Analisi

Tommaso Miliani

29-10-25

1 Campi Vettoriali e forme differenziali

Definizione 1.1 (Campo Vettoriale)**.**
*Dato un certo insieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$, si definisce **campo vettoriale** su $\mathbb{A}$ è una funzione*

$$F : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$$

Ogni punto dello spazio associa un elemento di $\mathbb{R}^3$ (che si può pensare come un vettore tridimensionale). Se il punto $(x, y, z) \in \mathbb{A}$, a questo punto il campo vettoriale associa il vettore

$$F(x, y, z) \to p \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z), \end{pmatrix}$$

Questa definizione è valida qualunque sia la dimensione di $\mathbb{R}$.

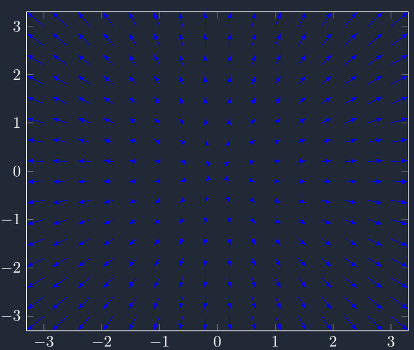
Esempio 1.1 (Massa punto materiale)**.**
Una massa puntiforme che si trova in un punto nello spazio generico $P = (x_0, y_0, z_0)$, e considerato il campo gravitazionale che ci agisce, il campo sarà definito come

$$F(x, y, z) = -cm \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2, (y - y_0)^2, (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ossia

$$\frac{(P - P_0)}{||P - P_0||^3}$$

Ossia tutti i vettori convergono verso il punto con massa.



Esempio 1.2 (Il campo di velocità di un corpo rigido)**.**
Il campo di velocità di un corpo rigido che ruota intorno all'asse z con velocità angolare ω, il campo di velocità della velocità angolare sarà dato da

$$v(x, y, z) = -\omega y \hat{\imath} + \omega x \hat{\jmath}$$

Esempio 1.3.
Se una funzione è definita come

$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$$

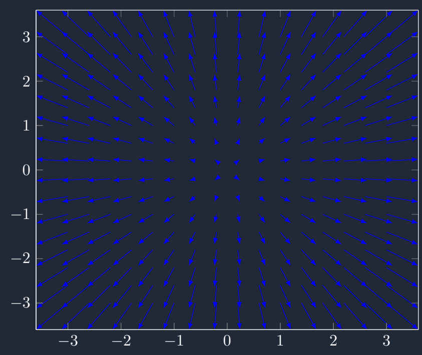
Ogni punto di $\mathbb{A}$ allora ∇f

$$\nabla f(x,y,z) := \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

SE

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \implies \nabla f = (2x, 2y, 2z)$$

E dunque



1.1 Forme differenziali

Sia V uno spazio vettoriale, si considera l'insieme delle applicazioni lineari da $V \to \mathbb{R}$. Questo insieme è lui stesso uno spazio vettoriale poiché le applicazioni lineari si possono sommare tra di loro e si possono moltiplicare tra di loro. Lo spazio della applicazioni lineari di uno spazio V e si indica con $V^\star$. Fissata una base canonica si sa che lo spazio duale di $\mathbb{R}^3$ è lo spazio dei vettori tale per cui

$$L \in \mathbb{R}^{3\star} \qquad \begin{aligned} a_1 &= L(e_1) \\ a_2 &= L(e_2) \\ a_3 &= L(e_3) \end{aligned}$$

E quindi

$$L(v) = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 \qquad v \in \mathbb{R}^{3\star} \qquad v = (v_1, v_2, v_3)$$

Si definisce una base di $\mathbb{R}^{3\star}$ come

$$\begin{aligned} dx_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad dx_1(v) = v_1 \\ dx_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad dx_2(v) = v_2 \\ dx_3 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad dx_3(v) = v_3 \end{aligned}$$

Allora L lo posso scrivere come combinazione lineare di questi elementi

$$L = a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3$$

Il simbolo dx_i (che di solito indicano gli incrementi infinitesimi di una certa variabile), sono invece elementi del duale di $\mathbb{R}^3$ che agiscono proiettando ogni componente sul relativo asse. Ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è scrivibile come l'operatore dx_i che sfrutta un certo L che può cambiare. Una forma differenziale è dunque una funzione che è definita su di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ e per ogni elemento di $\mathbb{R}^3$ associa un elemento di $\mathbb{R}^{3\star}$.

Definizione 1.2 (Forma differenziale)**.**
Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$, una forma differenziale ω definita su di $\mathbb{A}$ è una applicazione che

$$\omega : (x,y,z) \in \mathbb{A} \to L(x,y,z) \in \mathbb{R}^{3\star} \tag{1}$$

Di conseguenza, dalla definizione di L

$$L = a_1(x,y,z)dx_1 + a_2(x,y,z)dx_2 + a_3(x,y,z)dx_3$$

Posso costruire una forma differenziale se possiedo queste tre condizioni a_i ma posso anche ricavarmi le condizioni se conosco già la forma differenziale.

