Analisi II - Curve e Integrali curvilinei

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Curve parametriche

1. Un punto si muove nello spazio secondo la legge

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}_{t \in [0, 6\pi]}$$

   (a) Calcolare la velocità e l'accelerazione
   (b) Verificare che i vettori velocità e accelerazione centripeta sono perpendicolari fra loro, e che l'accelerazione è rivolta "internamente".
   (c) Calcolare lo spazio percorso

2. Data

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ -3\cos(t) \\ 4t \end{pmatrix}_{t \in \mathbb{R}}$$

   (a) Verificare che $\vec{r}$ definisce una curva regolare
   (b) Verificare che $\vec{r}$ passa dal punto $P(0, -3, 0)$
   (c) Calcolare la retta tangente a $\vec{r}$ in P

3. Calcolare la lunghezza:

   (a) dell'**astroide** di equazione

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}_{t \in [0, 2\pi]}$$

*esercizi della prof.ssa *Chiara Bianchini*

(b) del **cardioide** di equazione polare

$$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

(c) dell'**elica conica** di equazione

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos(t) \\ t\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}_{t\in[0,6\pi]}$$

4. Trovare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{cases} t^2\underline{i} + \alpha t\underline{j} & \text{se } t \leq 0 \\ t\underline{j} + t^2\underline{k} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

è regolare su $\mathbb{R}$

5. Scrivere una parametrizzazione della linea γ appartenente alla superficie $z = \sqrt{2y^2 - x}$ che si proietta nel piano xy nella linea di equazione

$$x = y^2$$

Dire se tale curva è regolare su $\mathbb{R}$

6. Calcolare la lungezza della curva intersezione delle superfici

$$y = x^2 e$$

$$3z = 2xy$$

dal punto $(0, 0, 0)$ al punto $\left(2, 4, \frac{16}{3}\right)$

7. Trovare l'equazione parametrica della curva ottenuta come intersezioni tra

(a) il cilindro $x^2 + y^2 = 1$

(b) il piano $y + z = 2$

Calcolare la retta tangente alla curva nel punto $(-1, 0, 2)$

8. Dimostrare che la curva di equazione

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\ \cos(t) \\ t\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$

giace sul cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$

9. Data la curva di equazione

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ \sin^2(t) \end{pmatrix}$$

   (a) Dimostrare che è l'intersezione delle superfici $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$
   (b) Dimostrare che è regolare
   (c) Trovare la retta tangente a $\vec{x}(t)$ la cui direzione è parallela a $\vec{v} = \left(1, -1, \sqrt{2}\right)$. Specificarne l'equazione e il punto di tangenza

10. Determinare l'angolo di intersezione tra l'origine e le curve:

$$\vec{r_1}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r_2}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$$

11. Provare che se il vettore posizione $\vec{r}(t)$ è sempre perpendicolare al vettore tangente $\dot{\vec{r}}(t)$, allora la curva giace su una sfera centrata in O

12. Riparametrizzare le seguenti curve rispetto all'ascissa curvilinea misurata a partire dal punto in cui $t = 0$, nella direzione delle t crescenti:

   (a) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(t) \\ e^t \cos(t) \end{pmatrix}$
   (b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 3 + t \\ -5t \end{pmatrix}$
   (c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(t) \\ 4t \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}$

2 Integrali curvilinei

1. Calcolare l'area della superficie parallela all'asse z compresa tra il piano $z = 0$ e il grafico della funzione $f(x, y) = xy$ che interseca il piano $z = 0$ lungo l'arco di parabola

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}_{t \in [0,1]}$$

2. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse z di un filo di densità lineare di massa $\delta = cost.$, avente la forma di un'elica

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R\ \cos(t) \\ R\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}_{t \in [0,4\pi]}$$

3. Calcolare il baricentro di un filo omogeneo avente la forma del cicloide di equazione

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \alpha\,[t - \sin(t)] \\ \alpha\,[1 - \cos(t)] \end{pmatrix}_{t \in [0,2\pi]} \qquad \text{con } \alpha > 0$$

4. Calcolare la massa di un filo con densità lineare di massa $\delta(x, y, z) = x$ avente la forma dell'elica

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 4t \\ -3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}_{t \in [0,\pi]}$$

5. Calcolare

$$_\gamma\int f(x, y, z)dS \quad \text{con } f(x, y, z) = \sqrt{2y^2 + z^2}$$

e γ è la circonferenza intersezione tra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x = y$

6. Calcolare

$$_\gamma\int \left(x^2 + y^2\right)^2 dS$$

dove γ è l'equazione polare $\rho(\theta) = e^{2\theta}$ con $\theta \in (-\infty, 0]$

7. Calcolare

$$_C\int 2xdS$$

dove C è composta dall'arco di parabola $y = x^2$ da $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e dal segmento verticale da $(1, 1)$ a $(1, 2)$

8. Trovare il lavoro compiuto dalle forze del campo

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$$

per spostare una particella lungo il primo quarto di circonferenza unitaria

9. Trovare il lavoro compiuto dal campo di forze

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x\sin(y) \\ y \end{pmatrix}$$

su una particella che viene spostata lungo la parabola $y = x^2$ da $(-1,1)$ a $(2,4)$

10. Un uomo del peso di 80 kg trasporta una latta del peso di 10 kg lungo una scala elicoidale che circonda un silos cilindrico di 6 m di diametro. Il silos è alto 4,5 m, e occorrono esattamente 3 giri per arrivare alla sommità. Calcolare il lavoro compiuto dall'uomo contro la forza di gravità.

11. Calcolare

$$_C\int 2x\sin y\mathbf{dx} + \left(x^2\cos y - 3y^2\right)\mathbf{dy}$$

dove C è il segmento che unisce i punti $(-1,0)$ e $(5,1)$

12. Calcolare il lavoro fatto dal campo di forze $\vec{F}$ per spostare un oggetto lungo il segmento $\overline{PQ}$

(a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^3 \\ x^3y^2 \end{pmatrix}$ con $P(0,0)$, $Q(2,1)$

(b) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{x^2} \\ -\frac{2y}{x} \end{pmatrix}$ con $P(1,1)$, $Q(4,-2)$