Equazioni Differenziali

Marco Delton

2026

Indice

1 Introduzione

Le **equazioni differenziali** sono equazioni in cui l'incognita è una **funzione**. Mostriamone qualcuna per esempio:

- $y' = 3e^y$
- $y'' = 4x + 8$
- $y'' + y = 0$

Vado ora a **definire** una serie di oggetti che userò.

Definizione 1.1 (Equazione differenziale ordinaria (EDO))**.**
*Si dice "**equazione differenziale ordinaria**" un'equazione le cui incognite sono **funzioni di una variabile**.*
*Nel caso ci siamo **più variabili**, parlo di equazioni differenziali "**a derivate parziali**" (EDP).*

2 Soluzione di un'equazione differenziale

Sia la mia equazione differenziale **ordinaria** $y' = f(x, y)$, definita $\forall x \in \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.
Definisco $y(x)$ **soluzione** dell'EDO se, $\forall x \in \mathbb{A}$, vale che:

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

con $(x, y(x))$ appartenente al **dominio** di f.
Può succedere che una EDO abbia **infinite soluzioni**

Definizione 2.1 (**Grado di una EDO**)**.**
*Definisco "**grado**" dell'equazione il **massimo ordine di derivazione** che si trova al suo interno*

3 Problemi di Cauchy

3.1 1° ordine

Definisco **problema di Cauchy** un problema così posto:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

dove x_0 e y_0 sono **numeri assegnati**.

3.2 Ordini superiori

Per l'ordine **successivo al primo** i problemi di Cauchy sono definiti in maniera seguente:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y'(x_0) = y_0^* \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

NOTA: E' importante che x_0 sia **unico**. Inoltre x_0, y_0^* e y_0 sono **numeri assegnati**.

Definizione 3.1 (**EDO normale**).
*Una EDO si dice **normale** se è possibile **isolare** la derivata di **ordine massimo** dal resto dell'equazione*

Ne faccio un **esempio**:

$$(y')^2 = -x^3 \rightarrow \text{Provo a } \textbf{isolare } y'$$

Ma ottengo **2 equazioni**:

- $y' = +\sqrt{-x^3}$
- $y' = -\sqrt{-x^3}$

Dal momento che non ho una **soluzione univoca**, questa equazione **non è esprimibile** in **forma normale**

Ho osservato che, in generale, un'equazione differenziale può avere **infinite soluzioni**, ossia esistono **infinite funzioni** che la risolvono. Il **problema di Cauchy** è uno strumento che, ponendo una **specifica condizione aggiuntiva** sulla soluzione, permette di trovare una soluzione **più specifica**. Nulla però ci dice se, in generale, questa soluzione sia **possa effettivamente esistere** o, addirittura, possa essere **unica**.
Sull'**esistenza delle soluzioni** c'è però un **importante risultato teorico**.

Teorema 3.1 (**Teorema di esistenza delle soluzioni (Peano)**).
Dato un poblema di Cauchy per equazioni di ***1° ordine*** *scritto in* ***forma normale****:*

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Sia:

- $f(x,y)$ ***definita*** *e* ***continua*** *in un insieme* $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$
- (x_0, y_0) *un* ***punto interno*** *ad* $\mathbb{A}$*, allora:*

Il ***problema di Cauchy*** *per l'****equazione di 1° ordine*** *in* ***forma normale*** *ammette* ***almeno una soluzione*** *in un* ***intorno di*** (x_0, y_0)

Si può osservare che la **sola ipotesi** di **continuità** non garantisce che la soluzione sia **unica**. Inoltre, è proprio la **continuità** di $f(x,y)$ che è **necessaria** per l'**esistenza** della soluzione.
Fornisco un esempio di un **problema di Cauchy** che ammette **2 soluzioni**:

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Posso osservare che:

- La funzione $y \equiv 0$ **è soluzione**.
- La funzione $y(x) = \frac{x^3}{27}$ **è soluzione**.

Per proseguire, ho bisogno di definire un **particolare tipo di funzioni** di cui mi servirò.

