

Indice

Capitolo 1

Le grandezze fisiche

1.1 Grandezze e loro misurazione

L'insieme delle operazioni volte ad associare un numero ad una grandezza fisica si chiama **misurazione** e rende possibile e non ambigua ogni valutazione di uguaglianza o disuguaglianza tra due grandezze della stessa specie. Ogni misura, seppur ottenuta con strumenti diversi, ci consente di ottenere un rapporto con la misura di un'altra scelta come *unità di misura*. Le misure in fisica si definiscono in **modo operativo** ossia attraverso l'utilizzo di molteplici sistemi di misura volti a dare la medesima misura.

1.2 Metodi di misurazione

Il modo per ottenere un numero associato ad una grandezza è quello di confrontare *direttamente* la grandezza con l'unità di misura, in questo modo si ottiene il rapporto tra le due che definisce la misura effettiva. La misurazione diretta richiede innanzitutto l'introduzione di un criterio di confronto per definire l'uguaglianza, un criterio per la def. della somma e la scelta di un campione come unità di misura. Un'altro tipo di misurazione è quella **strumentale**, che utilizza strumenti già precedentemente tarati. Infine c'è anche una misurazione **indiretta**, attraverso le relazioni tra grandezze fisiche.

1.3 Dimensioni delle grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si possono classificare come **fondamentali** o **derivate**. Tradizionalmente nella meccanica le grandezze di lunghezza (L), massa (M) e tempo (T) sono definite come fondamentali e le altre derivate da esse.

Indicando con $[L]$, $[M]$, $[T]$ le dimensioni delle grandezze fisiche, si ottiene che esse sono in relazione nella seguente maniera:

$$[L] = [L^1 M^0 T^0]; \quad [M] = [L^0 M^1 T^0]; \quad [T] = [L^0 M^0 T^1].$$

Le grandezze con potenza zero non contribuiscono alle dimensioni e possono essere tralasciate. Alla stessa maniera si definiscono quelle derivate come superficie e volume:

$$[S] = [L^2 M^0 T^0] = [L^2]; \quad [V] = [L^3 M^0 T^0] = [L^3].$$

Le grandezze nelle quali gli esponenti sono tutti nulli prendono il nome di **adimensionali**, un esempio sono gli angoli:

$$\alpha = \frac{s}{R} \text{ (arco e Raggio).}$$

In ogni legge le dimensioni di entrambi i membri devono sempre essere uguali.

1.4 Sistemi di unità di misura

Multipli e sottomultipli dei sistemi decimali:

Ordine	Nome	Simbolo	Ordine	Nome	Simbolo
10	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	etto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

1.5 Tempo

La definizione di tempo è spiegata negli appunti di chimica, e grazie a tale definizione si è in grado di distinguere intervalli molto piccoli di tempo da $10^{-26} - -10^{17}s$. Tutto ciò che va sopra o sotto tali intervalli non ha senso. Si potrebbe supporre che il tempo sia continuo, ma la meccanica quantistica ci spiega che in realtà molte grandezze che sembravano continue, in realtà sono quantizzate, come la carica dell'elettrone o l'energia associata ad una radiazione. Il tempo in fisica classica è tuttavia assoluto ed uniforme, mentre nella fisica reale non è così.

1.6 Lunghezza

Nella fisica classica lo spazio è *euclideo*, ed il metro è definito tra ordini di grandezza $10^{-18} - -10^{26}m$, sebbene recentemente si è associato la misura più piccola possibile nell'universo come la lunghezza di Planck.

1.7 Massa

Definita tra gli intervalli $10^{-31} - -10^{55}kg$, la massa è in realtà doppiamente definita, da una parte si definisce massa *inerziale* e *gravitazionale*.

1.8 Misure ed indeterminazione

A livello macroscopico potremmo accontentarci di una imprecisione dell'ordine di 10^{-6} metri, ed il che potrebbe anche essere sufficiente per la maggior parte delle misure, tuttavia nel mondo microscopico tale precisione risulterebbe essere un errore macroscopico. Se si tentasse di misurare direttamente un elettrone, la natura ci mostrerebbe uno strano comportamento: se si trovasse accuratamente la sua posizione, avremmo una forte incertezza sulla sua velocità e così anche all'inverso. Questo comportamento segue la legge di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta q_x \geq \frac{h}{4\pi}.$$

dove $h = 6.62606896 \cdot 10^{-34} Js$. A livello macroscopico l'incertezza sulla quantità di moto è irrilevante e in moltissimi casi nemmeno misurabile neanche dagli strumenti più sensibili.

Capitolo 2

Calcolo vettoriale

2.1 Grandezze scalari e vettoriali

I numeri come la massa, il tempo o la temperatura in fisica sono chiamate grandezze **scalari** e si differenziano dalle grandezze **vettoriali** poiché quest'ultime non possono solo essere descritte da un numero ma anche da una direzione e da un verso.



Un vettore ha tre caratteristiche fondamentali:

1. **modulo**: ossia l'intensità;
2. **direzione**: ossia la direzione nello spazio verso cui è orientato;
3. **verso**: ossia il verso di tale direzione.

I vettori possono essere sia **liberi** se non sono fissati su una loro origine, altrimenti **applicati** quando hanno un'origine ben definita.

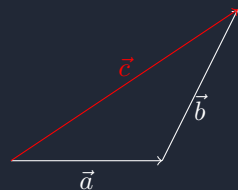
2.2 Definizioni vettoriali

Due vettori sono uguali quando hanno stesso modulo, direzione e verso, sono **opposti** se $\vec{b} = -\vec{a}$.

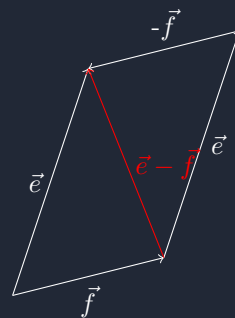
2.3 Somma e differenza di vettori

La somma tra due vettori gode della proprietà **commutativa** e **associativa**, inoltre la somma avviene sommando le componenti dei vettori, la sottrazione è uguale alla somma di un vettore con l'inverso del secondo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



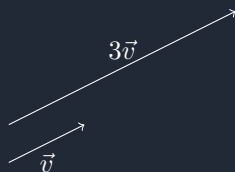
$$\vec{d} = \vec{e} - \vec{f}$$



2.4 Prodotto di uno scalare per un vettore

Il prodotto tra un vettore ed uno scalare è così definito ed ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a} = \lambda \vec{v}.$$



1. $\lambda(\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$;
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;
3. $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;
4. $\lambda\vec{a} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oppure $\vec{a} = 0$.

2.5 Versori

Il rapporto tra un vettore qualsiasi \vec{a} ed il suo modulo è per definizione un vettore adimensionale e prende il nome di **versore**:

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

e quindi, dato che il vettore è sia vincolato al modulo che ad una direzione ed un verso, allora si può esprimere ($a_u = |\vec{a}|$, in questo caso è messa in risalto la sua dipendenza dal versore):

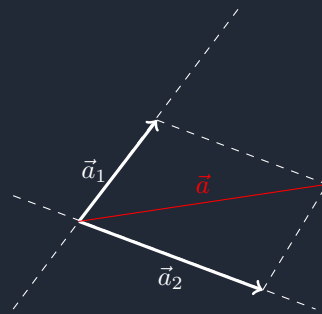
$$\vec{a} = a_u \hat{u}.$$

2.6 Scomposizione di vettori

Un qualsiasi vettore \vec{a} può essere espresso come somma dei versori \hat{u}_1 e \hat{u}_2 se è complanare al piano σ individuato dai versori stessi, per cui:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1 \hat{u}_1 + a_2 \hat{u}_2$$

Da notare che i versori si chiamano *i componenti* e non *le componenti*, in quanto le componenti di un vettore sono le parti scalari che lo compongono, mentre i componenti sono i versori del vettore. Se \vec{a} non giacesse sul piano, allora sarebbe necessario un versore non complanare.



2.7 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è anche definito come prodotto interno tra due vettori poiché opera sullo stesso piano di appartenenza dei vettori utilizzando l'angolo tra di essi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\theta).$$

Le proprietà del prodotto scalare sono le seguenti:

1. commutativa;
2. distributiva lineare;
3. $\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Il prodotto scalare tra due vettori è quindi considerato come il prodotto del modulo di uno qualsiasi di essi per la proiezione ortogonale dell'altro sul primo

2.8 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale invece è il prodotto di un vettore per un altro e dà come risultato un terzo vettore ortogonale al piano individuato tra i due.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Ha le seguenti caratteristiche:

1. Il modulo del nuovo vettore è $c = ab|\sin(\theta)|$;
2. Direzione \perp al piano di \vec{a}, \vec{b} ;
3. Verso nel quale disporsi determinato dalla rotazione antioraria del primo vettore sul secondo (se $< \pi$), determinato con la regola della mano destra.

Valgono le seguenti proprietà:

1. anticommutativa: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. distributiva: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
3. $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

2.9 Rappresentazione cartesiana ortogonale

Il sistema di coordinate più utilizzato consiste nell'utilizzo di tre rette orientate passanti per uno stesso punto O chiamato origine e \perp tra loro x, y, z ed i cui versori sono $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. Una retta orientata sulla quale sia stato definito un punto specifico detto *origine* prende il nome di *asse*, e quindi le tre rette ed lo spazio che identificano prende il nome di **terna cartesiana ortogonale**.

$$\vec{v} = \begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} = v \cos(\alpha) \\ v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} = v \cos(\beta) \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} = v \cos(\gamma) \end{cases}$$

Dove α, β, γ sono gli angoli che il vettore forma rispettivamente con l'asse x, y, z.

2.10 Equivalenza tra rappresentazioni vettoriali

Col teorema di Pitagora si ricava che:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

e quindi il versore di questo vettore sarà

$$\hat{u}_v = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}.$$

2.11 Espressioni cartesiane delle operazioni tra vettori

Dati due vettori, espressi in componenti cartesiane ortogonali, $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ e $\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$, valgono le seguenti:

1. $\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\hat{i} + (v_y + w_y)\hat{j} + (v_z + w_z)\hat{k}$;
2. $\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow v_x = w_x, \quad v_y = w_y, \quad v_z = w_z$;
3. $\lambda\vec{v} = \lambda v_x\hat{i} + \lambda v_y\hat{j} + \lambda v_z\hat{k}$;
4. $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$;
- 5.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\hat{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\hat{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\hat{k}.$$

2.12 Derivazione di vettori

Prendendo un vettore in funzione di qualche variabile tipo: $\vec{w} = \vec{w}(t)$, la sua derivata sarà:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + \Delta t) - \vec{w}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t}.$$

Si applicano le regole di derivazione, la regola di derivazione del prodotto vettoriale è uguale a quella del prodotto scalare che a sua volta coincide con la regola della derivata del prodotto.

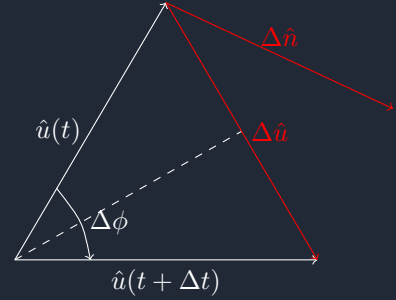
2.13 Derivate di versori e di vettori

La derivata del versore \hat{u} di un vettore \vec{v} , per $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta \phi \rightarrow 0$, si ha che $\Delta \hat{u}$ tende ad essere \perp rispetto a $\hat{u}(t)$:

$$\frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta \phi} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}.$$

Passando ora al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ha:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \phi}{2}}{\frac{\Delta \phi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}.$$



Si ottiene dunque la seguente relazione, in quanto il versore \hat{n} è il versore perpendicolare al versore \hat{u} e che dà il verso al versore $\Delta \hat{u}$:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}.$$

Per caratterizzare la rotazione di \hat{u} si utilizza invece un'altro vettore \vec{w} che ha modulo $\frac{d\phi}{dt}$, direzione \perp al piano dei due vettori e verso tale da individuare la rotazione del versore di partenza: $\vec{w} = \hat{u} \times \hat{n}$. Si dimostra quindi che:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n} = \vec{w} \times \hat{u}. \quad (2.1)$$

Detto quindi \hat{u}_w il versore di \vec{w} , si ha che:

$$\vec{w} = \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_w; \quad \hat{u}_w = \hat{u} \times \hat{n}.$$

Poiché $\hat{u}, \hat{n}, \hat{u}_w$ costituiscono una terna ortogonale destra, di conseguenza si ottiene che:

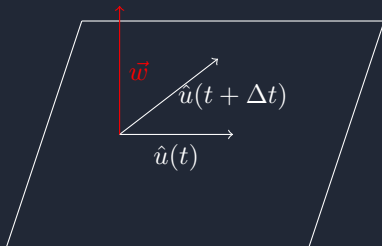
$$\vec{w} \times \hat{u} = \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \hat{u}_w \times \hat{u} = \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \hat{n} = \frac{d\hat{u}}{dt}.$$

Preso però un generico vettore $\vec{z}(t)$ si può scrivere allora:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(z\hat{u}_z) = \frac{dz}{dt}\hat{u}_z + z\frac{d\hat{u}_z}{dt} = \frac{dz}{dt}\hat{u}_z + z\vec{w} \times \hat{u}_z$$

quindi:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + \vec{w} \times \vec{z} \quad (2.2)$$



2.14 Momento di un vettore applicato

Conoscere il punto di applicazione di un vettore è fondamentale per alcune grandezze come il lavoro oppure il momento torcente etc... Un vettore \vec{m} applicato (in A) rispetto ad un punto Ω chiamato *polo*, è il vettore libero definito come:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (2.3)$$

Dove $\vec{r} = \vec{\Omega A}$, ed è \perp al piano e individuato dai due vettori del prodotto vettoriale e ha come modulo $m = rv \sin(\theta)$. Mostriamo ora come il momento non dipenda dal polo, ma dalla posizione della retta di applicazione rispetto al polo stesso: presi i due vettori $\vec{r} = \vec{\Omega A}$, \vec{v} , consideriamo un punto B che appartiene alla retta su cui giace \vec{v} , il quale è traslato in modo da essere applicato in B invece che in A. Il momento risultante sarà dunque:

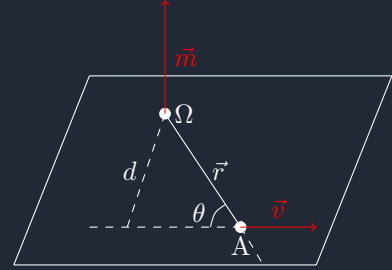
$$\vec{m}' = \vec{\Omega B} \times \vec{v} = (\vec{\Omega A} + \vec{AB}) \times \vec{v} = \vec{\Omega A} \times \vec{v} = \vec{m}.$$

in quanto i due vettori \vec{AB} e \vec{v} sono paralleli. Ne consegue che il momento non cambia se spostiamo il punto di applicazione del vettore lungo la sua retta di azione. Si definisce **momento assiale** di \vec{v} rispetto ad un asse di versore \hat{u} la grandezza scalare:

$$m_u = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{u} \quad (\text{con } \vec{r} = \vec{\Omega A}).$$

La posizione di Ω sulla retta d'azione non cambia il momento assiale del vettore. Il momento assiale (se il vettore \vec{m}) è parallelo all'asse z, diventa:

$$m_z = \vec{m} \cdot \hat{k} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{k}.$$



2.15 Vettore posizione e sistemi di coordinate

Il vettore posizione è un vettore particolare poiché è definito a partire da un'origine nella quale il suo modulo è pari a zero. Nei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali il vettore posizione può essere scomposto nelle sue tre componenti:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (2.4)$$

2.16 coordinate polari piane

Su un piano cartesiano, oltre all'utilizzo delle coordinate cartesiane, si può utilizzare anche un sistema di coordinate che fa utilizzo di una coppia di scalari che esprimono la distanza dall'origine, anche chiamata **polo**, e l'angolo del vettore posizione $\vec{r} = \vec{OP}$. Ogni punto sul piano possiede una coppia di versori chiamati *versore radiale* che è il versore del vettore posizione ed il *versore trasverso* che è il versore della tangente in P alla circonferenza di raggio OP.

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}; \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.6)$$

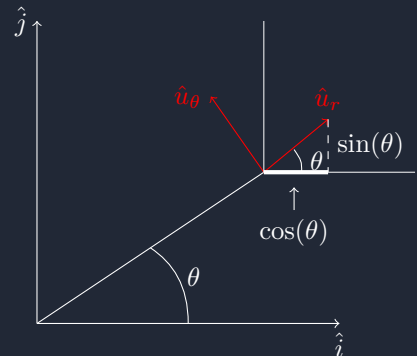
La dipendenza da \hat{u}_r e da \hat{u}_θ da θ si evince chiaramente dalla figura ??;

$$\begin{cases} \hat{u}_r = (\hat{u}_r \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_r \cdot \hat{j})\hat{j} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \\ \hat{u}_\theta = (\hat{u}_\theta \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_\theta \cdot \hat{j})\hat{j} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \end{cases} \quad (2.7)$$

Si ottengono anche le derivate di questi versori:

$$\frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = \hat{u}_\theta; \quad \frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = -\hat{u}_r. \quad (2.8)$$

Figura 2.1: Relazione tra versori polari piani e cartesiani



2.17 Coordinate polari sferiche

E' un sistema di coordinate che si basa sulla scelta di un origine O, l'asse **polare** e di un semipiano σ di riferimento contenente tale asse. Le superfici individuate sono:

1. Le sfere individuate dal loro raggio \vec{r} ;
2. Il semicono con vertice O e base il cerchio su cui è poggiato il punto P e caratterizzato dalla colatitudine θ ;
3. I semipiani passanti per l'asse polare e caratterizzati dalla longitudine ϕ

Le coordinate del punto P sono quindi esprimibili attraverso il \vec{r} , θ e ϕ , mentre il vettore nel punto è scomponibile in tre componenti: \vec{e}_r , \vec{e}_ϕ e \vec{e}_θ , che sono rispettivamente perpendicolari alle superfici sferica, conica e al semipiano. Questa terna di vettori prende il nome di **terna locale** in quanto dipende dal punto P scelto. Nel caso in cui l'asse polare coincida con z ed il semipiano passi per coincida con $y = 0$, le coordinate di P sono:

$$P = \begin{cases} x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.9)$$

Si ottiene allora che il versore \hat{u}_r sarà dato da:

$$\hat{u}_r = \sin \theta \cdot \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \cdot \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} \quad (2.10)$$

E che le espressioni cartesiane degli altri versori sono:

$$\hat{u}_\theta = \cos \theta \cdot \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \cdot \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \quad (2.11)$$

$$\hat{u}_\phi = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (2.12)$$

2.18 Coordinate polari cilindriche

Analogamente alle coordinate polari sferiche, le coordinate polari cilindriche si basano sulla scelta di una retta orientata Oz di riferimento e di un semipiano σ di riferimento contenente tale asse. Si chiama ora π il semipiano passante per O e \perp Oz, le superfici sono:

1. I piani paralleli al piano π individuati dalla quota z dove il vettore \vec{P}_z è \perp ;
2. Le superfici cilindriche con asse di simmetria Oz definite dal raggio \vec{r} della sezione normale del cilindro; alla superficie cilindrica per P è $\perp \vec{P}_r$;
3. I semipiani passanti per Oz caratterizzati dall'angolo θ formati con σ ai quali sono $\perp \vec{P}_\theta$

Le coordinate cilindriche di un punto generico sono date dagli scalari appena visti che individuano le coordinate che si intersecano in P. Le relazioni sono dunque:

$$P = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (2.13)$$

Allora la rappresentazione dei tre versori è dunque:

$$\hat{P}_z = \hat{k} \quad (2.14)$$

$$\hat{P}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (2.15)$$

$$\hat{P}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (2.16)$$

Figura 2.2: Versori delle coordinate polari sferiche

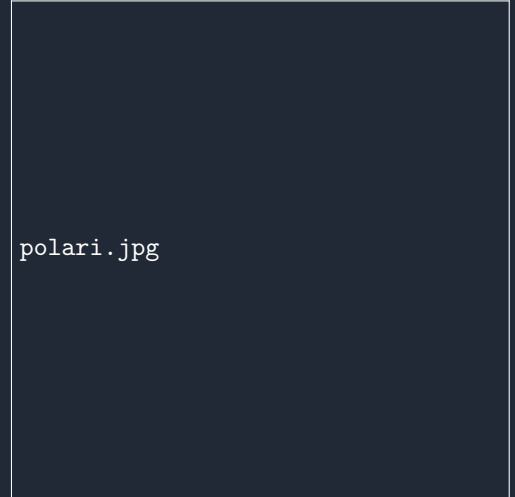
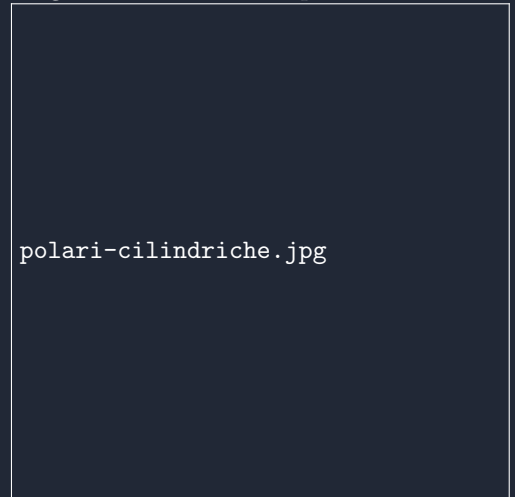


Figura 2.3: Coordinate polari cilindriche



Capitolo 3

Cinematica

3.1 Sistemi di riferimento

Il concetto di moto presuppone l'esistenza di qualcos'altro su cui fare riferimento. La scelta di un sistema di riferimento è arbitraria e sistemi di riferimento più semplici e comodi permettono di giungere a conclusioni velocemente. Un'insieme di riferimento è composto da corpi, osservatori, regoli e orologi tutti fissi gli uni rispetto agli altri.

