Appunti di Analisi (Bianchini)

Tommaso Miliani

22-10-25

1 Funzioni implicite

Capita di avere la descrizione di una curva come luogo di zeri di una funzione a due variabili. E' quindi fondamentale capire se questo insieme definisce una curva o un grafico di funzioni

$$\{f(x,y)=0\}$$

Esempio 1.1.

$$f(x,y)=x^3-y+1 \qquad f=0 \Longleftrightarrow y=x^3-1$$

E' un grafico di funzione

Esempio 1.2.

$$f(x,y)=x^2+y^2-1 \qquad x^2+y^2=1$$

globalmente non è un grafico di funzione. Però se ragionassi localmente posso dire che questo oggetto è un grafico di funzione se scegliessi in modo accorto la variabile dipendente e quella indipendente. Ossia per la circonferenza, per ogni arco, devo scegliere se è funzione per la x o per la y in modo tale che possa definire la funzione.

Teorema 1.1 (Teorema del Dini)**.**
Considerato un insieme aperto $\mathbb{A}$ e si considera una funzione

$$F:\mathbb{A}\to\mathbb{R} \qquad f\in C^1(\mathbb{A})$$

Preso un punto $P_0\equiv(x_0,y_0)\in\mathbb{A}$ in modo tale che $F(x_0,y_0)=0$ in modo tale che il punto sia regolare. Allora $\exists U$ intorno di x_0 e V intorno di y_0 tale che l'equazione tra la linea di livello zero, definisce un grafico di funzione $y=f(x)$ oppure $x=g(y)$ nell'insieme $U\times V$ intorno di P_0. In particolare

- *Se $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ allora $\exists! y=f(x):U\to V$ tale che $F(x,f(x))=0$. Allora $f\in C^1(U)$ e*

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))} \quad \forall x\in U^\circ$$

- *Se $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ allora $\exists! x=g(y):V\to U$ tale che $F(g(y),y)=0$. Allora $g\in C^1(V)$ e*

$$g'(y)=-\frac{F_y(g(y),y)}{F_x(g(y),y)} \quad \forall y\in V^\circ$$

Dimostrazione. Dato P_0 un punto regolare e si suppone che la derivata parziale rispetto ad y sia

$$\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0 \qquad F_Y(x_0,y_0)>0$$

Supponendo che esista U un intorno di x_0 e V un intorno di y_0 e si dimostra che

$$F(x_0,y_0-\delta)<0\forall x\in U$$
$$F(x_0,y_0+\delta)>0\forall x\in U$$

Si deve dunque avere che

$$F_y(x,y) > 0 \forall (x,y) \in \mathbb{R}$$

Ossia

$$F_y \in C^2 \implies \exists \text{rettangolo} : P_0 \in W \times V$$

Tale che W sia intorno di x_0 e V intorno di y_0. Quindi $\forall x \in W$ fissato $F(x,y)$ come funzione di y è strettamente crescente in funzione di $F(x_0,y)$ è strettamente crescente se $F(x_0,y_0) = 0$ Allora si deve avere che

$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0 \quad F(x, y_0 + \delta) > 0$$

Per la permanenza del segno deve esistere U intorno di $x_0, U \subset W$ e in modo tale che

$$F(x_0, y_0 - \delta) < 0 \quad F(x, y_0 + \delta) > 0 \ \forall x \in U$$

Si dimostra ora la seconda parte del teorema. Si vuole dimostrare che

$$\exists! f : U \to V : F(c, f(x)) = 0 \ \forall x \in U$$

Si considerare che $\forall x \in U$ si ha che

$$y \to F(x,y) \nearrow$$

Con

$$F(x, y_0 - \delta) < 0 \ \forall x \in U$$
$$F(x, y_0 + \delta) > 0 \ \forall x \in U$$
$$F \in C^0$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri

$$\forall x \in U \ \exists y \in V : F(x,y) = 0$$

Questo non conclude la dimostrazione in quanto potrebbero esistere più zeri, dunque, visto che è strettamente crescente e dunque monotona, per la monotonia, esiste un solo zero, ossia $g = f(x)$.
Si dimostra ora il terzo passo del teorema. Dato che si è visto che è un grafico, vogliamo dimostrare che f sia C^1 passando dalla dimostrazione per cui $f \in C^0$. Fisso $x_1 \in U$ in modo tale da considerare $x \in U$ e considero la funzione ausiliaria

$$G(t) = F((1-t)x_1 + tx, (1-t)f(x_1) + tf(x)) = F(\psi, \eta)$$

Chiamo la prima variabile ψ e la seconda η. ψ è la parametrizzazione del segmento x_0 fino a x_1 mentre η la parametrizzazione del segmento tra $f(x)$ e $f(x_1)$. Si può dire che

$$G \in C^1$$

per il teorema della funzione implicita ($F \in C^1$), si osserva che se si calcola

$$G(0) = F(x_1, f(x_1)) = 0$$
$$G(1) = F(x, f(x)) = 0$$

Poiché sono punti che stanno su di una linea di livello. Per il teorema di Rolle esiste allora un punto che prende il nome di $\tau \in (0,1)$ tale che $G'(\tau) = 0$.

