

Esercizi di Lab II

Tommaso Miliani

27-02-26

1 Esercizi sul teorema di Gauss

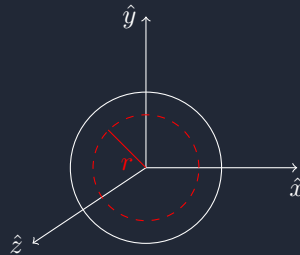
Se la simmetria del problema è tale per cui riduce la complessità del problema (identificando una superficie che ha lo stesso campo elettrico), il teorema di Gauss è molto comodo per determinare il campo elettrico uscente; altrimenti si dovrebbe utilizzare la sovrapposizione.

Esempio 1.1.

Si considera una sfera di raggio R con distribuzione uniforme e costante di carica ρ_0 :

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Questo problema, la cui raffigurazione è la seguente:



Ha delle simmetrie evidenti. Il campo elettrico, ci si aspetta, che sia una funzione di r, θ, ϕ :

$$\vec{E}(r, \theta, \phi) = E_r(r, \theta, \phi)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, \phi)\hat{\theta} + E_\phi(r, \theta, \phi)\hat{\phi}$$

Data la simmetria ci si aspetta che il campo possa solo dipendere dalla distanza dal centro. Dal punto di vista vettoriale ci si aspetta dunque che l'unica componente del campo sia solo

$$\vec{E}(r) = E_r(r)\hat{r}$$

Dunque il campo in ogni punto della sfera di raggio piccolo r con $r \leq R$ ci si aspetta che sia lo stesso da ogni direzione θ e ϕ lo si guardi. SI può allora determinare il flusso del campo come

$$\Phi(\vec{E}) = \int \vec{E}(r) \cdot \hat{n} d\Omega = E(r) \int d\Omega = E(r)4\pi r^2$$

Il flusso, per il teorema di Gauss, è anche equivalente a

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(R) dV = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_V dV = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ossia il volume della superficie rossa quando $r = R$. Dunque per il teorema di Gauss si possono eguagliare e ottenere:

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3 = E(r)4\pi r^2$$

Risolvendo ora per $E(r)$ si ottiene

$$E(r) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r$$

Adesso, per il caso in cui $r > R$, vale il teorema di Gauss, per cui si ha che il flusso totale della sfera deve valere

$$\Phi(E) = E(r)4\pi r^2$$

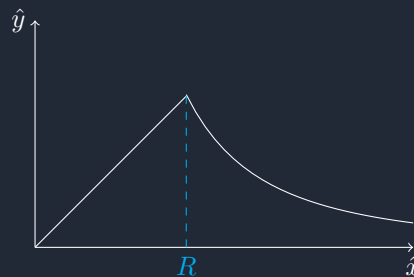
Quello che non cambia è la carica interna: infatti la carica rimane confinata dentro la sfera di raggio R , dunque la carica totale in questo caso è esattamente funzione di R (dunque costante):

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr' = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3$$

Dunque il campo elettrico sarà dato da

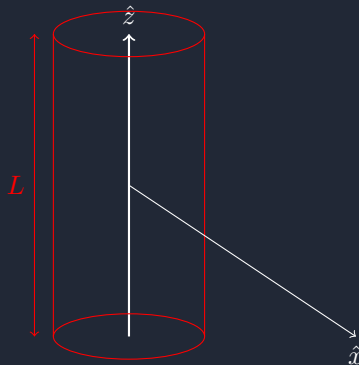
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3 \implies E(r) = \frac{1}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Se si volesse plottare questa funzione



Esempio 1.2 (Campo elettrico di un filo infinito).

Si considera un filo infinito con distribuzione di carica ρ_L lineare utilizzando il teorema di Gauss.



Si cercano innanzitutto le simmetrie del problema: ossia la simmetria cilindrica in questo caso, per cui l'espressione del campo elettrico dipenderà solamente dal vettore radiale:

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z) = E_r(r, \theta, z)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, z)\hat{\theta} + E_z(r, \theta, z)\hat{z} = E_r(r)$$

Questo è verificabile con il principio di sovrapposizione (per θ) e per l'invarianza traslazionale (per z in quanto il filo è infinito). Dunque si può trovare il flusso del campo come

$$\Phi_r = \int_\tau E_r(r)\hat{r} \cdot \hat{n} d\sigma$$

Il contributo delle basi del cilindro è nullo poiché \hat{n} e \hat{r} sono perpendicolari, mentre il contributo sul lato non è nullo ed è dato da

$$E(r) \int d\sigma = E(r)2\pi rL$$

Dove L è la lunghezza del cilindro e r il raggio del cilindro. Per il teorema di Gauss deve equagliare a

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{L\rho_L}{\epsilon_0} = \Phi_r$$

Dunque si ottiene il campo elettrico come

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_L}{r}$$

Esempio 1.3 (Piano uniformemente carico).

Dato un piano uniformemente carico (infinito), con densità superficiale di carica σ , si vuole determinare il campo elettrico di questa superficie piana.

