

# Analisi II

Gariboldi Alessandro

16/09/25

## 1 Equazioni differenziali ordinarie

Esempi di equazioni differenziali:

$$y' = 3e^y$$

$$y' = 4x$$

$$y' + y = 0$$

incognita = funzione  $y(x)$   
una sola variabile reale

Es.  $y(x) = \sin(x)$  è soluzione di  $y'' + y = 0$

L'ordine di un'eq. differenziale è il grado della derivata del grado più alto che compare nell'eq.

$y' = f(x, y)$  la chiamo  $\boxed{*}$

Una funzione di  $\boxed{*}$  è una funzione  $y(x)$  definita per  $x$  appartenente ad un qualche insieme  $A$ , e t.c.  $\forall x \in A$  risulti  $(x, y(x))$  appartenente al dominio  $f(x, y)$ , e Inoltre:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1)$$

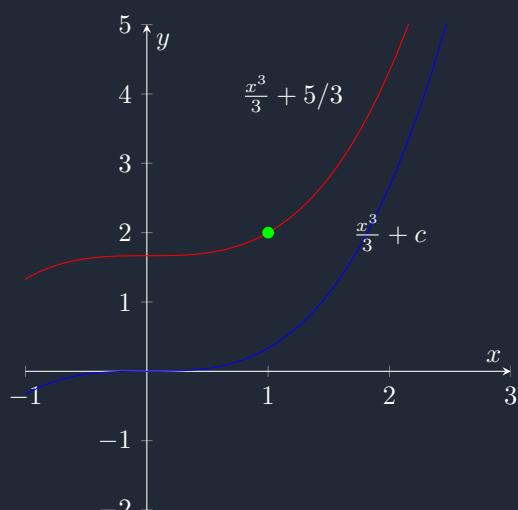
**Esempio 1.1.**

$$y' = g(x)$$

$g$  è una funzione continua definita in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$

Se  $G(x)$  indica una primitiva di  $g(x)$   
allora  $G(x) + c$  è soluzione dell'EDO eq. diff. ordinaria

$$\begin{cases} y' = x^2 & y(x) = \frac{x^3}{3} + c \\ y(1) = 2 & y(1) = 2 \rightarrow \frac{1^3}{3} + c = 2 \quad c = \frac{5}{3} \end{cases} \quad (2)$$



con la  $c$  sposto il grafico in verticale

in questo caso la  $c$  della funzione generica in blu ha  $c=0$

Posso riconsiderare l'eq. di prima  $y' + y = 0$   
e scrivere una soluzione generica

$$c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$$

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = 0 \\ c_1 \cos(0) - c_2 \sin(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 + c_2 = 0 \\ c_1 - 0 = 1 \end{cases}$$

E di conseguenza trovo i valori per i quali le costanti mi verificano il sistema

### Proposizione 1.1.

Prob. di Cauchy per eq. di 1° grado

#### EDO 1° ordine

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad x_0, y_0 \text{ sono assegnati}$$

#### EDO 2° ordine

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \quad x_0, y_0, y_1 \text{ sono assegnati}$$

### Definizione 1.1.

Esempi di forma normale:

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

$$y'' = f(x, y, y') \tag{4}$$

Forma normale canonica, in generale si definisce una eq. in forma normale se posso isolare la derivata  $n$ -esima e quindi ricondursi alla forma seguente:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Si ricorda che forme normalizzate non conducono sempre ad una sola soluzione

### Esempio 1.2.

$$F(x, y, y') \quad F(x, y, y', y'') \tag{5}$$

Esempio numerico

$$(y')^2 + x^3 = 0 \tag{7}$$

$$y''^2 = -x^3 \tag{8}$$

$$y' = \pm \sqrt{-x^3} \rightarrow \text{due soluzioni} \tag{9}$$

### Proposizione 1.2.

Problema di Cauchy per equazioni di 1° ordine in forma normale

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{e lo chiamo } \boxed{*} \tag{10}$$

### Teorema 1.1.

th. di Peano

Se  $f(x, y)$  è definita e continua in un insieme  $A$

e  $(x_0, y_0)$  è un punto interno ad  $A$

allora il Pb. di Cauchy  $\boxed{*}$  ammette **almeno** una soluzione definita in un intorno di  $x_0$

La continuità di  $f(x, y)$  è necessaria per l' $\exists$  di una soluzione

La sola hp. di continuità **NON** garantisce che esista **solo** una soluzione

### Esempio 1.3.

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = y^{2/3}$  definita continua in tutto  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

sia  $y(x) \equiv 0$

che  $y(x) = \frac{x^3}{27}$   $y' = \frac{x^2}{9}(y(x))^{2/3} = (\frac{x^3}{27})^{2/3} = \frac{x^2}{9}$  quindi abbiamo trovato che per una funzione continua potremmo trovare due soluzioni distinte, in questo caso potremmo addirittura generalizzare ad infinite soluzioni...

