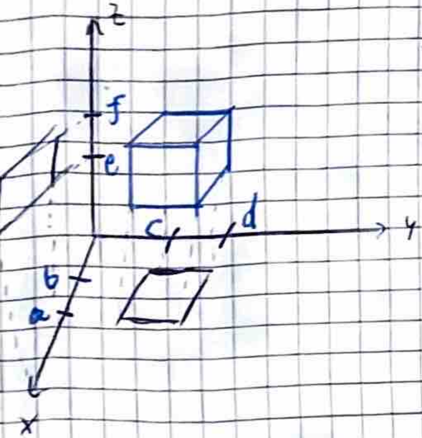
INTEGRALI TRIPLI

LEZ. 25/11/25
PROF. BIANCHI

Sono integrali per funzioni di tre variabili → Sono concettualmente praticamente uguali agli integrali doppi. La costruzione è sostanzialmente identica, ma invece di con aree si lavora con volumetti infinitesimi.



$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a,b],\ y \in [c,d],\ z \in [e,f]\} =$$
$$= [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

Ci sono due metodi per svolgere questa integrazione.

Integrazione per fili

Prendo ogni punto del rettangolo di base $[a,b] \times [c,d]$ (tutti i punti (x_0, y_0)):

$$\iiint_P f\, dx\, dy\, dz = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_e^f f\, dz \right) dx\, dy$$

Prima faccio un integrale unidimensionale, poi uno doppio.

Integrazione per fette

Prendo ogni rettangolo che è l'intersezione tra P e un piano orizzontale $z = z_0$, poi sommo tutte le aree:

$$\iiint_P f\, dx\, dy\, dz = \int_e^f \left(\iint_{P(z)} f\, dx\, dy \right) dz$$

Prima faccio un integrale doppio, poi uno unidimensionale.

A seconda del singolo caso scelgo il metodo più comodo.

Formula di integrazione "per fili" di un dominio generale

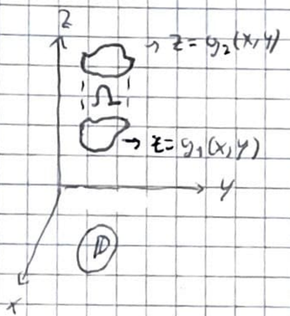
Supponiamo che Ω si possa rappresentare in questa forma:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

dove D é un dominio regolare, $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ sono continue.

Allora, se $f: \Omega \to \mathbb{R}$ é continua, l'integrale si può calcolare mediante:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy$$



Esempio

Sia Ω la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio 1:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \begin{cases} z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

Ottengo:

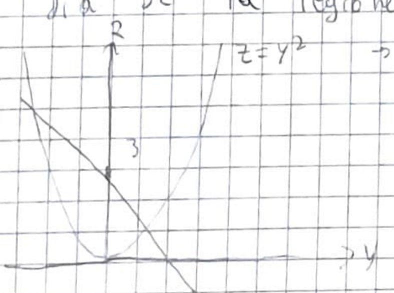
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$\iiint_\Omega x^2 z\, dx\, dy\, dz = \iint_D \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 z\, dz \right) dx\, dy$$

Esempio

Sia Ω la regione compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = 3 - 2y$



$\to z = x^2 + y^2$. Voglio trovare il volume di Ω, che sarà:

$$|\Omega| = \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz$$

Scrivo prima Ω, poi D.

- $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{D},\ x^2+y^2 \le z \le 3-2y\}$

- Per determinare $\mathbb{D}$ mi viene in mente che sto cercando proprio quei punti che sono l'intersezione fra il paraboloide e il piano → Gli z del paraboloide e gli z del piano saranno uguali:

$$\begin{cases} z = 3-2y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \rightarrow x^2+y^2 = 3-2y$$

$$x^2+y^2+2y = 3 \quad \rightarrow \text{Completo il quadrato}$$

$$x^2+y^2+2y+1 = 3+1$$

$$x^2+(y+1)^2 = 4$$

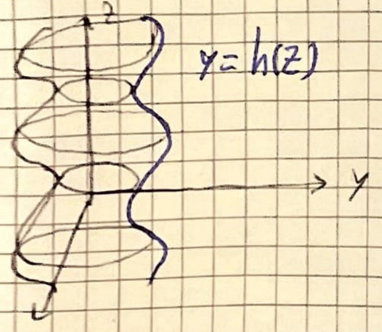
$\mathbb{D}$ è il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 2.

