

# Appunti fluidi

Tommaso Miliani

16-09-25

## 1 Introduzione al corso

Il corso di Fluidi si divide in tre parti

1. Termodinamica: studia processi non di carattere meccanico che si manifestano a livello macroscopico
2. Statistica: la fisica statistica coniuga la meccanica con la statistica che si usa nelle applicazioni che vanno al di là della fisica classica: da un fondamento microscopico agli effetti della termodinamica.
3. Meccanica dei fluidi: sistemi materiali macroscopici per lo studio dei fluidi.

Prima di tutto si inizia con un cappello che collega le tre parti; poi si inizia con statica dei fluidi, dopo termodinamica, poi statistica e infine dinamica dei fluidi. Questo perché alcuni strumenti di analisi due saranno utilizzati per la parte di dinamica dei fluidi e statistica.

L'esame è diviso in tre domande orali (una per sezione) (niente prova scritta) con esercizi applicati alla realtà e di effetto pratico (che sono fatti a lezione). Il libro consigliato è "Elementi di meccanica di fluidi" di Egidio Landi, per la parte di termodinamica "Termodinamica" di Enrico Fermi e per la parte di fisica statistica le dispense del prof in quanto non ci sono libri che facciano al caso del corso.

Il vantaggio di studiare tre discipline in un corso è che si riesce ad avere una idea più completa dei sistemi che si studiano.

## 2 Statica dei fluidi

### 2.1 Introduzione alla statica dei fluidi

Il caso più semplice della fisica è quello dell'approssimazione del punto materiale; cosa succede allora se io aumentassi il numero di punti materiali e li mettessi tutti insieme? Se si mettono insieme in modo da poter costituire un corpo rigido allora avrei da risolvere diverse equazioni per poter determinare il comportamento del corpo; nessun materiale reale gode di questa proprietà ma è solo una idealizzazione che vale entro certe approssimazioni. Il modello del corpo rigido funziona molto bene per i corpi solidi che in prima approssimazione sono ben descrivibili con questo modello, mentre nel caso dei fluidi questa approssimazione non è valida.

Nei sistemi fluidi si considera allora il movimento degli atomi neutri all'interno del fluido (non di plasmi) e quindi si può, utilizzando le conoscenze di Fisica I, determinare come questi si muovono.

#### 2.1.1 L'atomo di Feynman

In questo studio dei fluidi utilizziamo la definizione di atomo così come la aveva data Feynman: gli atomi sono dei punti materiali che si attraggono se sono sufficientemente vicini ma se troppo vicini si respingono. Essenzialmente a livello macroscopico l'atomo è visto come piccole palline che costituiscono il corpo. Possiamo allora definire diverse proprietà della materia che utilizziamo per la descrizione dei fluidi:

- Gli atomi sono dei punti materiali che hanno una certa massa  $m$  che obbediscono alle leggi della meccanica di Newton;
- Un campione di materia è un insieme di  $N$  atomi (ossia un numero molto grande) che possono essere chiusi in un contenitore ideale (ossia con pareti rigide e fisse).
- Gli atomi interagiscono tra di loro solo tramite forze conservative, ossia che possono essere derivate e che queste forze dipendono esclusivamente dalla distanza tra gli atomi stessi; questo vuol dire che compiono solo urti completamente elastici con il contenitore.

Posso allora dare una definizione concreta alle forze intermolecolari, iniziando definendo  $r_0$  come la distanza caratteristica che ha definito Feynman oltre la quale gli atomi si attraggono ma entro la quale si respingono.

- Se la distanza tra i due atomi è maggiore ma dello stesso ordine di  $r_0$ , allora le forze sono attrattive.
- Se la distanza è minore di  $r_0$ , allora la forza è repulsiva.
- Le interazioni decadono molto velocemente con l'aumentare della distanza.

### 2.1.2 Il potenziale di interazione

Posso allora definire il **potenziale di interazione** tra due atomi come  $V(r)$  e quindi posso relazionare le tre condizioni precedenti con il potenziale, il quale deve diventare costante quando i due oggetti si trovano a grandi distanze in quanto la forza diventa trascurabile. Posso fissare un sistema di riferimento inerziale e dunque posso dire che l'energia totale del sistema sarà data da

$$E = K + V \implies \frac{1}{2} \sum |\vec{v}_i|^2 + U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \quad (1)$$

Data l'ipotesi che ci siano solo delle forze conservative all'interno del sistema che studiamo, allora posso riscrivere la componente potenziale (la quale dipende da  $n$  variabili), è scrivibile come la somma di tutte le possibili coppie e dunque

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (2)$$

Posso anche esprimere anche l'energia potenziale attraverso la sommatoria rispetto a tutte le coppie escludendo l'elemento già considerato (quindi si dimezza la sommatoria):

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1(i \neq j)}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \quad (3)$$

I termini contano solo se la distanza è minore  $a$  volte  $r_0$ : fissato allora un istante di tempo posso scegliere un atomo e dire quali coppie possono effettivamente contribuire all'energia potenziale e quindi ogni atomo interagisce solo con gli atomi vicini che si trovano nella sfera (e quindi posso esprimerlo come  $a \cdot r_0$ ), posso allora approssimare con un pochino meno termini rispetto a  $\frac{N(N-1)}{2}$  in quanto ogni atomo interagisce solo con gli altri all'interno della sfera di interazione.

