Anal

Tommaso Miliani

30-10-25

1 Integrale di una forma differenziale

Sia $\omega : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^{3\star}$ una forma differenziale continua. Se

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 + dx_3$$

Quando dico che la forma differenziale è continua, intendo che a_i siano funzioni continue. Sia inoltre γ una curva orientata con supporto contenuto in $\mathbb{A}$ regolare a tratti, e sia $\phi(t) : [a, b] \to \mathbb{A}$ una sua parametrizzazione concorde con l'orientazione. Si definisce

$$\int_\gamma = \int_\gamma \cos(x)(\tau(x))\ dS$$

Dove x è un punto della curva. Posso vedere in questo punto il vettore tangente concorde con il verso della curva che indico con $\tau(x)$ dunque l'integrale è un numero in quanto l'applicazione lineare $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ corrispondente ad x applicata a $\tau(x)$.

$$\int_a^b \omega(\phi(t)) \left(\frac{\dot\phi(t)}{\|\phi(t)\|}\right) \left\|\dot\phi(t)\right\|\ dt$$

Ossia è come fare

$$\int_a^b (a_1(\phi(t))dx_1 + a_3(\phi(t))dx_3 + a_3(\phi(t))dx_3) \left(\dot\phi(t)_1, \dot\phi(t)_2, \dot\phi(t)_3\right)\ dt$$

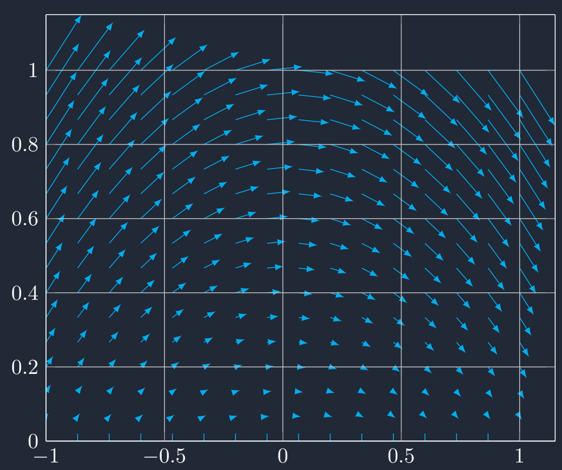
$$\int_a^b a_1(\phi(t))\dot\phi(t) + a_2(\phi(t))\dot\phi_2(t) + a_3(\phi(t))\dot\phi_3(t)\ dt$$

Ossia una sorta di prodotto scalare tra i campi a_i ed i vettori $\dot\phi(t)$ e non dipende dalla parametrizzazione scelta ma solo dal verso che scelgo, dunque

$$\int_{\gamma_1^+} \omega = -\int_{\gamma^-} \omega$$

Esempio 1.1.
Sia

$$\omega(x, y) = ydx - xydy$$



Con $(\cos t, \sin t), t \in [0, \pi]$ percorsa in senso orario mentre la parametrizzazione è orientata in senso opposto: dunque devo metterci un segno meno.

$$\int_\gamma \omega = -\int_0^\pi \sin t(-\sin t) + (-\sin t \cos t) \cos t \; dt = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$$

Teorema 1.1 (Integrazione delle forme esatte)**.**
Sia ω una forma differenziale esatta e continua definita nell'aperto $\mathbb{A}$. Sia γ una curva regolare a tratti con sostegno contenuto in $\mathbb{A}$ di estremi P_0 e P_1 orientata nel verso che va da P_0 a P_1. Sia f una primitiva di ω. Allora l'integrale di questa forma differenziale su questa curva è

$$\int_\gamma \omega = f(P_1) - f(P_2)$$

Ossia

Dimostrazione. ω è esatta e f è una sua primitiva: questo vuol dire che

$$a_1(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_3, x_3)$$

E anche le altre funzioni: questo vuol dire che c'è una funzione f per cui valgono queste relazioni. Sia

$$\phi[a, b] \to \mathbb{A}$$

una parametrica di γ concorde con l'orientazione e dunque

$$\phi(a) = P_0 \qquad \phi(b) = P_1$$

E dunque vado ad applicare la formula per gli integrali delle forme differenziali