Calcolo il volume:

$$|\Omega| = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_{\mathbb{D}} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{3-2y} dz$$

Esempio

Supponiamo di avere un solido di rotazione intorno all'asse z:



Per come questo insieme è costruito, ho che tutte le sezioni orizzontali sono cerchi.

Integrazione "per fette" o "per strati"

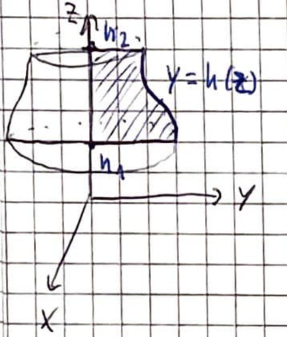
Supponiamo che Ω si possa rappresentare in questa forma:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h_1 \le z \le h_2,\ (x,y) \in \Omega(z)\}$$

dove $\forall z \in [h_1, h_2]$ Ω è un dominio regolare del piano. Allora:

$$\iiint_\Omega f\,dx\,dy\,dz = \int_{h_1}^{h_2} \left(\iint_{\Omega(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy \right) dz$$

Esempio - Volume di un solido di rotazione



In questo caso ho:

$$\Omega(z) = \{\text{cerchio } x^2+y^2 \le h^2(z)\}$$

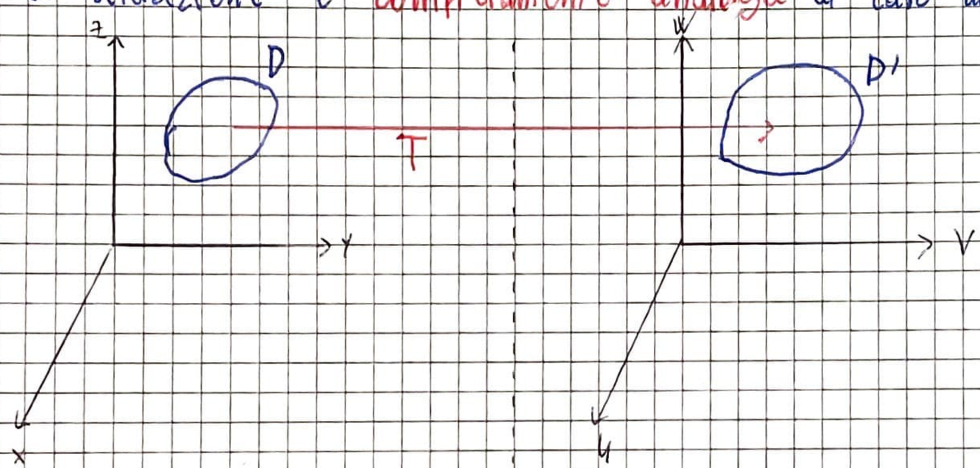
Il volume $|\Omega|$ sarà:

$$\int_{h_1}^{h_2}\left(\iint_{x^2+y^2\le h^2(z)} dx\,dy\right)dz = \pi\int_{h_1}^{h_2} h^2(z)\,dz$$

LEZ. 24/11/25
PROF. BIANCHI

Cambiamento di variabili per integrali tripli

La situazione è completamente analoga al caso degli integrali doppi.



