Analisi II - Equazioni differenziali

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 EDO del 1° ordine

Trovare l'**integrale generale** delle seguenti equazioni differenziali

1. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
2. $y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$
3. $\begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x} \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$
5. $\begin{cases} y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(4) = 0 \end{cases}$
6. $\begin{cases} y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases}$
7. $y' = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}}$

*esercizi dei prof. *Gabriele Bianchi*, *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

2 EDO lineari del 2° ordine

Trovare l'**integrale generale** delle seguenti equazioni differenziali del 2° ordine lineari e a coefficienti costanti

1. (a) $y'' - 4y = 4e^{-x} + x^2 + 2$
   (b) $y'' - 4y = 3e^{2x}$
   (c) $y'' - 4y = 3e^{2x} - e^{-2x}$

2. (a) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 + 3e^{-x}$
   (b) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos(x)$ $\boxed{\textbf{NOTA:}\ e^{2x}\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{\lambda_0 x}) \text{ con } \lambda_0 = 2+i}$
   (c) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin(x)$ $\boxed{\textbf{NOTA:}\ e^{x}\sin(x) = \mathrm{Im}(e^{\lambda_0 x})}$

3. (a) $4y'' - 4y' + y = x$
   (b) $4y'' - 4y' + y = 3x^2 + 2x - 1$
   (c) $4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}}$
   (d) $4y'' - 4y' + y = 3xe^{\frac{x}{2}}$

4. (a) $y'' + y = e^x \cos(2x)$
   (b) $y'' + y = xe^x \cos(2x)$
   (c) $y'' + y = -e^{-x}\cos x$

5. (a) $y'' - 3y' + 2y = ax^2 + bx + c$
   (b) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
   (c) $y'' - 3y' + 2y = e^{x}$

6. (a) $y'' - y' + y = \pi e^{-\frac{x}{2}}$
   (b) $y'' - y' + y = \pi x e^{-\frac{x}{2}}$
   (c) $y'' - y' + y = -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

7. (a) $y'' - 2y' + y = ax^2 + bx + c$
   (b) $y'' - 2y' + y = 3e^x$

8. Risolvere
$$y'' - 5y + 6y = x$$
   con il metodo di **variazione delle costanti** e per **similarità**
$$\boxed{\text{Cerco } y_p(x) = A(x)e^{2x} + B(x)e^{3x} \Rightarrow \text{Cerco } A(x) \text{ e } B(x) \text{ t.c. } \begin{cases} A'e^{2x} + B'e^{3x} = 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} = x \end{cases}}$$

9. Risolvere

$$y'' - y = \sin(x)$$

con il metodo di **variazione delle costanti** e per **similarità**

$$\boxed{\text{Cerco } y_p(x) = A(x)e^{-x} + B(x)e^x \Rightarrow \text{Cerco } A(x) \text{ e } B(x) \text{ t.c. } \begin{cases} A'e^{-x} + B'e^x = 0 \\ -A'e^{2x} + B'e^x = \sin x \end{cases}}$$

10. Ricondursi all'EDO lineare e risolverla, sfruttando un opportuno cambio di variabili

(a) $\begin{cases} x^2y'' - xy' - 3y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

(b) $x^2y'' - xy' + y = x + \frac{4}{x}$

(c) Determinare le soluzioni di

$$x^2y'' + xy' - 4y = \frac{1}{x^3} - x$$

tali che

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

2.1 Foglio n.2

- $y'' - 5y' + 6y = x - 1 + e^{2x}$
- $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}\cos(2x)$

3 EDO qualitative

1. Studiare l'andamento di $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} y' = 4y(1-y) \\ y(0) = a \end{cases}$$

2. Dato il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \\ y(0) = a \quad \text{con} \quad a \neq 0 \end{cases}$$
   (a) Provare che $y(x)$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$
   (b) Studiare l'andamento di $y(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$
   (c) Studiare la natura del punto critico $x = 0$
   (d) Studiare eventuali asintoti orizzontali e obliqui di $y(x)$

3. Dato il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} 4x^2y' + 2\sin(y)\cos(y) = 1 \\ y(1) = \pi \end{cases}$$
   (a) Provare che $y(x)$ è prolungabile a $+\infty$
   (b) Determinare se $\exists \lim_{x\to\infty} y(x)$
   (c) Trovare la soluzione esplicita

4. Studiare l'andamento di $y(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} y' = \sin\left(y^2\right) \\ y(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. Dato il seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = e^{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
   (a) Provare che $x = 0$ è un punto di flesso
   (b) Studiare qualitativamente la soluzione massimale $y(x)$ (eventuali simmetrie, massimi e minimi locali, etc.)

6. Dato il seguente problema di Cauchy, studiare qualitativamente la soluzione massimale $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (crescenza e descrescenza, concavità, punti critici, informazioni sul dominio, etc.):
$$\begin{cases} y' = \frac{\tan(y)}{1+y^2} \\ y(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$