazione



Stavolta prendo γ sul piano YZ , e ruota intorno all'asse x :

$P(t) = (0, y(t), z(t))$ compie una circonferenza parallela al piano XZ : con $C = (0, y_p, 0)$ e $R = |z_p|$:

$$\vec{\psi}_\beta(t, \theta) = \begin{pmatrix} z(t) \sin(\theta) \\ y(t) \\ z(t) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi], t \in I$$

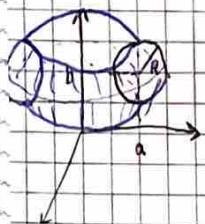
Definizioni - Meridiani e paralleli

- Le curve con θ fissato sono dette **meridiani**.
- Le curve con t_0 fissato sono dette **paralleli**.

Toro

La forma della ciambella la posso ottenere con la rotazione di una circonferenza attorno ad un asse. Prendo la rotazione di una circonferenza parallela al piano yz intorno all'asse x :

$$\begin{cases} x=0 \\ (y-a)^2 + (z-b)^2 = R^2 \end{cases}$$



Parametrizzo:

$$\tilde{\gamma}(t, \theta) = \begin{pmatrix} (a + R \cos(t)) \cos(\theta) \\ (a + R \cos(t)) \sin(\theta) \\ b + R \sin(t) \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

Parametrizzazioni non regolari

Prendo una superficie:

$$\tilde{\gamma}(u, v) = \begin{pmatrix} u^3 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Scrivo le derivate:

$$\tilde{\gamma}_u(u, v) = (3u^2, 0, 0)$$

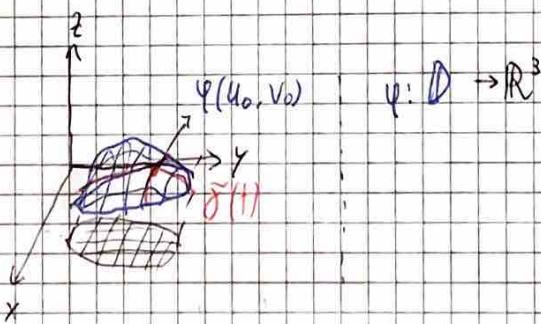
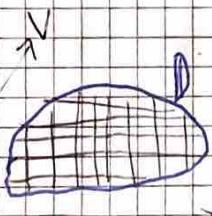
$$\tilde{\gamma}_v(u, v) = (0, 1, 0)$$

$$\tilde{\gamma}_u \times \tilde{\gamma}_v = (0, 0, 3u^2) \quad \text{per } (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Piano tangente e vettore normale

LEZ 3/12/2023
PROF. BIANCHI

Ho un dominio su $\mathbb{R}^2 \rightarrow$ c'è una mappa che definisce un sostegno in \mathbb{R}^3 che chiamo "superficie".



Grazie alle linee parallele agli assi u e v posso definire delle curve coordinate sulla superficie in \mathbb{R}^3 .

Prendo $\tilde{\gamma}(t)$, una delle linee coordinate, e lo derivo:

$$\tilde{\gamma}'(t) = \varphi(\gamma(t))$$

$$\tilde{\gamma}'(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(u_0 + t, v_0)|_{t=0} \quad \text{ma ho:}$$

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) \right)$$

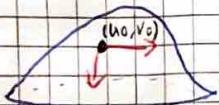
sto calcolando la derivata parziale rispetto a t (che appare solo sommata a U), e la calceremo in $t=0$, quindi avrò:

$$\vec{\gamma}(t) = \psi(U_0 + t, V_0)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{\gamma}}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \psi(U_0 + t, V_0) = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial U}(U_0 + t, V_0) \cdot \frac{d}{dt}(U_0 + t)^{\textcircled{1}} + \frac{\partial \psi}{\partial V}(U_0 + t, V_0) \cdot \frac{d}{dt} V_0 = \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial U}(U_0 + t, V_0)\end{aligned}$$

$$(\vec{\gamma}(t))_{|t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial U}(U_0 + t, V_0) \Big|_{t=0} = \frac{\partial \psi}{\partial U}(U_0, V_0)$$

Posso ripetere un ragionamento analogo per la curva coordinata parallela a $V \rightarrow 0t$ -engo in altro vettore \rightarrow Questi due vettori sono i vettori tangenti alla superficie nel punto (U_0, V_0) .