$$\begin{cases} x = a(u,v,w) \\ y = b(u,v,w) \\ z = c(u,v,w) \end{cases}$$

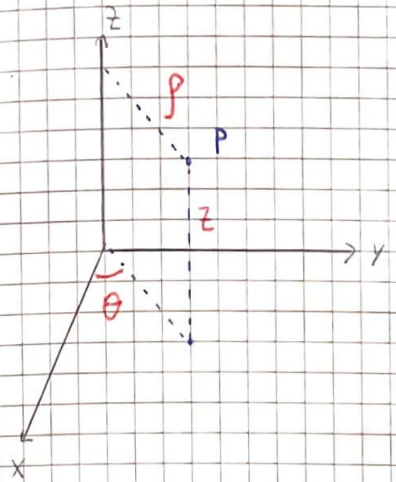
Si suppone che:

- $a, b, c \in C^1$
- La matrice Jacobiana della trasformazione abbia $\det \neq 0$ in ogni punto di D'.
- f è continua su D. Allora:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D'} f(a(u,v,w), b(u,v,w), c(u,v,w)) \cdot |\det(J_T)|\,du\,dv\,dw$$

A seconda delle simmetrie (es. cilindriche o sferiche etc.) di cui gode la funzione, ci sono vari possibili cambi di coordinate.

Coordinate cilindriche



$$P = (x, y, z) \leftrightarrow (\rho, \theta, z)$$

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\det(J_T) = \rho$$

$$dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

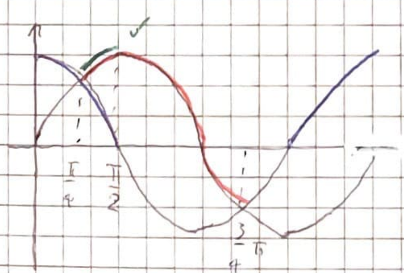
Esempio

$\iiint_{\mathbb{D}} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$ su $\mathbb{D}$ insieme limitato da:

- $z=0$ e $z=1$
- superficie cilindriche $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$
- Piani $x=0$ e $x=y$

Passo in coordinate cilindriche → Riscrivo il dominio:

- $z \in [0,1]$ (non cambia).
- $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4 \Rightarrow 1 \le \rho^2 \le 4 \Rightarrow 1 \le \rho \le 2$
- $x=0$ e $x=y \Rightarrow 0 \le x \le y \Rightarrow 0 \le \rho\cos(\theta) \le \rho\sin(\theta) = 0 \le \cos(\theta) \le \sin(\theta)$.



Ciò si ha per $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Posso scrivere $\mathbb{D}'$:

$$\mathbb{D}' = \left\{(\rho,\theta,z) : z \in [0,1],\ \rho \in [1,2],\ \theta \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4}\right]\right\}$$

$$\iiint_{\mathbb{D}} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\mathbb{D}'} \rho^3\, d\rho\, d\theta\, dz = \iint_{(\rho,\theta) = [1,2]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]} \left(\int_0^1 \rho^3\, dz\right) d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_1^2 d\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho^3\, dz = \frac{\pi}{4}\int_1^2 \rho^3\, d\rho = \left[\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\rho^4}{4}\right]_2^1 = \pi - \frac{\pi}{16} = \frac{15}{16}\pi$$

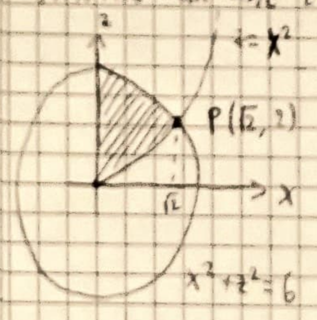
Esempio

Sia $\mathbb{D}$ l'insieme dei punti che sta sopra il paraboloide $z=x^2+y^2$ e dentro la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{6}$ $\rightarrow$ Voglio calcolarne il volume.

Scrivo le disuguaglianze:

$$\mathbb{D}=\{(x,y,z):\ z\geq x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 6\}$$

Poiché x e y appaiono sempre e solo nella forma x^2+y^2, ho una simmetria cilindrica intorno all'asse z:



Ho disegnato la sezione sul piano $y=0$.

