

... OLTRE IL PENDOLO SEMPLICE IN MOTO IDEALE...

- * pendolo semplice in moto ideale come descrizione appropriata degli effetti fondamentali del fenomeno fisico "moto del pendolo" tuttavia ... è importante riconoscere che il **SISTEMA FISICO PENDOLO**, se osservato più "in dettaglio" (dunque con un **apparato di misura che consenta maggior precisione**) mostra una fisica più complessa e ricca di fenomeni "secondari"
 - ⇒ con la nostra configurazione sperimentata di laboratorio in generale gli effetti di questi ulteriori fenomeni fisici sono trascurabili ⇒ non rilevabili quantitativamente con la precisione dello strumento misura.
 - ⇒ tenere conto di questi ulteriori effetti fisici richiede una descrizione più complessa, corrispondente al (e richiesta dal) rilascio di una (o più) delle ipotesi di validità per la schematizzazione di base che abbiamo adottato nel nostro caso.
 - ⇒ più vicini al moto reale del pendolo, ma con caratteristiche evidenziate in generale solo con uno strumento apposito che consenta la precisione adeguata al bisogno.
- ⇒ è comunque interessante identificare e conoscere almeno i più rilevanti di questi effetti fisici "secondari", cercando di darne una schematizzazione che, pur introducendo maggiore complessità nella descrizione del sistema fisico "pendolo", sia per noi sufficientemente semplice da consentirci una valutazione anche quantitativa dell'effetto fisico "in più"...
- ⇒ possibilità di valutare SE ed ENTRI QUALI LIMITI l'effetto è davvero trascurabile per il nostro problema e la schematizzazione di base del PENDOLO SEMPLICE IN MOTO IDEALE è davvero adeguate ⇒

(\Rightarrow ... vedremo che è ADEGUATA !!)

* riprendiamo allora in esame le IPOTESI DI VALIDITÀ della schematizzazione del PENDOLO SEMPLICE e IDEALE che sono rilevanti ai nostri scopi attuali:

1) pendolo di massa m assimilabile a PUNTI FORME
 \Rightarrow TRASWRO { dimensioni e distribuzione di massa della sferetta.

2) filo con massa $m_f = 0$

\Rightarrow TRASWRO { massa m_f piccola ma finita e sua distribuzione

3) filo INESTENSIBILE ($\ell = \text{cost.}$)

\Rightarrow TRASWRO caratteristiche di elasticità del materiale del filo

4) MOTO IDEALE

\Rightarrow TRASWRO effetti dissipativi di eventuali forze d'attrito

\Rightarrow a partire da queste considerazioni possiamo idealizzare 3 tipologie di effetti fisici che "compongono" il problema del moto del pendolo e di cui possiamo trovare una descrizione sufficientemente semplice da potere essere affrontata ora

\Rightarrow Per ISOLARLI, RILASCIEREMO UNA (o più) IPOTESI di validità del pendolo semplice e ideale, MANTENENDO VALIDE LE ALTRE \Rightarrow

A) RILASCIO H_p 1) e H_p 2) \Rightarrow introduco nella descrizione la CONSIDERAZIONE DELLA MASSA $m_f \neq 0$ e DISTRIBUZIONE DI MASSA DI SFERETTA E FILO \Rightarrow CAMBIA IL SISTEMA FISICO!

(MANTENGO VALIDE LE ALTRE IPOTESI !!)

(B) RILASCIO Hp 3) \Rightarrow devo prendere in considerazione gli effetti dell'elasticità del materiale di cui è fatto il filo \Rightarrow il non più strettamente costante durante il moto! [NOTA BENE: questo effetto è discusso nell'Appendice B.2 delle dispense: non lo descriviamo a lezione e NON è quindi inserito nel programma, ma potete ovviamente leggere l'Appendice B.2 se interessati]

(C) RILASCIO Hp 4) \Rightarrow MANTENENDO LA VALIDITÀ DELLE ALTRE IPOTESI, devo tenere conto della presenza di FENOMENI DISSIPATIVI dell'energia del moto, dovuti a forte d'attrito agenti sul PUNTO MATERIALE \Rightarrow perciò la SEMPRE "REALE"

\Rightarrow Oggi e nelle prossime lezioni discuteremo i casi:

(A) e (C)



A) "PENDDOLO FISICO" (... in moto IDEALE ...)

