Appunti di Fluidodinamica (Landi)

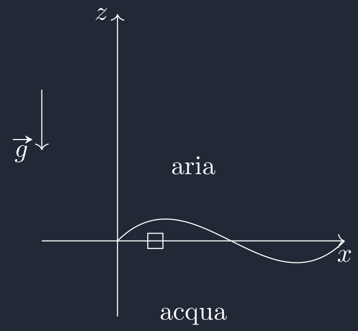
Tommaso Miliani

12-12-25

1 Onde di gravità

Sono delle onde che si presentano quando un campo esterno agisce su di un fluido (si tratterà solo il caso di fluido incomprimibile). SUpponendo di avere una superficie di separazione tra due fluidi diversi che hanno densità molto diverse tra loro, e si suppone di creare una perturbazione sulla superficie: si crea una colonna di liquido supplementare rispetto alla quota di riferimento che crea una pressione supplementare sul piano $x = 0$, che si alza e che vuole tornare verso il basso. Si deve dunque calcolare la forza che del fluido che vuole tornare giù e determinare la relazione che mi permette di trasmettere l'oscillazione. Per trattarlo si discute un elemento fluido posizionato ad una qualunque quota e si discute il suo spostamteno tramite lo spostamento Lagrangiano. Il vettore spostamento sarà

Figura 1: Onde di gravità a seguito di una perturbazione



$$\vec{\xi}(x, z, t) = \xi_x \hat{x} + \xi_z \hat{z}$$

Si può dunque descrivere il moto attraverso una funzione trigonometrica (coseno) con una ampiezza ξ_0 in funzione della quota:

$$\xi_z = \xi_0 h(z) \cos(kx - \omega t)$$

Ovviamente si vuole che $h(0) = 1$. Studiando la cinematica dell'oggetto, si vuole che

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \qquad \vec{u} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$

Si può dunque calcolare u_z e u_x:

$$u_z = \xi_0 \omega h(z) \sin(kx - \omega t)$$
$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\xi_0 \omega h'(z) \sin(kx - \omega t)$$

Dunque u_x:

$$u_x = \frac{\xi_0}{k} \omega h'(z) \cos(kx - \omega t)$$

Se si integra rispetto al tempos si ottiene invece ξ_x:

$$\xi_x = \frac{\xi_0}{k} h'(z) \sin(kx - \omega t)$$

Allora si ha

$$\begin{cases} \xi_z = \xi_0 h(z) \cos(kx - \omega t) \\ \xi_x = -\frac{\xi_0}{k} h(z) \sin(kx - \omega t) \\ u_z = \xi_0 \omega h'(z) \sin(kx - \omega t) \\ u_x = \frac{\xi_0}{k} \omega h'(z) \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

ξ_x e ξ_z mi danno l'equazione di un ellisse: dunque si è studiato la cinematica di un fluido perturbato in due dimensioni. Possiamo ora utilizzare lo spostamento Lagrangiano per studiare la dinamica dell'oggetto.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla} p + \rho_0 \vec{g}$$

Adesso, la pressione è esprimibile come la pressione di equilibrio più una fluttuazione δp, come per la trattazione delle onde sonore. La condizione di equilibrio, evidentemente, diventa

$$\vec{\nabla} p_0 = \rho_0 g$$

Posso ora scrivere

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\delta p - \vec{\nabla} p_0 - \rho_0 \vec{g} \implies \rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\delta p$$

Dunque si riassumono le condizioni viste fino ad ora:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial x} = \frac{\xi_0}{k} h'(z)\omega^2 \sin(kx-\omega t) \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\xi_0 \omega^2 h(z)\cos(kx-\omega t) \end{cases}$$

Posso eliminare δp derivando la prima per z e la seconda per x, in quanto le derivate miste devono essere uguali:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi_0 \frac{h'(z)}{k}\omega^2 \sin(kx-\omega t)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi_0\omega^2 h(z)\cos(kx-\omega t)\right)$$
$$\xi_0 \frac{h''(z)}{k}\omega^2 \sin(kx-\omega t) = +k\xi_0\omega^2 h(z)\sin(kx-\omega t)$$

Semplificando ora si ottiene la differenziale che descrive l'ampiezza della perturbazione in funzione della profondità z

$$h''(z) = k^2 h(z)$$

Le soluzioni sono dunque le combinazioni lineari della seguente:

$$h(z) = h_+ e^{kz} + h_- e^{-kz}$$

Le due costanti h_+ e h_- sono determinate dalle condizioni al bordo, ossia le seguenti:

- $h(0) = 1$;
- Il fondo sia ad una profondità fissa $h(z_{\text{fondo}}) = 0$.

