Analisi II - Massimi e minimi

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Massimi e minimi locali

Trovare i punti di punti di massimo e minimo locale delle funzioni sottostanti, nei relativi insiemi

1. $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + x^2y + xy^2 - \frac{x^2}{2} - xy$
   in $D = \{(x,y) : |x| \leq 5, |y| \leq 5\}$

2. $f(x,y) = \frac{(3y-x^2-y^2)(2y^2-9y+12)}{3-y}$
   nel cerchio aperto di centro $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ e raggio $\frac{3}{2}$

3. $f(x,y) = 12x^3 + 4x^2y - 5xy^2 - 2y^3 + 4x^2 + y^2 + 4xy$
   in $\mathbb{R}^2$

4. $f(x,y) = \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} - xy$
   in $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

5. $f(x,y) = (r-5)^2(r-1)e^{-3x+4y}$
   con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$

6. $f(x,y) = \ln(r^2 + \sqrt{1+r^4}) + x + y$
   con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ in $\mathbb{R}^2$

7. $f(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)(1-x^2-y^2)$
   in $\mathbb{R}^2$

*esercizi dei prof *Gabriele Bianchi*, *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

8. $f(x,y) = -3x^3 + 6x^2y + 2y^3 - 3x - 6y$
in $\mathbb{R}^2$

9. $f(x,y) = (1 + |x|)(1 + 6x)^2(1 - |x| - |y|)$
nel quadrato di vertici $(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)$

10.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{1+y^2}(16x^2y^2 + 16y^4 + 2x^2 - 19y^2 + 3) & \text{se } |y| \le 1,\ (x,y) \in \mathbb{D} \\ f(0,\pm 1) = 5 \end{cases}$$
in $\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 \le 1\}$

11. $f(x,y) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{481}{250}y$
in $\mathbb{R}^2$
Determinare se esiste un minimo di f ristretta al quadrante $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$, e in caso affermativo calcolarlo

12. Sia $\mathbb{T}$ il triangolo di vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$, e $f(x,y)$ la distanza di (x,y) dal complementare di $\mathbb{T}$.
Calcolare il massimo di f in $\mathbb{R}^2$

13. Tra tutti i triangoli di vertice in $(0,0,1)$ con un vertice sulla retta $\begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$
e l'altro sulla retta $\begin{cases} y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$, trovare quello di area minima

14. Determinare il massimo e il minimo assoluto di
$$f(x,y) = |x|^{\frac{1}{4}} + |y|^{\frac{1}{4}}$$
su $\{x^2 + y^2 \le 2\}$

15. Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di:
$$f(x,y) = x^2y^2 - x^4 + 2x^2$$
nella striscia $S := \{(x,y) : 0 \le x \le 2\}$

2 Massimi e minimi vincolati

1. Determinare i valori estremi di:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

che soddisfano i vincoli:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$g_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$$

Suggerimento: $\{g_1 = 0\}$ è un cilindro parallelo all'asse z, $\{g_2 = 0\}$ è un piano

2. Determinare il valore minimo di:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

che soddisfa i vincoli:

$$g_1(x,y,z) = x + 2y + z - 1 = 0$$

$$g_2(x,y,z) = 2x - y - 3z - 4 = 0$$

3. Determinare massimi e minimi di

$$f(x,y) = 4x^2 + 2y^2 - 2x$$

su $\mathbb{D} = \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 2y^2 + x^2 = 1 \end{cases}$

4. Determinare gli estremi vincolati di

$$f(x,y) = x^2 - xy^2$$

su $\mathbb{Z} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\}$

5. Determinare il valore massimo di

$$f(x,y) = xy - x^3y^2$$

nel quadrato $\{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

6. Determinare il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

nel triangolo di vertici $(0,0), (1,0)$ e $(0,1)$

7. Determinare il valore massimo di

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$$

nel triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = \pi$

8. La temperatura in tutti i punti del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ è data da

$$T = (x + y)e^{-x^2-y^2}$$

Determinare la temperatura massima e la temperatura minima del disco

9. Determinare il valore massimo e il valore minimo di

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}$$

nel semipiano superiore $y \geq 0$

10. Determinare massimi e minimi di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

su $\{y^2 - x^2 + x^4 = 0\}$

3 Studio di funzione

1. Calcolare gradiente e matrice Hessiana di di:
$$f(x,y) = x^4 + 4y^4 - 4xy$$
in $\mathbb{R}^2$.
Determinare poi i punti critici di $f(x,y)$ e studiarne la natura

2. Calcolare gradiente e matrice Hessiana di:
$$f(x,y) = x^2y - x^2 - y^2$$
in $\mathbb{R}^2$.
Determinare poi i punti critici di $f(x,y)$ e studiarne la natura

3. Studiare, se esistono, punti di massimo, di minimo relativo o di sella di:
$$f(x,y) = \left(x + 2y - y^2\right) x^2$$

4. Studiare, se esistono, punti di massimo, di minimo relativo o di sella di:
$$f(x,y) = x^2 \ln(1+y) + y^2x^2$$
nel suo dominio di definizione

5. Studiare la funzione:
$$f(x,y) = x^8 - 2x^4y + y^3 - y$$

6. Studiare la funzione:
$$f(x,y) = \left(x^2 + x|y| + y^2\right) e^{x-y}$$

7. Studiare la funzione:
$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2y^2\right)$$

8. Studiare la funzione:
$$f(x,y) = 2x\ e^{-(x^2+y^2)}$$

9. Studiare la funzione:
$$f(x,y) = (x-1)^2(y^2 - 4x^2)$$

10. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto di:
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$$
su $\mathbb{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\right\}$

Suggerimento 1: Cercare gli eventuali punti critici in $\overset{\circ}{\mathbb{D}}$ (non serve studiarne la natura con l'Hessiana) Studiare poi i massimi e i minimi di f ristretta a $\partial\mathbb{D}$, e a quel punto basta confrontare i valori della funzione per trovare massimo e minino assoluto