* consideriamo $\begin{cases} \bullet R \neq 0 \quad e \quad R \ll l = \overline{OC} \\ \bullet m_f \neq 0 \quad e \quad m_f \ll m \end{cases}$ ($C = \text{centro della sferetta!}$)

\Rightarrow se filo è un OGGETTO fisico (dotato di massa !!) con la massa m_f distribuita sulle sue dimensioni e la massa m del "pendolo" è distribuita sulle dimensioni della sferetta di raggio R

\Rightarrow dobbiamo studiare la dinamica di UN NUOVO SISTEMA FISICO = {sferetta + FILO}

\Rightarrow per poterlo fare in modo trattabile semplicemente,

SUPPORREMO DI POTER RAPPRESENTARE IL FILO come UNA SBARRETTA RIGIDA SOTTILE E OMogenea

\Rightarrow ragionevole : FILO TESO è IPOTESI DI INESTENSIBILITÀ MANTENUTA VALIDA

\Rightarrow definiamo $L_f = \text{lunghezza della sbarretta - filo} \dots$

\Rightarrow SUPPONIAMO anche di poter connettere in maniera RIGIDA la sbarretta rigida alle sferette (anch'esse RIGIDA e OMogenea)

\Rightarrow CON QUESTE IPOTESI il nostro nuovo sistema fisico {SBARRETTA + SFERETTA} è UN CORPO RIGIDO

* supponiamo il corpo rigido vincolato al "punto di sospensione" O, CON UNICO IDEALE

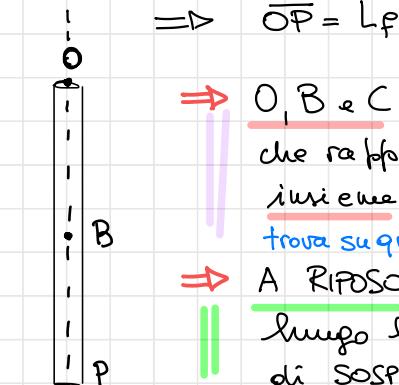
* Visualizziamo il sistema a riposo [SCALA NON realistica : $R \ll L_f$ e raggio del filo "trascurabile" rispetto a L_f (e sbarretta "sottile")]

e supponiamo la sbarretta sottile cilindrica \Rightarrow l'asse della sbarretta passerà per O = punto di sospensione per C = centro di massa della sferetta e per B = centro di massa della sbarretta sottile (essendo OMogenea, per moti di simmetria)

B si troverà sull'asse della sbarretta a metà delle sue lunghezze $\Rightarrow \overline{OB} = \frac{L_f}{2}$ \Rightarrow



(DISEGNO
NON IN SCALE!!)



$$\Rightarrow \overline{OP} = L_f \quad \overline{OB} = \overline{BP} = \frac{L_f}{2} \quad \overline{OC} = \ell = L_f + R$$

\Rightarrow O, B e C sono tutti allineati sull'asse dello sbarretto, che rappresenta l'ASSE del SISTEMA RIGIDO nel suo iniziale. [NOTA: anche il centro di massa del sistema intero si trova su questo asse, per moti di simmetria ...]

\Rightarrow A RIPOSO, il sistema si dispone con l'ASSE orientato lungo la VERTICALE LOCALE PASSANTE per il punto di SOSPENSIONE O.

\Rightarrow SE spostiamo il sistema dalla sua posizione di riposo e lo lasciamo andare il corpo rigido inizierà un moto OSCILLATORIO, sotto l'azione delle forze peso che per i nostri scopi possiamo considerare rispettivamente applicate in C = centro della sferetta e

B = centro dello sbarretto-filo [NOTA: CONTINUATO A TRASCRIVERE LE FORZE D'ATTRITO \Rightarrow MOTO IDEALE],

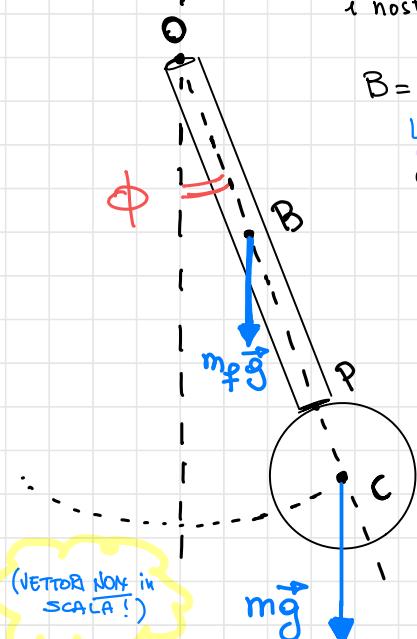
con l'ASSE DEL SISTEMA CHE SI MUOVE SUL PIANO VERTICALE individuato dalla direzione dell'ASSE di simmetria OBC al momento del rilascio e dalla verticale locale passante per O, punto di sospensione.

\Rightarrow il moto oscillatorio è un altro di moto di ROTAZIONE attorno ad un ASSE FISSO PASSANTE PER O e NORMALE AL PIANO VERTICALE DELL'OSCILLAZIONE

\Rightarrow INDICHEREMO QUESTO ASSE COME ASSE Z, con direzione definita dal VERSORE \hat{e}_z .

\Rightarrow in modo del tutto analogo al caso del pendolo semplice la direzione dell'asse dello sbarretto corrisponde a quella che era la direzione del filo ideale per il verso del pendolo semplice \Rightarrow anche per il

nuovo sistema fisico la posizione iniziale per iniziate durante il moto sarà determinata da una sola variabile: la coordinate angolare ϕ = angolo che, all'instante generico t, l'axe del sistema fa con la verticale locale passante per il punto di sosp. O $\Rightarrow \phi = \phi(t)$ \Rightarrow



→ il nostro nuovo sistema fisico è i.e effetti; cioè che si definisce come **PENDOLO FISICO**, cioè un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale, non passante per il centro di massa del corpo, sotto l'azione della forza peso.

