

28-11-25

Tommaso Miliani

Fisica Statistica e Fluidodinamica

Fine finisca Statistica

1 Conti altra volta

La formula dell'altra volta è sbagliata perché la dipendenza dal volume è sbagliata: infatti, dato che V è lo stato che ci interessa e V_0 è lo stato di riferimento (è una costante assegnata) che non dipende dal numero di particelle ma ha le stesse dimensioni di un volume. Quando N cresce, l'argomento del logaritmo è proporzionale ad N e dunque $S \propto N \ln N$. Questo non è solo un problema di dipendenza da N , supponendo infatti che sia vera, allora, dato che è l'unico termine dipendente da N , il resto può essere trascurato, il che porta a dire che l'entropia non dipenda dalla temperatura per N grandi, il che è inconsistente.

Per capire che è inconsistente dal punto di vista fisico, si può provare che predice una cosa sbagliata. Preso un contenitore adiabatico e perfettamente isolato e si mette una parete ideale perfettamente diatermica tra i due volumi. Si può applicare la formula utilizzata per entrambi gli ambienti:

$$S_1^{(i)} = Nk_B \left(\ln \frac{V}{V_0} + f(T) \right)$$
$$S_2^{(i)} = Nk_B \left(\ln \frac{V}{V_0} + f(T) \right)$$

Dove

$$f(T) = \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{3}{2}$$

L'entropia totale è dunque la somma delle entropie. Se si rimuove adesso la parete diatermica, ci si trova nella situazione in cui il volume totale è il doppio e così come il doppio delle particelle ma il gas non ha cambiato la sua temperatura:

$$S^{(f)} = 2Nk_B \left(\ln \frac{2V}{V_0} + f(T) \right)$$

Allora la differenza di entropia è data dalla seguente:

$$\Delta S = 2Nk_B \left(\ln \frac{2V}{V_0} - \ln \frac{V}{V_0} \right) = 2Nk_B \ln 2$$

Questo risultato è diverso da zero e proporzionale ad N . Se fosse dunque vera quella formula, allora semplicemente togliendo la parete l'entropia del sistema è aumentata estensivamente. In realtà questa cosa non ha senso in quanto l'unica differenza era che si era separato il gas con una parete diatermica e con spessore infinitesimo. Le proprietà macroscopiche sono le stesse per i due stati mentre con quella formula non è. Perché a livello termodinamico questi stati non possono essere diversi? Questo perché se si avesse messo due gas diversi si avrebbe un mescolamento (che è diverso dall'aver utilizzato due volumi dello stesso identico gas). Questa formula sarebbe giusta se i due gas fossero diverse, questo ci porta a dire che c'è un problema se si assume che i due sottosistemi siano composti dallo stesso gas.

Figura 1: Esperimento che prova l'invalidità della formula

V	V
N	N
T	T

$2V$
$2N$
T

1.1 Soluzione per gas omogenei

Questo problema deriva dal fatto che definire il numero di stati come

$$\frac{d^{3N} \cdot d^{3N} v}{\Delta \Gamma}$$

Questo vuol dire che si considerano distinguibili le particelle tra di loro: due particelle che si possono invertire le velocità sono contati come due stati diversi (che per un gas le cui particelle sono tutte uguali) non è vero! Non si è quindi in grado di seguire la dinamica esatta delle particelle e l'unico modo per distinguere le particelle di un gas omogeneo e "etichettarle". Nel caso di particelle identiche, devo dividere per il numero di stati che si ottengono per lo scambio tra di loro, ossia $N!$: il corretto conteggio degli stati è dunque

$$\frac{d^{3N} \cdot d^{3N} v}{N! \Delta \Gamma}$$

Questo risolve il problema? Posso determinare il numero di stati come

$$\mathcal{Z}_C = \frac{\mathcal{Z}}{N!}$$

Il singolo stato dunque

$$\mathcal{Z}_C^{\frac{1}{N}} = \frac{z}{(N!)^{\frac{1}{N}}}$$

Dunque

$$\ln \mathcal{Z}_C = \ln \mathcal{Z} - \frac{1}{N} \ln(N!)$$

Utilizzando la correzione di Stirling:

$$\ln(N!) \approx N \ln N - N \implies \ln \mathcal{Z}_C = \ln \mathcal{Z} - \ln N + 1$$

