Teoria analisi II

Gariboldi Alessandro

Indice

1 Equazioni differenziali ordinarie

Definizione 1.1 (Forme normali di EDO).
Esempi di forma normale:

$$y' = f(x, y)$$
$$y'' = f(x, y, y')$$

Forma normale canonica, in generale si definisce una eq. in forma normale se posso isolare la derivata n-esima e quindi ricondurmi alla forma seguente:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$\boxed{\text{L'ordine di un'eq. differenziale è il grado della derivata del grado più alto che compare nell'eq.}}$$

Proposizione 1.1 (Prob. di Cauchy per eq. di 1° grado).
EDO 1° ordine

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad x_0, y_0 \text{ sono assegnati}$$

EDO 2° ordine

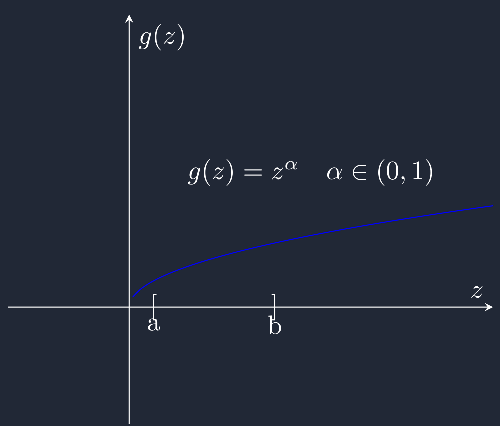
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \qquad x_0, y_0, y_1 \text{ sono assegnati}$$

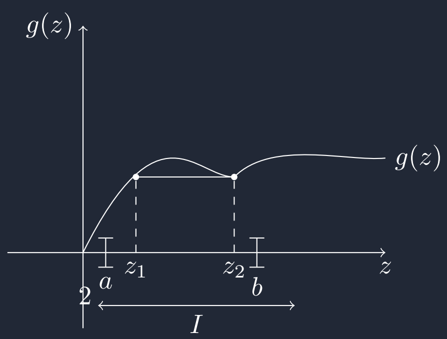
Teorema 1.1 (th. di Peano).
Se $f(x, y)$ *è definita e continua in un insieme* A
e (x_0, y_0) *è un punto interno ad* A
allora il Pb. di Caucy $\boxed{*}$ *ammette* ***almeno*** *una soluzione definita in un intorno di* x_0

La continuità di $f(x, y)$ *è necessaria per l'∃ di una soluzione*
La sola hp. di continuità ***NON*** *garantisce che esista* ***solo*** *una soluzione*

1.1 liptschitzianità

Definizione 1.2 (Funzioni Lipschitziane).
$g : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$
Sia $[a, b] \subset \mathbb{I}$
Si dice che la funzione è Lipschitziana in $[a, b]$
se $\exists L \in \mathbb{R} > 0$ *t.c.* $\forall z_1 z_2 \in [a, b]$ $\boxed{\left|\frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2}\right| \leq L} \iff \boxed{-L \leq \frac{g(z_1)-g(z_2)}{z_1-z_2} \leq L}$





Se in un intervallo due numeri z_1, z_2 calcolati in una funzione f arbitrariamente vicini formano una come corda tra di loro con un coefficente angolare finito.

(servono due lemmi).
1° passo :

Lemma 1.1.
Supponiamo valide le ipotesi del th. precedente
Sia $\delta > 0$ le seguenti affermazioni sono equivalenti.

