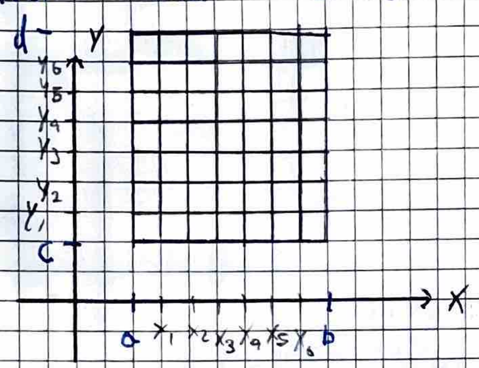
LEZ. 18/11/2025
PROF. BIANCHI

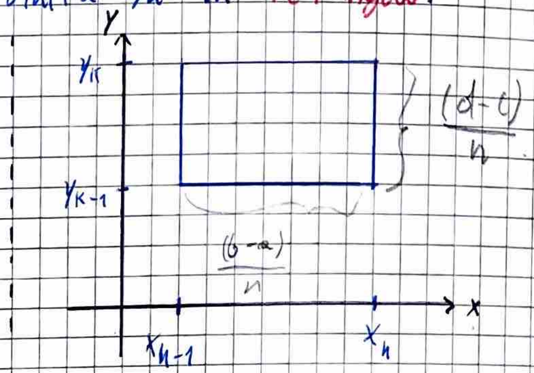
Integrali di funzioni a più variabili

L'integrale di funzioni a più variabili è un insieme di concetti → l'area non è un concetto universale, perché non è banale parlare di misura di un insieme polidimensionale. In matematica ci sono molte teorie dell'integrazione.

Noi avremo a che fare con quella di Peano - Jordan.

Prendo una funzione $f(x,y)$ definita su un rettangolo:





Prendo un parametro $n \in \mathbb{N}$

- Divido $[a,b]$ in n parti uguali.
- Divido $[c,d]$ in n parti uguali.

La misura di un rettangolo generico (in questo caso è l'area) è:

$$I_{nk} = |I_{nk}| = \frac{b-a}{n}\,\frac{d-c}{n}$$ → Si indica con il valore assoluto.

Per ogni rettangolo scelgo un punto P_{nk}.

Definisco allora la somma di Cauchy - Riemann:

$$S_n = \sum_{n,k=1}^{n} f(P_{nk}) \cdot |I_{n,k}|$$

<u>Nota</u> In $\mathbb{R}^3$ il termine $|I_{nk}|$ indica l'area del rettangolo di base, e $f(P_{nk})$ indica l'altezza.

Questo argomento è spiegato bene sul testo "Bramanti, Pagani, Salsa".

Definizione - funzione integrabile

Dico che la funzione $f: [a,b] \times [c,d]$, limitata, é integrabile sul rettangolo $R = [a,b] \times [c,d]$ se esiste finito:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n$$

e tale limite non dipende da come ho scelto i punti P_{nk} nei rispettivi rettangoli ad ogni passo della costruzione.

Esempio

$f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definita $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per } x \in \mathbb{R} - \{\mathbb{Q}\} \end{cases}$

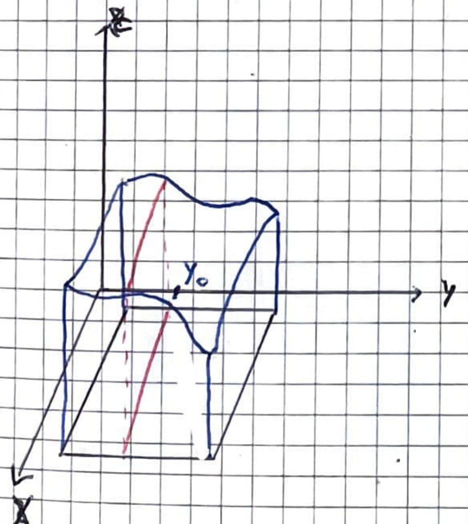
Questa funzione non é integrabile, perché a seconda della scelta dei punti P_{nk} potrei ottenere che il limite $\lim_{n \to \infty} S_n$ potrebbe essere 1 o 0 → Dipende dalla scelta dei punti P_{nk}

Teorema

Se $f: [a,b] \times [c,d]$ é continua, allora é integrabile

Metodo di integrazione per funzioni a più variabili

É un'iterazione di un'integrazione a una variabile:



Scelgo una sezione dell'oggetto (ossia un insieme di valori t.c. $y = \text{cost.}$), e ne calcolo l'area.

