

Indice

I	Statica dei fluidi	4
1	Lo studio dei fluidi	5
1.1	Introduzione alla statica dei fluidi	5
1.1.1	L'atomo di Feynman	5
1.1.2	Il potenziale di interazione	5
1.1.3	L'interazione tra due parti di uno stesso contenitore	6
1.2	Prototipo di funzioni che descrivono il potenziale di interazione	7
1.2.1	Funzioni di Leonard - Jones	7
1.3	Studio del minimo dell'energia totale	8
1.3.1	Configurazione a minore energia	8
1.3.2	Validità del modello entro un certo ΔE rispetto al minimo	9
1.3.3	Gli effetti di ΔE molto grandi	9
1.4	Le proprietà microscopiche dello stato liquido	9
1.4.1	Riassunto delle proprietà delle fasi e ipotesi di validità	10
1.4.2	Determinare gli effetti probabilistici nel sistema	10
2	La fluidostatica	12
2.1	Piccola parentesi sulla fluidodinamica	12
2.1.1	Il concetto di fluido ideale	12
2.1.2	Definizione del campo scalare della pressione	12
2.1.3	Definizione del campo scalare della densità	13
2.1.4	Comprimibilità	13
2.1.5	La resistenza all'espansione di un fluido	13
2.1.6	Torchio idraulico	15
2.1.7	Trovare l'equilibrio con le equazioni differenziali	15
2.2	Isolivelli	15
2.3	Legge di Stevino	16
2.3.1	Stima per un caso specifico	16
2.3.2	Contenitore con liquido	16
2.3.3	Fluido immerso in un fluido	17
2.4	Esempi di esercizi dei fluidi	17
2.4.1	Anticipazione legge dei gas perfetti	18
3	Le forze apparenti nei fluidi	19
3.1	Fluido in rotazione e isolivelli della pressioneS	19
3.2	Autogravitazione dei fluidi nel caso di una sfera di fluido	20
3.2.1	Il pianeta fatto di fluido in rotazione	21
II	Termodinamica	22
4	La termodinamica	23
4.1	Introduzione alla termodinamica	23
4.1.1	Storia della termodinamica	23
4.1.2	Lo studio della termodinamica	23
4.2	L'equilibrio termodinamico	23
4.3	Estensività	24
4.4	Pareti ed equilibrio termico	24
4.5	La temperatura	24

4.5.1	Misurare la temperatura e sua definizione operativa	25
4.6	Come è fatto un termometro	25
4.6.1	Le varie scale	26
5	I Gas	27
5.1	La storia della teoria dei gas e la definizione di gas perfetto	27
5.2	Digressione sui sistemi fluidi	28
5.2.1	L'equazione di stato per i gas perfetti	28
5.2.2	Il limite di utilizzo dell'equazione di stato dei gas	29
5.2.3	L'equazione di Van Der Waals per la descrizione dei gas	30
5.3	Validità di Van Der Waals	30
5.4	Diagramma di fase	31
6	Trasformazioni termodinamiche	32
6.1	Come avvengono le trasformazioni	32
6.2	Espansione libera adiabatica di un gas	33
6.2.1	Espansione libera adiabatica quasi statica	33
6.3	Trasformazioni non adiabatiche	33
6.3.1	Il termostato	33
6.3.2	Il lavoro delle forze di pressione di un fluido	34
6.3.3	Trasformazioni quasi statiche a pressione costante	35
6.3.4	Trasformazioni quasi statiche isoterme	35
6.3.5	Lavoro del sistema e dell'ambiente	35
6.4	Lavoro del sistema durante una trasformazione adiabatica	36
7	Primo principio della termodinamica	38
7.1	La capacità termica	39
7.1.1	Il mulinello di Joule e la definizione di capacità termica	39

Introduzione al corso

Il corso di Fluidi si divide in tre parti

1. Termodinamica: studia processi non di carattere meccanico che si manifestano a livello macroscopico
2. Statistica: la fisica statistica coniuga la meccanica con la statistica che si usa nelle applicazioni che vanno al di là della fisica classica: da un fondamento microscopico agli effetti della termodinamica.
3. Meccanica dei fluidi: sistemi materiali macroscopici per lo studio dei fluidi.

Prima di tutto si inizia con un cappello che collega le tre parti; poi si inizia con statica dei fluidi, dopo termodinamica, poi statistica e infine dinamica dei fluidi. Questo perché alcuni strumenti di analisi due saranno utilizzati per la parte di dinamica dei fluidi e statistica.

L'esame è diviso in tre domande orali (una per sezione) (niente prova scritta) con esercizi applicati alla realtà e di effetto pratico (che sono fatti a lezione). Il libro consigliato è "Elementi di meccanica di fluidi" di Egidio Landi, per la parte di termodinamica "Termodinamica" di Enrico Fermi e per la parte di fisica statistica le dispense del prof in quanto non ci sono libri che facciano al caso del corso.

Il vantaggio di studiare tre discipline in un corso è che si riesce ad avere una idea più completa dei sistemi che si studiano.

Parte I

Statica dei fluidi

Capitolo 1

Lo studio dei fluidi

1.1 Introduzione alla statica dei fluidi

Il caso più semplice della fisica è quello dell'approssimazione del punto materiale; cosa succede allora se io aumentassi il numero di punti materiali e li mettessi tutti insieme? Se si mettono insieme in modo da poter costituire un corpo rigido allora avrei da risolvere diverse equazioni per poter determinare il comportamento del corpo; nessun materiale reale gode di questa proprietà ma è solo una idealizzazione che vale entro certe approssimazioni. Il modello del corpo rigido funziona molto bene per i corpi solidi che in prima approssimazione sono ben descrivibili con questo modello, mentre nel caso dei fluidi questa approssimazione non è valida.

Nei sistemi fluidi si considera allora il movimento degli atomi neutri all'interno del fluido (non di plasmi) e quindi si può, utilizzando le conoscenze di Fisica I, determinare come questi si muovono.

1.1.1 L'atomo di Feynman

In questo studio dei fluidi utilizziamo la definizione di atomo così come la aveva data Feynman: gli atomi sono dei punti materiali che si attraggono se sono sufficientemente vicini ma se troppo vicini si respingono. Essenzialmente a livello macroscopico l'atomo è visto come piccole palline che costituiscono il corpo. Possiamo allora definire diverse proprietà della materia che utilizziamo per la descrizione dei fluidi:

- Gli atomi sono dei punti materiali che hanno una certa massa m che obbediscono alle leggi della meccanica di Newton;
- Un campione di materia è un insieme di N atomi (ossia un numero molto grande) che possono essere chiusi in un contenitore ideale (ossia con pareti rigide e fisse).
- Gli atomi interagiscono tra di loro solo tramite forze conservative, ossia che possono essere derivate e che queste forze dipendono esclusivamente dalla distanza tra gli atomi stessi; questo vuol dire che compiono solo urti completamente elastici con il contenitore.

Posso allora dare una definizione concreta alle forze intermolecolari, iniziando definendo r_0 come la distanza caratteristica che ha definito Feynman oltre la quale gli atomi si attraggono ma entro la quale si respingono.

- Se la distanza tra i due atomi è maggiore ma dello stesso ordine di r_0 , allora le forze sono attrattive.
- Se la distanza è minore di r_0 , allora la forza è repulsiva.
- Le interazioni decadono molto velocemente con l'aumentare della distanza.

1.1.2 Il potenziale di interazione

Posso allora definire il **potenziale di interazione** tra due atomi come $V(r)$ e quindi posso relazionare le tre condizioni precedenti con il potenziale, il quale deve diventare costante quando i due oggetti si trovano a grandi distanze in quanto la forza diventa trascurabile. Posso fissare un sistema di riferimento inerziale e dunque posso dire che l'energia totale del sistema sarà data da

$$E = K + V \implies \frac{1}{2} \sum |\vec{v}_i|^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \quad (1.1)$$

Data l'ipotesi che ci siano solo delle forze conservative all'interno del sistema che studiamo, allora posso riscrivere la componente potenziale (la quale dipende da n variabili), è scrivibile come la somma di tutte le possibili coppie e dunque

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1.2)$$

Posso anche esprimere anche l'energia potenziale attraverso la sommatoria rispetto a tutte le coppie escludendo l'elemento già considerato (quindi si dimezza la sommatoria):

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(i \neq j)}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (1.3)$$

I termini contano solo se la distanza è minore a volte r_0 : fissato allora un istante di tempo posso scegliere un atomo e dire quali coppie possono effettivamente contribuire all'energia potenziale e quindi ogni atomo interagisce solo con gli atomi vicini che si trovano nella sfera (e quindi posso esprimerlo come $a \cdot r_0$), posso allora approssimare con un pochino meno termini rispetto a $\frac{N(N-1)}{2}$ in quanto ogni atomo interagisce solo con gli altri all'interno della sfera di interazione.

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j \in S(i)}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Quanti sono allora gli atomi massimi consentiti all'interno della sfera di interazione $S(i)$ rispetto ad un dato atomo j ? Se prendessi allora questa sfera di raggio $a \cdot r_0$, si ottiene una stima che dipende da r_0 e lo divido per il volume della singola sferetta (il quale è sempre una approssimazione per eccesso perché non considero che siano rigide) per determinare il numero di atomi n_s che interagiscono con l'atomo. La sfera di interazione ha raggio $a \cdot r_0$ (dove a è un numero) e il singolo atomo ha raggio $\frac{r_0}{2}$ e quindi devo fare il rapporto tra i volumi delle sfere e ottengo $n_s \approx (2a)^d$, dove d è la dimensione (piano = 2, spazio = 3). Si ottiene allora che per $a = 2.5$, $d = 2$ si ha $n_s \approx 25$, per $d = 3$ e $n_s \approx 125$. La dimensione è legata a partire dal volume della sfera, infatti il raggio è elevato alla dimensione dello spazio considerato.

L'energia potenziale degli atomi nella materia è direttamente proporzionale al numero di atomi infatti si ottiene che è proporzionale a Nn_s invece che N^2 come si era detto prima (abbiamo allora escluso N dati). Quando una grandezza soddisfa questa proprietà allora è una grandezza **estensiva**: la maggioranza dei termini non conta e dunque l'energia di un sistema è una grandezza estensiva, se così non fosse allora la materia non si comporterebbe come si comporta.

1.1.3 L'interazione tra due parti di uno stesso contenitore

Immaginando di suddividere il contenitore in due parti allora avremo un po' del fluido che sta da una parte e un po' che sta dall'altra: questa divisione va fatta in modo tale che le due parti debbano essere macroscopiche (non pochi atomi da una parte e il resto dall'altra). Come posso determinare l'energia di questo sistema? Dato allora il sistema $N_1 + N_2 = N$, ossia il numero di atomi del primo più il secondo compartimento mi dà gli atomi totali (con $N \gg \gg 1$). Devo dividere il contenitore in modo tale che il "divisore" sia di una dimensione in meno dello spazio considerato (es nello spazio un piano) in modo tale che sia uniforme.

Posso allora esprimere l'energia totale come

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_{1,2} \\ E_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} |\vec{v}_i^1|^2 + U(\vec{r}_1^1, \dots, \vec{r}_{N_1}^1) \propto N_1 \\ E_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} |\vec{v}_i^2|^2 + U(\vec{r}_1^2, \dots, \vec{r}_{N_2}^2) \propto N_2 \end{aligned}$$

Figura 1.1: Il potenziale di interazione

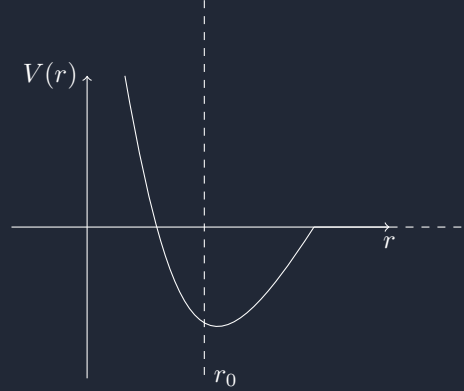
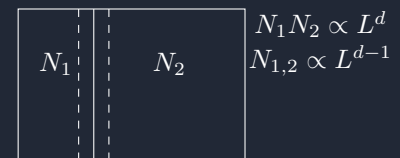


Figura 1.2: L'interazione tra due recipienti uniti



Come si nota, esiste anche un contributo di interazione tra le due parti che posso esprimere come:

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j \neq i}^{N_2} V \left(\left| \vec{r}^{N_1}_i - \vec{r}^{N_2}_j \right| \right)$$

Il contributo di questa interazione è molto più piccola dell'interazione E_1 e E_2 in quanto solamente gli atomi molto vicini al bordo che divide i due sistemi interagiscono tra di loro (zona tratteggiata) e dunque più cresce N allora più diminuisce questo contributo. Inoltre si osserva che sono proporzionali ad un certo L che è dato dai limiti fisici del contenitori (chiamata scala libera):

$$L \propto N_1^{\frac{1}{d}} \implies N_{1,2} \propto N_1^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{uguale per } N_2$$

Se N_1 cresce, allora $N_{1,2}$ diventa molto piccolo. Si ha che l'energia complessiva di un sistema che ho arbitrariamente diviso in due pezzi avrà l'energia della somma dei due contributi ignorando il termine di interazione tra le due parti purché siano macroscopici (infatti non sarebbe vero se una delle due componenti avesse pochi atomi).

$$E \approx E_1 + E_2 \quad \text{per } N \gg \gg \gg 1 \implies E = E_1 + E_2 \quad (1.4)$$

Allora ottengo che l'energia è una **quantità additiva** (infatti è vero per m divisioni fino a che le componenti sono macroscopiche). Tutte queste considerazioni sono valide se e solo se io continuo a ignorare i contributi all'esterno della sfera di interazione e considerando quindi che quei contributi convergano a zero in modo sufficientemente rapido: infatti l'analisi ci insegna che somme di piccole quantità molto grandi non sempre convergono a numeri finiti. Si può dimostrare che devono convergere a zero più velocemente di r^{-d} (dove d è nuovamente la dimensione dello spazio) (per l'interazione gravitazionale questo non è vero infatti).

