Appunti di Fluidi

Tommaso Miliani

26-09-25

1 Esempi di esercizi dei fluidi

In linea generale per la risoluzione dei problemi in statica dei fluidi è trovare una relazione tra le pressione e la densità. Quando la pressione è funzione della densità si parla di **Legge barotropica**:

$$p = p(\rho) \tag{1}$$

Questo permette di ottenere una relazione tipo

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

Si può anche assumere una certa legge di proporzionalità sulla potenza della densità:

$$p \propto C\rho^{\gamma} \implies \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{2}$$

Questa legge prende il nome di **Legge politropica**. Ci sono dei motivi fisici che ci portano a determinare questa relazione: in quanto il valore γ è dato dal rapporto dei calori specifici (che si tratterà più avanti). Possiamo considerare il seguente esempio per determinare perché questa relazione è valida:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Allora posso dire anche in questo caso che la derivata parziale rispetto a z è esattamente la derivata della pressione sulla costante z poiché rispetto agli altri assi è nulla la pressione. Allora posso considerare il caso semplice in cui non si abbia la potenza delle ρ con la legge di Stevino:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \implies \rho = \rho_0\frac{p}{p_0}$$

Nell'espressione della derivata:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0\frac{p}{p_0}g \implies \int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{p'} = -\int_0^z \frac{\rho_0 g}{p_0}dz'$$

Gli apici mi servono per differenziare i differenziali rispetto agli estremi di integrazione, quindi ho separato le variabili. Posso quindi risolvere l'equazione e ottenere:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0}z \implies \boxed{p(z) = p_0\exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0}z\right)}$$

Ho ottenuto una relazione esponenziale per la pressione rispetto alla pressione, se chiamassi allora

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Allora posso dire che la legge politropica si esprime come

$$p = p_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right) \tag{3}$$

In questo modo ho trovato una relazione esponenziale della variazione della pressione a seconda della quota z: il fatto che sia una espressione esponenziale (e non lineare) è coerente a livello fisico poiché se si avesse avuto una espressione lineare, questa ad un certo punto sarebbe diventata negativa, il che non avrebbe avuto alcun senso. Per la Terra posso ora stimare il fattore H e dire quando la pressione diminuisce per un fattore $\frac{1}{e}$, ossia dopo circa $8.5km$, la pressione si dimezza invece dopo $\approx 6\ km$ rispetto al livello del mare (assumendo che g non cambi).

1.1 Anticipazione legge dei gas perfetti

La legge dei Gas perfetti ci dice che

$$pV = nRT$$

Posso determinare con il numero di Avogadro il numero di molecole all'interno del gas:

$$pV = \frac{NRT}{N_A} \qquad \text{con} \qquad N = nN_A$$

Posso anche esprimere la relazione tramite la costante di Boltzmann ($k_B = \frac{R}{N_A}$)

$$pV = Nk_BT$$

Per un volume infinitesimo dV ci sarà un numero infinitesimo di particelle contenute all'interno di questo volumetto di gas. Se io lo moltiplicassi per la massa media delle particelle $\overline{m}$:

$$pdV = \overline{m}dN\frac{k_BT}{\overline{m}}$$

Si ha allora che il termine $\overline{m}dN$ è esattamente la massa infinitesima, allora posso riesprimere la relazione dei gas perfetti per un certo volume infinitesimo di gas come

$$p = \frac{dm}{dV}\frac{k_BT}{\overline{m}} \implies p = \frac{k_BT}{\overline{m}}\rho$$

Allora, assumendo che la temperatura sia la stessa da qui a $8.5km$, allora posso esprimere il rapporto tra la pressione e la densità come e ottenere allora una approssimazione (non molto corretta) per determinare la pressione dell'atmosfera a $8.5km$ secondo questo modello invece che secondo la relazione (più precisa) che si era trovata prima.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k_BT}{\overline{m}}$$

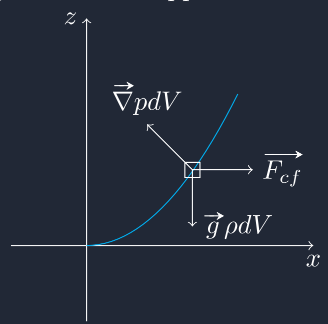
Essendo questa una grossa approssimazione, in futuro sarà rivista e trattata in modo più completo nella parte di termodinamica e nella parte di fisica statistica.

