Analisi II - Differenziabilità, Piano tangente e Derivate Direzionali

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Differenziabilità

1. Studiare la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione:

$$f(x, y) = |x| \ln(1 + y)$$

2. Studiare la differenziabilità in ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ della funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{y^2+|x|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. Studiare la differenziabilità in $(0, 0)$ della funzione:

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

4. Studiare la differenziabilità della funzione:

$$f(x, y) = \left[x^2(y - 1)\right]^{\frac{1}{3}} + 1 \text{ in } (x_0, y_0) = (0, 1)$$

Calcolare, se esistono, le derivare direnzionali $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 1)$
dove $\underline{v} = (h, k)$ è un versone t.c. $||\underline{v}|| = h^2 + k^2 = 1$

*esercizi dei professori *Gabriele Bianchi*, *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

5. Studiare la differenziabilità in $(0,0,0)$ della funzione:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} |x|\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

6. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin(x^2y^2)}}{|xy|} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

7. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2\sin\left(\frac{1}{x^2y^2}\right) & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

8. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   Verificare che $\exists \frac{\partial}{\partial \nu} f(0,0)$ $\forall$ direzione ν, ma f non è differenziabile in $(0,0)$

9. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

11. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

12. Stabilire se la seguente funzione è differenziabile nel suo dominio:

$$f(x,y) = x^2 y^2 \ln(x^2+y^2) \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

E' possibile estendere f con continuità in $(0,0)$?
La funzione ottenuta è anche differenziabile in $(0,0)$?

13. Data

$$f(x,y) = e^{2x-y} + \sqrt{3+x^2+3y^2}$$

determinare se f è differenziabile in $(1,2)$

14. Sia $z = f(r)$ con $r = \sqrt{x^2+y^2}$, e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, con $g(x,y) = f(r)$.
Scrivere $f'(r)$ in termini di $\mathbb{D}$.
Esempio: $g(x,y) = x^2 + y^2 = r^2 = f(r)$

15. Data

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Verificare che soddisfa l'equazione:

$$u_t - u_{xx} = 0 \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Questa equazione è detta equazione del calore

16. Data

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

Provare che non è differenziabile in $P_0 \equiv (0,1)$

2 Piani tangenti

1. $f(x, y) = \frac{1}{xy}$ se $xy \neq 0$ è differenziabile. Trovare il piano tangente in $z = f(x, y)$ in $(1, 1, 1)$

2. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il piano tangente al grafico di:

   $$z = \sin(\alpha x + y^2)$$

   nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$ (in $\mathbb{R}^3$).
   Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è perpendicolare?

3. Data
   $$f(x, y) = e^{2x-y} + \sqrt{3 + x^2 + 3y^2}$$
   scrivere l'espressione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 5)$

4. Data
   $$f(x, y) = xe^y - 2\ln(x) + 3y$$
   Stabilire se f si trova al di sopra o al di sotto del piano tangente in un intorno del punto $(1, 0, 1)$

3 Derivate direzionali

1. Calcolare le derivate direzionali di:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Nel punto $(0,0)$ lungo una generica direzione $\underline{v} = (h,k)$ versone t.c. $||\underline{v}|| = h^2 + k^2 = 1$
Studiare la continuità di $f = f(x,y)$ nell'origine degli assi

2. Calcolare le derivate direzionali di:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2}(x^2+y^2) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$
Nel punto $(0,0)$ lungo una generica direzione $\underline{v} = (h,k)$ versone t.c. $||\underline{v}|| = h^2 + k^2 = 1$
Studiare la continuità di $f = f(x,y)$ nell'origine degli assi

3. Calcolare in $(0,0)$ le derivate parziali e la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \nu}$ dove $\nu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ della funzione:
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x)}{x^2+\arcsin^2(y)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Dire se f è differenziabile in $(0,0)$

4. Data
$$f(x,y) = e^{2x-y} + \sqrt{3+x^2+3y^2}$$
Calcolare $\nabla_{\underline{v}} f(1,2)$, dove $\underline{v}$ è il versore della retta $y = \sqrt{3}x$ orientato nel verso delle x decrescenti

5. Sia
$$f(x,y) = x^4 - 2y + 2x$$
Determinare per quale direzione $\underline{v} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ si ha $\nabla_{\underline{v}} f(1,1) = 2$.
Determinare qual'è la direzione lungo la quale f cresce maggiormente in un intorno di $(1,1)$

6. Data
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$
$\forall \underline{\nu} \in \mathbb{R}^2$ versore, calcolare $\nabla_{\underline{\nu}} f(0,1)$