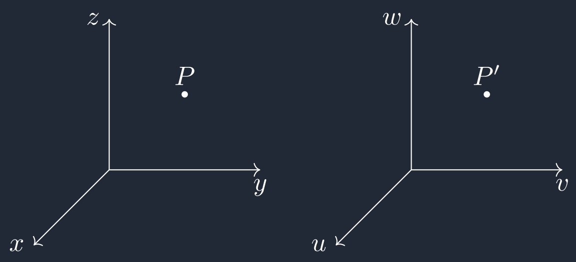
Appunti di Analisi (Bianchi)

Tommaso Miliani

26-11-25

1 Cambiamento di variabile negli integrali tripli

Così come negli integrali doppi, è possibile effettuare cambiamenti di variabile negli integrali tripli ed è perfettamente analoga nel caso del piano. per cui si possono esprimere le variabili associate agli assi cartesiani come



$$x = a(u, v, w) \qquad y = b(u, v, w) \qquad z = c(u, v, w)$$

Si suppone ora che le tre funzioni siano $C^{(1)}$ e che ci sia un dominio D a cui corrisponda un dominio D' associato agli assi u, v, w, ossia che esista la seguente mappa $D' \to D$ biettiva e che la matrice Jacobiana della trasformazione abbia det $\neq 0, \forall$ punto di D'. Se f è contenuta in D, allora

$$\int_D f(x, y, z)\ dxdydz = \int_{D'} f(a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w))\, |\det J_T|\ dxdydz \tag{1}$$

Ossia è la stessa cosa del piano ma adattata ad una variabile in più. Quello che diventa più complicato sono gli esempi di cambi di variabile.

1.1 Coordinate cilindriche

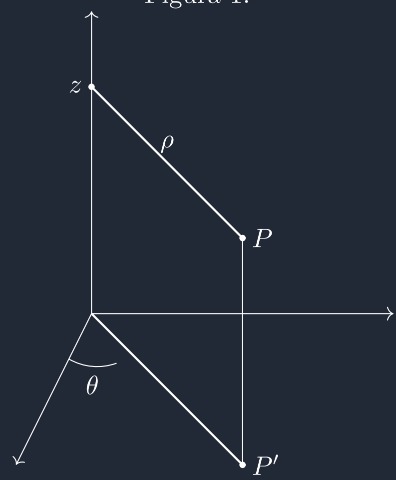
Qualsiasi punto P è proiettato sul piano xy e, presa la retta sul piano che lo unisce all'origine, posso disegnare un cilindro che ha come raggio alla base il segmento identificato. La legge che vincola dunque le coordinate cartesiane a quelle cilindriche è la seguente:

$$p = (x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \theta, z) \tag{2}$$

Dunque i punti sono identificati come

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad |\det J| = \rho \tag{3}$$

Figura 1:



Esempio 1.1.
Si vuole calcolare il seguente integrale definito nel dominio D:

$$\int_D (x^2 + y^2)\ dxdydz$$

Dove D è definito come l'insieme delimitato da $z = 0$, $z = 1$, e dalle superfici cilindriche

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 + y^2 = 4$$

E dai piani $x = 0$ e $x = y$. SI possono dunque ricavare le condizioni per il dominio D':

- $1 \leq \rho^2 \leq 4$
- $0 \leq x \leq y$

Allora

$$D' = \{(\rho, \theta, z) : z \in [0,1], \rho \in [1,2], \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$$

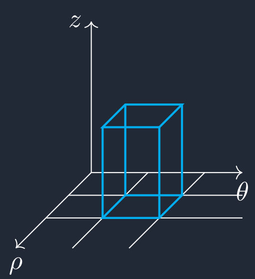
Si può dunque esprimere l'integrale come

$$\int_{D'} \left((\rho \cos\theta)^2 (\rho \sin\theta)^2\right) d\rho d\theta dz$$

Si risolve allora come

$$\int_{D'} \rho^3 \ d\rho d\theta dz = \int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3 \ dz = \frac{15}{16}\pi$$

Nel mondo (ρ, θ, z) l'insieme D' è un parallelepipedo.