3.2 Lo schema del punto materiale

I corpi possono avere le più varie forme dimensioni e caratteristiche anche se in molte situazioni è possibile adottare una schematizzazione che consiste nel trascurare le dimensioni geometriche e di ridurre un corpo ad un punto geometrico in cui è concentrata tutta la massa che prende il nome di **punto materiale**. Questa approssimazione è accettabile quando le dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze che vengono percorse e non influiscono in maniera rilevante sulle caratteristiche del moto.

3.3 Equazioni vettoriali di un moto: traiettoria e legge oraria

Si dice che un corpo è in moto rispetto ad un dato sistema di riferimento S quando la sua posizione in S cambia nel tempo. Nello schema di un punto materiale le caratteristiche sono fornite dalla conoscenza del vettore posizione \vec{r} in funzione del tempo.

Nell'ipotesi che il tempo sia continuo, si può affermare che:

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t + \Delta t)| \rightarrow 0, \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

E questo ci porta a definire il moto come continuo portando alla funzione vettoriale di dipendenza del vettore posizione dal tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (3.2)$$

La funzione vettoriale è anche rappresentabile mediante le tre funzioni scalari:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

Con queste informazioni si può costruire la **traiettoria** del corpo, ossia l'insieme delle posizioni occupate in certi istanti di tempo. A livello geometrico questa è un caso particolare della rappresentazione in forma parametrica di una curva nello spazio. Per separare l'aspetto geometrico da quello cinematico si usa la **rappresentazione intrinseca di un moto**.

Supponiamo di conoscere la traiettoria γ di un punto materiale e supponiamo di creare una successione di segmenti infinitesimi definendo un'origine Ω , un verso e un'unità di misura. Ad ogni punto P si fa corrispondere s ossia un numero reale chiamato **ascissa curvilinea** e sarà positivo o negativo a seconda se si trova dopo o prima di Ω . Grazie ad s possiamo ricavare l'**equazione della traiettoria** e l'equazione $s = s(t)$ ci fornisce la **legge oraria**.

3.4 La velocità

3.4.1 Il concetto di velocità

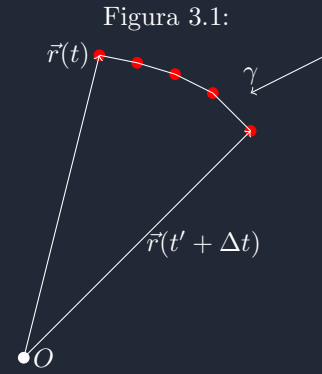
Osservando un dato moto con una macchina fotografica che scatta delle foto ogni $\Delta\tau$ secondi, si osserva una certa regolarità che è più evidente nei casi in cui si diminuisca $\Delta\tau$; ci si aspetta dunque che la curva formata dal moto goda di certe proprietà di regolarità.

3.4.2 Il vettore velocità

Con riferimento ad un esperimento di lancio di una pallina orizzontalmente, si osserva che la pallina sembra compiere due moti distinti, uno verticale (quadratico) ed uno orizzontale (lineare), con queste assunzioni possiamo considerare due istanti: $t' = t + \Delta t$. Poste come P e P' le posizioni occupate dalla pallina negli istanti t e t' e $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t')$ i corrispondenti vettori posizione rispetto all'origine O del sistema di riferimento. Una prima informazione sul moto è data da:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t) \quad (3.4)$$

Naturalmente si tratta di un'informazione sulla velocità media su quanto è accaduto tra i due istanti di tempo e non ci dà informazioni su come si sia mossa la pallina tra i due istanti, se abbia seguito una traiettoria retta oppure una parabola...



$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (3.5)$$

La **velocità media** non dipende dal percorso ma dalle posizioni iniziali e finali. Si ottengono più informazioni però dal vettore **velocità istantanea** al ridursi di Δt :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Si conclude, tenendo a mente la derivata di un vettore, che \vec{v} è:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (3.7)$$

Le caratteristiche generali di questo vettore sono ottenute dall'analisi del moto di un corpo, in modo da ottenere la curva γ con opportune approssimazioni ed interpolazioni. Si osserva per ipotesi, che la velocità istantanea è esattamente parallela allo spostamento $P\vec{P}'$ e ha quindi la direzione della retta che interseca γ in P e P' . In altri termini:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|P\vec{P}'|}{|\Delta s|} = 1 \quad (3.8)$$

3.4.3 Rappresentazione della velocità

Dati due punti P e P' della curva individuate dalle ascisse curvilinee s ed $s' = s + \Delta s$ e detto $\Delta\vec{r}$ il vettore $P\vec{P}'$, si considera il rapporto $\Delta\vec{r}/\Delta s$ e il suo limite per $\Delta s \rightarrow 0$. Questo vettore ha la direzione della secante e il verso concorde con gli archi crescenti. Il limite tende ad assumere la direzione della tangente alla curva in P ed ad avere modulo unitario con verso concorde con quello dell'orientamento della curva. Esso è dunque il **versore tangente** alla curva orientata e si esprime come:

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad (3.9)$$

Si può stabilire il legame tra della velocità con le equazioni della traiettoria e con la legge oraria tenendo conto del ruolo di variabile intermedia fra \vec{r} e t giocato da s :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t \quad (3.10)$$

Questa mostra che il modulo è dato da $\left|\frac{ds}{dt}\right|$ ed il vettore \vec{v} coincide con \hat{u}_t e la grandezza:

$$v_s = \frac{ds}{dt}$$

è la parte scalare della velocità rispetto al versore \hat{u}_t ed è chiamata anche **velocità scalare**:

$$\vec{v} = v_s \hat{u}_t = \dot{s} \hat{u}_t \quad (3.11)$$

Essendo a conoscenza della dell'equazione oraria del moto si può determinare l'equazione della velocità scalare ad ogni istante con la derivazione rispetto al tempo.

Si è detto come il moto possa considerarsi la successione di di spostamenti infinitesimi $d\vec{r} = \vec{v}dt$ in intervalli temporali dt e tali spostamenti hanno direzione e verso uguale a alla velocità istantanea e modulo proporzionale a dt . Lo **spazio percorso** è quindi la somma delle lunghezze degli archi infinitesimi percorsi $|ds| = |\vec{v}|dt = vdt$.

$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \quad (\text{spazio percorso}) \quad (3.12)$$

Essendo lo spazio percorso per definizione non negativo (può essere nullo tuttavia), questa quantità è in genere diversa dalla somma degli archi infinitesimi ds ossia dall'integrale definito della velocità scalare, che dà la differenza fra i valori iniziali e finali dell'ascissa curvilinea:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_s(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{s_1}^{s_2} ds \quad (3.13)$$

La quale potrebbe essere nulla anche se il corpo è in movimento.

Oltre che alla forma intrinseca, la velocità si rappresenta anche in forma cartesiana a seconda del sistema di coordinate usato per il vettore posizione nel sistema scelto. In un sistema di riferimento con origine O, \vec{r} ha la rappresentazione cartesiana e quindi dato che i versori $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ degli assi coordinati non dipendono da t , si può scrivere:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \quad (3.14)$$

Le componenti cartesiane di \vec{v} sono dunque le derivate rispetto al tempo delle corrispondenti componenti del vettore posizione.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

e quindi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

Il modulo è quindi calcolabile come: $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

3.5 L'accelerazione

Durante il moto il vettore \vec{v} non resta costante al trascorrere del tempo ma cambia poiché variano il suo modulo, la sua direzione orientata o entrambi. Se ad un dato istante t la velocità è $\vec{v}(t)$ e all'istante $t' = t + \Delta t$ la velocità è $\vec{v}(t')$ si definisce **accelerazione media** nell'intervallo Δt il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (3.15)$$

L'accelerazione istantanea è dunque:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Questo essendo il limite del rapporto incrementale della velocità è la **derivata prima del vettore velocità**:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (3.17)$$

L'espressione cartesiana dell'accelerazione è dunque:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} \quad (3.18)$$

Con:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

3.5.1 Rappresentazione dell'accelerazione

Il vettore accelerazione riflette le diverse possibili variazioni elementari del vettore velocità. In generale il vettore \vec{a} è esprimibile come la somma di due componenti distinte: una parallela alla velocità e collegato alla rapidità di variazione della sua parte scalare e un'altro perpendicolare alla velocità dipendente dalla rapidità di variazione della sua direzione.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_t + v_s \frac{d\hat{u}_t}{dt} \quad (3.19)$$

Allora dato che $v_s = \frac{ds}{dt}$ si ha che la componente tangenziale:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{u}_t = \ddot{s} \hat{u}_t \quad (3.20)$$

Tale componente ha lo stesso verso di \hat{u}_t se la velocità scalare cresce. Esso è il componente di \vec{a} che riflette le variazioni del modulo e/o del verso di \vec{v} e viene anche detto componente tangenziale di \vec{a} chiamata **accelerazione tangenziale**.

Per ottenere un'espressione più significativa del secondo componente di \vec{a} si esplicita la derivata di \hat{u}_t rispetto al tempo. Essendo il versore tangente $\hat{u}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$ dipende dalla scelta del verso positivo per le ascisse curvilinee sulla traiettoria, e non dalle effettive caratteristiche istantanee del moto. Conviene quindi esprimere la dipendenza di \hat{u}_t dal tempo attraverso la variazione di \hat{u}_t al cambiare di s :

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\hat{u}_t}{ds}$$

La derivata del versore \hat{u}_t rispetto a s è la caratteristica intrinseca della traiettoria dipendente dalle sue proprietà locali in P; con il medesimo procedimento si trova:

$$\frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \hat{u}_n \quad (\text{vettore } \perp)$$

Dalla geometria un elemento di curva attorno ad un generico punto P può essere approssimato con un elemento di arco di circonferenza, il cui cerchio associato è detto *cerchio osculatore* e ha il centro nel **centro di curvatura** della curva P e raggio ρ mentre la curvatura è data da $1/\rho$. La retta \perp alla tg in P della curva è chiamata normale principale e il versore della sua direzione è proprio \hat{u}_n . Tutte queste proprietà sono locali poiché dipendono dal punto P. Poiché $d\phi$ è uguale all'angolo $\frac{ds}{\rho}$ sotto il quale viene visto l'elemento di arco di curva dal centro di curvatura si ha allora che:

$$\frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \hat{u}_n \quad (3.21)$$

Allora sostituendo nell'espressione di \vec{a}_t si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n \quad (3.22)$$

$$= \ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (3.23)$$

La componente normale dell'accelerazione è \vec{a}_n ed è sempre non negativa per cui \vec{a}_n punta sempre al centro di curvatura; essa è chiamata allora **accelerazione centripeta** ed è esprimibile come:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (3.24)$$

Figura 3.2: Cerchio osculatore

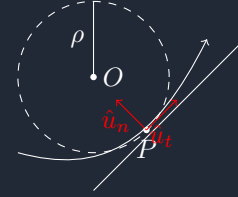
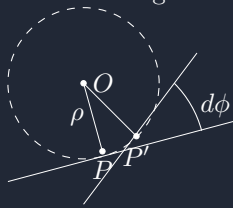


Figura 3.3: L'angolo $d\phi$ fra le tangenti in P e P' è uguale all'angolo al centro formato da CP e CP'

Quindi \vec{a}_n è presente in ogni moto su traiettoria non rettilinea e ogni moto di curva è dunque accelerato. Nella sua rappresentazione intrinseca (ossia con i versori), l'accelerazione ha modulo:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Non si potrebbe introdurre un terzo vettore, chiamato per esempio strappo che determina la velocità di variazione dell'accelerazione? Sì, potremmo indicarlo come: $\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$ ma come si vedrà, l'accelerazione è l'unica che ci interessa.

3.6 I moti elementari

Le due relazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n \end{cases} \quad (3.25)$$

ci permettono di definire in modo semplice i moti elementari su traiettoria nota poiché riescono a separare l'aspetto cinematico da quello geometrico della traiettoria nel piano.

Fissando l'attenzione sull'equazione oraria si possono definire diverse classi di moti:

1. Moti uniformi (\dot{s} costante);
2. Moti uniformemente vari (con \ddot{s} costante);
3. Moti rettilinei ($\rho \rightarrow \infty$);
4. Moti circolari (ρ costante).

3.6.1 Moti con \dot{s} costante

La ricerca della funzione $s(t)$ di cui è nota la derivata, equivale a trovare una primitiva di $\dot{s}(t)$ e farne l'integrale indefinito:

$$s(t) = \int \dot{s}(t)dt + c \quad (3.26)$$

nel caso in cui \dot{s} sia costante si ha che:

$$s(t) = \dot{s}_0 t + c \quad (3.27)$$

Il valore c si determina a conoscenza dell'ascissa curvilinea $s_0 = s(t_0)$ ad un certo istante t_0 e quindi:

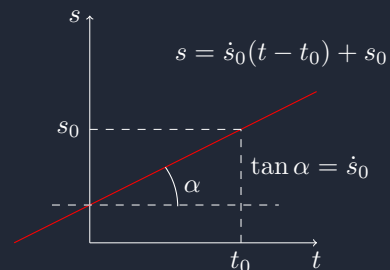
$$s(t) - s(t_0) = \dot{s}_0(t - t_0) \Rightarrow s(t) = \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \quad (3.28)$$

Ossia l'equazione oraria del moto uniforme. Se invece si ha che $t_0 = 0$ allora:

$$s = \dot{s}_0 t + s_0 \quad (3.29)$$

da cui si deduce che nel moto uniforme il punto materiale percorre archi di traiettoria di uguale lunghezza in tempi uguali. Si ottiene lo stesso risultato con il processo di separazione di variabili.

Figura 3.4: Diagramma orario del moto uniforme



3.6.2 Moti con \ddot{s} costante

In questo caso si ha che $\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}_0$ e separando le variabili \dot{s} e t si ha che $d\dot{s} = \ddot{s}_0 dt$. Scelto allora $t_0 = 0$ ed integrando per si ottiene:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0 \quad (3.30)$$

Ossia la legge oraria con cui varia nel tempo la velocità scalare e che può essere scritta come

$$\frac{ds}{dt} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0 \quad (3.31)$$

per cui separando le variabili ed integrando si ottiene:

$$ds = \ddot{s}_0 t dt + \dot{s}_0 dt \Rightarrow \int ds = \int \ddot{s}_0 t dt + \int \dot{s}_0 dt = \ddot{s}_0 \int t dt + \dot{s}_0 \int dt \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow s = \frac{1}{2} \ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 \quad (3.33)$$

Ossia la legge oraria dei moti uniformemente vari. Estendendo il caso generale con $(t - t_0)$ si ottiene quindi le due relazioni:

$$\begin{cases} \dot{s} = \ddot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2} \ddot{s}_0(t - t_0)^2 + \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Eliminando dunque t si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2\ddot{s}_0(s - s_0) = v_0^2 + 2a_t(s - s_0) \quad (3.35)$$

3.7 I moti rettilinei

Il moto rettilineo è di gran lunga il moto più importante poiché qualsiasi moto in tre dimensioni può essere visto come la composizione dei moti rettilinei sui tre assi cartesiani nei quali si ha che $\hat{u}_t \parallel \text{velocità} \parallel \text{accelerazione e spostamenti}$. Due casi particolari sono:

3.7.1 Uniforme

Se lo scalare v_0 è costante, allora risulta che:

$$x(t) = v_0 t + x_0 \quad (3.36)$$

3.7.2 Uniformemente accelerato

Sappiamo che:

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (3.37)$$

mentre l'equazione che esprime la dipendenza temporale dalla parte scalare della velocità è data da:

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0 \quad (3.38)$$

3.8 Moti circolari

Il moto circolare è molto importante in fisica poiché si utilizza per lo studio delle orbite dei pianeti (molto approssimato) e dell'elettone nel modello di Bohr.

3.8.1 Geometria e versori intrinseci della traiettoria

Scegliendo un asse cartesiano con origine centrata al centro del cerchio che descrive la traiettoria del moto circolare, allora si ha le equazioni parametriche del moto circolare in termini di θ ha la forma:

$$x = R \cos \theta; \quad y = R \sin \theta; \quad z = 0. \quad (3.39)$$

Durante il moto il vettore posizione ha modulo costante R e come versore:

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{R} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (3.40)$$

Assunto sulla circonferenza un sistema di coordinate curvilinee con origine Ω e orientazione *antioraria* si ha che: $s = R\theta$ la traiettoria è rappresentata da:

$$\vec{r}(s) = R \cos \frac{s}{R} \hat{i} + R \sin \frac{s}{R} \hat{j} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (3.41)$$

In ogni punto della traiettoria i *versori tangente* \hat{u}_t e *normale* \hat{u}_n sono diretti come in figura; dato che il centro O e il raggio di curvatura con il raggio R della circonferenza si ottiene

$$\hat{u}_t = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (3.42)$$

$$\hat{u}_n = R \frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j} = -\hat{u}_r \quad (3.43)$$

3.8.2 Moto circolare uniforme

Se la velocità scalare e anche $\dot{\theta} = v_0/R$ è costante allora il moto è uniforme e vale:

$$\theta(t) = \frac{v_0}{R}(t - t_0) + \theta_0 \quad (3.44)$$

Essendo allora $\dot{s} = 0$ l'accelerazione ha solo il componente normale:

$$\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{u}_n = \frac{v_0^2}{R} \hat{u}_n$$

Così come per i moti vari, l'accelerazione è solo centripeta per cui in questo moto è costante in modulo ma non in direzione. Considerato il caso $\theta_0 = 0$ e sia $\dot{\theta}_0 \omega > 0$ allora il punto materiale all'istante $t = 0$ si trova in Ω e si muove sulla circonferenza con velocità scalare $v_0 = \omega R$. Essendo allora $\theta = \omega t$ e $s = \omega R t$ si trovano le seguenti espressioni per $\vec{r}(t)$ derivando rispetto al tempo per $\vec{v}(t)$ e $\vec{a}(t)$:

$$\begin{cases} \vec{r} = R \cos(\omega t) \hat{i} + R \sin(\omega t) \hat{j} \\ \vec{v} = -\omega R \sin(\omega t) \hat{i} + \omega R \cos(\omega t) \hat{j} = \omega R \hat{u}_t \\ \vec{a} = -\omega^2 R \cos(\omega t) \hat{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \hat{j} = -\omega^2 \vec{r} \end{cases} \quad (3.45)$$

3.8.3 Moto circolare uniformemente vario

In questo caso la velocità scalare varia linearmente nel tempo e l'equazione oraria si trasforma come:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + s_0 = \quad (3.46)$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{R} (t - t_0)^2 + \frac{v_0}{R} (t - t_0) + \theta_0 \quad (3.47)$$

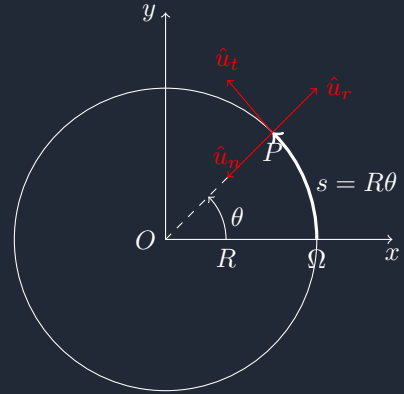
3.8.4 Grandezze angolari

Il moto circolare introduce nuove grandezze cinematiche e la sua comodità è quella di avere il vettore posizione \vec{r} costante nel tempo per cui la sua derivata:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad (3.48)$$

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{k} = \dot{\theta} \hat{k}. \quad (3.49)$$

Figura 3.5: Ascissa curvilinea s ed anomalia θ in moto circolare



Dove \hat{k} è un vettore \perp al piano del moto: il vettore $\vec{\omega}(t)$ è chiamato **velocità angolare** e caratterizza la rapidità di variazione nel tempo della direzione del versore \vec{r} . Dalla definizione discende che la velocità angolare ha il verso di \hat{k} se la variazione è positiva altrimenti il verso opposto.

