Appunti di analisi

Tommaso Miliani

10-10-25

1 Esercizi vari

Esempio 1.1.
Trovare il piano tangente al grafico di

$$f(x, y) = x\sin(y^2)$$

Nel punto $(0; \sqrt{\frac{\pi}{4}}; 0)$. *Per vedere che esiste il piano ho bisogno che la funzione sia differenzibile. Utilizzo allora il teorema generale della differenziabilità: se* f *è* C^1 *in* $\mathbb{R}^2$, *e lo è in quanto è composizione di prodotti di funzioni elementari. Dato che ho una funzione che è* C^1 *su tutto il piano, allora ammette il piano tangente. La tangente ha allora equazione*

$$z =< Df(P_0); \underline{x} - P_0 > +z_0$$

Ossia il prodotto scalare tra la derivata di f *in* P_0 *e il vettore* $x - P_0$. *ALlora la derivata di* f*:*

$$f_x(x, y) = \sin(y^2)$$
$$f_y(x, y) = 2xy\cos(y^2)$$

Allora il gradiente nel punto P_0 *è:*

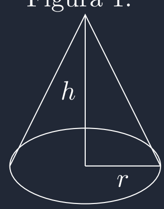
$$D(f(P_0)) = \begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il piano avrà allora espressione:

$$\Pi_{P_0} : z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - \sqrt{\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix} + 0 \implies z = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

Un'altro esempio:
So che l'errore massimo è $\epsilon = 0.1\ cm$ sulle misure. Stimare l'errore massimo sul volume dato $r = 10\ cm$ e $h = 25\ cm$.

Figura 1:



$$V(h, r) = \frac{\pi}{3}r^2h$$

Dato che presentano delle incertezze, posso calcolare il differenziale di V come

$$dV = 2\frac{\pi}{3}hr\ dr + \frac{\pi}{3}r^2\ dh$$

Ossia il differenziale di V, cioè l'operatore lineaere che mi da l'approssimazione della funzione. Dato il differenziale, e dato che gli errori massimi sono uguali, allora l'errore massimo su V è

$$\epsilon(V) = \frac{\pi}{3}2rh\epsilon + \frac{\pi}{3}r^2\epsilon =$$
$$= \frac{\pi}{3}60 = 20\pi$$

Esempio 1.2.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

Sapendo che la derivata direzionale:

$$v_1 \quad \overrightarrow{AB} \qquad \frac{\partial f}{\partial v_1}(A) = 3$$
$$v_1 \quad \overrightarrow{AC} \qquad \frac{\partial f}{\partial v_2}(A) = 26$$

Dove $A = (1, 3), B = (3, 3), C = (1, 7), D = (6, 15)$*. Si calcoli* $\frac{\partial f}{\partial w}(A)$ *dove* $w = \overrightarrow{AD}$*. I vettori*

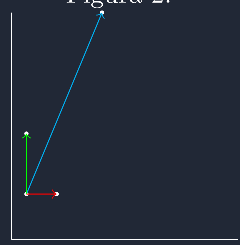
$$v_1 = \frac{B - A}{|\cdot|} = (1, 0)$$
$$v_2 = \frac{C - A}{|\cdot|} = (0, 1)$$
$$w = \frac{D - A}{|\cdot|} = (\frac{5}{13}; \frac{12}{13})$$

Utilizzando il teorema del gradiente:

$$\frac{\partial f}{\partial w} =< D(f(A)); w >=< (3, 26); (\frac{5}{3}; \frac{12}{13}) >=$$

L'esempio precedente poteva anche essere risolto in maniera diversa nel caso in cui v_1, v_2 non fossero stati paralleli agli assi. Potevo porre allora la derivata parziale della funzione rispetto ai vettori come il prodotto scalare con il gradiente:

Figura 2:



$$\frac{\partial f}{\partial v_1} =< Df; v_1 >= a_1 f_x + b_1 f_y = 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial v_2} =< Df; v_2 >= a_2 f_x + b_2 f_y = 26$$

Dove $v_1 = (a_1, b_1), v_2 = (a_2, b_2)$. Posso ora esprimere il vettore w come combinazione lineare dei due vettori:

$$w = \alpha < Df; v_1 > +\beta < Df, v_2 >= \alpha \frac{\partial f}{\partial v_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial v_2}$$

Proposizione 1.1.
Se si ha una funzione definita su di un insieme aperto ed è anche differenziabile nell'insieme dei punti del dominio tali per cui

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R} \qquad P_0 \equiv (x_0, y_0) \in U_k = \{(x, y) \in A : d(x, y) = k\}$$

Allora

$$D(f(P_0)) \perp U_k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Dimostrazione. Vicino a P_0 U_k ha al forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underline{x}(t) \qquad t \in \mathbb{I}$$

Chiamata allora la funzione $g(t) = f(\underline{x}(t))$, devo dimostrare ora che il gradiente sia perpendicolare alla linea di livello: ossia il prodotto scalare tra

$$Df(P_0) \perp U_k \in P_0 \implies Df(P_0) \perp \underline{x}(t) \in P_0$$

Devo allora verificare che il vettore del differenziale sia peprendicolare alla retta tangente: ossia la derivata del vettore $\dot{\underline{x}}(t)$ dove $\underline{x}(t) = P_0$. Devo allora ottenere

$$\boxed{f_x(P_0)\dot{x}(t) + f_y(P_0)\dot{y}(t) = 0}$$

Se siamo su una linea di livello, allora vale la relazione

$$g(t) = f(\underline{x}(t)) = k \implies g'(t) = 0$$

La derivata della funzione g è

$$g'(t) =< Df(\underline{x}(t)); \dot{x}(t) >= f_x(\underline{x}(t))\dot{x}(t) + f_y(\underline{x}(t))\dot{y}(t)$$

Allora mi manca solamente da calcolarla in t_0. $\square$

Teorema 1.1 (Teorema delle funzioni con gradiente nullo).
Se il gradiente di una funzione è nullo in un insieme aperto A, allora è costante nell'insieme aperto se A è aperto e connesso. Se invece $A = A_1 \cup A_2$ allora esiste sicuramente

$$f \equiv k_1 \in A_1 \qquad f \equiv k_2 \in A_2 \tag{2}$$