

1 16/12/25

1.1 Serie di funzioni

Definizione 1.1.

$$\{f_k\} \subseteq \mathcal{F}_I \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \in \mathcal{F}_I$$
$$\sum_0^{+\infty} f_k(x) \text{ serie} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \quad (\mathcal{F}_I; \text{norma})$$

Definizione 1.2.

$\sum_0^{+\infty} f_k$ converge puntualmente a $S(x)$ se $S_n(x) \rightarrow S(x)$ puntualmente in I
 $\sum_0^{+\infty} f_k$ converge assolutamente a $S(x)$ se $\sum_0^n |f_k(x)| \rightarrow S(x)$ puntualmente
 $\sum_0^{+\infty} f_k$ converge uniformemente a $S(x)$ se $S_n(x) \rightarrow S(x)$ uniformemente in I
 $\sum_0^{+\infty} f_k$ converge totalmente a $S(x)$ se $\exists \{M_n\} \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $|f_n(x)| \leq M_n \forall x \in I$ e $\sum_0^{+\infty} M_n$ converge
quest'ultima vuol dire anche che $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge.

Teorema 1.1.

$\sum f_k$ converge totalmente $\xRightarrow{\in I}$ converge uniformemente in I $\xRightarrow{\in I}$ converge puntualmente in I .

Teorema 1.2.

- continuità della somma.

$$\{f_k\} \subseteq C^0(I), \sum f_k(x) \Rightarrow S(x) \in I \implies S(x) \in C^0(I)$$

- Integrazione per Serie

$$I = [a, b], \{f_k\} \subseteq C^0(I), \sum f_k(x) \xrightarrow{I} S(x) \in I \implies \int_a^b S(x) dx = \sum_0^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

- Derivazione per Serie

$$I = [a, b], \{f_k\} \subseteq C^1(I), \sum f_k(x) \xrightarrow{I} S(x) \in I, \sum f'_k(x) \Rightarrow G(x) \in I \implies S(x) \in C^1(I), S'(x) = \sum f'_k(x) \quad \forall x$$

Esempio 1.1.

$$\sum_0^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

a) studiare la conv. puntuale e totale

b) detta $S(x)$ la somma della serie, calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$

Punto a)

$$f_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{2^n}{3^n} x \frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}$$

Per x fissato ha segno (definitivamente) costante (quindi posso applicare il th del confronto)

$$\sum f_n \text{ ha lo stesso carattere di } \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ che converge}$$
$$\implies \sum f_n(x) \text{ converge puntualmente } \forall x \in \mathbb{R}$$

Voglio studiare la convergenza totale

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} 2^n \left| \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) \right| \leq 2^n$$

Così non funziona dobbiamo trovare una maggiorazione meno grossolana

considero $I = [a, b]$ invece che come prima $I = \mathbb{R}$

$$\underbrace{\leq}_{|\sin(t)| \leq |t|} 2^n \sup_{x \in I} \frac{|x|}{3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sup_{x \in I} |x|$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^n \max\{|a|, |b|\} := M_n$$

$$\sum M_n \text{ converge} \implies \sum f_n \text{ converge totalmente in } [a, b] \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Per provare che non c'è convergenza totale cerco $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ t.c. $\sum f_n(x_n)$ non converge

es. $\{x_n\} = \{3^n\} \subseteq \mathbb{R}$ $f_n(3^n) = 2^n$ con $\sum 2^n$ diverge

Punto b)

Oss. 1.1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \stackrel{?}{=} S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{0}{3^n}\right) = 0$$

$S(x) \in C^0$ ($\{x=0\}$) poichè $\sum f_n$ converge totalmente in $[-a, a]$ e quindi $\sum f_n$ converge uniformemente, il th. di continuità del limite garantisce $S(x) \in C^0([-a, a])$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \stackrel{se \exists}{=} S'(0) = \sum_0^{+\infty} f'_k(0) = \sum_0^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} \cancel{\cos\left(\frac{0}{3^n}\right)} = 1$$

l'ultimo passaggio abbiamo usato il th. di derivazione per Serie

Da questo:

$\sum f_k$ converge puntualmente a $S(x)$ ✓

$\sum f'_k \Rightarrow G \in I$ ✓

$\implies S'(x) = \sum f'_k(x)$

$$|f'_k(x)| = \left| \frac{2^n}{3^n} \cos\left(\frac{x}{3^n}\right) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \implies \sup_{x \in [-a, a]} |f'_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = M_n$$

$\implies \sum f'_k$ converge totalmente in $[-a, a]$ quindi converge uniformemente, inoltre: $\sum M_n \text{ conv}$

$$= \sum_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

1.2 serie di potenze

Definizione 1.3.

$\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ serie di potenze di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$

Oss. 1.2.

posso supporre $x_0 = 0$ $y = x - x_0$ considerando $\sum a_n y^n$

Oss. 1.3.

$\sum a_n x^n$ converge in $x = 0$ sempre (poichè $S_n(0) = a_0$)

Teorema 1.3.

$\exists \xi \neq 0$ t.c. $\sum a_n x^n$ converge in ξ

\implies la serie converge totalmente in $[a, b]$ $\forall [a, b] \subseteq (-|\xi|, |\xi|)$

e quindi converge puntualmente in $(-|\xi|, |\xi|)$

Oss. 1.4.

$(-|\xi|, |\xi|) \subseteq L$ insieme di convergenza

Dimostrazione.

sia $\eta \in (-|\xi|, |\xi|)$

$I = [-\eta, \eta] \in I$

$$|a_n x^n| = \underbrace{|a_n \xi^n|}_{M_n} \left| \frac{x}{\xi} \right|^n := M_n \text{ e oss. che } \sum M_n \text{ conv. } \left(\left| \frac{\eta}{\xi} \right| < 1 \right)$$

$$\exists M \text{ t.c. } \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum a_n x^n \text{ converge totalmente } \in I = [-\eta, \eta]$$

□

Oss. 1.5.

$(-|\xi|, |\xi|)$ L'insieme di convergenza di una serie di potenze

Definizione 1.4.

$$\rho := \sup \{ \xi \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{ conv. in } \xi \}$$

Detto raggio di convergenza della serie di potenze

$$\rho = \begin{cases} +\infty \leftrightarrow \sum a_n x^n \text{ conv. } \forall x \in \mathbb{R} \\ = R \in \mathbb{R} \\ = 0 \leftrightarrow \sum a_n x^n \text{ conv. solo per } x = 0 \end{cases}$$

Teorema 1.4.

$\rho = R \leftrightarrow$

$$\sum a_n x^n \text{ converge se } |x| < R$$

$$\sum a_n x^n \text{ non converge se } |x| > R$$

Con $R :=$ raggio di convergenza

Oss. 1.6.

per $|x| = R$ non si sa nulla in generale

parte 1 \Rightarrow . $\exists \xi \in \mathbb{R} : |x| < |\xi| \leq R$ e $\sum a_n \xi^n$ converge.

Dal th. prec si ha convergenza in $(-|\xi|, |\xi|)$ quindi anche in x (poichè converge in $-|x|$ e $|x|$)

sia $\xi : \xi > R$ suppongo $\sum a_n \xi^n$ converge \implies dal th. prec. $\sum a_n \xi^n$ converge anche in x t.c. $R < x \leq \xi$ è assurdo perchè $R = \sup \{ \dots \}$

[parte 2 \Leftarrow] $\sum a_n x^n$ conv per $|x| < \rho$ o non conv per $|x| > \rho$ (vogliamo dimostrare $\rho = R$)

- se $x \in (-\rho, \rho)$ dal th. prec. si ha $x \leq \sup \{ \dots \} = R \quad \forall x \in (-\rho, \rho) \implies \rho \leq R$
- se fosse $\rho < R \quad \exists \rho < \xi < R$ con $\sum a_n \xi^n$ converge dal th. prec. Ma per hp. $\sum x_n \xi^n$ non converge per $|x| > \rho$ quindi $\rho = R$

Oss. 1.7.

