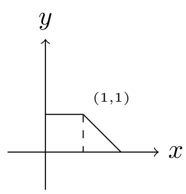
Analisi II - Integrali

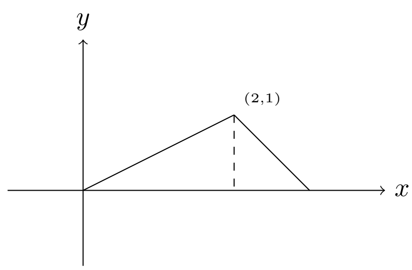
Marco Delton[*]

A.A. 2025/26

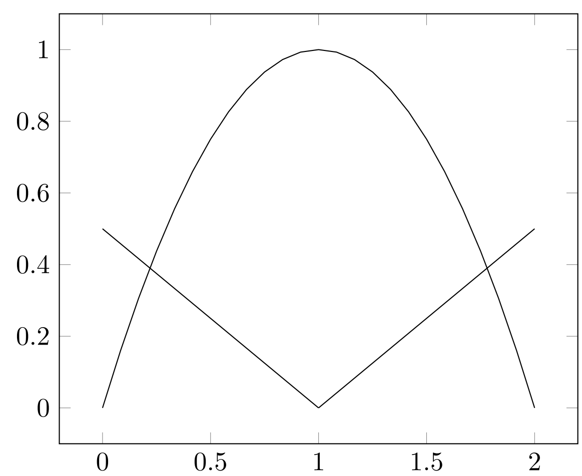
1. Scrivere i seguenti domini come unione di domini normali:



(a)

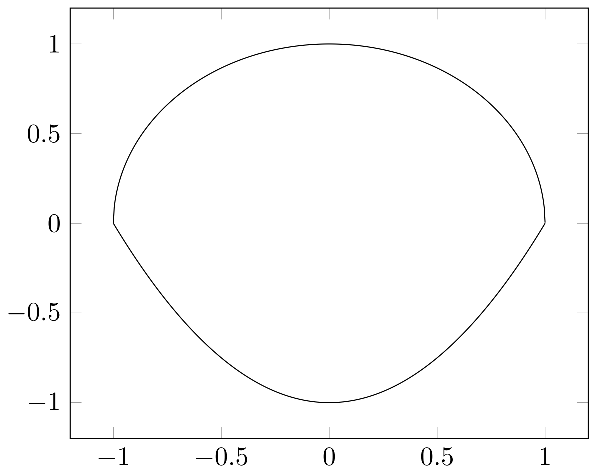


(b)



(c)

[*]esercizi della prof.ssa *Chiara Bianchini*

(d) 

2. Disegnare i seguenti domini:

   (a) $E_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - 2x \end{array} \right\}$

   (b) $E_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 - \sqrt{1 - x^2} \end{array} \right\}$

   (c) $E_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} x^2 + y^2 + 2x \ge 0 \\ x^2 + y^2 - 2x \ge 0 \\ x^2 + y^2 \le 4 \end{array} \right\}$

   (d) $E_4 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} \left| x + y - \frac{1}{2} \right| \le \frac{1}{2} \\ xy \ge 1 \end{array} \right\}$

   (e) $E_5 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} (x-1)^2 + y^2 \le 4 \\ (x+1)^2 + y^2 \le 4 \\ y \le 0 \end{array} \right\}$

   (f) $E_6 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} x \in [0, \pi] \\ y \in [0, \sin x] \end{array} \right\}$

3. Calcolare:

$$\iint_D (x^2 + y^2)\ dx\ dy \quad \text{su } D = \left\{ \begin{array}{c} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 - x \end{array} \right\}$$

4. Calcolare:

$$\iint_E x^2\ dx\ dy \quad \text{su } E = \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 \le 1 \\ y \ge x^2 - 1 \end{array} \right\}$$

5. Calcolare:
$$\iint_D 2ye^x \; dx \; dy \quad \text{su } D = E_3 \quad \text{(dell'es. 2)}$$

6. Calcolare:
$$\iint_D \frac{1}{1+y} \; dx \; dy \quad \text{su } D = E_2 \quad \text{(dell' es. 2)}$$

7. Calcolare il baricentro di E_6 (dell' es. 2)

8. Determinare il momento di inerzia di E_6 (dell' es. 2) rispetto agli assi x e y

9. Determinare il volume del toro generico

10. Calcolare il baricentro di una lamina piana a forma di semicerchio

11. Calcolare l'area e il baricentro di E_4 (dell' es. 2)

12. Calcolare il baricentro di E_5 (dell' es. 2)

13. Calcolare l'area della porzione di spirale di Archimede (scritta in coordinate polari):
$$E = \left\{ (\theta, \rho) : \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4} \right], \quad \rho \in [\theta, \theta + 2\pi] \right\}$$

14. Calcolare:
$$\iint_D x \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \; dx \; dy \quad \text{su } D = \left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

15. Calcolare:
$$\iint_T \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \; dx \; dy \quad \text{su } T = \left\{ \begin{array}{c} y \geq 0 \\ a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \end{array} \right\}$$

16. Calcolare l'area della regione di piano:
$$\left\{ \begin{array}{c} 4 \leq 4x^2 + y^2 \leq 16 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \end{array} \right\}$$

17. Calcolare il volume di E:

$$E = \left\{ \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{xy} \end{matrix} \right\}$$

18. Calcolare:

$$\iint_E (2x^2 - 2x - xy + y) \cdot \left(\cos (y - x^2)(y - 2x)\right) \cdot \ln |\cos (y - 2x)| \; dx \; dy$$

19. Calcolare:

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2} \; dx \; dy \; dz$$

Dove D è delimitato dalla falda superiore del cono $z^2 = x^2 + y^2$ e dal piano $z = 1$

20. Calcolare la massa del solido compreso tra due superfici sferiche concentriche di raggi a e b con $0 < a < b$, la cui densità è il quadrato della distanza del punto dal centro

21. Calcolare:

$$\iint_E x \frac{2 - 3y^2}{(2 - y^2)^2} \; dx \; dy \quad \text{su } E = \left\{ \begin{matrix} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq (1 - x)^2 \end{matrix} \right\}$$

22. Calcolare:

$$\iint_E \frac{y}{\sqrt{2 + x + y^2}} \; dx \; dy \quad \text{su } E = \left\{ \begin{matrix} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y + \frac{1}{2} \leq 0 \end{matrix} \right\}$$

23. Calcolare:

$$\iint_E \frac{x + 2y}{2y^2 + \sqrt{3}xy} \; dx \; dy \quad \text{su } E = \left\{ \begin{matrix} 1 \leq \frac{x^2}{3} + y^2 \leq 4 \\ |x| \leq |y| \end{matrix} \right\}$$

24. Sia $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} y = 0 \\ (x - 2)^2 + z^2 \leq 1 \\ z \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\}$

Sia T ottenuto ruotando E attorno all'asse z.

Calcolare:

$$\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}(1 + z^2)} \; dx \; dy \; dz$$

25. Calcolare:

$$\iiint_C x^2 \; dx \; dy \; dz$$

dove C è la parte, compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$, del cono che proietta l'ellisse $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1, \quad z = 1$, dall'origine delle coordinate

26. Calcolare:

$$\iiint_E z \; dx \; dy \; dz$$

dove E è il solido contenuto nel semipiano $\{x > 0\}$, delimitato dai piani $x = 0$,$z = 0$, dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ e dal colo che proietta dall'origine il ramo dell'iperbole $x = 1, \quad z = \sqrt{3 + 2y^2}$

Suggerimento: Passare ad un sistema di coordinate sferiche