- * Trascurando le forze d'attrito [Es.: resistenza dell'aria] e considerando il vincolo in O IDEALE
le sole forze che hanno effetto sul moto del sistema
sono le forze peso che, ai nostri scopi, possiamo considerare applicate rispettivamente in B e C per i due componenti del nostro sistema (sbarretta-filo e sferetta).
- * Le figure illustrate riportate rappresentano una sezione del corpo rigido normale all'asse fisso di rotazione (infatti, VERTICALE) e sulla quale si svolge il moto dell'asse del corpo (su cui si trovano i due centri di massa B e C di sbarretta e sferetta componenti il nostro corpo rigido e anche il centro di massa del sistema rigido nella sua interezza).
- * Ogni punto del corpo rigido che si trova nell'asse del corpo si muove lungo un arco di circonferenza con centro in O, con una posizione angolare istante per istante individuata da $\phi = \phi(t)$.



⇒ Moto oscillatorio di rotazione attorno ad un asse fisso

⇒ avete già incontrato un moto ANALOGO (oscillazione con moto di rotazione attorno ad un asse fisso ⇒ MOTO DEL PENDOLO DI TORSIONE !!) e avete già visto come descriverlo ⇒ occorre utilizzare la SECONDA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA (che regola la dinamica rotazionale) IN UNA SUA FORMA SPECIFICA PER CORPI RIGIDI IN ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE FISSO

⇒ la II equazione cardinale nella sua forma generale è una eq. VETTORIALE, che coinvolge la derivata temporale del momento angolare totale del sistema e il momento risultante delle forze applicate al sistema materiale (entrambi i vettori valutati rispetto allo stesso polo), ma nel CASO DI

CORPI RIGIDI IN ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE FISSO

Si riduce (come vedrete nel corso di Fisica)

AD UNA EQUAZIONE SCALARE

[OK: il moto è descritto da una sola variabile di posizione: $\phi(t)$]

che risulta

$$I_o \dot{\omega} = M_{o,z}^{(e)}$$

⇒ Vediamola in dettaglio ⇒

\Rightarrow EQUAZIONE che esprime la II EQ.

$$I_o \ddot{\omega} = M_{o,z}^{(e)}$$

CARDINALE DELLA DINAMICA nel particolare
CASO DI CORPI RIGIDI IN ROTAZIONE
ATTORNO A UN ASSE FISSO

↓ in queste equazioni:

- * $\ddot{\omega}$ = accelerazione angolare = $\ddot{\phi}$ per noi

$$* M_{o,z}^{(e)} = \vec{M}_o^{(e)} \cdot \hat{e}_z = \text{componente lungo la direzione dell'asse di rotazione (di versore } \hat{e}_z \text{) di } \vec{M}_o^{(e)}, \text{ MOMENTO TOTALE DELLE FORZE ESTERNE}$$

"MOVIMENTO ASSIALE
DELLE FORZE ESTERNE
RISPETTO AL POLO IN O" \Rightarrow

RISPETTO AL POLO IN O, punto dell'asse di rotazione fisso (e per noi O = punto di sospensione)

- * $I_o =$ "MOMENTO DI INERZIA DEL CORPO RIGIDO RISPETTO ALL'ASSE FISSO DI ROTAZIONE, passante per O"

\Rightarrow il MOMENTO DI INERZIA (da considerarsi sempre RISPETTO A UN ASSE) è una grandezza fisica scalare estensiva che esprime le caratteristiche di inerzia di un corpo rispetto alle rotazioni (inerzia del corpo a modificare il suo stato di rotazione rispetto all'asse a cui il momento di inerzia si riferisce) \Rightarrow in qualche modo è l'analogia rotazionale della massa inerziale per un punto ($\dots m\ddot{a} = \vec{F} \dots$)

- il momento di inerzia è SEMPRE RIFERITO A UN ASSE (rispetto al quale deve essere calcolato) \Rightarrow per voi l'asse di rotazione fisso passante per O, punto di sospensione.
- il momento di inerzia dipende DALLA DISTRIBUZIONE DI MASSA del corpo RISPETTO ALL'ASSE a cui è riferito
- per un corpo rigido l'asse rotazione attorno ad un asse fisso I è COSTANTE NEL TEMPO

* Come è definito il momento di inerzia rispetto ad un dato asse "A"? (grandezza estensiva)

- per un sistema di N punti materiali

$$I_A = \sum_{i=1}^N m_i r_{Ai}^2$$

dove $\left\{ \begin{array}{l} m_i = \text{massa dell'i-esimo punto} \\ r_{Ai} = \text{distanza dell'i-esimo punto} \\ \text{dall'asse A} \end{array} \right.$

- per un corpo con distribuzione continua di massa

$$I_A = \int r_A^2 dm$$

dove $\left\{ \begin{array}{l} dm = \text{elemento di massa infinitesimo} \\ = \rho dV \quad \text{con } \rho = \text{densità} \\ r_A = \text{distanza dell'elemento di massa } dm \\ \text{dall'asse A} \end{array} \right.$