1.2 Prototipo di funzioni che descrivono il potenziale di interazione

1.2.1 Funzioni di Leonard - Jones

Il potenziale di interazione è dato dalla seguente relazione

$$V(r) = \epsilon \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^6 \right) \quad (1.5)$$

Il modello funziona molto bene per i gas nobili in quanto sono atomi neutri che non interagiscono con nessun'altro atomo. Anche per lo studio di casi più complessi il modello da seguire è essenzialmente questo entro certe approssimazioni; spesso si riscrive in modo leggermente diversa questa formulazione, ossia nella seguente forma

$$V(r) = 4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right) \quad (1.6)$$

Dove si ha che $r_0 = 2^{1/6} \cdot \sigma \approx 1.12\sigma$. Sigma è il valore oltre al quale il potenziale diventa negativo, ossia il punto in cui si azzerà l'energia potenziale; il valore di ϵ per i gas nobili è dato da

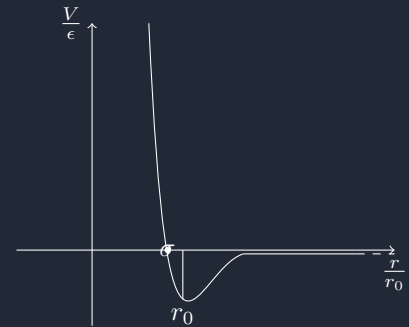
$$\epsilon = 10^{-3} \sim 10^{-2} eV$$

mentre il range di σ (sempre per i gas nobili) è

$$\sigma = 0.2 \sim 0.4 \text{ nm}$$

L'interazione alla sesta è data dai termini di Van Der Waals che dipendono dalle interazioni tra le nubi elettroniche; è possibile ricavare che il contributo attrattivo sia di potenza 6 mentre il contributo repulsivo è di potenza 12 in quanto è computazionalmente comoda. Questo modello puramente meccanico ci permette di descrivere le interazioni atomiche a livello approssimativo poiché non si può usare le leggi della meccanica classica.

Figura 1.3: La funzione di potenziale



1.3 Studio del minimo dell'energia totale

1.3.1 Configurazione a minore energia

Nello studio di sistemi conservativi si possono imparare un sacco di cose dallo studio della funzione dell'energia potenziale senza andare a derivare; per esempio in uno oscillatore armonico nel punto più basso dell'energia potenziale il sistema sta fermo, se però si dà un po' di energia al sistema, allora il sistema avrà una regione all'interno della quale si può muovere. Dall'espressione dell'energia totale

$$E = \frac{1}{2}m \sum_{i=1}^n |\vec{v}_i|^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

si può trovare il minimo dell'energia. Il livello minimo più intuitivo si ha quando tutte le particelle sono ferme, tuttavia esisterà anche un altro punto di minimo che è più complicato da ricavare. Riesprimendo il potenziale come

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)_{i \neq j}$$

Trascurando l'effetto della differenza tra due e tre dimensioni e, al posto di utilizzare metodi analitici, cerchiamo di trovare il minimo attraverso metodi fisici e matematici. Lo scopo è allora capire come si dispongono gli atomi nello spazio per poter determinare il minimo dell'interazione tra di essi.

Possiamo innanzitutto ricondurci ad un caso molto semplice con soli due atomi $N = 2$. L'energia potenziale è allora minima quando $r = r_0$, che si ottiene centrando il sistema di riferimento nella particella 1 e ponendo la seconda a distanza r_0 .

Se avessi ora tre particelle, avrei tre contributi energetici per il potenziale dato da

$$U = V(r_{1,2}) + V(r_{1,3}) + V(r_{2,3})$$

Se la distanza tra tutte le particelle è esattamente r_0 , allora il mio sistema avrà energia potenziale minima. Da $N > 4$ le cose cambiano radicalmente in quanto, essendo vincolati ad un piano, non c'è nessun modo per far sì che le distanze tra tutte le particelle sia uguale. Devo disporre quindi tutte le particelle in modo tale che stiano secondo uno schema simmetrico e regolare in quanto le particelle da una parte della configurazione esercitano una certa forza mentre quelle che stanno dall'altra esercitano una forza uguale e contraria per cui il contributo netto sulle singole particelle è zero. Con questa disposizione regolare allora avremmo che la funzione presenta sicuramente un punto stazionario anche se, secondo l'analisi, si avranno altri punti stazionari. Dobbiamo fare in modo che questa configurazione regolare si contribuisca con la minore energia possibile e quindi posso ripetere il pattern del triangolo equilatero per poter ottenere la minore energia potenziale.

Si può dimostrare che il reticolo regolare è la configurazione con minore energia potenziale purché il numero di particelle considerate sia molto grande rispetto ad 1 anche se il minimo vero è diverso poiché stiamo ignorando il contributo potenziale con la parete. Possiamo ottenere tutte le posizioni delle particelle in un reticolo come se fosse un sottospazio vettoriale con generatori

$$\begin{aligned} \vec{a} &= r_0 \hat{i} \\ \vec{b} &= \frac{r_0}{2} (-\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}) \\ \implies \vec{r}_{n,m} &= n\vec{a} + m\vec{b} \quad n, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Si può allora ottenere che per determinare il minimo per ogni particella si considerano le particelle all'interno dell'esagono più vicino poiché abbiamo dimostrato che, in valore assoluto, hanno contributo maggiore e dunque si ottiene che il minimo è proprio:

$$E_{mn} \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^6 V(r_0) = -3N\epsilon \quad (1.7)$$

Il **cristallo** è la disposizione di minima energia possibile in quanto la fisica quantistica fa prediligere le formazioni cristalline come configurazione di energia minore possibile.

Figura 1.4: La configurazione a minore energia: il reticolo regolare



1.3.2 Validità del modello entro un certo ΔE rispetto al minimo

Dobbiamo ora cercare di convincerci che questo modello non funziona solo per un modello con poche particelle ma anche per configurazioni abbastanza simili:

$$E = E_{min} + \Delta E$$

Posso applicare allora un po' di energia cinetica al nostro modello attraverso il calore per poter ottenere un innalzamento dell'energia totale (utilizzando l'approssimazione per la quale l'energia che applichiamo al sistema è uniformemente condivisa tra tutti gli atomi). Possiamo prendere l' i -esimo atomo con energia pari a

$$\frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2 \approx \frac{\Delta E}{N} \quad \Delta E \ll E_{min} \quad \frac{1}{2}m|\vec{v}_i|^2 \ll \epsilon$$

Se sviluppassi con Taylor al secondo ordine la funzione di potenziale rispetto a r si ottiene che

$$V(r_{i,j}) \approx -\epsilon + \frac{1}{2}V''(r_0)(r_j - r_0)^2 \quad V''(r_0) = 72\frac{\epsilon}{r_0^2}$$

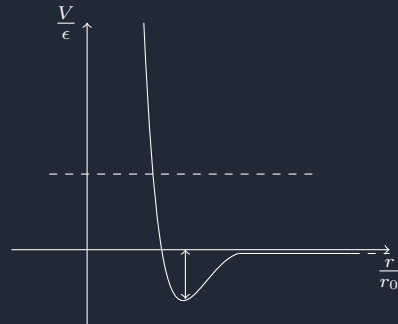
Tutte le coppie di atomi si comportano allora come oscillatori armonici e quindi si può approssimare il modello come un network di oscillatori armonici trascurando le molle più lontane e considerando solo quelle dei 6 atomi più vicini. Macroscopicamente si comporta come un solido in quanto per poterlo deformare bisogna applicare forze molto grandi. Se si continua a far crescere l'energia, ad un certo punto dobbiamo aggiungere termini successivi allo sviluppo di Taylor, il quale diventa più grande, e il modello necessita dell'introduzione dei termini successivi. Da questo si ha che più un sistema è caldo (e quindi più calore forniamo ad un sistema) e più questo si dilata.

1.3.3 Gli effetti di ΔE molto grandi

Aumentando sempre di più ΔE il modello avrà un asintoto verticale e quindi se applico una energia maggiore della differenza tra il minimo e zero allora gli atomi non saranno più legati tra di loro e quindi il sistema inizierà a comportarsi come un gas e ogni particella inizierà a muoversi indipendentemente dalle altre. Come si vede dal grafico, se aumenta l'energia, i valori possibili di energia per r_0 tende ad essere uno solo, ossia nella parte del grafico dove l'energia potenziale è repulsiva.

Il sistema si comporterà come un solido cristallino se e solo se l'energia delle particelle è minore di ϵ e non supera la buca di potenziale; se superassi allora questa buca di potenziale si comporterà come un gas. Ovviamente esiste anche la situazione di mezzo per cui il corpo si comporta come un liquido. A livello macroscopico la differenza tra un liquido ed un solido non è la comprimibilità ma lo scorrimento delle molecole l'una sulle altre.

Figura 1.5: La buca di potenziale



1.4 Le proprietà microscopiche dello stato liquido

Considerando un esagono di atomi dal reticolo cristallino e riprendendo allora la definizione che si è data al reticolo, ci poniamo dunque nelle ipotesi di avere ancora un solido. Concentrandosi sull'atomo centrale, possiamo allora chiedersi come si può muovere questo assumendo che gli altri atomi siano in una posizione fissata. Questo diventa il problema del moto di un punto materiale in due dimensioni: posso esprimere l'energia potenziale del sistema intorno all'atomo considerato come

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n V(|\vec{r} - \vec{r}_i|)$$

Figura 1.6:



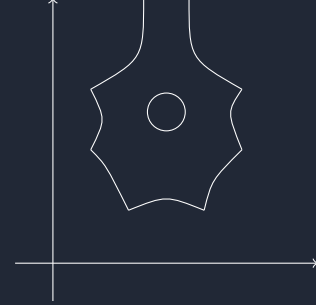
In questo problema si ha una funzione di due variabili che dipende parametricamente anche dalle altre dodici variabili (che posso allora fissare come voglio dato che sono parametri e non variabili). L'energia meccanica sarà allora data dal contributo anche cinetico

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + U(x, y)$$

Quale è la regione di piano accessibile al moto del nostro punto centrale? La regione accessibile dall'atomo centrale è quella in cui l'energia potenziale sia minore o uguale all'energia meccanica totale. L'energia cinetica in questo modello semplificato può essere applicata solamente all'atomo centrale: questo moto è descritto allora da questa regione di movimento specifica. Che succede allora se gli altri sei atomi siano fermi ed in un reticolo a bassa energia? La particella non si muove molto poiché è ingabbiata dagli altri atomi anche nel caso in cui si fornisca una energia molto grande di 10ϵ .

Se si considera la situazione più realistica secondo la quale tutti gli atomi ricevono energia cinetica: in questo caso gli atomi tenderanno tutti ad agitarsi e dunque il raggio r_0 di interazione tenderà a crescere e il moto della particella risulterà maggiore rispetto alla situazione ideale anche con solo $\frac{1}{2}\epsilon$. La particella ha quindi molto più margine di movimento in quanto gli atomi in media sono più distanti tra di loro e ciascuno si muove di più rispetto agli altri. Tra tutte le fluttuazioni possibili se due degli atomi del reticolo intorno si muovono in direzioni opposte, allora il margine di movimento della particella ha di punto in bianco una regione di movimento maggiore e si crea un canale di uscita; anche se la situazione più probabile è quella che la particella centrale si scambia di posizione con una del reticolo intorno. Se si aspetta abbastanza ogni particella potrebbe percorrere tutto il reticolo (e questa è proprio la situazione che accade nel liquido!) senza dispendio di energia anche se, in un dato istante, si volesse osservare cosa accade, ogni particella apparirà circondata da altre 6 particelle.

Figura 1.7: Situazione fisica



1.4.1 Riassunto delle proprietà delle fasi e ipotesi di validità

Per ogni fase noi consideriamo una energia minima in cui si ha il reticolo perfetto di un materiale e aggiungiamo un certo ΔE :

Solido	$\frac{\Delta E}{N} \ll \epsilon$
Liquido	$\frac{\Delta E}{N} \approx \epsilon$
Gas	$\frac{\Delta E}{N} \gtrsim 3\epsilon$

Tutte queste ipotesi valgono solo quando la distribuzione degli atomi è omogenea e la distribuzione di energia applicata al sistema sia uniforme a tutti gli atomi. Gli stati della materia dunque sono omogenei in quanto sono interazioni a corto raggio mentre interazioni a lungo raggio come la forza di gravità non è omogenea. Questo modello vale solo ed esclusivamente nel caso in cui gli atomi sono approssimabili a piccole sferette anche se a livello macroscopico potremmo anche assumere gli atomi come puntiformi in quanto in fisica, gli eventi che avvengono ad una data scala sono influenzati solo dalle scale immediatamente vicine ed ignorano (salvo varie eccezioni) ciò che accade alle scale più lontane. Le dimensioni contano in quanto è possibile ricavare le leggi per livelli superiori partendo dalle leggi del piccolo però dalle leggi macroscopiche non si può ricavare le leggi microscopiche.

1.4.2 Determinare gli effetti probabilistici nel sistema

Considerando la forza applicata ad ogni oggetto

$$\vec{F}_i = m\vec{a}_i \quad i = 1, \dots, N \quad N \gg 1$$

Per esempio in un bicchiere d'acqua ci sono $8.4 \cdot 10^{24}$ atomi all'interno del bicchiere e quindi questo problema è perfettamente determinato attraverso le leggi che abbiamo definito. L'unico problema è che abbiamo 10^{25} punti materiali nel nostro sistema e computazionalmente è molto scomodo. Supponiamo che per ogni punto materiale utilizziamo 1Byte di informazioni, ossia $10^{13}TB$ solo per tenere in memoria le posizioni dei punti

materiali. Le prime persone che hanno provato a calcolare le posizioni attraverso un calcolatore è stato negli anni 50 con un set di dati di $N = 32$ e $N = 64$ solo nel moto unidimensionale per cercare di studiare la dinamica molecolare.

Con un supercomputer si potrebbe ora simulare sistemi dell'ordine di 10^6 , se il nostro sistema stesse in un cubo, allora segue

$$N \propto V = L^3 \implies L \propto N^{1/3}$$

Allora il numero di atomi che sta sul bordo è proporzionale a L^2 e quindi $N_{bordo} \propto L^2 \propto N^{2/3}$ e quindi

$$\frac{N_{bordo}}{N} \propto \frac{N^{2/3}}{N} = N^{-1/3}$$

Più il sistema è piccolo e più gli effetti del bordo contano, anche con soli 10^6 atomi, avrò un errore di circa 10^{-2} nello studio della dinamica molecolare. Se noi facciamo la dinamica molecolare in un piano con punti materiali allora dovremmo rivedere le nostre relazioni utilizzando un software per poter simulare sistemi molecolari.

Capitolo 2

La fluidostatica

2.1 Piccola parentesi sulla fluidodinamica

2.1.1 Il concetto di fluido ideale

La Fluidodinamica si occupa di definire come si comporta un fluido. Un fluido è un corpo continuo formato da tanti puntini (molecole o atomi) con massa e dimensione finita. Supponendo di dividere il fluido in due parti A e B separate da una sezione, la cui superficie indichiamo con Σ . Devo avere una qualche forza che esercita la sezione A sulla sezione B sulla superficie di contatto Σ .

$$\vec{F}_{AB} = F_{\parallel} \hat{n} + \vec{F}_{\perp}$$

Con il versore \hat{n} perpendicolare alla superficie Σ considerata e il vettore \vec{F}_{\perp} perpendicolare al versore \hat{n} ; si definisce allora fluido se

$$|F_{\perp}| \ll |F_{\parallel}| \quad F_{\parallel} > 0$$

Posso considerare ora la forza che imprime B su di A . Dato che conosco la forza che imprime A su B , allora posso dire che

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

La definizione di F parallelo è una definizione che vale sempre anche per l'altro senso in quanto il prodotto scalare con il versore uscente è sempre lo stesso. E' proprio una cosa fisica: si suppone di prendere un contenitore e di porvi un fluido: questo fluido spingerà da entrambe le direzioni esercitando una forza uscente rispetto alla normale (ossia la sua pressione). Esiste anche una proprietà per la quale il fluido non si scompone in pezzi ma rimane sempre unito che è la **tensione**. Un fluido può scorrere su di una superficie proprio perché la sua forza perpendicolare è molto piccola; tuttavia il fluido ideale scorre senza attrito: il fluido reale invece presenta attrito viscoso di taglio. Nella trattazione dei fluidi in fluidodinamica utilizziamo solamente l'ipotesi di fluido ideale che scorre senza attrito.