2 Le forze apparenti nei fluidi

Abbandonando le ipotesi di barotropica e politropica, supponiamo di avere un fluido incomprimibile e che sia in rotazione rispetto all'asse z, posso esprimere il vettore velocità angolare e l'accelerazione di gravità come:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}$$
$$\vec{g} = -g\hat{z}$$

Figura 1: Forze apparenti nei fluidi



La quota z_0 è l'altezza del liquido nell'asse z_0. Preso un piccolo elemento di fluido piccolo a piacere, questo sentirà l'effetto di due forze: un effetto da parte della forza di gravità e anche la forza centrifuga (se osservato in un SdR inerziale). Ponendosi in coordinate cilindriche, posso definire $\vec{r}$ la distanza dall'asse di rotazione e quindi esprimere la forza centrifuga come:

$$\vec{F}_{cf} = \rho_0 dV\omega^2 r\hat{r}$$

Ossia diretta lungo la direzione radiale. La somma delle due forze può essere bilanciata solamente da una forza $\vec{\nabla}pdV$. Non ci resta altro che scrivere le relazioni:

$$\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$$

Posso esprimere il gradiente della forza da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche come

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\hat{z}$$
$$\implies \vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Posso allora esprimere la derivata parziale rispetto alla pressione come

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g \end{cases}$$

La pressione allora dipenderà solamente dalla distanza rispetto all'asse di rotazione e dalla quota z mentre non dipende dall'angolo di rotazione. Posso assumere allora che la pressione possa essere divisa in una funzione solo di r e una solo di z:

$$p(r,z) - p_0 = f_1(r) - f_2(z) = \rho_0 \frac{\omega^2}{p} r^2 - \rho_0 g z + c_1 + c_2$$

Posso allora esprimere le derivate parziali rispetto alle due funzioni, che derivano proprio da dalla derivata parziale della pressione rispetto a r e z.

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \implies f_1 = \rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 + c_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\rho_0 g \implies f_2 = -\rho_0 g z + c_2 \end{cases}$$

Per comodità posso escludere le costanti (dipende dal fatto che viene considerata la pressione p_0 nell'espressione della pressione in funzione del raggio e della quota): infatti quando $r = 0$ posso considerare le costanti come zero. infatti potrei esprimere la funzione della pressione come

$$\boxed{p(r,z) = \rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 - \rho_0 g z + p_0} \tag{4}$$

Se volessi trovare il valore di p_0, allora troverei la condizione

$$\rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 = \rho_0 g z$$

E dunque il valore di z per cui si ha p_0 sono tutti i punti con

$$z = \frac{\omega^2}{2}\frac{r^2}{g}$$

Tutte le isosuperfici sono date da una parabola nel grafico (ossia tutte le curve lungo le quali la pressione è la stessa). Quando un liquido ruota la superficie di un liquido tende a formare un paraboloide proprio per questo motivo analitico. Il pelo del liquido allora (ossia la superficie di contatto tra il fluido ed un altro fluido) tende a formare un vortice quando ruota.

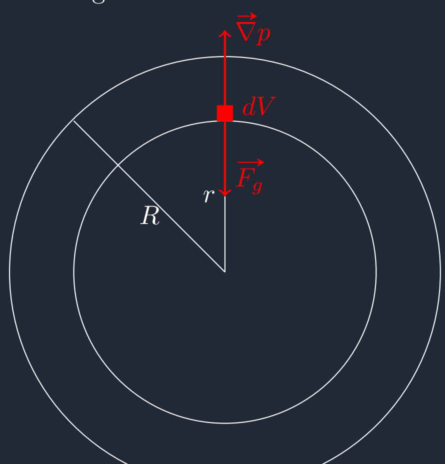
3 Autogravitazione dei fluidi nel caso di una sfera di fluido

Fino ad ora si era considerato equilibri tra forza di pressione e forza esterna (come la gravità) generate da corpi esterni. E' l'equilibrio tra le pressioni e la forza di gravità che mantiene intatti i corpi celesti. La forza esercitata su unità di massa è data da:

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho dV \hat{r}$$

Sto cercando di determinare la forza che agisce su di una parte del fluido dV da parte della gravità del fluido interno ad una distanza r dal centro. La parte di fluido di raggio r agisce su di

Figura 2: La sfera di fluido



una certa porzione del fluido dV ad una certa distanza r in **autogravità**, posso esprimere la massa a distanza r dall'origine della sfera

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r)\ dr$$

Posso cambiare sistema di riferimento ed utilizzare le coordinate sferiche ed esprimere il gradiente della pressione in funzione del versore $\hat{r}$ come

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{r}$$

Il gradiente di una forza in questo caso sarà dato dalla seguente relazione (devo trasformarlo dal sistema di riferimento cartesiano a quello sferico) utilizzando l'angolo θ rispetto alla verticale e l'angolo ϕ rispetto ad uno dei due assi perpendicolari a quello verticale ed il raggio r come la distanza dal centro della sfera si ha:

