Metodi matematici

Gariboldi Alessandro

1 25/02/26

1.1 introduzione al corso

Questo è un corso che estende gli argomenti di analisi e geometria, e servono in generale per studiare meccanica quantistica e altri argomenti di fisica avanzata.
Strutturazione del corso:

- Analisi complessa (funzioni a valori complessi, serie complesse e integrali complessi)
- Analisi armonica (come le funzioni posso essere sviluppate come serie armoniche, usando seni e coseni)
- Spazi di Hilbert (spazi vettoriali a dimensione infinita, che generalizzano lo spazio euclideo)

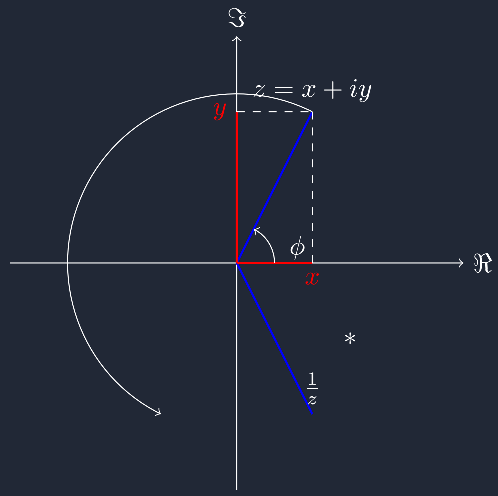
Strutturazione dell'esame:

- Scritto: 3 esercizi uno per parte del corso, in generale simili a quelli del corso (si passa con 16, durata di 3 ore, validità di 1 anno a consigliato di farlo prima).
- Orale: Meno incentrato sulle dimostrazioni, più sulla discussione di esercizi o semplici dimostrazione (poche) o argomenti

In generale questo perchè lo scopo di questo corso non è di fornire una stuttura formale, ma di fornire strumenti utili per la fisica.
In generale per gli orali si possono fare anche fuori dagli appelli basta organizzarsi, nel caso è meglio organizzarsi a piccoli gruppi.
Materiale didattico è presente su moodle in forma di dispense.

1.2 Riassunto numeri complessi

I numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali, ed è ottenuta dal numero i che è la radice quadrata di -1.
Questa è l'unità immaginaria che ci serve per estendere i numeri reali al campo dei complessi.
Quindi un generico numero $z \in \mathbb{R}$ è della forma $z = x + iy$ con quindi un generico numero reale più un numero reale considerato i volte.
Ovviamente quando $i = 0$ otteniamo un sottoinsieme di $\mathbb{C}$ che è proprio $\mathbb{R}$.
Quindi i numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali, e possiamo rappresentarli come punti in un piano, chiamato piano complesso.
Questo perchè $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (dove $\simeq$ vuol dire isomorfo)come spazio vettoriale, quindi ogni numero complesso può essere rappresentato come un punto in un piano.



Il modulo (valore assoluto) di un numero complesso è la distanza dall'origine, quindi:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}^+$$
$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

La coniugata di un numero complesso è ottenuta cambiando il segno della parte immaginaria, quindi:

$$z \to z^* \equiv \overline{z} = x - iy$$

Se ora riscriviamo il modulo in termini di z e z^* otteniamo:

$$|z|^2 = z\ z^* = z^*\ z = |z^*|^2$$
$$= (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z^*\ z} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Un'altra rappresentazione dei numeri complessi è la forma polare, che è data da:

$$x + iy = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Spesso si prende $\phi \in [\alpha, \alpha + 2\pi[$ che prende un giro completo del pian, ma può essere utile anche prendere ad esempio $\phi \in]-\infty, +\infty[$ che prende più giri del piano.
Consideriamo ora il prodotto tra due numeri complessi:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$$
$$= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)]$$

Se estendiamo questo al concetto di potenze intere:

$$z^2 = r^2[\cos(2\phi) + i\sin(2\phi)]$$
$$z^n = r^n[\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)]$$

Questo fa capire bene anche il coniugato che è dato da:

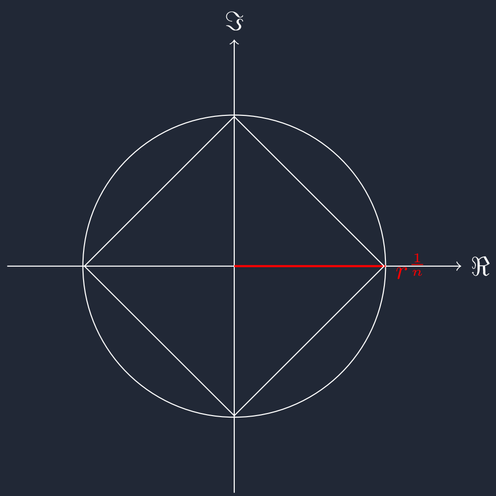
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(\phi) - i\sin(\phi)]$$

Che è esattamente il coniugato poichè ha stessa parte reale e parte immaginaria ribaltata rispetto all'asse reale.

Concentriamoci ora sull trovare le radici:

$$z^{\frac{1}{n}} \qquad w^n = z$$
$$w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\rho^n(cosn\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ n\theta = \phi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \end{cases}$$

Questi sono proprio poligoni iscritti nella circonferenza di raggio $r^{\frac{1}{n}}$ con centro nell'origine:



1.3 Proprietà dei complessi

Definiamo una topologia come di intorni di un punto, quindi una successione di insiemi che contengono il punto e che sono sempre più piccoli.
Introduciamo ora il concetto di convergenza su $\mathbb{C}$ sfruttando la topologia su $\mathbb{C}$
Lo facciamo partendo dalla definizione di convergenza su $\mathbb{R}$, prendendo il limite sulla parte reale e sulla parte immaginaria.