In un moto circolare generico il modulo ed il verso di ω cambiano col tempo ma la direzione è sempre la stessa, il vettore **accelerazione angolare** è definito come:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{k} = \dot{\omega} \hat{k} \quad (3.50)$$

che è \perp al piano del moto. Anche l'accelerazione \vec{a} si esprime in funzione delle grandezze angolari:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.51)$$

Per cui si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (3.52)$$

Se l'origine del sistema di riferimento è proprio il centro della circonferenza allora si può esprimere come:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad (3.53)$$

E nel moto circolare uniforme si riduce a $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$.

Le definizioni della velocità e dell'accelerazione angolari possono essere estese a traiettorie non circolari e eventualmente anche non piane assumendo in tal caso che il punto materiale si muova lungo un arco infinitesimo di un cerchio osculatore.

3.8.5 Periodicità del moto circolare uniforme

Dopo aver ruotato di 2π i vettori \vec{r} , \vec{v} e \vec{a} si ripetono periodicamente, e proprio il moto circolare uniforme è l'esempio perfetto del **moto periodico**. Un moto è definito periodico se, in un dato sistema di riferimento a partire da un qualsiasi istante t le sue caratteristiche si ripresentano inalterate dopo un intervallo di tempo T chiamato **periodo**. Un moto periodico è quindi tale che $\forall t, n$:

$$\vec{r}(t + nT) = \vec{r}(t)$$

Il periodo del moto circolare è:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \quad (3.54)$$

Infatti, passando da t a $t+T$ i valori delle funzioni trigonometriche non cambiano in quanto il loro argomento θ varia di $\omega T = \pm 2\pi$.

La **frequenza** è il numero di periodi in un unità di tempo (in genere il secondo):

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (3.55)$$

mentre la **pulsazione** coincide con la velocità angolare nel moto uniforme e quindi non ha validità generale:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (3.56)$$

3.8.6 Equazioni differenziali del moto circolare uniforme

La relazione

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}$$

si può anche esprimere come:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r} \quad (3.57)$$

dove la pulsazione corrisponde alle due equazioni:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t); \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 y(t). \quad (3.58)$$

Tali equazioni hanno la medesima struttura del tipo:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega_0^2 f(t) = 0 \quad (3.59)$$

Una funzione del tipo:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \delta) \quad (3.60)$$

è l'integrale generale dell'equazione differenziale.

3.9 Moto oscillatorio armonico

Considerato un punto materiale che si muove lungo una retta, che scegliamo come asse x , secondo la legge oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.61)$$

Dato che il coseno è un numero puro, A ha le dimensioni di una lunghezza e prende il nome di **ampiezza** (o *elongazione*), l'argomento del coseno prende il nome di **fase**; ϕ_0 è il valore all'istante iniziale ed è dunque la **fase iniziale**, la terza costante è invece la pulsazione.

Da questo, essendo il coseno periodico e dipendente da t , allora anche la funzione risultante sarà periodica e quindi si ripete regolarmente da un qualsiasi istante t ad ogni periodo T e poiché un cambiamento di fase di 2π corrisponde ad un intervallo di tempo T , allora

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Il moto in questione ha come legge oraria una funzione coseno di ampiezza A , ma il moto vero e proprio avviene su una traiettoria rettilinea. Per ogni valore di t si può calcolare:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ a_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (3.62)$$

Velocità ed accelerazione hanno lo stessa Periodicità del moto ma sono sfasate in anticipo rispettivamente di $\pi/2$ e π . A partire dalla soluzione generale dell'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ si può ricavare la soluzione particolare corrispondente alle assegnate condizioni iniziali attraverso le seguenti:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \cos \phi_0 \\ v_x(0) = v_{0x} = -\omega_0 A \sin \phi_0 \\ \tan \phi_0 = -\frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

Si parla di moto oscillatorio armonico anche su traiettoria qualunque, quando la funzione $s(t)$ soddisfa la corrispondente differenziale:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (3.63)$$

Ogni funzione periodica secondo il teorema di Fourier può essere espressa attraverso la serie:

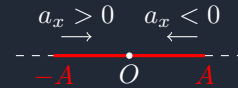
$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^N c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (3.64)$$

E dunque ogni moto armonico complesso diventa la somma finita o infinita di moti armonici semplici.

3.10 Moto piano in coordinate polari

In questo paragrafo si vedrà come i sistemi di coordinate polari sono applicabili ai moti nel piano, in quanto, spesso, il sistema di coordinate polari è un metodo di gran lunga migliore per potere determinare posizioni, velocità ed accelerazioni dei corpi.

Figura 3.6: Traiettoria del moto oscillatorio armonico



Ogni vettore parallelo al piano in termini dei suoi versori \hat{u}_r e \hat{u}_θ relativi al generico punto P chiamati *componente radiale e trasversa*. Essendo il vettore posizione:

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

e essendo $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ allora:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

\vec{v} è esprimibile quindi come la somma vettoriale:

$$\vec{v} = v_r\hat{u}_r + v_\theta\hat{u}_\theta$$

dove la componente della velocità sarà data da:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (3.65)$$

E quella trasversa:

$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \quad (3.66)$$

Il modulo è quindi:

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2}$$

Il significato delle componenti polari della velocità è il seguente: la componente radiale dà la rapidità istantanea con cui cambia la distanza del punto dal polo mentre quella trasversa è dovuta alla variazione di direzione del vettore posizione. Derivando l'accelerazione come componente radiale e trasversa si ottiene:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

Possiamo quindi indicare l'accelerazione come:

$$\vec{a} = a_r\hat{u}_r + a_\theta\hat{u}_\theta$$

E quindi le sue componenti radiali e trasverse sono:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (3.67)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad (3.68)$$

Il modulo è lo stesso della velocità.

3.11 Moto con accelerazione costante: i gravi

Tutti i corpi nella cinematica in caduta libera si muovono sotto l'effetto di una accelerazione, ossia l'accelerazione di gravità che agisce solo sulla componente verticale della velocità di un corpo (ovviamente trascurando la resistenza dell'aria). Si ha quindi che:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{g} dt' = \vec{v}_0 + \vec{g} \int_{t_0}^t dt' = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0) \quad (3.69)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2. \quad (3.70)$$

Si osservi che sia \vec{v} sia il vettore $\vec{r} - \vec{r}_0$ si ottengono sommando due vettori che hanno le direzioni di \vec{v}_0 e di \vec{g} . La traiettoria è dunque una curva che giace sul piano verticale. Nello studio del moto dei gravi è particolarmente conveniente utilizzare un sistema di coordinate cartesiane e scrivere:

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$$

All'istante generico t, se α è l'angolo della velocità all'istante iniziale:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (v_0 \cos \alpha)\hat{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\hat{j} \\ \vec{r}(t) &= (v_0 \cos \alpha)t\hat{i} + \left((v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right)\hat{j} \end{aligned}$$

Per le componenti cartesiane si ottiene la proiezione del moto del punto sull'asse delle ascisse che si muove di moto rettilineo uniforme e la proiezione lungo l'asse y che è un moto uniformemente accelerato. Si rappresenta dunque il moto come **composizione di moti rettilinei indipendenti**:

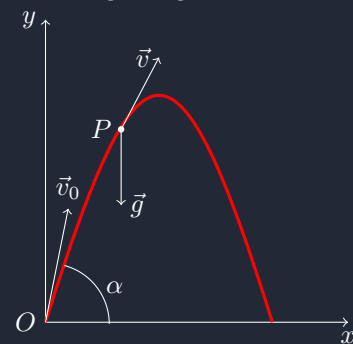
$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

Eliminando ora il parametro t si ottiene invece la traiettoria in forma esplicita:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$y = (\tan \alpha)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \quad (3.72)$$

Figura 3.7: Parabola nel piano e traiettoria di un moto di grave generico



3.12 Leggi di trasformazione della velocità ed accelerazione

Cosa succede se le velocità e le posizioni sono in sistemi di riferimento diversi? In questo si deve operare una trasformazione che ci consente di trasformare le velocità e le accelerazioni tra sistemi di riferimento diversi. Preso un sistema di riferimento S ed un sistema di riferimento S' in moto con una certa velocità rispetto a S , allora

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

dove $\vec{R} = O\vec{O}'$, supponendo lo spazio ed il tempo assoluti (non vero):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{t}_\tau$$

Dove \vec{t}_τ è chiamata **velocità di trascinamento**, e dipende esattamente dalla posizione del punto materiale. Il significato è chiaro se preso un punto P solidale con S' dove $\vec{v}' = 0$ e quindi la sua velocità è \vec{t}_τ . La relazione della velocità è chiamata *legge di trasformazione classica delle velocità*.

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S \quad \text{velocità del punto materiale in } S;$$

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} \quad \text{velocità del punto materiale in } S'.$$

Posto allora $\vec{V}(t) = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S$ allora la velocità di trascinamento sarà:

$$\vec{v}_\tau = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}(t) - \vec{R}(t)) \quad (3.73)$$

Dipende dal moto relativo dei due sistemi di riferimento e dalla posizione particolare occupata dal punto mobile nell'istante considerato. Inoltre \vec{v}_τ non è la stessa per tutti i punti di S' .

Consideriamo due casi particolari:

1) $\vec{\omega} = 0$:

In questo caso si ha che \vec{t}_τ è indipendente dalla posizione e tutti i punti di S' si muovono con la stessa velocità rispetto a S .

2) $\vec{\omega} \neq 0$:

In questo caso \vec{v}_τ cambia da punto a punto ed è uguale alla somma vettoriale della velocità di O' e del vettore $\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$. Nel caso particolare in cui O' è fisso in S si ha: $\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$.

Il caso più generale di quando si ha un moto di rotazione di S' rispetto ad S è il caso del **moto di rototraslazione**, in questo caso l'asse lungo cui avviene la rotazione è considerabile come luogo dei punti solidali con S' la cui velocità di trascinamento è uguale a $\vec{V}(t)$.

Per quanto riguarda invece l'accelerazione si ha che:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} \quad (3.74)$$

Dove \vec{a}_τ dipende dal moto relativo dei sistemi di riferimento e dalla posizione del punto materiale. mentre il terzo termine è presente se e solo se \vec{v}' è diversa da zero.

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})) \quad (3.75)$$

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (3.76)$$

Dove:

$$\vec{A} = \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} \right)_S \quad \vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S$$

3.12.1 Il termine \vec{a}_{co} , l'accelerazione di Coriolis

3.13 Moto relativo di traslazione rettilinea

Quando si ha che $\vec{\omega} = 0$ il moto relativo dei sistemi di riferimento S e S' è caratterizzato dal solo vettore $\vec{V}(t)$: la velocità di O' rispetto a S. Se tale valore è costante in direzione e verso (anche se non in modulo) si tratta di **traslazione rettilinea**. Le terne cartesiane T e T' mantengono nel tempo una orientazione relativa costante e tutti sono **indipendenti dal tempo**:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (3.77)$$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} \quad (3.78)$$

Capitolo 4

Principi della dinamica

4.1 Corpo rigido

All'interno di un sistema di punti che ha un vincolo di rigidità la distanza tra i punti che lo costituiscono è costante nel tempo.

Qualsiasi punto del corpo rigido ha una velocità che è uguale a quella di un altro punto del corpo rigido.

$$\vec{v}_r = \vec{v}_o + \vec{\omega} \times (P - O)$$
$$\vec{v}_{p1} + \vec{v}_{p2} = \vec{\omega} \times (P_i - P_l)$$

Quando $\vec{V}_p = \vec{V}_o$ allora il moto è rettilineo uniforme ed il corpo trasla senza ruotare.

Nel caso in cui ci sia un O fissato, $\omega \neq 0$ allora diventa:

$$\vec{V}_p = \vec{\omega} \times (P - O)$$

Considerato un asse parallelo non passante per ω e parallelo ad omega e passante per O; tutti i punti che si trovano sull'asse hanno $\vec{V}_p = 0$ e quindi non saranno soggetti ad alcuna rotazione.

$$d\phi = \frac{d\phi}{\rho} = \frac{|\vec{a}_1| dt}{d_1}$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \phi = \frac{|\vec{V}_{a1}|}{d_1} = \frac{|\vec{\omega}| d_1}{d_1}$$
$$\text{con } |\vec{v}_{a1}| = |\vec{\omega}| \cdot d_1$$

Quando $\vec{\omega}$ è costante in una direzione allora è di rotazione
Mentre quando $\vec{\omega}$ non è costante in una direzione è di rotazione accelerata (?)

Se invece $\vec{V}_O \neq 0 \wedge \vec{\omega} \neq 0$ allora si parla di moto rototraslatorio

$$\vec{V}_p = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times (P - O)$$

Questo punto O che ho scelto potrà avere sempre una componente della velocità parallela ed una ortogonale ad $\vec{\omega}$. Questo si esprime come segue

$$\vec{V}_O = \vec{V}_{O//} + \vec{V}_{O\perp}$$
$$\vec{V}_{O//} // \vec{\omega}$$
$$\vec{V}_{\perp} \perp \vec{\omega}$$
$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O//} + \vec{V}_{O\perp} + \vec{\omega} \times (P - O)$$

Preso dunque un qualsiasi punto A, si sostituisce e sviluppa nella seguente maniera:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O//} + \vec{\omega} \times (P - A)$$
$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O//} + \vec{\omega} \times ((P - O) + (O - A))$$
$$\vec{V}_p = \vec{V}_{O//} + \vec{\omega} \times (P - O) + \vec{\omega} \times (O - A)$$

Devo quindi trovare questo punto A tale che: $\vec{V}_{O\perp} = \vec{\omega} \times (O - A)$

Figura 4.1: Corpo rigido



A questo punto dall figura si evince che:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_{O//} + \vec{\omega} \times (A - A) = \vec{V}_{O//} \vec{V}_p = \vec{V}_a + \vec{\omega} \times (P - A)$$

Ricavando un moto che vale sempre nella rototraslazione generale

4.2 Moto di rotolamento puro

E' il moto di rotazione di una ruota su di una strada. Un corpo rigido che compie rototraslazione su di un'altro corpo rigido rimanendoci in contatto prende il nome di moto di rotolamento generico o rotolamento puro o senza strisciamento. Quando si ha solo moto di rotazione senza velocità traslazionale allora la ruota rimane a contatto col pavimento e si ha rotolamento puro.

$$\vec{V}_q = \vec{V}_M = 0$$

\vec{Q} costante alla ruota

M costante alla strada

A questo punto i vettori sono

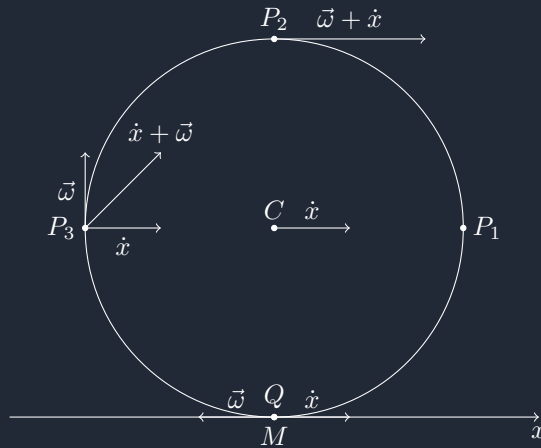
$$\vec{V}_p = \vec{V}_c + \vec{\omega} \times (P - C)$$

$$\vec{V}_c = \dot{x} \hat{i}$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{j} = \dot{\phi} \hat{j}$$

$$\vec{V}_p = \dot{x} \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (P - C)$$

Per le traslazioni un corpo rigido ha due gradi di libertà mentre per ruotare ha un grado di libertà e quindi in totale nel piano ha ben 3 gradi di libertà. Essendo però C vincolata allora trasla e ruota e quindi i gradi di libertà si riducono a due. Abbiamo però anche il vincolo che la ruota gira dalla stessa parte. Quindi:



$$\vec{V}_Q = \dot{x} \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (Q - C)$$

$$(Q - C) = -R \hat{k}$$

$$\vec{V}_Q = \dot{x} \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (-R \hat{k})$$

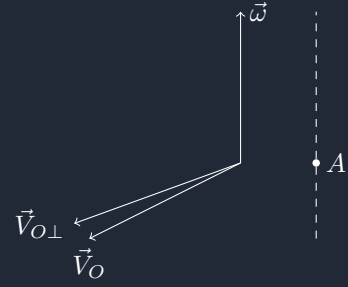
$$\vec{V}_Q \dot{x} \hat{i} + (-R \dot{\phi} \hat{i}) = 0$$

$$\dot{x} - R \dot{\phi} = 0$$

$$\dot{x} = R \dot{\phi}$$

Quindi esiste solo un grado di libertà. La parte a contatto della ruota col terreno è immobile ed ha un asse che cambia nel tempo ma rimane sempre parallelo a sé stesso ed ad omega. Il punto al vertice esegue un moto chiamato

Figura 4.2: Vettori



cicloide ossia si ha che le coordinate di P_2 nel sistema di rif. scelto si ha che le sue coordinate variano secondo:

$$\begin{cases} x_p = x_i + \mu R \sin \phi \\ z_p = z_c + \mu R \cos \phi \end{cases}$$

Ossia

$$\begin{cases} x_p = R\phi + \mu R \sin \phi \\ z_p = R + \mu R \cos \phi \end{cases}$$

4.3 Forza e definizione operativa

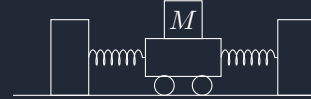
Si introduce un dinamometro: una molla collegata ad un estremo fissato ed una scala graduata a fianco che misura la deformazione della molla dovuta dall'azione di una forza.

Per dare una definizione operativa devo dire quando due grandezze sono uguali e come si sommano. F_1 e F_2 sono uguali se producono la stessa deformazione della molla (che sia allungamento o accorciamento). Dal momento che la forza ha una direzione (quella della molla) e un verso ossia quello che determina l'accorciamento o l'allungamento. Se io ho due forze, per far sì che queste siano vettori io dico che la loro somma è un'altra forza che produce una deformazione sulla molla pari alla somma delle loro deformazioni.

4.4 Massa e sua definizione operativa

Il carrellino inizia ad oscillare se applico una certa forza su di esso e le ruote servono a smorzare l'attrito con il terreno. Adesso arriviamo ai principi della dinamica attraverso questo. In cinematica sostanzialmente si sceglieva arbitrariamente il sistema di riferimento: mentre in dinamica il sistema di riferimento può cambiare la descrizione del sistema fisico: si definiscono quindi solo una classe di sistemi di riferimento ossia i sistemi di riferimento inerziali.

Figura 4.3: Carrellino delle masse



1. Un oggetto si muove di moto rettilineo uniforme se e solo se non ci sono forze applicate su di esso;
- 2.

Sperimentalmente le forze applicate su di un oggetto sono dovute ad altri corpi: selezioniamo idealmente degli oggetti lontani da altri: un oggetto molto lontano da tutti gli altri corpi per evitare proprio gli effetti di tutte le altre forze: adesso però avendo cambiato il sistema di riferimento può cambiare tutto. Definisco sistema inerziale un sistema in cui un oggetto è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Il primo principio diventa una affermazione dell'esistenza dei sistemi di riferimento inerziali:

$$\vec{v} = \vec{v} + \vec{v}_o$$

Se adesso un corpo è sottoposto a delle forze, il secondo principio ci dice che la somma delle forze (e quindi la risultante) è

$$\sum_{i=1}^n k \vec{F}_i = M \vec{a} \quad (4.1)$$

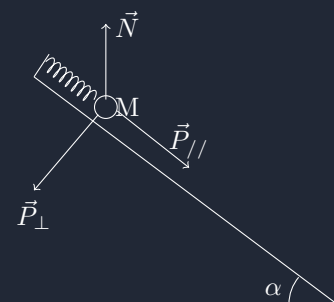
$$\vec{a} \propto \frac{1}{k} \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{M} \quad (4.2)$$

Se la massa è definita come il periodo del carrellino sopra oppure definita come l'allungamento della molla, allora ho bisogno di un k , una costante che mi permetta di specificare il rapporto diretto tra la massa e la sua relativa accelerazione. Arrivo a dire però che $k = 1$ se definisco individualmente la forza, la massa e l'accelerazione allora si possono scegliere le unità di misura in modo più semplice possibile ed esprimerlo come uno.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = M \vec{a} \quad (4.3)$$

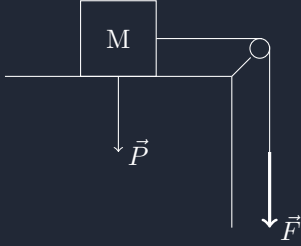
Su di un piano inclinato per esempio io lascio cadere un oggetto (il quale può cadere in modo diverso date forme diverse o che l'aria ha effetti differenti dal vuoto).

