Fisica

Tommaso Miliani

13-05-25

1 La forza di gravità di un guscio sferico

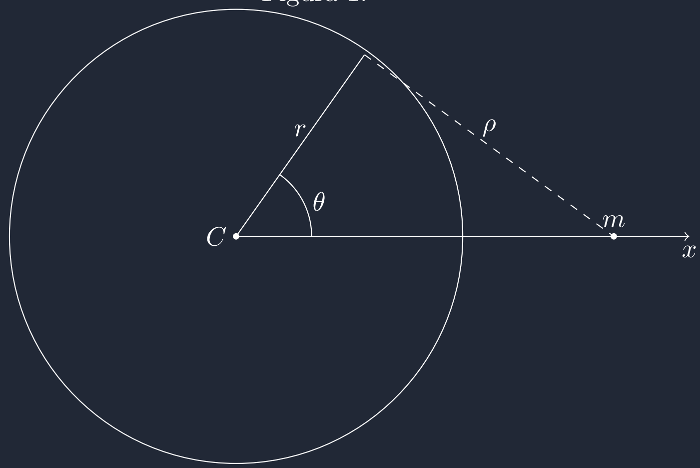
L'approssimazione che si fa sempre è che la massa sia concentrata tutta nel centro della Terra: nel caso in cui si abbia dunque un corpo sferico la cui densità di massa sia funzione solo della distanza dal centro: voglio ora dimostrare questo.
Si suddivide allora l'oggetto cavo in tante bucce concentriche: si considera allora una superficie con densità σ:

$$\sigma = \frac{M}{4\pi r^2}$$

Data solo la legge di gravitazione universale dobbiamo allora ridurre il problema e cercare di ridurre il problema ad una situazione in cui è facile integrare e quindi scelgo un punto sulla superficie che per definizione avrà distanza r dal centro e quindi data l'energia potenziale del punto m,

$$V = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}}$$

Figura 1:



Tutti i punti che hanno la stessa distanza dal punto P contribuiranno allo stesso modo all'energia potenziale: quindi danno un contributo all'energia potenziale pari a:

$$dV = -\frac{Gm\ dM}{\rho}, \qquad dM = \sigma\ dS, \qquad dS = 2\pi r \sin\theta \cdot r d\theta$$

Posso approssimare lo spessore come un cilindretto e quindi posso calcolare la superficie. Introducendo l'angolo θ posso allora definire il differenziale della massa come

$$dM = 2\sigma r^2 \sin\theta\ d\theta \Rightarrow dM = \frac{M}{2} \cdot \sin\theta\ d\theta$$

In pratica il $d\theta$ è esattamente lo spostamento infinitesimo del punto sulla superficie e quindi ottengo il volume del cilindretto con altezza $r\ d\theta$. Posso allora dire che l'energia potenziale di ogni punto sulla stessa circonferenza sarà:

$$dV = -Gm\frac{M}{2}\frac{\sin\theta\ d\theta}{\rho}, \rho^2 = r^2 + x^2 - 2rx\cos\theta$$

Dato che x è fissato, allora se differenziamo l'espressione di ρ viene che

$$2\rho\ d\rho = 2rx \sin\theta\ d\theta$$

Si ottiene allora che

$$\frac{d\rho}{rx} = \frac{\sin\theta\ d\theta}{\rho}$$

Se ora facessi l'integrale dell'energia potenziale posso allora ottenere che:

$$V = -\frac{GmM}{2rx}\int d\rho = -\frac{GmM}{2rx}(r_B - r_A)$$

Si possono distinguere i due casi in cui il punto materiale è esterno rispetto alla superficie ma anche quando P' è interno: si danno allora due casi: un caso in cui P sia esterno alla superficie:

$$\text{Esterno}: \begin{cases} r_A = x - r \\ r_B = x + r \end{cases}$$

$$\text{Interno}: \begin{cases} r_A = r - x \\ r_B = x + r \end{cases}$$

Per un punto esterno alla superficie allora si può dire che

$$V = -\frac{GmM}{2rx}2r = -\frac{GmM}{x}$$

E questa è esattamente l'energia potenziale che risente un oggetto di massa m da un oggetto di massa M che si trova esattamente sul punto C. Se quindi è esterno alla superficie allora questa superficie posso considerarla come se fosse concentrata nel suo centro. Per un punto interno:

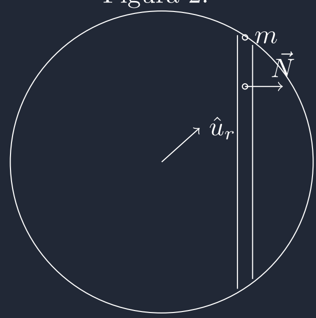
$$V = -\frac{GmM}{2rx}2x = -\frac{GmM}{r}$$

In questo caso è posta alla distanza r, ossia come se il punto fosse sulla superficie e non al suo interno. La forza gravitazionale che risente dunque al suo interno è nulla.

2 La gravità di una sfera piena

Divido allora in tante bucce ma ora tutte le bucce si comportano in modo diverso tra di loro: quelle più vicine all'omino non contribuiscono mentre quelle più interne contribuiscono. La forza è dovuta solo alla massa che si trova allora all'interno. All'interno non agisce tutta la sfera ma solo la parte della massa interna:

Figura 2:



$$\vec{F}_g = -\frac{GmM_i}{r^2}\hat{u}_r, \qquad M_i = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

E quindi il rapporto tra la massa interna e quella della Terra è

$$\frac{M_i}{M} = \frac{r^3}{R^3}$$

Posso allora dire che che essendo un punto materiale in una guida:

$$\begin{cases} \vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{R^3}(x\hat{i} + y\hat{j}) \\ \vec{N} = N\hat{i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x) N - \frac{GmM_T}{R^3}x = 0 \\ y) - \frac{GmM_T}{R^3}y = m\ddot{y} \end{cases}$$

Allora l'equazione che abbiamo per il corpo è proprio un moto armonico:

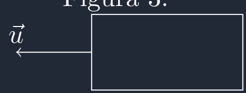
$$\ddot{y} + \frac{g}{R}y = 0$$

Questo si chiama pozzo di Gauss e si vede che la massa esterna non conta.

3 Il moto dei razzi

Con gli strumenti sviluppati fino ad ora si è in grado di descrivere il moto di un razzo: In un dato istante di tempo il razzo espelle una certa quantità di massa che genera una spinta.

Figura 3:



$$Q(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$\vec{Q}(t + dt) = M(t + dt)\vec{v}(t + dt) + dm(\vec{u} + \vec{v}(t + dt))$$

Dove $\vec{u}$ è il vettore della velocità di espulsione del gas rispetto
al razzo. Esplicitandola di nuovo posso allora dire che rispetto al missile.

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q}(t+dt) - \vec{Q}(t) = \vec{F}^{ext}\ dt$$

E quindi risolvendo si ottiene dato che $dM = -dm$:

$$\vec{F}^{ext}\ dt = Md\vec{v} + dm\vec{u}$$

Dividendo ora tutto per dt:

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u}\frac{dM}{dt} + \vec{F}^{ext}$$

Nel caso in cui il missile sia nello spazio e quindi che le forze esterne siano nulle la nostra espressione ci dice che

$$Mdv = udM \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dv = u\int_{t_i}^{t_f} \frac{dM}{M}$$

Allora

$$v(t_f) = v(t_i) - u\ln\frac{M(t_i)}{M(t_f)}$$
$$v_f = v_i + |u|\ln\left(\frac{M_{mis} + M_{carb}(t_i)}{M_{mis} + M_{carb}(t_f)}\right)$$

Nel secondo caso si ha la partenza da Terra verso l'alto:

$$\vec{F}^{ext} = M\vec{g}$$

Possiamo usare sempre gli stessi principi:

$$M\ dv = u\ dM - Mg\ dt$$
$$dv = u\frac{dM}{M} - g\ dt$$
$$\int_{t_i}^{t_f} dv = v(t_f) = \int_{t_i}^{t_f}\left(u\frac{dM}{M} - g\ dt\right)$$

Allor si ottiene che

$$v(t_f) = |u|\ln\frac{M_i}{M_f} - g(t_f - t_i)$$

Più carburante brucio e meno importante diventa l'ultimo termine in modo tale da poter approssimare alla forma vista nel primo caso. Per avere più spinta ci conviene avere più velocità di espulsione possibile.