Definizione 1.1.
Una successione $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri complessi converge a $z \in \mathbb{C}$ se e solo se:

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} \Re(z_n) = \Re(z) \\ \lim_{n\to+\infty} \Im(z_n) = \Im(z) \end{cases}$$

In modo equivalente possiamo scrivere:

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0$$

Consideriamo che $\mathbb{C}$ è uno spazio metrico con la distanza data da:

$$d(z_1, z_2) \equiv |z_1 - z_2|$$

Questo soddisfa gli assiomi di distanza.

Vediamo ora che gli intorni di z sono tutte le palle aperte con centro z e raggio $r > 0$:

$$B(z, r[$$

Da questo concetto di intorno segue naturalmente la convergenza dei limiti.

Chiediamoci ora se $\mathbb{C}$ è completo, cioè se ogni successione di Cauchy converge.
Si può dimostrare velovemente considerando che la parte reale e la parte immaginaria sono entrambe complete, quindi anche $\mathbb{C}$ è completo (ogni successione di Cauchy ha limite) e di conseguenza anche $\mathbb{C}^n$ è completo.

Su $\mathbb{C}$ possiamo definire anche la norma oltre che alla distanza, e questa è data da:

$$\|z\| \equiv |z|$$

Quindi $\mathbb{C}$ è anche spazio normato. Siccome $\mathbb{C}$ è completo e normato, allora è anche uno spazio di Banach. Su $\mathbb{C}$ purtroppo si perde la proprietà di ordinamento, quindi non è uno spazio ordinato e non hanno senso le disuguaglianze tra numeri complessi al massimo è possibile eseguirle tra i moduli.

1.4 serie di potenze complesse

Definizione 1.2.
Data una successione di numeri complessi $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, *e definiamo le ridotte parizali come:*

$$\sum_{n=0}^{N} z_n \equiv S_N$$

Definizione 1.3.
$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una serie convergente se* S_N *è una successione convergente, ovvero:*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} z_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = S \in \mathbb{C}$$

Teorema 1.1.
Condizione necessria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie è che $|z_n|$ *sia una successione infinitesima ovvero:*

$$\lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0$$

Teorema 1.2 (Criterio del rapporto)**.**
$\sum_n z_n$ *è convergente se* $\exists p : 0 < 0 < 1$ *e* $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall n > \overline{n}$:

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| \leq p$$

Teorema 1.3 (Criterio della radice)**.**
$\sum_n z_n$ *è convergente se* $\exists p : 0 < 0 < 1$ *e* $\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall n > \overline{n}$:

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leq p$$

Definizione 1.4 (Convergenza assoluta)**.**
$\sum_n z_n$ *è convergente assolutamente se* $\sum_n |z_n|$ *è convergente.*

Teorema 1.4.
La convergenza assoluta $\overset{\text{implica}}{\Rightarrow}$ *la convergenza, ma non viceversa.*

Teorema 1.5 (Criterio del confronto)**.**
Se $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è maggiorata in* <u>*modulo*</u> ($|z_n| \leq a_n$)
da una successione di numeri reali positivi $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *che è convergente,*
<u>*allora*</u> *anche* $\sum_n z_n$ *converge (assolutamente).*

Proposizione 1.1 (Serie di potenze)**.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Con $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$, *è una serie di potenze con centro in* z_0.

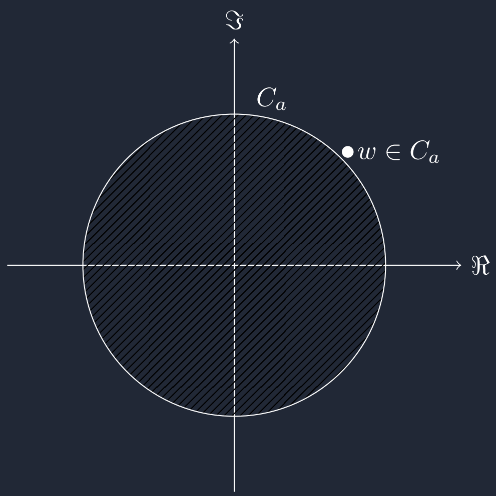
Per semplicità consideriamo $z_0 = 0$ e quindi la serie di potenze diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Definizione 1.5 (Insieme di convergenza)**.**
Definiamo come insieme di convergenza:

$$C_a \equiv \{z\}_{\in \mathbb{C}} \;\; t.c \; \sum_n a_n z^n \; converge$$

Lemma 1.1 (Di Abel)**.**
Sia $w \in \mathbb{C}$ t.c. $a_n w^n$ sia limitata, allora
$\forall z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| < |w|$ la serie $\sum_n a_n z^n$ converge assolutamente.



Dimostrazione.

$$|a_n w^n| \leq M$$
$$|a_n z^n| = \left| a_n w^n (\frac{z^n}{w^n}) \right|$$
$$= |a_n w^n| \left| \frac{z}{w} \right|^n \leq M \underbrace{\left| \frac{z}{w} \right|^n}_{=p \;<1}$$

□

Definizione 1.6 (Raggio di convergenza)**.**

$$R_a \equiv \sup \{|z| : z \in C_a\}$$

Teorema 1.6.
L'insieme di convergena C_a contiene il cerchio aperto $B(0, R_a)$ ed è contenuto nel cerchio chiuso $B(0, R_a]$.

Le serie geometriche valgono anche su $\mathbb{C}$, quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$