Inciso 3.1 (Funzione di **Lipshitz**).
Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$*, con* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$*.*
Dico che g *è una* ***funzione di Lipshitz****, o* ***funzione Lipshitziana****, in* $[a,b]$ *se* $\forall z_1, z_2 \in [a,b]$ *risulta che:*

$$\exists L \in \mathbb{R},\ L > 0 \ t.c. \left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq L$$

Posso anche scrivere questa condizione come:

$$-L \leq \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \leq L$$

In pratica, la **Lipshitzianità** è una condizione **più forte** della **derivabilità** della funzione. Sto chiedendo infatti che il **rapporto incrementale** della funzione resti sempre **minore di una quantità finita** e, dunque, **la derivata non possa esplodere** (essendo il **limite** del rapporto incrementale stesso).
A livello **geometrico**, posso affermare che una funzione Lipshitziana non può avere **asintoti verticali**, dal momento che in essi la derivata **tende a** $\pm\infty$.

3.3 Unicità delle soluzioni

Il **teorema di Peano** ci ha fornito informazioni sull'**esistenza delle soluzioni**, ma ancora rimane il problema concreto dell'**unicità** di esse. Ho bisogno infatti di un risultato che mi permetta di trovare **soluzioni uniche** al problema.
Posso finalmente enunciare un **risultato utilissimo** per l'**unicità delle soluzioni**.

Teorema 3.2 (**Esistenza e unicità di Cauchy**).
*Considero il seguente **problema di Cauchy**:*

$$\begin{cases} y' = f\left(x, y(x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

*Sia $f(x)$ **definita** e **continua** sul **rettangolo** $\mathbb{I} \times \mathbb{J}$, con:*

- $\mathbb{I} = (x_0 - a, x_0 + a)$
- $\mathbb{J} = (y_0 - b, y_0 + b)$

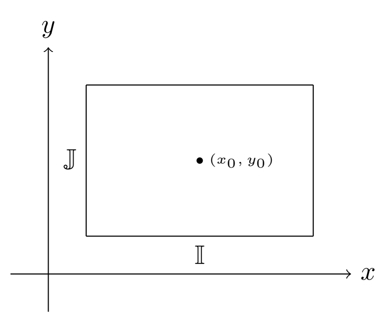
*con a e b **costanti positive**.*
Suppongo inoltre che $\exists L \in \mathbb{R},\ L > 0$ t.c. $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{J}$ vale:

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

*In pratica, se **fisso** x, la funzione è **Lipshitziana** per y. Allora:*

*$\exists \delta > 0$ e $\exists!$ funzione $y(x)$ definita su $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ che **risolve il problema**.*

Posso **visualizzare graficamente** la situazione:



Non possiedo ancora gli **strumenti necessari** per la dimostrazione, ma posso dare un paio di **lemmi utili**.

Lemma 3.1 (**Teorema fondamentale del calcolo integrale**)**.**
Lo ***richiamo****, perchè tornerà utile per un* ***lemma successivo****:*

- *Sia* $g'(z)$ ***continua****, allora* $\exists g$ *t.c.*

$$g(z) = g(z_0) + \int_{z_0}^{z} g'(t)\ dt$$

- *Se* h *è* ***continua****, allora:*

$$H(x) = h(x_0) + \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt$$

  è ***derivabile****, e la sua derivata è* h*.*

Lemma 3.2.
Sia $\delta > 0$*. Le seguenti affermazioni sono* ***equivalenti****:*

1. $\exists y(x)$ ***derivabile*** *in* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *t.c.*

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)\ \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \text{ e } y(x_0) = y_0$$

2. $\exists y(x)$ ***continua*** *in* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *t.c.*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)\ dt$$

Voglio dimostrare che queste affermazioni si ***co-implicano****.*

Dimostrazione 3.2.1 (1 $\Rightarrow$ 2)**.**
Prendo $y(x)$ *e ci applico il* ***Teorema fondamentale del calcolo integrale****:*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'\left(t, y(t)\right)\ dt$$

Ma so che $y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$*,e dunque ottengo*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'\left(t, y(t)\right)\ dt$$