Il volume di questo oggetto sarà l'integrale delle aree delle sezioni.

Nell'atto pratico ciò si traduce nell'integrare una funzione tenendo costante una delle variabili, e poi integrare di nuovo rispetto alla variabile che prima era congelata:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Esempio

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} x\, e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x\, e^{xy}\,dy\right)dx =$$

$$= \int_0^1 e^{2x} - 1\,dx = \frac{e^{2x}}{2} - x \Big|_0^1 =$$

Teorema

Se $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ è continua, allora:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

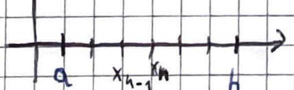
Lemma

Sia $f(x,y)$ continua in $[a,b]\times[c,d]$.

- La funzione $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ è continua in $[a,b]$.
- La funzione $\psi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ è continua in $[c,d]$.

Dimostrazione

Considero $\varphi(x)$ definita su $x \in [a,b]$



Posso spezzare gli integrali su $[a,b]$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{h=1}^{n} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi(x)\,dx$$ → Uso il teorema della media integrale.

$$= \sum_{h=1}^{n} \varphi(x_h^*)\cdot(x_h - x_{h-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{h=1}^{n} \varphi(x_h^*) =$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{h=1}^{n} \int_c^d f(x_h^*, y)\,dy$$

Lo stesso ragionamento fatto per $\varphi(x)$ lo replico per $\psi(y)$

$$\int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_h, y)\, dy =$$

$$= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_h^*, y_h^*) \overbrace{(y_k - y_{k-1})}^{\frac{d-c}{n}} =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} f(x_h^*, y_h^*) \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right) = \qquad \rightarrow \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{n}\right) = |I_{hk}|$$

$$= \sum_{h,k} f(x_h^*, y_h^*) |I_{hk}| \rightarrow \text{Non dipende da } n \ (f \text{ é continua}).$$

Questa é una somma di Riemann per questo integrale con una scelta particolare di P_{hk}.
Poiché non ho una dipendenza da n e la funzione é integrabile posso far tendere la mia espressione all'infinito.

$$\lim_{n \to \infty} \sum f(x_h^*, y_h^*) |I_{hk}| = \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{Dimostrato}$$

Questi risultati che abbiamo ottenuto finora sono validi per insiemi di integrazione che sono rettangoli.

Integrale su domini non rettangolari

Definizione

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato.

Sia $R: [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenente Ω.

Sia $\tilde{f}: R \to \mathbb{R}$ definita come $\tilde{f} \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin \Omega \end{cases}$

Se $\tilde{f}$ é integrabile su R dico che f é integrabile su Ω e:

$$\int_{\Omega} f(x,y)\, dx\, dy = \int_R \tilde{f}(x,y)\, dx\, dy$$

Insieme semplice e regolare

Sono insiemi per cui si riesce a dare una teoria di integrazione soddisfacente.

- Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice "y-semplice" se é del tipo:

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \text{ t.c. } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

con g_1 e $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

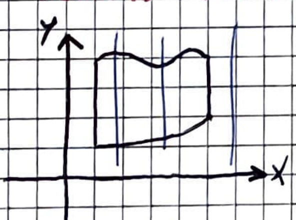
- Un insieme "x-semplice" é la stessa cosa, ma con $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$.

Sugli insiemi x-semplici la y varia di punto in punto mentre la x rimane costante, mentre sugli insiemi y-semplici accade il contrario.