Figura 4.4: Piano inclinato

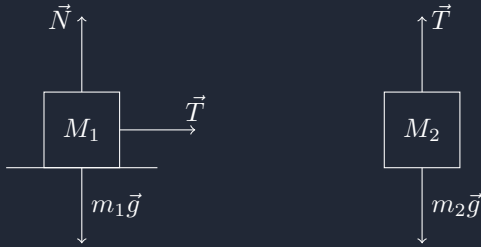


4.5 Dinamica di Fletcher

Figura 4.5: Sistema di riferimento con carrucola



Per lo studio di questo sistema prima di tutto si individua un sistema di riferimento inerziale: in questo caso si centra le assi del nostro sistema di riferimento nel primo oggetto. Così si può approssimare il sistema di riferimento come se fosse inerziale e solidale con la Terra entro certe approssimazioni. Disegniamo ora lo schema delle forze che agiscono sui corpi.



A questo punto possiamo impostare il sistema con tutte le forze e si ottiene per il primo corpo (considerato che non si ha attrito ed il suo sistema di riferimento considerato prima del blocco stesso):

$$\begin{cases} \vec{N} = N\vec{j} \\ m_1\vec{g} = -m_1g\vec{j} \\ \vec{T} = T\vec{i} \end{cases}$$

$$\vec{N} + m_1\vec{g} + \vec{T} = m_1\vec{a}_1$$

$$\begin{cases} (y) & N - m_1g = 0 \\ (x) & T = m_1\ddot{x}_1 \end{cases}$$

$$N = m_1g$$

$$T = \ddot{x}_1$$

Adesso si scrive lo schema delle forze per quanto riguarda il secondo corpo con il sistema di riferimento sotto la carrucola:

$$\begin{cases} \vec{T}' = -T'\hat{i} \\ m_2\vec{g} = m_2g\hat{i} \end{cases}$$

$$\vec{T}' + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2$$

$$-T' + m_2g = m_2\ddot{x}_2$$

A questo punto si fanno delle assunzioni per risolvere il problema: prima di tutto il filo è ideale (non si estende né si deforma); inoltre ho considerato le tensioni come se fossero uguali e da questo si ottiene che:

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$$

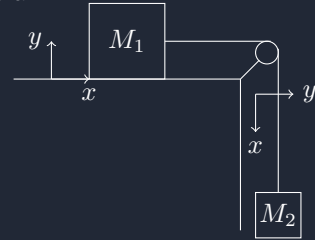
$$|\vec{T}| = |\vec{T}'|$$

$$T = T'$$

Imposto ora il sistema tra le tensioni ottenendo:

$$\begin{cases} T = m_2\ddot{x}_1 \\ -T + m_2g = m_2\ddot{x}_1 \end{cases}$$

Figura 4.6: Dinamica di due corpi ed una carrucola.



Sommando si ottiene:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (4.4)$$

Questo ci torna poiché l'inerzia è la somma delle masse e la forza che agisce su questo oggetto è solo la forza peso del secondo oggetto. Se ora tolgo m_1 allora m_2 è in caduta libera. Altrimenti se non ci fosse m_2 allora $\ddot{x}_1 = 0$ Si ottiene allora la tensione moltiplicando per m_1 :

$$T = m_1 \ddot{x}_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (4.5)$$

Adesso integriamo quella di prima:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} t + a \\ x_1 &= \frac{m_2 g}{2(m_1 + m_2)} t^2 + at + b \end{aligned}$$

La posizione fisicamente è descritta con queste formule ma sono io che decido dove mettere l'origine degli assi cartesiani e se io decido che l'origine di essi è dove si trovava m_1 al tempo $t = 0$ allora $b = 0$ altrimenti b diventa la distanza dall'origine della massa al tempo $t = 0$.

4.6 Il filo ideale

Il concetto di filo ideale in fisica presuppone che se si applica una forza da entrambe le parti del filo di pari intensità allora non si ha alcuna deformazione. Nel caso del filo da solo allora, assumendo:

$$m_{filo} \sim 0 \quad \vec{T} + \vec{T}' = m_{filo} \vec{a} = 0$$



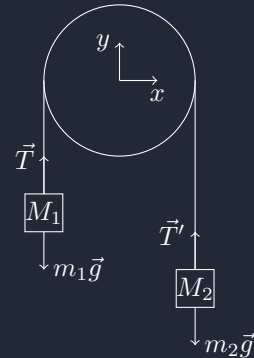
Nel caso della dinamica di Fletcher invece si ha che lo stesso filo ideale e le stesse tensioni hanno però somma diversa da zero in quanto la carrucola riesce in qualche modo ad "agire" sul filo con una forza diversa da zero dal punto di vista fisico il sistema si esprime quindi con le seguenti:

$$d\vec{N} + \vec{T}_\phi + \vec{T}'_\phi = m_{filo} \vec{a} \sim 0 \left\{ \begin{aligned} dN - T_\phi \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - T_\phi \end{aligned} \right.$$

4.7 Macchina di Atwood

La macchina di Atwood è forse una delle macchine più importanti della fisica classica poiché è riuscita a dare una spiegazione al secondo principio della dinamica. Se siamo nel piano si hanno 2 gradi di libertà e complessivamente se ne hanno quattro in quanto si ha anche la possibilità di oscillare. Il filo in questo caso si appoggia per metà giro della carrucola. Attraverso un'accorta preparazione dell'esperimento si possono ridurre a due eliminando i gradi di libertà dovuti alle oscillazioni fissando per esempio la carrucola il più stabilmente possibile e cercando di non far oscillare le masse. Utilizzando un filo ideale e si ha che le posizioni delle masse sono legate in modo tale che il filo possa scendere dalla parte della massa più grande riducendo il grado di libertà a 1.

Figura 4.8: Macchina di Atwood



$$\begin{aligned} 1: \quad & \vec{T} + m_1 \vec{g} = m_2 \vec{a}_1 \\ 2: \quad & \vec{T}' + m_2 \vec{g} = m_1 \vec{a}_2 \\ & \left\{ \begin{aligned} T - m_1 g &= m_1 \ddot{y}_1 \\ T' - m_2 g &= m_2 \ddot{y}_2 \end{aligned} \right. \\ \text{Posto } T &= T' \wedge \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 \end{aligned}$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \quad (4.6)$$

Posto $m_2 \gg m_1$ allora $\ddot{y}_1 = g$. Se invece $m_1 \gg m_2$ allora $\ddot{y}_1 = -g$. Troviamo ora la tensione:

$$T = m_1 g + m_1 \ddot{y}_1 \Rightarrow$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (4.7)$$

4.8 La molla ideale

Una molla è in posizione di riposo quando su di essa non agiscono forze esterne (si dimostrerà più avanti che la somma delle forze interne è pari a zero in qualsiasi sistema), pertanto se è sollecitata da forze esterne:

$$\vec{F} = -k(x - l_r)\hat{i} \quad (4.8)$$

La molla tende ad esercitare una forza che la fa tornare sempre alla posizione di riposo. Lo schema delle forze del sistema si rappresenta come segue, ponendo il sistema di riferimento inerziale proprio nel punto in cui la molla è a riposo. Dal punto di vista delle forze quindi:

$$\begin{aligned} \vec{F}_d &= -kx\hat{i} \\ -kx &= m\ddot{x} \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Ossia l'equazione del moto armonico. Questa equazione differenziale del secondo ordine omogenea non è integrabile facilmente, comunque si ottiene:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0, \text{ posto } \omega^2 = \frac{k}{m} \\ \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \end{aligned}$$

Quindi diventa:

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x} &= -A \sin(\omega t + \phi)\omega \\ \ddot{x} &= -A \cos(\omega t + \phi)\omega^2 \\ -A \cos(\omega t + \phi)\omega^2 + \omega^2 A \cos(\omega t + \phi) &= 0 \end{aligned}$$

4.9 Il caso specifico: una molla attaccata al soffitto

Nella seguente immagine non ho ancora definito l'origine del sistema di riferimento ma posso già definire i vettori con gli opportuni versori ottenendo la seguente situazione:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= k\Delta l \hat{j} \\ \vec{g} &= -g \hat{j} \\ \vec{a} &= \ddot{y} \hat{j} \\ k\Delta l &= -mg = m\ddot{y} \end{aligned}$$

Adesso si pone l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui la molla è a riposo. Se chiamiamo allora $\Delta l = -y$ si ottiene l'equazione del moto armonico non omogeneo:

$$\begin{aligned} -ky - mg &= m\ddot{y} \\ my + Ky &= -mg \end{aligned}$$

Figura 4.9: La molla ideale

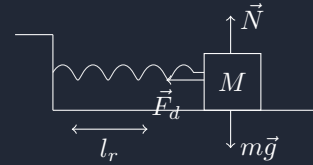
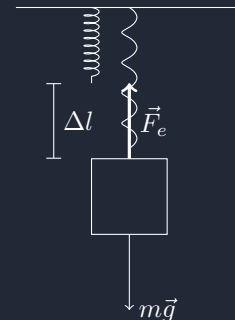


Figura 4.10: Sistema con molla attaccata al soffitto



Per risolvere questa equazione differenziale posso operare attraverso una sostituzione di variabile nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} y(t) &= \zeta(t) + \hat{y} \Rightarrow \ddot{y}(t) = \ddot{\zeta}(t) \\ m\ddot{\zeta} + k\zeta + k\hat{y} &= -mg \\ \text{Posto } \hat{z} &= -\frac{mg}{k} \\ m\ddot{\zeta} + k\zeta &= 0 \end{aligned}$$

Quando ζ è zero, allora si ritorna alla situazione in cui l'origine del sistema di riferimento è proprio la posizione di equilibrio.

$$y(t) = A \cos(\Omega t + \phi) - \frac{mg}{k} \quad (4.9)$$

Derivando si ottiene :

$$\dot{y}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \phi) \quad (4.10)$$

E quindi si hanno le impostazioni delle soluzioni:

$$\begin{cases} A \cos \phi = \frac{mg}{k} \\ A \sin \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{mg}{k} \\ \phi = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Poiché $A = 0$ non ci da alcuna informazione sul moto .

$$y(t) = \frac{mg}{k} (\cos(\Omega t) - 1)$$

$$y_{max} = -2 \frac{mg}{k} \quad (4.12)$$

$$\dot{y}_{max} = \frac{mg}{k} \Omega = g \sqrt{\frac{m}{g}} \quad (4.13)$$

Dopo quanto tempo si raggiunge la quota massima:

$$\begin{aligned} \Omega t_{min} &= \pi \\ t_{min} &= \frac{\pi}{\Omega} = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Quando si raggiunge il massimo modulo per la prima volta:

$$t_{max} = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\text{Periodo}}{4}$$

4.10 Moto del pendolo semplice (o pendolo matematico)

Il pendolo semplice è in opposizione al pendolo fisico o pendolo composto. Cos'è un pendolo? Un pendolo è costruito con un filo ed una massa sufficientemente piccola da poter essere approssimata ad un punto materiale. Dal punto di vista matematico si comporta qualunque punto materiale su di una traiettoria circolare su di un piano verticale come un pendolo. Questo accadrà se e solo se il filo è completamente teso e se il punto materiale è vincolato in qualche modo in moto tale da poter solo ruotare e che non cada verticalmente (senza attrito). La risultante in questo caso sarà:

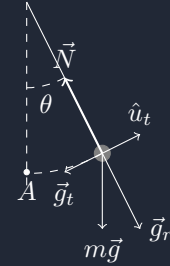
$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Chiamiamo i versori \hat{u}_n il versore di \vec{N} e \hat{u}_t il versore della forza centripeta. Se il punto è attaccato ad un filo rigido allora si ha che $N \geq 0$, inoltre se è una guida o un asticella allora $N \subset R$.

Si decompone ora la forza peso nella componente radiale e tangenziale ottenendo la seguente:

$$m\vec{g} = -mg \cos \theta \hat{u}_n - mg \sin \theta \hat{u}_t \quad (4.14)$$

Figura 4.11: Un pendolo semplice



L'accelerazione ora sarà data dalla derivata seconda:

$$\vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{l}\hat{u}_n \quad (4.15)$$

Dividendo le componenti tangenziali e normali si ottiene:

$$\begin{cases} -mg \sin \theta = m\ddot{s} \\ -mg \cos \theta + N = \frac{\dot{s}^2}{l} \end{cases} \quad (4.16)$$

Noi però sappiamo che dalla definizione degli archi con gli angoli in radianti:

$$S = \theta l \quad (4.17)$$

$$\dot{S} = \dot{\theta} l \quad (4.18)$$

$$\ddot{S} = \ddot{\theta} l \quad (4.19)$$

Quindi possiamo riscrivere le due equazioni con le nuove sostituzioni:

$$\begin{cases} m l \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ N = m l \dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \end{cases} \quad (4.20)$$

Il primo membro della seconda è sicuramente positiva e quindi sarà soddisfatta se e solo se $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ altrimenti non sarà negativo. Se l'oggetto nel movimento si ferma, allora non arriverà mai sopra il corpo del pendolo poiché si azzererà $\dot{\theta}$ che non mi fa tornare l'Equazione e quindi si affloscia il filo.

Risolviendo la prima allora ottengo :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

IPOTESI: Piccole oscillazioni, ossia $\theta(t) \leq \frac{\pi}{20}$ si ottiene attraverso lo sviluppo di Taylor che $\sin \theta \approx \theta$ e quindi si ottiene la differenziale di un moto armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (4.21)$$

Il moto è armonico solo per questa approssimazione, altrimenti non è armonico.

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (4.22)$$

E quindi il periodo è dato:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.23)$$

L'isocronismo del pendolo funziona se e solo se si compiono piccole oscillazioni, altrimenti il periodo è un'altra cosa. Se l'oscillazione è più grande si trova una formula in sviluppo in serie (senza dimostrazione poiché si fa a lab) che è:

$$2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \left(\frac{13}{24} \right)^2 \sin^4 \left(\frac{\theta}{2} + .. \right) \right) \quad (4.24)$$

Le caratteristiche di un pendolo sono la massa , la lunghezza del filo, l'accelerazione di gravità e l'ampiezza del moto (che è adimensionale) quindi il pendolo non dipende dimensionalmente dall'ampiezza del moto. Facendo l'analisi dimensionale per il periodo:

$$\begin{aligned} [T] &= [m^\alpha l^\beta g^\gamma] \\ [T] &= [m^\alpha l^\beta (lt^{-2})^\gamma] \end{aligned}$$

Si ottiene che:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \\ 0 &= \beta + \gamma \Rightarrow \beta = \frac{1}{2} \\ 1 &= -2\gamma \Rightarrow \gamma = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi il periodo sarà:

$$T = \text{const} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.25)$$

La costante sarà 2π per piccole oscillazioni, altrimenti si utilizza la formula generale.

4.11 Caduta di un filo con massa

Assumendo che il filo abbia una densità costante, fissato un sistema di riferimento allora noi sappiamo che i due pezzi di filo hanno una certa dimensione. La massa del filo su cui agisce la forza peso sarà densità per lunghezza, ossia:

$$x\lambda, \quad \lambda = \frac{M}{L}$$

Per cui la forza peso sul filo che ciondola è:

$$\vec{F} = x\lambda\vec{g}$$

E quindi si ottiene per il secondo principio:

$$M\ddot{x} = \lambda xg$$

Si ottiene allora l'espressione dell'accelerazione del filo come:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x = 0$$

Chiamato allora $\beta^2 = \frac{g}{L}$, si ottiene una equazione simile a quella della molla anche se non si può applicare seno e coseno come risoluzione dell'equazione

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0$$

$$x = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$$

$$\dot{x} = Ae^{\beta t}\beta - Be^{-\beta t}\beta$$

$$\ddot{x} = Ae^{\beta t}\beta^2 + Be^{-\beta t}\beta^2 = \beta^2 x$$

Il solo segno meno ha cambiato completamente l'equazione. Ora ricavo A e B dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Allora si ha che:

$$x(0) = x_0 = A + B$$

$$\dot{x}(0) = 0 = \beta(A - B)$$

Quindi le nostre soluzioni sono proprio il coseno e seno iperbolici:

$$x = x_0 \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} = x_0 \cosh \beta t$$

Se $\beta t \ll 1$, allora si ha che in $t = 0$ e $x = x_0$ si può sviluppare con Taylor i membri del coseno iperbolico:

$$e^{\beta t} = 1 + \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2$$

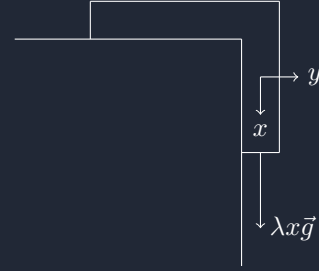
$$e^{-\beta t} = 1 - \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2$$

$$x = x_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 t^2 \right)$$

In $t = 0$ allora il moto è uniformemente accelerato, se invece $t \gg 0$, diventa un moto esponenziale, ossia le leggi che vincolano il moto fanno crescere la velocità esponenzialmente. Questo vuol dire che il corpo continua ad aumentare la sua velocità? No poiché una volta che il filo è finito allora continuerà a cadere come tutti i corpi e quindi:

$$x = \frac{x_0}{2} e^{\beta t}$$

Figura 4.12: Filo con massa



4.11.1 Focus su equazioni differenziali lineari omogenee con coefficienti costanti

Un'equazione del genere è:

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x = 0 \quad (4.26)$$

Un'equazione tipo:

$$x = Ae^{\alpha t}$$

se si sostituisce nella differenziale si ottiene

$$Ae^{\alpha t}(a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3) = 0$$

La soluzione è data dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado, il che ci porta a dare la soluzione della differenziale di prima che contiene però due soluzioni: una parte reale data dal coseno ed una parte immaginaria data dal seno:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \end{aligned}$$

Se il determinante dell'equazione di secondo grado si annulla allora si ottiene la soluzione.

$$x = (A + Bt)e^{\beta t}$$

4.12 Cosa succede nei SDR non inerziali

Accade spesso che la scelta di un SDR non inerziale sia fisicamente più chiara e semplice e vale quindi la pena di discuterlo. Bisogna cambiare però il modo in cui si utilizzano le leggi della dinamica. Con le leggi della trasformazione si era già visto la trasformazione dell'accelerazione e della velocità dei SDR non inerziali, definite quindi l'accelerazione di trascinamento e di Coriolis per cui si esprime (si chiama SDR mobile il SDR non inerziale):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_{co}$$

Il sistema di riferimento S osserva quindi che le leggi della dinamica sono valide e quindi ogni forza è associata ad una interazione a distanza o di contatto per cui ottiene $\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$. Il sistema di riferimento S' non riesce invece a determinare l'accelerazione. In S' dunque si prende la massa e l'accelerazione che è misurata dall'osservatore di S' ossia \vec{a}' . Il sistema S invece sa che:

$$m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_{co})$$

L'osservatore S' osserva che non gli torna l'accelerazione e dunque ipotizza che ci siano delle accelerazioni (e quindi delle forze) immaginarie che non riesce per qualche motivo a vedere ma che agiscono e modificano il moto. La forza di trascinamento e la forza di Coriolis:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t, \quad \vec{F}_{co} = -m\vec{a}_{co}$$

L'osservatore di S' riprendendo la definizione operativa di forza col dinamometro osserva che quelle forze apparenti si comportano come delle forze vera ma non sono forze che sono dovute ad interazione e non rispettano dunque il terzo principio. La forza di trascinamento in particolare dipende proprio dal sistema di riferimento e sostanzialmente questa formula diventa il nuovo secondo principio della dinamica:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_{co}} \quad (4.27)$$

Dati i riferimenti di S e S' allora considerate le componenti dell'accelerazioni e la distanza dal punto P che vogliamo misurare si ottengono le espressioni per le forze di trascinamento e di Coriolis:

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= -m\vec{a}_t = -m\vec{a}_O - m\dot{\vec{\omega}} \times (P - O') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \\ \vec{F}_{co} &= -m\vec{a}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

4.12.1 Il caso del pendolo sul treno

Con $\vec{\omega} = 0$ e $\vec{a}_O \text{ const}$, l'osservatore su di un treno osserva che il dinamometro che utilizza per misurare l'accelerazione misura che la forza di trascinamento è opposta rispetto all'accelerazione di trascinamento (ossia l'accelerazione del treno). Se al posto del dinamometro metto un pendolo, nel caso in cui il treno abbia la stessa \vec{a}_t e lascio oscillare il pendolo ottengo lo stesso effetto: il pendolo sembra oscillare maggiormente da una parte (quella con verso opposto al moto del treno) rispetto all'altra. Delle diverse forze in gioco solo quella di trascinamento fa inclinare il pendolo all'indietro. Impostando il problema dal punto di vista trigonometrico si ottiene:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a}_t|}{\sqrt{g^2 + a_t^2}}$$