2.1.2 Definizione del campo scalare della pressione

Riprendendo il volume arbitrario (o una porzione di fluido ideale) posso considerare un sistema di riferimento con terna destrorsa di versori e, preso un punto sulla superficie del volume di fluido, posso identificarlo con un raggio vettore \vec{r} il punto sulla superficie del fluido, sulla sezione della superficie $\Delta\Sigma$ io identifico la spinta verso l'esterno rispetto alla massa del volume

$$\Delta\vec{R} = \bar{P}\Delta\Sigma\hat{n}$$

Figura 2.1: Il fluido diviso in due

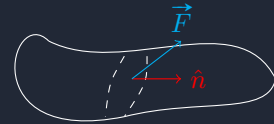


Figura 2.2:

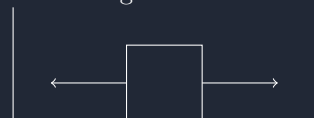
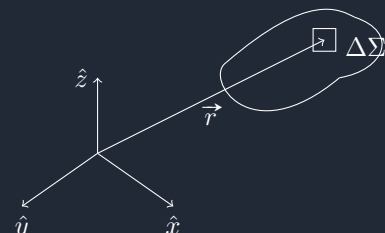


Figura 2.3:



Dove \bar{P} è una quantità positiva definita come

$$\bar{P} = \frac{\Delta R}{\Delta \Sigma}$$

Ossia la pressione esercitata dal fluido verso l'esterno. Posso allora definire la pressione come

$$P(x, y, z) = \lim_{\Delta \Sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta \Sigma} = \frac{[F]}{[L]^2} = \frac{[E]}{[L]^3} \quad (2.1)$$

Siamo allora passati da una quantità finita ad una quantità puntiforme: questa funzione è quindi univocamente definita in un punto dello spazio sulla superficie del fluido stesso. Questo è quello che si definisce un **campo scalare**. Un campo scalare è una funzione che associa uno scalare a ogni punto dello spazio. E' utile definire la pressione come energia per unità di volume (molto utile per lavorare con l'energia in termodinamica).

2.1.3 Definizione del campo scalare della densità

Considerato il solito sistema di riferimento stavolta, invece di intercettare un punto sulla superficie, prendo un punto interno al volume del fluido: invece di prendere un elemento di superficie, prenderò un elemento di volume per cui posso misurare una certa massa: posso allora scrivere la densità media di quel cubetto di fluido come

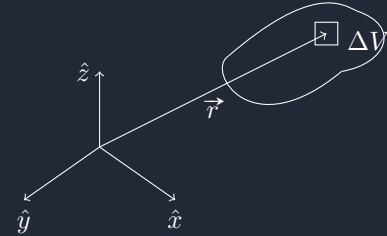
$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Ossia la densità media. Posso trasformarla in una quantità che è definita per ogni punto del fluido e quindi ottenere il campo scalare della densità come

$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Si definiscono allora, data la densità, due classi di fluidi: i liquidi, che sono incompressibili, ed i gas che sono invece dei fluidi comprimibili. Infatti nei liquidi se prendiamo una sezione molto piccola di fluido la densità non varia ma è sempre costante per tutto il liquido (fluido incompressibile) mentre per un gas la densità può cambiare a seconda della sezione di volume considerata (fluido comprimibile).

Figura 2.4:



2.1.4 Comprimibilità

Si può stimare la comprimibilità del fluido spingendolo con una certa pressione:

$$\frac{\Delta P}{\epsilon} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

Ossia ci si aspetta una compressione del volume a seguito dell'applicazione di una certa pressione P in modo uniforme su tutta la superficie del fluido. Chiamato allora ϵ il fattore di comprimibilità, questo definisce la comprimibilità del fluido considerato: più è grande e più il fluido è incompressibile. A condizioni standard la comprimibilità dell'aria è circa $10^5 Pa$ mentre l'acqua è più incompressibile dell'aria con un $\epsilon = 10^9 Pa$.

2.1.5 La resistenza all'espansione di un fluido

Se volessi trovare l'equilibrio delle forze del fluido potrei considerare un sistema di riferimento ed una piccola porzione di superficie del fluido. Questa porzione del fluido agisce in modo tale da imprimere una forza infinitesima

$$d\vec{F}_\Sigma = -p\hat{n}d\sigma$$

per resistere alla forza che vorrebbe fare espandere il fluido, mentre $d\sigma$ è un elemento di superficie infinitesimo. Un fluido cercherà allora di mantenere i legami tra le sue molecole ad una pressione esterna. La risultante delle forze di superficie sarà allora la somma di tutti i contributi delle forze sulla superficie. Calcolando allora la reazione che imprime la parte interna del liquido sulla superficie totale

$$\vec{R}_\Sigma = -\oint_{\Sigma(V)} p\hat{n} d\sigma$$

Per ogni punto posso allora associare una quantità vettoriale e dunque definisco un campo vettoriale derivante dalle forze esterne che agiscono sul fluido:

$$d\vec{F}_V = \vec{f}(x, y, z) dV$$

quindi

$$\vec{R}_V = \int_V \rho \vec{g} dV$$

dove \vec{g} è una accelerazione generica. Dato che ora voglio l'equilibrio di un volume finito di fluido, ora impongo:

$$-\oint_{\Sigma(V)} p \hat{n} d\sigma + \int_V \rho \vec{g} dV = 0$$

Ossia l'equazione di **equilibrio idrostatico**. Si può risolvere in un caso particolare in cui le forze di volume sono trascurabili rispetto a quelle di superficie (dipende da diversi fattori); generalmente se si riduce il volume del fluido considerato che le forze di volume diminuiscono 10 volte più velocemente delle forze di superficie, Ci poniamo allora nelle condizioni per cui

$$\vec{R}_\Sigma = 0 \quad \oint_{\Sigma(V)} p \hat{n} d\sigma = 0$$

La seconda condizione vale se e solo se la pressione sulla superficie del fluido è costante; dato che la superficie è arbitraria, allora la pressione è costante in tutto il fluido poiché potrei considerare una superficie che tocca il bordo del fluido e sia parzialmente contenuta nel fluido stesso, allora anche questa porzione avrà pressione costante. Questa affermazione è dimostrabile nel seguente modo:

$$\oint_{\Sigma(V)} p \hat{n} d\sigma = 0 \implies p = \text{const} \implies p \oint \hat{n} d\sigma = 0$$

Il secondo integrale è una proprietà geometrica e dunque è per forza zero: se prendessi infatti il generico vettore \hat{n} di un certo δr , allora ottengo il volume del cilindro che avrà altezza il prodotto scalare dei due vettori normale e $\delta \vec{r}$ e questa traslazione non cambia il volume ma si forma un cilindro che indica il volume dovuto alla traslazione di ogni punto del fluido:

$$dV = d\sigma \delta \vec{r} \cdot \hat{n} \implies \Delta V = \int_{\Sigma(V)} \delta \vec{r} \cdot \hat{n} d\sigma = \delta r_0 \oint_{\Sigma} \hat{n} d\sigma = 0$$

Se scelgo arbitrariamente il vettore \vec{r} come \vec{r}_0 allora si ottiene che quell'integrale deve fare zero in quanto tutti i contributi all'area devono annullarsi. (Il volume del cilindro rappresenta l'area dello spostamento di un certo punto). Si vede anche che a pressione costante il momento delle forze agenti sul fluido è uguale a zero:

$$\oint_{\Sigma} \vec{r} \times (p \hat{n}) d\sigma = 0$$

La conservazione della quantità di moto rappresenta l'invarianza delle leggi della fisica nel movimento. La conservazione del momento angolare rappresenta che le leggi della fisica sono invarianti rispetto alla rotazione. La conservazione dell'energia invece implica che le leggi della fisica sono invarianti rispetto ai cambiamenti di tempo. Scegliendo come polo Ω l'origine del sistema di riferimento allora posso ruotare il fluido di un certo angolo $\delta\alpha$ ottenendo allora un certo nuovo vettore $\vec{r}' = \vec{r} + \delta \vec{r}$, ossia il nuovo vettore è dato dal vettore

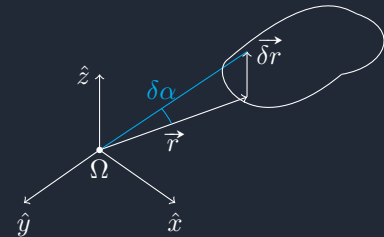
$$\delta \vec{r} = \delta\alpha \hat{\Omega} \times \vec{r}$$

Con $\hat{\Omega}$ si indica il versore dell'asse di rotazione.

$$\delta V = d\sigma \delta\alpha (\hat{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \hat{n}$$

$$\Delta V = \int_{\Sigma(V)} d\sigma \delta\alpha (\hat{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \hat{n} \implies \Delta V = \oint_{\Sigma} \delta\alpha \hat{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \hat{n}) d\sigma$$

Figura 2.5: La rotazione del fluido non cambia la risultante delle forze



Allora si ottiene con le proprietà del prodotto triplo e col fatto che in una rotazione, così come in una traslazione, il volume non cambia, allora si ottiene la seguente

$$\Delta V = \delta a \hat{\Omega} \int (\vec{r} \times \hat{n}) d\sigma = 0$$

Si è appena dimostrato il **principio di Pascal**, il cui enunciato dice che: un sistema isolato si dice all'equilibrio in cui le forze di volume sono trascurabili e la pressione è costante.

2.1.6 Torchio idraulico

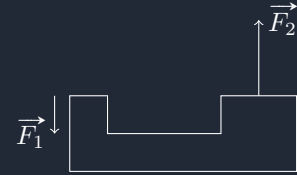
Posso utilizzare i fluidi e la loro pressione per poter applicare più forza: infatti la spinta che sente la macchina sulla destra sarà data dalla relazione di pressione costante

$$p = \frac{F_1}{\Sigma_1} = \frac{F_2}{\Sigma_2}$$

$$F_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} F_1$$

Con il principio di Pascal si possono risolvere i problemi a pressione costante e nell'ipotesi in cui i volumi di fluidi coinvolti siano sufficientemente piccoli.

Figura 2.6:



2.1.7 Trovare l'equilibrio con le equazioni differenziali

Avrò i contributi delle forze che agiscono sull'asse z sono sia quelle di superficie che quelle di volume.

$$\begin{aligned} x : -(p(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z - p(x, y, z) \Delta y \Delta z) &= 0 \\ y : -(p(x, y + \Delta y, z) \Delta x \Delta z - p(x, y, z) \Delta x \Delta z) &= 0 \\ z : \rho g \Delta x \Delta y \Delta z - (p(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y - p(x, y, z) \Delta x \Delta y) &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x : \frac{-(p(x + \Delta x, y, z) - p(x, y, z))}{\Delta x} &= 0 \\ y : \frac{-(p(x, y + \Delta y, z) - p(x, y, z))}{\Delta y} &= 0 \\ z : \rho g - \frac{(p(x, y, z + \Delta z) - p(x, y, z))}{\Delta z} &= 0 \end{aligned}$$

Posso allora eseguire la derivata parziale rispetto alle singole coordinate

$$\begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Le altri componenti non hanno le componenti ρg perché stiamo considerando solamente l'asse z . In assenza di forze di volume, allora la derivate rispetto sia ad x che y sono uguali a zero e dunque da qualunque parte io la prenda p non cambia. anche perché se io mi sposto di una certa quantità infinitesima

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

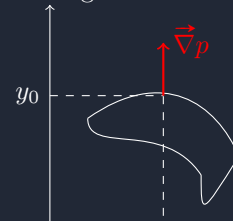
Anche se mi spostassi di un certo angolo qualunque la pressione sarebbe comunque costante.

2.2 Isolivelli

Posso vedere che il rotore della pressione è il piccolo vettorino sulla superficie della curva chiusa per cui posso scrivere l'equazione per la mia superficie come

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0 \quad (2.2)$$

Figura 2.7:



Ossia l'equazione fondamentale dell'idrostatica. Ogni vettorino $\vec{\nabla}p$ è ortogonale alla superficie del fluido. Si ottengono allora gli **isolivelli** per p sulla superficie del fluido: ossia la pressione del fluido è costante su tutta la sua superficie. Dato che la densità non si conosce a priori, devo derivarla dalla pressione: posso prendere un gas e, comprimendolo, se riduce il suo volume allora deve necessariamente aumentare la densità.

2.3 Legge di Stevino

Il caso più semplice della risoluzione dell'equazione è con \vec{g} costante e nel caso in cui il fluido sia **incomprimibile** ($\rho = \rho_0$). Tutte le derivate parziali della pressione rispetto ai vari assi sono allora zero tranne che per l'asse z (perché l'unica forza è proprio lungo la direzione di z , ossia la forza gravitazionale), per cui l'equazione fondamentale dell'idrostatica ci darà

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

A questo punto la funzione varia solo per z . La derivata parziale diventa una derivata totale.

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{dz} dz = \int_{z_0}^z \rho g dz$$

Si ha quindi la **legge di Stevino** per cui la differenza di pressione è legata unicamente alla profondità all'interno del fluido.

$$p - p_0 = \rho g(z - z_0) \quad (2.3)$$

In un fluido incomprimibile la pressione di un fluido dipende interamente dalla sua altezza. La pressione spinge in tutte le direzioni del contenitore e più ci si addentra dentro al fluido e più diventa grande la pressione: questo è dovuto proprio alla legge di Stevino.

2.3.1 Stima per un caso specifico

Quanta pressione esercita un metro d'acqua: data la densità $\rho_a \approx 1 \text{ g/cm}^3$ e preso $g \approx 10$, in modo tale che la pressione dell'acqua è 10^4 N/m^2 . In 10 metri si avrebbe invece 10^5 N/m^2 . L'esperimento di Pascal consiste nel prendere un piccolo tubo di una sezione molto piccola tale per cui per 3 metri di tubo si ha un litro d'acqua (per esempio) per esercire una grossa pressione nel contenitore sottostante.

