

# Fisica

Tommaso Miliani

13-05-25

## 1 La forza di gravità di un guscio sferico

Per trovare la forza di gravità agente su di un punto esterno od interno rispetto ad un guscio sferico di spessore infinitesimo si ottiene considerando la densità superficiale  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{M}{4\pi r^2}$$

Data solo la legge di gravitazione universale dobbiamo allora ridurre il problema e cercare di ridurre il problema ad una situazione in cui è facile integrare e quindi scelgo un punto sulla superficie che per definizione avrà distanza  $r$  dal centro e quindi data l'energia potenziale del punto  $m$ ,

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}}$$

Tutti i punti che hanno la stessa distanza dal punto  $P$  contribuiranno allo stesso modo all'energia potenziale: quindi danno un contributo all'energia potenziale pari a:

$$dV = -\frac{Gm \, dM}{\rho}, \quad dM = \sigma \, dS, \quad dS = 2\pi r \sin \theta \cdot r \, d\theta$$

Posso approssimare lo spessore come un cilindretto e quindi posso calcolare la superficie. Introducendo l'angolo  $\theta$  posso allora definire il differenziale della massa come

$$dM = 2\sigma r^2 \sin \theta \, d\theta \Rightarrow dM = \frac{M}{2} \cdot \sin \theta \, d\theta$$

In pratica il  $d\theta$  è esattamente lo spostamento infinitesimo del punto sulla superficie e quindi ottengo il volume del cilindretto con altezza  $r \, d\theta$ . Posso allora dire che l'energia potenziale di ogni punto sulla stessa circonferenza sarà:

$$dV = -Gm \frac{M}{2} \frac{\sin \theta \, d\theta}{\rho}, \quad \rho^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta$$

Dato che  $x$  è fissato, allora se differenziamo l'espressione di  $\rho$  viene che

$$2\rho \, d\rho = 2rx \sin \theta \, d\theta$$

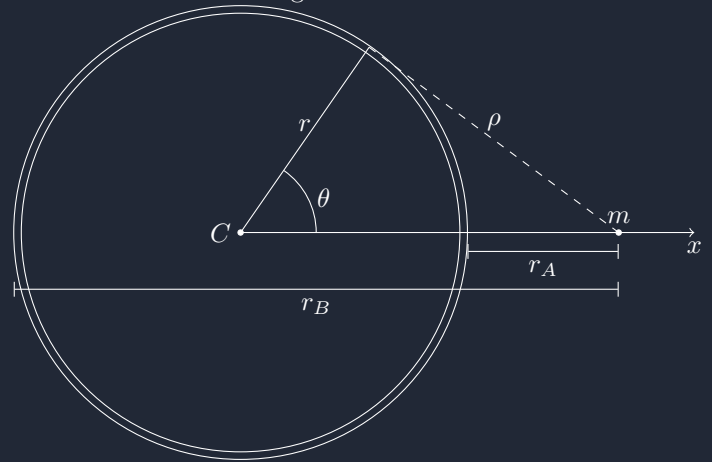
Si ottiene allora che

$$\frac{d\rho}{rx} = \frac{\sin \theta \, d\theta}{\rho}$$

Se ora facessi l'integrale dell'energia potenziale posso allora ottenere che:

$$V = -\frac{GmM}{2rx} \int d\rho = -\frac{GmM}{2rx} (r_B - r_A)$$

Figura 1:



Si possono distinguere i due casi in cui il punto materiale è esterno rispetto alla superficie ma anche quando  $P'$  è interno: si danno allora due casi: un caso in cui  $P$  sia esterno alla superficie:

$$\begin{aligned} \text{Esterno : } & \begin{cases} r_A = x - r \\ r_B = x + r \end{cases} \\ \text{Interno : } & \begin{cases} r_A = r - x \\ r_B = x + r \end{cases} \end{aligned}$$

Per un punto esterno alla superficie allora si può dire che

$$V = -\frac{GmM}{2rx}2r = -\frac{GmM}{x}$$

E questa è esattamente l'energia potenziale che risente un oggetto di massa  $m$  da un oggetto di massa  $M$  che si trova esattamente sul punto  $C$ . Se quindi è esterno alla superficie allora questa superficie posso considerarla come se fosse concentrata nel suo centro. Per un punto interno:

$$V = -\frac{GmM}{2rx}2x = -\frac{GmM}{r}$$

In questo caso è posta alla distanza  $r$ , ossia come se il punto fosse sulla superficie e non al suo interno. La forza gravitazionale che risente dunque al suo interno è nulla.

