APpunti di OTtica

Tommaso Miliani

17-10-25

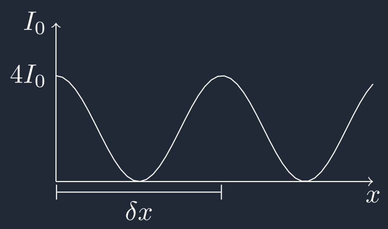
1 Riassuntino volta scorsa

Dato che l'onda stazionaria ha una lunghezza d'onda

$$\delta x = \frac{\lambda}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

A sinistra dell'interfaccia le interferenze dell'onda in ingresso e quella in uscita generano un onda complessiva che è ferma nello spazio ma oscilla nel tempo che prende proprio il nome di onda stazionaria. Questa onda ha sempre dei punti in cui il campo elettrico è totalmente nullo e dunque l'intensità media viene diversa da zero.

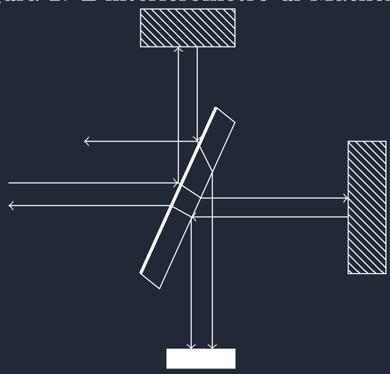
Figura 1: Grafico interferenza dell'altra volta



2 Interferometro di Machelson

L'**interferometro di Machelson** è l'interferometro che si utilizza durante l'esperienza dell'interferenza. Una prima onda piana è inviata su di un componente ottico, ossia il **separatore di fascio**, che è un componente che ha un substrato di materiale dielettrico su una delle sue superfici: il materiale dielettrico ha la caratteristica per cui la luce ha il 50% di probabilità di essere riflessa o trasmessa.
Il fascio riflesso compie un cammino L_1 prima di incontrare uno specchio e venire riflesso e torna nuovamente sul separatore. Il fascio che inizialmente era stato trasmesso procede per un cammino L_2 fino ad un nuovo specchio e poi torna indietro. Questo interferometro mi permette di ottenere da un solo fascio di luce ben 4 fasci di luce distinti.
Sotto all'interferometro è posto un rilevatore per determinare l'interferenza tra le due onde che giungono al rilevatore stesso. Dato che il campo elettrico va come il quadrato mediato nel tempo, ogni volta che il fascio attraversa l'interferometro (da sinistra verso destra) il suo campo elettrico diventa $E_r = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}$ per il fascio riflesso (che accumula un ritardo di fase di π) mentre per la parte trasmessa $E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ che non accumula ritardo di fase. Ogni interferometro è tarato per trasmettere o riflettere una certa percentuale del campo elettrico in entrata. Se invece propagassi il fascio di luce da destra verso sinistra si ha che sia la parte riflessa, che quella trasmessa, hanno il campo elettrico

Figura 2: L'interferometro di Machelson

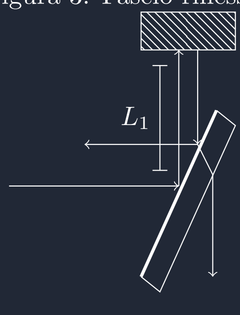


$$E_r = E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

La definizione di destra o sinistra dipende da dove è messo il materiale dielettrico prima del substrato di vetro. Questa tipologia di interferometro è utilizzato all'interno dei rilevatori di onde gravitazionali; è anche uno degli strumenti più sensibili mai costruiti dall'uomo. A partire dal campo elettrico posso determinare il primo contributo che va verso il rivelatore

$$E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

Figura 3: Fascio riflesso



L'onda inizialmente riflessa avrà come espressione del campo elettrico

$$-\frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

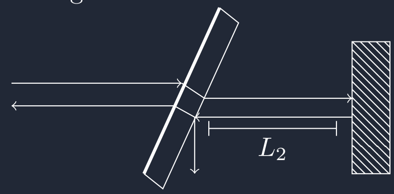
Dato che alla fine si formano quattro fasci, il fascio che inizialmente è stato riflesso e poi trasmesso avrà come modulo del campo elettrico

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\pi+2kL_1+\pi)$$

Il primo π è dovuto al ritardo di fase dovuto alla riflessione dell'interferometro, mentre il termine $2kL_1$ è il termine di ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio sopra all'interfaccia, ossia la distanza che percorre la luce prima di tornare all'interfaccia. Il termine π è dovuto invece al ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza L_1.

