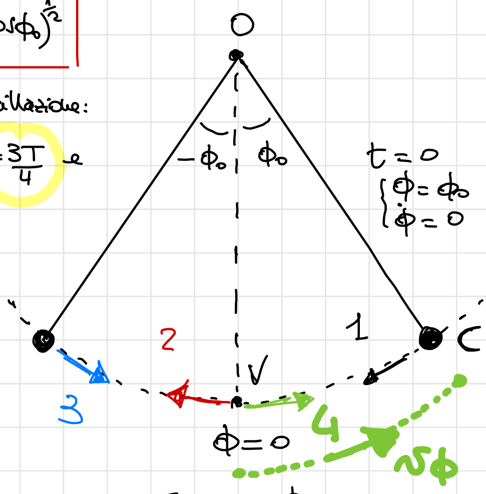
DERIVAZIONE DEL PERIODO T del pendolo semplice in moto ideale PER OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA

Per oscillazioni di ampiezza generica NON siamo in grado di risolvere l'eq. di moto $\left(\ddot{\phi}+\frac{g}{\ell}\sin\phi=0\right)$ ottenendo una soluzione analitica per $\phi=\phi(t)$, tuttavia, possiamo determinare una relazione per T PARTENDO DALL'INTEGRALE PRIMO DEL MOTO.

NOTA ⇒ questo argomento è trattato in dettaglio nell'App. A delle dispense: qui ci limitiamo a illustrare l'impostazione e la logica della procedura, rimandando per il dettaglio dei passaggi algebrici alla lettura dell'Appendice A.

* abbiamo visto che ciascuno dei 4 quarti in cui è suddivisa ogni oscillazione completa (da partenza in ϕ_0 a ritorno in ϕ_0) ha una uguale durata pari a $\frac{T}{4}$.
* nella prima metà dell'oscillazione (da ϕ_0 a $-\phi_0$) la velocità (angolare, $\dot{\phi}$, e tangenziale, $v_\phi=\ell\dot{\phi}$) è negativa, mentre nella seconda metà (da $-\phi_0$ a ϕ_0) è positiva.
* $\dot{\phi}^2=2\frac{g}{\ell}(\cos\phi-\cos\phi_0) \Rightarrow \boxed{\dot{\phi}=\pm\left(2\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\phi-\cos\phi_0)^{\frac{1}{2}}}$



* Fissiamo l'attenzione sull'ultimo quarto dell'oscillazione: il pendolo ripassa da $\phi=0$ nella fase di RITORNO a $t_3=\frac{3T}{4}$ e arriverà in ϕ_0, chiudendo l'oscillazione, per $t_4=T$.
* in questa fase del moto $\dot{\phi}>0$ (e $v_\phi>0$), dunque useremo la radice positiva:

$$\frac{d\phi}{dt}=\left(2\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\phi-\cos\phi_0)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$d\phi=\left(2\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}(\cos\phi-\cos\phi_0)^{\frac{1}{2}}\cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi}{\left[2(\cos\phi-\cos\phi_0)\right]^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}dt \Longrightarrow \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\frac{3T}{4}}^{T}dt=\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\left[2(\cos\phi-\cos\phi_0)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

integro fra $t_3=\frac{3T}{4}$ e $t_4=T$ ⟶ $\phi(t_3)=0$ e $\phi(t_4)=\phi_0$!

⟹

$$\Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{3T}{4}}^{T} dt = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{[2(\cos\phi - \cos\phi_0)]^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \left(\frac{g}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{T}{4} = \int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{[2(\cos\phi - \cos\phi_0)]^{\frac{1}{2}}}$$

$\Rightarrow$ l'integrale in $d\phi$ è un integrale "complicato", non riportabile ad una combinazione di funzioni trascendenti elementari in numero finito $\Rightarrow$ TUTTAVIA, con un OPPORTUNO CAMBIO DI VARIABILE lo si può ricondurre ad un altro integrale ugualmente complicato, ma RICONOSCIBILE come un INTEGRALE NOTO E TABULATO, detto "INTEGRALE ELLITTICO COMPLETO DI PRIMA SPECIE".

$\Rightarrow$ cambio di variabile da ϕ a ϑ secondo la relazione

$$\sin\frac{\phi}{2} = \sin\frac{\phi_0}{2} \cdot \sin\vartheta \qquad (\text{dove } \phi_0 = \text{ampiezza angolare dell'oscillazione!!})$$

$\Rightarrow$ con una serie di passaggi algebrici per passare da ϕ a ϑ e da $d\phi$ a $d\vartheta$ (VEDERE I DETTAGLI in App. A delle dispense) il risultato finale della trasformazione è

$$\int_0^{\phi_0} \frac{d\phi}{[2(\cos\phi - \cos\phi_0)]^{\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\left[1 - \sin^2\frac{\phi_0}{2} \sin^2\vartheta\right]^{\frac{1}{2}}} = K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ l'integrale è dunque una funzione del parametro $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$!