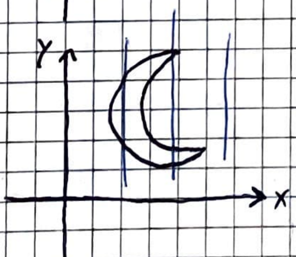
- Un insieme si dice "regolare" se é unione di un numero finito di insiemi semplici.

LEZ. 19/11/25
PROF. BIANCHI

Nota Un nome spesso usato per y-semplice é "normale rispetto a x". Infatti per tali insiemi si ha che le rette verticali o non intersecano l'insieme o lo intersecano in un segmento.

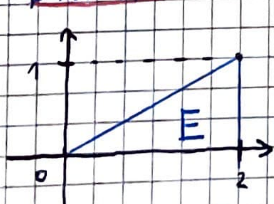


Questo insieme é y-semplice



Questo insieme non é y-semplice.

Esempio



- E é y-semplice:

$$E = \{(x,y) : x \in [0,2],\ 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2}x\}$$

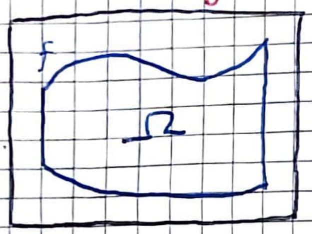
- E é x-semplice:

$$E = \{(x,y) : y \in [0,1],\ 2y \leq x \leq 2\}$$

Teorema

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua su Ω, e sia Ω regolare. Allora:

f é integrabile.

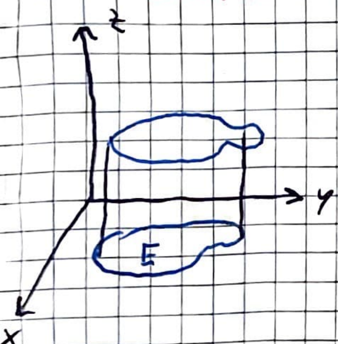


Supponiamo che questa funzione sia nulla in tutti ~~gli~~ punti fuori da Ω → Sul bordo di Ω non é detto che sia continua, ma avrá dei salti.

Questo teorema garantisce peró l'integrabilitá della funzione

Misura di un insieme del piano

Il concetto di misura di un insieme non é affatto ovvio → Per elementi facili come i poligoni il concetto di area é noto, ma per insiemi complicati e arbitrari non lo é: ad esempio



Prendo un insieme E, e vi definisco su esso la funzione costante 1 → la sua area sará:

$$\int_E 1 \, dx \, dy$$

Sembra un integrale banale, ma voglio sfruttarlo come definizione per stabilire se un insieme possa avere un'area associata

Definizione - Insieme misurabile

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato.

Ω si dice "misurabile" se la funzione costante 1 é integrabile in Ω.
In tal caso chiameró "misura" (o "area") di Ω, e indicheró con il simbolo $|\Omega|$ il numero:

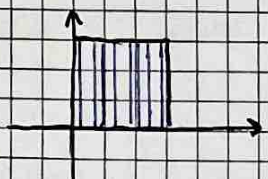
$$|\Omega| = \int_\Omega 1 \, dx \, dy$$

Questa é la definizione di insieme misurabile secondo la teoria di Peano - Jordan.

Osservazione

1) Se Ω é regolare, allora é misurabile → Infatti la funzione costante 1 é continua su Ω, e dunque integrabile per il teorema precedente.

2) Se $\Omega = \{(x,y): x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0,1]\}$, allora Ω non é misurabile.



É una sorta di funzione di Dirichelet in $\mathbb{R}^2$.

Insiemi a misura nulla

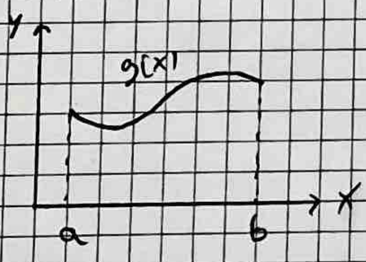
Esistono insiemi misurabili la cui misura é nulla.