Sono in grado di definire il periodo di questo pendolo con accelerazione costante? Utilizzo \vec{g}' dato dalla composizione della forza peso e dall'accelerazione di trascinamento, il cui modulo sarà:

$$|\vec{g}'| = \sqrt{g^2 + a_t^2} \quad (4.28)$$

4.12.2 Ascensore accelerato

In questi sistemi di riferimento dobbiamo anche considerare i contributi di della forza di trascinamento, della rotazione del sistema di riferimento mobile:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) - m\vec{\omega} \times (P - O) \quad (4.29)$$

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R \quad (4.30)$$

Se l'ascensore sta accelerando verso l'alto, allora accade che io mi senta schiacciato verso il basso a causa del segno della forza di trascinamento e, poiché non c'è componente rotatoria, si ottiene:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'}$$

In questo caso la forza di trascinamento si somma alla forza peso e quindi si ottiene una forza peso nuova data da:

$$m\vec{g}' = \vec{F}_t + m\vec{g} = -m(a_{O'} + g)\hat{g} \quad (4.31)$$

Lungo il versore \hat{g} che è comune ad entrambe e le forze. Nel caso in cui l'ascensore stia invece salendo con una certa accelerazione, il nuovo peso effettivo diminuisce in quanto è dato dalla relazione:

$$m\vec{g}' = m(-|a_{O'}| + g) \quad (4.32)$$

Mentre se stesse scendendo con una certa accelerazione allora si avrebbe una forza peso nuova maggiore di quella normale; se invece fosse in caduta libera allora dato che $\vec{a}_{O'} = \vec{g}$, non c'è nessuna forza peso "nuova" l'accelerazione è proprio solo quella di gravità. Questa situazione è un sistema di riferimento non inerziale in cui siamo in una situazione in caduta libera e sperimentalmente si può realizzare con un aereo (l'esperimento zero gravity)

4.12.3 Caso $\vec{\omega} \neq 0$ e $\vec{a}_{O'} = 0$

Prendendo $\vec{\omega}$ costante, si ha il caso della piattaforma rotante, ossia il caso della giostra ruotante. Dati gli assi x, y, z per il sistema di riferimento inerziale e gli assi x', y', z' per il SDR non inerziale, l'asse z è l'asse ortogonale e coincide con z' . Impostando ora la forza di trascinamento e la forza complementare (Coriolis):

$$\vec{F}_t = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \quad (4.33)$$

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R \quad (4.34)$$

Figura 4.13: Pendolo nel treno

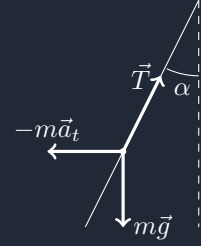


Figura 4.14: L'ascensore accelerato

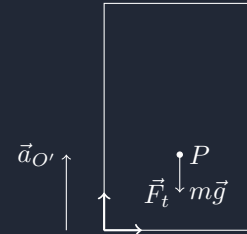


Figura 4.15: Piattaforma ruotante

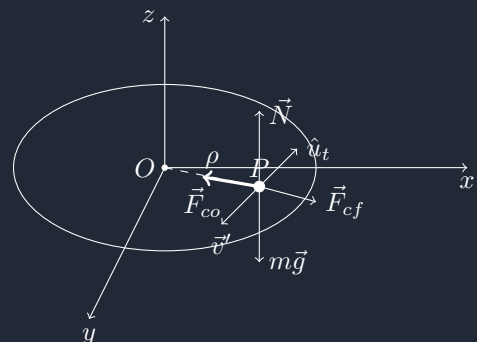
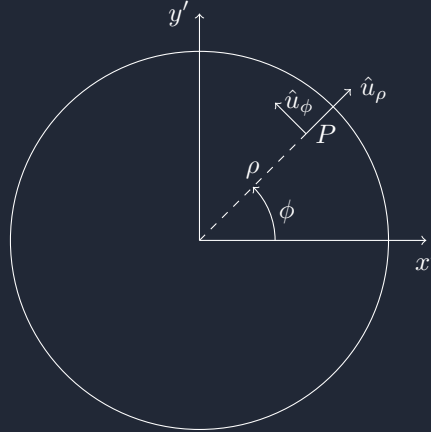


Figura 4.16: Schematizzazione vista dall'alto



Nel piano possiamo anche ottenere una rappresentazione dall'alto che ci consente di esprimere le forze con le coordinate cilindriche, la distanza $P - O$ è proprio:

$$P - O = \rho \hat{u}_\rho + z \hat{k} \quad (4.35)$$

E quindi la forza di trascinamento, essendo $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\vec{F}_t = +m\omega^2 \rho \hat{u}_\rho \quad (4.36)$$

Dato che ha segno positivo, questa tende ad andare verso l'esterno rispetto all'origine e prende quindi il nome di forza centrifuga. La velocità a questo punto può essere espressa come:

$$\vec{v}_R = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{\rho} \hat{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{u}_\phi + z \dot{\hat{k}} \quad (4.37)$$

E quindi possiamo trovare la forza di Coriolis che sarà, vista l'impostazione precedente delle forze, data da:

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega \rho \dot{\phi} \hat{u}_\rho - 2m\omega \rho \dot{\phi} \hat{u}_\phi \quad (4.38)$$

Che relazione c'è tra $\dot{\phi}$ e ω ? Ad una prima analisi potrebbero sembrare la stessa cosa, ma in realtà sono due cose complementare diverse. ω è costante sia in modulo che direzione ed è la velocità angolare con cui ruota la piattaforma mentre ϕ è la posizione nel sistema di riferimento ruotante che l'osservatore sta guardando e quindi $\dot{\phi}$ è la variazione di questa posizione.

Che moto avrebbe l'osservatore rispetto al SDR non inerziale? L'osservatore appare ruotare rispetto al SDR x', y', z' ma in senso opposto e quindi

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -\omega \\ \dot{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

La forza centrifuga resta inalterata e non cambia mentre ρ non cambia e quindi posso esprimere la forza centrifuga e di Coriolis (che diventa la forza complementare):

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= m\omega^2 \rho \hat{u}_\rho \\ \vec{F}_{co} &= 2m\omega^2 \rho \hat{u}_\rho \end{aligned}$$

La somma delle forze non è zero, ma l'osservatore non è soggetto ad alcuna forza, infatti l'osservatore sta fermo rispetto al sistema in movimento.

4.12.4 Il caso della guida

Un punto materiale che scorre su di una guida senza attrito ha solo un grado di libertà in quanto può solo scorrere lungo la traiettoria forzata dalla guida. Dal momento che il sistema S' è solidale con l'oggetto, allora $\dot{\phi} = 0$, allora essendo che ho la componente radiale

$$\begin{aligned} \hat{u}_\rho : m\omega^2 \rho &= ma_\rho \\ \hat{u}_\phi : -2m\omega \dot{\rho} + N &= 0 \end{aligned}$$

La guida quindi deve produrre una reazione vincolare per tenere fermo l'oggetto dentro sé stessa. Quindi possiamo definire l'accelerazione come:

$$\vec{a}_R = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{u}_\phi \quad (4.39)$$

Allora si ottengono le descrizioni per i versori:

$$\begin{cases} \omega^2 \rho = \ddot{\rho} \\ N = 2m\omega\dot{\rho} \end{cases} \quad (4.40)$$

E allora si ottiene l'equazione del moto armonico modificata (quella per il filo con massa che cade) la cui soluzione è proprio:

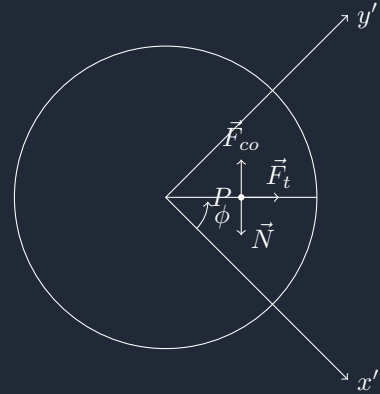
$$\begin{aligned} \ddot{\rho} - \omega^2 \rho &= 0 \\ \rho &= \rho_0 \cosh(\omega t) \\ \dot{\rho} &= \rho_0 \omega \sinh(\omega t) \end{aligned}$$

Allora la reazione vincolare della guida è proprio:

$$N = 2m\rho_0\omega \sinh(\omega t) \quad (4.41)$$

che è proprio la forza che accelera il corpo che scorre nella guida per cui un osservatore in un SDR inerziale vede il corpo accelerato.

Figura 4.17: Guida circolare



4.13 Il sistema di riferimento terrestre

Se facessimo degli esperimenti sulla Terra dovremmo riuscire a mettere in luce le forze apparenti di un SDR non inerziale. La Terra ruota intorno al proprio asse rispetto alle stelle fisse da Ovest verso Est e quindi mentre ruota su sé stessa con velocità angolare $|\vec{\omega}_T| = \frac{2\pi}{86'164}$ essa dovrebbe ritrovare il Sole nel medesimo punto ad ogni rivoluzione anche se questo non accade. Questo perché il giorno solare medio è più lungo del giorno siderale, rispetto alle stelle fisse, infatti, la Terra ha compiuto un giro in più. Che conseguenza ha il fatto che la Terra non è un SDR inerziale?

Questo vuol dire che ci sono delle forze apparenti in tutti gli esperimenti e quindi rispetto alla Terra nei moti su larga scala intervengono queste forze apparenti. All'equatore per l'osservatore inerziale, un oggetto vicino alla Terra è soggetto alla forza di gravità dovuta all'interazione con la Terra (che si assume sferica), mentre per l'osservatore sulla Terra mi aspetto che ci sia una forza centrifuga. Usando un filo a piombo, la sua verticale non passerà per il centro della Terra ma sarà leggermente inclinata rispetto alla forza peso ideale a causa della forza centrifuga. Voglio calcolare allora il vero peso degli oggetti e misuro oltre che la direzione del pendolo anche la forza peso. Associo \hat{u}_ρ il versore $\perp \hat{k}$ che giace nello stesso piano del versore \hat{u}_r (il versore parallelo all'asse \vec{OP}) e che è il versore della centrifuga. Allora:

$$\hat{u}_r = (\cos \theta \vec{u}_\rho + \sin \theta \hat{k}) \quad (4.42)$$

La forza peso allora si esprimerà come:

$$m\vec{g} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf} = -mg_0\hat{u}_r + m\omega_T^2 + \rho\hat{u}_\rho \quad (4.43)$$

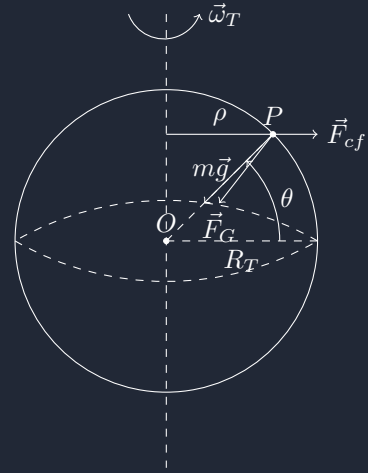
Dove g_0 è g senza la correzione della forza centrifuga, sostituendo allora quanto ottenuto prima si ottiene.

$$m\vec{g} = m \left(\cos \theta (-g_0 + \omega_T^2 R_T) \hat{u}_\rho + g_0 \sin \theta \hat{k} \right) \quad (4.44)$$

Volendo ora calcolarne il modulo, si ottiene la seguente:

$$|g| = \sqrt{\cos^2 \theta (g_0^2 + \omega_T^4 R_T^2 - 2g_0\omega_T^2 R_T) + g_0^2 \sin^2 \theta} \quad (4.45)$$

Figura 4.18: Terra e riferimento



Che sostituendo, raccogliendo e semplificando si ottiene:

$$|g| = \sqrt{g_0^2 \left(1 - \frac{2\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos^2 \theta + \left(\frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \right)^2 \cos^2 \theta \right)} \quad (4.46)$$

Usando lo sviluppo di Taylor allora si può semplificare i coseni (in particolare il primo) poiché hanno un contributo molto piccolo e quindi:

$$|g| \approx g_0 \left(1 - \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos^2 \theta \right) \quad (4.47)$$

L'accelerazione al polo è $g_{polo} = 9.823 m/s^2$ e quella all'equatore $g_{eq} = 9.789 m/s^2$ poiché la Terra è un ellissoide di rotazione e la forza di Coriolis ha fatto schiacciare la Terra in modo tale che all'equatore il raggio terrestre sia più grande che ai poli. Preso un triangolo i cui lati sono la forza centripeta, uno la forza di gravità vera e una quella ideale, applicando la trigonometria si ottiene l'espressione dell'angolo tra le due forze (δ):

$$\frac{F_{cf}}{\sin \delta} = \frac{g}{\sin \theta}$$

$$\sin \delta \approx \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos \theta \sin \theta$$

4.13.1 Deviazione verso oriente dei gravi in caduta

Nel sistema di riferimento della Terra accade un fenomeno molto peculiare quando si fa cadere un grave da una certa altezza all'equatore: l'oggetto appare deviato sempre verso oriente. Al momento $t = 0$ posso dire che, dal momento che non c'è vincolo esplicito ottenendo:

$$\begin{cases} x = R_T m h \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Faccio un'approssimazione lecita (ma pur sempre un'approssimazione) secondo la quale io considero che non ci sia movimento rispetto all'asse y trascurando il fatto che possa variare e quindi

$$m\vec{g}' = -mg'\hat{i}$$

Potremmo ora avere la forza di Coriolis, intanto esplicitiamo la velocità relativa:

$$\vec{\Omega} = \Omega \hat{k}, \quad \Omega = 7 \cdot 10^{-5}$$

$$\vec{v}_R = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{F}_{co} = -2m\Omega \hat{k} \times (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) =$$

$$= 2m\Omega(\dot{y}\hat{i} - \dot{x}\hat{j})$$

Scrivendo il secondo principio della dinamica, allora trovo l'accelerazione che è data proprio da quella relativa e quindi posso scrivere in componenti:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{co}$$

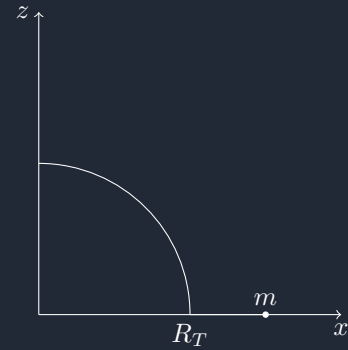
Mentre la forza di Coriolis lungo g ha questo:

$$\begin{aligned} x : & -mg' + 2m\Omega\dot{y} = m\ddot{x} \\ y : & -2m\Omega\dot{x} = m\ddot{y} \\ z : & 0 = m\ddot{z} \end{aligned}$$

Questo vuol dire che z è sempre zero così come la derivata prima e seconda e quindi non agisce alcuna forza lungo l'asse z . E quindi non ho alcun moto nel piano xy . Riscrivendo la formula nuovamente si può ottenere:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -2\Omega\dot{y} = -g' \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x} \end{aligned}$$

Figura 4.19: gd



Prendendo ora l'integrale generico delle funzioni differenziali (che sono in questo caso accoppiate poiché dipendono l'una dall'altra):

$$\begin{aligned}\int_0^t \ddot{y} dt &= -2\Omega \int_0^t \dot{x} dt = \\ &= \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = -2\Omega(x(t) - x(0))\end{aligned}$$

Dato che le condizioni iniziali mi impongono che $y = 0$, allora si ottiene la seguente relazione una volta svolto l'integrale:

$$\dot{y} = -2\Omega(x - (R_T + h))$$

Il valore massimo in modulo è il valore minimo di R_T e quindi il modulo massimo è:

$$|\dot{y}|_{max} = 2\Omega h$$

Ossia il valore massimo lungo \dot{y} della velocità, che in questo caso è un termine molto piccolo e quindi posso trascurarlo come da ipotesi iniziale, inoltre questo ci dice che

$$|\dot{y}| < 2\Omega h = 14 \cdot 10^3 m/s$$

Ma quindi per gli altri valori di y :

$$|2\Omega\dot{y}| < 4\Omega^2 h = 2 \cdot 10^{-6} m/s^2$$

che devo confrontare con g , la quale è 7 ordini di grandezza più grande facendo sì che domini il moto lungo x e poiché la forza di Coriolis ha un effetto minimo si può ragionevolmente trascurare, e quindi si ottiene che:

$$|2\Omega\dot{y}| \ll g'$$

Le equazioni iniziali diventano dunque:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= g' \\ \ddot{y} &= -2\Omega\dot{x}\end{aligned}$$

L'ho integrata solo per trovare l'ordine di grandezza del termine e quindi mi è servita solo per una pura stima e non ho ancora trovato il valore effettivo di y . Allora posso mettere i valori iniziali e quindi:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -g't \\ x &= -\frac{1}{2}g't^2 + (R_T + h)\end{aligned}$$

Avendo ora trovato \dot{x} posso sostituire in y e ottenere che:

$$\ddot{y} = 2\Omega g't$$

Con le approssimazioni che ho fatto mi sono trovato ora le formule effettive e quindi si ottiene che:

$$\dot{y} = \Omega g't^2$$

Per $t = 0$ non ho termini aggiuntivi e quindi la velocità è diversa da zero ed è positiva quindi è diretta verso est (entrante nella lavagna) e quindi:

$$y = \frac{1}{3}\Omega g't^3$$

Ma il tempo di quanto tocca terra posso ricavarlo da x ottenendo allora:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g't_f^2 &= h \\ t_f &= \sqrt{\frac{2h}{g'}}\end{aligned}$$

Sostituendo nella y , si ottiene la y finale e quindi (trascurando la curvatura della Terra, che è del tutto ragionevole):

$$y_f = \frac{1}{3}\Omega g' \left(\frac{2h}{g'}\right)^{\frac{3}{2}}$$

In linea di principio con una grande altezza c'è uno spostamento apprezzabile e quindi tutte le approssimazioni che abbiamo fatto sono ragionevoli vista la bassa quota dell'esperimento e quindi la deviazione è sempre verso oriente come avevamo ipotizzato.

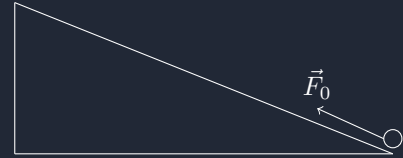
Capitolo 5

L'Energia ed il lavoro

5.1 Il lavoro

Se avessi un grande oggetto da spostare molto massiccio, dovrei avere una forza tale che possa equilibrare e vincere la forza peso dell'oggetto per poterlo sollevare, oppure vincere la resistenza della forza di attrito statica per poterlo muovere orizzontalmente. Come hanno quindi fatto gli egiziani a portare i blocchi delle piramidi sopra le piramidi stesse per la loro costruzione? Hanno creato delle impalcature che permettessero di far strisciare i blocchi su di un piano inclinato con angolo molto piccolo. Come misuro quindi lo "sforzo" necessario per compiere questo spostamento? La grandezza che abbiamo bisogno per poter spingere il blocco fino alla fine è proprio il lavoro. Si definisce il lavoro come la forza per lo spostamento; il lavoro è sempre di una forza e si indica con il simbolo δL , ossia il lavoro infinitesimo definito come il prodotto scalare

Figura 5.1: Il lavoro di una forza su di una superficie inclinata



Si definisce il lavoro come la forza per lo spostamento; il lavoro è sempre di una forza e si indica con il simbolo δL , ossia il lavoro infinitesimo definito come il prodotto scalare

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta \vec{S} \quad (5.1)$$

E' quindi lo spostamento della forza lungo un certo cammino, ma il suo valore non cambia poiché dipende solo dagli istanti iniziali e finali, si definisce quindi il lavoro lungo un certo cammino. Per trovare il valore devo fare l'integrale di linea, ossia l'integrale della traiettoria con il limite che mi fa tendere lo spostamento a dx . Per ognuno di questi divido il mio percorso in tanti pezzi per cui si ottiene.

$$L_{AB,\Gamma} = \int_A^B \vec{F} \cdot \delta \vec{S} \, ds \quad (5.2)$$

Definiamo il lavoro di una forza come:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.3)$$

Dove dr rappresenta lo spostamento infinitesimale mentre δL non è un differenziale esatto. Allora possiamo definire il lavoro totale come la somma di tutti gli infinitesimi spostamenti:

$$L_{AB,\vec{F}} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i d\vec{r}_i = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.4)$$

Nel disegno, il lavoro compiuto dalla forza dipende dall'angolo del piano inclinato e quindi:

$$L_{\vec{F}_0} = \int_{OF} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = Mg \sin \alpha L = Mgh$$

Se volessi esplicitare l'integrale allora posso dividerlo lungo tutte le direzioni e quindi risolvere la somma degli integrali. Con il concetto di integrale possiamo anche dimostrare il teorema delle forze vive.