$\Rightarrow$ tornando alla nostra uguaglianza di partenza avremo quindi

$$T = 4\left(\frac{\ell}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\left(1 - \sin^2\frac{\phi_0}{2} \sin^2\vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}\right] = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$$

* Se, come sicuramente è vero nel nostro caso, è $\sin^2\frac{\phi_0}{2} < 1$, allora l'integrale ellittico, indicato sinteticamente con $K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$, HA UNA RAPPRESENTAZIONE COME SERIE DI POTENZE DI $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$ CONVERGENTE $\Rightarrow$

[pendolo_2,3]

⇒ scriviamo esplicitamente i primi termini della serie di potenze di $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$:

$$K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\phi_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\phi_0}{2}+o\left(\sin^4\frac{\phi_0}{2}\right)\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$K\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\underbrace{\left\{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_0}{2}+o\left(\sin^4\frac{\phi_0}{2}\right)\right\}}_{\mathcal{F}(\phi_0)}=\frac{\pi}{2}\mathcal{F}(\phi_0)$$

⇒ dunque, nel caso di OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA,

$$T=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\frac{\pi}{2}\mathcal{F}(\phi_0)=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot\mathcal{F}(\phi_0)\Rightarrow\boxed{T=\underbrace{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}_{T_0\,!!}\cdot\mathcal{F}(\phi_0)}$$

$$\Rightarrow\boxed{T=T_0\cdot\mathcal{F}(\phi_0)}$$

QUINDI:

* PER IL PENDOLO SEMPLICE IN MOTO IDEALE E OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA,

  $T=T(\phi_0)$ ⇒ il periodo dipende dalla ampiezza angolare ϕ_0 dell'oscillazione ⇒ OSCILLAZIONI PERIODICHE MA NON ISOCRONE

  ANISOCRONISMO delle oscillazioni di ampiezza generica

* la dipendenza da ϕ_0 passa attraverso la funzione $\mathcal{F}(\phi_0)$ che moltiplica il periodo nel limite delle piccole oscillazioni, T_0.

* il periodo risulta $T(\ell,g,\phi_0)=T_0(\ell,g)\cdot\mathcal{F}(\phi_0)$

* La funzione $\mathcal{F}(\phi_0)$ può essere valutata con la precisione che vogliamo e che è opportuna a seconda del caso, semplicemente esprimendola considerando più o meno termini della serie di potenze.

⇒

$\Rightarrow$ analizziamo $\mathcal{Y}(\phi_0)$ più in dettaglio

$$\mathcal{Y}(\phi_0) = 1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_0}{2} + o\left(\sin^4\frac{\phi_0}{2}\right)$$

- il termine dominante è SEMPRE l'unità, cioè il termine di ordine zero
- il termine di DIPENDENZA da ϕ_0 DOMINANTE è sempre quello del primo ordine in $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$, cioè $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$, e il termine successivo è sempre minore $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} > \frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_0}{2} + o\left(\sin^4\frac{\phi_0}{2}\right)$ $\left(\sin^2\frac{\phi_0}{2} < 1 !\right)$

$\Rightarrow$ data (misurata) l'ampiezza angolare ϕ_0 della oscillazione possiamo rappresentare il PERIODO T e la sua dipendenza da ϕ_0 CON LA PRECISIONE che vogliamo cioè quella che meglio si adegua alla configurazione sperimentale in laboratorio....

* $\boxed{T = T(\ell, \phi_0, g) = T_0(\ell, g)\cdot\mathcal{Y}(\phi_0)}$ $\Rightarrow$ le grandezze che dovremo misurare in laboratorio, per arrivare a determinare g saranno dunque ℓ, ϕ_0 e T.

* Nella specifica configurazione dei pendoli in LABORATORIO il range di valori di ϕ_0 per i quali possiamo fare misure di periodo è compreso approssimativamente fra $\sim 10°$ e $\sim 25°$.

