# Appunti Analisi (Bianchi)

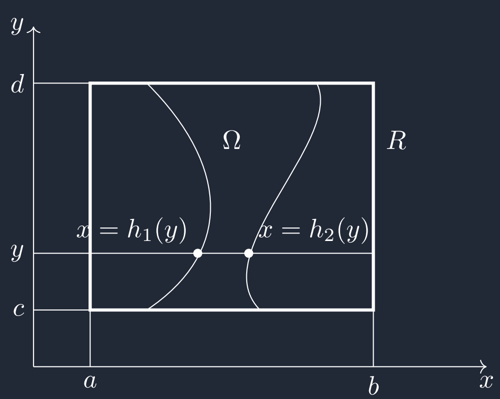
Tommaso Miliani

20-11-25

## 1

*Dimostrazione.* Le funzioni $h_1$ e $h_2$ sono funzioni continue, dunque posso inscatolare la funzione in un rettangolo $R$. Si definisce $\tilde{f}$ come la funzione che vale

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \in R - \{\Omega\} \end{cases}$$




Per definizione dunque l'integrale

$$\int_\Omega f \; dxdy = \int_R \tilde{f} \; dxdy = \int_c^d \left( \int_a^b \tilde{f} \; dx \right) dy$$

Il grafico di $\tilde{f}$ come funzione della $x$ con un $y$ fissato, la funzione, preso un certo $y$ nel rettangolo e restrinta la funzione proprio al segmento identificato, ci sarà una certa parte compresa tra $h_1(y) \leq f \leq h_2(y)$ ed una parte al di fuori della quale la funzione è nulla poiché si è detto che al di fuori di $\Omega$ la funzione vale zero. Allora l'integrale lo posso calcolare solamente tra i valori che intersecano $h_1$ e $h_2$:

$$\int_a^b \tilde{f}(x,y) \; dx = \left( \int_a^{h_1(y)} + \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} + \int_{h_2(y)}^{b} \right) \tilde{f}(x,y) \; dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \; dx$$

Dunque posso esprimere l'integrale scritto tra $[a,b]$ e $[c,d]$ come

$$\int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) \; dx \right) \; dy$$

□

## 2 Cambiamenti di variabili

Negli integrali unidimensionali generalmente si faceva un cambio di variabile per rendere la funzione più semplice per semplificare il calcolo dell'integrale. Nelle funzioni a più variabili i cambi di variabili semplificano il dominio della funzione.

**Teorema 2.1** (Teorema di cambio variabili in integrali di funzioni a più variabili)**.**
*Esiste una mappa tale che*

$$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases}$$

*Che mi permetta di dire che*

$$T : \Omega' \to \Omega \qquad \Omega' \subset u \times v \qquad \Omega \subset x \times y \tag{1}$$

*Si suppone che*

1. *$T$ sua biunivoca su $\Omega' \to \Omega$*
2. *Le funzioni $g, h$ siano $C^{(1)}$*
3. *La matrice Jacobiana abbia determinante diverso da zero per ogni $(u,v) \in \Omega'$.*

*Allora se $T$ soddisfa queste ipotesi e $\Omega'$ è regolare, allora l'integrale*

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_{\Omega'} f(g(u,v), h(u,v))\, |\det J_T(u,v)|\ dudv \tag{2}$$

**Esempio 2.1.**
*Sia*

$$\Omega = B(O,2)B(O,1)$$

*Ossia il cerchio a cui tolgo un cerchio. Dunque usare con questa funzione le coordinate polari mi permette di semplificare notevolmente i conti:*

$$(x,y) \to (\rho,\theta) \implies \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

*Allora si ottiene l'integrale*

$$\int_\Omega x^2\ dxdy \implies \int_{\Omega'} \rho^2\cos^2\theta\ K$$

*Dove $K$ è il differenziale calcolato con la Jacobiana:*

$$J_T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \implies \det J_T = \rho \implies K = \rho\ d\rho d\theta$$

*Allora*

$$\int_{\Omega'} \rho^2\cos^2\theta\rho\ d\rho d\theta$$

*E dunque si risolve l'integrale come*

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \rho^3\cos^2\theta\ d\rho = \int_0^{2\pi}\left(\cos^2\theta\frac{15}{4}\right)\ d\theta = \frac{15}{4}\pi$$

Quando si va dunque a scrivere la funzione attraverso le variabili ausiliarie vuol dire scrivere i singoli rettangolini