

Analisi II - Serie di funzioni

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Foglio n.1

Analizzare la convergenza puntuale e totale delle seguenti serie di funzioni:

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{n+x} - \sqrt{n-x})$$

$$3. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x + \frac{1}{n} \right)^{n+\frac{x}{n}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln(n)}{nx} \right)^{\ln(n)}$$

$$5. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}} \right)$$

$$6. \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin \left(\frac{x}{3^n} \right)$$

d detta $S(x)$ la somma totale, calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$$

$$7. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{x^3} + n}{(n+x^2)^{2x^2}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$$

*esercizi dei prof. Gabriele Bianchi, Chiara Bianchini e Luca Bisconti

9. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^{n^2}$

11. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{7n-1}{n^2 - (x-3)n - 3x}$

12. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

13. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ (calcolarne la somma)

14. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$ (calcolarne la somma)

15. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}$

16. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{xt}}\right) dt$ con $x > 0$

17. Provare la seguente uguaglianza per $|x| < \frac{1}{2}$:

$$\frac{3x}{1+x-2x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} [1 - (-2)^n] x^n$$

18. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} x^{n^n}$

19. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \int_n^{n+1} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \right)^n x^{2n}$

20. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x + \frac{1}{4}|^{n^2}}{n^{2x+1}}$

21. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \arctan^n\left(\frac{1}{x}\right)$

22. Calcolare la derivata 36-esima di $\sin(x^4)$ in $x = 0$

23. Calcolare la derivata 7-ima di $e^{\sqrt{x}}$ in $x = 0$
24. Dimostrare che le seguenti funzioni sono analitiche in un intervallo I . Determinare I :
- $f_1(x) = \frac{1}{1-x}$
 - $f_2(x) = \frac{1}{1+x^2}$
 - $f_3(x) = \arctan(x)$
 - $f_4(x) = \ln(1+x)$
 - $f_5(x) = \arcsin(x)$
25. Calcolare il valore di:
 $\arcsin\left(\frac{1}{14}\right)$
 con un errore ε assegnato
26. Calcolare il valore di:
 $\int_0^1 e^{x^2} dx$
 con un errore $\varepsilon < 10^{-3}$
27. Calcolare il valore di:
 $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$
 con un errore $\varepsilon < 10^{-3}$
28. Determinare il valore di π con 3 cifre significative
29. Calcolare il valore di:
 e^{-1}
 con 4 cifre significative
30. Calcolare il valore di:
 $\sum_1^{+\infty} (-1)^n n e^{-n^2}$
 con un errore $\varepsilon < 10^{-3}$

2 Foglio n.2

1. Studiare la convergenza puntuale e totale di $\sum f_n(x)$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n a_n x & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ a_n (2 - nx) & \text{se } \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

nei tre casi differenti in cui:

- $a_n = \frac{1}{n^2}$
- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

2. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

- (a) Studiare la convergenza puntuale
- (b) Studiare la convergenza assoluta
- (c) Studiare la convergenza uniforme in un intervallo $[-\alpha, \alpha]$

3. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (x-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

- (a) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[a, 1] \forall a \in [0, 1]$
- (b) Studiare la convergenza puntuale e uniforme in $[a, 2] \forall a \in [1, 2]$
- (c) Calcolare $f\left(\frac{3}{2}\right)$ con un errore $\varepsilon < 10^{-2}$

4. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n^2 x) \sin(3nx)}{\sqrt{n^3 + 7n^2}} \quad \text{con } x \in (0, +\infty)$$

- (a) Studiare la convergenza puntuale
- (b) Trovare l'intervallo di convergenza totale

5. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{-n} x^n$$

6. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\ln(1+n)]^{-1} x^n$$

7. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

8. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Sapendo che $\sum a_n (x-2)^n$ converge in $x = 1$ e non converge in $x = 3$, trovare il raggio di convergenza (o una sua stima).

9. Sia $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$. Sapendo che $\sum a_n x^n$ converge in $x = 1$ e non converge in $x = -2$, stabilire, dove possibile, il carattere delle seguenti serie:

- $\sum a_n \frac{(-1)^n}{2^n}$
- $\sum a_n 2^n$
- $\sum a_n 3^n$

Dove non è possibile determinarlo, esibire esempi di successioni che portano a risultati diversi.

10. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^{n^2}$$

11. Studiare la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^{n^2}$$

12. Studiare la serie:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} |a| \sqrt{\ln(n)} (x-e)^n \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R}$$

13. Studiare la serie:

$$\sum_{n=3}^{+\infty} |a| \sqrt{\ln(n)} e^n (e^x - 1)^n \quad \text{per } \alpha \in \mathbb{R}$$

14. Data:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (a) Provare che per $\alpha = 1$ la funzione è analitica in $(-1, 1]$
- (b) Calcolare $f^{(42)}(0)$
- (c) Determinare il valore di:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} e^{-n}$$

15. Sapendo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x-1)^n$ converge in $x = 2$ e non converge in $x = -1$, studiare:

- (a) $\sum (-1)^n \frac{a_n}{2^n}$
- (b) $\sum (-1)^n a_n$
- (c) $\sum \frac{a_n}{2^n} 7^n$
- (d) $\sum 2^n a_n$

16. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(1-x)^n}$$

studiare la convergenza puntuale e uniforme.

Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t S(x) dx$$

17. Sia

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

e sia il raggio di convergenza di tale serie $R = 1$.

Rispondere alle seguenti domande motivando la risposta (ad esempio dimostrandole o fornendo controesempi):

- (a) Se $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = L \in \mathbb{R}$, si può dire che $\sum a_n$ converge?
- (b) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| = +\infty$, si può dire che $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$?

- (c) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$, si può dire che $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x)$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$ esistono finiti?
- (d) Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, con $a_n \geq 0$, si può dire che $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$?

18. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2n} \sin^2 \left(\frac{1}{2^n n^n} \right) y^{2n-2}$$

Calcolare:

$$\lim_{y \rightarrow 0} S(x)$$

19. Calcolare:

$$\arcsin \left(\frac{1}{14} \right)$$

con un errore ε assegnato

20. Indicare per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente uguaglianza è verificata:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [2^n - (-1)^n 3^n] x^n = \frac{5x}{1+x-6x^2}$$

21. Data:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(2n)!} y^{n-1}$$

(a) Determinare l'intervallo di convergenza

(b) Scrivere lo sviluppo di Taylor al 2° ordine centrato in $x_0 = 0$

22. Calcolare la derivata 34-esima in $x = 0$ di:

$$\sin(x^4)$$

23. Date le seguenti funzioni, determinare che sono analitiche in un sieme I (da determinare). Trovare inoltre il loro sviluppo in serie di Taylor:

- (a) $\ln(1+x)$
- (b) $\arctan(x)$
- (c) $\sin(x)$
- (d) $\cos(x)$
- (e) $\sin^2(x)$

Suggerimento: $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

3 Foglio n.3

1. Studiare i tipi di convergenza della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^2 e^{-nx} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

2. Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos^n(x)}{2^n} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

3. Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \arctan\left(\frac{n}{x}\right)}{3^n}$$

nei seguenti insiemi:

- (a) $[-\alpha, \alpha] \setminus \{0\} = [-\alpha, 0) \cup (0, \alpha]$
(b) $0 < \alpha < 3$

4. Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)^{\frac{1}{x+1}} \quad \text{con } x \in \mathbb{R}$$

5. Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(\sqrt{nx})}{2^n}$$

nell'intervallo $[0, 2]$