Questi due vettori generano uno spazio tangente alla superficie \rightarrow Poiché ho supposto che la matrice Jacobiana abbia rango massimo, questi vettori:

- Non possono essere paralleli.
- Non possono essere entrambi nulli.

Supponiamo ora di prendere una curva γ qualunque passante da $(U_0, V_0) \rightarrow$ Il suo vettore tangente

$$\dot{\vec{\gamma}}(0) = \frac{\partial \psi}{\partial U}(U_0, V_0) \cdot \frac{\partial U}{\partial t}(0) + \frac{\partial \psi}{\partial V}(U_0, V_0) \cdot \frac{\partial V}{\partial t}(0)$$

è combinazione lineare dei vettori che generano il piano tangente, e dunque giace sul piano stesso \rightarrow Tutti i vettori tangenti nel punto (U_0, V_0) giacciono sul piano tangente.

Vettore normale

Voglio trovare un vettore normale alla superficie \rightarrow Posso fare il prodotto vettoriale fra i vettori tangenti. Per semplicità chiamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial U} \equiv \psi_U$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial V} \equiv \psi_V$$

Prendo $(\varphi_u \wedge \varphi_v)(U_0, V_0)$, che è normale alla superficie, e lo normalizzo per ottenerne un versore:

$$\vec{N} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

Poiché, il vettore appartiene a quel piano, devo avere:

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 0$$

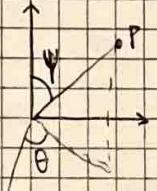
e dunque, posso scrivere anche il piano tangente:

$$\langle (x, y, z) - \varphi(U_0, V_0), (\varphi_u \wedge \varphi_v)(U_0, V_0) \rangle = 0 = 0$$

$$\langle [x - x(U_0, V_0)], [y - y(U_0, V_0)], [z - z(U_0, V_0)] \rangle (\varphi_u \wedge \varphi_v)(U_0, V_0) = 0$$

Esempio - Sfera

Parametrizza la sfera di centro $(0, 0, 0)$ e raggio R



$$\psi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi(\psi, \theta) = \begin{pmatrix} R \sin(\psi) \cos(\theta) \\ R \sin(\psi) \sin(\theta) \\ R \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \psi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

Scrivo il vettore normale:

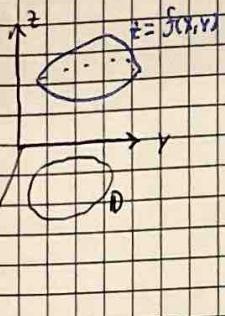
$$\varphi_\psi = (R \cos(\psi) \cos(\theta), -R \cos(\psi) \sin(\theta), -R \sin(\psi))$$

$$\varphi_\theta = (R \sin(\psi) \sin(\theta), R \sin(\psi) \cos(\theta), 0)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\psi \wedge \varphi_\theta &= \sin(\psi) (R^2 \sin(\psi) \cos(\theta), R^2 \sin(\psi) \sin(\theta), R^2 \cos(\psi)) = \\ &= \sin(\psi) \cdot R \cdot \varphi(\psi, \theta) \end{aligned}$$

$$N = \frac{\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\|} = \frac{R \sin(\psi) \cdot \varphi(\psi, \theta)}{R \sin(\psi) \|\varphi(\psi, \theta)\|} = \frac{\varphi(\psi, \theta)}{R}$$

Esempio - Grafico di funzione



$$\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\psi(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$\psi_x(x, y) = (1, 0, f_x)$$

$$\psi_y(x, y) = (0, 1, f_y)$$

Scrivo il vettore normale:

$$\begin{pmatrix} \psi_x & \psi_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{pmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\|\psi_x \wedge \psi_y\| = \sqrt{(-f_x)^2 + (-f_y)^2 + 1} = \sqrt{\|\nabla f\|^2 + 1}$$

$$N = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}$$

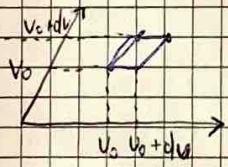
Scrivo l'equazione del piano tangente al grafico in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\langle (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)), (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \rangle = 0$$

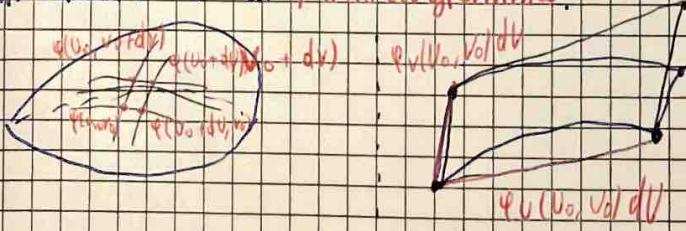
$$(x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) = z$$