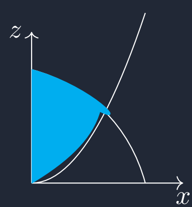
Esempio 1.2.
SIa D l'insieme dei punti sopra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ dentro la sfera di centro $(0,0,0)$ e di raggio $r = \sqrt{6}$. In termini di uguaglianza

$$D = \{(z, y, z) : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 6\}$$

Si deve calcolare il volume di D, l'utilizzo delle coordinate cilindriche è molto pratico per la risoluzione di questo esempio:

$$D = \int_D 1 \ dxdydz$$

Dunque il mio insieme è dato da



Ossia l'integrale diventa

$$D' = \{(\rho, \theta, z) : z \geq \rho^2 \quad \rho^2 + z^2 \leq 6\}$$

2 Coordinate sferiche

SI può allora definire una sfera di raggio ρ, in modo tale da ottenere le coordinate di un qualsiasi punto P come

$$P \to (\rho, \phi, \theta) \qquad \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Dunque le coordinate si esprimono come

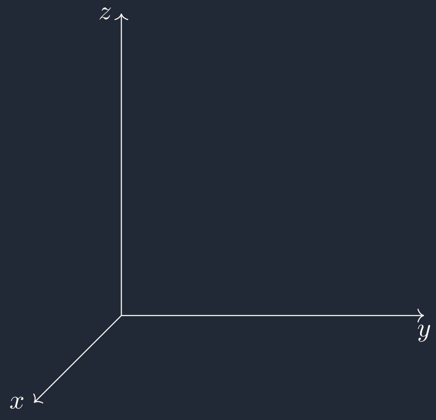
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases} \tag{4}$$

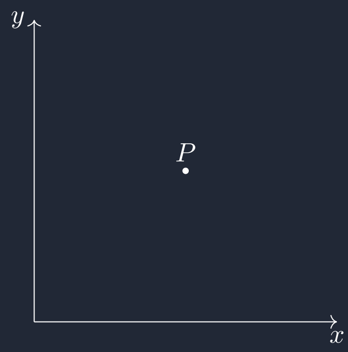
Il determinante della matrice Jacobiana è dunque

$$|\det J| = \rho^2 \sin \phi$$

Se si fissano ϕ e ρ, si disegnano nello spazio della circonferenze ad una data quota z. Se si fissa solo ϕ si disegna un cono. θ individua un piano sul quale giace sia P che la proiezione di P' sul piano xy:

Figura 2:





Esempio 2.1 (Un esempio importante)**.**
Sia H la semisfera $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad z \geq 0\}$. Supponiamo che la densità di massa $d(x, y, z) = (2R - \rho)$. Voglio calcolare la massa della semisfera.

$$\int_H d(x, y, z)\ dxdydz$$

Si ottiene in coordinate sferiche

$$H' = \{\rho \leq R, \cos \phi \geq 0\} = \{\rho \in [0, R], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Dunque la massa si ottiene come

$$\int_H (2R - \rho)\ dxdydz = \int_{H'} (2R - \rho)\rho^2 \sin \phi\ d\rho d\theta d\phi =$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi (2R - \rho)\rho^2 \sin \phi = \frac{5}{12} R^4 2\pi$$

La massa totale di un corpo che occupa la regione di volume Ω e che ha densità di massa $d(x, y, z)$ è l'integrale su di Ω:

$$\int_\Omega d(x, y, z)\ dxdydz$$

Il baricentro ha tre coordinate:

$$\begin{cases} x = \frac{\int_\Omega x d(x,y,z)}{M}\ dxdydz \\ y = \frac{\int_\Omega y d(x,y,z)}{M}\ dxdydz \\ z = \frac{\int_\Omega z d(x,y,z)}{M}\ dxdydz \end{cases}$$

Il momento di inerzia si trova come

$$\int_{\Omega} \delta^2(x, y, z) d(x, y, z)\ dxdydz$$

Dove δ^2 è la distanza di (x, y, z) dall'asse rispetto al quale si calcola il momento di inerzia.

Esempio 2.2.
Rispetto all'asse z, il momento di inerzia di un corpo con una certa distribuzione di densità di massa è data da:

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) d(x, y, z)\ dxdydz$$