L'altro contributo è quello del fascio che prima è trasmesso e poi è riflesso allo specchio a distanza L_2 e poi è riflesso sull'interfaccia. Posso quindi dire che il campo elettrico di quel fascio di luce che giunge sul rilevatore è

Figura 4: Fascio trasmesso



$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\pi+2kL_2)$$

Qui abbiamo il termine π che è il ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza L_2 e anche il contributo $2kL_2$ dovuto alla distanza dall'interfaccia dello specchio. Per questo fascio di luce non c'è il termine π in quanto il fascio in riflessione non accumula ritardo di fase. A questo punto devo fare la somma dei campi elettrici complessivi in modo tale da poter ottenere il campo elettrico risultante al rilevatore:

$$\frac{E_0}{2}\Big(\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+2kL_2+\pi)+\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+2kL_1)\Big)$$

Adesso posso applicare le formule di Prostaferesi per ottenere il campo elettrico totale come

$$E_{TOT}=\frac{E_0}{2}\cdot\left(2\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+k(L_1+L_2)+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(k(L_2-L_1)+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Adesso posso ottenere il quadrato del campo elettrico e mediato nel tempo mi dà l'intensità del fascio luminoso medio:

$$\langle I_{TOT}\rangle = c\epsilon_0\left\langle\left|\overrightarrow{E_{TOT}}\right|^2\right\rangle = I_0\cos^2\left(k(L_2-L_1)+\frac{\pi}{2}\right)=I_0\sin^2(k(L_2-L_1))$$

Si può ottenere ora una nuova espressione per l'intensità esplicitando k:

$$I_{TOT}=I_0\sin^2\left(\pi\frac{L_2-L_1}{\frac{\lambda}{2}}\right)$$

Basta che cambi la differenza tra i cammini ottici di $\frac{\lambda}{2}$ che il seno ha fatto una oscillazione completa. Basta dunque cambiare la distanza degli specchi di una lunghezza d'onda per poter accorgersi della variazione dell'intensità del campo elettrico.

2.1 Lo specchio con la camera a vuoto

Supponendo di avere una impostazione simile, se lo specchio su cui deve riflettersi la luce è nel vuoto ed è lasciato cadere, la luce che torna indietro dai due specchi interferirà sul rilevatore. Si può esprimere lo spostamento dello specchio come

$$\Delta L(t)=L_1-L_2=-\frac{1}{2}gt^2+\cos t$$

Allora l'intensità dovrà anch'essa dipendere dal tempo, ottenendo la seguente espressione:

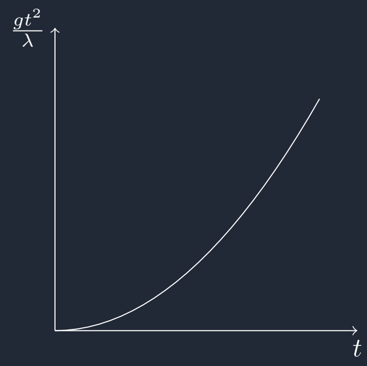
$$I(t) = I_0 \sin^2\left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda}{2}}\right) = \sin^2\left(\pi \frac{gt^2}{\lambda}\right)$$

Immaginando di avere uno oscilloscopio al rilevatore, io mi aspetto che l'intensità possa sempre variare tra zero ed uno e man mano mi aspetto che il periodo di oscillazione avvenga sempre più velocemente. Questo vuol dire che il termine dentro al seno è tale per cui

$$\frac{gt_1^2}{\lambda} = 1 \qquad \frac{gt_2^2}{\lambda} = 2, \qquad \ldots$$

Se volessi riportare tutti i t_i nei quali l'intensità del campo elettrico è zero, otterrei un andamento congruente con quello di una parabola che dipende esattamente da g.

Figura 5: Il grafico dei valori di t



3 La realizzazione di uno spettrografo

3.1 Due lunghezze d'onda

Supponendo di mandare dentro all'interferometro di Machelson due fasci di luce con due lunghezze d'onda differenti, ci si aspetterebbe una lettura diversa al rilevatore. Quello che accade però è che il campo elettrico non subisce alcuna modifica in quanto i due fasci con lunghezze d'onda diverse non interferiscono tra di loro: infatti i loro campi elettrici totali sono esattamente:

$$E_{TOT_1} = \frac{E_{01}}{2} \cdot \left(2\cos\left(\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + k_1(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(k_1(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$E_{TOT_2} = \frac{E_{02}}{2} \cdot \left(2\cos\left(\overrightarrow{k_2} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + k_2(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(k_2(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Adesso mi interessa solamente della dipendenza temporale del campo elettrico. Dato che alcuni dei termini sono fissati, allora posso utilizzare una certa approssimazione per evidenziare questa dipendenza temporale ottenendo, rispettivamente, per ii due campi totali:

$$A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$
$$A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ottengo allora il seguente campo sul rilevatore:

$$E_{TOT} = A_1 \cos(\omega_1 + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 + \phi_2)$$

Il modulo del campo elettrico totale è dunque:

$$\left|\overrightarrow{E_{TOT}}\right|^2 = A_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) + 2A_1A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1)\cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Il terzo termine è esattamente l'interferenza tra le due lunghezze d'onda nel tempo. Posso ora dimostrare che quel terzo termine mediato nel tempo è nullo: infatti posso, da prodotto, trasformalo in una somma di coseni attraverso la formula di Prostaferesi:

$$\cos(\omega_1 t + \phi_1)\cos(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\right)$$

Mediando ora temporalmente questa espressione, si osserva che è zero. Adesso l'intensità totale del campo mediata nel tempo sarà

$$I_{TOT}(t) = I_1 \sin^2\left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_1}{2}}\right) + I_2 \sin^2\left(\pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_2}{2}}\right)$$