Appunti di Ottica (Approfondimenti)

Tommaso Miliani

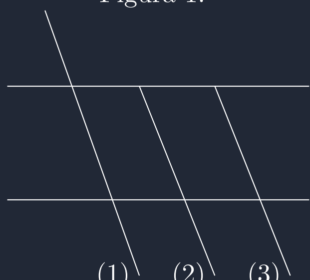
28-11-25

1 Cavità ottiche

Supponendo di avere uno specchio ad alta riflettività e di avere un infinità di strati sulle superfici di questo specchio; la probabilità di riflessione $R \approx 1$. Se si ponesse un'altra interfaccia sotto allo specchio ad alta riflettività, mi aspetto che lo specchio sotto non interferisca con lo specchio sopra. Quello che accade, invece, è che il primo specchio fa trasmettere tutta la luce sullo specchio posto sotto. Si studiano dunque i contributi totali

1. $t^2 E_0 \cos(kx' - \omega t)$
2. $t^2 r^2 E_0 \cos(kx' - \omega t + 2kn\frac{d}{\cos\theta'})$
3. $t^2 r^4 E_0 \cos(kx' - \omega t + 4kn\frac{d}{\cos\theta'})$

Figura 1:



Complessivamente dunque, il campo elettrico totale in trasmissione diventa la somma di tutti i contributi trasmessi dopo l'interfaccia:

$$E_T = \sum_{j=0}^{+\infty} t^2 r^{2j} E_0 \cos\left(kx' - \omega t + 2j\frac{knd}{\cos\theta'}\right)$$

Si può dunque chiamare

$$\delta = \frac{2knd}{\cos\theta'}$$

Allora, utilizzando i complessi, posso ricavare l'intensità totale del campo trasmesso sotto l'interfaccia come:

$$E_T = (1-R)E_0 \sum_{j=0}^{+\infty} R^j \mathrm{Re}\left[e^{i(kx'-\omega t + j\delta)}\right]$$
$$\implies (1-R)E_0 \mathrm{Re}\left[e^{i(kx'-\omega t)} \sum_{j=0}^{+\infty} R^j e^{ij\delta}\right]$$

Si ricorda dunque la serie notevole

$$\sum_{i=1}^{+\infty} h^i = \frac{1}{1-h}$$

E dunque

$$E_T = (1-R)E_0 \mathrm{Re}\left[e^{i(kx'-\omega t)} \frac{1}{1-Re^{i\delta}}\right]$$

Posso dunque risolvere prendendo il modulo del secondo numero complesso ed il coseno della somma delle fasi complesse:

$$E_T = (1-R)E_0 \left|\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\right| \cos(kx' - \omega t + \phi)$$

Il fatto che questo campo elettrico oscilli con qualsiasi fase ϕ è irrilevante in quanto poi si medierà l'intensità nel tempo e dunque il termine di fase non influirà:

$$I_T = I_0(1-R)\left|\frac{1}{1-Re^{i\delta}}\right|^2 =$$
$$\frac{I_0(1-R)^2}{|1-R(\cos\delta + i\sin\delta)|} =$$
$$\frac{I_0(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\delta} \implies I_0$$

A questo punto, dato che si è preso degli specchi con un alto indice di riflettività $R = 1-\epsilon$, in genere dovrebbe passare un termine ϵ dallo specchio. Se però c'è un altro specchio ad alta riflettività sotto il primo specchio, accade che l'intensità trasmessa è proprio I_0 in quanto il coseno fa 1. Se la cavità tra gli specchi è largo d, l'intensità all'interno della cavità è dato da

$$\frac{I_0}{1-R} = \frac{I_0}{1-\epsilon}$$

Dunque, se si sceglie $\epsilon = 10^{-4}$, allora passerà una luce pari a $10^4 I_0$: la potenza dentro la cavità è molto maggiore di quella in entrata. Il motivo di questo paradosso è che quando il campo elettrico incide sulla prima superficie riflettente, c'è una piccola probabilità che essa si possa trasmettere. Se si accende un laser per poco tempo, è impossibile che dentro la cavità ci sia della luce: accendendo allora il laser, si osserva che i pacchetti luminosi in ingresso arrivano uno dopo l'altro.

- Arriva il pacchetto rosso, che ha una piccola probabilità di riflettere e si trasmette quindi poca intensità.
- Arriva il pacchetto blu, che ha anch'esso una piccola probabilità di trasmettere e dunque si trasmessa poca intensità ed entra in controfase con il pacchetto rosso in uscita.
- Arrivando gli altri pacchetti, si sommano sempre di più i contributi in uscita degli altri pacchetti (sono i contributi che si sono trasmessi all'interno e che stanno uscendo dall'interfaccia) che sono in controfase con quelli riflessi e dunque più pacchetti arrivano e più si attenua la riflessione del primo specchio, annullando, dopo un tempo molto lungo la riflessione.

A questo punto si ha solo trasmissione all'interno della cavità ottica dopo un tempo infinito poiché tutti i contributi che sono stati trasmessi all'interno hanno completamente annullato qualsiasi riflessione. Dunque aspettando un tempo infinito, si arriva alla condizione di intensità luminosa trovata prima e a quel punto tutta l'intensità del laser viene trasmessa all'interno della cavità. Se si vuole studiare la condizione per il quale δ sia un multiplo di 2π, allora

$$2\pi m = \frac{2knd}{\cos\theta} \implies m\frac{nd}{\lambda\cos\theta}$$

La condizione di risonanza della cavità ottica si ha quando

$$\frac{nd}{\cos\theta} = \frac{\lambda}{2}m$$

La condizione fisica dunque per la risonanza è a multipli della metà della lunghezza d'onda e si realizzano le condizioni per la trasmissione totale dell'intensità luminosa all'interno della cavità. Si può dunque studiare il picco di questa funzione (che è una Gaussiana centrata intorno a questi valori ottenuti): Si impone allora che il delta larghezza a metà altezza è dato da:

$$\frac{I_T}{I_0} = \frac{1}{2}$$

Quando

$$\cos\delta = 1 - \frac{(1-R)^2}{2R} \implies \cos\delta \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2}$$

Si ha dunque un modo molto preciso per poter confrontare λ con distanze macroscopiche di distanze tra specchi.

Utilizzi pratici dell'ottica

1.1 L'esperimento di Virgo

L'esperimento di Virgo utilizza le cavità ottiche in modo tale da aumentare l'insenità del laser utilizzato per trovare le onde gravitazionali. La potenza del laser utilizzato è a 80 Watt, ma con un ***finesse*** $\frac{1}{\epsilon} = 5400$, dunque aumenta la cavità aumenta la potenza del laser. La limitazione di questo esperimento è sicuramente l'assorbimento degli specchi che iniziano a scaldarsi quando passa il laser.

1.2 Orologi precisi

Si utilizzano degli **orologi** realizzati con le cavità ottiche che permettono di stabilizzare in maniera molto precisa la lunghezza d'onda della radiazione e dunque la frequenza della lunghezza d'onda grazie a questi orologi che hanno una dilatazione termica quasi nulla per temperature vicine alla temperatura ambiente.