Geometria

Tommaso Miliani

05-12-24

1 Esercizio 6

E' data una matrice endomorfica:

$$f : M(n \times n, R) \to M(n \times n, R)$$
$$Im(f) = S_n(R) \ matrice \ simmetrica \ n \times n$$
$$Ker(f) = A_n(R) \ matrice \ antisimmetrica \ n \times n$$

Se B è simmetrica allora B si ottiene come:

$$B = f\left(\frac{1}{2}B\right)$$

Perché

$$f\left(\frac{1}{2}B\right)\frac{1}{2}\ {}^tB + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B = B.$$

2 Relazioni tra matrici e funzioni lineari

Data una matrice $A \in M(m \times n, K)$ associata ad una funzione lineare

$$F_a : K^n \to K^m, x \to Ax$$

Come esempio prendiamo M(2 x 3):

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$
$$f_A : K^3 \to K^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 & a_{1,2}x_2 & a_{1,3}x_3 \\ a_{2,1}x_1 & a_{2,2}x_2 & a_{2,3}x_3 \end{pmatrix}$$

In generale le soluzioni di $Ax = b$ sono:

$$f_A^{-1}b = \{x : f_A(x) = b\}$$
$$Kerf_A = \{x : Ax = 0\} \ sistema \ omogeneo$$

Questo ci permette di esprimere i sistemi lineari come delle funzioni lineari: per esempio per le matrici $M(2\times3, K)$ si ottengono delle funzioni lineari che danno delle funzioni lineari 3×2 che tra poco chiameremo isomorfismo.
Pensare agli spazi come spazi di funzioni è un modo moderno di pensare allo spazio all'interno del quale ogni oggetto è rappresentato dalle funzioni che ci sono sopra.

3 Poposizione di rappresentazione

Definizione 3.1. *Sia* $g : K^n \to K^m$ *lineare* $\Rightarrow \ \exists A \in M(m \times n, K) : g = f_A$

Dimostrazione. Costruisco una matrice A tale che la colonna di A è definita come $g(e_i) : i = \{1, \ldots, n\}$, allora so che questa $g(e_i) \in K^m$ quindi costruisco una matrice che è proprio $m \times n$ e basta dimostrare che questa matrice funziona soddisfa la nostra realazione:

$$A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 g(e_1) + \cdots + \lambda_n g(e_n) =$$
$$g\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = f_A$$
$$Ossia \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 g(e_1) & \vdots & \lambda_n g(e_n) \end{array} \right)$$

□

Esempio:

$$g : R^3 \to R^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc} 5x_1 & 12x_2 & 2024x_3 \\ 25x_1 & 12x_2 & 7x_3 \end{array} \right)$$
$$A = \left(\begin{array}{ccc} 5 & 12 & 2024 \\ 25 & 12 & 7 \end{array} \right)$$
$$Quindi \; g(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

4 Il nuovo prodotto tra matrici

Proposizione 4.0.1. *Il prodotto tra matrici è definito in questo modo perché esiste un legame tra il mondo delle matrici e delle funzioni lineari : la composizione di funzioni lineari.*

$$f_A = f_{A'} \Leftrightarrow A = A'$$

$$f_{A,B} = f_A \circ f_B \tag{1}$$

Proposizione 4.0.2.

$$f_A : K^n \to K^m$$
$$f_B : K^P \to K^n$$
$$con : \; A(m \times n), \; B(n \times P), \; AB(m \times P)$$

$$f_A \circ f_B = f_A B \Rightarrow K^P \to K^n \to K^m = K^P \to K^m. \tag{2}$$

Quindi diventa (derivando dalla composizione al prodotto):

$$f_A \circ f_B(x) = A(Bx) = (AB)x = f_{AB}(x)S$$

5 Associazione delle funzioni lineari in spazi definiti

Gli spazi vettoriali generalmente non avranno le basi (come gli spazi di funzioni): questo porta alla possibilità do cambiare la funzione come nelle serie (che sono una rappresentazione diversa con un altra base di una specifica funzione). Posti ora V, W come spazi vettoriali chiamo $P = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ la base di V e chiamo $A = \langle w_1, \ldots, w_n \rangle$ la base di arrivo di W.
Definisco una matrice $M(n \times m)$ associata ad f nelle basi P ed A:

$$M_{A,B}(f)$$

La i-esima colonna è formata dalle coordinate di $f(v_j)$ rispetto ad A e tutto ciò va $h = 1, \ldots, n$.
Esempio:

$$P = \{v_1, v_2, v_3\}$$
$$A = \{w_1, w_2\}$$

Per cui ottengo, in funzione di ogni vettore, le seguenti:

$$f(v_1) = a_{1,1}w_1 + a_{2,1}w_2$$
$$f(v_2) = a_{1,2}w_1 + a_{2,2}w_2$$
$$f(v_3) = a_{1,3}w_1 + a_{2,3}w_2$$

Per ogni elemento di v associo un elemento di A, il quale per ogni v deve mantenere la colonna (per questo nella prima espressione si ha $a_{1,1}$ *e* $a_{2,1}$). Per cui la matrice finale è:

$$M_{A,B}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$(f(v_1) \mid f(v_2) \mid f(v_3))$$

Per cui una funzione lineare del tipo:

$$f : V^n \to W^m \Rightarrow \ matrice\ m \times n \tag{3}$$

I valori di m ed n si scambiano.

Proposizione 5.0.1. *Posto che $f : V \to W$ è una funzione lineare allora siano: $x_1, \ldots, x_n$ coordinate di v rispetto a B e $y_1 \ldots, y_n$ le coordinate di $f(v)$ rispetto ad A allora si può dire che:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La matrice sarà quindi:

$$\begin{array}{ccc} M_{A,B}(f) & \cdot x & = \quad y \\ m \times n & n \times 1 & m \times 1 \end{array}$$

Si osserva che

$$x = e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \ i - esimo\ elemento.$$

che sono le coordinate di v. In modo equivalente si può dire che (se $a_{i,j}$ sono i coefficienti di $M_{A,B}(f)$):

$$\boxed{f(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}w_i} \tag{4}$$

6 Cambiamento di base

Da guardare sul libro

Teorema 6.1. *Se V ha due basi B, B' allora dico che x sono le coordinate di v rispetto a B, x' le coordinate di v' rispetto a B' allora:*

$$V \to V$$