Analisi II - Integrali di superficie

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Foglio n.1

1. Calcolare l'area della superficie:

$$\vec{r}(\mu,\nu) = \begin{pmatrix} \mu \ \cos(\nu) \\ \mu \ \sin(\nu) \\ \mu^2 \end{pmatrix}_{(\mu,\nu)\in[0,1]\times[0,\pi)}$$

2. Calcolare il flusso del campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy \\ xy \\ z \end{pmatrix} \text{ attraverso } \Sigma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{array} \right\}$$

3. Calcolare l'area della superficie elicoidale che si avvolge di un giro.

4. Calcolare:

$$\iint_\Sigma \frac{z + y^2}{\sqrt{1 + 4\left(x^2 + y^2\right)}} \, d\sigma$$

dove Σ è parte della superficie $z = x^2 - y^2$ che si proietta in:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + 4y^2 \leq 4 \end{array} \right\}$$

5. Calcolare l'area della porzione di cilindro:

$$y^2 + z^2 = a^2$$

interna al cilindro:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

*esercizi della prof.ssa *Chiara Bianchini*

6. Una massa M è distribuita uniformemente sul tronco di cono:

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ 1 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

   (a) Trovare la densità superficiale ρ.

   (b) Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z.

7. Una carica elettrica è distribuita uniformemente sulla superficie sferica:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

   Calcolare il potenziale elettrostatico da essa generato fuori e dentro la sfera, in un punto $P(0, 0, z)$ sull'asse z.
   Suggerimento: Il potenziale elettrostatico in P è:

$$U(0, 0, z) = -k \iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{r}$$

   con:

   - k è costante
   - Σ è una superficie sferica
   - ρ è la densità di carica uniforme
   - r è la distanza di un punto da P

8. Determinare il momento di inerzia di una lamina omogenea di densità costante δ e superficie Σ rispetto alla retta intersezione dei piani $y = 1$ e $z = 0$.

$$\Sigma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} x^2 + y^2 = 1 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{array} \right\}$$

9. Calcolare il flusso del campo:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   attraverso Σ descritta dalle seguenti relazioni:

$$\vec{r}(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \mu^2 \\ \sqrt{2}\,\mu\nu \\ \nu^2 \end{pmatrix} \text{ con } (\mu, \nu) \in \mathbb{T}$$

$$\mathbb{T} = \left\{ \begin{array}{c} 1 \leq \mu^2 + \nu^2 < 2 \\ \mu < \nu \end{array} \right\}$$

10. Calcolare il lavoro del campo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

lungo la circonferenza γ intersezione tra la superficie sferica $x^2+y^2+z^2 = 1$ e il piano $z = y$.
Suggerimento: Sia

$$\gamma_t = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sin(t)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

γ è $\partial\Sigma$ dove Σ è l'intersezione tra la sfera e il piano.
Per il teorema di Stokes posso dire:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{E},\gamma} = \int_\gamma \vec{F} \cdot ds = \int_{\partial^+\Sigma} \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds$$

11. Calcolare il momento di inerzia della superficie Σ attorno all'asse z, dove Σ è data dall'intersezione tra il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e i piani $z = 0$ e $z = 1 + x$, comprese le basi superiore e inferiore.

12. Calcolare il flusso del campo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

attraverso la sfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

13. La temperatura di una sfera metallica è proporzionale al quadrato della distanza dal centro del corpo.
Trovare il flusso della quantità di calore che attraversa una sfera S di raggio a, centrata nel centro della sfera metallica.

14. Calcolare il lavoro del campo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

lungo la curva γ data dall'intersezione del piano $z = y$ con il paraboloide $z = x^2 + y^2$

2 Foglio n.2

1. Calcolare $A(\partial\mathbb{E})$, dove $\mathbb{E}$ è l'intersezione tra due palle di raggio 2 i cui centri sono posti a distanza 3.

2. Sia $\gamma : [1,2] \to \mathbb{R}^3$ t.c.:
$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$$
di sostegno Γ.
Sia Σ l'insieme dei segmenti che congiungono i punti di Γ con le loro proiezioni sul piano $z = 0$.
   (a) Provare che Σ è una superficie regolare.
   (b) Calcolare $A(\Sigma)$.

