
MECCANICA ANALITICA

Appunti

Tommaso Nardi
Prof. Omar Morandi
Università degli Studi di Firenze
2025–2026
Aggiornato al 26 febbraio 2026

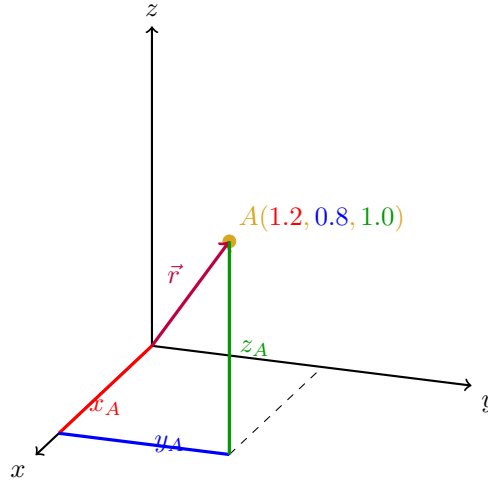
Indice

1	Vettori in \mathbb{R}^3	3
1.1	Prodotto scalare	3
1.2	Prodotto vettoriale	4
1.3	Terna euclidea	4
1.4	Momento di un vettore rispetto al polo	5
1.5	Geometria elementare	6
2	Curve in \mathbb{R}^3	8

1 Vettori in \mathbb{R}^3

Se vogliamo descrivere un punto nello spazio, è necessario definire cos'è lo spazio:

Prendiamo una terna destrorsa di assi cartesiani \Rightarrow Descriviamo \mathbb{R}^3 .



Considero un vettore $\vec{r} = (O - A)$, esso non è altro che una terna di valori ordinati $\vec{r} = (x_A, y_A, z_A)$.

Definisco il **modulo**, o lunghezza, di un vettore come: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, posso definire $\vec{u} = \alpha \vec{v}$, e sarà un vettore che giace sulla stessa retta (ha la stessa direzione) di \vec{v} , verso come $\text{sgn}(\alpha)$ e modulo $|\vec{u}| = |\alpha| |\vec{v}|$.

Farà anche comodo definire un **Versore**, cioè un vettore con modulo unitario, che indicherò con \hat{u} .

Esempio 1.1. Se volessi individuare $\hat{v} \parallel \vec{v}$ è sufficiente fare: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Le operazioni elementari che si possono fare con i vettori sono:

1.1 Prodotto scalare

È una funzione che prende due vettori e restituisce uno scalare.

Presi due vettori \vec{u} e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, il prodotto scalare è definito come:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Esso è una mappa con le seguenti proprietà:

- **Simmetria:** $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

- **Linearità:** $\langle \alpha \vec{u} + \beta \vec{w}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \beta \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

La definizione standard ci dice che:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

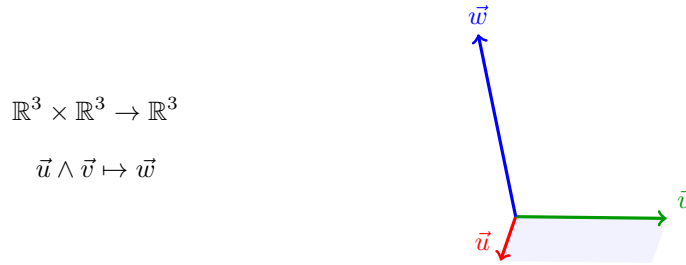
dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. (Non è importante quale dei due angoli si prenda, poiché il coseno è una funzione pari).

Se invece $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, allora:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

1.2 Prodotto vettoriale

È sempre una mappa bilineare, ma restituisce un vettore invece di uno scalare.



Possiamo ricavare le caratteristiche di \vec{w} :

- $|\vec{w}| = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori.
- \vec{w} è diretto come la direzione \perp al piano generato da \vec{u} e \vec{v} .
- \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} formano una terna destrorsa.

Le sue proprietà sono:

- **Anticommutatività:** $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
- **Linearità:** $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{w}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \beta (\vec{w} \wedge \vec{v})$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Geometricamente, il modulo di \vec{w} rappresenta l'area del parallelogramma generato da \vec{u} e \vec{v} .

1.3 Terna euclidea

Per fissare una terna euclidea non conviene definire tre vettori qualsiasi, ma è più comodo definire **tre versori ortonormali**.

Li chiamo \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , rispettivamente paralleli agli assi x , y e z .

N.B. Talvolta fa comodo fare distinzioni tra:

- **Vettore libero** – Fisso solo la direzione, ma non il punto di applicazione. Es. Velocità angolare.
- **Vettore Applicato** – Fisso un punto di applicazione, oltre alla direzione. Es. Forza peso.