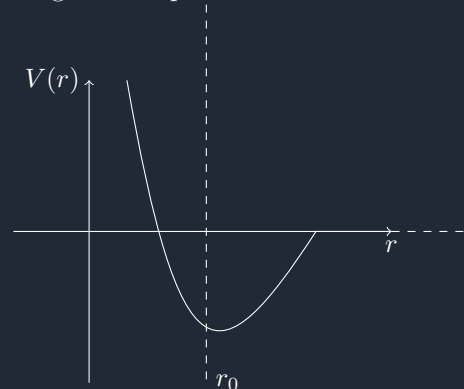
$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \sum_{j \in S(i)}^n V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Quanti sono allora gli atomi massimi consentiti all'interno della sfera di interazione  $S(i)$  rispetto ad un dato atomo  $j$ ? Se prendessi allora questa sfera di raggio  $a \cdot r_0$ , si ottiene una stima che dipende da  $r_0$  e lo divido per il volume della singola sferetta (il quale è sempre una approssimazione per eccesso perché non considero che siano rigide) per determinare il numero di atomi  $n_s$  che interagiscono con l'atomo. La sfera di interazione ha raggio  $a \cdot r_0$  (dove  $a$  è un numero) e il singolo atomo ha raggio  $\frac{r_0}{2}$  e quindi devo fare il rapporto tra i volumi delle sfere e ottengo  $n_s \approx (2a)^d$ , dove  $d$  è la dimensione (piano = 2, spazio = 3). Si ottiene allora che per  $a = 2.5$ ,  $d = 2$  si ha  $n_s \approx 25$ , per  $d = 3$  e  $n_s \approx 125$ . La dimensione è legata a partire dal volume della sfera, infatti il raggio è elevato alla dimensione dello spazio considerato.

L'energia potenziale degli atomi nella materia è direttamente proporzionale al numero di atomi infatti si ottiene che è proporzionale a  $Nn_s$  invece che  $N^2$  come si era detto prima (abbiamo allora escluso  $N$  dati). Quando una grandezza soddisfa questa proprietà allora è una grandezza **estensiva**: la maggioranza dei termini non conta e dunque l'energia di un sistema è una grandezza estensiva, se così non fosse allora la materia non si comporterebbe come si comporta.

### 2.1.3 L'interazione tra due parti di uno stesso contenitore

Figura 1: Il potenziale di interazione



Immaginando di suddividere il contenitore in due parti allora avremo un po' del fluido che sta da una parte e un po' che sta dall'altra: questa divisione va fatta in modo tale che le due parti debbano essere macroscopiche (non pochi atomi da una parte e il resto dall'altra). Come posso determinare l'energia di questo sistema? Dato allora il sistema  $N_1 + N_2 = N$ , ossia il numero di atomi del primo più il secondo compartimento mi dà gli atomi totali (con  $N \gg \gg \gg 1$ ). Devo dividere il contenitore in modo tale che il "divisore" sia di una dimensione in meno dello spazio considerato (es nello spazio un piano) in modo tale che sia uniforme.

Posso allora esprimere l'energia totale come

$$E = E_1 + E_2 + E_{1,2}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \left| \vec{v}_i^1 \right|^2 + U(\vec{r}_1^1, \dots, \vec{r}_{N_1}^1) \propto N_1$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_2} \left| \vec{v}_i^2 \right|^2 + U(\vec{r}_1^2, \dots, \vec{r}_{N_2}^2) \propto N_2$$

Come si nota, esiste anche un contributo di interazione tra le due parti che posso esprimere come:

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j \neq i}^{N_2} V \left( \left| \vec{r}_{N_1 i} - \vec{r}_{N_2 j} \right| \right)$$

Il contributo di questa interazione è molto più piccola dell'interazione  $E_1$  e  $E_2$  in quanto solamente gli atomi molto vicini al bordo che divide i due sistemi interagiscono tra di loro (zona tratteggiata) e dunque più cresce  $N$  allora più diminuisce questo contributo. Inoltre si osserva che sono proporzionali ad un certo  $L$  che è dato dai limiti fisici del contenitori (chiamata scala libera):

$$L \propto N_1^{\frac{1}{d}} \implies N_{1,2} \propto N_1^{\frac{d-1}{d}} \quad \text{uguale per } N_2$$

Se  $N_1$  cresce, allora  $N_{1,2}$  diventa molto piccolo. Si ha che l'energia complessiva di un sistema che ho arbitrariamente diviso in due pezzi avrà l'energia della somma dei due contributi ignorando il termine di interazione tra le due parti purché siano macroscopici (infatti non sarebbe vero se una delle due componenti avesse pochi atomi).

$$E \approx E_1 + E_2 \quad \text{per } N \gg \gg \gg 1 \implies E = E_1 + E_2 \quad (4)$$

Allora ottengo che l'energia è una **quantità additiva** (infatti è vero per  $m$  divisioni fino a che le componenti sono macroscopiche). Tutte queste considerazioni sono valide se e solo se io continuo a ignorare i contributi all'esterno della sfera di interazione e considerando quindi che quei contributi convergano a zero in modo sufficientemente rapido: infatti l'analisi ci insegna che somme di piccole quantità molto grandi non sempre convergono a numeri finiti. Si può dimostrare che devono convergere a zero più velocemente di  $r^{-d}$  (dove  $d$  è nuovamente la dimensione dello spazio) (per l'interazione gravitazionale questo non è vero infatti).

Figura 2: L'interazione tra due recipienti uniti