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi(dt))\dot{\phi}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi(dt))\dot{\phi}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\phi(dt))\dot{\phi}(t) \right) \; dt$$

che è proprio la derivata composta $\frac{d}{dt}F(\phi(t))$ per cui $f(\phi(t)) = f(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))$ posso dire che

$$\int_a^b \frac{d}{dt} f(\phi(t)) = \left. f(\phi(t)) \right|_a^b = f(\phi(b)) - f(\phi(a)) = f(P_1) - f(P_2)$$

$\square$

Definizione 1.1 (Insieme aperto connesso)**.**
Un insieme aperto è connesso se presi due punti, allora esiste una curva che permette di andare da un punto all'altro rimanendo all'interno dell'insieme stesso.

Teorema 1.2 (Caratterizzazione delle forme esatte)**.**
Sia $\mathbb{A}$ un insieme aperto connesso e sia ω una forma differenziale continua definita su $\mathbb{A}$ e $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ delle curve regolari a tratti con sostegno contenuto in $\mathbb{A}$. Le tre proprietà seguenti sono equivalenti

1. *ω è esatta;*
2. *Per ogni curva chiusa γ contenuta in $\mathbb{A}$*

$$\int_\gamma \omega = 0$$

3. *Se $\gamma_1 \neq \gamma_2$ hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza si ha*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dimostrazione. $1 \implies 2$
Il punto di partenza e di arrivo coincidono e dunque, dal teorema precedente, l'integrale può essere espresso come

$$\int_\gamma \omega = f(P_1) - f(P_0) = 0$$

Dove f è una primitiva di ω.
$2 \implies 3$
Date le due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi e verso di percorrenza. Si considera la curva $\gamma_1 \cup \gamma_2^-$ la curva che consiste nella curva 1 e la curva 2 percorsa in verso opposto. E dunque

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega$$

Dato che cambio il verso, allora posso dire che

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

$3 \implies 1$
Definisco allora un punto $P_0 = (x_1, x_2, x_3)$ e voglio definire una funzione per ogni punto nella seguente maniera

$$f(P_0) = \int_{\gamma} \omega$$

Supponendo che debba calcolare la derivata, io mi muovo dal punto P_0 in modo tale che aumenti di poco le sue coordinate. Posso quindi muovermi solamente lungo una delle sue componenti

$$t \to (x_1 + t, x_2, x_3) \quad t \in [0, h]$$

Con h molto piccolo. Chiamato ϕ il vettore spostamento, allora la curva γ è esattamente:

$$f(x_1 + h, x_2, x_3) = \int_{\gamma \cup \phi} \omega$$

Posso ora fare il rapporto incrementale e ottenere

$$\frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)}{h} = \frac{\int_{\gamma \cup \phi} - \int_{\gamma} \omega}{h} = \frac{\int_{\phi} \omega}{h}$$

Questo integrale non è altro che l'integrale tra $[0, h]$ di

$$\frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3)\ dt \implies \frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3)\ dt$$

Se si chiama $P(h)$ l'integrale

$$\int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3)\ dt$$

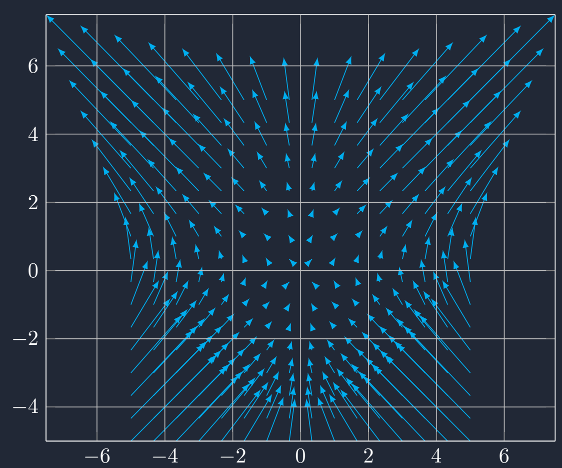
Si nota subito che $h \to 0$ quell'integrale è zero, ossia $P(0) = 0$. Per cui il teorema fondamentale per il calcolo integrale mi dice che quel limite esiste e garantisce che $P'(0)$ esiste e che coincide con l'integranda calcolata per $t = 0$. Finire da Foto

□

Esempio 1.2.
SIa

$$\omega = \nabla(x^2 y + \frac{y^3}{3}) \implies 2xydx + (x^2 + y^2 dy)$$

E' una forma esatta e di cui conosco il potenziale.