\Rightarrow se $\rho = \text{cost.}$ (OTROGENEITÀ) $\Rightarrow I_A = \rho \int r_A^2 dV$

* TEOREMA DI HUYGENS-STEINER : (relazione fra momenti di inerzia relativi ad assi paralleli)

"Il momento di inerzia rispetto ad un asse A dato, I_A , è esprimibile come la **SOMMA** del momento di inerzia RISPETTO ad un ASSE PARALLELO ALL'ASSE A E PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA **Più** il prodotto di $m = \text{massa totale}$ del sistema per le quadrati delle distanze d fra i due assi"

$$\Rightarrow I_A = I_{cdw//A} + md^2$$

\Rightarrow utile nel nostro caso....

\Rightarrow Per come è definito il momento di inerzia, PER IL NOSTRO PENDOLO FISICO I_0 = momento d'inerzia RISPETTO AD ASSE DI ROTAZIONE FISSO, PASSANTE PER O, sarà

$$I_0 = I_{sf,0} + I_{fil,0}$$

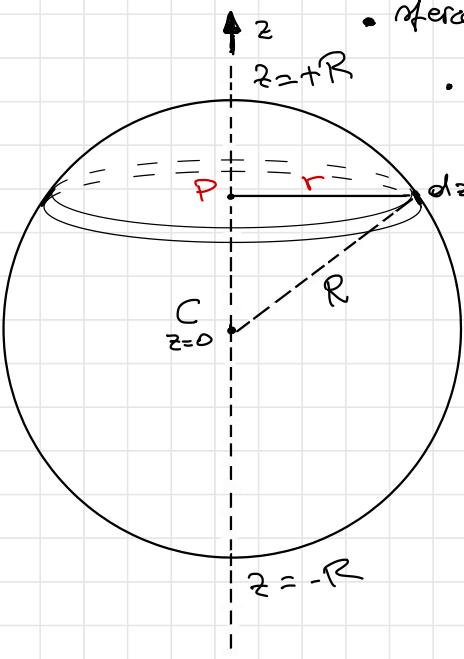
con $\left\{ \begin{array}{l} I_{sf,0} = I_{sf,c} + m \cdot l^2 \\ I_{fil,0} = I_{fil,B} + M_f \left(\frac{l_f}{2} \right)^2 \end{array} \right.$

per il TEOREMA DI HUYGENS-STEINER

\Rightarrow dobbiamo quindi VALUTARE I MOMENTI DI INERZIA DEI DUE COMPONENTI DEL NOSTRO CORPO RIGIDO (sfera e filo-sbarretta) RISPETTO AD ASSI PASSANTI PER I RISPETTIVI CENTRI DI MASSA (C e B...) E PARALLELI ALL'ASSE DI ROTAZIONE,

$$\Rightarrow I_{sf,c} \quad e \quad I_{fil,B}$$

MOMENTO D'INERZIA DI UNA SFERA RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL CENTRO DI MASSA, $I_{\text{sfera},C}$

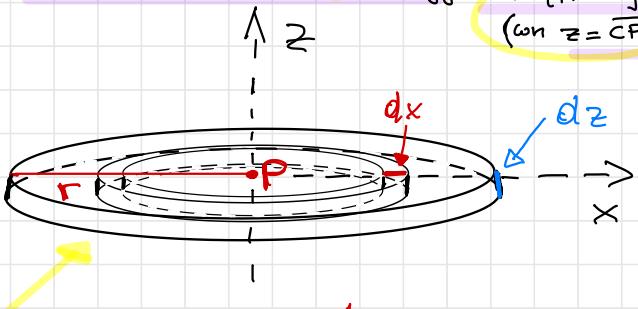


• sfera OTOGENA (\Rightarrow densità $\rho = \text{cost.}$) di MASSA m e RAGGIO R

• def: momento d'inerzia rispetto ad asse A = $I_A \Rightarrow$
 $I_A = \int r_A^2 dm = \rho \int r_A^2 dV$ come
 se $\rho = \text{cost.}$

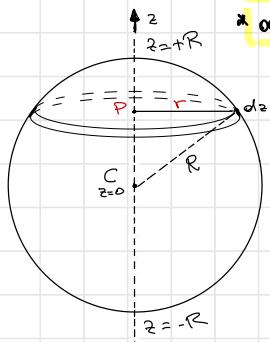
r_A = distanza dell'elemento di volume infinitesimo dall'asse "A"

* per calcolare $I_{\text{sfera},C}$ facciamo la sfera "a fettine" NORMALI all'asse z passante per C e con spessore infinitesimo dz e raggio $r = [R^2 - z^2]^{1/2}$ (con $z = CP$)

