... riassunto della puntata precedente .....

... PENDOLO FISICO ....

$* \begin{cases} R \neq 0 & \text{con } R \ll \ell \\ m_f \neq 0 & \text{con } m_f \ll m \end{cases} \Rightarrow$ nuovo sistema fisico descritto come CORPO RIGIDO composto da

{ SBARRETTA RIGIDA (FILO) + SFERETTA RIGIDA, connessi rigidamente } ⇒ PENDOLO FISICO

⇒ Equazione di moto (per moto IDEALE):

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{L_{eq}} \sin\phi = 0$$

con $L_{eq} = L_{eq}(m, m_f, R, \ell) = F_c \cdot \ell$

LUNGHEZZA COSTANTE CARATTERISTICA DELLO SPECIFICO SISTEMA

perfetta analogia con eq. di moto per PENDOLO SEMPLICE IDEALE (P.S.I.)

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{\ell} \sin\phi = 0$$

⇒ pendolo fisico e ideale

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L_{eq}}\right) \sin\phi = 0$$

⇒ pendolo semplice e ideale

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{\ell}\right) \sin\phi = 0$$

⇒ **DUNQUE**, avendo l'eq. di moto del pendolo fisico e ideale esattamente la STESSA FORMA di quella CHE ABBIAMO STUDIATO IN DETTAGLIO del pendolo semplice e ideale,

PER IL PENDOLO FISICO e IDEALE VARRANNO, SOSTITUENDO LA LUNGHEZZA COSTANTE L_{eq} AL POSTO DI ℓ DEL PENDOLO SEMPLICE e IDEALE, TUTTE LE CONSIDERAZIONI FATTE E I RISULTATI OTTENUTI NELLO STUDIO DEL PENDOLO SEMPLICE IDEALE

⇒ varranno in particolare le RELAZIONI RICAVATE PER IL PERIODO DEL MOTO .....

⇒

⟹ indicheremo col pedice "s" le quantità riferite al PENDOLO SEMPLICE
e col pedice "f" quelle relative al PENDOLO FISICO

⟹ Ricordando che per il PENDOLO SEMPLICE e IDEALE era

$$T_{0_s} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad e \quad T_s = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\cdot \mathcal{F}(\phi_0) = T_{0s}\cdot \mathcal{F}(\phi_0),$$

potremo scrivere per il PENDOLO FISICO e IDEALE:

$$T_{0f} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \quad e \quad T_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}}\cdot \mathcal{F}(\phi_0) = T_{0f}\cdot \mathcal{F}(\phi_0)$$

dove

$$L_{eq} = \frac{I_0}{m\ell + m_f\frac{L_f}{2}} = \frac{m\left(\ell^2+\frac{2}{5}R^2\right) + m_f\frac{L_f^2}{3}}{m\ell + m_f\frac{L_f}{2}}$$

(sostituendo I_0)

* Ponendoci l'obbiettivo di confrontare i periodi nelle due schematizzazioni ("semplice" e "fisico"), è necessario procedere con un'analisi di $L_{eq} = L_{eq}(m, m_f, R, \ell, L_f)$ ....

⟹

$$\Rightarrow \quad L_{eq} = \frac{m\left(\ell^2 + \frac{2}{5}R^2\right) + m_f \frac{L_f^2}{3}}{m\ell + m_f \frac{L_f}{2}}$$

$\Rightarrow$ riscriviamola dividendo numeratore e denominatore per m ....

$$L_{eq} = \frac{\ell^2 + \frac{2}{5}R^2 + \frac{m_f}{m}\frac{L_f^2}{3}}{\ell + \frac{m_f}{m}\frac{L_f}{2}} = \frac{\ell^{\cancel{2}}\left[1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{m_f}{m}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{L_f^2}{\ell^2}\right]}{\cancel{\ell}\left[1 + \frac{m_f}{m}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{L_f}{\ell}\right]}$$

$$\Downarrow$$

$$L_{eq} = \left[\frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m}\left(\frac{L_f}{\ell}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{m}\cdot\frac{L_f}{\ell}}\right]\cdot\ell$$

check:

$\Rightarrow$ se $\left.\begin{matrix} R \to 0 \\ m_f \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow L_{eq} \to \ell$

OK!!

$$= F_c \cdot \ell \quad \text{con} \quad F_c = \frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m}\left(\frac{L_f}{\ell}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{m}\left(\frac{L_f}{\ell}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad L_{eq} = F_c \cdot \ell$$

$\Rightarrow$ analizziamo dunque F_c nei suoi vari termini.

