Equazioni differenziali associate a una famiglia di curve

$F_c(x,y) = 0$

È una famiglia di curve in forma cartesiana.

Esempio

$F_c(x,y) = y - cx^2$ è la famiglia di parabole con centro nell'origine da varia al parametro c.

Ipotesi

Sia $F_c \in C^1(A)$ con A aperto $\subseteq \mathbb{R}^2$, derivabile rispetto a c.

Sia (x,y) regolare $\to$ Sia $\frac{\partial F_c}{\partial y} \neq 0$

Quindi cerco $y = y(x)$ t.c. $F_c(x,y) = 0 \quad \forall x \in I$

Derivando devo ottenere:

$\forall x \in I \quad \frac{d}{dx}\left(F_c(x, y(x))\right) = 0$ cioè $\frac{\partial}{\partial x} F_c(x, y(x)) + y'(x) \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x)) = 0 \quad \forall c$

Ho ottenuto un'equazione nella forma $F(x, y, y') = 0$

È un'EDO.

Esempio

$F_c(x,y) = y - cx^2 \to$

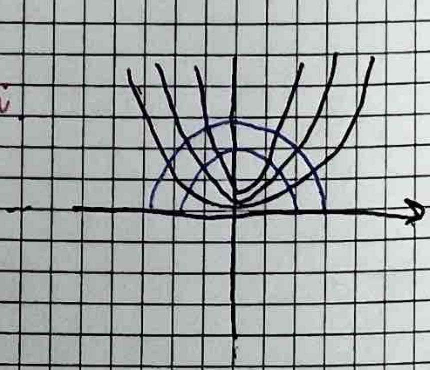
$y - cx^2 = 0 \to c = \frac{y}{x^2}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$y' - 2cx = 0 \to y' - 2\frac{y}{x} = 0$

$$\begin{cases} xy' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$ Perché sono parabole con vertice nell'origine.

Ci concentriamo sulle traiettorie ortogonali.



Traiettorie ortogonali

Ho $F_c(x,y)=0 \iff \frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}=0 \iff f(x,y,y')=0$

Le traiettorie ortogonali sono curve che si intersecano in un unico punto ogni curva della famiglia, e in tale punto sono ortogonali con le curve stesse.

- Passa per $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$, cioè $\exists t \in J$ t.c. $\begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$
- In $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$ i vettori derivati sono ortogonali, cioè $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix}_{t=x}$

Ma ho $t=x$, quindi $u(x)=y(x)$.

Ho $1+y'(x)\,u'(x)=0 \rightarrow u'(x)=-\frac{1}{y'(x)}$

Trovo l'EDO delle traiettorie ortogonali $\rightarrow$ $f\left(x, u(x), -\frac{1}{u'(x)}\right)=0$

Esempio

Cerco le traiettorie ortogonali alla famiglia di parabole.

Sono localmente grafici $(x, u(x))$, e deve soddisfare $f\left(x,u,-\frac{1}{u'}\right)=0$, cioè

$-\frac{1}{u'}-2\frac{u}{x}=0 \rightarrow$ Risolvo

$2uu'=-x$

$(u^2)'=-x$

$u^2=-\frac{x^2}{2}+K$ con $K\in\mathbb{R}$

$u^2+\frac{x^2}{2}=K$ è l'equazione delle traiettorie ortogonali