Scrivo $\mathbb{D}'$:

- $z\geq x^2+y^2 \implies z\geq \rho^2$
- $x^2+y^2+z^2\leq 6 \implies \rho^2+z^2\leq 6$

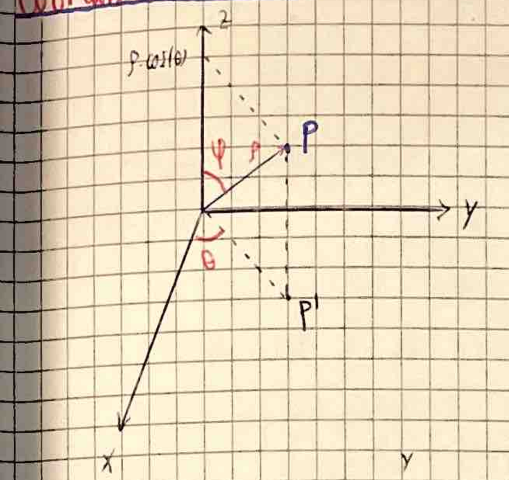
Rappresentando queste due disuguaglianze nel piano z,ρ otterrei esattamente lo stesso disegno. $\rightarrow$ Chiamo E questo "nuovo" insieme.

Non ho alcuna condizione su $\theta \implies \theta\in[0,2\pi]$.

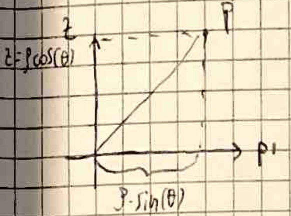
$$\mathbb{D}'=\{(\rho,\theta,z):\ (\rho,z)\in E,\ \theta\in[0,2\pi]\}$$

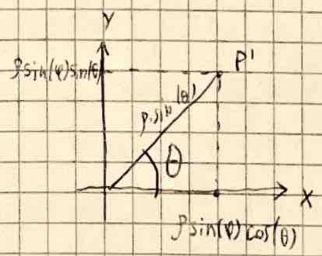
$$\iiint_{\mathbb{D}} dx\,dy\,dz=\iint_E d\rho\,dz\int_0^{2\pi}\rho\,d\theta=\int_0^{\sqrt{2}}d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{6-\rho^2}}2\pi\rho\,dz$$

Coordinate sferiche



- $\rho \rightarrow$ Distanza da $(0,0,0)$.
- $\varphi \in [0, \pi]$
- $\theta \in [0, 2\pi]$





Ottengo dunque:

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\theta) \end{cases}$$

Calcolo il determinante della Jacobiana:

$$|\det(J_T)| = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Esempio

Sia H la semisfera $\{x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$.

Supponiamo che la sua densità di massa $\delta(x,y,z) = (2R - \rho)$, ove ρ è la distanza da $(0,0,0)$. $\rightarrow$ Voglio calcolare la massa di H.

$$\iiint_H \delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

$$H' = \{(\rho, \theta, \varphi) : \rho \in [0, R],\ \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\}$$

Applicazione degli integrali tripli alla fisica

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$.

- Il volume di Ω è:

$$|\Omega| = \iiint_\Omega 1 \, dx \, dy \, dz$$

- La massa totale di un corpo che occupa la regione Ω e ha densità di massa $d(x,y,z)$ è:

$$m = \iiint_\Omega d(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

- Il baricentro di un corpo va calcolato separatamente per ogni coordinata:

$$B_x = \frac{1}{m} \iiint_\Omega x \cdot d(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

Relazioni analoghe valgono per le altre coordinate.

- Il momento di inerzia rispetto ad un dato asse, indicando con $d(x,y,z)$ la densità di massa e con $\delta(x,y,z)$ la distanza dall'asse rispetto a cui si sta calcolando il momento è:

$$M = \iiint_\Omega \delta^2(x,y,z) \cdot d(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

Ad esempio, il momento di inerzia rispetto all'asse z è:

$$M_z = \iiint (x^2+y^2) \cdot d(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$