Analisi II - Derivabilità, Differenziabilità, Piano tangente

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Foglio n. 1

1. Determinare per quale $\alpha \in \mathbb{R}$ il piano tangente al grafico di:
$$z = \sin\left(\alpha x + y^2\right)$$
nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$ (in $\mathbb{R}^3$).
Esistono valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è perpendicolare?

2. Data:
$$f(x, y) = e^{2x-y} + \sqrt{3 + x^2 + 3y^2}$$
   (a) Verificare che f è differenziabile in $(1, 2)$
   (b) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 2, 5)$
   (c) Calcolare $\nabla_{\underline{\nu}} f(1, 2)$ dove $\underline{\nu}$ è il versore della retta $y = \sqrt{3}\, x$ orientato nel verso delle x decrescenti

3. Data:
$$f(x, y) = x\ e^y - 2\ln(x) + 3y$$
Stabilire se f si trova al di sopra o al di sotto del piano tangente in un intorno del punto $(1, 0, 1)$

4. Sia $z = f(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile e t.c. $g(x, y) = f(r)$.
Scrivere $f'(r)$ in termini del seguente dominio $\mathbb{D}$:
$$\mathbb{D} = \begin{cases} x = r\ \cos(\theta) \\ y = r\ \sin(\theta) \end{cases}$$
$\boxed{\textbf{Esempio: } g(x, y) = x^2 + y^2 = r^2 = f(r)}$

*esercizi dei prof. *Gabriele Bianchi*, *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

5. Data:
$$f(x,y) = x^y - 2y + 2x$$
Determinare per quale direzione $\underline{\nu} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$ si ha $\nabla_{\underline{\nu}} f(1,1) = 2$.
Determinare qual è la direzione lungo la quale f cresce maggiormente in un intorno di $(1,1)$

6. Data
$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\; e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
Verificare che soddisfa l'equazione $u_t - u_{xx} = 0 \ \forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

Curiosità: Questa equazione è detta *equazione del calore*

7. Data:
$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$
Provare che non è differenziabile in $P_0 \equiv (0,1)$.
Inoltre, $\forall \underline{\nu} \in \mathbb{R}^2$ versore, calcolare $\nabla_{\underline{\nu}} f(0,1)$

2 Foglio n.2

Stabilire se le seguenti funzioni sono differenziabili nel loro dominio

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin(x^2y^2)}}{|xy|} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \sin\left(\frac{1}{x^2y^2}\right) & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   Verificare che $\exists \frac{\partial}{\partial \underline{\nu}}(0,0)$ $\forall \underline{\nu}$ direzione, ma f non è differenziabile in $(0,0)$

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6. $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

7. Data:
   $$f(x,y) = \frac{1}{xy}$$
   Si assuma che per $xy \neq 0$ è differenziabile.
   Trovare il piano tangente a $z = f(x,y)$ in $(1,1,1)$

8. Data:
   $$f(x,y) = x^2y^2 \ln(x^2+y^2) \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$
   E' possibile estendere f con continuità in (0,0)?
   La funzione ottenutà è differenziabile in (0,0)?

9. Data:
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\ \sin(x)}{x^2+\arcsin^2(y)} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (a) Calcolare in $(0,0)$ le derivate parziali e la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}$ dove $\underline{\nu} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   (b) Dire se f è differenziabile in (0,0).

3 Foglio n.3

1. Studiare la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione:

$$f(x,y) = |x| \ \ln(1+y)$$

2. Studiare la differenziabilità in ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ della funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{y^2+|x|} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. Studiare la differenziabilità in $(0,0)$ della funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

4. Calcolare le derivate direzionali di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$ lungo una generica direzione $\underline{\nu} = (h,k)$, con $h^2 + k^2 = 1$. Studiare la continuità di $f(x,y)$ nell'origine degli assi

5. Calcolare le derivate direzionali di:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2} \ (x^2+y^2) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

nel punto $(0,0)$ lungo una generica direzione $\underline{\nu} = (h,k)$, con $k \neq 0$ e $h^2 + k^2 = 1$

6. Studiare la differenziabilità della funzione:

$$f(x,y) = \left[x^2(y-1)\right]^{\frac{1}{3}} + 1$$

nel punto $(0,1)$.
Calcolare, se esistono, le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(0,1)$, dove $\underline{\nu}$ è un versore ($\|\underline{\nu}\| = 1$)

7. Studiare la differenziabilità in $(0,0,0)$ della funzione:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} |x| \ \sqrt{x^2+y^2+z^2} \ \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$