Allora si può esprimere l'entropia come

$$S = Nk_B \left(\ln \frac{V}{NV_0} + \frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_0} + \frac{5}{2} \right)$$

A questo punto questa espressione è correttamente estensiva. La risoluzione dello spazio delle fasi non può però essere scelta a piacere ma la meccanica quantistica ci dice che questo non è possibile, infatti si ha che

$$\Delta x \Delta p \geq h \quad \Delta x \Delta v \geq \frac{h}{m}$$

Non si può dunque scegliere oggetti arbitrari, ma inevitabilmente si avrà che $(\Delta x \Delta v)^3 \geq \frac{h^3}{m^3}$. Dato che la scala di risoluzione che si sceglie non può essere più piccola di questo limite, imponiamo questo limite di risoluzione come

$$S = Nk_B \left(\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi k_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{5}{2} \right)$$

Fluidodinamica

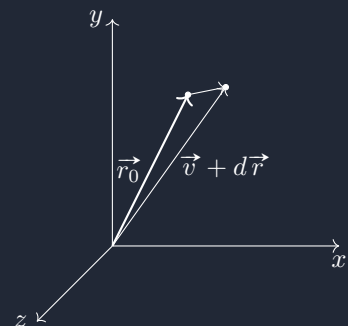
2 Fluidi ideali

IN un sistema di riferimento si può prendere un tempo di riferimento $t = 0$ ed un elemento fluido che si trova in una posizione \vec{r}_0 e descrivere il moto come lo spostamento

$$\zeta(\vec{r}_0, t)$$

Posso scegliere di seguire il moto di un punto del fluido e studiarne il moto, questo prende il nome di **spostamento Lagrangiano**. Se invece decidessi di fissare il mio sguardo su

Figura 2: spostamento Lagrangiano



di un punto fisso dello spazio e valuto cosa accade a quell'elemento fluido cosa accade nel tempo; questa è una **descrizione Euleriana** del mio fluido. Supponendo di analizzare il comportamento dell'elemento fluido a dt rispetto al tempo di riferimento secondo la descrizione Euleriana. Per poter impostare le derivate, devo ricordarmi che da quel punto il fluido si muove. Non mi interessa dunque la storia del fluido ma solo quello che accadrà dopo l'elemento fluido che sto analizzando si sarà spostato rispetto alla posizione iniziale. A questo punto posso definire la velocità del fluido come se fosse un punto materiale:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Ossia lo si definisce come nella meccanica. Si può definire la densità e la pressione come

$$\begin{cases} p(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) \\ \vec{u}(\vec{r}, t) \end{cases}$$

Definisce un campo vettoriale. Si definisce ora l'accelerazione ora nella fluidodinamica come

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t, \vec{r}(t + \Delta t)) - \vec{u}(t, \vec{r}(t))}{\Delta t}$$

Posso dire che la velocità di una certa particella avrà velocità

$$u_i(t + \Delta t, \vec{r}(t + \Delta t)) = u_i(t, \vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial t} \Delta t + \sum_k^3 dr_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = u_i(t, \vec{r}) + \frac{\partial u_i}{\partial t} \Delta t + \sum_k^3 u_k \Delta t \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + o(\Delta t^2)$$

Ossia lo sviluppo in serie di Taylor per una funzione a più variabili. Posso dunque derivare l'espressione di u_i secondo la relazione utilizzata prima :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(u(t, \vec{r}) + \Delta t \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - u_i(t, \vec{r}) \right)}{\Delta t}$$

Dunque si ottiene che

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k^3 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

L'accelerazione non corrisponde dunque solo alla derivata parziale di u rispetto al tempo, ma dipende anche dalle componenti spaziali. Si può anche scrivere

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_i$$

Dove u_i è una delle tre componenti della velocità. Questa cosa non vale solamente per la velocità ma vale comunque per qualunque campo scalare $f(x, y, z, t)$ che descrive il moto del fluido:

$$f(\vec{r}, t) \implies f'(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

Ossia

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f$$

Nel sistema Euleriano mi permette di dire come varia il moto dell'elemento fluido al variare del tempo e prende il nome di **derivata sostanziale totale**. La prima componente è il termine che descrive cosa accade ad un punto a tempi diversi.