$(-R, R) \subseteq$ l'insieme di convergenza ed è un intervallo

□

Teorema 1.5 (di Cauchy-Hadamard).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \ell := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

allora:

- se $\ell = 0 \implies R = +\infty$
- se $\ell = +\infty \implies R = 0$
- $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \implies R = \frac{1}{\ell}$

Dimostrazione.

$$\text{casi possibili: } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \end{cases}$$

caso 1: $\ell = 0$

$$\bullet \text{ sia } x \neq 0 \lim \sqrt[k]{|a_k|} |x|^k = |x| \cdot \ell = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = 0 \\ +\infty & \text{se } \ell = +\infty \\ |x| \cdot \ell & \text{se } \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \end{cases} \quad \text{caso 2: } \ell = +\infty$$

• se $\ell = 0$ il criterio della radice per la serie numerica $\sum |a_n| |x|^n$ garantisce la convergenza.

• se $\ell = +\infty$ il criterio della radice per la serie numerica $\sum |a_n| |x|^n$ garantisce la divergenza.

• **caso 3:** $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$

il criterio della radice fa sì che la serie converga se $\ell|x| < 1$ e non converga se $|x| > \frac{1}{\ell}$

Dal th. 1.4 segue $R = \frac{1}{\ell}$

□

Esempio 1.2.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n$$

Un esempio su foto.

2 17/12/25

2.1 limiti superiori

si indicano con $\overline{\lim} a_n = \max\{\lim a_{n_k}\}$

Esempio 2.1.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{2n} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots$$

Serie di potenze $\leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

I)

$y = x^2$ considero $\sum 2^k y^k$ è serie potenza $a_k = 2^k$

questa serie converge per la $y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ne deduco quello per x .

$$\frac{-1}{2} < x^2 < \frac{1}{2} \implies -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

II)

$$\sum a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots$$

$$a_k = \begin{cases} 2^n & k = 2n \text{ quindi } k \text{ pari} \\ 0 & k = 2n + 1 \text{ quindi } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\underbrace{\overline{\lim}}_{\limsup_{n \rightarrow \infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ (2^n)^{\frac{1}{2n}} & k = 2n \end{cases} = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \sqrt{2} & k \text{ pari} \end{cases}$$

Esempio 2.2.

$$\sum_0^{+\infty} 2^n x^{n^2} = 1 + 2x + 4x^4 + 8x^9 + 16x^{16} + \dots$$

è serie di potenze $\sum a_k x^k$

$$a_k = \begin{cases} 2^n & k = n^2 \\ 0 & k \neq n^2 \end{cases} \text{ quindi se non è un quadrato perfetto}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \neq n^2 \\ (2^n)^{\frac{1}{n^2}} = 2^{\frac{1}{n}} & k = n^2 \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$R = 1$$

Quindi ho il raggio di convergenza $= 1$ e converge nell'aperto $I_{\text{conv}} = (-1, 1)$ di conseguenza ho $I_{\text{non conv}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Teorema 2.1 (derivazione serie di potenze).

$\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ $R = \text{raggi di convergenza}$

allora: la serie derivata $\sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ha ancora raggio di convergenza R .

Oss. 2.1.

$$x^{k-1} = \frac{x^k}{x}$$

Teorema 2.2 (di derivazione e integrazione per serie di potenze).

