

# Analisi Bianchi

Tommaso Miliani

04-11-25

## 1 Insiemi semplicemente connessi

Se  $\omega$  è esatta, allora  $\omega$  è chiusa, altrimenti, se  $F$  è un campo conservativo, allora  $\text{rot}F = 0$ . Vale anche il viceversa? In generale no. Se infatti  $\omega$  è definita su di un certo insieme  $\mathbb{A}$  ed è chiusa, non è detto che esista una funzione  $F$  definita su tutto  $\mathbb{A}$  tale che  $\omega = dF$ .

**Esempio 1.1.**

Non esiste  $F$  definita su  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} : \omega = dF$ .

$\exists F$  definita su  $\{(x,y) : x > 0\} : \omega = dF$  poiché è un insieme semplicemente connesso.

**Osservazione 1.1.**

Se  $\mathbb{A}$  è semplicemente connesso, allora si può invertire la definizione.

**Definizione 1.1** (Essere semplicemente connesso).

Un insieme aperto  $\mathbb{A}$  si dice **semplicemente connesso** se è connesso e inoltre ogni curva chiusa, e interamente contenuta in  $\mathbb{A}$ , può essere ridotta mediante una deformazione continua ad un unico punto senza mai uscire da  $\mathbb{A}$ .

**Esempio 1.2** (Esempi in  $\mathbb{R}^2$ ).

Sono semplicemente connessi cerchi, ellissi, poligoni, semipiani, il piano  $\mathbb{R}^2$  intero ed il piano privato di una semiretta. Non sono semplicemente connessi il piano o un cerchio, o un ellisse, o un poligono privato di un punto, una corona circolare o un insieme che presenta un buco.

In tutti i casi si deve pensare che, per una curva chiusa che gira intorno al buco, una deformazione continua non riesce a deformare la curva in un punto poiché non riesce a stare dentro l'insieme ma si deve per forza passare per il buco.

**Esempio 1.3** (Esempi in  $\mathbb{R}^3$ ).

Il toro non è un solido semplicemente connesso mentre una sfera lo è, così come un guscio sferico in quanto è possibile "scansare" il buco. Qualsiasi curva nello spazio può chiudere un insieme e renderlo semplicemente connesso togliendo un numero finito di punti.

**Definizione 1.2.**

Un insieme  $\mathbb{A}$  si dice **stellato** se esiste un punto  $P_0 \in \mathbb{A}$  tale che  $\forall P \in \mathbb{A}$ , tutto il segmento di estremi  $P$  e  $P_0$  è contenuto in  $\mathbb{A}$ . Si dice stellato poiché sono insiemi concavi.

Per la definizione esatta di semplicemente connesso si introduce la def

**Definizione 1.3** (Omotopia tra curve).

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve contenute in  $\mathbb{A}$  aperto e connesso con  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ . Supponiamo che  $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{A}$  e  $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{A}$  siano delle parametrizzazioni di  $\gamma_1$  e di  $\gamma_2$  rispettivamente. In questo modo.

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) = P_a \quad \phi_1(b) = \phi_2(b) = P_b$$

Allora  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono **Omotope** in  $\mathbb{A}$  se esiste una funzione continua  $\phi(t, \lambda)$ , che dipende dal parametro  $t \in [a, b]$  e  $\lambda \in [0, 1]$ , tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni

1.  $\phi(t, 0) = \phi_1(t) \quad \phi(t, 1) = \phi_2(t) \quad \forall t \in [a, b];$
2.  $\phi(a, \lambda) = P_a \quad \phi(b, \lambda) = P_b \quad \forall \lambda \in [0, 1];$
3.  $\forall \lambda \in [0, 1] \quad \phi_\lambda := \phi = \phi(t, \lambda) \subset \mathbb{A}.$

L'introduzione del parametro  $\lambda$  è un modo per far variare in modo continuo una curva generica tra  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  in modo continuo. Per ogni  $\lambda$  fissato si ha una famiglia di curve con i soliti estremi  $P_a$  e  $P_b$ .

