

Analisi

Tommaso Miliani

12-12-24

1 Proseguo serie

Esempi di serie convergenti e divergenti: Divergenti:

$$a_n = 1 \quad \forall n \Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N 1 = +\infty$$

$$\begin{aligned} a_n &= n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n \\ S_n &= 1 + 2 + \cdots + n \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Indeterminate (devo scegliere una successione che cambi segno, altrimenti o converge o diverge):

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{con } n \text{ pari} \\ -1, & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \text{indeterminata} \end{aligned}$$

Se ne sommo un numero pari ottengo 0, se sommo un numero dispari di numeri allora si ha -1, e quindi $\nexists \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$. Convergente:

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \quad \forall n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ S_0 &= S_1 = \cdots = 0 \\ S_N &= 0 \quad \forall N. \end{aligned}$$

Un'altro esempio convergente non banale (che parte da zero poiché è definita pure in zero):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Per risolvere gli esercizi ci sono due serie di riferimento: quelle armoniche e quelle geometriche che si possono utilizzare:

2 Serie geometriche

Queste sono delle serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q \in R \tag{1}$$

Il termine q è anche chiamato ragione della serie: sto sommando un numero reale che io ho scelto all'inizio e lo sommo infinite volte: Fissato un numero $N \in N$ molto grande, allora considero:

$$\begin{aligned} (1 + q + \cdots + q^N)(1 - q) \\ \Rightarrow 1 - q^{N+1} \end{aligned}$$

Allora si ha che:

$$1 + q + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

HA quindi come somme parziali:

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \quad \forall N \in \mathbb{N}, q \neq 1.$$

Adesso passando al limite per $N \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1}$$

Adesso bisogna discutere il limite al variare del parametro q:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q > 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ 0 & \text{se } q < |1| \\ \emptyset & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Adesso tornando alle somme parziali si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } q < |1| \\ \emptyset & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Allora tornando alla serie di partenza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{diverge, se } q > 1 \\ \text{diverge se } q = 1 \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q} \text{ se } q < |1| \\ \emptyset \text{ se } q \leq -1 \end{cases}$$

Altra osservazione: noi sappiamo che $1, \bar{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ posto allora $q = 1/10$ si ha proprio la sommatoria geometrica generata prima. E ci permette di ottenere la frazione generatrice di tutti i numeri periodici:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{10}{9}$$

3 Serie armoniche

Una serie armonica è una serie che somma infiniti numeri molto piccoli che però divergono.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \tag{2}$$

Dimostrazione. Posta la somma parziale:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Osservo che questa cresce al crescere di N ed il motivo è che sto sommando termini positivi e quindi si ha che $S_{N+1} \geq S_N$. Supponiamo ora per assurdo che $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N = S \in \mathbb{R}$ e che quindi converga: allora prendo una somma che ha come indice il doppio di un numero naturale: S_{2N} allora ho 2N addendi e se guardo alla somma "dei primi N addendi" si ha esattamente S_N allora $S_{2N} = S_N + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N}$. Voglio dimostrare ora che questa differenza è costante: allora la disegualanza sopra è dimostrata e quindi $S_{2N} \geq S_N + \frac{1}{2}, \forall N$, allora siccome ho assunto che S_N tenda ad S, passando al limite ottengo $S \geq S + \frac{1}{2}$ allora si ha un assurdo. La serie è dunque divergente. \square

4 I criteri delle serie

Teorema 4.1 (Criterio del confronto). *Nelle serie generate da due successioni tali che: $0 \leq a_n \leq b_n$ Se allora diverge a_n allora anche la serie di b_n diverge. Se invece converge la serie grande (b_n) allora converge anche la piccola.*

Teorema 4.2 (Criterio del confronto asintotico). *Siano $a_n, b_n \geq 0$, $b_n > 0$ allora*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), L \neq 0. \quad (3)$$

E quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Esempio: determinare il carattere della serie

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \\ & a_n = \log\left(1 + \frac{1}{2^n}\right), b_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \end{aligned}$$

Allora hanno lo stesso carattere ed esiste finito il limite della serie di partenza.

Teorema 4.3 (Criterio della radice). *Posta la serie a_n con $n \in N$ allora se:*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = L \quad (4)$$

Se $L > 1$ la serie diverge, altrimenti converge.

Teorema 4.4 (Criterio del rapporto). *Se*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad (5)$$

Se $L > 1$ la serie diverge, altrimenti converge.

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Scelta allora la successione

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene che:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} &= 0, L < 1. \end{aligned}$$

La serie quindi converge (Potevo utilizzare la serie armonica $\frac{1}{n^2}$ e grazie al criterio del confronto si otteneva la convergenza)

Teorema 4.5 (Criterio dell'integrale). *Sia una funzione definita in $f[1, +\infty]$ continua e decrescente. Ponendo $a_n = f(x)$ $\forall n \in N$. Quindi:*

$$\int_1^{+\infty} f(x)$$

E la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(x) \right)$$

Hanno lo stesso carattere.