5.1.1 IL teorema delle forze vive

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.5)$$

Se avessi più forze, ognuna di esse dovrebbe compiere un certo lavoro che dipende dallo spostamento che causano: posso considerare quindi la risultante delle forze applicate su di un corpo lungo una traiettoria istante per istante come se le forze fossero tutte applicate insieme come somma in un'unica forza:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i$$

Posso quindi definire il lavoro totale:

$$\delta L_{tot} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_{i=0}^n \delta L_{\vec{F}_i} \quad (5.6)$$

Il secondo principio della dinamica ci dice che in un sistema di riferimento la risultante delle forze produce un'accelerazione e quindi:

$$\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$$

Si può allora riscrivere il lavoro iniziale come:

$$\delta L_{\vec{F}_{tot}} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Essendo la velocità la derivata rispetto al tempo del vettore posizione, allora è proprio $\frac{d\vec{r}}{dt}$ e quindi al posto di \vec{F} posso mettere:

$$\delta L_{\vec{F}_{tot}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m d\vec{v} \cdot \vec{v} \quad (5.7)$$

Nel differenziale però perdo l'informazione della direzione di \vec{v} poiché posso riscrivere l'ultimo membro come

$$d\left(\frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}\right)$$

Il prodotto scalare diventa allora:

$$d(mv^2)$$

Un lavoro infinitesimo produce una variazione infinitesima di questa quantità che prende il nome di energia cinetica. possiamo allora dire:

$$\delta L_{\vec{F}_{tot}} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dK \quad (5.8)$$

Dove K è proprio l'energia cinetica. Se io avessi da compiere un lavoro continuo e non infinitesimo? Allora su di una traiettoria il lavoro diventerà:

$$L_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A,\Gamma}^B dK = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \quad (5.9)$$

E allora possiamo concludere con il teorema delle forze vive che il lavoro è proprio la variazione dell'energia cinetica:

$$L_{AB,\Gamma} = \Delta K$$

Questo ci dice inoltre che se io compio lavoro su di un oggetto allora sto provocando una variazione dell'energia cinetica. Il differenziale di K dipende solo dalle condizioni iniziali e finali e non è quindi una funzione della posizione.

5.2 Risoluzione dei problemi mediante il teorema delle forze vive

Posso impostare il problema nella seguente maniera: sapendo che devo trovare la funzione della discesa dell'oggetto, questa è proprio:

$$mg \sin \alpha = m\ddot{x}$$

$$x = \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2$$

E poi si ricava la velocità finale combinando le varie derivate.

Il metodo due è quello dell'energia cinetica con un vincolo semplice: la forza normale è ortogonale allo spostamento e quindi non produce alcun tipo di lavoro poiché non impedisce lo spostamento lungo la traiettoria permessa. Allora il lavoro è proprio:

$$L_{AB} = Mg \sin \alpha L$$

$$v_B = v_f, \quad v_A = 0$$

Utilizzando ora il teorema delle forze vive, per cui ho solo v_B

$$Mg \sin \alpha L = \frac{1}{2}Mv_f^2$$

E allora:

$$v_f = \sqrt{2g \sin \alpha L}$$

Questo non ci da il tempo di arrivo dell'oggetto ma solo la velocità finale.

5.2.1 L'attrito nel teorema delle forze vive

La forza di attrito vale:

$$|\vec{F}_{at}| = \mu_d Mg \sin \alpha - \mu_d Mg \cos \alpha$$

La velocità finale diventerà allora:

$$v_f = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)}$$

Mentre la forza peso è costante, la forza di attrito non è costante poiché dipende dal verso in cui sta andando l'oggetto. Se analizzassimo il caso di un oggetto che scorre giù da un piano lungo una guida allora la forza peso non fa lavoro sui tratti orizzontali ma la forza di attrito è sempre presente e con verso sempre contrario al moto.

5.3 Forze posizionali

Una forza posizionale è una forza che dipende dalla posizione di un oggetto, come la forza elastica; forze come l'attrito non sono posizionali poiché dipendono dal verso di applicazione della forza.

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \quad (5.10)$$

5.3.1 Forze conservative

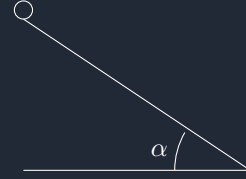
Si distinguono le forze conservative (sottoclasse) che sono quelle forze posizionali in cui il lavoro non dipende dal cammino seguito:

$$L_{AB, \Gamma_1} = L_{AB, \Gamma_2}, \forall \Gamma_1, \Gamma_2$$

La seconda definizione di queste forze è che il lavoro in un percorso chiuso è zero (chiamata anche circuitazione):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.11)$$

Figura 5.2: Un corpo su di un piano inclinato



Lungo una traiettoria chiusa, che io la percorra in un senso o nell'altro, non cambia il lavoro, cambia solo di segno per cui la sua circuitazione sarà sempre 0. e quindi la prima implica la seconda e viceversa.
Terza definizione: $\exists V$ energia potenziale tale che:

$$\delta L = -dV \quad (5.12)$$

$$L_{AB,\Gamma} = V(A) - V(B), \quad \forall \Gamma \quad (5.13)$$

Abbiamo un differenziale non esatto eguagliato ad un differenziale esatto. Lungo una traiettoria possiamo identificare un punto di riferimento P_0 da cui facciamo passare il percorso A, P_0, B e quindi si ottiene che la circuitazione di questo percorso sia:

$$L_{AP_0} + L_{P_0B} + L_{BA} = 0$$

Fissato il punto P_0 allora questa è una funzione di A e nessuno mi vieta di definirla in questo modo:

$$L_{P_0A} = -V(x_A, y_A, z_A) \quad (5.14)$$

$$L_{P_0B} = -V(x_B, y_B, z_B) \quad (5.15)$$

E per cui si ottiene che

$$L_{AB} = V(A) - V(B) \quad (5.16)$$

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante; possiamo allora esprimere il lavoro mediante l'energia potenziale (che è posizionale e quindi in funzione dello spazio) e allora scrivere:

$$\delta L = -dV = -(V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y, z))$$

Matematicamente questo si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & -(V(x+dx, y+dy, z+dz) - V(x, y+dy, z+dz) + V(x, y+dy, z+dz) \\ & - V(x, y, z+dz) + V(x, y, z+dz) - V(x, y, z)) \end{aligned}$$

Posso allora fare la derivata parziale per ogni variabile che compare ottenendo allora

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Esprimendo la forza nel lavoro mediante le sue componenti allora si ottiene:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

E questo vale qualunque sia dx, dy, dz . Eguagliando allora lo stesso incremento infinitesimo dell'energia potenziale ad ogni componente della forza, si ottiene proprio che

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

Dove ∇ è l'operatore differenziale che esprime la derivata parziale rispetto a tutte le componenti di un certo vettore

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Con l'operatore nabla attraverso:

$$\delta L = -\vec{\nabla} V \cdot \vec{dr} = -dV$$

Con questa si ottiene che:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (5.17)$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \quad (5.18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0 \quad (5.19)$$

ossia il rotore della forza è proprio il prodotto vettoriale. Si fa ora il determinante del prodotto vettoriale e quindi:

$$\det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) = 0. \quad (5.20)$$

e dal momento che le derivate parziali commutano, allora il determinante è zero ed il rotore della forza è zero. Riassunto delle proprietà delle forze conservative:

$$L_{AB,\Gamma} = L_{AB,\Gamma_2} \quad (5.21)$$

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (5.22)$$

$$L_{AB} = V(A) - V(B), \delta L = -dV \quad (5.23)$$

$$\vec{F} = -gradV = -\vec{\nabla}V \quad (5.24)$$

$$rot\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (5.25)$$

5.4 Energia meccanica

Un dominio si dice semplicemente connesso se, presa una curva chiusa la posso deformare fino a farla diventare un punto. Considerato un toroide, se prendo una curva all'interno del dominio, non posso farla collassare in un punto. Se abbiamo un sistema su cui agiscono solo forze conservative, (anche forze non conservative che non fanno lavoro), allora il teorema delle forze vive mi dice che:

$$\delta L = -dV = dK$$

E quindi isolando posso dire che

$$dK = -dV$$

E allora

$$dK + dV = 0$$

Se ho quindi solo forze conservative allora la somma dell'energia potenziale e cinetica non variano: ossia quella somma è costante. La somma di due contributi energetici che danno una costante è chiamata **energia meccanica**.

$$E = K + V \quad (5.26)$$

Che è uno dei concetti più importanti nella meccanica classica e nella fisica moderna e diventa un concetto fondamentale della fisica in generale. Lo stesso vale se ho due forze conservative considerando la somma delle forze conservative.

$$dE = 0 \quad (5.27)$$

Se invece ho una forza non conservativa, l'energia meccanica non si conserva: se si avesse una forza non conservativa allora $\delta L = -dV$ non vale più. Infatti, considerati i contributi energetici delle forze conservative e non si ottiene

$$\begin{aligned} \delta L_{tot} &= \delta L_{cons} + \delta L_{ncons} \\ dK &= -\sum dV_i + \delta L_{ncons} \end{aligned}$$

Quindi se lo porto dall'altra parte ottengo;

$$d(K + \sum dV_i) = \delta L_{ncons}$$

Chiamato allora

$$E = K + \sum dV_i$$

L'energia meccanica non sarà più uguale ad una costante ma uguale al lavoro che compiono le forze non conservative:

$$dE = \delta L_{ncons}$$

Se il lavoro dell'attrito è negativo allora tende a diminuire.

5.5 Le forze conservative in particolare

5.5.1 la forza peso

Se la forza peso è costante allora il suo gradiente è zero poiché non c'è alcuna variazione ed il suo rotore è quindi anche zero. Provando a fare un lavoro infinitesimo o finito provo a trovare l'energia potenziale e provando a fare il gradiente devo trovare la forza di partenza:

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= mg\hat{j} \\ d\vec{r} &= dy\hat{j} \\ \delta L &= (m\vec{g}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Allora:

$$\delta L = -mg\hat{j} \cdot dy\hat{j}$$

Il lavoro finito allora:

$$\int_A^B \delta L = -mg(y_B - y_A) = V(A) - V(B)$$

E' del tutto ragionevole che per un punto generico P che l'energia potenziale sia:

$$V(P) = mgy_P$$

Dato che è definita a meno di una costante, il lavoro è dato dalla differenza delle potenziali e potevo scegliere come riferimento dell'asse y un punto qualunque e non sarebbe cambiato nulla rispetto al risultato. Se aggiungo la stessa quantità sia a $V(A)$ che a $V(B)$ allora questa costante che aggiungo si cancella in quanto per definizione l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Ottenendo proprio

$$\text{grad}V = mg\hat{j}$$

Dato che io per definizione di gradiente:

$$\vec{F} = -\text{grad}V \Rightarrow -mg\hat{j}$$

La direzione dell'asse y è un'altra scelta arbitraria che ho fatto a priori nell'esperimento così come l'orientazione degli assi. Ma non cambia niente in quanto fin tanto che seguo le leggi della mano destra posso comunque scegliere qualsiasi sistema di riferimento in qualsiasi verso lo voglia orientare. Nel caso di un corpo in caduta, se pongo come riferimento l'asse z rivolto verso l'alto, allora l'energia meccanica la posso esprimere come:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

A: $t = 0$ ottengo:

$$z = h, v = 0, E = mgh$$

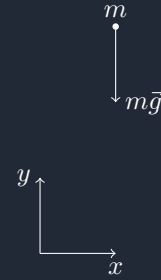
Al tempo finale $t = t_F$:

$$z = 0, v = v_f, E = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Allora

$$v_F = \sqrt{2gh}$$

Figura 5.3: Forza peso



In un moto verticale se avessi usato $F = ma$ allora si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgt \\ \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \dot{z}(m\ddot{z} + mg) &= 0 \end{aligned}$$

Per cui le soluzioni sono:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned}$$

Che vale solo se i vincoli sono onesti ed ideali e se non si muovono. IN generale questa è molto comoda se ho pochi vincoli, altrimenti con la conservazione dell'energia posso considerare sempre un grado di libertà solo.

5.5.2 Forza elastica

Dalla legge della forza elastica:

$$\vec{F}_d = -kx\hat{i}$$

La forza elastica è conservativa e posso vederlo o facendo il rotore oppure attraverso un lavoro infinitesimo:

$$\delta L = \vec{F}_d \cdot d\vec{r} = -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

E allora il lavoro:

$$L_{AB} = \int_A^B -kx dx = -\frac{1}{2}kx_b^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = V(A) - V(B)$$

Questa è proprio la definizione di energia potenziale, allora posso prendere

$$V(P) = \frac{1}{2}kx^2$$

Posso allora determinare il gradiente e quindi si ottiene proprio

$$\text{grad}V = kx\hat{i}$$

Quindi essendo:

$$\vec{F} = -\text{grad}V = -kx\hat{i}$$

Allora abbiamo dimostrato che la forza elastica è proprio una forza conservativa. Dato che è definita a meno di una costante, allora posso cambiare l'origine dell'asse x e cambierebbe solo la forma dell'energia potenziale ma pur sempre compatibile con quella che abbiamo qui. Se io tirassi la molla nell'istante $T = 0$ allora l'energia è conservata e quindi in ogni istante posso ricavarne la velocità:

$$\begin{aligned} t = 0, x = x_0, v = 0, E &= \frac{1}{2}kx_0^2 \\ t = t_f, x = 0, v = v_f, E &= \frac{1}{2}mv_f^2 \end{aligned}$$

E quindi la velocità:

$$v_F = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0$$

Con la relazione $ma = F$ allora:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \dot{x}(m\ddot{x} + kx) &= 0 \end{aligned}$$

Dato che \dot{x} non è sempre zero, allora pongo solo:

$$m\ddot{x} = -kx$$

Figura 5.4: Moto verticale

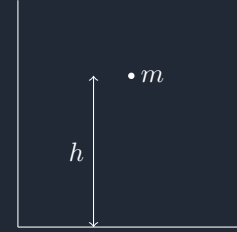


Figura 5.5: La molla ideale

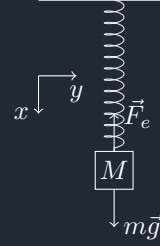


5.5.3 Molla attaccata al soffitto

Allora con le equazioni dell'energia meccanica:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx \\ v &= \dot{x} \\ \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \dot{x}(m\ddot{x} + kx - mg) &= 0 \end{aligned}$$

Figura 5.6: Molla al soffitto



5.6 Le forze centrali a simmetria sferica

Le forze centrali sono delle forze sempre dirette verso un punto come la gravità nella gravitazione universale, o la forza elettrostatica nell'elettromagnetismo; inoltre sono a simmetria sferica poiché il loro modulo è in funzione solamente del raggio vettore e nient'altro. Questo tipo di forze sono conservative? il lavoro di questo tipo di forze non è altro che

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

E quindi il vettore

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

Per cui:

$$d\vec{r} = dr\hat{u}_r + r d\hat{u}_r$$

Dato che il prodotto scalare tra lo stesso vettore è uguale ad 1 ma la somma dei contributi $d\hat{u}_m \cdot \hat{u} + \hat{u} d\hat{u} = 0$ allora

$$d\hat{u} \perp \hat{u}$$

Allora il lavoro diventa:

$$\delta L = f(\hat{u}_r) \cdot (d\hat{u}\hat{u} + \hat{u}d\hat{u})$$

PER cui preso l'integrale per un lavoro continuo e finito, allora si ottiene:

$$L_{AB} = \int_A^B f(r)dr = G(r_B) - G(r_A)$$

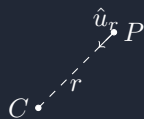
Posto allora

$$V(r) = -G(r)$$

Posso risalire alla definizione di energia potenziale e quindi questo tipo di forze sono conservative.

5.6.1 Forze a simmetria sferica non centrali

Figura 5.7:

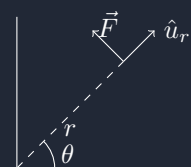


PREndendo una circuitazione allora l'integrale di linea:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = f(r)2\pi R$$

Essendo questo integrale non uguale a zero, allora la forza non è conservativa.

Figura 5.8: Forza non centrale a simmetria sferica



5.6.2 Forze centrali non a simmetria sferica

Queste forze sono centrali ma non hanno una simmetria sferica per cui il loro modulo cambia se cambia la loro posizione sulla sfera allora in questo caso, la forza è:

$$\vec{F} = f(r) \cos \theta \hat{u}_r$$

Allora l'integrale di linea:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_C^A \vec{F} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F} d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} d\vec{r}$$

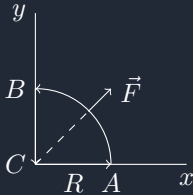
Quindi l'integrale di linea, risolvendo tutti gli integrali spezzati diventa:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{r=0}^{r_A=R} f(r) dr + 0 + 0$$

Così come nel disegno, la forza non è simmetria rispetto ad una sfera poiché non dipende solo ed esclusivamente dal modulo del raggio vettore che congiunge la forza al centro della sfera ideale ma anche dall'orientazione del vettore forza.

5.7 Il caso della molla tridimensionale

Figura 5.9: Forza centrale non a simmetria sferica



Se io attacco la molla in un certo punto allora quando tiro la molla si ha una forza di richiamo verso il centro della molla e quindi questa forza è proprio centrale a simmetria sferica e avrà quindi una certa energia potenziale e sarà anche conservativa.

$$\vec{F}_d = -K(r - l_0) \hat{u}_r$$

$$V = \frac{1}{2} K(r - l_0)^2$$

Allora l'energia meccanica diventa nel caso di un certo angolo rispetto da uno degli assi nel piano di giacenza della molla:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$\vec{r} = r \hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

La sola energia meccanica non mi basta per risolvere il problema poiché ho due gradi di libertà e dunque un'equazione sola non mi basta per poter risolvere il problema.

5.8 Piattaforma ruotante con $\vec{\omega} = 0$

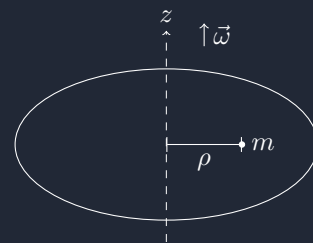
Poniamo l'osservatore in un SDR non inerziale proprio sopra la Piattaforma osservando un punto P anch'esso sulla piattaforma. Sul punto p agiscono una forza di trascinamento mentre la forza di gravità è bilanciata dalla normale del piano.

$$\vec{F}_t = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\rho \hat{u}_P + z \hat{k})) = +m \omega^2 \rho \hat{u}_P$$

Figura 5.10: ads



Figura 5.11: La piattaforma ruotante



Vale solo il contributo di ρ poiché l'oggetto non si muove lungo la verticale. Nel caso di un piccolo spostamento \vec{dr} allora si ottiene:

$$\vec{dr} = d\rho\hat{u}_P + \rho d\hat{u}_P + dz\hat{k}$$

Allora si ottiene proprio il lavoro come:

$$\delta L = \vec{F}_t \vec{dr} = (m\omega^2 \rho \hat{u}_P) \cdot (d\rho \hat{u}_P + \rho d\hat{u}_P + dz\hat{k}) = m\omega^2 \rho d\rho$$

L'energia centrifuga

$$V = -\frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2$$

La forza di coriolis

$$\vec{F}_{co} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

La forza di Coriolis non fa lavoro poiché è sempre ortogonale allo spostamento infatti:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr} = (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$$

FA sempre lavoro zero e quindi non altera il bilancio energetico mentre se si muove allora si cambiano le condizioni e quindi potrebbero non valere più le condizioni di vincolo liscio.

