Analisi

Tommaso Miliani

03-12-24

1 Integrazione per trovare la derivata di composte

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1}$$

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Posto

$$f(x) = F(x)$$
$$F(x) = \int f(x)dx$$

Allora si ha la formula di integrazione per sostituizione:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx \tag{4}$$

$$con\ x = g(t) \tag{5}$$

Esempio:

$$\int \frac{\log t}{t} = \int xdx \Rightarrow x = \frac{\log t}{t} \Rightarrow \frac{\log^2 t}{2} + c$$

Formula dell'integrazione di potenze per sostituizione

$$\int g(t)^\alpha g'(t)dt = \frac{g(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \tag{6}$$

$$\int \sin^3 t\ dt = \int \sin^2 t \cdot \sin t\ dt$$
$$= \int (1 - \cos^2 t) \sin t\ dt$$
$$g(t) = -\cos t.$$
$$g'(t) = \sin t$$
$$f(x) = 1 - x^2$$
$$\int 1 - x^2\ dx = \frac{\cos^3 t}{3} + c$$

Si può anche cambiare variabile all'interno dell'integrale e quindi si ottiene che dentro l'integrale devo sostituire g al posto di x e $g'(t)dt$ al posto di dx.

$$\int \frac{\log t}{t}\ dt,\ pongo\ x = \log t \Rightarrow 1\ dx = \frac{1}{t}\ dt$$
$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c = \frac{\log^2 t}{2} + c$$

2 Integrazione di derivate composte in un intervallo definito

$$\int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)dt = \Big|_{g(a)}^{g(b)} x = F(g(b)) - F(g(a)) = \tag{7}$$

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8}$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$
$$posto\ x = \sin t$$
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$$

Integrata ora per $-1 < x < 1$ allora diventa:

$$dx = \cos t\ dt.$$
$$\int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t\ dt = t + c$$
$$Quindi\ essendo\ x = \sin t$$
$$\arcsin(x) + c$$

3 Area del cerchio

Data la formula della circonferenza: $x^2 + y^2 = R^2$ voglio calcolare:

$$4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$$
$$Posto\ ora\ x = R\sin t$$
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t\ dt$$
$$Posto\ \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2} \Rightarrow 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt$$
$$\Rightarrow \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{4} + \frac{\sin(2t)}{4}$$

4 Integrali di fratte

Posto inizialmente che il grado di $P(x) < Q(x)$, questi sono due polinomi; se il grado non è minore allora dobbiamo eseguire la divisione tra polinomi. Divisione tra polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{9}$$

Esempio:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3}\ diventa$$

$$\begin{array}{cc|c} x^3 & -2x & x^2+3 \\ \hline -x^3 & \text{-3x} & \text{x} \\ & \text{-x} & \end{array} =$$

$$-x + \frac{x}{x^2+3}$$

Le cose importanti sono le seguenti:

1. Il grado di $P(x) < Q(x)$;
2. Il coefficiente della potenza più grande di Q sia 1.

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$Completamento\ del\ quadrato: \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{\Delta}{4}=-\frac{\Delta}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2}+1\right)$$

Quindi l'integrale diventerà:

$$\frac{4}{-\Delta}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+1}\,dx$$

Ponendo ora

$$y=\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2}$$

Diventa

$$\frac{4}{-\Delta}\int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\,dy=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c$$

Un'altro fratto semplice è:

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,dx=\int \frac{1}{y^n}\,dy=\int y^{-n}\,dy=\frac{y^{-n+1}}{-n+1}+c \tag{10}$$