Integrali di superficie

Prendo un punto sul piano $U \times V$, e incremento entrambe le sue coordinate, ottenendo un parallelepipedo



Passo alla superficie in $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ Ho un parallelogramma curvo, che posso comunque approssimare ad un parallelogramma



Posso comunque dire che:

$$\varphi(U_0 + dU, V_0) - \varphi(U_0, V_0) \approx$$

$$\approx \varphi_U(U_0, V_0) dU + o(dU) \quad \text{stessa cosa per } \varphi_V.$$

L'area della superficie sarà quindi:

$$\| \varphi_U(U_0, V_0) \wedge \varphi_V(U_0, V_0) \| dU dV \quad \text{per il quadrato singolo}$$

quindi:

$$\text{Area}(S) = \iint_D \| \varphi_U \wedge \varphi_V \| dU dV$$

Integrale superficiale

Si dice "integrale superficiale" l'integrale di una funzione su una superficie.

Sia $f(x,y,z)$ una funzione definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 che contiene S . Chiamo l'integrale superficiale di f su S :

$$\iint_S f \, d\sigma = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \| \varphi_u \wedge \varphi_v \| \, du \, dv$$

f è una funzione di tre variabili che sulla superficie è definita \rightarrow L'intento che ho è sempre lo stesso: prendo un punto della superficie e moltiplico il suo valore per l'area del pezzetto infinitesimo della superficie.

Esempio

Sia S il paraboloido grafico di $\frac{x^2+y^2}{2}$ con $(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 8\} = D$

Voglio trovarne l'area.

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1 + \| \nabla f(x,y) \|^2}$$

$$\text{Area}(S) = \iint_D \| \varphi_x \wedge \varphi_y \| \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{1 + \| \nabla f(x,y) \|^2} \, dx \, dy$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \| \nabla f(x,y) \| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint_D \sqrt{1 + \| \nabla f(x,y) \|^2} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} \, dx \, dy = \quad \text{passo in polare: } x^2+y^2 \leq 8 \rightarrow \rho \in [0, \sqrt{8}], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{8}} \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} \rho \sqrt{1+\rho^2} \, d\rho = \quad \text{Pongo } 1+t^2 = t \rightarrow 2\rho \, d\rho = dt \quad t_f = 1+8 = 9 \\ t_i = 1$$

$$= \pi \int_1^9 \sqrt{t} \, dt = \quad \int \sqrt{t} \, dt = \int t^{\frac{1}{2}} \, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C$$

$$= \pi \left[\frac{2}{3} \sqrt{t^3} + C \right]_1^9 \approx \frac{52}{3} \pi$$

Questo tipo di integrali ha interessanti applicazioni fisiche che riguardano le superfici.

Applicazioni Fisiche

Massa di una superficie

Sia δ la densità superficiale di massa. Allora:

$$M = \int_S \delta \, d\sigma$$

Barycentro di una superficie

Va calcolato separatamente per le varie coordinate:

$$x_b = \frac{1}{A} \int_S x \, d\sigma \quad \text{con } A \text{ area della superficie}$$

Relazioni simili valgono per y_b e z_b .

Centro di massa di una superficie

Va calcolato separatamente per le varie coordinate:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \int_S x \, \delta(x, y, z) \, d\sigma$$

Relazioni simili valgono per y_{cm} e z_{cm}

Esempio

Sia δ la calotta superiore di una sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio R con densità di massa superficiale $\delta = x^2 + y^2$. → Calcolare la massa.

$$M = \int_S \delta \, d\sigma$$

Parametrizza la calotta in polari: $D = \{(\psi, \theta) : \psi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi]\}$

$$\varphi(\psi, \theta) = \begin{pmatrix} R \cos(\theta) \sin(\psi) \\ R \sin(\theta) \sin(\psi) \\ R \cos(\psi) \end{pmatrix} \quad \psi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Nei miei casi ho $\|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\| = R^2 \sin(\psi)$

$$M = \iint_D \delta[x(\psi, \theta), y(\psi, \theta), z(\psi, \theta)] \|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\| \delta \psi \delta \theta =$$

$$= \iint_D R^2 \sin^2(\psi) R^2 \sin(\psi) \, d\psi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^3(\psi) \, d\psi = \dots = \frac{4}{3} \pi R^4$$