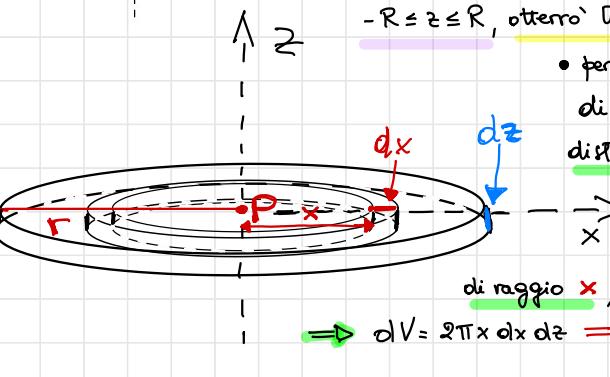


* qui "fettina" è un disco di raggio $r = r(z) = [R^2 - z^2]^{1/2}$ e spessore infinitesimo dz
 \Rightarrow calcoleremo il suo momento d'inerzia infinitesimo rispetto all'asse z,
 $dI_{\text{disco}} = dI_{\text{disco}}(z)$

\Rightarrow integreremo su TUTTI i DISCHI INFINTESIMI che compongono la sfera
 ottenendo $I_{\text{sfera},C} = \int dI_{\text{disco}} \dots$



• Considereremo il generico dischetto, caratterizzato dalla sua distanza z dal centro C della sfera di raggio R \Rightarrow se varia di z, con $-R \leq z \leq R$, otterremo tutti i dischetti infinitesimi che formano la sfera.

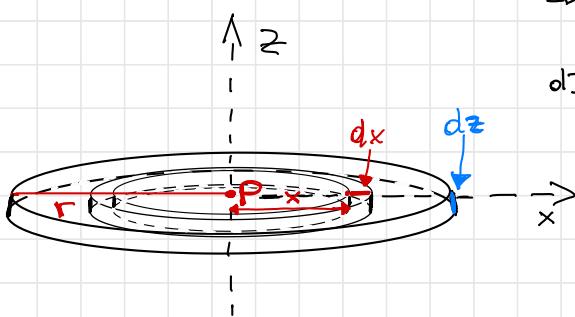


• per calcolare dI_{disco} , devo individuare gli elementi di volume, dV , i cui punti hanno tutti la stessa distanza x dall'asse z, cosicché si possa valutare il contributo a dI_{disco} dovuto al dV come $\rho dV \cdot x^2 \Rightarrow$ anello infinitesimo

di raggio x, con $0 \leq x \leq r(z)$, e larghezza infinitesima dx

$\Rightarrow dV = 2\pi x dx dz \Rightarrow dI_{\text{disco}} = \rho \int x^2 2\pi x dx dz \dots$

$\uparrow z$



\Rightarrow continua il calcolo di dI_{disco} ...

$$dI_{\text{disco}} = \rho \int x^2 \cdot 2\pi x \, dx \, dz = 2\pi \rho \int x^3 \, dx = \\ = 2\pi \rho \int dz \frac{x^4}{4} \Big|_0^r = 2\pi \rho \int dz \frac{r^4}{4}$$

\Downarrow

$$dI_{\text{disco}}(z) = \frac{\pi}{2} \rho r^4(z) \, dz$$

$$(\text{con } r(z) = [R^2 - z^2]^{\frac{1}{2}})$$

* integrando su tutti i dischi...

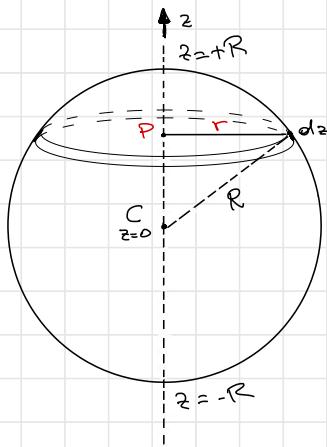
$$I_{\text{sfera},C} = \int dI_{\text{disco}}(z) = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R [R^2 - z^2]^2 \, dz = \frac{\pi}{2} \rho \int_{-R}^R [R^4 + z^4 - 2R^2 z^2] \, dz =$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho [R^4 \cdot 2R + 2 \frac{R^5}{5} - 2R^2 \cdot \frac{2R^3}{3}] = \frac{\pi}{2} R^5 \rho [2 + \frac{2}{5} - \frac{4}{3}] =$$

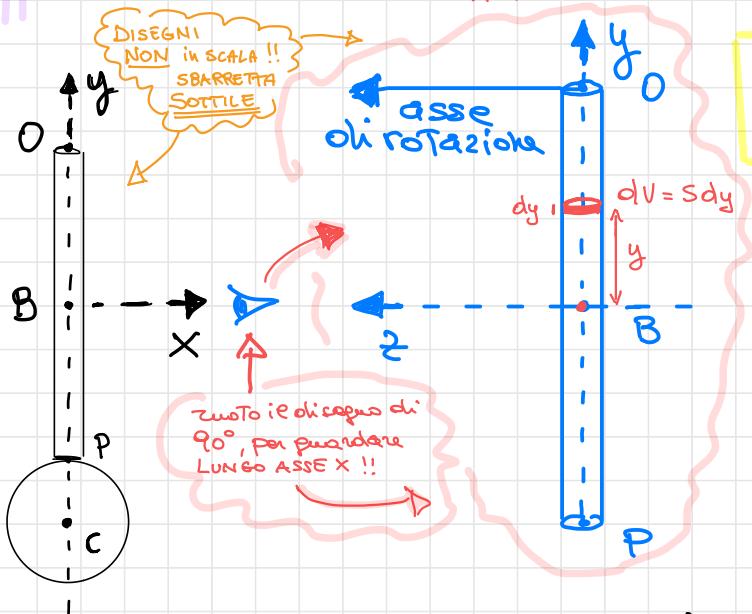
$$= \frac{\pi}{2} R^5 \rho \cdot \frac{2}{15} [15 + 3 - 10] = \rho \frac{\pi R^5}{15} \cdot 8 = \left[\rho \frac{4\pi R^3}{3} \right] \cdot \frac{2}{5} R^2 = m \cdot \frac{2}{5} R^2$$