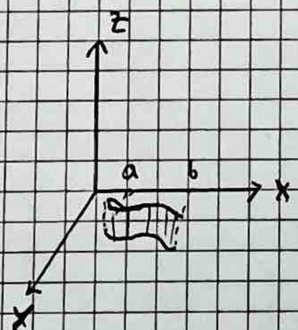
Proposizione

Un insieme limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é misurabile e ha misura zero se e solo se vale la seguente proprietà:
detto R un rettangolo contenente Ω, considerata la suddivisione di R in n^2 rettangoli uguali (come nella definizione di integrale), e detta A_n la somma delle aree dei rettangolini che hanno intersezione non vuota con Ω, si ha che $A_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Esempio

Supponiamo di avere una funzione $g(x)$ continua su $[a,b]$ → il grafico di g ha misura nulla.





Sto calcolando il volume di un oggetto che non ha spessore → il valore é nullo.

Proposizione

L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Corollario

Il bordo di un insieme semplice e il bordo di un insieme regolare hanno misura nulla.

Teorema

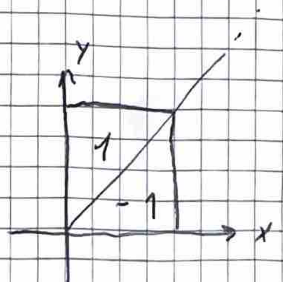
Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare, e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua ad eccezione di un insieme di misura nulla di punti di discontinuità, allora:

f è integrabile.

Esempio

$f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \geq x \\ -1 & \text{se } y < x \end{cases}$$



Il teorema appena scritto afferma che f è integrabile.

Teorema

Sia $f: [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$. Sia f limitata e continua salvo un insieme di misura nulla di punti di discontinuità, allora:
valgono ancora le formule di riduzione, cioè:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f \, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Proprietà

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile. Siano f e g integrabili. Sia $c \in \mathbb{R}$.

A) L'integrale è lineare:

$$\int_\Omega (f+g)\, dx\,dy = \int_\Omega f \, dx\,dy + \int_\Omega g\, dx\,dy$$

- $\int_\Omega c f \, dx\, dy = c \int_\Omega f \, dx\, dy$

B) - Se $f \geq 0$, allora $\int_\Omega f \, dx\, dy \geq 0$

- Se $f \geq g$, allora $\int_\Omega f \, dx\, dy \geq \int_\Omega g \, dx\, dy$

In particolare, poiché $-|f| \leq f \leq |f|$, si ha:

- $-\int_\Omega |f| \, dx\, dy \leq \int_\Omega f \, dx\, dy \leq \int_\Omega |f| \, dx\, dy$

- $\left| \int_\Omega f \, dx\, dy \right| \leq \int_\Omega |f| \, dx\, dy$

C) Sia $\Omega' \subset \Omega$ misurabile. Allora f é integrabile anche in Ω'.

Se inoltre $f \geq 0$, allora:

$$\int_{\Omega'} f \, dx\, dy \leq \int_\Omega f \, dx\, dy$$

D) Siano Ω_1 e Ω_2 domini regolari, con:

- $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ha misura nulla.
- f sia integrabile in $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Allora:

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dx\, dy = \int_{\Omega_1} f \, dx\, dy + \int_{\Omega_2} f \, dx\, dy$$

E) Se $|\Omega| = 0$, allora $\int_\Omega f \, dx\, dy = 0$.

Scrivo ora le formule di riduzione nel caso di insiemi semplici.

Teorema

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua e sia Ω x-semplice, cioè:

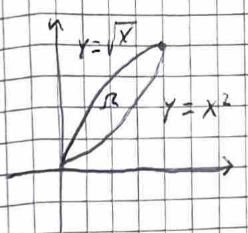
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con h_1 e h_2 funzioni continue. Allora:

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Vale una formula simile per domini y-semplici.