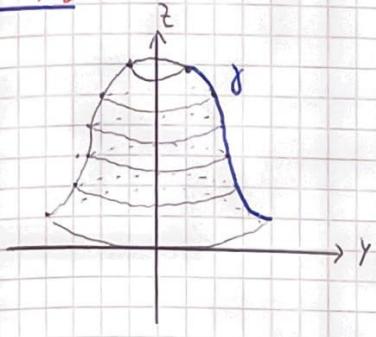
Voglio anche il centro di massa:

- $x_b = y_b = 0$ per la simmetria di S

• (calcolo z_b)

$$\begin{aligned} z_b &= \frac{1}{M} \int_S z \, S(x, y, z) \, d\sigma = \\ &= \frac{3}{4\pi R^4} \iint_D R \cos(\psi) \cdot R^3 \sin^2(\psi) \cdot R^2 \sin(\psi) \, d\psi \, d\theta = \\ &= \frac{3R}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \cos(\psi) \sin^3(\psi) \, d\psi = \frac{3}{8} R \end{aligned}$$

Superficie di rotazione ottenuta ruotando attorno all'asse z una curva contenuta nel piano yz



Prendo $y > 0$
 γ contenuta nel yz
la parametrizzazione di γ è:
 $\gamma(t): [a, b] \rightarrow (y(t), z(t))$

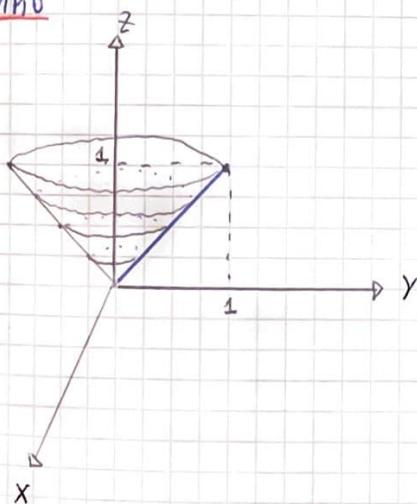
Scrivo la superficie:

$$S: \psi(t, \theta) = (Y(t) \cos(\theta), Y(t) \sin(\theta), z(t))$$

$$\mathbb{D} = \{(t, \theta): t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$$\|\psi_t \wedge \psi_\theta\| = Y(t) \cdot \sqrt{\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2}$$

Esempio



$$\gamma(t): [0, 1] \rightarrow (t, t)$$

Voglio calcolare l'area:

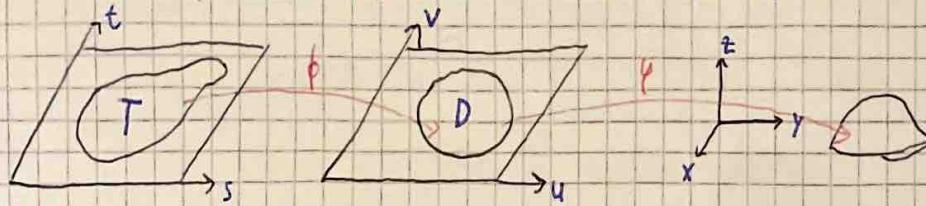
$$\text{Area}(S) = \iint_D \|\psi_t \wedge \psi_\theta\| \, dt \, d\theta$$

$$\|\psi_t \wedge \psi_\theta\| = t \sqrt{1+1} = \sqrt{2} t$$

$$A = \iint_D \sqrt{2} t \, dt \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{2} t \, dt = \sqrt{2} \pi$$

Cambiando parametrizzazione i concetti definiti fino a qui non cambiano.



Sia $\phi: T \rightarrow D$.

Su T faccio le stesse ipotesi che ho usato per i cambi di variabile negli integrali doppii.

Suppongo inoltre:

- ϕ è biunivoca da T a D.
- ϕ è di classe C^1 .
- Il determinante della Jacobiana di ϕ è diverso da zero.