$\underline{\underline{=m!!}}$

$$\boxed{I_{\text{sfera},C} = \frac{2}{5} m R^2}$$



MOMENTO D'INERZIA DI UNA SBARRETTA RIGIDA SOTTILE
E OMOGENEA RISPETTO AD UN ASSE PASSANTE PER IL
CENTRO DI MASSA E PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE



$$\overline{OB} = \overline{BP} = \frac{L_f}{2} \Rightarrow \overline{OP} = L_f$$

$\rho_f = \text{cost}$ (costante)

$$I_{\text{filo}, B//} = \rho_f \int y^2 dV =$$

$$= \rho_f S \int_{-\frac{L_f}{2}}^{+\frac{L_f}{2}} y^2 dy =$$

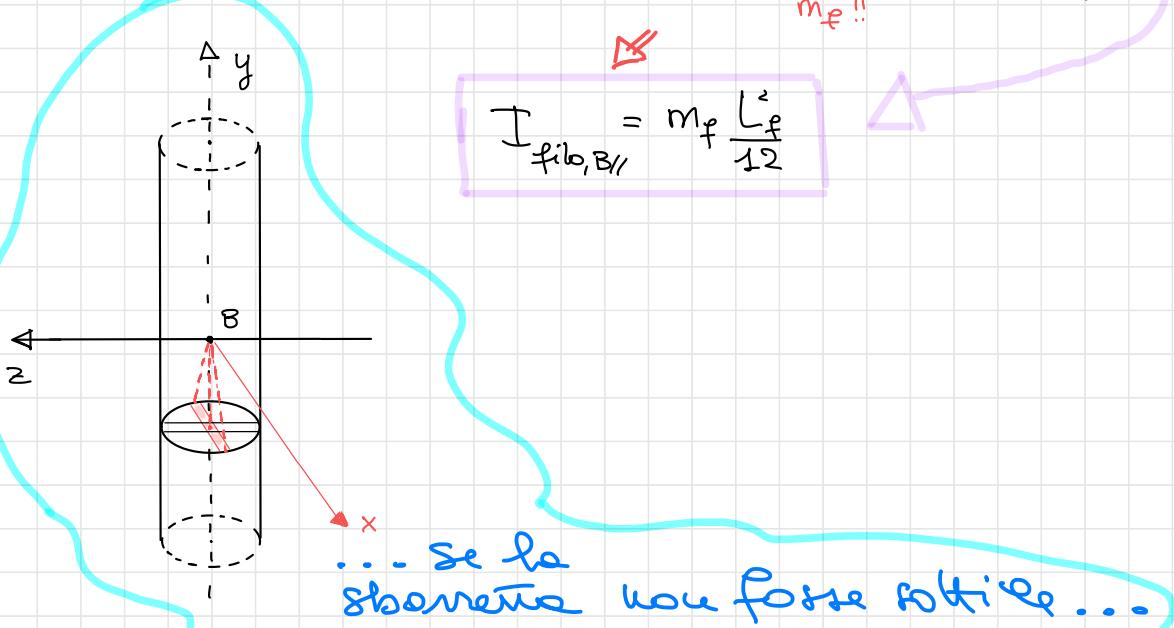
$$= \rho_f S \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{L_f}{2}}^{\frac{L_f}{2}} =$$

$$= \rho_f S \frac{1}{3} \left[\left(\frac{L_f}{2} \right)^3 + \left(-\frac{L_f}{2} \right)^3 \right] =$$

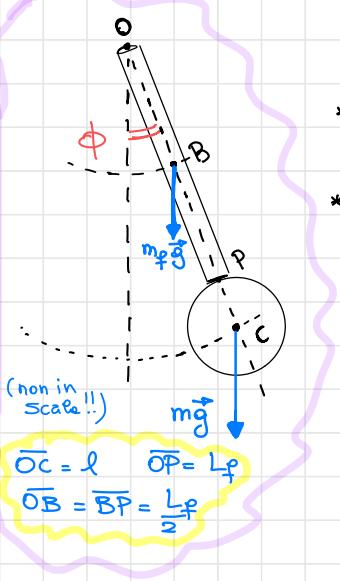
$$= I_{\text{filo}, B//} = \rho_f S \frac{2}{3} \frac{L_f^3}{8} = (\rho_f S L_f) \cdot \frac{L_f^2}{12} = m_f \frac{L_f^2}{12}$$

