Appunti di analisi

Tommaso Miliani

16-10-25

1 Anal

Teorema 1.1 (Condizione sufficiente).
Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ *e sia* $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$ *e sia* f C^2 *in un intorno di quel punto. Supponiamo che* (x_0, y_0) *sia un punto critico della funzione. Allora*

1. *Se* $D^2 f(x_0, y_0)$ *è definita positiva* $\implies$ (x_0, y_0) *è un punto di minimo relativo.*
2. *Se* $D^2 f(x_0, y_0)$ *è definita negativa* $\implies$ (x_0, y_0) *è un punto di massimo relativo.*
3. *Se* $D^2 f(x_0, y_0)$ *è indefinita* $\implies$ (x_0, y_0) *non è né un punto di massimo né di minimo relativo, ma è un punto di sella.*

Dimostrazione. Si dimostrano le tre:

1. Sia $h = (h_1, h_2) \neq 0$. Considero

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)$$

E considero lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine. Adesso posso dire che

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \langle Df(x_0, y_0), h\rangle + \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(x_0, y_0)h, h\right\rangle + o(||h||^2)$$

Adesso, dato che il secondo termine è nullo, posso riscriverlo nella forma:

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(x_0, y_0)h, h\right\rangle + o(||h||^2)$$

Adesso voglio vedere se la differenza è negativa o positiva. Posso dividere per la norma del vettore h al quadrato.

$$\frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2)}{||h||^2} = \frac{\frac{1}{2}\left\langle D^2 f(x_0, y_0)h, h\right\rangle + o(||h||^2)}{||h||^2}$$

Posta $q(h) = \langle Ah, h\rangle$ una forma bilineare , allora, se moltiplicassi per una costante c

$$q(ch) = \langle A(ch), ch\rangle \implies q(ch) = c^2 \langle Ah, h\rangle$$

A questo punto posso dire che il pezzo a destra moltiplicato da un mezzo può essere espresso come: (portando dentro al prodotto scalare la norma):

$$\left\langle D^2 f(x_0, y_0)\frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||}\right\rangle$$

Utilizzando una funzione ausiliaria:

$$p(v) = \left\langle D^2 f(x_0, y_0)v, v\right\rangle$$

Dove $v = (v_1, v_2)$ appartenente al cerchio con centro l'origine e di raggio 1 (che si indica con $\mathbb{S}^1$) Con cerchio si intende proprio il cerchio di valori e non la palla!. Questa funzione continua su $\mathbb{S}^1$ e posso dire che $p(v) > 0, \forall v \in \mathbb{S}^1$ poiché ho già assunto che la matrice $D^2 f(x_0, y_0)$ è definita positiva, allora il numero che ottengo moltiplicandola per v è sempre strettamente positivo. Dato che $\mathbb{S}^1$ è chiuso e limitato, allora per il teorema di Weierstrass questa funzione ausiliaria ha un massimo ed un minimo. Se chiamo m il minimo (dato che è strettamente maggiore di zero)

$$p(v) \geq m > 0 \quad \forall v \in \mathbb{S}^1$$

Allora anche

$$p\left(\frac{h}{||h||}\right) \geq m > 0$$

Dato che il denominatore del prodotto scalare è maggiore stretto di zero, allora posso dire che

$$\frac{1}{2}\left\langle D^2 f(x_0, y_0)\frac{h}{||h||}, \frac{h}{||h||}\right\rangle \geq \frac{1}{2}m$$

Resta adesso da dimostrare che l'o piccolo della funzione. Per definizione si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(||h||^2)}{||h||^2} = 0$$

Allora se $\exists \delta > 0$ tale che $||h|| < \delta$ allora si ha che l'o piccolo è (sfruttando il fatto che il limite faccia zero):

$$-\frac{m}{4} < \frac{o(||h||^2)}{||h||^2} < \frac{m}{4}$$

Allora se

$$||h|| < \delta, h \neq 0 \implies \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{||h||^2} \leq \frac{1}{2}m - \frac{1}{4}m > 0$$

Quindi

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \geq f(x_0, y_0) + \frac{m}{4}||h||^2 > f(x_0, y_0).$$

2. La dimostrazione è analoga alla prima
3. La dimostrazione segue dal principio di condizione necessaria di esistenza del punto di minimo relativo.