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ con $R \neq 0$ raggio di convergenza, e $S(x) = \sum a_n x^n$ per $x \in I$

allora: $S'(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x : |x| < R$ cioè in $\overset{\circ}{I}$

e $\int_0^x S(t) dt = \sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x : |x| < R$

Dimostrazione.

segue dal teorema della serie derivate e dalla convergenza uniforme della serie di potenze in $[a, b] \subseteq (-R, R)$ + valgono i teoremi di derivazione e integrazione per serie di funzioni applicati a:

$$S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

□

Esempio 2.3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n 2^n x^n \quad R = \frac{1}{2}$$

$$I_{\text{conv}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Oss. 2.2.

$$x(2^n x^n)' = n 2^n x^n \text{ quindi } \sum n 2^n x^n = \sum x(2^n x^n)' = \boxed{x \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n x^n)'} = x \cdot S'(x)$$

dove $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$ (serie geometrica nota) e quindi:

$$= x \cdot S'(x) = x \cdot \left(\frac{1}{1-2x} \right)' = x \cdot \frac{2}{(1-2x)^2} = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

Teorema 2.3 (di Abel).

Preso: $\sum a_n x^n$ con $R > 0$ e $\sum a_n R^n$ converge

allora: $\sum a_n x^n$ converge uniformemente in $[0, R]$ e la somma è C^0 per $x \rightarrow R$

Problema 2.1.

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n \stackrel{?}{=} \sum (a_n + b_n) x^n$$

Soluzione 2.1.

Vale quando:

$a_n x^n$ converge \leftrightarrow converge $|x| < R_1$

$b_n x^n$ converge \leftrightarrow converge $|x| < R_2$

e definisco $R := \min\{R_1, R_2\}$

Dimostrazione. vediamo di dimostrare questo fatto.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum a_n x^n \quad g(x) \\ g(x) &= \sum b_n x^n \\ S_N &= \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=0}^N b_n x^n \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che $\lim S_N = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} |S_N(x) - (f(x) - g(x))| &= \left| \sum_0^N a_n x^n - f(x) + \sum_0^N b_n x^n - g(x) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_0^N a_n x^n - f(x) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ se } |x| < R} + \underbrace{\left| \sum_0^N b_n x^n - g(x) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ se } |x| < R} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.4.

$\sum a_n x^n$ con $R \neq 0$ raggio di convergenza e $f(x) = \sum a_n x^n$ per $x \in I = (-R; R)$

allora: $f \in C^\infty(\dot{I}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$ si ha:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1) a_k x^{k-m} \text{ in } \dot{I}$$

e in particolare:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{cioè} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Dimostrazione. Si applica il teorema di derivazione per serie m-volte:

Calcolo:

$$f^{(m)}(0) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2) \dots (k-m+1) a_k x^{k-m} \Big|_{x=0} = m(m-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_m = m! a_m$$

□

Definizione 2.1.

Si chiama serie di Taylor di $f \in C^\infty$ centrata in x_0 :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = S_{T, x_0}$$

Oss. 2.3.

sia $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n \quad x \in (a, b)$
allora $\forall I_{x_0} \subseteq (a, b), |x - x_0| < \rho$ si ha:

- f è ∞ -derivabile per $|x - x_0| < \rho$
- $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se $f(x)$

Quindi f è sviuppabile in serie di Taylor se $f(x)$ stessa è uguale alla sua serie di Taylor

Oss. 2.4.

se f è ∞ -derivabile e $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ convergente $\not\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

Esempio 2.4.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ f \infty\text{-deriv.in } \mathbb{R} & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0$$

ma $f(x) \neq \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$ poichè $f \not\equiv 0$

Teorema 2.5 (criterio di sviluppabilità in serie di Taylor).

Presa f ∞ -derivabile in (a, b) ed $\exists M, L > 0 : |f^{(k)}(0)| \leq ML^k \quad \forall x \in (a, b)$

allora: $\forall x_0 \in (a, b) f$ è Taylo-sviluppabile di centro $x_0 \in (a, b)$

cioè $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (a, b)$

Esempio 2.5.

Sviluppare in un intorno di $x_0 = 0$ e calcolare $g^{17}(0)$ della funzione:

$$g(x) := \ln(1 + x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$$

$$g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n dt \stackrel{\text{th. di integ. per serie pot.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad n+1 =$$

Andiamo ora a calcolare la derivata 17-esima in 0:

$$g^{17}(0) = 17! \cdot a_{17} = 17! \cdot \frac{(-1)^{18}}{17} = 16!$$

Esempio 2.6.

