

Appunti Termodinamici

Tommaso Miliani

17-10-25

1 Continuo altra volta

La funzione $g(T)$ dipende da come è fatto il gas anche se in generale la funzione dipende solamente dalla classe a cui appartiene il gas.

- Gas **Monoatomici**: sono gas che presentano solamente molecole monoatomiche;
- Gas **Diatomici**: sono gas con molecole diatomiche (anche fatte con atomi diversi come il CO).
- Gas **Poliatomici**: sono gas con più di una molecola (ma non lineare) per esempio il gas CO_2 è considerato diatomico in quanto è lineare.

Il valore della costante non dipende dalla temperatura ma solo dalla classe di appartenenza del gas:

	$\frac{C_V}{R}$	$\frac{C_P}{R}$	$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$
Monoatomici	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$
Diatomici	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{5}$
Poliatomici	3	4	$\frac{4}{3}$

Dove γ è il rapporto tra le due capacità termiche. Gli esperimenti ci dicono che quando la temperatura si abbassa notevolmente vicino a zero kelvin, la capacità termica dei gas inizia a dipendere dalla temperatura fino a raggiungere zero. Avendo la dipendenza della capacità termica dalla temperatura, posso ricavare l'energia interna attraverso la capacità termica. Considerandoci nel caso impossibile di $T = 0$ Kelvin, possiamo, per un gas perfetto l'equazione:

$$\frac{dU}{dT} = 0$$

INtegrando da entrambe le parti posso ottenere che

$$\int_0^T \frac{dU}{dT} dT = \int_0^T C_V dT \implies U(T) - U(0) = C_V T$$

Si è trovato allora che l'energia interna di un sistema a volume costante è proprio

$$U(T) = C_V T \tag{1}$$

Siccome si sa che

$$C_P - C_V = nR$$

Dato che $\gamma C_V = C_P$, posso ottenere, sostituendolo nell'espressione di prima e poi nell'energia interna:

$$U(T) = T \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1} \tag{2}$$

2 Determinare le isoterme adiabatiche di un gas perfetto

Si possono determinare ora le isoterme adiabatiche di un gas perfetto, in quanto non c'è scambio di energia termica con l'esterno. Adesso posso utilizzare il primo principio specializzato in tanti aspetti:

$$dU = -\delta L \implies C_V dT = -pdV$$

Allora posso ottenere l'equazione per l'isoterma attraverso la seguente:

$$\mathcal{C}_V \, dT = -\frac{nRT \, dV}{V} \implies \frac{dT}{T} = -\frac{nR}{\mathcal{C}_V} \frac{dV}{V}$$

Ai fini della notazione sappiamo che T, n, \mathcal{C}_V sono costanti. Per semplificare ancora di più l'equazione, posso esprimere \mathcal{C}_V in funzione del rapporto γ . Adesso possiamo avere una sostituzione comoda che mi permette di annullare la dipendenza da nR :

$$\frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

SI può integrare da un certo stato di riferimento indicato con le coordinate termodinamiche $O \equiv T_0, p_0, V_0$ fino ad uno stato qualunque che vogliamo considerare $S \equiv (T, p, V)$. Dato che la pressione non esiste nell'equazione (è fissata), allora posso semplicemente integrare

$$\int_{T_0}^T \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{V_0}^V \frac{dV}{V}$$

Chiaramente si sta considerando una trasformazione quasi statica, allora posso integrare questa espressione e considerare queste considerazioni come valide, risolvendo ora l'integrale:

$$\ln \frac{T}{T_0} = -(\gamma - 1) \ln \frac{V}{V_0}$$

Adesso posso fare l'esponenziale per entrambi i membri e dunque posso ottenere il rapporto tra le pressioni in funzione del volume:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{V}{V_0} \right)^{-(\gamma-1)}$$

Ossia

$$TV^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$

Si è ottenuta allora la prima legge che lega le trasformazioni isoterme adiabatiche alla legge dei gas come

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad (3)$$

Vale

anche

l'analoga

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const} \quad (4)$$

E' chiaro che se volessi altre coordinate potrei semplicemente esprimerele attraverso la legge di stato dei gas perfetti per ottener l'espressione di altre coordinate termodinamiche; per esempio possiamo ottenere

$$pV^\gamma = \text{const} \quad (5)$$

Questa curva non è proprio né un'iperbole né un paraboloido. La curva isoterme sono meno ripide delle adiabatiche. Ne segue che il lavoro compiuto per fare una trasformazione isoterma è sempre maggiore della corrispondente trasformazione adiabatica dallo stesso stato iniziale allo stesso volume finale. Si dimostra considerando il lavoro di una trasformazione adiabatica come

$$L = \int_{V_0}^V p \, dV$$

Dato che

$$L = \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} \implies L = \int_{V_0}^V \frac{p_0 V_0^\gamma}{V^\gamma} \, dV = p_0 \int_{V_0}^V \left(\frac{V_0}{V} \right)^\gamma \, dV$$

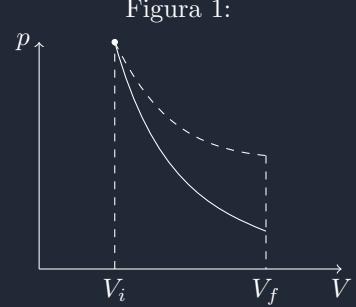


Figura 1:

Allora si ha

$$L = p_0 V_0 \int_1^{\frac{V}{V_0}} x^{-\gamma} dx = \frac{p_0 V_0}{1 - \gamma} \left(\left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma} - 1 \right)$$

Dove $x = \frac{V}{V_0}$. Dato che $\gamma > 1$, si ha che il lavoro è esattamente

$$L = \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma} \right)$$

Ottenendo allora una nuova equazione per l'isoterma per un gas perfetto:

$$pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma = nRT_0 V_0^{\gamma-1} \quad (6)$$

Con $\gamma = 1$ si ottiene esattamente l'equazione di stato per i gas reali. Nel calcolo del lavoro non si è utilizzato il rapporto tra le capacità termiche (e non si può mettere $\gamma = 1$ anche se posso considerare il suo limite)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \frac{nRT_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V}{V_0} \right)^{1-\gamma} \right)$$

Posso allora ottenere il lavoro come

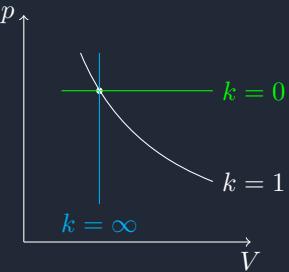
$$L = nRT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V} \right)$$

Possiamo definire una classe di trasformazioni con un esponente che k che vogliamo in modo tale che la pressione ed il volume sono legate tra di loro secondo una costante.

Per ogni valore del parametro k posso definire classi di trasformazioni che prendono il nome di **politropiche**:

- $k < 1$: curve meno ripide;
- $k > 1$: curve più ripide;
- $k = \gamma$: equazioni della famiglia delle adiabatiche.
- $k = 1$: sono isoterme.
- $k = 0$: E' una trasformazione a pressione costante;
- $k \rightarrow \infty$: E' una trasformazione a volume costante.

Figura 2: Visualizzazione delle curve politropiche



Queste funzioni sono un'eccellente approssimazione delle trasformazioni termodinamiche reali. Posso determinare la quantità infinitesima di lavoro durante una di queste trasformazioni politropiche è definito come

$$\begin{aligned} \delta L = p dV &= p_0 V_0^k V^{-k} dV = p_0 V_0^k d \frac{V^{1-k}}{1-k} = \\ &= d \left(\frac{p_0 V_0^k V^{-k} V}{1-k} \right) = d \left(\frac{pV}{1-k} \right) = d \left(\frac{nRT}{1-k} \right) \end{aligned}$$

Allora posso ottenere che il lavoro è proprio

$$\delta L = \frac{nR}{1-k} dT$$

Allora per ogni trasformazione politropica quasi statica per un gas perfetto con $k \neq 1$ il lavoro è esprimibile come

$$L_k = \frac{nR}{1-k} (T - T_0) = \frac{nR}{1-k} \Delta T \quad (7)$$

2.1 Utilizzo del primo principio nelle politropiche

Dato il primo principio

$$(\delta Q)_k = dU + \delta L = C_V dT + \frac{nR}{1-k} dT$$

E quindi si ha l'espressione per la capacità termica della politropica per un gas perfetto nelle condizioni di stato quando $k = 0$:

$$C_k = C_V + \frac{nR}{1-k}$$

Dove

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

In una isoterma ($k = 1$), possiamo ottenere l'espressione della pressione come $p = \text{const}\rho$ e dunque nelle politropiche:

$$p = \text{const}\rho^k$$

3 Misurazione della capacità termica di un gas perfetto

L'esperimento per determinare la capacità termica di un gas perfetto è stato per la prima volta fatto dal fisico tedesco Ruchardt. L'esperimento prevede una bottiglia (per cui con un collo molto sottile¹). Si inserisce ora una palla nel collo di bottiglia e all'interno del recipiente il gas per cui si vuole determinare la capacità termica (ovviamente nelle condizioni di gas perfetto). La pallina all'interno del collo è in grado di scorrere senza attrito, dunque la pressione del gas sulla pallina è uguale a quella atmosferica $p = p_0$ ma, dato che c'è anche la massa m a premere sul gas

$$p = p_0 + \frac{mg}{S}$$

Dove S è l'area del cilindro del collo della bottiglia poiché (oltre ad un motivo geometrico) le forze che agiscono sulla sfera c'è anche un vincolo fisico: se la risultante delle forze non fosse zero, allora il corpo ruoterebbe su sé stesso generando energia cinetica senza che gliene sia fornita alcuna. Se la pallina si muove di una certa y , molto piccola, rispetto al sistema di riferimento allora il volume del gas varia in relazione allo spostamento per la sezione del collo di bottiglia:

$$dV = Sy$$

Adesso posso esprimere questa variazione di volume secondo la legge del gas perfetto nelle trasformazioni politropiche:

$$pV^\gamma = \text{const}$$

Posso allora dire che

$$\begin{aligned} V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} pdV &= 0 \\ dp + \gamma \frac{V^{\gamma-1}}{V^\gamma} pdV &= 0 \end{aligned}$$

Ossia

$$dp = -\frac{\gamma p}{V} dV = -\frac{\gamma p S}{V} y$$

Dato che è presente una pressione sulla pallina, allora ci deve anche essere una forza associata alla pressione a cui è sottoposta la pallina:

$$F = Sdp = -\gamma \frac{pS^2}{V} y$$

¹Il collo nel disegno non è sottile per semplicità di rappresentazione

Figura 3: L'esperimento di Ruchardt