Dimostrato

Dimostrazione 3.2.2 (2 $\Rightarrow$ 1)**.**
Sia $y(x)$ *una funzione che soddisfa* 2*. Per il* ***Teorema fondamentale del calcolo integrale*** *posso dire:*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'\left(t, y(t)\right)\ dt \text{ con: } y'(x) = f'\left(x, y(x)\right)$$

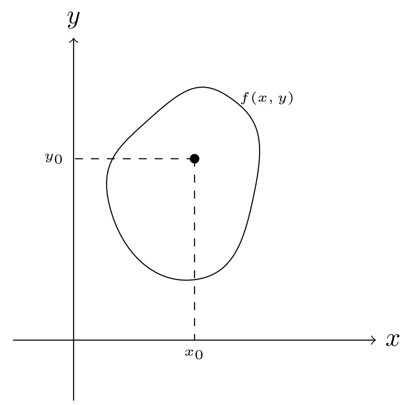
$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right)\ dt$$

*Poichè y è continua, lo è anche f (perchè y è **composizione di funzioni continue**). Per il **Teorema fondamentale del calcolo integrale**, y è **derivabile**, e la sua derivata è $y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$.*
Se prendo $x = x_0$, ho $y(x_0) = y_0$.

Dimostrato

Introduco ora lo strumento delle **derivate parziali**, che mi tornerà **molto utile** in seguito.

Supponiamo di avere una funzione f definita su un certo insieme, a cui (x_0, y_0) è un punto **interno**:



Definizione 3.2 (Derivata parziale).
*Definisco la **derivata parziale** di f rispetto a y nel punto (x_0, y_0):*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Proposizione 1.
Se:

- *f è **continua** in un insieme $\mathbb{A}$.*
- *(x_0, y_0) è un **punto interno** ad $\mathbb{A}$.*
- *$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ **continua** $\forall x \in \mathbb{A}$, allora:*

*Le ipotesi del **Teorema di esistenza e unicità di Cauchy** sono **verificate**.*

3.4 EDO Omogenea

Un equazione nella forma:

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right)$$

è detta **omogenea di grado zero**. Vale che:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad f\left(\lambda x, \lambda y(x)\right) = f\left(x, y(x)\right)$$

4 Esistenza globale

Finora ho lavorato con l'**esistenza locale delle soluzioni**, ossia mi interessava che esse fossero definite in un **intorno** di un **punto specifico**.
Posso però chiedermi se un **problema di Cauchy** ammetta **soluzioni globali**, definite cioè sullo **stesso dominio** dell'equazione differenziale che voglio risolvere.
Prendo ad esempio il seguente **problema di Cauchy**:

$$\begin{cases} y'(x) = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad \longrightarrow f\left(x, y(x)\right) = -2xy^2$$

Osservo che f è **definita** e **continua** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Controllo la **derivata parziale**:

$$\frac{\partial f\left(x, y(x)\right)}{\partial y} = -4xy$$

è **definita** e **continua** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Per il **teorema di esistenza e unicità di Cauchy**, $\exists!$ funzione $y(x)$ in un **intorno** del punto $(0, -1)$ che **risolve il problema**.
Usando il metodo della **separazione delle variabili** e imponendo la **condizione** data dal problema, trovo la **soluzione**:

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

Osservo che, mentre f è definita su tutto $\mathbb{R}^2$, la soluzione **non esiste** per $x = 1$ e $x = -1$.
Non è **detto** che le soluzioni di una EDO:

- **Esistano**.
- Abbiano lo **stesso dominio** del problema che risolvono.

Posso finalmente dare un **risulato teorico imporante** sull'**esistenza globale** delle soluzioni.

Teorema 4.1 (**Teorema di esistenza globale**).
Considero il ***problema di Cauchy****:*

$$\begin{cases} y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Se:

- f *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *sono* ***definite*** *e* ***continue*** $\forall x \in [a, b]$ *e* $\forall y \in \mathbb{R}$ *con* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

- *Esistono* $h, k \in \mathbb{R},\ \ h, k > 0$ *t.c.*

$$|f\left(x, y(x)\right)| \leq h + k\,|y(x)|$$

allora:
La soluzione $y(x)$ *è* ***unica*** *e* ***definita*** $\forall x \in [a, b]$.