Dunque si possono trovare le costanti:

$$\begin{cases} h(0) = h_+ + h_- = 1 \\ h_+ e^{-kz_{\text{fondo}}} + h_- e^{kz_{\text{fondo}}} = 0 \end{cases}$$

La soluzione è dunque

$$h(z) = \frac{e^{k(z+z_{\text{fondo}})} - e^{-k(z+z_{\text{fondo}})}}{e^{kz_{\text{fondo}}} - e^{-kz_{\text{fondo}}}}$$

Si può ora calcolare la spinta della colonna di fluido perturbato alla quota $z=0$. Posso prendere lungo x

$$\rho_0 \frac{\partial u_x}{\partial t}_{z=0} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x}_{z=0}$$

Dove $\delta p = \rho_0 h \xi_z$ è la pressione della colonna di fluido incomprimibile che si è aggiunta in seguito alla perturbazione rispetto all'interfaccia $z=0$, dunque si può scrivere l'espressione di prima come

$$\rho_0 h'(z)\frac{\xi_0}{k}\omega^2 \sin(kx-\omega t) = -\rho_0 g k \xi_0 h(z)\sin(kx-\omega t) \implies \omega^2 = g\frac{k^2 h(z)}{h'(z)}_{z=0}$$

2 Casi particolari

2.1 Limite delle acque profonde

Nel limite delle acque profonde $L \to +\infty$, dunque

$$h(z) = e^{kz} \implies h'(z) = ke^{kz}$$

Che tende a zero quando $z \to -L$. Si può ottenere una relazione per la dispersione delle onde di gravità quando le acque sono molto profonde (ossia che kL molto maggiore di 1, ossia nel limite in cui la lunghezza d'onda è molto più piccola della profondità del fluido):

$$\omega^2 = kg$$

Dato che $h'(z) = h(z)k$, allora vuol dire che $\xi_x = \xi_z$, dunque l'elemento fluido percorre delle circonferenze con raggio via via più piccolo quando si va in profondità invece che delle ellisse. La velocità di fase (ossia la velocità di propagazione dell'onda a quella determinata lunghezza d'onda) è dunque

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} \tag{1}$$

Le onde lunghe, in profondità, vanno più veloci rispetto alle onde corte.

2.2 Limite delle acque basse

Nel limite delle acque basse $L \to 0$, dunque

$$\left.\frac{h'(z)}{h(z)}\right|_{z=0} = \frac{k}{\tanh(kL)}$$

Dunque

$$\omega^2 = kg\tanh(kL)$$

Dato che $kL << 1$, si può sviluppare con Taylor al primo ordine per ottenere il **limite della acque basse** (non dispersiva perché la velocità di fase non dipende dalla lunghezza d'onda):

$$\omega^2 = k^2 gL$$

La velocità di fase è dunque

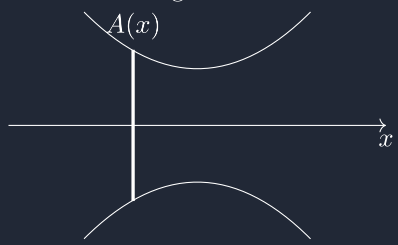
$$v_\phi = \sqrt{gL}$$

Il motivo per il quale le onde sembrano arrivare frontali rispetto alla riva è che il fronte d'onda, anche se inclinato rispetto alla riva, inizia a ruotare poiché la parte del fronte più vicino alla riva va più lento della parte più lontana e dunque il fronte sembra ruotare in modo tale che arriva sempre frontale.

3 Flussi di fluidi comprimibili in sezioni convergenti e divergenti

Si considerano condizioni stazionarie e si suppone avere una conduttura con una strozzatura, con le equazioni di Leonardo (e immaginando che tutto dipenda da x e che la velocità del fluido in arrivo alla strozzatura è u_x):

Figura 2:



$$\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0 \implies \frac{d}{dx}(\rho u_x A_x) = 0$$

Ossia, presa una sezione A_x della strozzatura e calcolandone il flusso, questo deve essere uguale al flusso della sezione $A_x + dx$ in quanto il flusso di una sezione chiusa deve essere costante. Questo vuol dire che la derivata deve essere zero in quanto non c'è cambiamento nel flusso di fluido. Posso sviluppare la derivata logaritmica in modo tale che

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} = 0$$

Posso esprimere

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$

Posso trascurare gli effetti della gravità (per esempio per un razzo nello spazio) e anche la priam derivata in quanto siamo in condizioni stazionarie:

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

Posso impostare adesso l'ipotesi barotropica, dunque posso relazionare la pressione in funzione della densità:

$$p = p(\rho) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{dx}$$

Adesso, utilizzando la velocità di propagazione delle onde di compressione, si può ottenere una nuova espressione per l'equazione di continuità:

$$u\frac{du}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = -C_s^2\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

Dunque

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} - \frac{1}{A}\frac{dA}{dx} \implies u\frac{du}{dx} = -C_s^2\left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right) + \frac{C_s^2}{A}\frac{dA}{dx}$$

Posso dunque riscrivere il tutto come

$$\left(\frac{u^2}{C_s^2} - 1\right)\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

Il rapporto tra la velocità è la velocità del suono prende il nome di **numero di Mach** M:

$$(M^2 - 1)\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

Si riprende ora l'equazione di continuità,

$$\frac{dp}{dx} = -\rho u^2\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = -\frac{\rho u^2}{M^2 - 1}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

Posso cambiare di segno e ottenere la seguente relazione

$$(1 - M^2)\frac{dp}{dx} = \rho u^2\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

L'andamento della velocità dipende dunque dal profilo della conduttura: supponendo di avere un gas caldo con velocità molto piccola rispetto alla velocità del suono, il flusso subsonico comincia ad accelerare in una conduttura convergente in quanto se diminuisce l'area, aumenta la velocità. Se $\frac{dA}{dx} = 0$, non accelera, dunque il fluido ha la velocità del suono localmente e a destra della strozzatura il fluido può o continuare ad accelerare in maniera indefinita a velocità supersonica e diminuire la propria pressione, oppure può rallentare e aumentare la propria pressione rispetto all'ambiente esterno. Questo oggetto prende il nome di **strozzatura di De-Laval**.