Appunti Analisi 2

Tommaso Miliani

16-09-25

1 Introduzione al corso

Il corso di analisi 2 si concentra sullo studio di equazioni differenziali, calcolo differenziale per funzioni vettoriali (ossia funzioni che da un vettore restituiscono un vettore), equazioni a più variabili e infine successioni e serie di funzioni.
L'esame di analisi 2 è composto da uno scritto e da un orale: lo scritto si passa con un voto minimo di 16 e durante l'anno ci saranno due prove parziali che sarà a Novembre (13) e l'altro parziale i primi giorni di Gennaio.

- Si può usare un libro di testo ed un foglio A4 (UNO SOLO) nel quale c'è tutto quello che si riesce a scriverci.
- Si può riprovare un parziale che si è fatto male
- Si può partecipare ai parziali anche se non si è fatto analisi 1
- Il libro di testo consigliato è il "Fuscolo, Marcellini Sbordone Lezioni di analisi matematica 2" oppure il "Bramanti Pagani Salsa analisi matematica 2" che purtroppo per alcuni argomenti non è completo.
- Nessuna dispensa quindi per esercizi svolti rifarsi ai libri di testo "Esercitazioni di analisi due".

2 Equazioni differenziali

Definizione 2.1 (Equazioni differenziali).
Un'equazione differenziale è una equazione in cui l'incognita è una funzione di una qualche variabile. L'incognita è dunque $y = f(x)$. Si dice che una equazione differenziale è ordinaria se dipende solo da una variabile; nel caso di equazioni differenziali che dipendono da più variabili prendono il nome di equazioni differenziali a ***derivate parziali****.*

Esempio 2.1 (Esempi di equazioni differenziali).

$$y'' - y = 0 \qquad y' = 3e^y \qquad y' = 4x + 8$$

La soluzione della prima è $y = \sin x$ in quanto $y'' = -\sin x$ e dunque $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 = 0$.

Definizione 2.2 (Ordine).
Si definisce ***ordine*** *il numero della derivata massima che compare all'interno delle equazioni differenziali.*

Definizione 2.3 (Forma normale).
Una equazione si dice in forma ***normale*** *se la derivata più grande è isolata rispetto alle altre*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

Esempio 2.2.

$$(y')^2 + x^3 = 0 \implies y' = \pm\sqrt{x^3}$$

Non riesco a ricavare una equazione del primo ordine del tipo $F(x, y, y')$. Quando riesco ad isolare da una parte la derivata più grande si riesce a semplificare la risoluzione delle equazioni differenziali.

2.1 Equazioni differenziali del primo ordine

La forma generale delle equazioni di primo ordine è del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

Una soluzione per questa forma generale di equazioni differenziale è una funzione y della variabile x definita per $x \in \mathbb{A}$ (un qualche insieme) e tale che per ogni $x \in \mathbb{A}$ risulti che $(x, y(x))$ appartenente al dominio di $f(x, y)$ e inoltre la derivata di questa funzione calcolata in x è uguale a $y'(x) = f(x, y(x))$.

Esempio 2.3 (Esempio più semplice)**.**

$$y' = g(x)$$

Dove $g(x)$ è una funzione continua appartenente ad un qualche insieme $\mathbb{A}$ e quindi un'equazione di questo tipo equivale a trovare la primitiva di g. Allora posso dire che $G(x)+c$ è soluzione dell'equazione differenziale, ossia la primitiva di $g(x)$.

Esempio 2.4 (Esempio di prima con soluzione diversa)**.**
Nell'equazione differenziale

$$y'' - y = 0$$

Anche il coseno è soluzione in quanto si otterrebbe $y = \cos x$. Si ottiene allora che la seguente è anch'essa soluzione dell'equazione +

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

Generalmente l'equazione di n ordine ha n costanti $C_1, \dots, C_n$ che moltiplicano.

Esempio 2.5.

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Si ha che la primitiva di y' è proprio $y = \frac{x^3}{3} + C$, data la seconda condizione nel sistema allora si ottiene che

$$\frac{1}{3} + C = 2 \implies C = \frac{5}{3}$$

2.2 Il problema di Cauchy

Se in una equazione differenziale del primo ordine avessi una situazione del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ossia se ho delle condizioni sulle derivate fino alla $n - 1$ esima, allora questa tipologia di esercizi prenderà il nome di **problema di Cauchy**: nel caso di una equazione del secondo ordine le condizioni non sono qualsiasi ma seguono il seguente schema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Esistono alcuni teoremi che permettono di definire l'insieme delle soluzioni date le condizioni del secondo membro di ciascuno dei due sistemi. Iniziamo dai teoremi di esistenza delle soluzioni per il problema di Cauchy del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SI definiscono alcune ipotesi prima di procedere:

Definizione 2.4 (Punto interno ad un insieme)**.**

$$Se\ \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathbb{A}$$

Si dice che (x_0, y_0) *è interno all'insieme* $\mathbb{A}$*, se esiste un cerchio di raggio positivo tale per cui il centro sia* (x_0, y_0) *e sia contenuto dentro all'insieme* $\mathbb{A}$*. Nel caso in cui* $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$ *allora diciamo che un punto* (x_0, y_0, z_0) *è interno all'insieme* $\mathbb{A}$ *se esiste una sfera di raggio positivo tale per cui* (x_0, y_0, z_0) *sia il centro e sia contenuto all'interno dell'insieme.*

Teorema 2.1 (Teorema di Peano)**.**
Se la funzione $f(x, y)$ *è una funzione definita e continua in un qualche insieme* $\mathbb{A}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$*, allora il problema di Cauchy ammette almeno una soluzione definita in un intorno di* x_0*.*

Da questo possiamo fare due considerazioni:

1. La continuità di $f(x, y)$ è necessaria per l'esistenza di una soluzione:
2. La sola ipotesi di continuità non è garantisce che esista una sola soluzione

Esempio 2.6 (differenziale risolta col problema dii Cauchy)**.**

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Allora dato che $f(x, y) = y^{2/3}$ *è definita continua sull'intervallo* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *e quindi una funzione costante* $f(x) = 0$ *ha valore zero in zero e derivata prima uguale a zero. Anche* $y(x) = \frac{x^3}{27}$ *è soluzione in quanto la derivata di questa funzione* $y' = \frac{x^2}{9}$ *ed è uguale a zero se calcolata in zero. Questo problema di Cauchy ha allora due soluzioni distinte anche se in realtà ha soluzioni infinite:*

$$y(x) = \begin{cases} 0\ se\ x \in (-\infty, 0) \\ \frac{(x-a)^3}{27}\ \ se\ x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

Il teorema di Cauchy allora mi garantisce che esitano almeno una soluzione ma non mi da la certezza che sia solo una (potrebbero essere infatti infinite).