Analisi

Tommaso Miliani

10-12-24

1 Fine degli integrali impropri

Se voglio definire l'integrale sull'intervallo illimitato allora prima faccio il limite dell'integrale quando un suo limite tende a infinito e poi definisco l'integrale improprio. Esistono vari criteri di convergenza per l'integrale improprio: l'unico criterio che abbraccia le funzioni con segno variabile è proprio quello della:

Teorema 1.1 (Criterio della convergenza assoluta)**.** *Prendendo un numero reale $a \in R$ e sia*

$$\int_a^c f(t)\ dt, c > a;$$

Se converge

$$\int_a^\infty |f(t)|\ dt.$$

allora è convergente anche

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Definizione 1.1. *LA parte positiva e negativa di f è definito nel seguente modo:*

$$f_+ : [a, \infty) \to R. \tag{1}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$f_- : (-\infty, a] \to R. \tag{3}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} -f(x), & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Inoltre si hanno le seguenti relazioni con la funzione originaria:

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x). \tag{5}$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{6}$$

Dimostrazione. Inoltre per il teorema del confronto si ha che $|f(x)|$ ha come integrale impoprio e per le disuguaglianze $f_+(x) \leq |f(x) \leq f_-(x)$. Allora siccome l'integrale del valore assoluto è convergente anche $f_+(x)$ e $f_-(x)$ sono convergenti. Per definizione esitono finiti:

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f_+(x)\ dx$$

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f_-(x)\ dx.$$

E quindi è finito pure:

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f_+(x)\ dx - \int_a^c f_-(x)\ dx.$$

COn la proprietà della linearità degli integrali allora si dimostra che: esiste finito

$$\lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\ dx$$

□

Un esempio è

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x^2}\ dx.$$

Passando al limite indefinito si ottiene:

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{sin(x)}{x^2}\right|\ dx$$

So che questo tipo di integrali convergono se l'esponente del denominatore è > 1. Allora posto:

$$\left|\frac{sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

PEr il criterio del confronto converge questo integrale per il criterio del confronto converge quello di partenza. Un'altro esempio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}\ dx$$

Passo al valore assoluto ed ottenere la convergenza assoluta:

$$\int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}\ dx$$

$$\left|\frac{sin(x)}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$$

Dal momento che la seconda diverge allora anche la prima deve divergere in quanto il criterio del confronto non riesce a darmi informazioni sulla convergenza del primo. Allora intervengo integrando per parti: Posto quindi

$$f'(x) = sin(x), \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -cos(x), \quad g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ dx :$$

$$\frac{-cos(x)}{x}|_1^c + \int_1^c -\frac{cos(x)}{x^2}\ dx.$$

$$\Rightarrow\ \exists\ finito \int_1^{+\infty} \frac{sin(x)}{x}\ dx$$

Proposizione 1.1.1. *La convergenza non implica la convergenza assoluta.*

Cosa accade se una funzione non è limitata all'interno di $(a, b]$? Il suo integrale non è definibile poiché c'è un asintoto in a.

Teorema 1.2 (Integrali impropri in intervalli finiti)**.** *Supponiamo che sia integrabile in senso standard in $[c, b], \forall c > a$: allora si applica un'operazione di limite:*

$$\lim_{c \to a} \int_c^b f(x)\ dx$$

Se esiste finito allora f è integrabile in senso improprio in a, b con integrale convergente. Se invece esiste e fa $+\infty$ allora f è integrabile in $[a, b]$ come integrale divergente. Se questo integrale non dovesse esistere allora f non è integrabile nemmeno in senso improprio. Le funzioni nella forma $\frac{1}{x^p}$ hanno come integrale tra 0 e 1 che è opposto rispetto al loro comportamento che hanno quando si fa l'integrale improprio fino a $+\infty$. DIverge se $p \geq 1$ e converge altrimenti.

Si esistendono i teoremi degli integrali impropri, la convergenza assoluta e gli altri anche a questo tipo di integrali impropri. Tuttavia gli integrali devono essere fatti chiusi da una parte e aperti dall'altra.

2 Serie numeriche

A cosa servono? SI estende l'operazione di sommatoria a infiniti addendi ma sono numerabili e ciascuno dei quali ha un indice ad infiniti addendi. GLi insiemi infiniti sono molto diversi tra loro come N, Z, Q, R e sono tutti infiniti ma solo N, Z, Q sono numerabili poiché hanno corrispondenza biunivoca.

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = ?$$

Posto $a_n = 1$ ossia la successione costante di 1 che $= +\infty$. Cosa succede se faccio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

QUesta somma fa $+\infty$anche se sono tutti termini minori di uno e far pensare che tutte le volte che si sommano quantità piccole allora il risultato è infinito, ma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1, \bar{1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Poiché si ha un'analogia con il suo integrale improprio.

Definizione 2.1. *Data una successione a_n di numeri reali si indica con*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tag{7}$$

La serie numerica generata da a_n.

Fissato un numero naturale grande definisco:

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Questo numero si chiama somma parziale o ridotta ennesima della serie. Se esiste finito

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = l, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$
$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty$$
$$\nexists \lim_{N \to +\infty} S_N \Rightarrow \ la\ serie\ e'\ indefinita.$$