$$G'(\tau) = F_x(\psi, \eta) \cdot (x - x_1) + F_y(\psi, \eta)(f(x) - f(x_1)) = 0$$

Poiché τ è tale che per ψ, η, dato che sono funzioni di t, la funzione si annulli.

$$(f(x) - f(x_1))(F_y((1-\tau)x_1 + \tau x, (1-\tau)f(x_1) + \tau f(x))) = -(x - x_1)(F_x(\psi, \eta))$$

Voglio ora fare il limite per $x \to x_1$ e dimostrare che il primo membro tenda a zero: posso farlo maggiorandolo con una quantità infinitesima

$$(f(x) - f(x_1)) \leq |x - x_1| \max_{(x,y)\in\mathbb{R}} \left| \frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} \right| \leq |x - x_1| \frac{\max_{(x,y)\in\mathbb{R}} |F_x(x,y)|}{\min_{(x,y)\in\mathbb{R}} |F_y(x,y)|}$$

Il denominatore è il minimo in quanto $F_y \in C^0, F_y \neq\in \mathbb{R}$ poiché la funzione è C^1. Il primo oggetto è un infinitesimo per $x \to x_1$ mentre il secondo oggetto è limitato, allora

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1) \implies f \in C^0(U)$$

Manca adesso l'ultimo pezzo del teorema, ossia la dimostrazione per la formula della derivata. La derivata per un punto x_1, se esiste è data dal rapporto incrementale

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = \lim_{x \to x_1} -\frac{F_x(\psi, \eta)}{F_y(\psi, \eta)}$$

Si osserva che le derivate parziali rispetto a F_x e F_y sono continue, infatti per $x \to x_1$ si osserva che

$$\psi = (1 - \tau)x_1 + \tau x \to x_1$$
$$\eta = (1 - \tau)f(x_1) + \tau f(x) \to f(x_1)$$

Adesso ho entrambe le derivate continue e dunque posso esplicitare il limite del rapporto incrementale

$$-\frac{F_x(x_1, f(x_1))}{F_y(x_1, f(x_1))}$$

E' quindi dimostrato □

Osservazione 1.1.
Il teorema del DIni vale anche se $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ e solo $F_y \in C^0$ e anche se $F_x(x_0, y_0)$ e solo se $F_x \in C^0$.

Teorema 1.2 (Teorema del DIni in tre variabili)**.**
Il teorema del dini ha una formulazione in n variabili, anche se in questo corso non ci interessa. In tre variabili si tratta di grafici di superfici e non più di un grafico su di un piano. In n variabili sarebbe la superficie di un iperpiano in dimensione $n - 1$. Preso una funzione

$$F(x, y, z) \in C^{(1)}(\mathbb{A}) \quad \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$$

Con $\mathbb{A}$ un insieme aperto e tae che sia un punto

$$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{A} \implies \exists \text{intorno di } P_0 \leq \mathbb{A}$$

Tale che

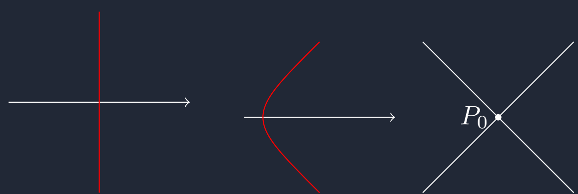
$$\{F(x, y, z) = 0\} \cap \text{ intorno di } P_0 \text{ è grafico } Z = f(x, y)$$

Inoltre $f \in C^1$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$$

localmente vicino a (x_0, y_0).

Osservazione 1.2.
Si può dire, geometricamente, che una curva non è un grafico di funzione



Non sono grafici di $y = y(x)$ e non sono grafici di $x = x(y)$. Oppure se il grafico presenta un bivio in un intorno di P_0.

Osservazione 1.3.
Se $r(t)$ è una curva regolare per $t \in I$ allora $\forall t_0 \in I^\circ$ il ***sostegno*** *è localmente un grafico (ossia il disegno, la curva nel piano) per il teorema del Dini. Provare a dimostrarlo con quel teorema.*

Osservazione 1.4.
Se una funzione è $F \in C^2$ e vale il teorema del Dini, allora anche le sottofunzioni f, g sono $\in C^2$.

Dallo sviluppo di Taylor per una funzione

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$$

Posso trovare con il teorema del Dini la derivata prima

$$f(x) = y_0 - \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

Per trovare la derivata seconda devo necessariamente derivare

$$f''(x) = \left(-\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}\right)' = -\frac{(F_x(x, f(x)))' F_y(x_0, f(x)) - F_x(x, f(x))(F_y(x, f(x)))'}{(F_y(x, f(x)))^2} =$$
$$-\frac{1}{(F_y)^2}\left((F_{x,x} + F_{x,y} f')F_y - F_x(F_{y,x} + F_{y,y} f')\right)_{x, f(x)}$$

Dato che $F \in C^2$, allora le derivate miste sono uguali. QUesta derivazione non è applicata negli esercizi ma si deriva esplicitamente la funzione senza passare da questa definizione.

Esempio 1.3.

$$F(x, y) = x^2 - x^4 - y^2 =$$

Si ricava che

$$DF = \begin{pmatrix} 2x - 4x^3 \\ -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - 2x) \\ -y \end{pmatrix}$$