Appunti di Meccanica

Tommaso Miliani

24-02-26

1 Introduzione al corso

- Prof: Omar Morandi
- Esame: 2 parziali con possibilità di recuperarne uno, altrimenti si sostiene un esame scritto totale + orale. Si possono portare libri e appunti (i compitini valgono fino a settembre). L'orale è un colloquio (più teorico) anche se ci possono essere esercizi. Si può accedere all'orale con media dei compiti anche con 14-17.
- Testi: "Meccanica Analitica" di Marmi, Fasano
-

2 Introduzione

L'idea è capire il moto di sistemi meccanici complessi come strutture articolate rigide. La descrizione tramite metodi matematici è il motivo per il quale prende il nome di meccanica analitica (che è simile alla meccanica razionale). Il termine analitica deriva dal fatto che si utilizzano funzioni lagrangiane e hamiltoniane. Ci si concentra su oggetti meccanici tipo molle, aste, ruote, riformulato in una formulazione più generale, elegante e completa rispetto al corso di fisica I.

2.1 Richiami da fisica I e geometria

Si utilizzeranno per determinate cose anche notazioni diverse, il motivo è che ogni notazione ha una sua definizione e un suo utilizzo. Vettori

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A - O) \qquad |\vec{r}| \doteq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Per cui si definisce il prodotto scalare come

$$\alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha\vec{v} = \alpha v_1 \hat{1} + \cdots + \alpha v_k \hat{k}$$

Si ottiene il versore di un vettore dividendo il vettore per il suo modulo:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|v|}$$

Il suo prodotto scalare è definito come la mappa lineare che

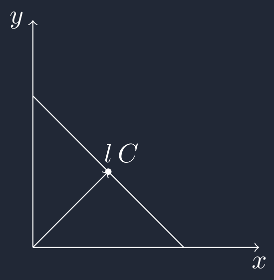
$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{w} = |v| \cdot |w| \cos(\vec{v} \angle \vec{w}) \in \mathbb{R}$$

L'angolo tra due vettori non è mai definito in quanto due vettori formano sempre un piano e dunque esistono due angoli tra loro: uno interno ed uno esterno, anche se, per il coseno, la definizione risulta non ambigua.

$$|\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Bla bla bla calcolo vettoriale

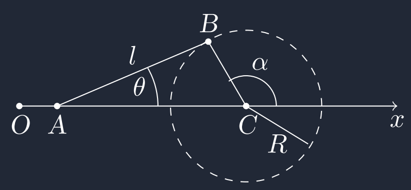
Esempio 2.1.
Presa un asta di lunghezza l vincolata ad avere i suoi due estremi appartenenti all'asse x e all'asse y:



Conoscendo l'angolo α, quanto valgono le coordinate del centro della scala?
Si determina adesso il vettore posizione come

$$(C-O)=(A-O)+(C-A)=\hat{\jmath}l\cos\alpha+\frac{l}{2}\sin\alpha\hat{\imath}-\frac{l}{2}\sin\alpha\hat{\imath}$$

Esempio 2.2.
Si ha un asta che è vincolata ad un perno, come una biella attaccata ad un albero motore:



Si deve determinare la posizione di A in funzione dell'angolo α in figura. Si ricava dunque

$$(A-O)=(B-O)+(A-B)$$

Si determinano ora i vettori che descrivono la posizione di A:

$$(A-B)=-l(\cos\theta\hat{\imath}+\sin\theta\hat{\jmath})$$
$$(B-O)=(B-C)-(C-O)=R(\hat{\imath}\cos\alpha+\hat{\jmath}\sin\alpha)+d\hat{\imath}$$

Dato che θ ed α non sono indipendenti (ancora non si sa che cosa vuol dire però è intuibile facendo variare uno e bloccando l'altro: se l'oggetto si rompe, allora erano dipendenti), devo adesso ricondurre tutto in funzione di α. Utilizzando ora il teorema dei seni, si può ricavare il legame che intercorre tra i due angoli:

$$\frac{R}{\sin\theta}\frac{1}{\sin(\pi-\alpha)}$$

Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

E teorema dei coseni:

$$|a|^2=|b|^2+|c|^2-2\,|b|\,|c|\cos\alpha$$

2.2 Introduzione alla meccanica analitica vera e propria

Richiamo del teorema di derivazione di composte

Teorema 2.1.
$f(x):U\subset R\to\mathbb{R}^n$, pensando x come funizione di y, il quale è definito su $V\subset R$, $x=x(y)$ funzione $R\to R$, si definisce una funzione composta $h(y)$ definita come

$$h(y)\doteq f(x(y))$$

Si può determinare la derivata

$$\frac{dh}{dy}=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x(y)}\frac{dx}{dy}$$

Chiaramente una funzione composta.

Si richiama anche il teorema del calcolo integrale:

Teorema 2.2.

$$\int_{y_1}^{y_2} h(y)\ dy = \int_{y_1}^{y_2} f(x(y))\ dy = \int_{x(y_1)}^{x(y_2)} f(x) \left(\frac{dy}{dx}\right)\ dx$$

3 Curve

3.1 Perché interessano

Le curve permettono di descrivere le traiettorie (parametrizzandole rispetto al tempo) di qualsiasi oggetti. L'insieme dei punti spaziali occupati dal mio oggetto rispetto al tempo costituiscono una curva. Concettualmente le traiettorie che si considerano sono sempre reali e possono essere curve in $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^2$. Si vede anche che, una traiettoria in uno spazio $\mathbb{R}^n$ descrive uno spazio ?????.

3.2 Curva in $\mathbb{R}^3$

Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una applicazione continua definita su di un intervallo aperto continuo e regolare:

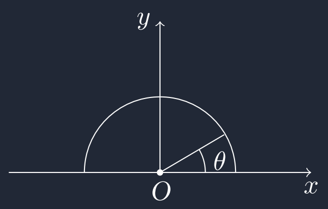
$$\vec{r}(t) : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

Dunque si può definire

$$r(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

Si considera adesos il seguente esempio

Esempio 3.1 (Esempio di curva e parametrizzazioni diverse)**.**
Cosideriamo una curva di raggio 1:



Devo adesso parametrizzare la curva secondo un parametro: potrei scegliere θ, per cui posso esprimere

$$\vec{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath} \qquad 0 < \theta < \pi$$

Si può anche utilizzare un parametro t per definire:

$$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \sqrt{1-t^2}\hat{\jmath} \qquad -1 < t < 1$$

A livello formale queste due curve sono diverse. Questo perché le curve sono univocamente definite da un parametro: cambiando parametro si cambia curva anche se, ovviamente, hanno il solito tracciato. Dal punto di vista cinematico conviene considerarle come se fossero uguali.

Due parametrizzazioni diverse (due curve diverse), $r_1(t_1)$ e $r_2(t_2)$ sono equivalenti se $\exists$ una relazione biuinivoca tra l'insieme di definizione, regolare, derivabile e con inversa derivabile e tale che

$$t_2(t_1) : U_1 \to U_2 \mid r_2(t_2(t_1)) = r_1(t_1)$$

Da un punto di vista matematico sono equivalenti ed esprimono la stessa quantità con parametrizzazioni differenti. Nell'esempio di prima si definisce una relazione tra le due parametrizzazioni nella seguente maniera:

$$t = \cos\theta \text{ per } \hat{\imath} \qquad \sqrt{1-t^2} = \sin\theta \text{ per } \hat{\jmath}$$

Dunque queste sono equivalenti. Devo adesso verificare che il segno della derivata sia uguale.