TENENDO CONTO delle NOSTRE CONDIZIONI SUI PARAMETRI DEL PENDOLO FISICO (che rappresentano le condizioni di LABORATORIO!) $\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ R \ll \ell \\ \bullet\ m_f \ll m \end{cases}$

$\Rightarrow$ • tutti i termini in cui compaiono i parametri sono $\ll 1$ ....

• ai fini della presente analisi possiamo porre $L_f \simeq \ell$ e quindi $\frac{L_f}{\ell} \simeq 1$ nei termini in cui L_f compare $\Rightarrow$

infatti:
* $L_f = \ell - R = \ell\left(1 - \frac{R}{\ell}\right) \simeq \ell \quad (R \ll \ell)$
* $\frac{L_f}{\ell}$ compare in termini COMUNQUE $\ll 1$, poichè $\frac{m_f}{m} \ll 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{L_{eq}}{\ell} = F_c \simeq \frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m}}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{m}}$$

$$\frac{L_{eq}}{\ell} = F_c \simeq \frac{1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m}}{1 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{m}} \qquad (\ell = \overline{OC})$$

$\Rightarrow$ torniamo alle espressioni per i PERIODI nelle due schematizzazioni:

$$\begin{cases} * \text{ PENDOLO FISICO: } & T_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) = T_{of} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) \quad \text{con } T_{of} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \\ * \text{ PENDOLO SEMPLICE: } & T_s = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) = T_{os} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) \quad \text{con } T_{os} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{F_c \cdot \ell}{g}} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \sqrt{F_c} \cdot \mathcal{F}(\phi_0) = \left[2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot \mathcal{F}(\phi_0)\right] \cdot \sqrt{F_c}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{T_f = T_s \cdot \sqrt{F_c}}$ e, similmente, $\boxed{T_{of} = \left[2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] \cdot \sqrt{F_c} = T_{os} \cdot \sqrt{F_c}}$

$\Rightarrow$ possiamo ulteriormente approssimare e semplificare il termine $\sqrt{F_c}$, che DEFINISCE LA DIFFERENZA FRA I PERIODI NELLE DUE SCHEMATIZZAZIONI, sempre tenendo conto delle nostre condizioni $\Rightarrow \{R \ll \ell \;,\; m_f \ll m\}$

$$\Rightarrow \sqrt{F_c} = \left[1 + \left(\frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_f}{m}\right)^{-\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x')^{-\frac{1}{2}}$$

avendo posto $\begin{cases} x = \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{3}\frac{m_f}{m} \ll 1 \\ x' = \frac{1}{2}\frac{m_f}{m} \ll 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{F_c} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+x')^{-\frac{1}{2}} \simeq$$
$$\simeq \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x'}{2}\right) =$$
$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} - \cancel{\frac{x x'}{4}}$$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{x}{2} + \dots$ per $x \ll 1$

$(1+x')^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{x'}{2}$ per $x' \ll 1$

termine di ordine superiore rispetto ai termini lineari in x e x' $\Rightarrow$ TRASCURABILE!

$\Downarrow$

$$\sqrt{F_c} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x'}{2} = 1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} + \frac{1}{6}\frac{m_f}{m} - \frac{1}{4}\frac{m_f}{m} = 1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}$$

$\Rightarrow$ con le condizioni $R \ll \ell$ e $m_f \ll m$, possiamo esprimere $\sqrt{F_c}$ come

$$\boxed{\sqrt{F_c} \simeq 1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m} \simeq \frac{T_f}{T_s} = \frac{T_{of}}{T_{os}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{F_c} \simeq 1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m} \simeq \frac{T_f}{T_s} = \frac{T_{of}}{T_{os}}}$$

per $\begin{cases} R \ll \ell \\ m_f \ll m \end{cases}$

abbiamo così ricavato l'espressione finale della parte dominante del rapporto fra i PERIODI NELLE DUE SCHEMATIZZAZIONI (pendolo FISICO ideale e pendolo SEMPLICE ideale), espressione semplificata attraverso le approssimazioni fatte, ma ben rappresentativa delle differenze previste dalle due schematizzazioni QUANDO VALE $\{R \ll \ell,\ m_f \ll m\}$.