Esempio



Calcolo $\int_\Omega xy\,dx\,dy$

$$\Omega = \{(x,y) : y \in [0,1],\ y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\,dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{y^3}{6} - \frac{y^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - 0 = \frac{1}{12}$$

Esempio

Calcolo $\int_\Omega e^{x^2}\,dx\,dy$

È y-semplice

$$\Omega = \{(x,y) : x \in [0,1],\ 0 \leq y \leq x\}$$

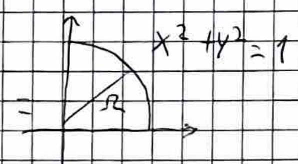
$$\int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}(e-1)$$

Se l'avessi scritto come x-semplice non sarebbe stato analiticamente risolubile.

Esempio

$$\int_{\Omega} (1-y)\,x \,dx\,dy \qquad \Omega =$$



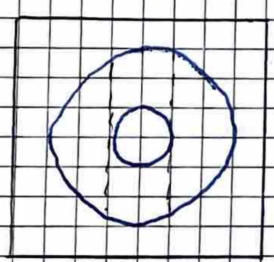
Ω è x-semplice $\rightarrow \Omega = \{(x,y) : y \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}],\ y \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$

$$\int_{\Omega} x(1-y)\,dx\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y)\,dx \right) dy$$

LEZ. 20/11/25
PROF.

Teorema (richiamo)

Sia $f: [a,b]\times[c,d] \equiv R \rightarrow \mathbb{R}$ continua su R eccetto per un insieme di punti di misura nulla in cui f è continua, allora f è integrabile.



Questa funzione ha misura nulla su tutti i punti del rettangolo nero $\rightarrow$ É integrabile.

Teorema (richiamo)

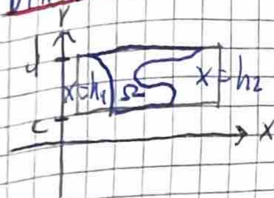
Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia ω un dominio x-semplice:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

con h_1 e h_2 continue, allora:

$$\iint_{\Omega} f\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\,dx \right) dy$$

Dimostrazione



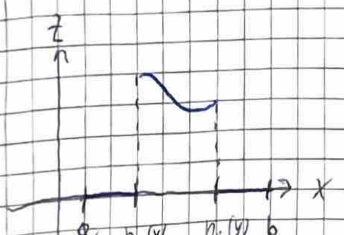
Per fare questo integrale scelgo un rettangolo che contenga la mia funzione. Vi definisco la funzione $\tilde{f}: R \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x,y) \in R - \{\Omega\} \end{cases}$$

Applico le formule di riduzione:

$$\iint_{\Omega} f \, dx\, dy = \iint_R \tilde{f} \, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b \tilde{f}(x,y) \, dx \right) dy$$

Faccio il grafico di $\tilde{f}(x,y)$ come funzione di x con y fissato.



Ma allora $\int_a^b \tilde{f} \, dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \tilde{f} \, dx + \underbrace{\int_a^{h_1(y)} \tilde{f} \, dx}_{=0} \underbrace{\int_{h_2(y)}^{b} \tilde{f} \, dx}_{=0} =$

$= \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f \, dx$ perchè $\tilde{f} = f \quad \forall x \in [h_1(y), h_2(y)]$

Ma allora

$$\int_a^b \tilde{f}(x,y) \, dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx$$

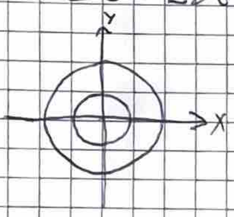
$$\Rightarrow \iint_{\Omega} f(x,y) \, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \, dx \right) dy$$

Cambiamento di variabili

Negli integrali di 1 variabile il cambio di variabile era utile per trovare una primitiva → Per le funzioni di più variabili la cosa é diversa, perché la complessità del problema non viene solo dalla funzione, ma anche dal dominio → Il cambio di variabili può essere anche un'operazione che semplifica solo una fra queste due cose.