$\phi_0^{(0)}$	ϕ_0(rad)	$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$	$\frac{9}{64}\sin^4\frac{\phi_0}{2}$
$\sim 5°$	~ 0.087	$\sim 4.8\times10^{-4}$	$\sim 5\times10^{-7}$
$\sim 10°$	~ 0.175	$\sim 1.9\times10^{-3}$	$\sim 8\times10^{-6}$
$\sim 20°$	~ 0.349	$\sim 7.5\times10^{-3}$	$\sim 1.3\times10^{-4}$
$\sim 25°$	~ 0.436	$\sim 1.17\times10^{-2}$	$\sim 3.1\times10^{-4}$

$\Rightarrow$ dalla tabellina esemplificativa possiamo confrontare i primi due termini di dipendenza da ϕ_0 per l'espressione del periodo

- col crescere di ϕ_0, $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$ cresce e crescono entrambe i termini riportati, ma nel nostro range rappresentativo di valori di ϕ_0, $\sin^2\frac{\phi_0}{2}$ è SEMPRE FORTEMENTE DOMINANTE

$\Rightarrow$

⇒ la rappresentazione più semplice, ma comunque significativa, della dipendenza del periodo T dall'ampiezza angolare ϕ_0 è quindi:

$$T \simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) = T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$$

* abbiamo adesso gli elementi necessari per confrontare la schematizzazione "generale" del problema fisico, per ampiezze angolari generiche, con quella del LIMITE delle PICCOLE OSCILLAZIONI (periodo T_0).
* Possiamo quindi CHIEDERCI SE E SOTTO QUALI CONDIZIONI IL MOTO OSCILLATORIO DI UN PENDOLO SIA DESCRIVIBILE NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI, arrivando così a DEFINIRE IL LIMITE P.O. anche dal punto di vista FISICO-SPERIMENTALE.

* capiremo anche sotto quali condizioni INVECE la schematizzazione che descrive correttamente il MOTO DEL PENDOLO come lo osserviamo in LABORATORIO DEBBA ESSERE quella del pendolo semplice e ideale CON OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA, nella quale il PERIODO è $T = T_0 \cdot f(\phi_0)$ ⇒ OSCILLAZIONI ANISOCRONE

⇒ PER PROCEDERE, valutiamo la differenza relativa fra i periodi nelle due schematizzazioni (LIMITE P.O. e OSCILLAZIONI DI AMPIEZZA GENERICA) per lo stesso pendolo nello stesso luogo (⇒ STESSA l, STESSO VALORE di g)
⇒ questa differenza relativa definisce l'ERRORE DI SCHEMATIZZAZIONE RELATIVO, che è l'errore relativo che si commetterebbe interpretando un periodo MISURATO utilizzando la schematizzazione del LIMITE delle PICCOLE OSCILLAZIONI, più "semplice", invece di interpretarlo assumendo come schematizzazione fisica quella generale, completa e corretta per qualunque valore dell'ampiezza angolare ϕ_0. ⇒

⇒ ERRORE DI SCHEMATIZZAZIONE RELATIVO:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{schem.} = \frac{|T(\ell,g,\phi_0) - T_0(\ell,g)|}{T(\ell,g,\phi_0)} = \frac{T - T_0}{T} =$$

in questo caso, poiché $T(\phi_0) - T_0 > 0$!!

$$= \frac{T_0\,\mathcal{F}(\phi_0) - T_0}{T_0\,\mathcal{F}(\phi_0)} = \frac{\cancel{T_0}(\mathcal{F}(\phi_0) - 1)}{\cancel{T_0}\,\mathcal{F}(\phi_0)} \simeq$$

$$\simeq \frac{\cancel{1} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} - \cancel{1}}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} = \frac{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}{1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} \simeq$$

$[(1+x)^{-1} \simeq 1-x$ per $x \ll 1]$

$$\simeq \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) \simeq \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} - \cancel{\frac{1}{16}\sin^4\frac{\phi_0}{2}} \simeq \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$$

termine di ordine superiore!

$$\boxed{\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{schem} \simeq \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}$$

⇒ differenza relativa fra le due schematizzazioni per descrivere il sistema fisico e interpretare il periodo che MISURIAMO.

⇒ IN AMBITO SPERIMENTALE la quantità con cui dobbiamo confrontare questo errore di schematizzazione relativo è

$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}$ l'INCERTEZZA RELATIVA SPERIMENTALE che caratterizza la MISURA DEL PERIODO nella nostra configurazione sperimentale.

⇒ IN AMBITO SPERIMENTALE la quantità con cui dobbiamo confrontare questo errore di schematizzazione relativo è $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}$ l'INCERTEZZA RELATIVA SPERIMENTALE che caratterizza la MISURA DEL PERIODO nella nostra configurazione sperimentale.

⇒

Ⓐ SE $\boxed{\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{schem.} \ll \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}}$ $\Rightarrow \frac{T-T_0}{T} \ll \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} \ll \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim}}$

⇒ la differenza dovuta alla diversa schematizzazione che posso scegliere per interpretare le misure è TRASCURABILE, perché NON RILEVABILE rispetto all'incertezza di misura ⇒ DIFFERENZA NON SIGNIFICATIVA ⇒ È LECITO L'UTILIZZO DELLA PIÙ SEMPLICE RAPPRESENTAZIONE del moto, cioè del LIMITE DELLE PICCOLE OSCILL.