$$\begin{cases} 0 \text{ se } x \in (-\infty, a) \\ \frac{(x-a)^3}{27} \text{ se } x \in [a, +\infty) \end{cases} \quad \boxed{a > 0}$$

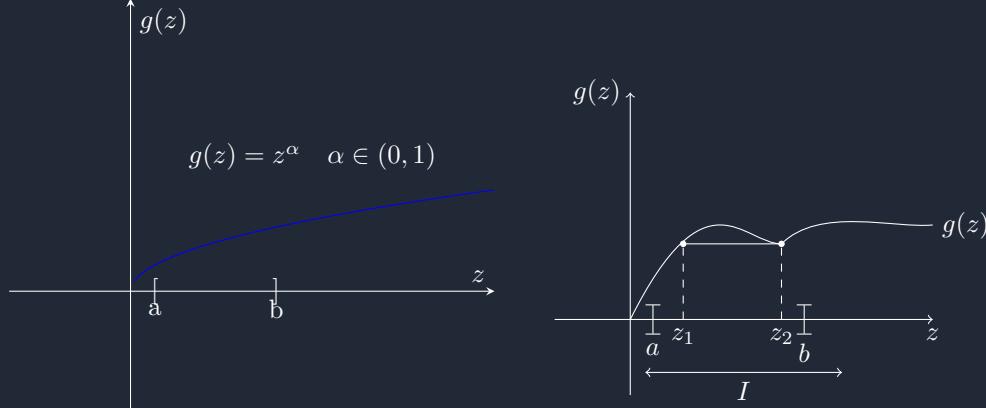
## 2 Funzioni Lipschitziane

$$g : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

Sia  $[a, b] \subset \mathbb{I}$

Si dice che la funzione è Lipschitziana in  $[a, b]$

$$\text{se } \exists L \in \mathbb{R} > 0 \text{ t.c. } \forall z_1, z_2 \in [a, b] \quad \boxed{\left| \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \leq L} \quad \iff \quad \boxed{-L \leq \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \leq L}$$



Se in un intervallo due numeri  $z_1, z_2$  calcolati in una funzione  $f$  arbitrariamente vicini formano una corda tra di loro con un coefficiente angolare finito.

### Teorema 2.1.

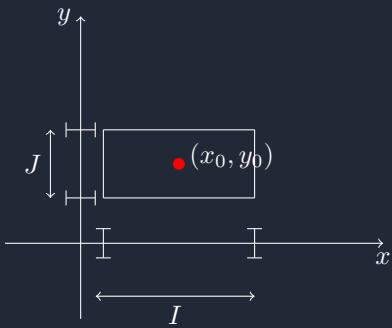
Th. di  $\exists!$  di Cauchy

Consideriamo il pb  $\boxed{*}$   $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Supponiamo che  $f(x, y)$  sia definita  $\forall (x, y) \in I \times J$  dove  $I = (x_0 - a, x_0 + a)$  e  $J = (y_0 - b, y_0 + b)$   
Supponiamo anche che:

- i)  $f(x, y)$  è continua in  $I \times J$
- ii)  $\exists$  costante  $L > 0$  t.c.  $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$

Allora  $\exists \delta > 0$  e  $\exists!$  funzione  $y(x)$  definita in  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  che risolve il pb. di Cauchy  $\boxed{*}$



$$\begin{aligned} & \exists a, b \text{ t.c.} \\ & I = (x_0 - a, x_0 + a) \\ & J = (y_0 - b, y_0 + b) \end{aligned}$$

**Esempio 2.1.**

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \\ x_0 = 0, y_0 = 0 \\ f(x, y) = y^{2/3} \end{cases}$$

*Dimostrazione.*

**1° passo :**

**Lemma 2.1.**

Supponiamo valide le ipotesi del th. precedente

Sia  $\delta > 0$  le seguenti affermazioni sono equivalenti.

□

**Lemma 2.2.**

Inciso: derivata parziale

Sia  $f(x, y), (x_0, y_0)$  interno al dominio di  $F$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h)}{f(x_0, y_0)}$$

**Esempio 2.2.**

Se  $f(x, y) = xy^3 + \sin y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(3, y_0) \Rightarrow$  derivata rispetto alla  $y$  di  $3y^3 + \sin y = gy_0^2 + \cos y_0$

**Lemma 2.3.**

Se  $f$  è continua in un insieme  $A$ ,  $(x_0, y_0)$  è interno ad  $A$  e inoltre

i)  $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  è continua  $\forall (x, y) \in A$  Allora le hp del th. precedente sono verificate

**Esempio 2.3.**

se  $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$  e  $(x_0, y_0) = (0, 0)$   
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2/3y^{-1/3}$

