

Analisi II - Massimi e minimi

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Massimi e minimi locali

Trovare i punti di punti di massimo e minimo locale delle funzioni sottostanti, nei relativi insiemi

1. $f(x, y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - \frac{x^2}{y}$
in $D = \{(x, y) : |x| \leq 5, |y| \leq 5\}$
2. $f(x, y) = \frac{(3y-x^2-y^2)(2y^2-9y+12)}{3-y}$
nel cerchio aperto di centro $(0, \frac{3}{2})$ e raggio $\frac{3}{2}$
3. $f(x, y) = 12x^3 + 4x^2y - 5xy^2 - 2y^3 + 4x^2 + y^2 + 4xy$
in \mathbb{R}^2
4. $f(x, y) = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - xy$
in $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
5. $f(x, y) = (r-5)^5(r-1)e^{-3x^2+4y}$
con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in \mathbb{R}^2
6. $f(x, y) = \ln(r^2 + \sqrt{1+r^4}) + x + y$
con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ in \mathbb{R}^2
7. $f(x, y) = (1-x^2)(1-y^2)(1-x^2-y^2)$
in \mathbb{R}^2

*esercizi dei prof *Gabriele Bianchi, Chiara Bianchini e Luca Bisconti*

8. $f(x, y) = -3x^3 + 6x^2y + 2y^3 - 3x - 6y$
in \mathbb{R}^2

9. $f(x, y) = (1 + |x|)(1 + 6x)^2(1 - |x| - |y|)$
nel quadrato di vertici $(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$

10.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{1+y^2}(16x^2y^2 + 16y^4 + 2x^2 - 19y^2 + 3) & \text{se } |y| \leq 1, (x, y) \in \mathbb{D} \\ f(0, \pm 1) = 5 & \text{in } \mathbb{D} = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \end{cases}$$

11. $f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{481}{250}y$
in \mathbb{R}^2

Determinare se esiste un minimo di f ristretta al quadrante $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, e
in caso affermativo calcolarlo

12. Sia T il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, e $f(x, y)$ la distanza di (x, y) dal complementare di T .

Calcolare il massimo di f in \mathbb{R}^2

13. Tra tutti i triangoli di vertice in $(0, 0, 1)$ con un vertice sulla retta $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

e l'altro sulla retta $\begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$, trovare quello di area minima

14. Determinare il massimo e il minimo assoluto di

$$f(x, y) = |x|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}$$

su $\{x^2 + y^2 \leq 2\}$

15. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di:

$$f(x, y) = x^2y^2 - x^4 + 2x^2$$

nella striscia $S := \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\}$

16. Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

su $\{y^2 - x^2 + x^4 = 0\}$

17. Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = 12x^3 + 4x^2y - 5xy^2 - 2y^3 + 4x^2 + y^2 + 4xy$$

su \mathbb{R}^2

2 Massimi e minimi vincolati

1. Determinare i valori estremi di:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

che soddisfano i vincoli:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$$

$\{g_1 = 0\}$ è un cilindro parallelo all'asse z , $\{g_2 = 0\}$ è un piano

2. Determinare il valore minimo di:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

che soddisfa i vincoli:

$$g_1(x, y, z) = x + 2y + z - 1 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = 2x - y - 3z - 4 = 0$$

3. Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2x$$

$$\text{su } \mathbb{D} = \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 2y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$$

4. Determinare gli estremi vincolati di

$$f(x, y) = x^2 - xy^2$$

$$\text{su } \mathbb{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

5. Determinare il valore massimo di

$$f(x, y) = xy - x^3y^2$$

nel quadrato $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

6. Determinare il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x, y) = xy(1 - x - y)$$

nel triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$

7. Determinare il valore massimo di

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

nel triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = \pi$

8. La temperatura in tutti i punti del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ è data da

$$T = (x + y)e^{-x^2 - y^2}$$

Determinare la temperatura massima e la temperatura minima del disco

9. Determinare il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$$

nel semipiano superiore $y \geq 0$