$\Rightarrow$ Abbiamo adesso anche gli strumenti QUANTITATIVI per confrontare le due schematizzazioni e valutare, in relazione alle caratteristiche della configurazione sperimentale in cui operiamo, se gli "effetti di pendolo fisico" possono o meno incidere sulla descrizione della nostra esperienza

($\Rightarrow$ ...verificare se per noi la schematizzazione di Pendolo Semplice e ideale è adeguata alla descrizione del moto del pendolo in laboratorio...)

$$* \quad T_f \simeq T_s \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right)$$

$$T_{of} \simeq T_{os} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right)$$

* CONFRONTIAMO LE DUE SCHEMATIZZAZIONI...

⇒ il nostro scopo è valutare la differenza fra l'uso della schematizzazione di PENDOLO SEMPLICE IDEALE o di quella di PENDOLO FISICO IDEALE per la descrizione del moto del pendolo in laboratorio, ovvero per interpretare i PERIODI che misuriamo

⇒ ci servirà per confrontare le due schematizzazioni in relazione alle caratteristiche di precisione della misura...

* ERRORE DI SCHEMATIZZAZIONE RELATIVO

⇒ differenza relativa fra i periodi nelle due schematizzazioni

⇒ la ricaviamo partendo dai risultati...

$$\boxed{T_f = T_s \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right) \qquad T_{0f} = T_{0s} \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right)}$$

⇓

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,\,schem} = \frac{|T_f - T_s|}{T_s} = \frac{\left|T_s \cdot \left(1 + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right) - T_s\right|}{T_s} = \frac{\cancel{T_s}}{\cancel{T_s}}\left|\left(\cancel{1} + \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m} - \cancel{1}\right)\right|$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,\,schem} = \left|\underbrace{\frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2}}_{\text{termine dovuto alla dimensione finita della sferetta}} - \underbrace{\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}}_{\text{termine dovuto alla massa finita del filo}}\right|}$$

[* NOTA: $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,\,schem} = \frac{|T_f - T_s|}{T_s} = \frac{|T_{0f} - T_{0s}|}{T_{0s}}$!!]

⇒ anche in questo caso per comprendere se la differenza nei periodi prevista dalle due schematizzazioni a confronto è RILEVABILE e SIGNIFICATIVA in ambito SPERIMENTALE, occorrerà confrontare $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,\,schem}$ con l'incertezza sperimentale relativa della misura $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper}$

* CONFRONTO CON LE CONDIZIONI SPERIMENTALI

... concettualmente

* $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,schem} \ll \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper.} \Rightarrow$ SCHEMATIZZAZIONE DI PENDOLO SEMPLICE ADEGUATA: differenze trascurabili rispetto all'incertezza e dunque NON SIGNIFICATIVE NÉ SENSIBILI

* $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,schem} > \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper.} \Rightarrow$ DIFFERENZA SENSIBILE E RILEVABILE RISPETTO ALL'INCERTEZZA DI MISURA $\Rightarrow$ occorre ADOTTARE LA DESCRIZIONE DI PENDOLO FISICO

$\Rightarrow$ PER LA NOSTRA ESPERIENZA $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper.} \simeq 10^{-3} \div 2\times10^{-3}$

- diamo ESEMPLIFICATIVAMENTE una valutazione dei due termini di $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,schem}$ per ordine di grandezza, utilizzando valori esemplificativi e rappresentativi del nostro caso in lab. per i parametri fisici in gioco ....

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f.schem} = \left|\frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right| \Rightarrow$$

Esaminiamo i due termini separatamente...

* $\frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\ell \simeq 2\times10^2\,cm\\ R \simeq 2\,cm\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R}{\ell} \simeq \frac{2\,\cancel{cm}}{2\times10^2\,\cancel{cm}} = 10^{-2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{5}\left(\frac{R}{\ell}\right)^2 \simeq \frac{1}{5}\times10^{-4} = 2\times10^{-5}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} \sim 2\times10^{-5} \ll 1\div2\times10^{-3} = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper.}$$

$\Rightarrow$ termine senza dubbio TRASCURABILE rispetto a $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper} \Rightarrow$ IPOTESI DI MASSA PUNTIFORME SICURAMENTE BEN VERIFICATA PER LA NOSTRA CONFIG. DI LAB. !!