2.3.2 Contenitore con liquido

Bernoulli in questo esperimento ha osservato che la pressione che agisce sul fluido all'interfaccia con l'aria deve bilanciarsi con la pressione dell'aria. Per la legge di Stevino posso osservare che

$$p = p_{\perp} gh$$

Questa pressione dovrà coincidere con la pressione atmosferica in quanto i due fluidi devono essere in equilibrio sull'interfaccia. L'interfaccia tra liquido ed aria non si sposta in quanto le pressioni che intercorrono tra le due facce sono in equilibrio. Bernoulli con questo esperimento è riuscito a calcolare la pressione dell'aria di 10^5 Pa al livello del mare (e coincide con la sua comprimibilità). Posso definire allora

$$10^5 \text{ N/m} = 1 \text{ Bar} \approx 1 \text{ Atm}(1,03 \cdot 10^5 \text{ Pa}) \approx 1 \text{ kg/cm}^2$$

Se si ipotizzasse che dentro al contenitore ci sia acqua, allora la legge di Stevino diventerebbe

$$p - p_0 = \rho_{\text{acqua}} gh$$

Figura 2.8:

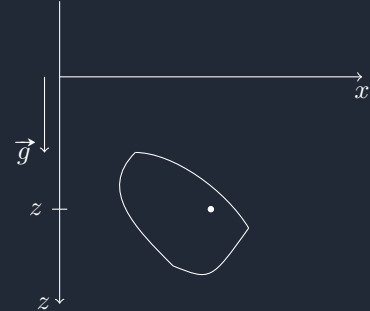


Figura 2.9:



Quando si è alla profondità dell'ordine di un chilometro la comprimibilità dell'acqua è da tenere in considerazione e la densità dell'acqua aumenta a causa della pressione del liquido sovrastante. Le dighe infatti non sono dei muri dritti. Il pezzo sotto della diga deve resistere sia alla pressione del cemento sovrastante che alla pressione dell'acqua che cresce con la profondità. La pressione totale a cui deve resistere la diga con una certa quota di acqua rispetto alla base della diga è l'integrale della pressione

$$R(z) = \int_0^z \rho g z' dz' = \frac{\rho}{2} g z^2$$

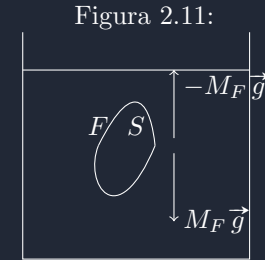
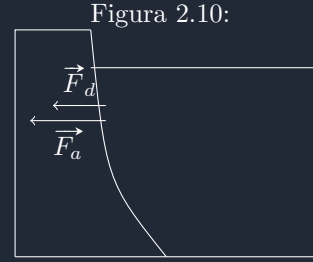
2.3.3 Fluido immerso in un fluido

Nel caso in cui si immerga un fluido all'interno di un fluido, se il fluido immerso è lo stesso fluido contenitore F , allora la risultante è diretta lungo la stessa direzione della gravità ma con verso opposto per avere l'equilibrio

$$\rho_F g V = R_\Sigma$$

La risultante nel caso in cui il fluido S contenuto nel fluido F sia diverso sarà allora data dall'integrale rispetto al volume

$$R_\Sigma = - \int_V \rho dV \vec{g} = -M_F \vec{g}$$



2.4 Esempi di esercizi dei fluidi

In linea generale per la risoluzione dei problemi in statica dei fluidi è trovare una relazione tra la pressione e la densità. Quando la pressione è funzione della densità si parla di **Legge barotropica**:

$$p = p(\rho) \quad (2.4)$$

Questo permette di ottenere una relazione tipo

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

Si può anche assumere una certa legge di proporzionalità sulla potenza della densità:

$$p \propto C \rho^\gamma \implies \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.5)$$

Questa legge prende il nome di **Legge politropica**. Ci sono dei motivi fisici che ci portano a determinare questa relazione: in quanto il valore γ è dato dal rapporto dei calori specifici (che si tratterà più avanti). Possiamo considerare il seguente esempio per determinare perché questa relazione è valida:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Allora posso dire anche in questo caso che la derivata parziale rispetto a z è esattamente la derivata della pressione sulla costante z poiché rispetto agli altri assi è nulla la pressione. Allora posso considerare il caso semplice in cui non si abbia la potenza delle ρ con la legge di Stevino:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \implies \rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

Nell'espressione della derivata:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_0 \frac{p}{p_0} g \implies \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'} = - \int_0^z \frac{\rho_0 g}{p_0} dz'$$

Gli apici mi servono per differenziare i differenziali rispetto agli estremi di integrazione, quindi ho separato le variabili. Posso quindi risolvere l'equazione e ottenere:

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} z \implies p(z) = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z \right)$$

Ho ottenuto una relazione esponenziale per la pressione rispetto alla pressione, se chiamassi allora

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

Allora posso dire che la legge politropica si esprime come

$$p = p_0 \exp \left(-\frac{z}{H} \right) \quad (2.6)$$

In questo modo ho trovato una relazione esponenziale della variazione della pressione a seconda della quota z : il fatto che sia una espressione esponenziale (e non lineare) è coerente a livello fisico poiché se si avesse avuto una espressione lineare, questa ad un certo punto sarebbe diventata negativa, il che non avrebbe avuto alcun senso. Per la Terra posso ora stimare il fattore H e dire quando la pressione diminuisce per un fattore $\frac{1}{e}$, ossia dopo circa $8.5km$, la pressione si dimezza invece dopo $\approx 6 km$ rispetto al livello del mare (assumendo che g non cambi).

2.4.1 Anticipazione legge dei gas perfetti

La legge dei Gas perfetti ci dice che

$$pV = nRT$$

Posso determinare con il numero di Avogadro il numero di molecole all'interno del gas:

$$pV = \frac{NRT}{N_A} \quad \text{con} \quad N = nN_A$$

Posso anche esprimere la relazione tramite la costante di Boltzmann ($k_B = \frac{R}{N_A}$)

$$pV = Nk_B T$$

Per un volume infinitesimo dV ci sarà un numero infinitesimo di particelle contenute all'interno di questo volumetto di gas. Se io lo moltiplicassi per la massa media delle particelle \bar{m} :

$$pdV = \bar{m}dN \frac{k_B T}{\bar{m}}$$

Si ha allora che il termine $\bar{m}dN$ è esattamente la massa infinitesima, allora posso riesprimere la relazione dei gas perfetti per un certo volume infinitesimo di gas come

$$p = \frac{dm}{dV} \frac{k_B T}{\bar{m}} \implies p = \frac{k_B T}{\bar{m}} \rho$$

Allora, assumendo che la temperatura sia la stessa da qui a $8.5km$, allora posso esprimere il rapporto tra la pressione e la densità come e ottenere allora una approssimazione (non molto corretta) per determinare la pressione dell'atmosfera a $8.5km$ secondo questo modello invece che secondo la relazione (più precisa) che si era trovata prima.

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k_B T}{\bar{m}}$$

Essendo questa una grossa approssimazione, in futuro sarà rivista e trattata in modo più completo nella parte di termodinamica e nella parte di fisica statistica.

Capitolo 3

Le forze apparenti nei fluidi

3.1 Fluido in rotazione e isolivelli della pressione

Abbandonando le ipotesi di barotropica e politropica, supponiamo di avere un fluido incompressibile e che sia in rotazione rispetto all'asse z , posso esprimere il vettore velocità angolare e l'accelerazione di gravità come:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega \hat{z} \\ \vec{g} &= -g \hat{z}\end{aligned}$$

La quota z_0 è l'altezza del liquido nell'asse z_0 . Prendo un piccolo elemento di fluido piccolo a piacere, questo sentirà l'effetto di due forze: un effetto da parte della forza di gravità e anche la forza centrifuga (se osservato in un SdR inerziale). Ponendosi in coordinate cilindriche, posso definire \vec{r} la distanza dall'asse di rotazione e quindi esprimere la forza centrifuga come:

$$\vec{F}_{cf} = \rho_0 dV \omega^2 r \hat{r}$$

Ossia diretta lungo la direzione radiale. La somma delle due forze può essere bilanciata solamente da una forza $\vec{\nabla} p dV$. Non ci resta altro che scrivere le relazioni:

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}$$

Posso esprimere il gradiente della forza da coordinate cartesiane a coordinate cilindriche come

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} F &= \frac{\partial F}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial F}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z} \\ \Rightarrow \vec{\nabla} F &= \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{z}\end{aligned}$$

Posso allora esprimere la derivata parziale rispetto alla pressione come

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \\ \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 g \end{cases}$$

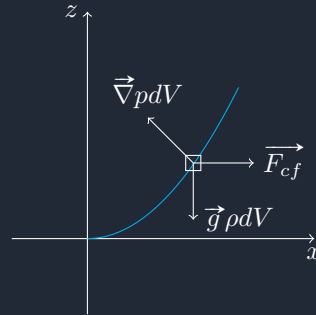
La pressione allora dipenderà solamente dalla distanza rispetto all'asse di rotazione e dalla quota z mentre non dipende dall'angolo di rotazione. Posso assumere allora che la pressione possa essere divisa in una funzione solo di r e una solo di z :

$$p(r, z) - p_0 = f_1(r) - f_2(z) = \rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 - \rho_0 g z + c_1 + c_2$$

Posso allora esprimere le derivate parziali rispetto alle due funzioni, che derivano proprio dalla derivata parziale della pressione rispetto a r e z .

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial r} = \rho_0 \omega^2 r \Rightarrow f_1 = \rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 + c_1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\rho_0 g \Rightarrow f_2 = -\rho_0 g z + c_2 \end{cases}$$

Figura 3.1: Forze apparenti nei fluidi



Per comodità posso escludere le costanti (dipende dal fatto che viene considerata la pressione p_0 nell'espressione della pressione in funzione del raggio e della quota): infatti quando $r = 0$ posso considerare le costanti come zero. infatti potrei esprimere la funzione della pressione come

$$p(r, z) = \rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 - \rho_0 g z + p_0 \quad (3.1)$$

Se volessi trovare il valore di p_0 , allora troverei la condizione

$$\rho_0 \frac{\omega^2}{2} r^2 = \rho_0 g z$$

E dunque il valore di z per cui si ha p_0 sono tutti i punti con

$$z = \frac{\omega^2}{2} \frac{r^2}{g}$$

Tutte le isosuperfici sono date da una parabola nel grafico (ossia tutte le curve lungo le quali la pressione è la stessa). Quando un liquido ruota la superficie di un liquido tende a formare un paraboloide proprio per questo motivo analitico. Il pelo del liquido allora (ossia la superficie di contatto tra il fluido ed un altro fluido) tende a formare un vortice quando ruota.

3.2 Autogravitazione dei fluidi nel caso di una sfera di fluido

Fino ad ora si era considerato equilibri tra forza di pressione e forza esterna (come la gravità) generate da corpi esterni. E' l'equilibrio tra le pressioni e la forza di gravità che mantiene intatti i corpi celesti. La forza esercitata su unità di massa è data da:

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho dV \hat{r}$$

Sto cercando di determinare la forza che agisce su di una parte del fluido dV da parte della gravità del fluido interno ad una distanza r dal centro. La parte di fluido di raggio r agisce su di una certa porzione del fluido dV ad una certa distanza r in **autogravità**, posso esprimere la massa a distanza r dall'origine della sfera

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

Posso cambiare sistema di riferimento ed utilizzare le coordinate sferiche ed esprimere il gradiente della pressione in funzione del versore \hat{r} come

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{r}$$

Il gradiente di una forza in questo caso sarà dato dalla seguente relazione (devo trasformarlo dal sistema di riferimento cartesiano a quello sferico) utilizzando l'angolo θ rispetto alla verticale e l'angolo ϕ rispetto ad uno dei due assi perpendicolari a quello verticale ed il raggio r come la distanza dal centro della sfera si ha:

$$\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

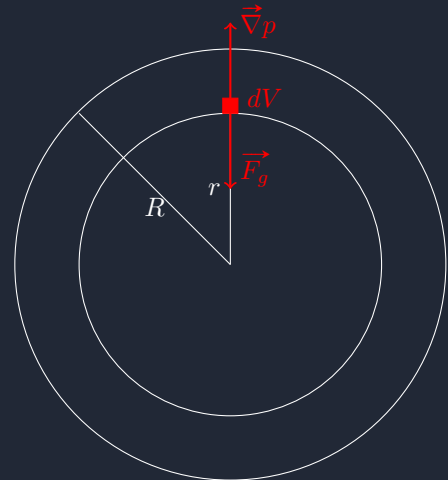
Posso allora derivare parzialmente la pressione (tuttavia considero solamente rispetto al raggio in quanto, essendo a simmetria sferica, le derivate rispetto a ϕ e θ sono zero):

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -G\rho \frac{M(r)}{r^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_0^2 r$$

Posso integrare da entrambe le parti con separazione di variabili e dunque ottenere l'integrale:

$$\int_{p_0}^p dp = - \int_{R_\oplus}^r \frac{4\pi}{3} G\rho_0^2 r' dr \implies -\frac{4\pi}{3} \rho_0^2 \frac{G}{2} (r^2 - R_\oplus^2)$$

Figura 3.2: La sfera di fluido



Dove R_{\oplus} è il raggio della sfera. Posso allora esprimere la pressione con la seguente funzione:

$$p = p_0 + \frac{4}{3}\pi\rho_0^2\frac{G}{2}(R_{\oplus}^2 - r^2) = p_0 + \frac{4}{3}\pi\frac{G}{2}R_{\oplus}^2\rho_0^2\left(1 - \frac{r^2}{R_{\oplus}^2}\right)$$

La massa del pianeta è allora esprimibile come $M_{\oplus} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_{\oplus}^3$. A questo punto posso esprimere la pressione come

$$p = p_0 + \frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}\frac{\rho_0}{2}R_{\oplus}\left(1 - \frac{r^2}{R_{\oplus}^2}\right)$$

Dove $\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}} = g_{\oplus}$. Per la Terra ottengo la pressione al centro di $\approx 10^{11}$ Pa, ossia la pressione stimata della Terra con la sua massa, densità e raggio come se fosse un fluido di densità costante in tutti i punti.