Definizione 1.3 (derivate parziali)**.**
Sia $f(x,y), (x_0, y_0)$ interno al dominio di F

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h)}{f(x_0, y_0)}$$

punto chiave

Lemma 1.2.
Se f è continua in un insieme A , (x_0, y_0) è interno ad A e inoltre

i) $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

ii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *è continua* $\forall (x,y) \in A$ *Allora le hp del th. precedente sono verificate*

□

Definizione 1.4.
Equazioni Omogenee
$y' = y(x,y)$ *dove* $f(x,y)$ *è "omogenea di grado 0"*
cioè $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (x,y) f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$
Prendiamo l'eq:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad f(x,y) \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Un equazione di questo tipo può essere riscritta come:

$$y' = b(y/x)$$

Teorema 1.2 (di $\exists$ globale)**.**
Consideriamo il Pb. $\boxed{*} \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
se:

i) $f(x,y)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *sono definite e continue* $\forall x \in [a,b], y \in \mathbb{R}$ *dove* $x_0 \in (a,b)$

ii) Esistono due numeri positivi, h, k *per cui risulti* $\boxed{|f(x,y)| \leq h + k|y|}$

1.2 EDO di ordine n

Proposizione 1.2.
EDO di ordine n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases}$$

1.3 spazi di funzioni

Definizione 1.5 (Spazi di funzioni).
I è un intervallo in $\mathbb{R}$
si considerano $\{\underline{\text{insieme delle funzioni}} : I \to \mathbb{R}\}$, chiamiamo questo sistema $\boxed{*}$
prendiamo $f, g \in \boxed{*}$ e $\boxed{\alpha f(x) + \beta g(x)} \in \boxed{*}$ con $f(x) \equiv 0$

e si considera $\{\underline{\text{insieme delle funzioni}} : I \to \mathbb{R}\}$ come spazio vettoriale

$C^0(I) = \{$insieme delle funzioni $\underline{\text{continue}}$ $:\to \mathbb{R}\}$

$C^1(I) = \{$insieme delle funzioni $\underline{\text{continue}}$, *derivabili in ogni $x \in I$ e la cio derivata è una funzione continua $\forall x \in I$*$\}$

.

.

.

$C^n(I)$

Teorema 1.3 (Soluzioni di EDO lineari).

i) L'insieme V_0 delle soluzioni di $\boxed{2}$ è uno spazio vettoriale di dimensione n

ii) L'insieme delle soluzioni di $\boxed{1}$ è

$$\Big\{ y(x) + y_f(x) : y \in V_0 \text{ e } y_f \text{ è soluzione di } \boxed{1}$$

$$\boxed{y^n a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)} \quad \boxed{1}$$

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$supponiamo che siano definite e continue in $I \subset \mathbb{R}$

$$y \in C^n(I)$$
$$E(y) : C^n(I) \to C^0(I)$$
$$E(y) = y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots \ + a_0(x) y()$$
$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2)$$
$$\boxed{y^{(n)} + a_{(n-1)}(x) y^{(n-1)} + \ldots \ + a_0(x) y(x) = 0} \quad \boxed{2}$$

Proposizione 1.3 (Funzioni C^1 e C^2).

$$C^0(I) = \{\ \underline{\text{insieme di funzioni continue}}{:}I \to \mathbb{R}\}$$
$$C^1(I) = \{\ \underline{\text{insieme di funzioni continue e derivabili con derivata continua in}} : I \to \mathbb{R}\}$$

Teorema 1.4 ($\exists!$ globale per soluzione di EDO lineari).
<u>Siano</u> $f(x), a_i(x) \quad i = 0, \ldots, n-1$ funzioni continue in I
<u>Sia</u> x_0 interno ad I
<u>Allora</u> $\forall$ scelta dei numeri

$b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ il prob. di Cauchy:

$$\begin{cases} E(y) = f \\ y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \qquad \textit{Ha una sola soluzione definita in tetto } I$$

(no dim)

Teorema 1.5.
L'insieme delle soluzioni dell'EDO omogenea $E(y) = 0$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.
$\boxed{*}$ *è spazio vettoriale.*
La funzione $y(x) \stackrel{?}{=} 0$ soddisfa l'eq $E(y) = 0$ ovviamente.
Se y_1 e y_2 sono due soluzioni dell'omogenea, cioè
$E(y_1) = 0$ e $E(y_2) = 0$
e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora
$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$

Dimostrazione.
Dimostro il teorema quando $n = 2$
Def. le due funzioni $z_0(x)$ e $z_1(x)$ nel modo:

z_0è sol. del pb.