Calcolare il valore di π con un errore massimale di ε assegnato.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Sappiamo che:

$$\arctan(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n dt \stackrel{\text{th. di int.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} \Big|_0^1 \stackrel{|x| \leq 1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Ho quindi che $\arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} + \underbrace{R_N}_{< \varepsilon}$

$$\begin{aligned} \text{Con } |R_N| &= \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)+1} + \frac{(-1)^{N+2}}{2(N+2)+1} + \frac{(-1)^{N+3}}{2(N+3)+1} \right| \\ &\leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)+1} \right| = \frac{1}{2(N+1)+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Questa è piccola a piacere proprio perchè la serie $\frac{1}{2n+1}$ è decrescente.

Curiosità:

$$\pi = 48 \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

Esempio 2.7.

Data questa serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - (-1)^n 3^n) x^{n^2}$$

Determinare I_{conv} e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$

Si vede intanto che è serie di potenze $\sum a_k x^k$

$$a_k = \begin{cases} 2^n - (-1)^n 3^n & k = n^2 \\ 0 & k \neq n^2 \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \neq n^2 \\ (2^n - (-1)^n 3^n)^{\frac{1}{n^2}} & k = n^2 \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |2^n - (-1)^n 3^n|^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{3^{\frac{1}{n}}}^{\rightarrow 1} \underbrace{\left| \left(\frac{2}{3}\right)^n - (-1)^n \right|}_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n^2}} < | \cdot | < 2^{\frac{1}{n^2}}} = 1$$

$$R = 1$$

Quindi $(-1, 1) \subseteq I_{\text{conv}}$ poichè per $x = 1$ non converge $x = -1$ neanche.

Passo ora al secondo punto dell'esercizio cioè calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$:

$$S(x) = 0 + (2 - (-3))x^1 + (4 - 9)x^4 + R_N(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + (-5)x^4 + o(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 + (-5)x^3 + \frac{o(x^2)}{x} = 5 + 0 + 0 = 5$$

Esempio 2.8.

Data la serie di potenze generica:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ed è dato che il raggio di convergenza è $R = 1$.

• Sapendo che $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = L \in \mathbb{R}$ si può dire che $\sum a_n$ converge?

Sospetto che la risposta sia no (poichè dal th. di Abel vale il contrario ma non viceversa) e cerco un controesempio:

$$S(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Il limite per $x \rightarrow 1^-$ è:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Ma la serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

non converge.

Quindi la risposta è no. • Mi chiedo ora:

$\sum |a_n| < +\infty \stackrel{?}{\implies} \exists \text{ finiti } \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$
 Qua mi aspetto che la risposta sia sì ma devo dimostrarlo:

$$\sum |a_n| \text{ conv. } \implies \sum a_n x^n I_{\text{conv}} = [0, 1]$$

Inoltre converge totalmente in $[-1, 1]$ che implica che converge uniformemente in $[-1, 1]$
 Quindi vale il theorema di continuità della somma il che implica che:

$$S(x) \in C^0([-1, 1])$$

• Adesso ancora mi chiedo $\sum a_n$ div. con $a_n \geq 0$ si può dire che $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$
 Di nuovo mi aspetto che sia vero ma devo dimostrarlo:
 fisso $M > 0$

$$S(x) = \sum a_n x^n \geq \sum_0^k a_n x^n \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum a_n \text{ div. } \implies \exists k_m : \sum_0^{k_m} a_n > M$$

$$\text{sia } \delta > 0 : 1 - \delta < x < 1, (1 - \delta)^{k_n} > \frac{1}{2}$$

Di conseguenza:

$$\sum_0^k a_n \underbrace{x^n}_{> (1-\delta)^k} > (1 - \delta)^{k_n} \sum_0^{k_n} a_n > \frac{1}{2} 2M = M$$