□

Teorema 1.2.
Sia A una matrice simmetrica con $c, h \in \mathbb{R}^n$. Se

$$q(h) = \langle Ah, h\rangle \tag{1}$$

1. *q è definita positiva $\iff$ tutti gli autovalori sono > 0.*
2. *q è definita negativa $\iff$ tutti gli autovalori sono < 0.*
3. *q è indefinita $\iff$ se esiste un autovalore > 0 ed un autovalore < 0*

Teorema 1.3 (Condizioni per forme quadratiche per matricie 2×2)**.**
Supponendo che $A \in M(2, \mathbb{K})$, allora posso dire che

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

Posso dire che

1. *Se $\det A > 0$ e $a_{1,1} > 0 \iff$ è definita positiva;*
2. *Se $\det A > 0$ e $a_{1,1} < 0 \iff$ è definita negativa;*
3. *Se $\det A < 0$ allora q è indefinita.*

Teorema 1.4 (Condizioni per forme quadratiche per matrici 3×3)**.**
Sia $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$ con

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

Allora, chiamate $det A_1 = a_{1,1}$, $A_2 = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ e $A_3 = \det A$ i determinanti delle matrici:

1. *Se $\det A_1, \det A_2, \det A_3 > 0 \iff q$ è definita positiva;*
2. *Se $\det A_1 < 0$, $\det A_2 > 0, \det A_3 < 0 \iff q$ è definita negativa;*
3. *Se $\det A \neq 0$ e non valgono né 1 né 2 allora è indefinita.*

2 Trovare i punti critici, esempi

Esempio 2.1.

$$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3y$$

Posso mettere a sistema le derivate parziali e le soluzioni di questo sistema sono esattamente i punti critici.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 3x^2y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x^3 = 0 \end{cases}$$

Il primo ha soluzioni

$$x = 0 \ \wedge \ y = \frac{2}{x}$$

Il secondo ha soluzioni

$$x = \pm\sqrt{2}$$

E dunque i punti che si ottengono sono esattamente

$$(0,0) \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

La matrice Hessiana è data da:

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 3x^2y & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

Devo ora determinare il determinante della funzione Hessiana calcolata nei punti trovati:

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \det > 0 \implies \textit{def positiva} \implies \textit{minimo}$$
$$D^2f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \implies \det < 0 \implies \textit{indefinita} \implies \textit{sella}$$
$$D^2f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad \textit{Idem}$$

Esempio 2.2 (Esempio a tre variabili)**.**
Data

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$$

Il sistema è dunque

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2zy = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni sono

$$x = 1 \qquad y = 1 \qquad z = -\frac{1}{2}$$

Allora la matrice Hessiana sarà

$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2x \end{pmatrix} \ D^2f(1,1,-\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

I determinanti delle sotto matrici sono

$$\det 2 = 2 \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -6 \qquad \det D^2f(1,1,-\frac{1}{2}) = -20$$

La matrice è indefinita.

Esempio 2.3 (Esempio difficile)**.**

$$f(x,y) = xy \exp\left(\frac{-x^2+y^2}{2}\right)$$

- *Trovare e classificare i punti critici in* $\mathbb{R}^2$*;*
- *Esistono minimi o massimi assoluti in* $\mathbb{R}^2$*?*

Possiamo trovare i punti critici mediante la solita risoluzione:

$$(0,0) \quad (1,1) \quad (1,-1) \quad (-1,1) \quad (-1,-1)$$

Adesso possiamo calcolare le Hessiana per tutti:

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \textit{sella}$$
$$D^2 f(1,1) = D^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{e} \end{pmatrix} \implies \textit{max locali}$$
$$D^2 f(1,-1) = D^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \implies \textit{min locale}$$

3 Esempi in cui Df non è né definita positiva o negativa o indefinita in qualcuno dei suoi punti critici

Esempio 3.1 (Esempio del libro negro)**.**
La funzione

$$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

Cerco i punti critici per cui

$$\begin{cases} 4x(x^2-3y^2) = 0 \\ 4y(y^2-3x^2) = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\textit{Se } x = 0 \implies y = 0 \qquad \textit{se } x = \pm y\sqrt{3} \implies y = 0$$

L'unico punto critico è allora $(0,0)$ *la cui matrice Hessiana è*

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per capire che tipo di punto è, dato che questa matrice non è né indefinita, né definita positiva o negativa, è quello di applicare il **restrizioni***: essenzialmente si restringe la funzione a rette (o curve) che passano per il punto critico e studio il segno di queste restrizioni.*

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y)$$

Così posso considerare le rette che hanno $x = 0$*:*

$$f(0,y) = y^4 \geq 0$$
$$f(x,0) = x^4 \geq 0$$

Posso studiare ora i valori per i fasci di rette $(y = mx + q)$ *con* $q = 0$*.*

$$f(x,mx) = x^4(4 - 6m^2 + m^4)$$

Allora il punto $(0,0)$ *è un punto di sella.*

Teorema 3.1.
Sia f *una funzione definita su di un insieme aperto* $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$*, tale che* $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$*. Se esiste un massimo fi* f $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$*:*

1. *O* (x_0, y_0) *è interno ma* f *non è derivabile;*
2. *O* (x_0, y_0) *è interno e* $Df(x_0, y_0) = 0$*;*
3. *O* (x_0, y_0) *si trova nella frontiera.*