Appunti di Metodi

Tommaso Miliani

25-02-26

1 Introduzione al corso

- Prof: Panico
- Risorse per lo studio: Dispense del corso (complete, vengono aggiornate periodicamente, quelle con * non sono necessarie per passare e non sono richieste), la grande maggioranza delle dimostrazioni non saranno richieste all'orale. Eserciziario del corso con tutti i compiti degli anni passati.
- Esame: scritto (3 ore con 3 esercizi, uno per parte del corso) + orale che consiste in una discussione di argomenti (in modo più pratico) e di alcune dimostrazioni. La validità dello scritto è illimitata.

Si studia un estensione di geometria negli spazi vettoriali infiniti ed è necessaria per studiare meccanica quantistica. Si divide in tre parti

1. Analisi complessa: estensione del concetto di funzione, serie e integrale sul piano complesso
2. Analisi armonica: sviluppo delle funzioni complesse in serie di seni e coseni e trasformate integrali (Fourier e Laplace), ossia l'estensione continua dei seni e coseni.
3. Spazi di Hilbert: generalizzazione degli spazi vettoriali a dimensione infinita.

2 Introduzione all'analisi complessa

2.1 Richiami dei numeri complessi e notazioni

Tutta l'analisi complessa si basa sull'utilizzo dei numeri complessi. I numeri complessi sono un estensione del campo reale: questa estensione è ottenuta mediante il seguente numero

$$i^2 = -1 \tag{1}$$

che prende il nome di **unità immaginaria**, che serve per estendere i numeri reali al campo dei complessi. Un generico numero complesso z si scrive in questa maniera

$$z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R} \tag{2}$$

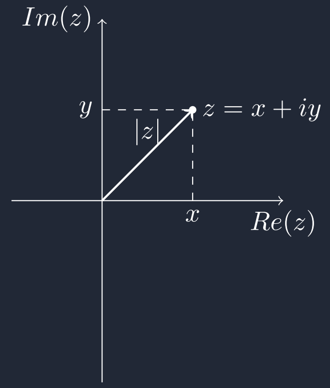
Generalmente valgono anche le stesse proprietà dei numeri reali, ricordando sempre che $i^2 = -1$. All'interno dei numeri complessi esiste un sottogruppo che corrisponde esattamente ai numeri reali (se $y = 0$), dunque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. La rappresentazione dei numeri complessi avviene sul **piano complesso**, dunque $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dunque ad ogni numero complesso corrisponde un punto sul piano complesso con ascissa x e ordinata y per un complesso generico $z = z + iy$.
Ai numeri complessi si associa il **norma, modulo, o valore assoluto**, che non è nient'altro che la lunghezza in figura

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}_+ \tag{3}$$

Si definisce l'operazione di **coniugazione complessa**, come l'operazione che manda

$$z \to z^\star \ (o\ \overline{z}) = x - iy \tag{4}$$

Figura 1: La rappresentazione di un generico numero complesso $z = x + iy$



Dunque la coniugazione complessa cambia il segno della parte immaginaria, mantenendo inalterata la parte reale che ha le seguenti proprietà:

- $|z|^2 = z \cdot z^\star = z^\star z = |z^\star|^2$
- $(z^\star)^\star = z.$
- $\frac{1}{z} = \frac{z^\star}{z^\star z} = \frac{z^\star}{|z|^2}$

Un'altra rappresentazione molto utile dei complessi sono le **coordinate polari**: esse permettono di rappresentare un numero complesso identificandolo mediante il suo modulo e l'angolo rispetto all'asse reale.

$$z = x + iy = r(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{5}$$

Se $r = 0$, l'angolo non è ben definito. Tuttavia, scritto in questa maniera, si può prendere qualsiasi valore di ϕ, così si limita ad una sola volta la copertura del piano complesso con $\phi \in [0, \alpha + 2\pi)$. Dove $r = |z|$ e l'angolo è anche chiamato **argomento di** z. La rappresentazione polare permette di esprimere in modo semplice il prodotto di numeri complessi, dunque l'insieme dei complessi contiene naturalmente il prodotto tra numeri complessi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)) \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Si definiscono anche le potenze di numeri complessi:

$$z^n = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) \qquad n \in \mathbb{Z}$$

L'estrazione di radici permette di ricavare tutte le soluzioni della seguente equazione

$$z^{\frac{1}{n}} \implies w^n = z$$

Ossia tutti gli w che risolvono tale equazione. Dunque si utilizza la notazione polare:

$$w = \rho(cos\theta + i\sin\theta) \qquad z = r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi))$$