Ho che $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, infatti $(s, t) \xrightarrow{\phi} (u, v)$

$$\phi(s, t) = (U(s, t), V(s, t))$$

Studio ora la composizione di ψ e $\phi \rightarrow$ Definisco $\Psi := \psi \circ \phi$

$$\Psi(s, t) = [x(U(s, t), V(s, t)), y(\quad), z(\quad)]$$

Scrivo le derivate:

$$\begin{aligned}\Psi_s(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \Psi(s, t) = \\ &= \Psi_u(U(s, t), V(s, t)) \cdot \frac{\partial U}{\partial s}(s, t) + \Psi_v(U(s, t), V(s, t)) \frac{\partial V}{\partial s}(s, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_t(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi(s, t) = \\ &= \Psi_u(U(s, t), V(s, t)) \cdot \frac{\partial U}{\partial t}(s, t) + \Psi_v(U(s, t), V(s, t)) \cdot \frac{\partial V}{\partial t}(s, t)\end{aligned}$$

Vado a farne il prodotto vettoriale \rightarrow Voglio capire che relazione c'è tra:

$$\Psi_s \wedge \Psi_t \text{ e } \Psi_u \wedge \Psi_v$$

$$\begin{aligned}
 & (\varphi_u u_s + \varphi_v v_s) \wedge (\varphi_u u_t + \varphi_v v_t) = \\
 & = \cancel{u_s u_t} (\varphi_u \wedge \varphi_v) + \cancel{u_s v_t} (\varphi_u \wedge \varphi_v) + \cancel{v_s u_t} (\varphi_v \wedge \varphi_u) + \cancel{v_s v_t} (\varphi_v \wedge \varphi_v) = \\
 & = (\varphi_u \wedge \varphi_v) (u_s v_t - v_s u_t) = \\
 & = (\varphi_u \wedge \varphi_v) \cdot \det \begin{pmatrix} u_s & v_s \\ u_t & v_t \end{pmatrix} = \\
 & := (\varphi_u \wedge \varphi_v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}
 \end{aligned}$$

Ho scoperto che $(\psi_s \wedge \psi_t)$ è un multiplo di $(\varphi_u \wedge \varphi_v) \rightarrow$ studio i moduli di questi vettori:

$$\psi_s \wedge \psi_t = \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} (\varphi_u \wedge \varphi_v)$$

$$\|\psi_s \wedge \psi_t\| = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$$

$$N_\psi = \frac{\psi_s \wedge \psi_t}{\|\psi_s \wedge \psi_t\|} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|} \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = \frac{\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|} \cdot N_\varphi$$

Il termine $\textcircled{*}$ è un numero fratto il suo stesso modulo $\rightarrow 0 \text{ e } 1 \text{ o } e^{-1}$, quindi al massimo ho in cambio di segno.

Dimostrò ora che gli integrali non dipendono dalla parametrizzazione:

$$\int_S f \, d\sigma \stackrel{u=s, v=t}{=} \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u, v)\| \, du \, dv$$

Cambio variabili e passo a ϕ :

$$= \iint_T f(x(u(s, t), v(s, t)), y(s, t), z(s, t)) \cdot \|(\varphi_u \wedge \varphi_v)(u(s, t), v(s, t))\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| \, ds \, dt =$$

$$= \iint_T f(x(u(s, t), v(s, t)), y(s, t), z(s, t)) \cdot \|(\psi_s \wedge \psi_t)(s, t)\| \, ds \, dt = \int_S f \, ds \quad \text{Dimostrato}$$

Orientazione di una superficie e bordo

Abbiamo precedentemente dimostrato che il versore normale \vec{N} può avere due orientazioni distinte \rightarrow Se posso scegliere di prendere un insieme continuo di vettori normali tali che puntino o tutti verso l'esterno o tutti verso l'interno dico che la superficie è orientabile.

Esistono ovviamente superfici che non sono orientabili \rightarrow Voglio dare una definizione più formale.

Definizione - Superficie orientabile

Sia S una superficie, e supponiamo che si possa scegliere il versore normale in ogni punto di S in modo che, partendo da un punto $P_0 \in S$ e seguendo una qualsiasi curva continua chiusa (che dunque torna in P_0) contenuta in S , il versore normale vari con continuità e ritorni alla posizione iniziale.
In tal caso dico che S è orientabile.

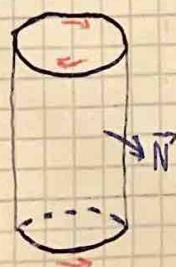
Bordo di una superficie

Supponiamo di avere una calotta sferica \rightarrow Il suo bordo sarà la circonferenza di base:



Fisso un'orientazione della superficie orientabile $S \rightarrow$ Si determinano così due "lati" di S , che chiamerò "lato positivo" e "lato negativo". Chiamo "positivo" il lato verso cui punta la normale.

Dico che S (il bordo) è "orientato positivamente" se, percorrendo S mantenendosi sul lato positivo si lasciano i punti di S alla sinistra.



