Appunti analisi 2

Tommaso Miliani

18-09-25

1 Equazioni omogenee

Queste equazioni possono essere riscritte attraverso una opportuna funzione per essere risolte:

$$y' = b\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ossia posso trasformare la differenziale come funzione di $\frac{y}{x} = t$, quindi cambio varibile nel seguente modo:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = xz(x) \implies y'(x) = z + xz'$$

Adesso posso risolvere in funzione di z:

$$b(z) = z + xz' \implies z' = \frac{b(z) - z}{x}$$

Coni passaggi all'indietro ottengo nuovamente $y(x) = xz(x)$.

Esempio 1.1.

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

Se io definisco $f(x, y)$ questo oggetto è facile vedere che è omogenea. Posso ora mettere in evidenza la x sopra e dunque ottenere

$$\frac{x^3(1 + \frac{y^3}{x^3})}{x^3(\frac{y^2}{x^2})} = b\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ossia si ottiene una funzione in rapporto tra y e x, allora posso dire che

$$b(t) = \frac{1 + t^3}{t^2}$$

Allora, data la definizione di z' si ottiene

$$z' = \frac{\frac{1+z^3}{z^2} - z}{x} \implies z' = \frac{1}{z^2}\frac{1}{x}$$

Allora per separazione di variabili possiamo trovare la soluzione come

$$\int z^2 dz = \int \frac{dx}{x}$$

2 Esistenza locale ed esistenza globale

Esempio 2.1.

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Essendo questo un problema di Cauchy, possiamo allora risolverlo con i metodi che conosciamo; tuttavia si osserva anche che, essendo $f(x, y)$ continua, allora anche la differenziale è continua e quindi siamo nelle *ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Esiste allora una sola soluzione per questa equazione e si trova con separazione di variabili*

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2x \; dx$$
$$-\frac{1}{y} = -x^2 + c \implies c = 1$$

La soluzione è la seguente, con $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

I teoremi di esistenza locale mi dicono che è possibile trovare delle soluzioni negli intorni di x_0 in quanto sono interessato solo alle soluzioni vicine a questo intorno. Nei teoremi di esistenza globale invece io considero l'intero insieme di esistenza della funzione trovando delle soluzioni globali.

Teorema 2.1 (Teorema di esistenza globale)**.**
Consideriamo il problema di Cauchy del primo ordine

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. *$f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sono continue e definite $\forall x \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$;*

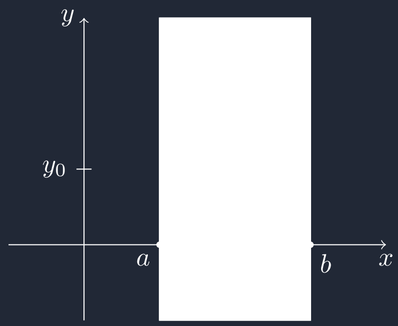
2. *Esistano due valori positivi $h, k \in \mathbb{R}$ per cui risulta:*

$$|f(x, y)| \leq h + k|y| \qquad \forall x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$$

Allora la soluzione è unica e definita su tutto $[a, b]$.

Dimostrazione. Non fatta in classe (si farà? boooh) $\square$

Figura 1: Teorema di esistenza globale



3 Sistemi di equazioni differenziali

Un sistema di equazioni differenziali è un sistema i cui membri sono vettori di funzioni:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

La soluzione del sistema è allora un vettore di funzioni (chiamata anche **funzione vettoriale**):

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \; x \in I, \; I \subset \mathbb{R}:$$
$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{cases}$$

Allora posso chiamare il vettore

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Tale che $Y'(x)$ contenga tutte le derivate, allora posso chiamare il vettore funzione come $F(x, Y) = Y'$, allora posso dire che i sistemi di equazioni differenziali sono tutti risolvibili allo stesso modo. Se si avesse invece delle condizioni per tutte le derivate fino alla $n-1$ esima, allora saremmo in presenza di un sistema di equazioni differenziali di Cauchy. Questo vuol dire che la sua soluzione, tenuto conto delle considerazioni fatte fino ad ora

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 3.1 (Teorema 1)**.**
Sia $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}^n$,una funzione continua e sia (x_0, y_0) un punto interno a D, allora il problema di Cauchy (sistema di equazioni differenziali) ha almeno una soluzione definita in un intorno di x_0.

Teorema 3.2 (Teorema 2)**.**
Nelle ipotesi del teorema precedete supponiamo che

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Siano continue in D , allora il problema di Cauchy con sistema di equazioni differenziali ha una sola soluzione definita nell'intorno di x_0.

Teorema 3.3 (Teorema 3)**.**
Supponiamo che $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ sia definita per ogni $i = 1, \dots, n$, $\forall x \in [a, b]$ e $\forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ si suppone anche che f_i e la derivata parziale rispetto ad ogni f_i rispetto a y_j siano continue $\forall y \in [a, b], y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Si suppone anche che $\exists h, k > 0$ tali per cui risulti

$$||F(x, Y)|| \leq h + k||Y|| \tag{1}$$

Con $||Y||$ si indica la norma e ogni soluzione dell'equazione $Y' = F(x, Y)$ è definita su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Esempio 3.1 (Esempio fondamentale)**.**
In un sistema di equazioni differenziali di ordine n, tale per cui

$$y_1(x) \equiv y(x) \qquad y_2(x) \equiv y'(x) \qquad y'' = 3xy + 7y'(\star)$$
$$\heartsuit$$
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 3xy_1 + 7y_2(\star\star) \end{cases}$$

Se y risolve $\star$ allora y_1, y_2 definite da $\heartsuit$ risolve $\star\star$ viceversa se (y_1, y_2) risolvono $\star\star$ allora la funzione y_1 ha ordine $\star$.