La radice quadrata del modulo è ovvio, dunque $\rho = r^{\frac{1}{n}}$. Per identificare gli angoli dei vari numeri complessi, si potrebbe pensare a $n\theta = \phi$, tuttavia sto perdendo la periodicità dell'angolo, per tenere conto di questo si ottiene che

$$n\theta = \phi + 2\pi \implies \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$$

Le soluzioni distinte per teta sono infinite, tuttavia le devo identificare e dunque devo scegliere $k \in [0, n-1]$. Le radici di un numero complesso descrivono poligoni inscritti in un certo di raggio ρ. Le radici di un numero complesso qualsiasi si ottengono moltiplicando una delle radici per l'insieme delle radici dell'unità. Questo perché le radici di un complesso qualsiasi sono la rotazione e la dilatazione di un dato poligono formato dalle radici dell'unità (facilmente dimostrabile).

2.2 Topologia e metrica di $\mathbb{C}$

Una **topologia** è un insieme di intorni di un punto che si considera. Si introduce il concetto di **convergenza** su $\mathbb{C}$, estendendo il concetto di convergenza su $\mathbb{R}$. Visto che gli elementi dei complessi sono elementi di $\mathbb{R}^2$, dunque si considerano i limiti della parte reale e della parte immaginaria, se questi esistono, allora esistono anche su $\mathbb{C}$. Una successione di numeri complessi $\{z_n\}$ convergono se converge sia la parte reale che quella immaginaria:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} Re(z_n) = Re(z) \\ \lim_{n\to\infty} Im(z_n) = Im(z) \end{cases}$$

Equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

Si possono vedere con due topologie differenti: la prima utilizza topologie rettangolari mentre la seconda utilizza le palle aperte e dunque sono equivalenti. Dunque $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico con la **distanza** definita dal modulo della differenza tra due numeri complesso z_1 e z_2:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

Data questa distanza si definiscono gli insieme degli intorni di quel punto, ossia le palle aperte di quel punto. Dunque gli intorni di z sono le collezioni di palle aperte con raggio $r = |z|$:

$$z : B(z, r)$$

Se z_n è di Cauchy, anche x_n e y_n sono di Cauchy. Dunque $\mathbb{C}$ è uno **spazio completo**, ossia ogni successione di Cauchy ha limite. Si può introdurre la **norma** per $\mathbb{C}$, in quanto sussiste l'isomorfismo con $\mathbb{R}^2$, e dunque è uno spazio normato con

$$\|z\| = |z| \tag{6}$$

Ossia la norma naturale su $\mathbb{R}^2$. Dunque anche $\mathbb{C}$ è uno spazio di Banach. Con $\mathbb{C}$ non esiste un ordinamento naturale dei numeri: l'isomorfismo con $\mathbb{R}^2$ non permette di mantenere questo ordinamento. Le uniche disuguaglianze che si possono fare tra complessi coinvolgono il modulo.

3 Serie su $\mathbb{C}$

Su $\mathbb{R}$ una serie di potenze converge in un dato intervallo. Si definiscono le successioni su $\mathbb{C}$ così come si è fatto per $\mathbb{R}$; si dice che una serie converge quando la successione delle somme parziali converge.

Definizione 3.1 (Serie di potenze)**.**
*Data una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, e si considerano le **ridotte parziali***

$$\sum_{n=0}^{N} z_n = S_N$$

Se converge la successione delle ridotte parziali, allora si dice che la serie è convergente:

$$\lim_{n\to\infty} S_N = S = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

Così come su $\mathbb{R}$, per essere convergente esiste una condizione necessaria su z_n. Su $\mathbb{R}$ z_n deve essere infinitesimo, dunque la successione dei moduli deve essere infinitesima.

Teorema 3.1 (Condizione necessaria per la convergenza)**.**
La condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza è che $|z_n|$ sia una successione infinitesima:

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$$

Si possono utilizzare dei criteri molto simili a quelli che si utilizzano su $\mathbb{R}$, che si applicano alla successione dei moduli per ottenere la convergenza della serie.