Nel SDR non inerziale in assenza di attriti e altre forze, si conserva l'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2$$

Per un osservatore esterno alla piattaforma ruotante l'energia meccanica non si conserva. Infatti un'osservatore esterno vede che l'energia cinetica cambia e non vede altre forze conservative (la centrifuga non c'è) ma l'energia meccanica non si conserva poiché c'è ω costante data dal motore della piattaforma ruotante che compie lavoro per tenere un certo regime. Nel caso della pallina che è su questa piattaforma:

$$t = 0, \rho = \rho_0, \dot{\rho} = 0, E = -\frac{1}{2}m\omega^2 \rho_0^2$$

$$t = t_f, \rho = R, \dot{\rho} = ?, E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

Dato che l'energia si conserva allora posso uguagliarle e ottenere:

$$\dot{\rho} = \pm \omega \sqrt{R^2 - \rho_0^2}$$

Ha senso? Si perché R è il bordo della giostra e quindi quella radice è ben definita e quindi è vero sia per la conservazione dell'energia ed in tutti i casi del movimento da ρ_0 a R e viceversa. Derivando l'espressione dell'energia posso ottenere il caso $F = ma$ nel caso della potenziale della centrifuga:

$$\dot{\rho}(m\ddot{\rho} - m\omega^2 \rho) = 0$$

5.8.1 Il sistema dell'antimolla

Nel caso di una molla che è fissata al centro di una piattaforma ruotante con una massa, se vince il contributo della rotazione allora si ha una antimolla poiché la massa attaccata alla molla tende ad uscire dalla piattaforma ruotante vincendo la costante della molla; altrimenti si ha un moto armonico semplice se $k \gg \omega$.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{2}k\rho^2$$

5.9 Studio dell'equilibrio del sistema

Nello studio di un sistema con vincoli ideali e forze conservative, allora lo studio della posizione di equilibrio è relativamente facile. In un qualsiasi SdR, tenendo conto delle forze apparenti e riconducendoci dunque al caso ideale, allora un corpo rimane fermo (equilibrio più semplice) quando la risultante è zero. Se le forze sono conservative allora se la risultante è nulla vuol dire che in un solo grado di libertà

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 0$$

vuol dire che:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Posso impostare il sistema di riferimento di un pendolo dove voglio in funzione dell'unico grado di libertà, ossia dell'angolo θ e quindi posso identificare col SdR centrato nella massa

$$V = mgz$$

Le energie potenziali V_1 e V_2 differiscono di una costante e quindi vanno bene entrambe e le loro derivate sono proprio:

$$\begin{aligned} V_1 &= (L - L \cos \theta)mg \\ V_2 &= -mgL \cos \theta \end{aligned}$$

Derivando:

$$\frac{dV}{d\theta} - mgL(-\sin \theta) = mgL \sin \theta$$

Allora quando $\theta = 0$ la derivata è zero.

Figura 5.12: Pendolo



5.10 Condizione di equilibrio

La derivata dell'energia potenziale rispetto ad x presuppone di avere solo un grado di libertà.

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Ci dà la condizione di equilibrio: infatti nel caso del pendolo si ha che:

$$V = mg(L - L \cos \theta)$$

Facendo la derivata sul grado di libertà che sto considerando allora posso fare la derivata su θ e questo automaticamente tiene conto del vincolo poiché se parlo di x, y, z non sto considerando i vincoli del sistema, se invece li considero e lo vincolo nel piano allora l'unico grado di libertà è proprio θ .

$$\frac{dV}{d\theta} = mgL \sin \theta$$

Ossia le soluzioni sono, considerato un filo che è resistente alla trazione ma non alla compressione:

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Se invece considerassi il caso di una asta, allora se il pendolo è perpendicolare l'asta impedisce al punto materiale di cadere e compensa il peso. Matematicamente si esprime la piccola variazione di teta rispetto alla verticale se il punto materiale e l'asta sono sopra con l'energia potenziale, nel caso della condizione di equilibrio $\theta = 0$, l'energia potenziale è minima, altrimenti è massima, infatti facendo la derivata seconda rispetto al grado di libertà, si ottiene proprio:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgL \cos \theta$$

Quindi:

$$V''(0) = mgL > 0, \quad V''(\pi) = -mgL < 0,$$

Quindi in $\theta = \pi$ c'è proprio un massimo (equilibrio instabile) per l'energia potenziale ed un minimo per $\theta = 0$ (equilibrio stabile). IN più dimensioni la stazionarietà si ottiene con le derivate parziali di tutte le variabili:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \dots$$

E quindi facendo la derivata parziale due volte rispetto ad x, y, \dots allora la sua forma può essere o un massimo o un minimo in funzione proprio delle variabili si ottengono o paraboloidi, oppure una sella: una condizione di minimo in una variabile ed una di massimo in un'altra. Sarebbe stabile in una direzione ma sostanzialmente è instabile: nel punto di sella infatti non c'è una vera stabilità.

5.10.1 Molla ed equilibrio sul soffitto

Scelto il punto di equilibrio dove la molla è a riposo:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

messo ora il peso devo considerare anche l'energia potenziale della forza peso che dipende dalla quota data dalla coordinata x e quindi sarà negativa. Per trovare la condizione di equilibrio faccio allora la derivata rispetto ad x :

$$\frac{dV}{dx} = kx - mg$$

E quindi si annulla proprio per $kx = mg$ ossia dove le due forze si eguagliano in funzione dell'unica coordinata x e quindi un solo punto di equilibrio. Troviamo ora se è instabile o stabile attraverso la derivata seconda:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k > 0, \text{ equilibrio stabile}$$

5.10.2 L'antimolla

Nell'antimolla l'asta ha massa zero e vincola il punto materiale ad avere solo un grado di libertà facendo sì che l'energia potenziale della massa diventi proprio:

$$V = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl \cos \theta$$

E allora si ottiene l'espressione, utilizzando taylor per il coseno:

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$V \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Facendo la derivata prima si ottiene la soluzione::

$$\frac{dV}{d\theta} = L(kL - mg)\theta$$

$$\theta = 0.$$

C'è anche il caso in cui $kL = mg$; facendo invece la derivata seconda si ha:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = L(kL - mg)$$

Se $kL > mg$ allora la derivata seconda è maggiore di zero ho un equilibrio stabile, altrimenti la derivata seconda è minore di zero e ho un equilibrio instabile, se sono uguali allora fisicamente la derivata seconda è zero e significa che è un equilibrio indifferente.



Figura 5.13: Antimolla

5.11 Studio del moto con un piccolo spostamento dall'equilibrio

In funzione di una certa distanza x rispetto alla posizione di equilibrio x_{eq} è dato dallo sviluppo di taylor della funzione dell'energia potenziale:

$$V(x) = V(x_{eq}) + \frac{dV}{dx}|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq})^2 + \dots$$

Allora date le definizioni di prima con le derivate prime e seconde si ha proprio:

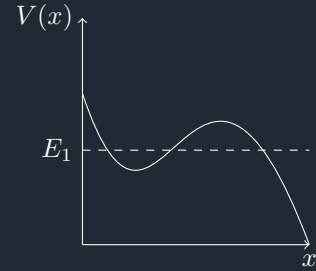
$$V(x) = c + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

Dove $V_{eq} = c$ e k è un parametro della derivata seconda che può essere positivo o negativo.

$$k = \begin{cases} k > 0 & \text{moto armonico} \\ k < 0 & \text{moto esponenziale} \end{cases}$$

Questo vuol dire che possiamo sapere, discostandoci di poco rispetto all'equilibrio, il tipo di moto che accadrà. Spesso si trova il grafico rispetto al parametro e quindi quando si ha un vincolo si ha l'energia potenziale con un vincolo liscio e forze conservative, allora si conserva l'energia e quindi essendo l'energia la somma tra la potenziale e la cinetica, l'energia cinetica è sempre positiva per definizione. Questo però ci pone dei limiti poiché una è sempre positiva o zero e l'altra cambia sempre di segno e l'energia meccanica è sempre costante. Si ha quindi una situazione in cui ci sono alcune configurazioni permesse mentre altre non sono proprio possibili a causa della natura dell'energia cinetica: nel caso in figura le configurazioni permesse sono sempre quelle sotto l'energia meccanica, altrimenti l'energia cinetica dovrebbe essere negativa.

Figura 5.14: dsf



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

$$v = \pm \sqrt{2 \frac{E - V(x)}{m}}$$

Per costruzione, dipendendo da x cambierà il segno. Si può allora fare qualcosa di più e quindi essendo la velocità

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v = \dot{s}, \quad s = s(x).$$

Posso separare le variabili s, t e quindi:

$$\frac{ds}{\pm \sqrt{2 \frac{E - V(s)}{m}}} = dt$$

Prendendo allora l'integrale da entrambe le parti tra due intervalli di tempo t_1, t_2 e s_1, s_2 allora:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\pm \sqrt{2 \frac{E - V(s)}{m}}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$2(t_2 - t_1) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{2m}{E - V(s)}} ds.$$

In linea di principio posso calcolarmi questo integrale nelle piccole oscillazioni. Si introduce allora il concetto di **barriera di potenziale**: ossia l'altezza oltre la quale la pallina non può muoversi tra due cunette, non può allora andare nell'altra cunetta e classicamente non può essere attraversato.

Capitolo 6

Dinamica dei sistemi

6.1 Sistemi non approssimabili ad un punto materiale

Il mio sistema non è più formato da un punto materiale ma da degli oggetti estesi che possono essere divisi in tanti punti materiali e studiarne la dinamica. IN generale posso scegliere quali corpi posso ingegare nel mio sistema a seconda di come è più comodo. Per ciascun punto conosco massa e vettore posizione. Il centro di massa è un punto ideale definito come (in un sistema discreto):

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (6.1)$$

Dove m_i è la massa propria di ogni misura, posso definire nella stessa maniera la massa del centro di massa come la somma delle masse totali e quindi ottenere l'espressione di prima come:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

IN un sistema continuo non posso semplicemente fare l'integrale di quella roba ma devo invece considerare in volumetto elementare di massa molto piccola dm e volume dV e, se sono sufficientemente piccole, allora $dm = \rho dV$ tra di loro ed in generale sono funzione della posizione \vec{r} , allora posso sostituire questa espressione con un integrale come:

$$\vec{r} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

C'è una relazione se divido in due il corpo? Il centro di massa di tutto l'oggetto è sempre il solito ma posso considerare le somme per le due partizioni e quindi il centro di massa è proprio la somma tra le due masse delle partizioni.

6.2 Centro di massa nelle figure complesse

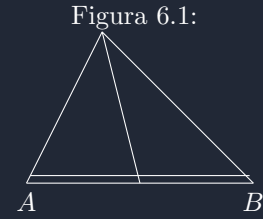
6.2.1 Le figure piane

Nel caso di due masse, il centro di massa si trova tra le due masse. Nel caso in cui una delle due masse sia molto maggiore dell'altra allora il centro di massa sarà spostato verso la massa maggiore. Ma se ci fossero molte più masse? Allora nel caso di più masse si ha che il centro di massa risiede sull'asse di simmetria delle masse. Si chiama allora asse di simmetria un asse sul quale ogni massa è tale per cui c'è sempre un'altra massa a distanza uguale.

Un sistema si dice omogeneo se la sua densità è costante, altrimenti non è omogeneo: nel caso del vettore del centro di massa allora essendo:

$$\begin{aligned} \vec{r}_C &= \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} \\ \vec{r}_C &= \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV} \end{aligned}$$

Nel caso di simmetrie o strutture note come nel caso di una figura piana di cui conosco gli assi di simmetria come un quadrato, il centro degli assi di simmetria del quadrato è proprio il centro del quadrato. Nel caso di figure meno semplici come già il triangolo la posizione del centro di massa non è intuitivo poiché il centro del triangolo non è così evidente. Scegliendo uno dei lati possiamo prenderne una fetta parallela al lato scelto posso indicare il centro di questo pezzetto e ripetere il procedimento fino a tracciare la mediana rispetto all'angolo opposto, faccio lo stesso per tutti gli altri lati e quindi, essendo che tutte e tre le mediane si incontrano esattamente a due terzi della lunghezza delle mediane, allora quello è il centro di massa del triangolo.



6.2.2 Le figure solide

Nel caso di una figura solida come un cono, lo scopo è cercare di ridurre gli integrali bi-tridimensionali in integrali unidimensionali con certe approssimazioni e con certi procedimenti. Possiamo fare come nel caso del triangolo delle piccole fette attraverso i piani. Allora l'integrale da risolvere sarà (posto che ovviamente sia omogeneo):

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$$

Allora il volume da calcolare, data una sezione dx del cono

$$dV = 2\pi r dx$$

E allora essendo che conosco la distanza dalla cima (h) posso ricavare quel raggio come:

$$r = \frac{R}{h}x$$

$$dV = \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 dx$$

Sono passato da un integrale tridimensionale fino ad un integrale unidimensionale:

$$\vec{r}_c = \frac{\int x \left(\pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \right)}{\int \left(\pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \right)} dx$$

Allora risolvendo:

$$x_c = \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^h}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^h} = \frac{3}{4}h$$

6.3 Quantità di moto

La quantità di moto è data da:

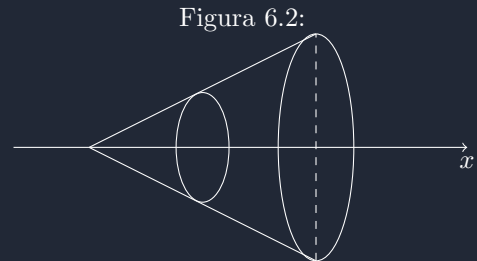
$$\vec{q} = m\vec{v}$$

la quantità di moto del centro di massa è proprio la somma dei contributi di tutte le quantità di moto e quindi

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Se volessi ottenere la velocità del centro di massa allora dovrei derivare rispetto al tempo la posizione del centro di massa:

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$



Se si deriva invece la quantità di moto del sistema si ottiene la derivata dei singoli punti materiali oppure la somma delle masse per l'accelerazione dei singoli punti:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

si ottiene proprio la risultante della forza che agisce sul corpo:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

quindi dobbiamo metterla in una forma più semplice per poterla utilizzare: si distinguono allora forze interne e forze esterne: si chiamano forze interne tutte le forze dovute all'interazione tra i corpi del sistema stesso mentre quelle esterne sono quelle che provengono all'esterno e sia le forze apparenti.

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(INT)} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Per le forze interne devo considerare anche il terzo principio per ogni punto, quindi per ogni forza applicata ad un punto ce ne è una uguale e contraria:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(INT)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{i,j} = 0$$

Si ottiene allora la prima equazione cardinale della dinamica:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(EXT)} = \vec{F}^{(EXT)}$$

che permette di descrivere i sistemi più complessi con descrizioni molto più semplici. Allora si arriva anche alla seconda equazione del centro di massa:

$$\vec{F} = M \vec{a}_c$$

6.3.1 Il sistema isolato

La prima equazione cardinale della dinamica mi dice che la forza esterna è zero e che la quantità di moto è conservata poiché

$$\dot{\vec{Q}} = 0, \quad \vec{Q} = \text{costante}$$

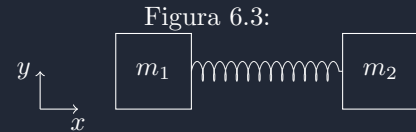
Questo sistema non riesco ad esprimerlo mediante $F = ma$ e nemmeno attraverso la conservazione dell'energia poiché ho due gradi di libertà. Essendo che la forza elastica adesso è una forza interna (e quelle esterne sono la forza peso e la normale) e lungo l'orizzontale si conserva la quantità di moto e la conservazione dell'energia che mi danno i due gradi di libertà.

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1 - l_0)^2$$

Allora la quantità di moto:

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Una volta che ho le condizioni iniziali posso risolvere il sistema.



6.4 Il Momento angolare

Dato che un sistema di n punti ha $n \cdot 3$ gradi di libertà ed il corpo rigido ne ha 6, allora dobbiamo trovare un'analogia per le forze esterne in modo tale che possa descrivere tutti i gradi di libertà. Si definisce allora il momento angolare per un sistema di punti come

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{q}_i = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i \quad (6.2)$$

Scegliendo un punto qualsiasi Ω che non deve per forza coincidere con l'origine degli assi cartesiani (è totalmente arbitrario) e per ciascun punto del sistema posso definire il vettore posizione e spostamento. Tutte le definizioni del momento angolare sono ugualmente valide, così come la somma dei singoli momenti angolari ed il momento angolare del sistema o del singolo punto è una quantità vettoriale rispetto ad un punto qualsiasi Ω . Scegliendo un sistema di riferimento qualsiasi, posso allora definire la distanza rispetto all'origine delle coordinate come::

$$\vec{r}_{i,\Omega} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega$$

6.5 Seconda equazione cardinale della dinamica

Derivando rispetto al tempo la somma del momento angolare allora, essendo che ci sono molte cose che dipendono dal tempo ottengo:

$$\dot{\vec{L}}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i - \vec{v}_\Omega) \times m_i \vec{v}_i$$

Noi sappiamo che per la seconda di Newton la risultante delle forze è proprio la somma delle masse per accelerazione, posso allora spezzare la somma ottenendo:

$$\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$$

Faccio allora la somma solo sul secondo prodotto vettoriale della seconda somma ottenendo allora una nuova espressione del momento angolare:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i - \vec{v}_\Omega \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Data la definizione di momento di una forza rispetto ad un polo (punto) Ω qualsiasi, come:

$$\vec{M} = (P - \Omega) \times \vec{F} \quad (6.3)$$

Dato che le forze sono la somma delle forze interne ed esterne, allora posso dire che le forze sono la somma delle forze dovute a tutti gli altri punti

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{i,j}^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Dato questo la somma dei momenti angolari diventa:

$$\sum_{i=1}^n (P - \Omega) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_{i,j}^{(INT)} + \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Allora posso esprimere il momento angolare come la seconda cardinale:

$$\boxed{\dot{\vec{L}}_\Omega = \vec{M}_\Omega^{(EXT)} - \vec{v}_\Omega \times \vec{Q}} \quad (6.4)$$

Opzioni per calcolare il momento quando il secondo termine è nullo

1. $\vec{v}_\Omega = 0$;
2. $\Omega = C_M$;
3. $\vec{v}_\Omega \times \vec{v}_{CM} = 0$.

Si nota ora che con questa equazione (vettoriale) con tre gradi di libertà ottengo 6 equazioni scalari con le due cardinali. Con le tre equazioni cardinali della dinamica si può descrivere qualsiasi moto. E' sempre vero che le informazioni della seconda sono indipendenti dalla prima? NO, in generale non è vero poiché in moti come quello traslatorio le informazioni che ottengo da questa

6.5.1 Il cambio di polo(rinuncia agli studi)

Se invece di avere il polo Ω utilizzassi il polo Ω' e quindi imponessi il momento angolare con questo nuovo polo Ω' non cambierebbe assolutamente nulla:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n ((P_i - \Omega') - (\Omega' - \Omega)) \times m_i \vec{v}_i$$

Tornerei a quella di partenza con Ω' . Se volessi spezzare invece la sommatoria si otterrebbe:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_{\Omega'} + (\Omega' - \Omega) \times \vec{Q}$$

Se la quantità di moto è zero allora il momento angolare non dipende dal polo scelto. Per il modulo delle forze con un polo diverso si ha che

$$\begin{aligned} \vec{M}_{TOT}^{EXT} &= \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega') \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n (\Omega' - \Omega) \times \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}_{TOT,\Omega'}^{EXT} + (\Omega' - \Omega) \times \vec{F}_i^{EXT} \end{aligned}$$

Se cambio quindi il polo il momento cambia, se però la risultante delle forze esterne è uguale a zero, allora il momento risultante delle forze esterne è indipendente dal polo. Se $\Omega' = C_M$ allora il momento angolare rispetto ad un polo generico è il momento angolare rispetto al centro di massa :

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_C + (C - \Omega) \times M \vec{v}_c$$

Che succede se $\Omega = C_M$ e $\vec{v}_\Omega = 0$? si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \vec{F}^{TOT} = \dot{\vec{Q}} \Rightarrow \vec{F}^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{Q}_{const} \\ \vec{M}_\Omega^{EXT} = \dot{\vec{L}}_\Omega \Rightarrow \vec{M}_\Omega^{EXT} = 0 \Rightarrow \vec{L}_\Omega const \end{cases}$$

Che è proprio la terza cardinale. Dalla seconda e terza di Newton si ottengono le equazioni con cardinali con \vec{L}, \vec{Q} isolati. SI ottiene, per un sistema di due punti:

$$\begin{aligned} \vec{Q} &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = const \\ \dot{\vec{Q}} &= 0 = \dot{\vec{q}}_1 + \dot{\vec{q}}_2 \\ \vec{F}_{1,2} &= -\vec{F}_{2,1} \end{aligned}$$

Ottenendo metà del secondo principio della dinamica. Posso esprimere il momento angolare come:

$$\begin{aligned} \vec{L}_C &= (P_1 - C) \times m_1 \vec{v}_1 + (P_2 - C) \times m_2 \vec{v}_2 \\ m_1 &= m_2 = m \\ |P_1 - C| &= |P_2 - C| = d \\ |\vec{v}_1| &= \omega d, |\vec{v}_2| = \omega d \end{aligned}$$

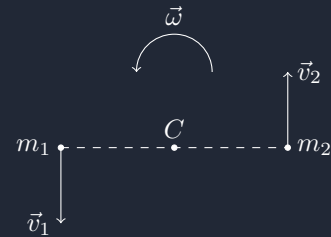
Si può ora esprimere tutto in coordinate polari attraverso l'utilizzo di un angolo ϕ e quindi:

$$\begin{cases} (P_1 - C) = d \hat{u}_r \Rightarrow \vec{v}_1 = d \dot{\hat{u}}_r = d \dot{\phi} \hat{u}_\phi \\ (P_2 - C) = d \hat{u}_r \Rightarrow \vec{v}_2 = d \dot{\hat{u}}_r = d \dot{\phi} \hat{u}_\phi \end{cases}$$

In un moto di sola rotazione(non c'è traslazione del sistema che sta ruotando) e quindi la scelta del polo non è obbligatoria. In generale il momento angolare aiuta quando si hanno fenomeni di rotazione.