3. Calcolare:
$$\iint_\Sigma g(x,y,z)\ d\sigma \text{ su } \Sigma = \begin{Bmatrix} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{Bmatrix}$$
con:
$$g(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{1+4z}}$$

4. Sia:
$$\mathbb{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 \leq 2z \leq 4 + x + y \end{matrix} \right\}$$
e sia $\Sigma \equiv \partial\mathbb{E}$.
Calcolare:
$$\iint_\Sigma xyz\ d\sigma$$

5. Sia $\mathbb{E}$ l'intersezione di un cono circolare retto pieno di apertura $\frac{\pi}{3}$ e di una palla centrata nel vertice del cono e avente raggio $\frac{3}{2}$.
Calcolare l'area di $\partial\mathbb{E}$.

6. Sia:
$$\vec{\gamma} : \begin{cases} x = \rho(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$
con $t \in \mathbb{I}$, una curva nel piano $y = 0$.
Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando γ attorno all'asse z.

7. Svolgere l'esercizio (6) nel caso in cui la curva è grafico di una funzione nella forma $x = f(z)$

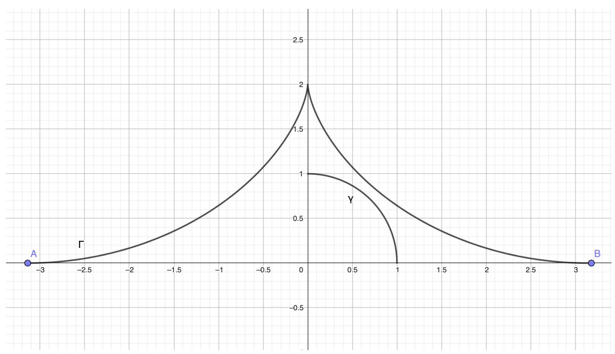
8. Calcolare l'area della superficie di un toro.

9. Sia $\mathbb{F}$ la porzione di superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ interna al cilindro:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \; y^2 = \frac{1}{4}$$

   Calcolare l'area di $\mathbb{F}$

10. Calcolare l'area della superficie $\Sigma : \; z = y$ che si proietta sull'insieme $\mathbb{T}$, dove:



$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}_{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \qquad \text{e} \qquad \vec{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 + \cos(t) \end{pmatrix}_{t \in [-\pi, \pi]}$$

11. Calcolare l'area del paraboloide tronco descritto dalle equazioni:

$$z = x^2 + y^2$$

$$0 \leq z \leq 1$$

12. Sia $\mathbb{P}$ un paraboloide pieno di equazione $z \geq x^2 + y^2$.
    Sia $\mathbb{B}$ una palla di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
    Sia $\mathbb{E} = \mathbb{P} \cap \mathbb{B}$.
    Sia $\Sigma \equiv \partial \mathbb{E}$.
    Calcolare il baricentro di Σ

13. Sia Σ una superficie in $\mathbb{R}^3$ t.c.:

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x = y^2\right\}$$

Calcolare l'area della porzione di Σ contenuta all'interno dell'insieme $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \leq z \leq 4 - y^2\right\}$$

14. Calcolare l'area di $\partial\mathbb{E}$ dove:

$$\mathbb{E} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \begin{array}{c} 4x^2 + y^2 + z^2 \geq y + 1 \\ 0 \leq y \leq 2 - 2\sqrt{4x^2 + z^2} \end{array}\right\}$$

15. Sia:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ -(2x + y) \\ z \end{pmatrix}$$

il vettore densità di flusso di un fluido.
Sia:

$$\mathbb{S} = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Calcolare la massa di fluido passante attraverso $\mathbb{S}$ nell'unità di tempo, nel verso di $\underline{\text{n}}$ normale esterna.

16. Un guscio sferico omogeneo è tagliato da un cono circolare retto il cui vertice è il centro della sfera, e l'angolo al vertice del cono è α, con $0 < \alpha < \pi$.
Determinare, in funzione di (R, α), il centro di massa del guscio che si trova dentro il cono