## 2 La gravità di una sfera piena

Divido allora in tante bucce ma ora tutte le bucce si comportano in modo diverso tra di loro: quelle vicine alla massa non contribuiscono mentre quelle più interne contribuiscono alla forza gravitazionale. La forza è dovuta solo alla massa che si trova allora all'interno.

All'interno non agisce tutta la sfera ma solo la parte della massa interna:

$$\vec{F}_g = -\frac{GmM_i}{r^2}\hat{u}_r, \quad M_i = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

E quindi il rapporto tra la massa interna e quella della Terra è

$$\frac{M_i}{M} = \frac{r^3}{R^3}$$

Posso allora dire che essendo un punto materiale in una guida:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{R^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ \vec{N} = N\hat{i} \end{cases} \quad \begin{cases} x)N - \frac{GmM_T}{R^3}x = 0 \\ y) - \frac{GmM_T}{R^3}y = m\ddot{y} \end{cases}$$

Allora l'equazione che abbiamo per il corpo è proprio un moto armonico:

$$\ddot{y} + \frac{g}{R}y = 0$$

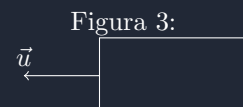
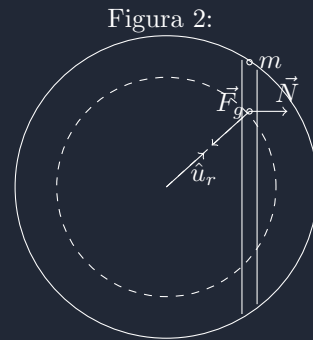
Questo si chiama pozzo di Gauss e si vede che la massa esterna non conta.

## 3 Il moto dei razzi

Con gli strumenti sviluppati fino ad ora si è in grado di descrivere il moto di un razzo: In un dato istante di tempo il razzo espelle una certa quantità di massa che genera una spinta.

$$Q(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$\vec{Q}(t+dt) = M(t+dt)\vec{v}(t+dt) + dm(\vec{u} + \vec{v}(t+dt))$$



Dove  $\vec{u}$  è il vettore della velocità di espulsione del gas rispetto al razzo. Esplicitandola di nuovo posso allora dire che rispetto al missile.

$$\Delta \vec{Q} = \vec{Q}(t + dt) - \vec{Q}(t) = \vec{F}^{ext} dt$$

E quindi risolvendo si ottiene dato che  $dM = -dm$ :

$$\vec{F}^{ext} dt = M d\vec{v} + dm \vec{u}$$

Dividendo ora tutto per  $dt$ :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dM}{dt} + \vec{F}^{ext}$$

Nel caso in cui il missile sia nello spazio e quindi che le forze esterne siano nulle la nostra espressione ci dice che

$$M dv = u dM \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dv = u \int_{t_i}^{t_f} \frac{dM}{M}$$

Allora

$$v(t_f) = v(t_i) - u \ln \frac{M(t_i)}{M(t_f)}$$

$$v_f = v_i + |u| \ln \left( \frac{M_{mis} + M_{carb}(t_i)}{M_{mis} + M_{carb}(t_f)} \right)$$

Nel secondo caso si ha la partenza da Terra verso l'alto:

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{g}$$

Possiamo usare sempre gli stessi principi:

$$M dv = u dM - M g dt$$

$$dv = u \frac{dM}{M} - g dt$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dv = v(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \left( u \frac{dM}{M} - g dt \right)$$

Allor si ottiene che

$$v(t_f) = |u| \ln \frac{M_i}{M_f} - g(t_f - t_i)$$

Più carburante brucio e meno importante diventa l'ultimo termine in modo tale da poter approssimare alla forma vista nel primo caso. Per avere più spinta ci conviene avere più velocità di espulsione possibile.