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

Posso allora derivare parzialmente la pressione (tuttavia considero solamente rispetto al raggio in quanto, essendo a simmetria sferica, le derivate rispetto a ϕ e θ sono zero):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -G\rho\frac{M(r)}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_0^2 r$$

Posso integrare da entrambe le parti con separazione di variabili e dunque ottenere l'integrale:

$$\int_{p_0}^{p} dp = -\int_{R_\oplus}^{r} \frac{4\pi}{3} G\rho_0^2 r'\ dr \implies -\frac{4\pi}{3}\rho_0^2\frac{G}{2}(r^2 - R_\oplus^2)$$

Dove $R_\oplus$ è il raggio della sfera. Posso allora esprimere la pressione con la seguente funzione:

$$p = p_0 + \frac{4}{3}\pi\rho_0^2\frac{G}{2}(R_\oplus^2 - r^2) = p_0 + \frac{4}{3}\pi\frac{G}{2}R_\oplus^2\rho_0^2\left(1 - \frac{r^2}{R_\oplus}\right)$$

La massa del pianeta è allora esprimibile come $M_\oplus = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_\oplus^3$. A questo punto posso esprimere la pressione come

$$p = p_0 + \frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\frac{\rho_0}{2}R_\oplus\left(1 - \frac{r^2}{R_\oplus}\right)$$

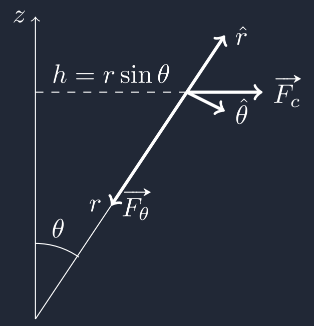
Dove $\frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = g_\oplus$. Per la Terra ottengo la pressione al centro di $\approx 10^{11}\ Pa$, ossia la pressione stimata della Terra con la sua massa, densità e raggio come se fosse un fluido di densità costante in tutti i punti.

3.1 Il pianeta fatto di fluido in rotazione

La distanza dall'asse di rotazione prende il nome di h mentre r è la distanza dal centro della massa di fluido in rotazione. Posso esprimere l'angolo rispetto alla verticale del vettore posizione con l'angolo θ. E quindi posso esprimere i vettori come

$$\vec{F_g} = -\frac{\rho_0 GM(r)}{r^2}\hat{r} = \rho_0^2 G\frac{4\pi}{3}r$$
$$\vec{F_c} = \rho_0\omega^2 h(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta}) = \rho_0\omega r\sin\theta(\sin\theta\hat{r} + \cos\theta\hat{\theta})$$

Figura 3: Lo schema delle forze nel fluido in rotazione autogravitante



Sapendo che

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0$$

La pressione ora deve bilanciare il contributo sia della forza di gravità che della forza centrifuga, allora posso esprimere la derivata della pressione sia su θ che su r:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_0^2\frac{4\pi}{3}rG + \rho_0\omega^2 r\sin^2\theta$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho_0^2\omega^2 r\sin\theta\cos\theta$$

Posso allora integrare come se θ fosse un parametro nella prima e quindi ottengo l'espressione della pressione in funzione del raggio e dell'angolo θ (dell'angolo ϕ non mi interessa in quanto sto considerando una sfera). Posso esprimere $f(\theta)$ come l'integrale della derivata parziale rispetto a θ:

$$p(r,\theta) - p_0 = -\rho_0^2 \frac{4\pi}{3} \frac{r^2}{2} G + \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2} \sin^2\theta + f(\theta)$$

Allora posso derivare rispetto a θ questa espressione

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho\omega^2 r^2 \sin\theta\cos\theta + f'(\theta)$$

Adesso se ponessimo il termine $\frac{1}{r}$ davanti all'espressione, dovrebbe essere uguale con l'espressione della derivata parziale trovata prima, uguagliandole:

$$f'(\theta) = 0 \implies f(\theta) = const$$

La soluzione è allora considerare una generica funzione $f(\theta)$ come costante ed esprimerla come C. Dato che ho scelto p_0 come la pressione al centro,allora la costante sarà tolta e otterrò

$$p(r,\theta) - p_0 = -\rho_0 \frac{r^2}{2} \left(G\rho_0 \frac{4\pi}{3} - \omega^2 \sin^2\theta \right) \tag{5}$$

Posso esprimere come si è fatto con il raggio della sfera e la massa della sfera in modo da ottenere $g_\oplus$, ossia l'accelerazione di gravità e quindi trovare l'espressione della pressione finale come

$$p - p_0 = \frac{r^2 \rho_0 g_\oplus}{2R_\oplus} \left(1 - \frac{\omega^2 R_\oplus}{g_\oplus} \sin^2\theta \right)$$