Data la simmetria del problema, ci si aspetta che il campo elettrico sia diretto lungo l'asse \hat{x} (verificabile dal fatto che il piano è infinito e dal principio di sovrapposizione). Consideriamo comunque il campo in funzione delle tre variabili cartesiane. Si deve determinare ora il flusso attraverso una superficie finita del piano, come un cilindro perpendicolare uscente dal piano. Le normali sul lato del cilindro sono espresse in coordinate polari, mentre quelle della base sono dirette lungo x .

$$\Phi = \int_{\text{Base 1}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\Sigma + \int_{\text{Base 2}} + \int_{\text{Lato}}$$

Si sa che il lato ha dunque contribuito zero, mentre il versore normale $\hat{n} = \hat{x}$ per entrambe le basi. Dunque

$$(1) \quad \hat{n} = \hat{x} \quad \vec{E} = E\hat{x}$$

$$(2) \quad \hat{n} = -\hat{x} \quad \vec{E} = -E\hat{x}$$

Il prodotto scalare dei due ha lo stesso segno e dunque i contributi si sommano. Da qui si può considerare solo l'integrale sulla prima base:

$$\Phi = 2 \int d\Sigma = 2E_x d\Sigma$$

Dove Σ è la superficie della base del cilindro considerato. Utilizzando il teorema di Gauss, si trova la carica

$$\frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = d\Sigma\sigma \implies E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Si otterrebbe lo stesso risultato se si avesse utilizzato il principio di sovrapposizione.

Esempio 1.4 (Esercizio 1 parziale 4/4/2014).

Data una sfera con densità di carica $\rho(r)$ è così definita:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{2\rho_0 r}{R} - \rho_0 & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

La carica è dunque negativa fino a $\frac{R}{2}$ e poi positiva fino a R . La carica totale tuttavia non è nulla: anche se la distribuzione di carica è lineare, bisogna considerare la simmetria sferica del problema:

Calcolando la carica interna,

$$Q_{in} = \int_0^R \rho(r) dV = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

Dunque si ottiene

$$\int_0^R \left(\frac{2\rho_0 r}{R} - \rho_0 \right) 4\pi r^2 dr = \int_0^R 4\pi r^3 \frac{2\rho_0}{R} dr - 4\pi\rho_0 \int_0^R r^2 dr$$

Dunque si risolvono:

$$Q_{in} = 2\pi\rho_0 R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 = \frac{2}{3}\pi\rho_0 R^3$$

Che è, come ci si aspettava, maggiore di zero. Se $r > R$:

$$4\pi R^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{2}{3}\pi\rho_0 R^3 \implies E(r) = \frac{1}{6\epsilon_0} \rho_0 \frac{R^3}{r^2}$$

Se $r \leq R$, la carica interna va integrata da 0 a r :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r \left(\frac{2\rho_0 r'}{R} - \rho_0 \right) 4\pi r'^2 dr'$$

Ora si risolve:

$$\int_0^r \left(\frac{2\rho_0 r'}{R} - \rho_0 \right) 4\pi r'^2 dr' = \frac{2\pi\rho_0}{R} \int_0^r 4\pi r'^3 dr' - 4\pi\rho_0 \int_0^r r'^2 dr' = \frac{2\rho_0}{R} \pi R^4 - \frac{4}{3}\pi\rho_0 R^3 = 2\pi\rho_0 \left(\frac{r^4}{R} - \frac{2}{3}r^3 \right)$$

Dunque si ottiene il campo elettrico come

$$E(r) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{R} - \frac{2}{3}r \right)$$

Esempio 1.5 (Esercizio 1 totale 2 / 2 / 2014).

Si determini il campo elettrico di una sfera con distribuzione di carica

$$\rho_0 = \begin{cases} 0 & r \leq R_1 \\ \rho_0 & R_1 < r \leq R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}$$

In questo esercizio il metodo più veloce è utilizzare il principio di sovrapposizione in quanto questo è il tipico problema del guscio sferico: si esegue dunque la somma algebrica di una sfera carica positivamente (E_1) e il guscio interno carico negativamente (E_2).

$$E = E_1 + E_2$$

Esempio 1.6 (Sfera con guscio buco non concentrico).

Se la sfera avesse un buco non concentrico, allora non si potrebbe applicare il principio di Gauss a causa dell'assenza di simmetrie.

Il campo elettrico nel generico punto P interno alla sfera è indicato dalle coordinate

$$\vec{P} = \vec{r} \quad |\vec{r}| = \sqrt{a^2 + r'^2}$$

Il campo della sfera carica totale (cioè senza buco) è uguale a

$$\vec{E}_1(r) = \frac{r}{3} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \hat{r}$$

Per il buco, la carica è $-\frac{4}{3}\pi r'^3 \rho_0$, dunque

$$\vec{E}_2(r') = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r' \hat{r}'$$

Si considera adesso $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$. Si può dunque scrivere che

$$\vec{E}_1(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\vec{r}' + \vec{a})$$

Facendo ora la somma

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

Il campo è orientato nella direzione tra il centro della sfera grande e quello della sfera piccola.