* se pongo $T_{mis} = T(\ell, g, \phi_0)$ oppure $T_{mis} = T_0(\ell, g)$ $\Big\}$ ⇒ differenza $\ll \Delta T$ = incertezza sperim. su T_{mis}

* se faccio misure per $\phi_0 = \phi_{01}$ e $\phi_0 = \phi_{02}$ e pongo

$$\left.\begin{aligned} T_{mis}(\phi_{01}) &= T(\ell, g, \phi_{01}) \\ T_{mis}(\phi_{02}) &= T(\ell, g, \phi_{02}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow |T(\ell, g, \phi_{02}) - T(\ell, g, \phi_{01})| \ll \Delta T$$

⇒ anisocronismo NON RILEVABILE con la PRECISIONE della MISURA

⇓ quindi, in questo caso si può adottare la DESCRIZIONE in termini del LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

⇓ abbiamo così una DEFINIZIONE DEL LIMITE delle P.O. DAL PUNTO DI VISTA FISICO-SPERIMENTALE: la situazione in cui la precisione della misura del PERIODO del moto NON È SUFFICIENTE ad EVIDENZIARE LA DIPENDENZA DI T da ϕ_0 e quindi la DIFFERENZA FRA T_0 e $T(\phi_0)$

$$\Rightarrow \frac{T(\phi_0) - T_0}{T(\phi_0)} \simeq \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} \ll \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}$$

⇒

(B) SE $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{schem.} \gtrsim \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} \gtrsim \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim.}}$

$\Rightarrow$ l'errore di schematizzazione che si commetterebbe considerando il periodo misurato T_{mis} come interpretabile nel LIMITE P.O. $[T_{mis} = T_0(\ell, g)]$ sarebbe SUPERIORE o dell'ordine dell' INCERTEZZA SPERIMENTALE $\Rightarrow$ DIFFERENZA FRA LE DUE SCHEMATIZZAZIONI a confronto SENSIBILE rispetto all'incertezza di misura

$\Rightarrow$ se ponessi $T_{mis} = T_0$, farei un errore > del ΔT

$\Rightarrow$ precisione della misura vanificata, perché INTERPRETAZIONE del fenomeno SCORRETTA $\Rightarrow$ risultati finali (g) non corretti !

$\Rightarrow$ in queste condizioni è NECESSARIO adottare la SCHEMATIZZAZIONE GENERALE, PER AMPIEZZE ANGOLARI GENERICHE $[T_{mis} = T(\ell, g, \phi_0)]$

↳ QUAL E' IL NOSTRO CASO ??

* NELLA NOSTRA CONFIGURAZIONE SPERIMENTALE

tipicamente avremo $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim} \simeq 10^{-3}$ – "qualche" $\times 10^{-3}$, da confrontare numericamente con i valori di $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$ $\Rightarrow$

$\phi_0^{(°)}$	ϕ_0(rad)	$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}$
~5°	~0.087	$\sim 4.8 \times 10^{-4}$
~10°	~0.175	$\sim 1.9 \times 10^{-3}$
~20°	~0.349	$\sim 7.5 \times 10^{-3}$
~25°	~0.436	$\sim 1.17 \times 10^{-2}$

- già per $\phi_0 \sim 10°$ è $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} \gtrsim \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim} \simeq 10^{-3}$
- per $\phi_0 \gtrsim 10°$ è $\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} > \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sperim}$ anche sensibilmente !

⇓ la differenza fra le due schematizzazioni a confronto NON è TRASCURABILE $\Rightarrow$ adottare il LIMITE P.O. SAREBBE INADEGUATO e CONDURREBBE A RISULTATI SCORRETTI $\Rightarrow$ la nostra misura è sufficientemente precisa da RICHIEDERE DI ADOTTARE LA SCHEMATIZZAZIONE GENERALE, PER AMPIEZZE ANGOLARI dell'oscillazione GENERICHE, secondo la quale

$$T_{mis} = T(\ell, g, \phi_0) = T_0(\ell, g)\cdot \mathcal{J}(\phi_0) \simeq T_0(\ell, g)\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)$$

e il periodo dipende SIGNIFICATIVAMENTE dall'ampiezza angolare ϕ_0.

=> operando correttamente nell'esecuzione delle misure, saremo in grado di evidenziare l' ANISOCRONISMO delle oscillazioni.

$$\left[T_{mis} = T(\phi_0) \right]$$