Analisi II - Campi Vettoriali e Forme differenziali

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1. Stabilire se i seguenti campi sono conservativi, e in caso affermativo calcolarne il potenziale:

   (a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+5y \\ 5x+4y \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+4xy \\ 4xy-y^3 \end{pmatrix}$

   (c) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x\cos y - y\cos x \\ -x^2\sin y - \sin x \end{pmatrix}$

   (d) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} xe^y \\ ye^x \end{pmatrix}$

   (e) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^y \\ xe^y \end{pmatrix}$

   (f) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2xy+\ln x \\ x^2 \end{pmatrix}$

2. Calcolare il lavoro del campo $\vec{F}$ per spostare un oggetto luno il percorso assegnato:

   (a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x+2y \end{pmatrix}$ sulla calotta semicircolare γ da $(0,1)$ a $(2,1)$

   (b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3y^4 \\ x^4y^3 \end{pmatrix}$ su $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ 1+t^3 \end{pmatrix}_{t\in[0,1]}$

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy+2z \end{pmatrix}$ sul segmento l da $(1,0-2)$ a $(4,6,3)$

*esercizi della prof.ssa *Chiara Bianchini*

3. Determinare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad \big(f \in C^1(\mathbb{R}^3)\big)$ in modo che

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

sia conservativo.
Calcolarne un potenziale

4. Sia $\vec{F}$ il campo di forze centrali

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \cdot g(r) \\ y \cdot g(r) \\ z \cdot g(r) \end{pmatrix}$$

dove $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1.
Provare che $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$ in $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$, e quindi $\vec{F}$ è conservativo

5. Determinare tutti i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha xz + \frac{yz}{x} \\ z \ln(x) - \frac{\alpha^2 y}{2} \ln(z) \\ x^\alpha + y \ln(x) - \frac{y^2}{z} \end{pmatrix}$$

è conservativo in $E = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, z > 0\big\}$.
Per tali valori di α calcolare il potenziale $U(x, y, z)$ tale che $U(1, 1, 1) = 0$

6. Data la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{dx} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{dy}$$

   (a) Stabilire se è chiusa e esatta.

   (b) Calcolare ${}_\gamma\!\int \omega$, dove γ ha equazione $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}_{t \in [0, 2h\pi]}$ con $h \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$

7. Sia

$$\omega = xy\mathbf{dx} + y\mathbf{dy}$$

e sia γ una circonferenza generica con centro sull'asse y.
Provare che ${}_\gamma\!\int \omega = 0$

8. Sia $\{\gamma_k\} \quad (k > 0, k \neq 1)$ la famiglia di circonferenze $(x-1)^2 + y^2 = k^2$ percorse in senso antiorario.
Calcolare al variare del parametro $k \quad {}_{\gamma_k}\oint \omega$, dove:

$$\omega = \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathbf{dx} + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathbf{dy}$$

9. Dire se le segenti forme differenziali sono esatte nel loro insieme di definizione.
In caso affermativo calcolare una primitiva.

(a) $\omega = \frac{2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}\mathbf{dx} + \frac{2x^2y}{(1+x^2y^2)^2}\mathbf{dy}$

(b) $\omega = \left(\sqrt{y} - 2xy\right)\mathbf{dx} + \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right)\mathbf{dy}$

(c) $\omega = (y\cos x - xy\sin x - \sin y)\,\mathbf{dx} + (x\cos x - x\cos y + 1)\,\mathbf{dy}$

(d) $\omega = \frac{x\mathbf{dx} - x\mathbf{dy}}{y^2}$