Meccanica Analitica

Gariboldi Alessandro

1 24/02/26

1.1 Introduzione al corso

Organizzazione d'esame:

- ci sono i parziali (uno a metà corso e uno alla fine) di cui uno recuperabile
- c'è un totale al posto dei compitini
- c'è un orale al quale si entra con la media aritmetica dei parziali (possono esserci esercizi ma chiaramente piu torico)
- appunti liberi all'esame

Materiale del corso:

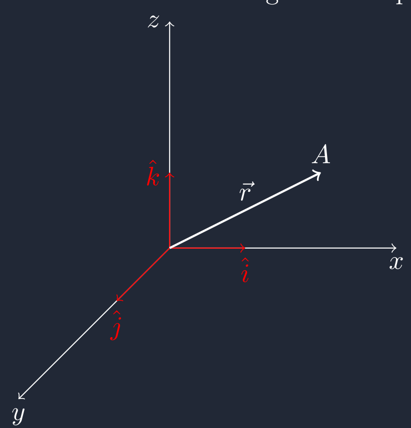
- Libri consigliato: fasano, marmi meccanica analitica, sennò anche goldstein o barletti, frosali meccanica razionale.
- ovviamente moodle con dispense varie
- Per eserciziario barletto ricci mecc. raz. esercizi o anche lo spiegel.

Generale introduzione al corso:
Storicamente è un corso che nasce da matematici, in cui ci si interessa alla formalizzazione matematica del moto di sistemi meccanici complessi, ad esempio un braccio meccanico, per questo si chiama meccanica razionale, ovvero abbiamo un sistema meccanico e lo studiamo con strumenti matematici.
Ora si preferisce il termine analitico per via dei modelli che si usano recentemente.
Il corso si struttura principalmente in due parti:

- meccanica lagrangiana
- meccanica hamiltoniana

1.2 Notazioni varie e richiami di fisica 1

Prendiamo un vettore generico si può esprimere in diversi modi:



Il vettore che stiamo considerando può essere rappresentato in diversi modi:

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = B - A$$

Nell'ultimo modo B è un punto di riferimento, ad esempio l'origine, e A è il punto che stiamo considerando.
Ricordiamo la norma di un vettore che è:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si ricorda anche il prodotto scalare e i versori in generale.
Una proprietà che ci interessa del prodotto scalare è la simmetria:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

E la linearità:

$$\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \vec{w} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \beta \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$$

Il prodotto vettoriale invece si ricorda essere:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Con $\vec{w}$ che è un vettore perpendicolare a $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e con una norma che è:

$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin(\vec{v} \angle \vec{u})$$

Questo invece gode della proprietà di antisimmetria:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$
$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{w}) + \beta(\vec{v} \wedge \vec{w})$$

Definiamo una terna ortonormale:

$$\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k} \text{è una terna ortonormale se:} \widehat{i} \wedge \widehat{j} = \widehat{k} = -\widehat{j} \wedge \widehat{i}$$
$$\widehat{j} \wedge \widehat{k} = \widehat{i} = -\widehat{k} \wedge \widehat{j}$$
$$\widehat{k} \wedge \widehat{i} = \widehat{j} = -\widehat{i} \wedge \widehat{k}$$

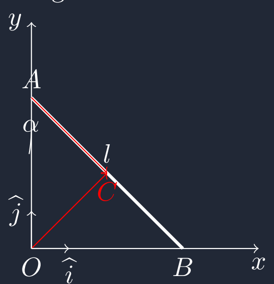
Vediamo il prodotto vettoriale tra due vettori generici:

$$\vec{u} = u_x\widehat{i} + u_y\widehat{j} + u_z\widehat{k}$$
$$\vec{v} = v_x\widehat{i} + v_y\widehat{j} + v_z\widehat{k}$$
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_x\widehat{i} + u_y\widehat{j} + u_z\widehat{k}) \wedge (v_x\widehat{i} + v_y\widehat{j} + v_z\widehat{k})$$
$$= (u_x\widehat{i} \wedge v_x\widehat{i}) + (u_x\widehat{i} \wedge v_y\widehat{j}) + (u_x\widehat{i} \wedge v_z\widehat{k}) + (u_y\widehat{j} \wedge v_x\widehat{i}) + (u_y\widehat{j} \wedge v_y\widehat{j}) + (u_y\widehat{j} \wedge v_z\widehat{k}) + (u_z\widehat{k} \wedge v_x\widehat{i}) +$$
$$(u_z\widehat{k} \wedge v_y\widehat{j}) + (u_z\widehat{k} \wedge v_z\widehat{k})$$
$$= 0 + u_x v_y(\widehat{i} \wedge \widehat{j}) + u_x v_z(\widehat{i} \wedge \widehat{k}) + u_y v_x(\widehat{j} \wedge \widehat{i}) + 0 + u_y v_z(\widehat{j} \wedge k) + u_z v_x(\widehat{k} \wedge i) + u_z v_y(\widehat{k} \wedge j) + 0$$
$$= u_x v_y(\widehat{k}) - u_x v_z(\widehat{j}) - u_y v_x(\widehat{k}) + u_y v_z(\widehat{i}) - u_z v_x(\widehat{j}) - u_z v_y(\widehat{i})$$

Ora definiamo la somma vettoriale:

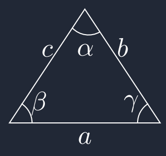
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x)\widehat{i} + (u_y + v_y)\widehat{j} + (u_z + v_z)\widehat{k}$$

Esempio 1.1.
Vediamo ora un esercizio in cui abbiamo un'asta di lunghezza l che ha i suoi estremi uno sull'asse x e uno sull'asse y, e vogliamo calcolare il centro dell'asta.



$$(C - O) = (A - O) + (C - A)$$
$$(A - O) = \widehat{j} l \cos(\alpha)$$
$$(C - A) = \widehat{i} l \sin(\alpha)$$

Teorema 1.1 (dei seni)**.**



Da un qualsiasi triangolo del tipo:
Si ha che:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Teorema 1.2 (di Carnot)**.**

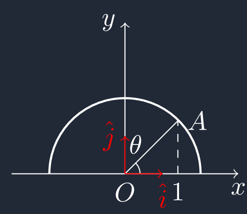
$$|a|^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2|b||c|\cos(\alpha)$$

Proposizione 1.1 (Derivazione funzione composta)**.**

$$\begin{gathered} f(x) : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \\ x = x(y) : V \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \subseteq V \qquad h(y) \doteq f(x(y)) \\ \frac{dh}{dy} = \frac{df}{dx}\,|_{x(y)} \cdot \frac{dx}{dy} \end{gathered}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} h(y)dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y))dy = \int_{x(y_1)}^{x(y_2)} f(x)(\frac{dy}{dx})dx$$

Esempio 1.2.



Prendiamo una semicirconferenza centrata nell'origine e esprimiamola come una curva:

$$\begin{gathered} \vec{r} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \qquad 0 < \theta < \pi \\ \vec{r} = t\hat{i} + \sqrt{1-t^2}\hat{j} \qquad -1 < t < 1 \end{gathered}$$

Proposizione 1.2.
Due parametrizzazioni $r_1(t_1)$ e $r_2(t_2)$ sono equivalenti se:
∃ una relazione biunivoca: $t_2(t_1) \quad U_1 \to U_2$
t.c. $r_2(t_2(t_1)) = r_1(t_1)$

Proposizione 1.3.
Una relazione generica è invertibile se è biunivoca:

$$\begin{gathered} t_2 = t_2(t_1) \qquad U_1 \to U_2 \\ y = f(x) \to \frac{df}{dx} \lessgtr 0 \end{gathered}$$

allora la mia rel. è invertibile