$m_f !!$

$$I_{\text{filo}, B//} = m_f \frac{L_f^2}{12}$$



PENDOLO FISICO (in moto IDEALE)



* equazioni di moto \Rightarrow

$$I_0 \ddot{\phi} = M_{0,z}^{(e)}$$

* momento d'inerzia TOTALE rispetto al polo di rotazione (z, di versore \hat{e}_z , normale al piano "del fermo") passante per O \Rightarrow

$$I_0 = I_{sferico,0} + I_{fisico,0} =$$

$$= (I_{sferico,C} + m \cdot l^2) + [I_{fisico,B//} + m_f \left(\frac{L_f}{2}\right)^2] =$$

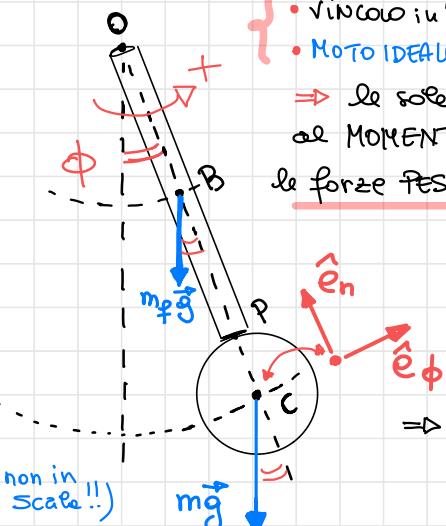
$$= m \frac{R^2}{5} + m l^2 + m_f \frac{L_f^2}{12} + m_f \frac{L_f^2}{4} = m \left(l^2 + \frac{2}{5} R^2\right) + m_f \frac{L_f^2}{3}$$

$$\Rightarrow I_0 = m \left(l^2 + \frac{2}{5} R^2\right) + m_f \frac{L_f^2}{3}$$

COSTANTE DIPENDENTE DAI PARAMETRI FISICI DEL SISTEMA!

* VALUTAZIONE DEL MOMENTO ASSIALE $M_{0,z}^{(e)}$

- { • VINCULO in O IDEALE
- MOTO IDEALE (trascurando eventuali forze d'attrito...)
- \Rightarrow le sole forze esterne che contribuiscono al MOMENTO ASSIALE rispetto al polo O sono le forze peso: per il calcolo del momento delle forze peso rispetto al polo O, \vec{M}_0 , possiamo considerare



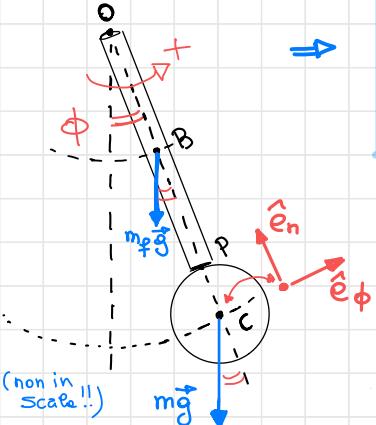
$$\hat{e}_n \times \hat{e}_n = 0$$

$$\hat{e}_\phi \times \hat{e}_n = \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_n \times \hat{e}_\phi = -\hat{e}_z$$

$$\vec{M}_0 = -m g l \sin \phi \hat{e}_z - m_f L_f g \sin \phi \hat{e}_z$$

(vettore momento delle forze peso rispetto al polo O)



$$\vec{M}_o = -mgl \sin\phi \hat{e}_z - m_f \frac{L_f}{2} g \sin\phi \hat{e}_z = \\ = -(ml + m_f \frac{L_f}{2}) g \sin\phi \hat{e}_z$$

(rettore momento delle forze peso rispetto al polo O)

\Rightarrow per ottenere il MOMENTO ASSIALE (lungo l'asse di rotazione fisso "z") dobbiamo proiettare $\vec{M}_o^{(e)}$ (momento risultante delle forze esterne rispetto al polo O) lungo $\hat{e}_z \Rightarrow M_{o,z}^{(e)} = \vec{M}_o^{(e)} \cdot \hat{e}_z = \vec{M}_o \cdot \hat{e}_z$

$$M_{o,z}^{(e)} = -(ml + m_f \frac{L_f}{2}) g \sin\phi$$

\Rightarrow TORNANDO ALL'EQUAZIONE DI MOTO

$$I_o \ddot{\phi} = M_{o,z}^{(e)}, \text{ avremo}$$

$$I_o \ddot{\phi} = -(ml + m_f \frac{L_f}{2}) g \sin\phi$$

↓

$$\ddot{\phi} = -\left[g \left(ml + m_f \frac{L_f}{2} \right) \right] \frac{\sin\phi}{I_o}$$

↓

* EQUAZIONE DI MOTO DEL PENDOLO FISICO IDEALE

$$\ddot{\phi} + \left[g \left(ml + m_f \frac{L_f}{2} \right) \right] \frac{1}{I_o} \sin\phi = 0$$