3.2.1 Il pianeta fatto di fluido in rotazione

La distanza dall'asse di rotazione prende il nome di h mentre r è la distanza dal centro della massa di fluido in rotazione. Posso esprimere l'angolo rispetto alla verticale del vettore posizione con l'angolo θ . E quindi posso esprimere i vettori come

$$\begin{aligned}\vec{F}_g &= -\frac{\rho_0 GM(r)}{r^2}\hat{r} = \rho_0^2 G \frac{4\pi}{3}r \\ \vec{F}_c &= \rho_0 \omega^2 h (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta}) = \rho_0 \omega r \sin \theta (\sin \theta \hat{r} + \cos \theta \hat{\theta})\end{aligned}$$

Sapendo che

$$M(r) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0$$

La pressione ora deve bilanciare il contributo sia della forza di gravità che della forza centrifuga, allora posso esprimere la derivata della pressione sia su θ che su r :

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial r} &= -\rho_0^2 \frac{4\pi}{3}rG + \rho_0 \omega^2 r \sin^2 \theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} &= -\rho_0^2 \omega^2 r \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

Posso allora integrare come se θ fosse un parametro nella prima e quindi ottengo l'espressione della pressione in funzione del raggio e dell'angolo θ (dell'angolo ϕ non mi interessa in quanto sto considerando una sfera). Posso esprimere $f(\theta)$ come l'integrale della derivata parziale rispetto a θ :

$$p(r, \theta) - p_0 = -\rho_0^2 \frac{4\pi}{3} \frac{r^2}{2} G + \rho_0 \omega^2 \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta + f(\theta)$$

Allora posso derivare rispetto a θ questa espressione

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho_0 \omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta + f'(\theta)$$

Adesso se ponessimo il termine $\frac{1}{r}$ davanti all'espressione, dovrebbe essere uguale con l'espressione della derivata parziale trovata prima, uguagliandole:

$$f'(\theta) = 0 \implies f(\theta) = \text{const}$$

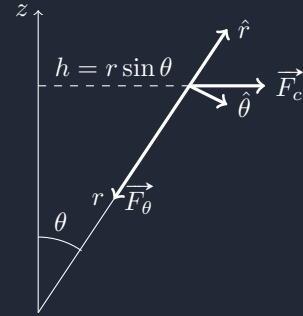
La soluzione è allora considerare una generica funzione $f(\theta)$ come costante ed esprimerla come C . Dato che ho scelto p_0 come la pressione al centro, allora la costante sarà tolta e otterrò

$$p(r, \theta) - p_0 = -\rho_0 \frac{r^2}{2} \left(G \frac{4\pi}{3} - \omega^2 \sin^2 \theta \right) \quad (3.2)$$

Posso esprimere come si è fatto con il raggio della sfera e la massa della sfera in modo da ottenere g_{\oplus} , ossia l'accelerazione di gravità e quindi trovare l'espressione della pressione finale come

$$p - p_0 = \frac{r^2 \rho_0 g_{\oplus}}{2R_{\oplus}} \left(1 - \frac{\omega^2 R_{\oplus}}{g_{\oplus}} \sin^2 \theta \right)$$

Figura 3.3: Lo schema delle forze nel fluido in rotazione autogravitante



Parte II

Termodinamica

Capitolo 4

La termodinamica

4.1 Introduzione alla termodinamica

4.1.1 Storia della termodinamica

La termodinamica è esplosa a metà dell'ottocento con le prime macchine termiche, ossia delle macchine che sfruttavano energia termica per poter compiere lavoro. Lo sviluppo storico della termodinamica parte con le macchine termiche e si sviluppa in modo non propriamente logico ma anzi è stato frutto di un processo molto tortuoso che ha eventualmente portato alla nascita della termodinamica così come la studiamo oggi.

4.1.2 Lo studio della termodinamica

Nella parte di termodinamica ci si occupa dello studio dei sistemi a scala macroscopica e non a scala microscopica. Le coordinate dello spazio che si definisce nella termodinamica prendono il nome di **coordinate termodinamiche**: grandezze come la pressione, densità di massa sono ottime coordinate termodinamiche in quanto riescono a descrivere le caratteristiche del nostro sistema termodinamico. Nel caso di sistemi omogenei la quantità di massa non varia mai e quindi utilizzare il volume o la densità è semplicemente una preferenza anche se in generale in termodinamica si parla più in termini di volume che in termini di densità (come invece si fa nei fluidi). Quando si considera un sistema termodinamico S possiamo fare delle considerazioni:

- Si è sempre in grado di stabilire lo stato del sistema attraverso le coordinate termodinamiche;
- Si determinano i confini del sistema rispetto all'ambiente esterno con il quale il sistema interagisce (anche chiamato **ambiente**);
- Il sistema più l'ambiente è chiamato **Universo**; non l'universo della cosmologia ma semplicemente un insieme: $S + A = U$;

La densità e la pressione non sono in grado di descrivere accuratamente tutti i sistemi termodinamici ma è necessario introdurre un'altra coordinata termodinamica, ossia la **Temperatura** T . La definizione operativa della temperatura è molto complessa ma ci permette di dire che cosa vuol dire che due sistemi hanno la stessa temperatura.

4.2 L'equilibrio termodinamico

A differenza dell'equilibrio meccanico, l'equilibrio termodinamico consiste nel definire quando un sistema è in equilibrio con un altro sistema: per farlo bisogna determinare se le loro coordinate termodinamiche sono costanti nel tempo. Quando in un sistema macroscopico si hanno delle coordinate termodinamiche che dipendono dallo spazio, ma sono costanti nel tempo, allora siamo in presenza dell'effetto di un campo di forze esterne che agisce sul sistema. Quando accade questo siamo in presenza di un **equilibrio termodinamico locale**: l'equilibrio termodinamico è valido solamente per un dato punto e non per tutti i punti del sistema nel corso del tempo proprio perché le coordinate termodinamiche variano spazialmente. Questo equilibrio non è considerato in questo corso se non per pochi casi.

La cosa non ovvia è che quando il sistema è all'equilibrio termodinamico le variabili termodinamiche sono dipendenti l'una dall'altra: esiste allora una relazione funzionale tale per cui una è funzione delle altre due. Questo risultato prende il nome di **equazione di stato**

$$f(p, V, T) = 0$$

Ovviamente l'espressione della funzione f non si conosce quasi mai anche se si è certi che esista una espressione esplicita per l'equazione di stato. Dato un sistema, se questo è lasciato senza interagire con il sistema ambiente allora non cambierà il suo equilibrio; se interagisse invece con il sistema ambiente allora il suo equilibrio varerà.

4.3 Estensività

Se si considerasse un sistema S e lo si suddividesse in due sistemi S_1 e S_2 tale per cui si suppone che la quantità di sostanza di S_1 sia esattamente uguale alla sostanza di S_2 e che la somma delle loro sostanze dia la sostanza totale di S ; dato che all'inizio il sistema S era all'equilibrio, allora facciamo in modo che anche i due sottosistemi siano all'equilibrio: la grandezza X quantità di sostanza è estensiva quando $X_1 = X_2 = \frac{X}{2}$: è anche la definizione di additività e di **estensività** poiché in termodinamica si dà per scontato che questi due termini descrivano la medesima cosa. La massa, il volume sono grandezze estensive poiché dipendono dalla quantità di sostanza; grandezze come la temperatura sono invece estensive. Le grandezze che non sono né estensive né intensive non sono valide coordinate termodinamiche anche se devo possedere almeno una grandezza estensiva per poter descrivere in maniera completa un sistema termodinamico; se così non fosse allora non sarei in grado di determinare se il sistema considerato sia molto grande oppure molto piccolo.

4.4 Pareti ed equilibrio termico

Una **parete** è un oggetto che sia capace di separare tra loro due sistemi termodinamici. Una parete è **adiabatica** se ai due lati della parete possono coesistere due sistemi termodinamici all'equilibrio qualunque essi siano: questo vuol dire che la parete è **isolante** e non permette quindi l'interazione tra questi due sistemi. Una parete che non è adiabatica è definita come parete **diatermica**: i due sistemi che si trovano separati da questa parete si accorgono l'uno della presenza dell'altro e iniziano ad interagire: se si aspettasse molto tempo varierebbero il loro stato di equilibrio raggiungendone uno nuovo. Due sistemi possono non essere all'equilibrio termico fra loro ma all'equilibrio termodinamico se sono separati da una parete adiabatica; tuttavia se sono separati da una parete diatermica i due sistemi saranno sia in equilibrio termico fra loro che in equilibrio termodinamico. Dalla fisica sperimentale si ha che se un sistema A è all'equilibrio termico con C e anche il sistema B è anch'esso in equilibrio termico con C allora anche A e B sono in equilibrio termico. Potremmo riassumere queste considerazioni mediante la seguente:

$$(A \sim C) \wedge (B \sim C) \implies (A \sim B) \quad (4.1)$$

Che prende il nome di **Principio zero della termodinamica**. La relazione di equilibrio termico è una relazione transitiva che si può dimostrare ponendo una parete adiabatica tra A e B e ponendo un sistema "a ponte" tra i due sistemi. Se poi si sostituisse la parete adiabatica con una parete diatermica si osserverebbe che i due sistemi A e B sono già all'equilibrio e quindi la relazione scritta in precedenza è valida.

4.5 La temperatura

La temperatura è la grandezza che mi consente di dire se due sistemi sono in equilibrio termico: la temperatura per due sistemi all'equilibrio termico è infatti la stessa. Anche senza definirla so che è una grandezza intensiva in quanto abbiamo visto che non dipende dalla quantità di sostanza per i sistemi considerati nel principio zero. Perché si utilizza la temperatura per dire se un oggetto è più caldo di un altro? L'esperienza sensoriale ci dice che se si pone due oggetti uno più caldo dell'altro vicini non saremmo più in grado di determinare se uno è più caldo dell'altro. La sensazione dunque è una cosa che per definire il concetto di oggetto più caldo o freddo non è sufficiente per determinare le relazioni tra due corpi; devo quindi utilizzare una quantità estensiva per determinare se un oggetto è più caldo di un altro.

Per definire la temperatura posso considerare un sistema S in modo tale da essere nella situazione come quella illustrata nel principio zero della termodinamica e, considerate due variabili x, y che non siano la temperatura, il fatto di essere all'equilibrio termico non è scontato poiché quando due sistemi sono all'equilibrio termico tra di loro allora ci dovrebbe essere una relazione tra le variabili dei vari sistemi. Posso allora esprimere la l'equazione di stato:

$$\begin{aligned} f_{A,C}(x_A, y_A, x_C, y_C) &= 0 \\ f_{B,C}(x_B, y_B, x_C, y_C) &= 0 \end{aligned}$$

Possiamo allora fare una assunzione sensata per cui

$$y_C = g_{A,C}(x_A, y_A, x_C)$$

$$y_C = g_{B,C}(x_B, y_B, x_C)$$

Queste due sono uguali tra di loro: applicando allora il principio zero si ha

$$f_{A,B}(x_A, y_A, x_B, y_B) = 0$$

Allora lo stato di equilibrio dei vari sistemi è caratterizzato dall'aver assegnato le variabili a quel sistema: i valori per cui quest'ultima è soddisfatta devono essere gli stessi che per le altre. Dato che devono descrivere lo stesso stato, la variabile x_C può essere eliminata: la dipendenza funzionale delle funzioni g non dipendono da x_C . Allora posso dire che esistono due funzioni:

$$h_A(x_A, y_A) = h_B(x_B, y_B)$$

Posso allora permutare i sistemi A, B, C come voglio: posso ottenere dunque un'altra relazione con A e C :

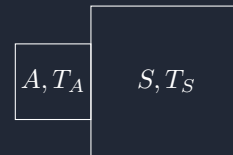
$$h_A(x_A, y_A) = h_C(x_C, y_C) \implies h_A(x_A, y_A) = h_B(x_B, y_B) = h_C(x_C, y_C)$$

Se due sistemi sono all'equilibrio termico allora la funzione delle variabili x e y per ciascun sistema sono in relazione con gli altri sistemi e dunque questa funzione di variabili è esattamente la **temperatura empirica**. Se noi fossimo in grado di determinare queste funzioni allora potremmo definire la temperatura come funzione delle altre variabili termodinamiche (il che non è possibile anche se si sa che esiste). La grandezza temperatura è dunque quella grandezza funzione della pressione e del volume che mi permette di determinare se due sistemi sono in equilibrio termico oppure no. Se la temperatura è fissata posso immaginare di prendere, dei vari stati, solo quegli x, y che mi portino (secondo qualche relazione funzionale) ad avere quella determinata temperatura. Questi punti appartengono ad una curva che prende il nome di **curva isoterma** e rappresentano solo una parte ristretta degli stati totali che assumerebbe il mio sistema.

4.5.1 Misurare la temperatura e sua definizione operativa

Possiamo definire uno strumento (dal principio zero) che ci permetta di misurare la temperatura: infatti se riesco a definire la temperatura di un sistema io posso a quel punto metterlo a contatto termico con un altro e dunque ottengo la misura della temperatura. Posso quindi utilizzare un **termometro** per poter definire operativamente la temperatura così come ho fatto per la definizione operativa di forza mediante una grandezza minore. Posso valutare allora una proprietà che dipende dalla temperatura, ossia una **proprietà termometrica** come il volume. Mettendo ora a contatto il termometro A con il sistema S che vogliamo misurare si può misurare la temperatura di T_A che ora è la stessa di T_S ; tuttavia la temperatura iniziale del sistema T_S non sono in grado di determinarla. Per ovviare al problema posso costruire un sistema di termometri con masse sempre più piccole in modo tale che possa misurare la temperatura con ogni termometro e poi riportare il sistema alle condizioni iniziali. Posso trovare allora la temperatura di ogni termometro ed ottenere che questi valori di temperatura sperimentalmente sono sempre tra valori assegnati e dunque la successione è monotona e limitata e dunque è convergente: la temperatura è data dal limite

Figura 4.1: Il termometro con il sistema S



$$T = \lim_{M_A \rightarrow 0} T(M_A) \quad (4.2)$$

Ad un certo punto il mio strumento non ha più risoluzione per poter determinare la temperatura. Qualsiasi sistema A può essere utilizzato per determinare la temperatura di un certo sistema S purché la massa $m_A \ll m_S$ per evitare di modificare in modo sostanziale la temperatura del sistema S .

4.6 Come è fatto un termometro

Nei primi termometri si utilizzava il mercurio in quanto a temperatura ambiente è liquido ed ha un coefficiente di dilatazione molto grande e soprattutto molto più lineare rispetto ad altri fluidi come l'acqua. L'idea di un termometro è in generale quella di trovare la temperatura di un dato sistema date come variabili x, y , che corrispondono rispettivamente al volume e alla pressione. Posso allora decidere (dato che è comodo) di trovare una funzione lineare prototipo del tipo:

$$T(x) = ax + b$$

Adesso devo trovare un modo per poter fissare queste costanti: se io so che ci sono delle situazioni che si verificano sempre alla stessa temperatura, allora sono in grado di determinarle. Esistono quindi dei punti chiamati **punti fissi termodinamici**: questi punti esistono e corrispondono proprio ai cambi di stato. Quando un materiale passa da uno stato all'altro si verificano sempre alla stessa temperatura purché sia fissata almeno una delle due variabili da cui ricavo la temperatura. Storicamente per determinare le scale dei termometri si utilizzano i punti termodinamici fissi dell'acqua come pressione fissata a $p = 1 \text{ atm}$.

$$T_1 = ax_1 + b$$

$$T_2 = ax_2 + b$$

Posso allora ricavare le costanti come

$$a = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = T_1 - x_1 \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}$$

Tutti questi procedimenti sono validi se e solo se si rimane ad un certo Y assegnato. Questa è solo una definizione per una curva che modella la curva isoterma (è solamente una approssimazione e non una legge). Utilizzando ora i punti fissi dell'acqua si ha

$$t(x) = 100^\circ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

La variabile x è la temperatura dell'oggetto che si vuole misurare mentre x_1 e x_2 sono la temperatura della scala iniziale e finale.