5 Sistemi di equazioni differenziali

Come per le **equazioni normali**, anche le **equazioni differenziali** possono essere inserite in **sistemi**, nella forma:

$$\begin{cases} y_1(x) = f_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)\right) \\ y_2(x) = f_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)\right) \\ \quad\vdots \\ y_N(x) = f_1\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)\right) \end{cases}$$

Una soluzione è un **vettore di funzioni** $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)$ t.c. **tutte le equazioni** sono **soddisfatte**.
E' un ragionamento **simile** a quello delle **equazioni normali**, anche se ha una **scrittura complicata**.
Per **semplicità** posso ragionare in **termini vettoriali**. Chiamo:

- $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x))$
- $Y'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \ldots, y_N'(x))$
- $F(x, Y) = (f_1, f_2, \ldots, f_N)$

Grazie a questa forma posso trattare **problemi di Cauchy con i sistemi**:

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \qquad \text{dove } x_0 \text{ è lo stesso per tutte le condizioni}$$

Per semplicità, chiamo $\odot$ questo problema.
Nella trattazione dei **problemi di Cauchy** ci sono alcuni **teoremi utili**.

Teorema 5.1.
Sia:

- $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
- $F:\ \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$
- (x_0, y_0) *un* ***punto interno*** a $\mathbb{D}$, *allora:*

Il problema $\odot$ *ammette* ***almeno una soluzione*** *in un intorno di* x_0.

Teorema 5.2.
Nelle ipotesi del **Teorema 5.1**, *suppongo anche:*

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \quad \text{con} \begin{array}{c} i = 1, \ldots, N \\ j = 1, \ldots, N \end{array} \text{continue su } \mathbb{D}\text{ , allora:}$$

Il problema $\odot$ *ammette un'****unica soluzione*** *in un intorno di* x_0.

Teorema 5.3.
Supponiamo che:

- *Ogni funzione* $f_i\left(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_N(x)\right)$ *e* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ *con* $i, j = 1, \ldots, N$ *è* ***definita*** *e* ***continua*** $\forall x \in [a, b]$ *e* $\forall y_1, y_2, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$ $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

- $\exists h, k \in \mathbb{R}$, *con* $h, k > 0$, *t.c.* $\|F(x, Y)\| \leq h + k\,\|Y(x)\|$, *allora:*

Ogni soluzione per l'equazione $Y'(x) = F(x, Y(x))$ *è* ***definita*** $\forall x \in [a, b]$

NOTA: Il simbolo $\|\vec{v}\|$, per un vettore generico, indica la **norma** di tale vettore

5.1 Equazioni differenziali di ordine n

E' un'implicazione dei casi **visti in precedenza**. Scrivo un'EDO di **ordine n** in **forma normale**:

$$
\begin{cases}
y^{(n)}(x) = f\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \\
y(x_0) = y_0 \\
y'(x_0) = y_1 \\
\quad\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) = y_n
\end{cases}
$$

Ricordo che x_0 deve essere lo **stesso** per tutte le condizioni.

Ogni **problema di Cauchy** per equazioni di **ordine n** può essere **trasformato** in un **sistema di n equazioni** di **grado 1**.

6 Spazi di funzioni

Gli **spazi di funzioni** sono strumenti **utili** per lo studio delle **soluzioni** delle equazioni differenziali.

Sia $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$.
Prendo l'**insieme delle funzioni** definite $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$. Esso è uno **spazio vettoriale** su $\mathbb{R}$. Posso studiare alcuni suoi **sottoinsiemi**:

- $C^0(\mathbb{I})$: E' l'insieme delle funzioni **continue** $\mathbb{I} \to \mathbb{R}$. E' un **sottoinsieme** del precedente.
- $C^1(\mathbb{I})$: E' l'insieme delle funzioni **continue** con **derivata prima** sempre **esistente** e **continua**. E' un **sottoinsieme** di $C^0(\mathbb{I})$.
- $C^2(\mathbb{I})$: E' l'insieme delle funzioni **continue** con **derivata seconda** sempre **esistente** e **continua**. E' un **sottoinsieme** di $C^1(\mathbb{I})$.