Osservazione 1.1.
Posso associare un campo vettoriale ad una forma differenziale e posso anche fare l'inverso.

$$\omega(x,y,z) = a_1(x,y,z)dx_1 + a_2(x,y,z)dx_2 + a_3(x,y,z)dx_3$$
$$\updownarrow$$
$$F(x,y,z) = (a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$$

Esempio 1.4.
Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziale e chiamo differenziale di f

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dx_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dx_3$$

Definizione 1.3.
*Sia $\omega : \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^{3\star}$, ω si dice **esatta** se $\exists f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ è differenziabile tale che*

$$\omega = df \tag{2}$$

Cioè se $\omega = a_1(x,y,z)dx_1 + a_2(x,y,z)dx_2 + a_3(x,y,z)dx_3$ e se $\exists f$ tale che

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

*tale f si chiama **primitiva**.*

Osservazione 1.2.
Se f è primitiva di ω anche $f + c$ lo è (ovviamente).

Definizione 1.4 (Campo conservativo)**.**
*Sia $F : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale e dunque $F = (F_1, F_2, F_3)$, F si dice **conservativo** se $\exists f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che f è il gradiente di questa funzione differenziabile:*

$$F = \nabla f \tag{3}$$

*La funzione f si chiama **potenziale** di F.*

Esempio 1.5.
Se $F(x,y,z)$ è il campo gravitazionale (visto prima), allora il campo è conservativo e un suo potenziale (primitiva) è

$$f(x,y,z) = \frac{cm}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Infatti, se si facesse

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -cm\frac{x - x_0}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Si otterrebbe

Osservazione 1.3 (Parallelismo tra campi e forme differenziali)**.**
Essere un campo conservativo equivale ad essere un differenziale esatto per una forma differenziale.

Non tutti i campi sono conservativi e non tutte le forme differenziali sono esatte. Alcuni esempi sono

Esempio 1.6.
Presa su $\mathbb{R}^2$ la forma differenziale

$$\omega(x,y) = 3x^2dx - xydy$$

Non è esatta, infatti, se lo fosse, dovremmo trovare una funzione f tale che $\omega = df$ e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -xy$$

Se questo fosse vero, allora potrei dire che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -y$$

Dato che le derivate parziali miste devono essere equivalenti (per le ipotesi del teorema di Cauchy Schwartz), allora non è possibile che sia esatta. Un altro modo per vederlo è cercare le primitive per la x e per la y

$$f(x,y) = x^3 + c(y)$$

Se questa fosse la f, allora la

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + c'(y)$$

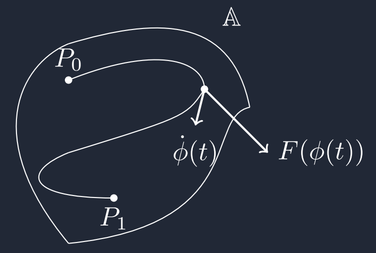
Questa dipenderebbe solo dalla y.

Osservazione 1.4.
Un campo su $\mathbb{R}^n$ è continuo in C^k se le sue componenti sono tutte continue in C^k. Con $k < n$.

2 Lavoro di un campo vettoriale

Presa una curva orientata γ il cui sostegno sia contenuto in $\mathbb{A}$, (ossia ha un verso di percorrenza ed è una curva). Si definisce allora il lavoro di un campo vettoriale lungo una curva orientata (o anche curvilineo di seconda specie).

Figura 1: Il lavoro su di una curva in un insieme $\mathbb{A}$



Definizione 2.1.
Sia γ regolare a tratti e sia F un campo continuo e sia $\phi[a,b] \to \mathbb{A}$ una parametrizzazione regolare a tratti di γ e concorde con l'orientazione di γ.

$$\phi(a) = P_0 \quad \phi(b) = P_1 \quad \tau(t) = \frac{\dot{\phi}(t)}{||\dot{\phi(t)}||}$$

SI definisce allora il ***lavoro*** *di F su γ come*

$$\int_a^b F(\phi(t)) \cdot \dot{\phi(t)}\ dt \tag{4}$$

Si può anche scrivere come

$$\int_\gamma \langle F, \tau \rangle\, dS \tag{5}$$

Dove in ogni punto della curva τ è tangente alla curva γ e concorde con l'orientazione della curva stessa. Questo è dovuto al fatto che

$$\int_\gamma \langle F, \tau \rangle\, dS = \int_a^b \langle F(\phi(t)), \tau(\phi(t)) \rangle\, ||\dot{\phi(t)}||\ dt$$

Dove

$$\tau(\phi(t)) = \frac{\dot{\phi(t)}}{||\dot{\phi(t)}||}$$

Si chiama dunque ***integrale curvilineo di seconda specie*** *oppure* ***lavoro di uhn campo su di una curva*** *che dipende dall'orientazione della curva (infatti se si percorresse la curva al contrario il lavoro sarebbe lo stesso ma dovrei cambiare il segno).*

Esempio 2.1.
Se $F(xy, y, 0)$, il lavoro sulla curva

$$\phi_1 = (\cos t, \sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$$

contenuta nel piano $\{z = 0\}$, allora il lavoro è nullo poiché (dato che la derivata della curva è $(-\sin t, \cos t, 0)$)

$$\int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\ dt$$

Dai conti, si vede che l'integrale è esattamente nullo