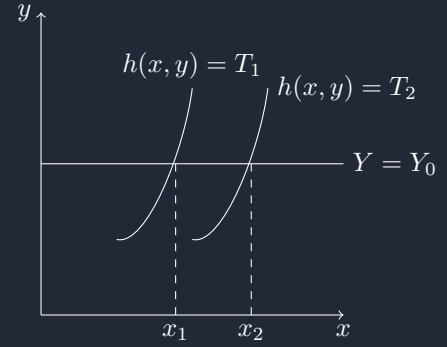
4.6.1 Le varie scale

La scala Fahrenheit è una scala che utilizza altri punti fissi rispetto all'acqua utilizzando una miscela di acqua ghiaccio e ammoniaca. Si può ricavare una relazione tra la temperatura Fahrenheit e la temperatura Celsius:

$$t_F[^\circ F] = \frac{9}{5}t[^\circ C] + 32 \quad (4.3)$$

Quando misuro una temperatura con due termometri che utilizzano fluidi diversi ma la stessa scala termometrica questi leggeranno sempre misure diverse per tutte le temperature intermedie tra i due punti fissi in quanto la funzione che ho utilizzato per approssimare la temperatura non è congruente con la curva di temperatura effettiva. Un'altro problema per i termometri è la lenta evaporazione del fluido utilizzato che rende piano piano il termometro sempre meno preciso.

Figura 4.2:



Capitolo 5

I Gas

5.1 La storia della teoria dei gas e la definizione di gas perfetto

Quando si fornisce tanta energia ad un sistema questo diventa un gas: si è scoperto che i gas obbediscono a delle leggi molto semplici. Robert Boyle ha scoperto, misurando pressioni e volume, che variando quelle grandezze il loro prodotto risultava essere costante

$$pV = \text{const}$$

Successivamente il fisico Mariotte ha scoperto che tale costante è la temperatura. Molti anni dopo il fisico Gay-Lussac si è domandato come possa dipendere una variabile dall'altra e ha trovato una dipendenza della pressione dalla temperatura, e lo stesso per il volume, secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} p &= p_0(1 + \beta T) \quad (V \text{ const}) \\ V &= V_0(1 + \gamma T) \quad (p \text{ const}) \end{aligned}$$

Allora si vede che entro gli errori queste due costanti sono molto vicine tra di loro e non dipendono dalla sostanza dalla quale si è fatto le misurazioni. Queste leggi valgono se e solo se si hanno piccole variazioni di temperatura e dunque si ottiene che

$$\beta \approx \gamma = \frac{1}{273} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Poco dopo il chimico Avogadro scopre che

$$p = \text{const} \quad T = \text{const} \implies V \propto n$$

Ossia il volume è direttamente proporzionale al numero di moli di un gas se e solo se il gas è mantenuto a pressione e temperatura costanti. Nonostante queste leggi siano storiche, queste sono tanto più valide tanto più un gas è rarefatto: posso allora definire un limite secondo il quale

$$\lim_{p \rightarrow 0} \implies \text{gas perfetto}$$

Il gas si dice **perfetto** quando la pressione tende a zero e dunque le leggi scritte per la pressione ed il volume valgono ed il valore dei coefficienti è esattamente:

$$\beta = \gamma = \frac{1}{273.15 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

Posso allora determinare la temperatura in funzione della pressione quando il volume è costante:

$$T = \frac{273.15}{p_0} p - 273.15 \text{ } [^\circ\text{C}]$$

In questo modo posso rendere un gas sempre più rarefatto e misurarne la temperatura: così posso estrapolare la curva di temperatura con volume costante in funzione della variazione della pressione. Se volessimo una scala più comoda potremmo definire una nuova scala di temperatura chiamata **scala Kelvin** (grado Kelvin non è giusto!) :

$$T = 273.15 + T(^{\circ}\text{C}) \text{ } [K] \tag{5.1}$$

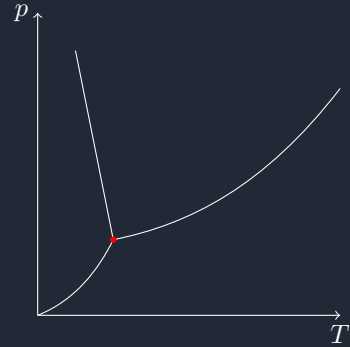
Allora la temperatura assoluta definita a volume costante utilizzando la scala Kelvin sarà:

$$T = \frac{p}{p_0} T_0$$

Esistono, oltre ai due punti fissi di fusione e ebollizione, esiste anche un unico valore in certe condizioni di pressione, volume e temperatura nel quale le tre fasi coesistono simultaneamente che prende il nome di **punto triplo**. Le condizioni del punto triplo dell'acqua sono:

$$\begin{aligned} T_{\text{triplo}} &= 0.01 \text{ } ^\circ\text{C} = 273.16 \text{ K} \\ p_{\text{triplo}} &= 611 \text{ Pa} \approx 10^{-3} \text{ atm} \end{aligned}$$

Figura 5.1: Il punto triplo



Dato che il gas perfetto non esiste, io posso determinare la temperatura di un oggetto con un termometro che contiene un gas perfetto è data da:

$$T = \frac{p}{p_3} T_3$$

Dato che il gas perfetto non esiste, io prendo una successione di pressioni che convergono verso zero, di conseguenza la temperatura sarà sempre diversa: la p_3 è la pressione che misura il termometro che misura quando lo metto in contatto con l'acqua alla temperatura del punto triplo e cambierà sempre di poco. In questo modo posso ottenere una procedura univoca per determinare la temperatura degli oggetti che tutti possono ripetere.

5.2 Digressione sui sistemi fluidi

5.2.1 L'equazione di stato per i gas perfetti

In ogni sistema termodinamico all'equilibrio vale una equazione di stato $f(p, V, T) = 0$. In alcuni casi si è in grado di ricavare l'equazione di stato attraverso la determinazione di un modello di stato attraverso la fisica statistica e dagli esperimenti. L'esempio più semplice è quello del gas perfetto: dagli esperimenti che ci portano a scrivere le quattro leggi empiriche del gas si può ricavare una equazione di stato. Si può, data una mole di gas perfetto, mettersi nelle condizioni standard:

- $T_0 = 273.15 \text{ K}$: ossia la temperatura di fusione del ghiaccio;
- $p_0 = 1 \text{ atm}$: Ossia la pressione dell'atmosfera al livello del mare;

Gli esperimenti ci dicono, a queste condizioni, che il gas occupa un volume ben preciso:

$$V = V_0 = 2.2414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 22.4 \text{ l}$$

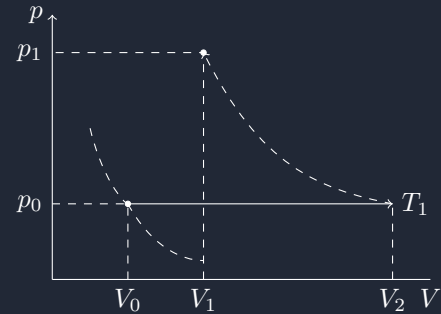
Possiamo allora utilizzare un diagramma per rappresentare l'equilibrio dei gas: questo stato è associato ad una certa curva di temperatura secondo la legge di Boyle. Posso allora applicare delle trasformazioni che mi permettano di raggiungere il volume V_2 alla pressione p_0 e lo posso esprimere in funzione del volume precedente e della temperatura:

$$V_2 = V_0 \frac{T_1}{T_0}$$

Se volessi farlo passare dallo stato (p_1, V_1, T_1) allo stato (p_0, V_2, T_1) , allora dovrei fare in modo che il sistema mantenga costante la temperatura ma possa variare la sua pressione in modo tale da avere il volume che io cerco. La temperatura di questi due stati di equilibrio è la stessa ma ho cambiato sia il volume che la temperatura proprio secondo la legge di Mariotte, deve risultare:

$$p_1 V_1 = p_0 V_2$$

Figura 5.2: Trasformazioni nei gas ideali



Allora si ha, sostituendo l'espressione del volume 2:

$$p_1 V_1 = \frac{p_0 V_0}{T_0} T_1$$

Posso esprimere allora la costante che moltiplica la temperatura come

$$R = \frac{p_0 V_0}{T_0} = 8.3145 \frac{J}{K} \quad (5.2)$$

Ossia l'unità di energia per grado Kelvin che prende il nome di **costante dei gas** che risulta vera per solo una mole di gas. Tuttavia, la legge di Avogadro mi dice che pV è proporzionale al numero di moli del gas, si ottiene quindi l'equazione di stato per i gas perfetti:

$$pV = nRT \quad (5.3)$$

Queste considerazioni sono fatte a livello macroscopico: già il concetto di moli non richiede una spiegazione a livello microscopico in quanto è un concetto indipendente e non necessita di una trattazione a livello microscopico.

5.2.2 Il limite di utilizzo dell'equazione di stato dei gas

Se si volesse analizzare il caso di un gas non perfetto ma molto semplice, è ragionevole trattare l'equazione di stato dei gas in maniera tale che assomigli ad uno sviluppo di Taylor e che i termini più grandi si diventino molto piccoli quando il volume cresce molto:

$$pV = nRT \left(1 + \frac{B_1}{V} + \frac{B_2}{V^2} + \dots \right)$$

Si osserva che per gas anche non rarefatti, i coefficienti sono funzione sia della temperatura che della composizione chimica del gas stesso. Si possono determinare sperimentalmente in modo tale che questa curva teorica mi produca, nel modo migliore possibile, i miei dati sperimentali. Si fa dunque una ipotesi ragionevole per questa funzione anche se questa ipotesi è valida solamente se la temperatura è sufficientemente grande. Dire che esistono temperature grandi e temperature piccole vuol dire che il sistema ha una scala di temperatura rispetto alla quale ha senso parlare di temperatura grande. Tuttavia ad un certo punto lo **sviluppo del viriale**, non funzionerà più: per trovare questo limite possiamo eseguire una serie di esperimenti per alcuni gas abbassando sempre di più la temperatura. Ad un certo punto, se si continua ad aggiungere termini e a far decrescere la temperatura, si raggiunge un **isoterma critica** nella quale si ha un flesso e sotto la quale la curva isoterma non è più una curva ma presenterà due punti angolosi tra i quali è costante e dunque non è più descrivibile analiticamente. Ogni gas ha una sua temperatura critica T_c sotto alla quale lo sviluppo del viriale non è più corretto.

La parte costante tra i due punti angolosi rappresenta esattamente un cambio di stato: il sistema sta passando da gassoso a liquido: più si prosegue verso sinistra nel grafico volume-pressione e più il liquido necessita di una pressione sempre più grande per piccole variazioni di volume. Non si è sicuri che in una relazione tra tre variabili esse siano tutte e tre indipendenti l'una dall'altra; ci possono essere delle situazioni in cui esiste la funzione di stato ma presenta delle singolarità.

$$V = V(p, T)$$

Questa funzione è continua e derivabile se si è a pressione maggiore di quella critica, altrimenti non è regolare ma devo prendere la funzione con una certa pressione assegnata \bar{p} :

$$V = V_{\bar{p}}(T) = V(\bar{p}, T)$$

Quando la temperatura supera la temperatura fissata a pressione $T_{\bar{p}}$ allora il sistema avrà grandi incrementi di volume per piccoli incrementi di temperatura in quanto, sopra la temperatura che dipende dalla pressione fissata, il sistema inizierà un cambiamento di stato da liquido a gassoso.

Figura 5.3:

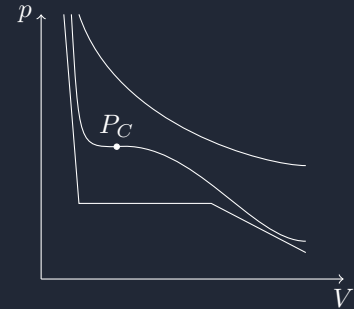
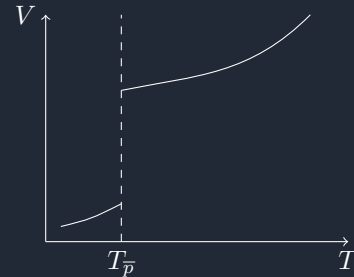


Figura 5.4: La temperatura ad una pressione critica



5.2.3 L'equazione di Van Der Walls per la descrizione dei gas

Dato che la legge dei gas perfetti non vale per tutti i gas, si introduce una equazione che possa funzionare anche lontano dal limite della curva critica chiamata **equazione di Van Der Walls**:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT \quad (5.4)$$

Questa equazione prevede l'esistenza di un punto critico (ossia il flesso) e fu derivata da Van Der Walls e riesce a descrivere accuratamente le isoterme dei gas. Possiamo dimostrare che questa equazione può prevedere l'esistenza di un punto critico: ossia deve esistere una situazione per la quale la derivata seconda rispetto al volume deve essere zero.

$$\begin{aligned} p &= \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \\ \frac{\partial p}{\partial V} &= -\frac{RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} &= \frac{2RT}{(V - b)^2} - \frac{6a}{V^4} \end{aligned}$$

Dato che devono entrambe essere zero:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{V^3} &= \frac{RT}{(V - b)^2} \\ \frac{6a}{V^4} &= -\frac{2RT}{(V - b)^2} \end{aligned}$$

Si ottiene allora le espressioni per le tre grandezze critiche:

$$\begin{aligned} RT_c &= \frac{8a}{27b} \\ V_c &= 3b \\ p_c &= \frac{a}{27b^2} \end{aligned}$$

Se l'equazione di Van Der Walls è valida, allora deve valere che

$$\frac{8}{3} \frac{p_c V_c}{RT_c} = 1$$

Che si può testare sperimentalmente. La terza curva è una curva impossibile che tuttavia rispetta questa equazione: se quella situazione avvenisse, allora il sistema esploderebbe. Si deve allora introdurre la correzione di MaxWell.

5.3 Validità di Van Der Walls

Possiamo riscrivere l'equazione di Van Der Walls come

$$V^3 p - V^2(RT + bp) + aV - ab = 0$$

Dobbiamo ora modificare questa equazione ancora per poter prevedere la curva isoterma sotto la temperatura critica. Un modo per farlo è quello di osservare gli esperimenti e scegliere il livello di pressione in modo tale che per un certo valore di pressione le due aree A_1 e A_2 siano uguali. Supponendo di metterci nel caso di temperatura inferiore alla temperatura critica in modo tale che l'isoterma possa intersecare almeno una retta orizzontale tre volte, MaxWell dice che si deve scegliere il livello di pressione in modo tale che le due aree devono essere uguali. Allora i risultati che si ottengono dalle relazioni con la temperatura critica sono congruenti con gli esperimenti che sono circa equivalenti ad uno (sempre minori di uno).