A **cascata**, posso definire gli insiemi $C^3,\ C^4, \dots, C^n$ fino a C^∞.

Definizione 6.1 (**Operatore E**).
*Definisco un **operatore** che sarà **utile**:*
$E:\ C^n(\mathbb{I}) \to C^0(\mathbb{I})$
$E\left(y(x)\right) = y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x)$
*E è un **operatore lineare**.*

Considero ora la **seguente equazione**:

$$y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = f(x)$$

Supponiamo che $a_0,\ a_1, \dots,\ a_{(n-1)}$ siano **definite** e **continue** su $\mathbb{I}$, allora:

- $y \in C^n(\mathbb{I})$
- $E\left(y(x)\right) = y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x)$

Questa è un'**applicazione lineare continua**:

$$E\left(\alpha y_1 + \beta y_2\right) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2)$$

Posso dare ora una serie di **risultati teorici utili** riguardo agli spazi di funzioni.

Teorema 6.1 (**Esistenza e unicità globale per soluzioni di EDO lineari**).

- *Siano $a_0,\ a_1, \dots,\ a_{(n-1)}$ **definite** e **continue** su $\mathbb{I}$.*
- *Sia x_0 **interno** a $\mathbb{I}$. Allora:*

$\forall b_0,\ b_1, \ldots,\ b_{(n-1)}$ il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} E(y) = f(x) \\ y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{(n-1)} \end{cases}$$

*Ammette un'**unica soluzione** definita su **tutto** $\mathbb{I}$.*
*Non procediamo con la **dimostrazione**.*

Teorema 6.2.
Date:

1. $y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = 0$
2. $y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)\ y(x) = f(x)$

Allora:

- *L'insieme V_0 delle soluzioni di 1 è uno **spazio vettoriale** di **dimensione n**.*
- *Detta $y_p(x)$ una **soluzione particolare** di 2, l'insieme delle soluzioni di 2 è:*
$$y(x) = V_0 + y_p(x)$$

*Dimostro che l'insieme V_0 delle soluzioni di 1 è uno **spazio vettoriale** di **dimensione n**.*

Dimostrazione 6.2.1.
*Dimostro che il mio insieme è uno **spazio vettoriale**:*
Prendo $y(x) \equiv 0$, che ovviamente soddisfa $E(y) = 0$.
*Siano y_1 e y_2 soluzioni dell'**omogenea**. Ho:*

- $E(y_1) = 0$
- $E(y_2) = 0$

*Poichè E è **lineare**, prendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e ottengo:*

$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2) =$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dimostrato

Dimostrazione 6.2.2.
*Dimostro ora che tale spazio ha **dimensione n**:*
*Prendo $z_0(x)$ e $z_1(x)$, una **base** del mio spazio. Voglio dimostrare che z_1 e z_2 sono **linearmente indipendenti** e **generatori**:*
So che:

- $z_0(x)$ *risolve* ***questo problema***:

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

- $z_1(x)$ *risolve* ***questo problema***:

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

1. *Per dimostrare che sono* ***linearmente indipendenti****, voglio che:*

   $$c_0\ z_0(x) + c_1\ z_1(x) = 0 \text{ solo se } c_0 = c_1 = 0\ \forall x \in \mathbb{I}$$

   Calcolo z_0 *e* z_1 *in* x_0*:*

   $$z(x_0) = c_0\ z_0(x) + c_1\ z_1(x) = c_0 \quad \to \text{Derivo:}$$

   $$z'(x_0) = c_0\ z_0'(x) + c_1\ z_1'(x) = c_1$$

   Per ipotesi avevo $z(x) \equiv 0 \Longrightarrow c_0 = c_1 = 0$
   z_0 *e* z_1 *sono* ***linearmente indipendenti****.*