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono due curve chiuse e

$$\phi_1(a) = \phi_2(a) = P_a \quad \phi_1(b) = \phi_2(b) = P_b$$

allora nella definizione precedente queste si dicono omotope se vale la definizione precedente con la seconda condizione sostituita dalla seguente:

$$\phi(a, \lambda) = \phi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

Si può ora dare la definizione formale di insieme semplicemente connesso

**Definizione 1.4** (Definizione rigorosa di semplicemente connesso).

Un insieme aperto di  $\mathbb{A}$  di  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$  si dice semplicemente connesso se è connesso e due curve qualsiasi contenute in  $\mathbb{A}$ , ed aventi gli stessi estremi, sono omotope. Questa definizione può essere data anche alle curve chiuse in quanto ogni curva chiusa contenuta in  $\mathbb{A}$  è omotopa ad una curva costante, ossia si riduce ad un solo punto.

**Teorema 1.1** (Teorema  $n!$ ).

Sia  $\omega = a_1(x, y)dx + a_2(x, y)dy$  una forma differenziale  $C^1$  e chiusa in un insieme  $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2$  aperto e semplicemente connesso. Allora  $\omega$  è esatta. Vale un enunciato analogo in  $\mathbb{R}^3$ .

*Dimostrazione.* Prese due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con gli stessi estremi  $P_a$  e  $P_b$ , voglio dimostrare allora che l'integrale delle forme differenziali sulle due curve è lo stesso. Poiché  $\mathbb{A}$  è semplicemente connesso,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope. Esiste allora una funzione

$$\gamma(t, \lambda) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}$$

che soddisfa le prime due proprietà della definizione di omotopia. Si definisce allora  $\forall \lambda \in [0, 1]$  l'integrale

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} \omega = \int_a^b a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) dt$$

Si vuole dimostrare che questo numero non dipenda da  $\lambda$  e che dunque  $I(0) = I(1)$ . Si suppone che  $\phi(t, \lambda)$  sia  $C^1([a, b] \times [0, 1])$  e che le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}$$

Siano entrambe continue. Posso dunque derivare rispetto a  $\lambda$  l'integrale e vedere che sia zero:

$$\frac{d}{d\lambda} I(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \int_{\gamma_\lambda} \omega$$

Fare la derivata dell'integrale è come derivare l'argomento dell'integrale (ancora non dimostrata nel corso, ma sarà definita successivamente). A questo punto si ha una funzione composta e quello che si vuole fare è dimostrare che l'ipotesi  $\omega$  chiusa, implica che l'integrale tra  $a$  e  $b$  dell'argomento sia

$$\int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\dots) dt \stackrel{\text{dimostrare}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} (\dots) dt$$

Ogni funzione è primitiva della propria derivata e dunque posso dire che

$$\int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\dots) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) dt$$

Sfruttando la seconda condizione delle funzioni omotope allora l'integrale è esattamente zero.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left( a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right) \\ & \frac{d}{dt} \left( a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \partial}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right) \end{aligned}$$

Si vuole ora dimostrare che le due espressioni sono uguali: posso fare la derivata di funzione per entrambe le espressioni  $I$  e  $II$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}(I) &= \left( \frac{\partial a_1}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial a_1}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + a_1(\dots) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}(\dots) + \\ &\quad \left( \frac{\partial a_2}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + a_2(\dots) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}(\dots) \\ \frac{d}{d\lambda}(II) &= \left( \frac{\partial a_1}{\partial x}(\dots) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a_1}{\partial \lambda}(\dots) \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + a_1(\dots) \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda}(\dots) + \\ &\quad \left( \frac{\partial a_2}{\partial x}(\dots) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\dots) \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial \lambda} + a_2(\dots) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \lambda}(\dots)\end{aligned}$$

Dato che so che è chiusa, posso dire che  $\forall (x, y) \in \mathbb{A} \frac{\partial a_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial a_2}{\partial x}(x, y)$ .  $\square$