

Analisi Bianchi

Tommaso Miliani

04-11-25

1 Insiemi semplicemente connessi

Se ω è esatta, allora ω è chiusa, altrimenti, se F è un campo conservativo, allora $\text{rot}F = 0$. Vale anche il viceversa? In generale no. Se infatti ω è definita su di un certo insieme \mathbb{A} ed è chiusa, non è detto che esista una funzione F definita su tutto \mathbb{A} tale che $\omega = dF$.

Esempio 1.1.

Non esiste F definita su $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} : \omega = dF$.

$\exists F$ definita su $\{(x, y) : x > 0\} : \omega = dF$ poiché è un insieme semplicemente connesso.

Osservazione 1.1.

Se \mathbb{A} è semplicemente connesso, allora si può invertire la definizione.

Definizione 1.1 (Essere semplicemente connesso).

Un insieme aperto \mathbb{A} si dice **semplicemente connesso** se è connesso e inoltre ogni curva chiusa, e interamente contenuta in \mathbb{A} , può essere ridotta mediante una deformazione continua ad un unico punto senza mai uscire da \mathbb{A} .

Esempio 1.2 (Esempi in \mathbb{R}^2).

Sono semplicemente connessi cerchi, ellissi, poligoni, semipiani, il piano \mathbb{R}^2 intero ed il piano privato di una semiretta. Non sono semplicemente connessi il piano o un cerchio, o un'ellisse, o un poligono privato di un punto, una corona circolare o un insieme che presenta un buco.

In tutti i casi si deve pensare che, per una curva chiusa che gira intorno al buco, una deformazione continua non riesce a deformare la curva in un punto poiché non riesce a stare dentro l'insieme ma si deve per forza passare per il buco.

Esempio 1.3 (Esempi in \mathbb{R}^3).

Il toro non è un solido semplicemente connesso mentre una sfera lo è, così come un guscio sferico in quanto è possibile "scansare" il buco. Qualsiasi curva nello spazio può chiudere un insieme e renderlo semplicemente connesso togliendo un numero finito di punti.

Definizione 1.2.

Un insieme \mathbb{A} si dice **stellato** se esiste un punto $P_0 \in \mathbb{A}$ tale che $\forall P \in \mathbb{A}$, tutto il segmento di estremi P e P_0 è contenuto in \mathbb{A} . Si dice stellato poiché sono insiemi concavi.

Per la definizione esatta di semplicemente connesso si introduce la def

Definizione 1.3 (Omotopia tra curve).

Siano γ_1 e γ_2 curve contenute in \mathbb{A} aperto e connesso con $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ o \mathbb{R}^3 . Supponiamo che $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{A}$ e $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{A}$ siano delle parametrizzazioni di γ_1 e di γ_2 rispettivamente. In questo modo.

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) = P_a \quad \phi_1(b) = \phi_2(b) = P_b$$

Allora γ_1 e γ_2 si dicono **Omotope** in \mathbb{A} se esiste una funzione continua $\phi(t, \lambda)$, che dipende dal parametro $t \in [a, b]$ e $\lambda \in [0, 1]$, tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni

1. $\phi(t, 0) = \phi_1(t)$ $\phi(t, 1) = \phi_2(t)$ $\forall t \in [a, b]$;
2. $\phi(a, \lambda) = P_a$ $\phi(b, \lambda) = P_b$ $\forall \lambda \in [0, 1]$;
3. $\forall \lambda \in [0, 1]$ $\phi_\lambda := \phi = \phi(t, \lambda) \subset \mathbb{A}$.

L'introduzione del parametro λ è un modo per far variare in modo continuo una curva generica tra λ_1 e λ_2 in modo continuo. Per ogni λ fissato si ha una famiglia di curve con i soliti estremi P_a e P_b . Se γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse e

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) = P_a \quad \phi_1(b) = \phi_2(b) = P_b$$

allora nella definizione precedente queste si dicono omotope se vale la definizione precedente con la seconda condizione sostituita dalla seguente:

$$\phi(a, \lambda) = \phi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Si può ora dare la definizione formale di insieme semplicemente connesso

Definizione 1.4 (Definizione rigorosa di semplicemente connesso).

Un insieme aperto di \mathbb{A} di \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 si dice semplicemente connesso se è connesso e due curve qualsiasi contenute in \mathbb{A} , ed aventi gli stessi estremi, sono omotope. Questa definizione può essere data anche alle curve chiuse in quanto ogni curva chiusa contenuta in \mathbb{A} è omotopa ad una curva costante, ossia si riduce ad un solo punto.

Teorema 1.1 (Teorema $n!$).

Sia $\omega = a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy$ una forma differenziale C^1 e chiusa in un insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$ aperto e semplicemente connesso. Allora ω è esatta. Vale un enunciato analogo in \mathbb{R}^3 .

Dimostrazione. Prese due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi P_a e P_b , voglio dimostrare allora che l'integrale delle forme differenziali sulle due curve è lo stesso. Poiché \mathbb{A} è semplicemente connesso, γ_1 e γ_2 sono omotope. Esiste allora una funzione

$$\gamma(t, \lambda) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$$

che soddisfa le prime due proprietà della definizione di omotopia. Si definisce allora $\forall \lambda \in [0, 1]$ l'integrale

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} \omega = \int_a^b a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) dt$$

Si vuole dimostrare che questo numero non dipenda da λ e che dunque $I(0) = I(1)$. Si suppone che $\phi(t, \lambda)$ sia $C^1([a, b] \times [0, 1])$ e che le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}$$

Siano entrambe continue. Posso dunque derivare rispetto a λ l'integrale e vedere che sia zero:

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_{\gamma_\lambda} \omega$$

Fare la derivata dell'integrale è come derivare l'argomento dell'integrale (ancora non dimostrata nel corso, ma sarà definita successivamente). A questo punto si ha una funzione composta e quello che si vuole fare è dimostrare che l'ipotesi ω chiusa, implichi che l'integrale tra a e b dell'argomento sia

$$\int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\dots) dt \stackrel{\text{dimostrare}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} (\dots) dt$$

Ogni funzione è primitiva della propria derivata e dunque posso dire che

$$\int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\dots) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) dt$$

Sfruttando la seconda condizione delle funzioni omotope allora l'integrale è esattamente zero.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left(a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right) \\ & \frac{d}{dt} \left(a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right) \end{aligned}$$

Si vuole ora dimostrare che le due espressioni sono uguali: posso fare la derivata di funzione per entrambe le espressioni I e II :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}(I) &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial a_1}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + a_1(\dots) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}(\dots) + \\ &\quad \left(\frac{\partial a_2}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + a_2(\dots) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}(\dots) \\ \frac{d}{d\lambda}(II) &= \left(\frac{\partial a_1}{\partial x}(\dots) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + a_1(\dots) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda}(\dots) + \\ &\quad \left(\frac{\partial a_2}{\partial x}(\dots) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + a_2(\dots) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \lambda}(\dots)\end{aligned}$$

Dato che so che è chiusa, posso dire che $\forall (x, y) \in \mathbb{A} \frac{\partial a_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, y)$.

□