* $\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} m_f \sim 5g \\ m \simeq 5\times10^2 \div 10^3 g \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}\frac{m_f}{m} \begin{cases} \simeq \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{5\times10^2} \simeq \frac{1}{12}\times10^{-2} \simeq 0.08\times10^{-2} \simeq 8\times10^{-4} \\ \simeq \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{10^3} \simeq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{5\times10^2} \simeq \frac{8\times10^{-4}}{2} = 4\times10^{-4} \end{cases}$$

- in generale anche questo termine è trascurabile, essendo $< \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper}$ anche per le sferette di massa minore ($\simeq 500g$)

$\Rightarrow$ l'effetto della massa del filo, però, risulta più rilevante di quello della distribuzione di massa della sferetta $\left(\frac{1}{5}\frac{R^2}{\ell^2} \sim 2\times10^{-5} !!\right)$

$\Rightarrow$ se dovessi ottenere nella mia misura di PERIODO una precisione migliore $\left[\text{cioè } \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{sper} < 10^{-3}\right]$, potrei prendere in considerazione l'idea di valutare lo specifico valore di $-\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}$ (specialmente per pendoli con $m \simeq 500g$)

ed, eventualmente, di includere l'effetto nella trattazione con $\sqrt{F_c} \sim 1 - \frac{1}{12}\frac{m_f}{m}$

$\Rightarrow$ in laboratorio, anche il termine $-\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}$ tipicamente risulterà trascurabile $\Rightarrow$ procederete ADOTTANDO LA SCHEMATIZZAZIONE DI PENDOLO SEMPLICE in moto IDEALE.

* prima di concludere questa discussione sugli "effetti" di pendolo fisico, può essere interessante VALUTARE come l'ERRORE DI SCHEMATIZZAZIONE $\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{f,schem}$ può eventualmente INCIDERE sulla VALUTAZIONE di g....

$\Rightarrow$ EFFETTO SU g ?

* supponiamo che l'effetto della massa $m_f \neq 0$ NON sia trascurabile
$\Rightarrow$ in tal caso la corretta schematizzazione richiederebbe di uguagliare il periodo T MISURATO a $T_f \Rightarrow T_{mis} = T_f$ e $(T_o)_{mis} = T_{of}$
$\Rightarrow$ denominiamo g valutato in questo modo come

$g_{VERO} \Rightarrow g_{VERO} = g(T_{of})$

$\Rightarrow$ poiché $T_{of} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{ef}}{g_{vero}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{vero}}}\cdot\sqrt{F_c} \simeq \boxed{2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{VERO}}}\cdot\left(1-\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right) \simeq T_{of}},$

allora $\boxed{g_{VERO} = \frac{4\pi^2\ell}{T_{of}^2}\cdot\left(1-\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right)^2}$ (con $\frac{1}{12}\frac{m_f}{m} \ll 1$)

$\Rightarrow$ operando correttamente, in questo caso, sarebbe $(T_o)_{mis} = T_{of}$
e dunque

$$\boxed{g_{VERO} = \frac{4\pi^2\ell}{(T_o)^2_{mis}}\left(1-\frac{1}{12}\frac{m_f}{m}\right)^2 \simeq \frac{4\pi^2\ell}{(T_o)^2_{mis}}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\frac{m_f}{m}\right)}$$

$(1-x)^2 \simeq 1-2x+\ldots$ per $x \ll 1$

$\Rightarrow$ MA SE, IN QUESTE STESSE CONDIZIONI, adottassi la schematizzazione di pendolo semplice ideale, LO STESSO $(T_o)_{mis}$ dovrebbe essere uguagliato a T_{os}, da cui $\Rightarrow (T_o)_{mis} = T_{os} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$
e dunque si otterrebbe $g = g_s = \frac{4\pi^2\ell}{(T_o)^2_{mis}}$

il pedice "s" indica che la stima di g è quella fatta nella schem. di PENDOLO SEMPLICE e IDEALE

$\Rightarrow$ CONFRONTIAMO g_{VERO} e g_s $\Rightarrow$

$$g_{VERO} \simeq \left[\frac{4\pi^2\ell}{(T_o)^2_{mis}}\right]\cdot\left(1-\frac{1}{6}\frac{m_f}{m}\right) = g_s\left(1-\frac{1}{6}\frac{m_f}{m}\right) \Rightarrow \boxed{g_{VERO} = g_s\left(1-\frac{1}{6}\frac{m_f}{m}\right)}$$

* $\boxed{g_{VERO} < g_s}$ (misurato nell'interpret. di pendolo semplice ideale)
$\Rightarrow$ adottando la schematizzazione di Pendolo Semplice in moto ideale in questo caso SOVRASTIMEREI la misura di g, con

$\left(\frac{\delta g}{g}\right)_{schem} \simeq \frac{1}{6}\frac{m_f}{m} \simeq 1.6\times10^{-3}$ ....
al più...