Figura 5.5: le curve isoterme rispetto alla curva di temperatura critica

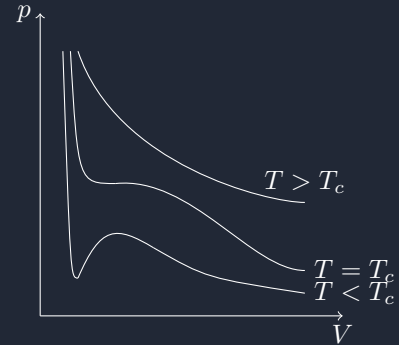
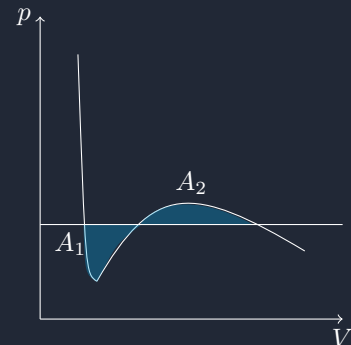


Figura 5.6: L'equazione di van Der Walls



Si definiscono delle grandezze adimensionali

$$\tilde{T} = \frac{T}{T_c} \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_c} \quad \tilde{p} = \frac{p}{p_c}$$

Possiamo allora far scomparire i parametri a, b dall'equazione secondo la seguente:

$$\left(\tilde{p} + \frac{3}{\tilde{V}^2} \right) (3\tilde{V} - 1) = 8\tilde{T}$$

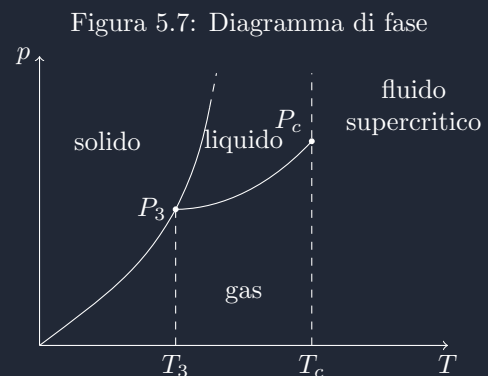
In questo modo con queste particolari unità si ottengono le stesse isoterme per tutti i gas. Facendo infatti scomparire i termini a, b , questo vuol dire che tutti i fluidi si comportano allo stesso modo ma semplicemente con scale termometriche diverse. Questa equazione prende il nome di **equazione di universalità**. Questa cosa non è per niente ovvia in quanto ad una prima analisi si potrebbe dire che i fluidi si comportino tutti in modo diverso; con questa equazione si è riassunto il comportamento di tutti i fluidi all'interno di una unica equazione. Gli esperimenti non confermano questa predizione approssimata: infatti se scalassi le curve sperimentali con le temperature critiche non è vero che diventano le stesse isoterme. Tuttavia più mi avvicino al punto critico e più questa equazione è precisa: al punto critico descrive, infatti, perfettamente il comportamento di un gas.

Successivamente, nel novecento, si è arrivati ad una equazione più precisa che ci ha permesso di ottenere descrizioni molto più accurate per le curve isoterme dei gas. Ken o' Wilson nel 1982 è riuscito a costruire una teoria che ha permesso di ottenere le descrizioni per le isoterme dei gas in modo accurato.

5.4 Diagramma di fase

Per la rappresentazione degli stati di una sostanza si utilizzano dei grafici temperatura-pressione. Per una qualsiasi sostanza pura esistono tre regioni separate da delle curve: queste curve delineano i passaggi di stato. Come si osserva dal grafico, è possibile ottenere dei passaggi di stato in modo tale da passare direttamente da solido a gassoso o viceversa senza passare dal liquido. Al centro del grafico c'è il **punto triplo** dove le tre fasi sono in equilibrio; sulle curve che separano i vari stati si ha l'equilibrio degli stati adiacenti alle curve stesse. C'è anche un altro punto notevole sul grafico: il **punto critico**, dove la curva del cambiamento di stato "finisce". Infatti prima del punto critico io posso passare da uno stato all'altro semplicemente modificando i parametri di temperatura e di pressione. Se io volessi prendere i medesimi punti di

inizio e arrivo ma volessi passare alla destra del punto critico, io posso avere passaggio di stato senza nessun tipo di singolarità, per cui la sostanza può gradualmente passare da gas a liquido. La presenza del punto critico mi permette di non ottenere passaggi bruschi (ossia le proprietà del fluido non "saltano" in modo non continuo) da una fase all'altra: quella regione oltre il punto critico prende il nome di **regione sovracritica**, nella quale liquido e gas sono indistinguibili e hanno lo stesso comportamento. I fluidi che sono in quella regione prendono il nome di **fluido supercritico**. Si è detto che per la descrizione completa di un gas c'è bisogno di tre variabili: quelle che sono curve, nel grafico a tre dimensioni diventano superfici.



Capitolo 6

Trasformazioni termodinamiche

6.1 Come avvengono le trasformazioni

Non sempre si è in grado di determinare cosa accade tra un passaggio di stato all'altro anche se si è in grado di determinare le fasi di arrivo e partenza. Dato un sistema termodinamico con uno stato iniziale e finale, nel mezzo non so cosa accade al sistema poiché le variabili termodinamiche sono ben definite solamente allo stato di equilibrio. Se si immagina di fare questo cambiamento di stato in maniera estremamente lenta, posso definire in maniera discreta tanti microstati di equilibrio uno dopo l'altro come una successione di punti sul grafico che determinano gli stati. Questo tipo di trasformazioni termodinamiche prendono il nome di **trasformazioni statiche**: ossia delle trasformazioni di durata infinita. Dato che non dispongo di tempo infinito, posso definire un certo margine entro il quale posso determinare queste trasformazioni come statiche; dunque queste trasformazioni, se avvengono in maniera sufficientemente lenta, prendono il nome di **trasformazione quasi statiche**. Quando l'istante iniziale e finale coincidono, questo tipo di trasformazioni quasi statiche prendono il nome di **ciclo** o **trasformazione ciclica**.

Ci sono anche dei casi particolari delle trasformazioni quasi statiche:

- **Isobare**: sono delle trasformazioni quasi statiche a pressione costante (quelle orizzontali nel grafico);
- **Isocore**: trasformazioni quasi statiche a volume costante (quelle verticali nel grafico);
- **Isoterme**: trasformazioni quasi statiche a temperatura costante; in questo caso io non conosco l'equazione della curva isoterma ma posso determinare che se avviene alla stessa temperatura so che sta su di una curva.

Se la trasformazione non è quasi statica io non potrei rappresentarla come è nel grafico poiché non conoscerei i valori della pressione e del volume durante la trasformazione. Un caso particolare di trasformazione termodinamica è la **trasformazione adiabatica**: questa particolare trasformazione è una sottoclasse delle trasformazioni isoterme.

Figura 6.1: Una trasformazione termodinamica

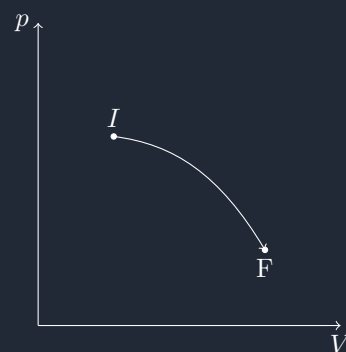
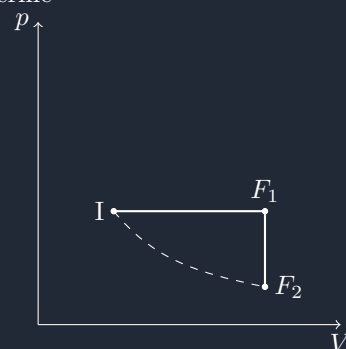


Figura 6.2: Trasformazioni isocore, isobare e isoterme



6.2 Espansione libera adiabatica di un gas

La situazione è quella di un recipiente a pareti adiabatiche: fuori dal sistema c'è l'ambiente. L'espansione libera adiabatica di un gas è l'espansione di un gas in una camera adiabatica divisa in due parti: se il gas sta in una parte della parete (all'equilibrio) e si rimuove (rapidamente) la parete che separa le due parti della camera adiabatica, allora il gas non ha più un muro che lo separa dall'altra parte della camera e dunque tenderà ad espandersi.

$$V_F > V_I$$

Questo tipo di trasformazione non è quasi statica poiché avviene molto rapidamente. Quale è la relazione tra la temperatura iniziale e finale? In questo esperimento si osserva che la temperatura finale è *poco* minore di quella iniziale: per qualunque gas ideale la temperatura finale in una espansione libera adiabatica è sempre leggermente minore di quella iniziale. Diminuendo il gas all'interno della camera adiabatica si ha che la temperatura finale sarà minore di quella iniziale ma maggiore rispetto a quando è presente molto più gas. Allora si ottiene che per un gas molto rarefatto:

$$\lim_{p \rightarrow 0} \text{gas} \implies T_F \rightarrow T_I$$

6.2.1 Espansione libera adiabatica quasi statica

Per far sì che l'espansione libera adiabatica sia quasi statica, io non posso rimuovere la barriera immediatamente ma devo applicare una forza sulla parete che sia in grado di equilibrarla esattamente: se la diminuissi istante per istante, allora il gas si espanderebbe lentamente. In questo modo riesco ad ottenere una espansione libera adiabatica di un gas in maniera quasi statica. Si potrebbe ottenere la **compressione** adiabatica del sistema in maniera quasi statica se invece facessi crescere istante per istante la forza necessaria. Il contenitore in figura prende il nome di **pistone adiabatico**. Si ottengono allora le seguenti situazioni:

- $\Delta V > 0 \implies \Delta T < 0$;
- $\Delta V < 0 \implies \Delta T > 0$;
- $\Delta V \neq 0 \implies \Delta T \neq 0$.

Non esistono solamente trasformazioni adiabatiche.

6.3 Trasformazioni non adiabatiche

6.3.1 Il termostato

Per studiare trasformazioni non adiabatiche si introduce il concetto di **termostato**: ossia un sistema termodinamico tale che la sua temperatura possa sempre rimanere costante qualsiasi cosa gli venga fatta. Ovviamente il termostato perfetto non esiste anche se è possibile definire termostati rispetto ad altri sistemi se e solo se la temperatura del termostato varia molto meno rispetto al sistema a cui è messo a contatto. Si può creare un termostato con un sistema di massa molto grande rispetto all'altro sistema con il quale lo stiamo facendo interagire. Se M è la massa del termostato e m è la massa del sistema si deve avere

$$M \gg m \tag{6.1}$$

La parete con cui il pistone è a contatto con il termostato è una parete diatermica: per costruzione allora $\Delta T = 0$, ossia la compressione o espansione quasi statica avviene sempre a temperatura costante. Se io

Figura 6.3: Espansione libera adiabatica



Figura 6.4: Il pistone

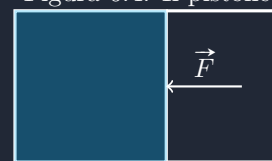
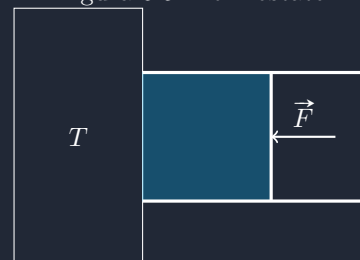


Figura 6.5: Termostato



attaccassi un sistema ad un termostato anche se la trasformazione non avviene in maniera quasi statica, la temperatura iniziale e quella finale coincidono poiché, data la natura del termostato, la temperatura rimane la stessa (anche se durante la trasformazione può cambiare). Queste tipologie di trasformazioni prendono il nome di **isoterme**.

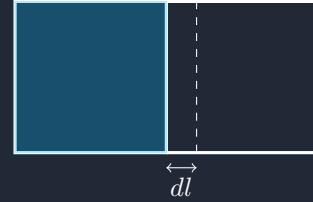
Se volessi fare delle trasformazioni a volume costante con aumento di temperatura in maniera quasi statica, potrei introdurre una successione di termostati con temperatura sempre crescente in modo tale da raggiungere l'equilibrio istante per istante. Se non facessi tutti i passaggi intermedi, allora non sarebbe una trasformazione quasi statica e dunque non potrei dire che la pressione cresce in maniera proporzionale rispetto alla temperatura.

6.3.2 Il lavoro delle forze di pressione di un fluido

L'unica forza che può imprimere un fluido che è compresso o che si espande è la forza che deriva dalla pressione del gas. Posso quantificare il lavoro (in maniera meccanica) della pressione su di un gas considerando un pistone con all'interno un fluido. Dato che è un pistone, allora il gas è in grado di essere compresso oppure è in grado di espandersi a seconda della forza che vi è sulla parete mobile del pistone. Se si considerasse il caso in cui il gas si espande di un certo dl , allora, dato $\vec{dl} = dl\hat{i}$:

$$V \rightarrow V + dV$$

Figura 6.6: Il lavoro delle forze di pressione



Le forze di pressione agiscono sulla parete e dunque compiono un lavoro infinitesimo che è dato da:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Possiamo esprimere allora la forza dovuta dalla pressione come

$$\vec{F} = pA\hat{i}$$

Dove A è la superficie di contatto della parete mobile del pistone lungo il versore \hat{i} . Si ottiene allora l'espressione del lavoro infinitesimo come :

$$\delta L = pA\hat{i} \cdot dl\hat{i} \implies pAdl$$

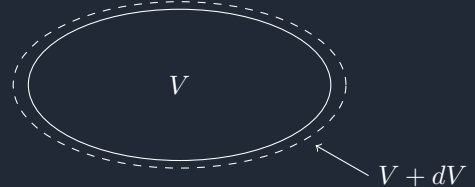
Ricordando allora che Adl è esattamente il volume infinitesimo di cui si è espanso il corpo:

$$\delta L = pdV \quad (6.2)$$

Il lavoro è positivo se il fluido si espande ed è negativo se invece è compresso. Questa espressione del lavoro vale per qualunque trasformazione infinitesima di un fluido quando varia di un certo dV ben definito.