Posso considerare

$$\mathbb{A} \to \mathbb{R}^2 \qquad P_0 = (0,0) \qquad P = (x,y)$$

Presa una parametrizzazione $\gamma = (tx, ty)$. Lazy

2 Forme chiuse e forme esatte su fortnite

Sia ω una forma differenziale $C^{(1)} \in \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^n$,

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \dots a_n(x)dx_n$$

Dove $x = (x_1, \dots, x_n)$. Si dice che ω è chiusa, se

$$\forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j$$

Risulta che

$$\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \qquad \forall x \in \mathbb{A}$$

Teorema 2.1.
Sia $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$ una forma differenziale $\omega \in C^{(1)}$. Se ω è esatta, allora ω è chiusa.

Dimostrazione. Se ω è esatta, allora ha una primitiva $\omega = df$ dove f è il potenziale di ω. Si sceglie una coppia di i, j (tra 1 e 3) con $i \neq j$. Dato che è $C^{(1)}$, e dunque lo sono pure le derivate parziali della f, allora esistono le derivate in modo tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

E sono derivabili e le loro derivate continue. In particolare esistono e sono continue

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Per il teorema di Schawrtz sono uguali quando continue. La continuità implica allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} a_1 = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1} a_j$$

□

Cosa vuol dire essere chiuso per un campo? Questo è un concetto che è legato al rotore del campo. Posso definire, se è dato un campo $C^{(1)}$ su di un certo insieme aperto, posso definire il rotore di $F = (F_1, F_2, F_3)$:

$$\text{rot} F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

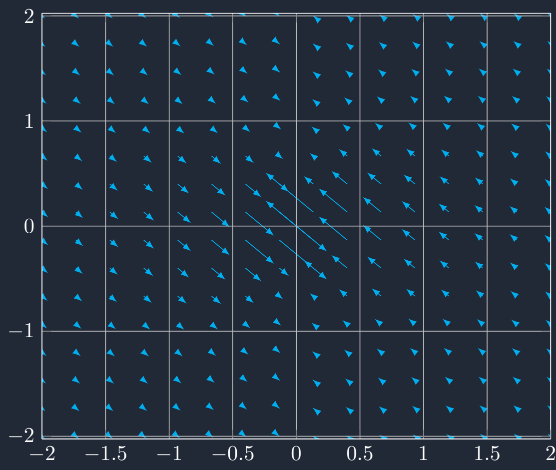
Teorema 2.2 (Irrotazionalità di un campo)**.**
Se F è un campo $C^{(1)}$ di un insieme aperto $\mathbb{A}$, se F è conservativo, allora il suo rotore è nullo: dunque è irrotazionale. L'equivalente del teorema nel caso dei campi si dimostra esattamente nello stesso modo.

Se ω è una forma $C^{(1)}$ chiusa, allora ω è esatta? Se F è irrotazionale, allora è conservativo? In generale non è così. Tuttavia è vero il contrario.

Esempio 2.1.

$$\omega = \frac{-x}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

E' definita ed è $C^{(1)}$ in $\mathbb{R}^2$



ω è chiusa, infatti le derivate sono uguali.

Definizione 2.1.
*Un insieme si dice **semplicemente connesso** se posso deformarla fino a farla diventare un punto che appartenga all'insieme stesso senza mai uscire dall'insieme stesso.*

Teorema 2.3.
Se ω è una forma differenziale chiusa e $C(1)$ in un insieme semplicemente connesso $\mathbb{A}$, allora esiste una primitiva di ω definita in $\mathbb{A}$.