Fisica

Tommaso Miliani

11-03-25

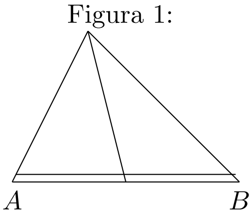
1 La fi(si)ca che ci piace

Nel caso di due masse, il cenetro di massa si trova tra le due masse. Nel caso in cui una delle due masse sia molto maggiore dell'altra allora il centro di massa sarà spostato più verso la massa maggiore. Ma se ci fossero molte più masse? Allora nel caso di più masse si ha che il centro di massa risiede sull'asse di simmetria delle masse. Si chiama allora asse di simmetria un asse sul quale ogni massa è tale per cui c'è sempre un'altra massa a distanza uguale.
Un sistema si dice omogeneo se la sua densità è costante, altrimenti non è omogeneo: nel caso del vettore del centro di massa allora essendo:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r}\rho dV}{\int_V \rho dV}$$
$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV}$$

Nel caso di simmetrie o strutture note come nel caso di una figura piana di cui conosco gli assi di simmetria come un quadrato, il centro degli assi di simmetria del quadrato è proprio il centro del quadrato. Nel caso di figure meno semplici come già il triangolo la posizione del centro di massa non è intuitivo poiché il centro del triangolo non è così evidente. Scegliendo uno dei lati possiamo prenderne una fetta parallela al lato scelto posso indicare il centro di questo pezzetto e ripetere il procedimento fino a tracciare la mediana rispetto all'angolo opposto, faccio lo stesso per tutti gli altri lati e quindi, essendo che tutte e tre le mediane si incontrano esattamente a due terzi della lunghezza delle mediane, allora quello è il entro di massa del traingolo.

Figura 1:

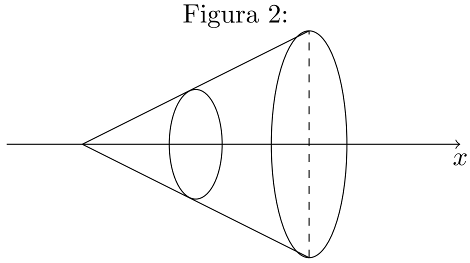


1.1 Le figure solide

Nel caso di una figura solida come un cono, lo scopo è cercare di ridurre gli integrali bi-tridimensionali in integrali unidimensionali con certe approssimazioni e con certi procedimenti. Possiamo fare come nel caso del traingolo delle piccole fette attraverso i piani. ALlora l'integrale da risolvere sarà (posto che ovviamente sia omogeneo):

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$$

Figura 2:



Allora il volume da colcolare, data una sezione dx del cono

$$dV = 2\pi r dx$$

E allora essendo che conosco la distanza dalla cima (h) posso ricavare quel raggio come:

$$r = \frac{R}{h}x$$
$$dV = \pi\frac{R^2}{h^2}x^2 dx$$

SOno passato da un integrale tridimensionale fino ad un integrale unidimensionale:

$$\vec{r}_c = \frac{\int x\left(\pi \frac{R^2}{h^2}x^2\right)}{\int \left(\pi \frac{R^2}{h^2}x^2\right)}dx$$

Allora risolvendo:

$$x_c = \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^h}{\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h} = \frac{3}{4}h$$

2 Quantità di moto

La quantità di moto è data da:

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Figura 3:

la quantità di moto del centro di massa è proprio la somma dei contributi di tutte le quantità di moto e quindi

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$$

Se volessi ottener la velocità del centro di massa allora dovrei derivare rispetto al tempo la posizione del centro di massa:

$$\vec{v}_c = \dot{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{M}$$

Se si deriva invece la quantità di moto del sistema si ottiene la detrivata dei singoli punti materiali oppure la somma delle masse per l'accelerazione dei singoli punit:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{q}}_i \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{a}_i$$

si ottiene proprio la risultante della forza che agisce sul corpo:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

quindi dobbiamo metterla in una forma più semplice per poterla utilizzare: si distinguono allora forze interne e forze esterne: si chiamano forze interne tutte le forze dovute all'interazione tra i corpi del sistema stesso mentre quelle esterne sono quelle che provengono all'esterno e sia le forze apparenti.

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(INT)} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Per le forze interne devo considerare anche il terzo principio per ogni punto, quindi per ogni forza applicata ad un punto ce ne è una uguale e contraria:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(INT)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \vec{F}_{i,j} = 0}$$

Si ottiene allora la prima equazione cardinale della dinamica:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(EXT)} = \vec{F}^{(EXT)}$$

che permette di descrivere i sistemi più complessi con descrizioni molto più semplici. Allora si arriva anche alla seconda equazione del centro di massa:

$$\boxed{\vec{F} = M\vec{a}_c}$$

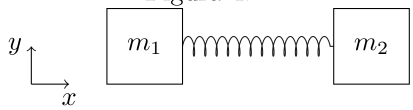
2.1 Il sistema isolato

La prima equazione cardinale della dinamica mi dice che la forza esterna è zero e che la quantità di moto è conservata poiché

$$\dot{\vec{Q}} = 0, \qquad \vec{Q} = \text{costante}$$

Questo sistema non riesco ad esprimerlo mediante f = ma e nemmono attraverso la conservazione dell'energia poiché ho due gradi di libertà. Essendo che la forza elastica adesso è una forza interna (e quelle esterne sono la forza peso e la normale) e lungo l'orizzontale si conserva la quantità di moto e la conservazione dell'energia che mi danno i due gradi di libertà.

Figura 4:



$$E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

Allora la quantità di moto:

$$Q_x = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Una vota che ho le condizioni iniziali posso risolvere il sistema.