Superfici senza bordo

Sono esempi di superfici senza bordo:

• Sfera \rightarrow È anche chiusa.

• Toro \rightarrow È anche chiusa.

• Paraboloidi \rightarrow Non è chiusa.

CEZ. 9/12/25
PROF. BIANCHI

Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes e il teorema della divergenza hanno a che fare con il flusso dei campi.

Definizione - flusso

Parlo di "flusso di un campo attraverso una superficie".

Sia \vec{F} definito in un intorno di una superficie orientabile S , e sia \vec{N} una scelta del vettore normale a $S \rightarrow$ Definisco il flusso di \vec{F} attraverso S :

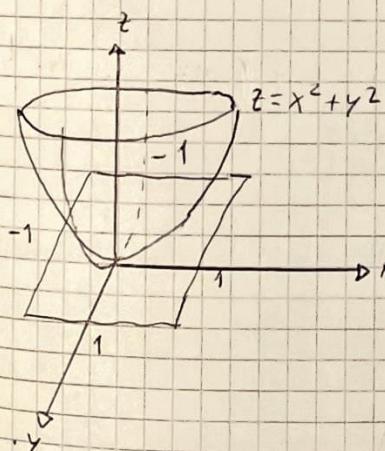
$$\int_S \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma$$

Se $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di S , l'integrale diventa:

$$\iint_D \left\langle F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right\rangle \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv =$$

$$= \iint_D \langle F[x(u, v), y(u, v), z(u, v)], \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle du dv$$

Esempio



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

$$S: (x, y) \in D \rightarrow (x, y, x^2 + y^2)$$

Scelgo \vec{N} la normale che punta verso l'alto.

Note su S è il grafico di una funzione $f(x, y)$, ho:

$$\vec{N} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)}{\sqrt{1 + \| \nabla f \|^2}} \rightarrow \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + \| \nabla f \|^2}$$

In questo esempio ho $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Scrivo \vec{N} :

$$\vec{N} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \rightarrow \|4x\wedge 4y\| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

Scelgo il campo $\vec{F}(x, y, z) = (z, 0, x^2)$

Calcolo il suo flusso attraverso S :

$$\begin{aligned}\int_S \langle \vec{F}(x, y, f(x, y)), \vec{N} \rangle d\sigma &= \\ &= \iint_D \left\langle (x^2 + y^2, 0, x^2), \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \right\rangle \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy = \\ &= \iint_D \langle (x^2 + y^2, 0, x^2), (-2x, -2y, 1) \rangle dx dy = \\ &= \iint_D -2x(x^2 + y^2) + 0 + x^2 dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 -2x^3 - 2x y^2 + x^2 dx = \dots = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Teorema di Stokes

Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 , orientabile, avente campo normale unitario \vec{N} , il cui bordo consiste di un numero finito di curve chiuse con orientazione ereditata dall'orientazione di S .

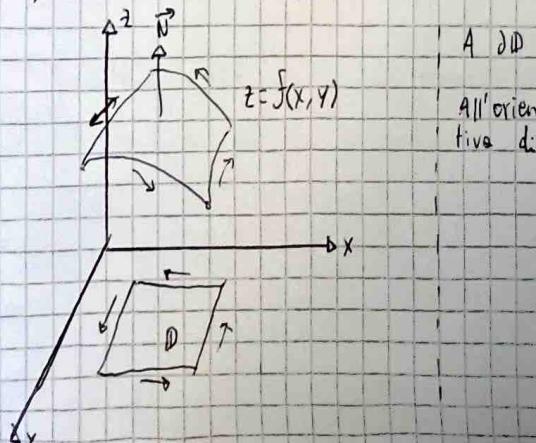
Sia \vec{F} un campo vettoriale definito su un insieme aperto contenente S e C^2 , e sia \vec{T} un versore tangente a $\partial^+ S$, orientato in modo concorde al verso positivo di $\partial^+ S$. Allora:

$$\int_S \langle \text{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds$$

Lo dimostriamo solo nel caso particolare in cui S è grafico di una funzione $z = f(x, y)$ con $(x, y) \in D$.

Dimostrazione

Supponiamo, come nell'esempio di prima, che \vec{N} punti verso l'alto.



A ∂D corrisponde ∂S .