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ \implies \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned}$$

Allora l'accelerazione rispetto alla x

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

E lo stesso per le altre componenti.

3 Linee di campo (o di flusso)

Si definisce una **linea di campo** o **linea di flusso** come una linea di spazio parallelo al campo di velocità \vec{u} :

$$\vec{dl} = c\vec{u} \quad (1)$$

Dunque posso costruire la linea di campo in modo tale che

$$\begin{cases} dx = cu_x \\ dy = cu_y \\ dz = cu_z \end{cases}$$

Dato che la c è la stessa, questo vuol dire che deve valere

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Le linee di flusso hanno senso se si è in **condizioni stazionarie**: ossia le condizioni per cui $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. In quel caso le linee di flusso rappresentano il moto dell'elemento di fluido scelto. Se si avesse una linea di flusso arbitraria, un qualsiasi elemento di fluido su questa linea di flusso seguirebbe il flusso stesso ma solo nelle condizioni stazionarie.

La linea di flusso mi dà la direzione ed il verso della velocità ma non il modulo, considerando di avere delle linee di flusso, si considera la superficie fatta da tutte le linee di flusso tangenti a C e C' , e come basi si appoggiano a C e C' , prende il nome di **tubo di flusso**. Si può dunque prendere una linea di flusso piccola a piacere in modo tale che le variabili (pressione, densità, velocità, ..) siano quasi costanti. Posso dunque considerare un piccolo tubo di flusso in modo tale che in questa sezione i valori sono costanti e che prende il nome di **tubo di flusso sottile**.

Figura 3: La costruzione della linea di flusso

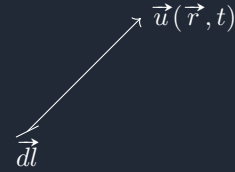
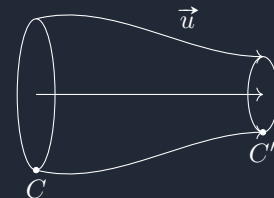


Figura 4: Tubo di flusso



4 Aspetto dinamico della fluidodinamica

4.1 Equazione fondamentale della fluidodinamica

Le forze che venivano applicate ad un fluido statico, sono delle forze di pressione che si possono esprimere come

$$\vec{F}_\Sigma = -\vec{\nabla}p \, dV$$

Ci sono anche le forze di volume

$$\vec{F}_V = dm\vec{g} = \rho \, dV\vec{g}$$

Applicata alla gravità (che può non necessariamente essere lei), se si considera adesso un volumetto infinitesimo e si identifica un volumetto infinitesimo che contiene una massa $dm = \rho dV$, al tempo t voglio conoscere le forze che agiscono su questa massa. Posso dunque definire, dalla prima cardinale

$$\vec{F}_\Sigma + \vec{F}_V = -\vec{\nabla}p \, dV + \rho g \, dV = \rho \, dV \frac{d\vec{u}}{dt}$$

Si trova dunque l'**equazione di Eulero**:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g}$$

Ossia

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla}p + \rho \vec{g}$$

Dato che è una equazione vettoriale, bisogna trovare tre equazioni in quanto non ci basta questa cosa. Dato che la massa si deve conservare, per un volume finito di fluido, posso determinare la massa

$$M = \int_V \rho \, dV \implies \frac{dM}{dt}$$

Ossia definisco il **flusso di massa** entrante e uscente dal fluido. Posso dunque definirla meglio

$$\frac{dM}{dt} = \dot{M} = - \int_{\Sigma(V)} \rho \vec{u} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

Dove $\Sigma(V)$ è il volume totale e \hat{n} il vettore normale alla superficie del fluido e $d\sigma$ rappresenta esattamente l'elemento infinitesimo di superficie σ . Posso però esprimere anche

$$M = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = - \int_{\Sigma(V)} \rho \vec{u} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

E dunque si è trovata l'equazione di conservazione della massa. L'unico problema è che V è in forma integrale e va trasformata in forma differenziale.