COSTANTE!

dove

$$I_o = m(l^2 + \frac{2}{5}R^2) + m_f \frac{L_f^2}{3} = \text{COST.}$$

PENDOLO SEMPLICE IDEALE

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin\phi = 0$$

$$\left[\frac{g}{l} \right] = \left[\frac{lt^{-2}}{l} \right] = [t^{-2}]$$

$$* \left[g \left(ml + m_f \frac{L_f}{2} \right) \right] = \left[lt^2 \cdot \frac{ml}{m_f} \right] = [t^{-2}] \Rightarrow \text{VERIFICA OK!}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{ml + m_f \frac{L_f}{2}}{I_o} \right] = \left[\frac{ml}{ml^2} \right] = [l^{-1}] \Rightarrow \frac{I_o}{ml + m_f \frac{L_f}{2}} = \text{COSTANTE CON DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA}$$

PENDOLO FISICO IDEALE

$$\ddot{\phi} + \left[g \frac{(m + m_f \frac{L_f}{2})}{I_0} \right] \sin\phi = 0$$

dove $\frac{I_0}{m_l + m_f \frac{L_f}{2}}$ = COSTANTE CON DIMENSIONI
di una LUNGHEZZA

\Rightarrow coefficiente di $\sin\phi$:

Pendolo fisico	Pendolo semplice
$\left\{ \frac{g}{(I_0 \frac{m + m_f \frac{L_f}{2}}{2})} \right\}$	$(\frac{g}{l})$
\Downarrow	

possiamo definire una LUNGHEZZA EQUIVALENTE come

la quantità $\frac{I_0}{m_l + m_f \frac{L_f}{2}}$ [che è una COSTANTE DEFINITA DA I PARAMETRI FISICI DEL SISTEMA (m, m_f, R, l, L_f)]

$$\Rightarrow L_{eq} = \frac{I_0}{m_l + m_f \frac{L_f}{2}}$$

\Rightarrow lunghezze caratteristica dello specifico pendolo fisico, definita dai parametri fisici che lo caratterizzano $\{m, m_f, R, l, L_f\}$
 $(l = \bar{l})$

\Rightarrow con questa definizione

l'equazione di moto si può riscrivere come:

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L_{eq}} \right) \sin\phi = 0$$



\Rightarrow scritta in questa forma è chiara la perfetta analogia con l'eq. di moto del pendolo semplice e ideale

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{l} \right) \sin\phi = 0$$



le due equazioni hanno la stessa identica forma,

solo che, come abbiamo visto per il PENDOLO FISICO la LUNGHEZZA che compare nell'equazione è definita in modo più articolato dai parametri fisici del pendolo $L_{eq} = L_{eq}(m, m_f, R, l, L_f)$



PENDOLO SEMPLICE IDEALE

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin\phi = 0$$

\Rightarrow pendolo fisico e ideale

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{L_{eq}}\right) \sin\phi = 0$$

\Rightarrow pendolo semplice e ideale

$$\ddot{\phi} + \left(\frac{g}{l}\right) \sin\phi = 0$$

\Rightarrow DUNQUE, anche solo l'eq. di moto del pendolo fisico e ideale

ha la stessa forma di quella che abbiamo studiato in
DETALIO del pendolo semplice e ideale,

PER IL PENDOLO FISICO E IDEALE VARRANNO,

SOSTITUENDO LA LUNGHEZZA COSTANTE L_{eq} AL POSTO DI l DEL
PENDOLO SEMPLICE E IDEALE, TUTTE LE CONSIDERAZIONI FATTE E
I RISULTATI OTTENUTI NELLO STUDIO DEL PENDOLO SEMPLICE IDEALE
 \Rightarrow varranno in particolare le RELAZIONI RICAVATE PER IL
PERIODO DEL MOTO.....

indicheremo coe pedice "s" le quantità riferite al PENDOLO SEMPLICE
e coe pedice "f" quelle relative al PENDOLO Fisico

\Rightarrow Ricordando che per i.e PENDOLO SEMPLICE E IDEALE era

$$T_{os} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{e} \quad T_s = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \mathcal{T}(\phi_0) = T_{os} \cdot \mathcal{T}(\phi_0)$$

potremo scrivere per i.e PENDOLO Fisico e IDEALE :

$$T_{of} = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \quad \text{e} \quad T_f = 2\pi \sqrt{\frac{L_{eq}}{g}} \cdot \mathcal{T}(\phi_0) = T_{of} \cdot \mathcal{T}(\phi_0)$$

dove

$$L_{eq} = \frac{I_o}{ml + m_f \frac{L_f}{2}} = \frac{m \left(l^2 + \frac{2}{5} R^2 \right) + m_f \frac{L_f^2}{3}}{ml + m_f \frac{L_f}{2}}$$

↑
(sostituendo I_o)

- * Ponendoci l'obiettivo di confrontare i periodi nelle due schematizzazioni ("semplice" e "fisico"), è necessario procedere con un'analisi di $L_{eq} = L_{eq}(m, m_f, R, l, L_f)$

...nelle NOTE successive...