Esempio

$\Omega = [B(0,2) / B(0,1)]$



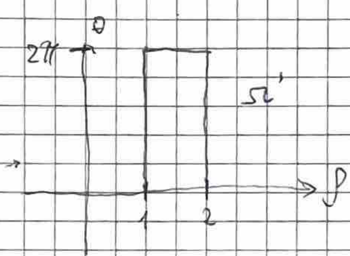
$\rightarrow \iint_{\Omega} x^2 \, dx\, dy$

· Passo in coordinate polari:

$(x,y) \rightarrow (\rho, \theta)$

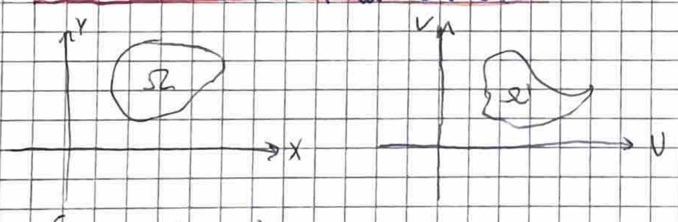
$x = \rho \cos(\theta)$

$y = \rho \sin(\theta)$



Come cambio i differenziali?

Cambiamento del differenziale



$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

Per cambiare coordinate uso una funzione T t.c.:

$T: \Omega' \rightarrow \Omega$

Faccio delle ipotesi:

- T é biunivoca.
- Le funzioni g e h sono $C^1(\Omega')$

- La Jacobiana di T J_T ha $\det(J_T) \neq 0 \ \forall (u,v) \in \Omega'$

con $J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$

Teorema (formula del cambiamento di variabili)

Se Ω é regolare e valgono le ipotesi scritte prima, allora:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} f(g(u,v), h(u,v)) \left|\det(J_T)\right| du\,dv$$

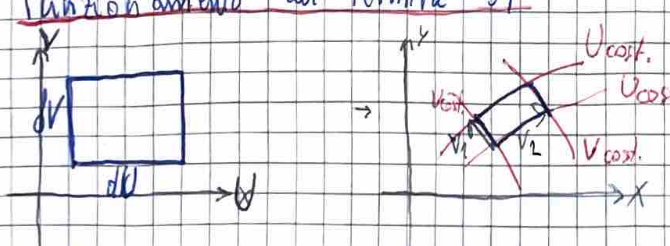
Studio il termine $|\det(J_T)|$ nel caso delle coordinate polari:

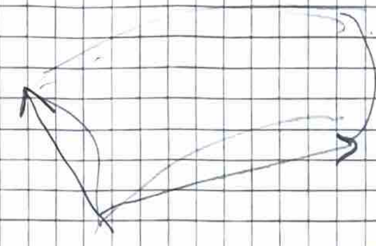
$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) = g(\rho,\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) = h(\rho,\theta) \end{cases}$$

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\det(J_T) = \rho\cos^2(\theta) + \rho\sin^2(\theta) =$$
$$= \rho(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho$$

Funzionamento del termine J_T





Prendo due vettori e approssimo l'area del parallelogramma con quelli.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(u, v+dv) - g(u,v) \\ h(u+v+dv) - h(u,v) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Approssimo con Taylor.}$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,dv,\ \frac{dh}{\partial v}(u,v)\,dv\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial v}(u,v),\ \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\right)dv$$

Analogamente l'altro sará: $\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v),\ \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\right)du$

Ora calcolo l'area nuova che sará il determinante:

$$A = \left|\det\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}}_{J_T}\right| du\,dv \quad \text{Ecco da dove viene } J_T!$$

Integrali doppi generalizzati

Siamo in situazioni in cui il dominio é illimitato o la funzione é illimitata.

Esempio

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dx$$

Il dominio é illimitato

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$ é svolto negli esercizi (fa π).

Posso anche pensare $\mathbb{R}^2$ come un rettangolo infinito:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-x^2} e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\, dx \cdot \int_{+\infty}^{+\infty} e^{y^2}\, dx$$

So che il quadrato di questo integrale fa π.

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

Esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

Ora ho:

$$\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\, dx\, dy \qquad \iint_{\mathbb{R}-B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}\, dx\, dy$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^1 \underbrace{\frac{\rho}{\rho^\alpha}}_{\rho^{\alpha-1}}\, d\rho$$ Risulta finito per $\alpha-1<1$

$\underline{\alpha<2}$