Teorema 3.2 (criterio del rapporto)**.**
La serie $\sum_n z_n$ è convergente se

$$\exists\ p\ :\ 0 \le p < 1,\ \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \le p \quad \forall n \ge \overline{n}$$

Il secondo criterio di convergenza è

Teorema 3.3 (Criterio delle radici)**.**
La serie $\sum_n z_n$ è convergente se

$$\exists\ p\ :\ 0 \le p < 1,\ \overline{n} \in \mathbb{N}\ :\ |z_n|^{\frac{1}{n}} \le p \quad \forall n \ge \overline{n}$$

Definizione 3.2 (Convergenza assoluta)**.**
La serie $\sum_n z_n$ converge assolutamente se $\sum_n |z_n|$ converge.

Teorema 3.4 (Conv assoluta $\implies$ con standard)**.**
La convergenza assoluta implica la convergenza standard

Teorema 3.5 (Criterio del confronto)**.**
*Se una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ complessa è maggiorata in **modulo** da una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri reali non negativi, la cui serie associata converge, allora anche la successione complessa converge, e dunque converge anche assolutamente.*

4 Serie di potenze

Sono delle potenze, così come sono state definite in $\mathbb{R}$, centrata in un qualsiasi punto di $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \begin{matrix} a_n \in \mathbb{C} \\ z, z_0 \in \mathbb{C} \end{matrix} \tag{7}$$

La potenza 0 è sempre interpretata come l'identità in una serie (ossia il caso banale). Il caso in cui $z_0 = 0$ è il caso più semplice in quanto le conclusioni che si hanno per questo caso valgono anche per il caso in cui si trasli di un qualsiasi numero complesso z_0. Dunque

$$\sum_{n=0}^{n} a_n z^n$$

Si definisce ora l'**insieme di convergenza**:

Definizione 4.1.
L'insieme di convergenza è dato dall'insieme degli $\mathbb{C}_a \equiv \{z\} \in \mathbb{C}$ tali per cui la somma $\sum_n a_n z^n$ converge. La notazione $\mathbb{C}_a$ ci ricorda che ogni serie ha un insieme di convergenza ben definito e diverso da ogni altra serie.

Si dimostra adesso il lemma di Abel che caratterizza l'insieme di convergenza di una serie.

Proposizione 4.1 (Lemma di Abel)**.**
Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $a_n w^n$ sia limitata. Allora $\forall z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |w|$, allora la serie $\sum_n a_n z^n$ converge assolutamente

Dimostrazione. Si utilizza il teorema del confronto costruendo una serie convergente a partire dalla serie $a_n w^n$. Si ha che

$$|a_n w^n| \leq M$$

si può vedere

$$\begin{aligned} |a_n z^n| &= \left| a_n w^n \frac{z^n}{w^n} \right| \\ &= |a_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{w} \right|^n \end{aligned}$$

Dato che la serie sulla destra è convergente, allora anche quella a sinistra della disuguaglianza è convergente assolutamente poiché si è maggiorato i moduli. Dunque converge in tutto il cerchio aperto costruito a partire dal modulo di w, ossia sulla palla aperta $B(0, |w|)$. ☐

Dato che si è parlato di convergenza su di un cerchio, si definisce il **raggio di convergenza**

Definizione 4.2.
In una serie, il raggio di convergenza è definito come $\sup\{|z| : z \in \mathbb{C}_a\}$*, ossia l'insieme dei moduli tali per cui si ha convergenza. Ovviamente è un numero reale e non negativo (che può essere anche zero in determinati casi).*

L'insieme di convergenza sarà un cerchio con raggio definito il raggio di convergenza. Dal lemma di Abel si ha che l'interno del cerchio si ha convergenza assoluta, dunque l'interno del cerchio fa parte dei punti di convergenza. Sul bordo del cerchio dipende dalla serie (tipicamente se è presente convergenza, essa non è assoluta). In generale la palla aperta di raggio r_a è nel raggio di convergenza e esso è incluso nella palla chiusa di raggio r_a. Si vede, dal Lemma di Abbel, che ciò che sta fuori dal cerchio i termini divergono. Se si trova un punto in cui i moduli sono limitati, quello è il bordo del cerchio. Il risultato caratterizza gli insiemi di convergenza:

Teorema 4.1.
L'insieme di convergenza $\mathbb{C}_a$ contiene il cerchio aperto $B(0, R_a)$ ed è contenuto nel cerchio chiuso $B(0, R_a)$. Sulla frontiera non si sa esattamente cosa accade.

Questo risultato ci dice che se si volesse trovare il raggio di convergenza, si potrebbe studiare la serie dei moduli (ossia una serie sui reali). Si estrae dunque il raggio di convergenza che è applicabile su $\mathbb{C}$.