All'orientazione positiva di ∂D corrisponde l'orientazione positiva di ∂S .

scrivo i due integrali per dimostrarne l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} \int_S \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_D \left\langle \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right), \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\rangle dx dy = \\ &= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial F_2}{\partial z}() \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}() - \frac{\partial F_3}{\partial x}() \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}() - \frac{\partial F_1}{\partial z}() \right) \right] dx dy \end{aligned}$$

$$\int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds$$

Supponiamo per semplicità che $\partial^+ D$ consista di una sola curva \rightarrow sia $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$ una parametrizzazione di D coerente con l'orientazione positiva.

Allora una parametrizzazione di $\partial^+ S$ è $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ con $t \in [a, b] \rightarrow$ posso scrivere l'integrale.

$$\int_{\partial^+ S} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds = \int_a^b \left\langle \vec{F}[x(t), y(t), f(x(t), y(t))], \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) \right\rangle dt =$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \left[\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{x}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right]$$

$$= \int_a^b \left[F_1(x, y, f(x, y)) \cdot \dot{x}(t) + F_2(x, y, f(x, y)) \cdot \dot{y}(t) + F_3(x, y, f(x, y)) \cdot \left[\dot{x}(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + \dot{y}(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right] \right] dt =$$

Raccolgo $\dot{x}(t)$ e $\dot{y}(t)$:

$$= \int_a^b \left[F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \dot{x}(t) + \left[F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \dot{y}(t) dt =$$

Passo dall'integrale sul bordo della superficie nello spazio all'integrale sul bordo del dominio nel piano:

$$= \int_{\partial^+ D} \left[F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] dx + \left[F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dy$$

Applico le formule di Gauss-Green:

$$= \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left[F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] dx dy =$$

Derivo:

$$\textcircled{A} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \left[\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + F_3 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \right)$$

$$\textcircled{B} = - \left[\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} + \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{\partial f}{\partial x} + F_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right]$$

Ottengo:

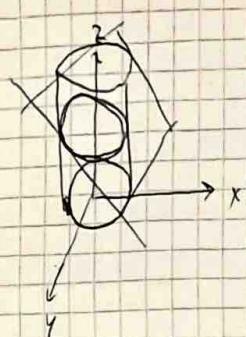
$$= \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \left[\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} \left[\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] dx dy$$

Raccogliendo un segno meno osservo che questi due integrali sono uguali. Dimostrato

Esempio

Calcolare $\int_{\delta^+} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds$ con $\vec{F}(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$

e γ^+ è la curva intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e del piano $z = 3 - 2x - 2y$:



L'intersezione tra questi due oggetti è un cilindro.

Voglio utilizzare il teorema di Stokes:

δ^+ è il bordo della superficie $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow (x, y, 3 - 2x - 2y)$.

Sceglio su S l'orientazione in modo che δ^+ sia orientata positivamente (S orientata t.c. il bordo di S sia orientato positivamente) $\rightarrow \vec{N}$ deve puntare verso l'alto.

$$\int_{\delta^+} \langle \vec{F}, \vec{T} \rangle ds = \int_S \langle \text{rot}(\vec{F}), \vec{N} \rangle d\sigma =$$

$$\cdot \text{rot}(\vec{F}) = (0, 0, 3(x^2 + y^2))$$

$$\cdot N = \frac{(-2, -2, 1)}{\|(-2, -2, 1)\|}$$

$$= \int_{\{(x^2 + y^2) \leq 1\}} 3(x^2 + y^2) dx dy = \dots = \frac{3}{2} \pi$$

Teorema della divergenza

Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato la cui frontiera è una superficie regolare o regolare a tratti, chiusa e orientabile.

Sia, in ogni punto di ∂D , il versore normale orientato in modo da puntare verso l'esterno di D .

Sia \vec{F} un campo definito e C^1 su un intorno di D . Allora:

$$\int_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma$$

Il teorema della divergenza ci permette di trasformare un integrale triplo di volume ad un integrale superficiale sul bordo di tale volume.

In maniera simile, il teorema di Stokes permette di trasformare un integrale doppio in un integrale curvilineo sul bordo di tale regione del piano.

In maniera simile, il teorema fondamentale del calcolo integrale permette di trasformare un integrale nella valutazione della primitiva sugli estremi dell'intervallo di integrazione.

Del teorema della divergenza non vediamo la dimostrazione.

Il teorema della divergenza si applica a insiemi come sfere, semi-sfere o sfere cave con spessore.

Il teorema della divergenza non si applica invece a insiemi come una sfera senza un punto interno.