Dato un fluido racchiuso in una forma arbitraria, posso applicargli una trasformazione in maniera tale che il fluido possa variare il suo volume in modo tale che il volume occupato dall'oggetto è allora $V+dV$. Se io considerassi una parte del fluido, potrei approssimare la curva arbitraria come se ci fossero tanti pistoncini che si stanno espandendo dalla curva normale a quella tratteggiata. La sezione del pistone non importa; posso allora pensare che ognuno di questi pistoncini si espandano con $dl_1, dl_2 \dots$ tutti diversi tra di loro. Posso allora considerare un solo pistoncino per il quale il lavoro compiuto dalla pressione dal gas per l'espansione infinitesima:

Figura 6.7: L'espansione libera di un fluido



$$\delta L_i = p dA_i dl_i$$

Allora il lavoro totale dei pistoncini diventerà la sommatoria dei lavori infinitesimi

$$\delta L = \sum p dA_i dl_i$$

Dato che p è costante per tutta la superficie del fluido, e che $dV_i = dA_i dl_i$, si ha il lavoro totale come:

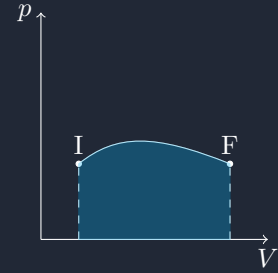
$$\delta L = p \sum dV_i$$

Se il volume del fluido variesse di una quantità finita, allora non saprei dire il lavoro della forza di pressione in quanto la trasformazione non sarebbe quasi statica. Se fosse quasi statica, per ogni stato di equilibrio, dovrei avere fissata la pressione del fluido e dunque il lavoro della pressione in una trasformazione quasi statica è dato da:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} p \, dV \quad (6.3)$$

dove p è esattamente una funzione del volume $p(V)$ (che non so). Non posso però considerare δL come dL , ossia non posso dire che il lavoro infinitesimo sia il differenziale esatto in quanto le funzioni $p(V)$ possono essere infinite e dunque il lavoro non è una funzione di stato. Durante le espansioni libere, il lavoro delle forze di pressione è nullo in quanto la parete è rimossa istantaneamente e sull'ambiente esterno non si è spostato nulla.

Figura 6.8: Il lavoro lungo una curva generica



6.3.3 Trasformazioni quasi statiche a pressione costante

Dato che la pressione è costante, allora è valida la relazione del lavoro (anche perché è quasi statica) e dunque il lavoro è proprio l'integrale

$$L = p \int_{V_i}^{V_f} dV \quad (6.4)$$

6.3.4 Trasformazioni quasi statiche isoterme

Dato che è isoterma, allora T è costante: non so per un sistema qualunque quanto può fare il lavoro delle forze di pressione, anche se il sistema è quasi statico. Tuttavia, nel caso in cui la funzione di stato allora posso ricavarmi una relazione per poter esprimere l'equazione della curva isoterma: allora in quel caso posso determinare il lavoro delle forze di pressione. Dato che, per un gas perfetto, $pV = nRT$, allora

$$L = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV \implies L = nRT \cdot \ln \frac{V_f}{V_i} \quad (6.5)$$

6.3.5 Lavoro del sistema e dell'ambiente

Posso dare alcune definizioni tecniche:

- $\delta L > 0$: il sistema compie del lavoro sull'ambiente esterno
- $\delta L < 0$: l'ambiente esterno compie del lavoro sul sistema.

Il lavoro è il modo meccanico per far sì che ambiente e sistema si scambino energia: questo vuol dire che è possibile anche immagazzinare energia sotto forma di energia potenziale. Nell'esempio semplice di un peso su di un pistone, posso dire che l'energia potenziale dell'ambiente è variata secondo

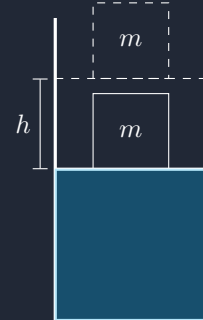
$$\Delta U(A) = mgh$$

Posso esprimere il lavoro che ha compiuto la pressione come

$$L(S) = p\Delta V \implies L = \frac{mg}{B} hB \implies L(S) = mgh$$

Dove B è la superficie del pistone, F è la forza che scaturisce la pressione del gas e h la variazione di quota dovuta alla pressione del gas.

Figura 6.9: Il lavoro del gas su di un corpo di massa m



6.4 Lavoro del sistema durante una trasformazione adiabatica

Per arrivare a definire il lavoro del sistema in una trasformazione adiabatica si può partire da considerare una situazione semplice in cui il sistema è in espansione. Dato che non esiste un unico modo per poter passare da uno stato iniziale I ad uno stato finale F, allora posso utilizzare una scatola, con pareti adiabatiche, che mi permetta di ottenere 3 trasformazioni per riempire tutta la scatola. Considerando un gas perfetto e molto rarefatto all'interno di una scatola che presenta due pareti: la prima parete, così come la seconda, presentano delle aperture che possono essere controllate dall'esterno senza interferire sullo stato del sistema. La seconda parete, è controllata dall'esterno tramite un'asta, in modo tale che possa muoversi dalla sua posizione iniziale fino a tutta la lunghezza della scatola.

Posso riassumere tutte le trasformazioni nel grafico volume-pressione, di seguito sono elencate in ordine le trasformazioni:

- **I trasformazione:** la prima trasformazione è una espansione libera adiabatica (la cui trasformazione sta sull'isoterma che comprende le due temperature iniziali e finali):

$$V_1 > V_0 \quad T_0 = T_1 \implies L_{0,1} = 0$$

- **II trasformazione:** La seconda trasformazione consiste nell'espansione del volume del gas in maniera quasi statica, controllando il movimento della seconda parete. Questa trasformazione, essendo quasi statica, è una curva sul piano che non si sa disegnare, anche se si sa che questa curva deve essere tale che la temperatura dello stato in cui si atterra deve essere una temperatura diversa da quella che si aveva all'inizio.

$$V_2 > V_1 \quad T_2 < T_1 \implies L_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

- **III trasformazione:** A questo punto, apro la seconda parete, così inizia un'altra espansione libera del gas, per cui

$$V_3 > V_2 \quad T_3 = T_2 \implies L_{2,3} = 0$$

Dato che questa è solamente una trasformazione di tutte le infinite trasformazioni possibili, è possibile ricavare sempre altre tre trasformazioni per cui è possibile passare dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale. Qualunque sia l'insieme delle trasformazioni applicate al sistema, il lavoro complessivo sarà sempre dato dal solo contributo dell'espansione del volume del gas in maniera quasi statica dovuto al controllo del movimento della seconda parete. Il lavoro adiabatico su di una curva qualsiasi γ_1 è lo stesso di quello per un'altra curva γ_2 se le due trasformazioni hanno lo stesso stato iniziale e finale (anche se le trasformazioni non sono quasi statiche).

$$L_{I \rightarrow F, \gamma_1}^{(adiabatica)} = L_{I \rightarrow F, \gamma_2}^{(adiabatica)}$$

C'è anche un altro aspetto su di questo: se questa trasformazione è anche ciclica, allora il suo lavoro è sempre zero.

$$L_{I \rightarrow I}^{(adiabatica)} = 0$$

Queste conseguenze rispecchiano i dati sperimentali, anche se non mi permettono di determinare una legge fisica che mi permetta di esprimere questa situazione. Se io avessi una quantità di lavoro adiabatico che compie il mio sistema che dipende solamente dallo stato iniziale e finale, allora ci deve essere necessariamente una funzione che mi permetta di esprimere il lavoro in termini dello stato iniziale e dello stato finale:

$$L_{i \rightarrow f}^{(adiabatica)} = F(i, f) = F(p_i, V_i, p_f, V_f) \quad (6.6)$$

Figura 6.10: Ambiente adiabatico

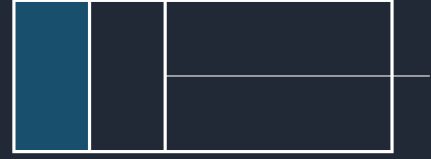
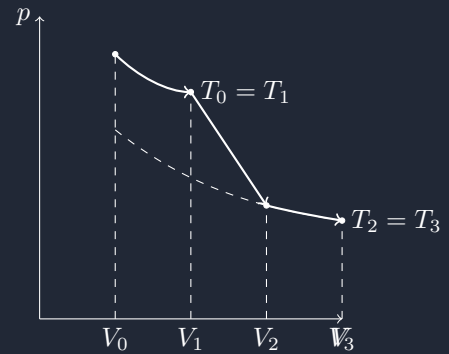


Figura 6.11: La schematizzazione delle trasformazioni



Inoltre questa deve essere tale che se $i \equiv f$ allora si annulla. Questa funzione assomiglia molto all'energia potenziale nelle forze conservative nella meccanica (anche se non si sta parlando di energia potenziale). Si definisce questa funzione come **Energia interna**, che è definita come

$$\Delta U = U(f) - U(i) = -L_{i \rightarrow f}^{(adiabatica)}$$

Questa non è energia potenziale anche se utilizza lo stesso simbolo, ma è una funzione di stato. Si dimostra che è definita a meno di una costante poiché se si definisce $U' = U + c$, nella differenza è possibile rimuovere la costante, anche se la funzione U non è univoca. In generale dipende solamente dallo stato iniziale e finale poiché c'è la condizione $F(i, i) = 0$.

Capitolo 7

Primo principio della termodinamica

In generale non esiste una trasformazione adiabatca che mi permetta di passare da uno stato finale B ad uno stato iniziale A , anche se esiste una trasformazione adiabatca che mi permetta di passare da A a B . Nel gas perfetto, per esempio, so che esiste sempre una trasformazione adiabatca che mi permetta di passare da

$$A(V_1, T) \rightarrow B(V_2, T) \quad V_2 > V_1$$

anche se non esiste una trasformazione adiabatca che mi permetta di tornare indietro (in altre parole non esiste la compressione adiabatca poiché la temperatura di un gas si alza sempre quando viene compresso). Si può dimostrare che per solo per un caso particolare esistono trasformazioni termodinamiche adiabatiche per entrambi i sensi; supponendo che si abbiano due trasformazioni adiabatiche in entrambi i sensi:

$$A \rightarrow B \quad B \rightarrow A$$

L'energia interna del sistema per le due trasformazioni sarà data:

$$\begin{aligned} U(B) - U(A) &= -L_{A \rightarrow B}^{(adiabatca)} \\ U(A) - U(B) &= -L_{B \rightarrow A}^{(adiabatca)} \end{aligned}$$

Ossia, quando esistono entrambe le possibilità il lavoro che va da uno stato all'altro è esattamente l'opposto del lavoro che va dall'altro stato a quello di partenza:

$$L_{A \rightarrow B} = -L_{B \rightarrow A}$$

Tutte le volte che non esiste una trasformazione adiabatca in un verso, esisterà nel verso opposto per qualsiasi stato iniziale e finale e per qualsiasi trasformazione termodinamica. Il resto del primo principio della termodinamica è che il lavoro del sistema non dipende dal set di trasformazioni che compie il sistema per raggiungere uno stato finale qualsiasi da uno stato iniziale qualsiasi. In generale posso dire che se il lavoro è esprimibile come funzione di stato (ossia in condizioni adiabatiche) che

$$\Delta U = -L^{(adiabatca)} \quad (7.1)$$

Dato che l'energia interna del sistema è proprio il lavoro del sistema, allora il lavoro che compie il sistema corrisponde alla diminuzione dell'energia all'interno del sistema e che può essere usata per compiere lavoro meccanico sull'ambiente esterno.

Se il lavoro non è compiuto da una trasformazione adiabatca, U non è una funzione di stato ed è quindi esprimibile sempre a prescindere dalle trasformazioni del sistema e dai suoi stati. Inoltre, la somma tra l'energia potenziale ed il lavoro del sistema è definita come una quantità chiamata **quantità di calore**:

$$\Delta U + L = Q \quad (7.2)$$

Quando si analizza una trasformazione qualunque si ha il calore in modo univoco (e senza dover sapere gli stati del sistema) e dunque posso riesprimere l'energia interna come

$$Q - L = \Delta U \quad (7.3)$$

E prende il nome di funzione matematica integrale del primo principio della termodinamica.

- $Q > 0$: Il sistema ha acquisito dell'energia dall'ambiente;

- $Q < 0$: Il sistema ha ceduto dell'energia all'ambiente.

Un sistema può scambiare con l'esterno o lavoro meccanico o lavoro. Si può esprimere come conseguenza la forma differenziale del primo principio della termodinamica:

$$\delta Q - \delta L = dU$$

A livello matematico è notevole in quanto le due espressioni sono legate tra di loro.

- **Adiabatica**: per definizione, una trasformazione adiabatica ha quantità di calore zero: le pareti adiabatiche allora non permettono il passaggio di energia di tipo termico e permettono solamente gli scambi energetici di tipo meccanico.
- **Trasformazione ciclica**: $\Delta U = 0$, allora $Q - L = 0$ e $Q = L$. La quantità di calore fornito deve equivalere al lavoro svolto dal sistema. Il lavoro sarà positivo se percorro la curva in senso orario o negativo se la percorro in senso antiorario.

Dato che si è data una definizione operativa di calore secondo il primo principio, posso dire che la quantità di calore che scambio in una certa trasformazione, per definizione, è data da:

$$Q_{A \rightarrow B} = \Delta U + L_{A \rightarrow B} \quad \Delta U = U(B) - (A)$$

A pressione costante se si fornisce del calore senza che aumenti il volume del sistema, allora posso dire che

$$Q = \Delta U \quad L \approx 0$$

7.1 La capacità termica

7.1.1 Il mulinello di Joule e la definizione di capacità termica

L'esperimento che fece Joule per definire il calore utilizzava un contenitore con all'interno un sistema di pale e sopra un mulinello collegato alle pale con dei pesi per ogni parte. L'energia potenziale dei pesi viene trasferita al sistema sotto forma di attrito delle pale con l'acqua, in modo tale che tutta l'energia che viene fornita al sistema è dovuta solo al calore e non al lavoro per cui

$$Q = \Delta U \implies Q \propto \Delta T$$

Il che mi suggerisce che

$$\delta Q = c \, dt$$

con C si indica la **capacità termica** che è definita come la quantità di calore infinitesima che devo fornire al sistema per ottenere un aumento di temperatura infinitesimo. Tuttavia questo non è applicabile per tutti gli esperimenti (ossia quelli nei quali si fornisce solamente calore al sistema senza fare alcun tipo di lavoro meccanico). Dato che il calore fornito dipende dal tipo di trasformazione, allora devo definire la capacità termica quando fisso la pressione (per le isobare) e quando fisso il volume (per le isocore) in maniera diversa:

$$C_p = \left(\frac{\delta Q}{dt} \right)_p \quad C_V = \left(\frac{\delta Q}{dt} \right)_V$$

La capacità termica adiabatica è zero per qualsiasi sistema, mentre la capacità termica di una trasformazione non è definita. Generalmente per i liquidi $C_P \approx C_V$ mentre per i gas sono molto diversi. Si definisce il **calore specifico** come

$$c = \frac{C}{M} \quad (7.4)$$

Ossia il calore per quantità di massa. Si può anche definire il calore per quantità di sostanza, come

$$c = \frac{C}{n} \quad (7.5)$$

Ossia la capacità termica per numero di mole. In generale, dato che è una quantità additiva, si ha che $C \geq 0$.