Il termine **ORTONORMALE** significa che i versori sono tra loro ortogonali:

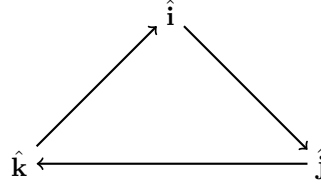
$$\langle \hat{i}, \hat{j} \rangle = \langle \hat{j}, \hat{k} \rangle = \langle \hat{k}, \hat{i} \rangle = 0$$

e sono normalizzati:

$$\langle \hat{i}, \hat{i} \rangle = \langle \hat{j}, \hat{j} \rangle = \langle \hat{k}, \hat{k} \rangle = 1$$

Su tali versori è utile studiare il prodotto vettoriale:

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \wedge \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \wedge \hat{i} = \hat{j}$$



Il vantaggio di definirne i versori è che ogni vettore \vec{v} può essere scritto come combinazione lineare dei versori:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$

Data questa notazione, vediamo come posso ricavare le componenti di un vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}) \wedge (v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) \\ &= u_x v_x (\hat{i} \wedge \hat{i}) + u_x v_y (\hat{i} \wedge \hat{j}) + u_x v_z (\hat{i} \wedge \hat{k}) + u_y v_x (\hat{j} \wedge \hat{i}) + \\ &\quad + u_y v_y (\hat{j} \wedge \hat{j}) + u_y v_z (\hat{j} \wedge \hat{k}) + u_z v_x (\hat{k} \wedge \hat{i}) + u_z v_y (\hat{k} \wedge \hat{j}) + u_z v_z (\hat{k} \wedge \hat{k}) \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) \hat{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \hat{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{k} \end{aligned}$$

Un modo più compatto per ricordare questa formula è utilizzare il determinante (nonostante non sia un vero e proprio determinante, ma è solo una notazione mnemonica):

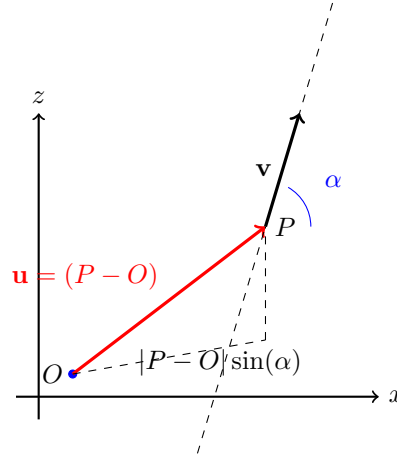
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

1.4 Momento di un vettore rispetto al polo

Dato un punto O detto "polo" e un vettore \vec{v} applicato in un punto P , posso definire il momento di \vec{v} rispetto ad O , come:

$$\vec{M}_O \doteq (P - O) \wedge \vec{v}$$

Dalla definizione di prodotto vettoriale, si deduce che \vec{M}_O è un vettore allineato con la normale al piano generato da $(P - O)$ e \vec{v} , e i tre vettori formano una terna destrorsa.



Il modulo di \vec{M}_O rappresenta l'area del parallelogramma generato da $(P - O)$ e \vec{v} , ed è pari a:

$$|\vec{M}_O| = |P - O||\vec{v}|\sin(\alpha)$$

dove α è l'angolo compreso tra i due vettori.

La distanza $d = |P - O|\sin(\alpha)$ è la distanza tra il polo O e la retta su cui è applicato il vettore \vec{v} ed è detta **braccio** del momento.

1.5 Geometria elementare

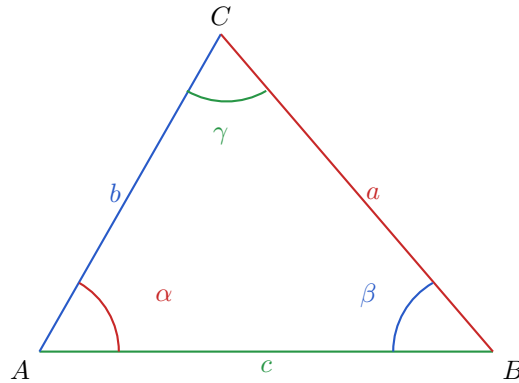


Figura 1: Triangolo generico con i lati a , b e c e gli angoli α , β e γ .

Con riferimento alla Figura (1), possiamo enunciare i seguenti teoremi:

Teorema 1.1 (Teorema di Carnot). In un triangolo con lati a , b e c e angoli opposti α , β e γ , vale la seguente relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Teorema 1.2 (Teorema dei seni). In un triangolo con lati a , b e c e angoli opposti α , β e γ , vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

È utile anche riportare alcuni teoremi della geometria del piano:

Teorema 1.3 (Lunghezza di un arco di circonferenza). La lunghezza s di un arco di circonferenza di raggio r e angolo al centro θ (in radianti) è data da:

$$s = r\theta$$

Si riportano anche le formule di addizione per seno e coseno, che saranno utili in seguito:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

2 Curve in \mathbb{R}^3