Esempio

$$\vec{F} = \left(1 - (x^2 + y^2)^3, 2(1 - (x^2 + y^2)^3), x^2 z^2\right)$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

Osservo che questo insieme è un cilindro di raggio 1 e altezza 1.

Voglio calcolare: $\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz$

1) Lo calcolo direttamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - (x^2 + y^2)^3\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2(1 - (x^2 + y^2)^3)\right) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z^2) = \\ &= -6x(x^2 + y^2)^2 - 12y(x^2 + y^2)^2 + 2x^2 z^2 \end{aligned}$$

Passo in coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \rightarrow dx dy dz = \rho d\rho d\theta dz$$

Scrivo \mathbb{D}' :

$$\mathbb{D}' = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\iiint_{\mathbb{D}} (\quad) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 dz \left(-6\rho \cos(\theta) r^4 - 12\rho \sin(\theta) r^4 + 2(\rho \cos(\theta))^2 z \right) = \dots = \frac{\pi}{4}$$

② Calcolo l'integrale usando il teorema della divergenza:

$$\iiint_{\mathbb{D}} \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \int_{\partial \mathbb{D}} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma$$

Parametrizzo $\partial^* \mathbb{D} \rightarrow L_0$ dividendo in 3 parti:

• BASE: $\vec{N} = (0, 0, -1) \rightarrow$ sono sull'asse $z=0$:

$$\iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \int_{\partial B} \langle (1+(x^2+y^2)^3, 2(x^2+y^2)^3, 0), (0, 0, -1) \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} 0 dx dy = 0$$

• COPERTHIO: $\vec{N} = (0, 0, 1) \rightarrow$ sono sul piano $z=1$

$$\iiint_C \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \int_{\partial C} \langle (1+(x^2+y^2)^3, 2(1-(x^2+y^2)^3), x^2), (0, 0, 1) \rangle d\sigma = \int_0^{2\pi} x^2 d\theta = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} x^2 dx dy$$

Passo in coordinate polari:

$$= \iint_{\partial \mathbb{B}'} \rho^3 \cos^2(\theta) d\rho d\theta = \text{con } \mathbb{B}' = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = \dots = \frac{\pi}{4}$$

• SUP. LATERALE: sono i punti in cui $x^2+y^2 \equiv 1$; il campo \vec{F} diventa:

$$\vec{F} = (0, 0, x^2 z)$$

$\vec{N} = (N_x, N_y, 0) \rightarrow$ Non mi interessa calcolare N_x e N_y , tanto ho:

$$\langle \vec{F}, \vec{N} \rangle = 0$$

$$\iiint_{\partial \mathbb{B}} \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = 0$$

Se generalizzo il metodo usato in questo esempio, posso scrivere il teorema della divergenza come:

$$\iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ho semplicemente separato le componenti} \\ \text{Ho semplicemente separato le componenti} \end{array} \right.$$

$$= \int_D F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 d\sigma$$

Dunque, se f è una funzione scalare definita e C^1 in un intorno di D , allora

$$\cdot \iiint_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_1 d\sigma$$

$$\cdot \iiint_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_2 d\sigma$$

$$\cdot \iiint_D \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_3 d\sigma$$

Questi sono semplicemente modi più rotti ma più pratici per riscrivere il teorema della divergenza.

Come si può aggirare la presenza di un punto interno a D in cui il campo non è definito o non è C^1 ? → Faccio un esempio.

Esempio

Prendo il campo gravitazionale (è famoso):

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}$$

Osservazione Si può osservare che $\operatorname{div}(\vec{F}) = 0 \leftrightarrow$ Basta calcolarla.

Voglio calcolare $\int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma$

Il campo non ha nessuna regolarità → Nell'origine è discontinuo, e il modulo tende all'infinito allontanandosi dall'origine.

TRUCCO: Prendo una piccola palla di raggio ϵ e centrata nell'origine, e la sovrappongo a $D \Rightarrow$ Il mio nuovo dominio $D - B_\epsilon$ è regolare, e posso applicare il teorema della divergenza.

$$\int_{D - B_\epsilon} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma = \iiint_{D - B_\epsilon} \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz = 0$$

Posso dire:

$$\int_{(D - B_\epsilon)} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma = \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma + \int_{\partial B_\epsilon} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma = 0$$

$$\text{Calcolo } \int_{\partial B_\epsilon} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma = -4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma - 4\pi = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} \langle \vec{F}, \vec{N} \rangle d\sigma = 4\pi \quad \checkmark$$