   Dimostrato

2. *Per dimostare che* ***generano****, voglio dimostrare che posso scegliere* $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ *t.c., data* $w(x)$ *soluzione di* $E(y) = 0$*, vale che:*

   $$w(x) = c_0\ z_0(x) + c_1\ z_1(x)$$

   Scelgo:

   - $c_0 = w(x_0)$
   - $c_1 = w'(x_0)$

   Prendo il ***seguente problema****:*

   $$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \end{cases}$$

   Sia w *che* $c_0\ z_0(x) + c_1\ z_0(x)$ *lo* ***risolvono****.*

   Dimostrato

7 Soluzione delle EDO

Do ora una serie di **teoremi utili** per la risoluzione delle **equazioni omogenee**.

Teorema 7.1 (**Integrali generali**).
*L'**interale generale** dell'equazione $E(y) = f$ si ottiene **sommando**:*

- *L'**integrale generale** dell'**omogenea**.*
- *Una **soluzione particolare** dell'equazione $E(y) = f$*

Dimostrazione 7.1.1.
Sia:

- *y_1 una soluzione di $E(y) = f$*
- *y_0 una soluzione di $E(y) = 0$*

Calcolo $E(y_1 + y_0)$:

$$E(y_1 + y_0) = E(y_1) + E(y_0) = f + 0 = f$$

*Sia y_2 un'**altra soluzione** di $E(y) = f$.*
Calcolo $E(y_2 - y_1)$:

$$E(y_2 - y_1) = E(y_2) - E(y_1) = f - f = 0 = E(y_0)$$

Ho osservato che:

$$\begin{matrix} y_1 + y_0 = y_2 \\ y_2 - y_1 = y_0 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad y_2 = y_1 + y_0$$

Dimostrato

Definizione 7.1 (**Polinomio caratteristico**).
*Data una **EDO omogenea**, ci associo il **polinomio caratteristico**:*

$$y^{(n)} + a_{(n-1)}(x)\ y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\ y'(x) + a_0(x)y(x) = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{(n-1)}(x)\ \lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x)\ \lambda + a_0(x)$$

Teorema 7.2 (**Risoluzione**).
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ (o $\lambda \in \mathbb{C}$). Allora la funzione:

$$y_0(x) = e^{\lambda x}$$

*è **soluzione dell'omogenea** se e solo se λ è una **radice** del **polinomio caratteristico**.*

Dimostrazione 7.2.1.
$y(x) = e^{\lambda x}$ $\rightarrow$ *scrivo le* ***derivate****:*
$y'(x) = \lambda\ e^{\lambda x}$
$\vdots$
$y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$

Ottengo:

$$\begin{aligned} E(y) = \lambda^n e^{\lambda x} + a_{(n-1)}(x)\ e^{\lambda x}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x)\ e^{\lambda x}\lambda + a_0(x)\ e^{\lambda x} = \\ = e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{(n-1)}(x)\ \lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x)\ \lambda + a_0(x)\right) = \\ = P(\lambda)\ e^{\lambda} \end{aligned}$$

Ottengo $P(\lambda)\ e^{\lambda x} = 0$ *se e solo se* $P(\lambda) = 0$

Dimostrato

Teorema 7.3 (**Risoluzione**)**.**
Sia $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *(o* $\lambda_0 \in \mathbb{C}$*) una* ***radice*** *di* ***moleplicità*** *s del polinomio, ossia:*

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{s-1}\, q(\lambda) \text{ con } q(\lambda_0) \neq 0$$

Allora: $e^{\lambda_0 x},\ x\ e^{\lambda_0 x}, \ldots,\ x^{s-1}e^{\lambda_0 x}$ *sono* ***soluzioni linearmente indipendenti*** *di* $E(y) = 0$

Teorema 7.4 (**Soluzioni complesse**)**.**
Sia $\lambda_0 \in \mathbb{C}$*, ossia* $\lambda_0 = \alpha + i\beta m$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, una* ***radice*** *di* ***moleplicità*** *s del polinomio. Allora:*

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ x\ e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x\ e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ \vdots \\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{gathered}$$

Sono soluzioni ***linearmente indipendenti*** *e* ***reali*** *di* $E(y) = 0$