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

z_1è sol. del pb.

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Richiamo cosa vuol dire nel contesto degli spazi di funzioni cosa buol dire linearmente indipendenti
z_0 e z_1 sono lin. indipendenti se
$C_0 z_0(x) + c_1 z(x) = 0 \forall x \in I$
dove c_0, c_1 sono costanti, avviene solo quando $c_0 = c_1 = 0$.

Siano $c_0, c_1 \in \mathbb{R} :\ c_0 z_0(x0 + c_1 z_1(x) \stackrel{?}{=} 0 \forall x \in \mathbb{R})$
chiamo: $z(x)$ è sol. di $z(x_0) = c_0 z_0(x_0) + c_1 z_1(x_0) = c_0$ dove $c_0 z_0(x_0) = 1$ e $c_1 z_1(x_0) = 0$
$z'(x_0) = c_0 z_0'(x_0) + c_1 z_1'(x_0)$ dove $c_0 z_0'(x_0) = 0$ e $c_1 z_1'(x_0) = 1$
Ma per l'ipotesi $z \stackrel{?}{=} 0$ quindi $z(x_0) = 0$ Ma anche $z' \equiv 0$ e $z'(x_0) = 0$
Rimane da dimostrare che $z_0 e z_1$ generano tutto lo spazio delle soluzioni dell'omogenea.
Sia $w(x)$ una sol. arbitraria di $E(y) = 0$.
Voglio dumostrare che è probabile scegliere $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$
t.c. $w(x) \equiv c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x)$
Scelgo c_0 e c_1:

$\boxed{c_0 = w(x_0) c_1 = w'(x_0)}$ Sia w che $c_0 z_0 + c_1 z_1$ sono soluzioni di:

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \end{cases}$$

$$c_0 z_0(x_0) + c_1 z_1(x_0) = c_0 \qquad \text{dove } c_0 z_0(x_0) = 1 \text{e } c_1 z_1(x_0) = 0$$
$$c_0 z_0'(x_0) + c_1 z_1'(x_0) = c_0$$

$\square$

Teorema 1.6.
L'integrale generale dell'equazione $\boxed{E(y) = f}$
si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea ad una soluzione particolare dell'equazione completa
$E(y) = f$.

Dimostrazione.
Sia y_1 una soluzione di $E(y) = f$
e y_0 una soluzione di $E(y) = 0$
Allora $y_1 + y_0$ è soluzione di:
$E(y) = f$ infatti
$E(y_1 + y_0) = E(y_1) + E(y_0) = f + 0 = f$
Viceversa sia y_2 una qualsiasi soluzione di $E(y) = f$
Allora:
$E(y_2)y_1 = E(y_2) - E(y_1) = f - f = 0$
Quindi $y_2 - y_1 = z_0$ per una certa soluzione dell'omogenea.
Allora: $y_2 = y_1 + z_0$

□

Teorema 1.7.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ *(o anche* $\lambda \in \mathbb{C}$*).*
La funzione: $y(x) = e^{\lambda x}$
è soluzione dell'equazione omogenea $E(y) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ *è radice del polinomio caratteristico*
cioè se $P(\lambda) = 0$

Dimostrazione.
Chiamo

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$y^n(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned} E(y) &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... \ + a_0)e^{\lambda x} \\ P(\lambda)e^{\lambda x} &= 0 \ \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

Esempio 1.1.
se ho: $\boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$ *e considero il polinomio caratteristico associato:* $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$
procedendo a risolverlo per λ *ottengo:* $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$ *da qui si possono vedere ad occhio delle radici semplici di* $P(\lambda)$ *che sono:* $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$
di conseguenza: e^{2x} e e^x *sono soluzioni di:* $E(y) = 0$

Oss. 1.1.
se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ *sono dumeri distinti*
allora $e^{\lambda x}, e^{\lambda_2 x}, ... , e^{\lambda_k x}$*, sono linearmente indipendenti.*

□