6.5.2 Il momento angolare non è sempre parallelo alla velocità angolare

Figura 6.4: Francobollo 1



Le coordinate polari non posso più utilizzarle in questo esercizio poiché siamo nelle tre dimensioni ma posso utilizzare le coordinate cilindriche.

6.6 Caso delle forze parallele

Date le equazioni cardinali si possono ottenere:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(INT)} = \dot{\vec{P}}_{TOT} \\ \vec{M}_\Omega = \dot{\vec{L}}_\Omega + (Vr \times \vec{P}_{TOT}) \end{cases}$$

Dato allora il caso della somma delle forze come:

$$\vec{F}^{INT} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n f_i \right) \hat{u}$$

Allora si ha che il vettore distanza delle forze è proprio il vettore applicazione delle forze:

$$\vec{r}_f = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (6.5)$$

Ossia la media pesata delle forze totali. Per la formula della somma delle forze i due sistemi hanno lo stesso risultante: basta dimostrare che abbiano lo stesso momento risultante:

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times f_i \hat{u}) = \left(\sum_i f_i \vec{r}_i \right) \times \hat{u} = \vec{r}_f \times \vec{F}$$

6.6.1 Il caso della forza peso

Nel caso della forza peso, considerata la forza peso come:

$$\vec{g} = -g\hat{k}$$

si ha allora che $f_i = -m_i g$ e dalle relazioni precedenti si ottiene che applicata nel punto \vec{r}_G quel polo prende il nome di **baricentro**, che nei corpi non troppo estesi coincide con il centro di massa e si esprime come:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{r}_C \quad (6.6)$$

6.6.2 L'utilizzo del baricentro: la forza di trascinamento nei sistemi complessi

Dato un sistema di riferimento assiale, le forze parallele si applicano tutte nel centro di massa poiché sono tutte parallele.

$$\vec{F}_{T,i} = -m_i \vec{a}_{O'}$$

E quindi la loro somma è proprio la risultante di tutte le forze applicate.

6.7 Lavoro ed energia nei sistemi

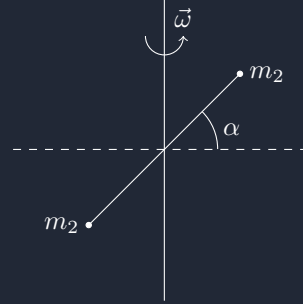
Per un sistema di punti è ragionevole pensare che l'energia cinetica sia la somma dell'energia cinetica di tutti i punti e quindi dato un sistema di riferimento (con terna di assi sempre parallele a quella del sistema fisso) e dalle equazioni cardinali e scelto $\vec{r} = (O' - O)$ si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= \vec{r}_i' + \vec{r}_C \\ \vec{v}_i &= \vec{v}_i' + \vec{v}_C \end{aligned}$$

Data allora la definizione del vettore posizione come media pesata delle forze, si può ottenere:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_C)}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Figura 6.5: Francobollo 2



6.7.1 Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica di un sistema di punti è esattamente la somma delle energie cinetiche di tutti i punti del sistema:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_C) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{v}_C) = \quad (6.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_C^2 \quad (6.9)$$

I singoli termini allora indicano grandezze diverse: il primo termine è proprio l'energia cinetica rispetto al centro di massa, il secondo termine è sempre zero mentre la terza grandezza è l'energia cinetica del centro di massa. Il teorema di Konig per l'energia cinetica ci dice proprio che l'energia cinetica di un sistema è sempre esprimibile come la somma dell'energia cinetica del centro di massa come se avesse la massa in un punto e velocità del centro di massa ed un termine che è l'energia cinetica rispetto al centro di massa per ogni punto.

$$\begin{aligned} \delta L_i &= dK_i \\ \sum_{i=1}^n \delta L_i &= \sum_{i=1}^n dK_i = dK \end{aligned}$$

Generalmente il lavoro delle forze interne è diverso da zero mentre posso ignorare spesso il lavoro delle forze esterne (dimostrato molto più avanti) per il corpo rigido però posso dire che il lavoro delle forze interne sia zero.

6.7.2 Teorema di Konig per il momento angolare

Rispetto ad un polo Ω scriviamo:

$$\begin{aligned} \vec{L}_\Omega &= \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^n ((P_i - C) + (C - \Omega)) \times m_i (\vec{v}_i + \vec{v}_C) \end{aligned}$$

Spezzando tutto allora:

$$\sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^n (C - \Omega) \times m_i \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n (C - \Omega) \times m_i \vec{v}_C$$

Il secondo ed il terzo termine sono zero poiché è esattamente la distanza dal centro meno la distanza dal centro per la definizione di centro di massa: $P_i - C$ è esattamente (quando sommo tutte le masse) la distanza dal centro di massa dal centro di massa. Gli altri due pezzi sono combinati ottenendo:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_C' + (C - \Omega) \times M \vec{v}_C$$

Il primo termine è proprio il momento angolare rispetto al centro di massa:

$$\vec{L}_C' = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}_i'$$

mentre il secondo termine è il momento angolare del centro di massa

$$(C - \Omega) \times M \vec{v}_C$$

IN meccanica quantistica il primo termine è proprio lo spin di una particella (in altri testi si usa anche per gli oggetti macroscopici) che è intrinseco della particella. Per il corpo rigido sarà molto utile per definire il momento angolare.

6.7.3 Il momento angolare del moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme è accelerato ed il suo momento angolare è dato dalla relazione:

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = (mr^2)\dot{\phi}\hat{k}$$

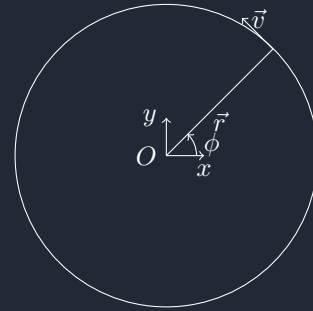
Con le seguenti sostituzioni:

$$v = \omega r = \dot{\phi}r$$

$$w = \dot{\phi}$$

Il teorema delle forze vive mi dice che è costante l'energia cinetica e la forza centripeta non compie lavoro sulla traiettoria (quindi è accelerato) e cambia la direzione della velocità ma non compie nessun lavoro sul corpo e quindi l'energia cinetica è costante.

Figura 6.6: Mom. angolare cerchi



Appendice A

Esercizi

A.0.1 Esercizio su moodle (DPM)

Presi due punti materiali e con l'approssimazione che il filo è teso e che i due oggetti appesi sono due punti materiali, si assume anche che B sia in quiete e che A parta da fermo quando $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Posto il sistema di riferimento, allora posso misurare l'accelerazione con un sistema di riferimento ideale e il filo inizialmente uguale e potrebbe scorrere (si assume quindi un solo grado di libertà dicendo che B è in quiete e che il filo non scorra). Studiando B si ottiene la relazione:

$$\vec{T}_B + \vec{N} + m_B \vec{g} = 0$$

Studiano invece A, il quale si muove all'istante zero e quindi posso dire:

$$m_A \vec{a}_A = m_A \vec{g} + \vec{T}_A$$

Ora dato che A si muove, la sua traiettoria sarà una parabola e quindi posso dire dall'equazione vettoriale devo capire quando si alza: con la schematizzazione del problema posso dire che B si alza quando A inizia a muoversi, definiti allora i versori di A, posso dire che la proiezione lungo \hat{n} è dato da:

$$-m_A l \dot{\theta}^2 = m_A g \cos \theta - T_A$$

Allora posso dire che:

$$T_A = m_A g \cos \theta + m_A l \dot{\theta}^2$$

E quindi

$$N = m_B g - T_B \geq 0$$

E allora posso riscrivere, dato che la velocità di A posso esprimerla come $l\dot{\theta}$,

$$m_A (g \cos \theta + \frac{v_A^2}{l}) \leq m_B g$$

Dato che tutte le forze sono conservative, allora posso utilizzare la conservazione dell'energia meccanica anche perché c'è solo un vincolo:

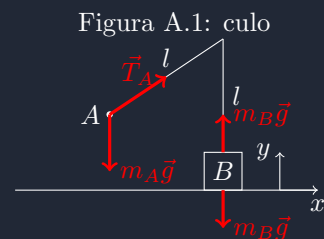
$$E = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g y_A$$

Allora essendo che tutta questa per definizione è una costante, allora devo eguagliarla all'energia al tempo zero:

$$E_i = E(v_A = 0, y_A = l) \Rightarrow m_A g l$$

Imponendo le due uguaglianze ottengo:

$$v_A^2 = 2g(l - y_A)$$



Sostituendo la velocità nella formula trovata prima posso ottenere, posto

$$\Delta y = l - y_A = l \cos \theta \geq 0$$

Da qui trovo il coseno di teta e quindi Sostituendo tutto nell'espressione sopra

$$m_A \left(\frac{\Delta y}{l} + 2 \frac{\Delta y}{l} \right) \leq m_B$$

Allora ottengo l'espressione per il delta y come:

$$\Delta y_{max} = \frac{m_B l}{3m_A}$$

Ossia il valore massimo oltre il quale la massa B inizia ad alzarsi e quindi fa scorrere il filo.

A.0.2 Esercizio di esame febbraio 2021

Dato il testo (che si spera l'utente abbia letto) si fanno le seguenti assunzioni: essendo la guida fissa, essa è descritta dall'equazione $y = kx^2$, avendo a che fare con un punto materiale non essendoci attrito, ho anche a che fare con un vincolo bilatero, e ho un SDR inerziale poiché la guida non si sposta ed è fissa. Quello che posso fare è scrivere le forze in gioco e la reazione vincolare della guida. Per ipotesi di mancanza di attrito so anche che N è ortogonale alla traiettoria. Tutte le forze sono conservative e quindi l'energia meccanica si conserva ed il vincolo è bilatero

Figura A.2: IMMAGINE IDS DS MDOODLE DE D

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy = \text{const} = 0.$$

Allora posso ricavare la velocità:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Essendo $y = kx^2$, la y finale, ossia quella prima che tocchi terra è quella della x massima e quindi la x_{MAX} è semplicemente L e allora

$$v_F = \sqrt{2gkL^2}$$

PUNTO B:

Mentre \vec{N}_x è concorde con l'asse di riferimento, allora il segno di \vec{N}_y non lo è e per come abbiamo scelto il sistema di riferimento non è possibile che sia concorde. Dato che la guida può solo spingere ma non tirare, allora

$$\vec{N}_x, \vec{N}_y \geq 0$$

Ora

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Che posso proiettare lungo la direzione x ed y ed ottengo che

$$\begin{aligned} N_x &= m\dot{x} \\ mg - m\dot{y} &= N_y \end{aligned}$$

Dato che si hanno due gradi di libertà, dobbiamo utilizzare delle approssimazioni: fin tanto che il corpo è attaccato alla guida allora questo soddisfa le equazioni della guida:

$$\vec{r} = P - O = x\hat{i} + kx^2\hat{j}$$

Derivando, si ottiene l'equazione della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + 2kx\dot{x}\hat{j}$$

Derivando ancora:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + 2k(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{j}$$

Il secondo metodo è utilizzare l'energia meccanica:

$$v^2 = 2gy$$

Sostituendo la relazione ottenuta preimac di v:

$$v^2 = \dot{x}^2(1 + 4k^2x^2) = 2gkx^2$$

Allora:

$$\dot{x}^2 = \frac{2gkx^2}{1 + 4k^2x^2}$$

METODO ALTERNATIVO:

Considerato che \vec{N}_y e \vec{N}_x non sono più generici e io so che N deve essere ortogonale alla traiettoria: allora se vado a disegnare la traiettoria, avrò un versore tangente ed un versore invece ortogonale ad \hat{u}_t :

$$\vec{N} \cdot \hat{u}_C = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{v} = 0$$

Sostituendo quelle equazioni della velocità allora posso ottenere:

$$N_x \dot{x} - N_y 2kx \dot{x} = \dot{x}(N_x - 2kx N_y)$$

Ci sono allora due soluzioni per questa equazione:

$$N_x = 2kx N_y \quad e \quad x = 0$$

Da l'equazione:

$$\begin{cases} N_x = m\ddot{x} \\ N_y = m(g - \ddot{y}) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{N_x}{m} = \frac{2kx N_y}{m}$$

Sostituendo all'interno della equazione per N_y allora:

$$mg - N_y = m2k\left(\dot{x} + \frac{2kx N_y}{m}\right)$$

SO anche che:

$$\dot{x}^2 = \frac{2gkx^2}{1 + 4k^2x^2}$$

Allora sostituendo e raccogliendo N_y :

$$N_y(1 + 4k^2x^2) = mg\left(1 - \frac{4k^2x^2}{1 + 4k^2x^2}\right)$$

E allora:

$$N_y = \frac{mg}{(1 + 4k^2x^2)^2}$$

E allora non si stacca mai dalla guida.

A.1 Esercizio esame novembre 24

Figura A.3: fda

Sul filo agiscono diverse forze ma non essendoci la gravità, la forza che la rimpiazza è quella centrifuga e tende a spostarlo verso una direzione (è radiale). Le ipotesi sono:

1. La piattaforma ruota con velocità ω_0 costante (c'è un motore esterno che tiene in rotazione il disco).
2. Il filo del pendolo è ideale;
3. Si lavora con la schematizzazione del punto materiale;
4. Sistema non inerziale O_{xy} .

Punto a:

Per calcolare la distanza si può scrivere per le coordinate:

$$\begin{cases} x_P = l \sin \phi \\ y_P = a + l \cos \phi \end{cases}$$

Adesso per calcolare la distanza dal centro O basterà calcolare la distanza dal filo come:

$$|P - O|^2 = x_P^2 + y_P^2 = l^2 \sin^2 \phi + a^2 + l^2 \cos^2 \phi + 2al \cos \phi$$

E quindi

$$|P - O| = \sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos \phi}$$

PUNTO B:

Sul punto P ci sono diverse forze: prima di tutto la forza di trascinamento verso l'esterno, la forza di Coriolis (che non so dove agisce) e la forza centrifuga. Di queste forze quella che compie lavoro è quella di trascinamento mentre quelle che non compiono lavoro sono la forza di Coriolis e la tensione (poiché è sempre ortogonale alla direzione tangente).

Il lavoro della forza di trascinamento è data da:

$$V = -\frac{1}{2}m\omega_0^2|P - O|^2 = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(l^2 + a^2 + 2al \cos \phi)$$

I termini sono quasi tutti costanti, possiamo allora considerare solo il coseno e riassumere quindi l'energia potenziale come una costante meno il pezzo non costante:

$$V = cost - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Derivando si ottiene proprio l'espressione:

$$V' = -m\omega_0^2 al(-\sin \phi) = 0$$

Le cui soluzioni per ottenere l'equilibrio sono proprio $0, \pi$. Verifichiamo allora la stabilità di questo equilibrio, per cui la derivata seconda sarà proprio:

$$V'' = m\omega_0^2 al \cos \phi \Rightarrow \begin{cases} > 0, & \phi = 0 \text{ stabile} \\ < 0, & \phi = \pi \text{ instabile} \end{cases}$$

PUNTO C:

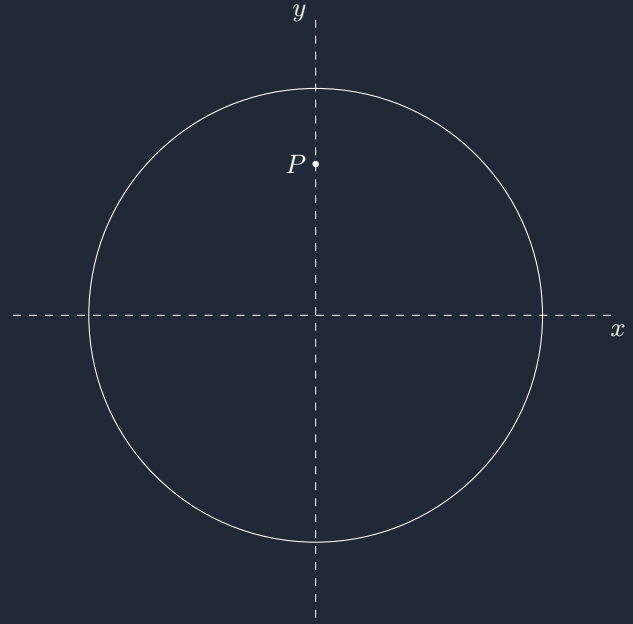
L'energia non è conservata in un sistema di riferimento esterno a causa del motore del disco che lo tiene in rotazione mentre si conserva nel sistema di riferimento ruotante $O_{x,y}$. Il ruolo del motore allora è descritto con la forza di trascinamento. Possiamo allora scrivere l'energia nel sistema di riferimento ruotante con un termine cinetico e uno potenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}_P = l \cos \phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{y}_P = -l \sin \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

Da qui allora si ha che

$$\dot{V}_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = l^2 \dot{\phi}^2$$

Figura A.4: Schematizzazione del problema



Troviamo allora il classico risultato del moto circolare e l'energia allora è ora:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Con la costante dell'energia potenziale che posso liberamente mettere uguale a zero poiché l'energia meccanica è definita a meno di una costante. Con il metodo dell'energia allora posso derivare l'energia ottenendo:

$$\dot{E} = 0 = \frac{1}{2}ml^2 2\ddot{\phi}\dot{\phi} - m\omega_0^2 al(-\sin \phi)\dot{\phi} = 0$$

Semplificando si ottiene la seguente equazione di moto:

$$l\ddot{\phi} + \omega_0^2 a \sin \phi = 0$$

Diventa allora l'equazione del pendolo senza la forza peso ma con la forza centrifuga. Nel limite allora delle piccole oscillazioni sappiamo allora che ϕ è vicino a quella di equilibrio.

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = 0, \quad \Omega^2 = \frac{\omega_0^2 a}{l}$$

Allora il periodo delle oscillazioni si ha che è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \Omega = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

PUNTO D:

Senza le approssimazioni delle piccole oscillazioni dobbiamo prima studiare il moto e trovare la tensione del filo. Si sa da Newton che:

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{co} + \vec{F}_T$$

Allora queste si esprimono come:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{co} &= -2m\omega_0 \times \vec{v} \\ &= -2m\omega_0 l \dot{\phi} \hat{u}_n \end{aligned}$$

Dato che la tensione è opposta a \hat{u}_n si ha:

$$\vec{T} = -T\hat{u}_n$$

E la trascinamento:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2(P - O)$$

Proietto allora lungo la direzione N tutte le forze ottenendo che: posso scrivere intanto la tensione:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= m\vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T \\ \vec{T} = -\hat{u}_n \vec{T} &= -(m\vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T)\hat{u}_n \end{aligned}$$

Allora scriviamo i vettori che compaiono come proiezioni sulla direzione n:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{u}_n &= -l\dot{\phi}^2 \text{ centripeta} \\ \vec{F}_T \cdot \hat{u}_n &= m\omega_0^2(P - O) \cdot \hat{u}_n \end{aligned}$$

Possiamo esprimere il versore lungo n come:

$$\hat{u}_n = \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

E si ottiene allora la forza di trascinamento come:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2(x_P \sin \phi + y_P \cos \phi)$$

Allora date le sostituzioni delle coordinate di P, possiamo allora dire che:

$$m\omega_0^2(l + a \cos \phi)$$

Adesso la proiezione della forza di coriolis è proprio:

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Sostituendo tutte le espressioni trovate ora nell'espressione per la tensione si ottiene allora:

$$T = ml\dot{\phi}^2 - 2m\omega_0 l \dot{\phi} - 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Dobbiamo allora trovare $\dot{\phi}$ per poter trovare l'espressione per la tensione. L'energia la abbiamo scritta prima come:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Parte da fermo ($\dot{\phi} = 0$) e quindi:

$$E_0 = -m\omega_0^2 al \cos \phi_0$$

E quindi portando dall'altra parte possiamo ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 &= -m\omega_0^2 al(\cos \phi - \cos \phi_0) \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) \geq 0 \end{aligned}$$

Dato che l'espressione ha senso se e solo se è positiva, allora devo (dato $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$) che

$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$$

Anche senza le piccole oscillazioni allora so che il pendolo può oscillare (in questa situazione) solo tra quei due valori. Allora $\dot{\phi}$ diventa:

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

Il segno meno è dovuto poiché nel primo periodo ϕ diminuisce e quindi la tensione diventa:

$$T = ml \left(\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) - 2\omega_0 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right) + \frac{\omega_0^2}{l}(l + a \cos \phi) \right)$$

Raccogliendo allora:

$$T = ml\omega_0^2 \left(\frac{3a}{l} \cos \phi - \frac{2a}{l} \cos \phi_0 + 1 + 2\sqrt{\frac{2a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right)$$