4 Equazioni differenziali omogenee lineari del primo ordine

Definizione 4.1 (Equazioni differenziali omogenee lineari)**.**
Si chiamano equazioni differenziali lineari equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a(x)_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a(x)y = f(x) \tag{2}$$

Se $f(x)$ è zero, allora prendono il nome di ***omogenee****, altrimenti* ***complete****. Queste equazioni si chiamano lineari perché hanno la caratteristica che riprendono le funzioni lineari negli spazi vettoriali.*

$$y' = a(x)y = f(x)$$

Posso utilizzare la risoluzione vista prima per cui posso eseguire un cambio di variabile opportuno in modo tale da renderla omogenea

$$z' + a(x)z = 0$$

Se z_1 e z_2 sono soluzioni dell'omogenea, allora anche $\alpha z_1(x) + \beta z_2(x)$ sono soluzioni. Posso dimostrarlo nel seguente modo:

$$(\alpha z_1(x) + \beta z_2(x))' + a(x)(\alpha z_1(x) + \beta z_2(x)) = 0$$
$$\alpha(z_1' + a(x)z_1) + \beta(z_2' + a(x)z_2) = 0$$

Dato che z_1 e z_2 sono soluzioni, allora è verificata.
Posso ora verificare che esistono soluzioni per l'equazione generica $z' + a(x)z = 0$. Sia $A(x)$ una primitiva finita senza le costanti di $a(x)$ e quindi $A'(x) = a(x)$. Posso eseguire allora la seguente trasformazione:

$$e^{A(x)}z' + a(x)e^{A(x)}z = 0 = (e^{A(x)}z)'$$
$$e^{A(x)}z = c \qquad c \in \mathbb{R} \qquad z = ce^{-A(x)}$$

Esiste un modo più veloce per poter trovare le soluzioni, questo è dato dalla seguente formulazione

$$y'e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y = f(x)e^{A(x)}$$
$$(ye^{A(x)})' = f(x)e^{A(x)}$$

Se considero $F(x)$ come primitiva del prodotto a destra, allora si ottiene che

$$ye^{A(x)} = F(x) + c$$

$$y = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}F(x) \tag{3}$$

Si può anche utilizzare un secondo metodo per risolvere le equazioni e si chiama **metodo della variazione delle costanti**. Penso che c ora sia una funzione e non più una costante, allora dato che devo considerare una soluzione generale, allora devo considerare c come funzione. Posso ottenere la derivata

$$y' = C'e^{-A(x)} - Ce^{-A(x)}a$$
$$y' + a(x)y = f \implies C' = f(x)e^{A(x)}$$

Se C ha questa espressione, ossia la primitiva di C', allora $C = F(x) + d, d \in \mathbb{R}$, le soluzioni sono allora

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} \implies y(x) = (F(x) + d)e^{-A(x)}$$

Esempio 4.1 (Prima formula)**.**

$$y' + \frac{y}{x} = -\sin x \qquad \begin{cases} a(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = -\sin x \\ A(x) = \int a(x) \implies \ln|x| \end{cases}$$
$$F(x) = \int f(x)e^A \, dx = \int -\sin xe^{A(x)} \, dx = \int -\sin xe^{\ln|x|} \, dx = \begin{cases} x > 0 : \sin x - x\cos x \\ x < 0 : -\sin x + x\cos x \end{cases}$$

Allora si ottiene dalla formula di risoluzione veloce:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(\sin x - x\cos x) & x > 0 \\ Ce^{-\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(-\sin x + x\cos x) & x < 0 \end{cases}$$

Si ottengono allora due due soluzioni distinte a seconda di come si svolge il valore assoluto.

5 Spazi di funzioni

Definizione 5.1 (Spazi di funzioni)**.**
Sia I un intervallo su di $\mathbb{R}$, allora definisco lo spazio delle funzioni di da $I \to \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale che contiene le funzioni con le seguenti proprietà:

1. *$\alpha f(x) + \beta g(x)$ appartiene allo spazio;*
2. *$f(x) \equiv 0$.*

All'interno di questo spazio vivono anche gli spazi:

- *$C^0(I)$, ossia l'insieme dello spazio delle funzioni continue su $I \to \mathbb{R}$;*
- *$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni continue derivabili in ogni punto la cui derivata è una funzione continua e $\forall x \in I$.*
- $\vdots$

- $C^{(n)}$ *è l'insieme delle derivate* n *esime continue.*

Si possono ora risolvere le equazioni differenziali omogenee lineari di ordine n-esimo considerando la generica funzione

$$y = C^{(n)}(I)$$

Posso definire l'operatore $E(y) : C^{(n)}(I) \to C^{(0)}(I)$ come l'operatore che trasforma le derivate n-esime continue in primitive e posso esprimerla (se le soluzioni sono y_1 e y_2)

$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2)$$

Teorema 5.1.
1. *L'insieme* V_0 *delle soluzioni delle equazioni differenziali omogenee lineari è uno spazio vettoriale di dimensione* n*;*
2. *L'insieme delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari è l'insieme* $\{y(x) + y_f(x) : y \in V_0\}$ *con* y_f *soluzione delle equazioni differenziali lineari.*