**Problema 2.1.**

$y' = f(x) \Rightarrow y = F(x) + c$  dove  $F$  è primitiva di  $f(x)$

Eq. a variabili separabili

$$y' = a(x)b(y)$$

$$\begin{aligned} a(x) &\text{ continua in } \mathbb{I} \subset \mathbb{R} \\ b(y) &\text{ continua in } \mathbb{J} \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Soluzione 2.1.**

Se  $\bar{y}$  è continua t.c.  $b(\bar{y}) = 0$

allora la funzione  $y(x) \equiv \bar{y}$  è soluzione

supponiamo  $b(y) \neq 0$

$$\frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \rightarrow \int \frac{y'(x)}{b(y(x))} dx = \int a(x) dx$$

Se pongo  $y = y(x)$

e poi derivo da entrambe le parti:  $y'(x)dx = dy$

Successivamente calcolo l'integrale da entrambi i lati per togliere i differenziali  $\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx$

Se  $B(y)$  è una primitiva di  $\frac{1}{b(y)}$

e  $A(x)$  è una primitiva di  $a(x)$

si ottiene:

$$\boxed{B(y) = A(x) + c}$$

Se si riesce ad invertire la funzione B

allora:  $y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$

Esempio:

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y}, & a(x) \equiv 1 \\ y(0) = 2, & b(y) = \frac{1}{y} \end{cases}$$

(In questo caso si ha  $a(x)$  coincidente con 1 perchè è costante e coincide con uno  $\forall x$ )

$$\int y \, dy = \int 1 \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = x + c$$

$$\boxed{y^2 = 2x + c}$$

$$y = \pm \sqrt{2x + c}$$

La condizione  $y(0) = 2$  mi spinge a scegliere  $y(x) = \sqrt{2x + 2c}$

$$y(0) = \sqrt{2c} \stackrel{?}{=} 2 \quad \text{se } c = 2$$

$$y(x) = \sqrt{2x + 4}$$

$$y' = a \cdot y(1 - by) \quad \text{con } a, b \text{ costanti} > 0$$

$$y(x) \equiv 0$$

$$y(x) \equiv \frac{1}{b}$$

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a \, dx$$

$$\ln \left| \frac{y}{1 - by} \right| = ax + c$$

$$\left| \frac{y}{1 - by} \right| = e^{ax} \cdot e^c = c_0 \cdot e^{ax} \quad \text{con } c_0 > 0 \text{ costante arbitraria}$$

**Lemma 2.4.**

*Equazioni Omogenee*

$y' = y(x, y)$  dove  $f(x, y)$  è "omogenea di grado 0"

cioè  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall (x, y) f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$

Prendiamo l'eq:

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad f(x, y) \frac{2xy}{x^2 + y^2} \tag{11}$$

Un equazione di questo tipo può essere riscritta come:

$$y' = b(y/x) \tag{12}$$

**Esempio 2.4.**

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2y/x}{1 + (y/x)^2} \quad \text{cioè } b(t) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad (13)$$

**Proposizione 2.1.**

$$y' = b(y/x) \quad \text{Ponente } z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

cioè  $y(x) = xz(x)$

Allora  $y'(x) = (x)'z(x) + xz'(x) = z + xz'$

L'equazione diventa:  $z + xz' = b(z)$

$$\text{cioè } z' = \frac{b(z) - z}{x}$$

**Esempio 2.5.**

$$z' = \frac{\frac{2z}{1+z^2} - z}{x} z' = \left( \frac{z - z^3}{1 + z^2} \right) 1/x \quad (14)$$

**3 18/09/25**

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) & f(\lambda x, \lambda y) &= f(x, y) = \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ y' &= f(x, y) \rightarrow b\left(\frac{y}{x^3}\right) \\ y' &= b(y/x) \\ z \rightarrow z(x) &= \frac{y(x)}{x} \\ y(x) &= xz(x) \\ y' &= 1z + xz' = z + xz' \\ y' &= b(y/x) \rightarrow z + xz' = b(z) \\ z' &= \frac{b(z) - z}{x} = (b(z)1/x) \end{aligned}$$

**Esempio 3.1.**

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^3 + y^3}{xy^2} \\ f(x, y) &= \frac{x^3 + y^3}{xy^2} = \frac{1 + (x/y)^3}{(y/x)^2} \\ \text{dove } b(t) &= \frac{1 + t^3}{t^2} \\ z' &= \frac{\left(\frac{1+z^3}{z^2} - z\right)}{x} \\ z' &= \boxed{\frac{1}{z^2} \frac{1}{x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int z^2 dz &= \int \frac{dx}{x} \\ \frac{z^3}{3} &= \ln|x| + c \\ z &= \sqrt[3]{3\ln|x| + 3c} \\ y(x) &= xz(x) = x^3 \sqrt[3]{3\ln|x| + 3c} \end{aligned}$$

**Proposizione 3.1.**

Esistenza locale ed esistenza globale

Prendiamo un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 & f(X, y) = 2xy^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \\ y(0) = -1 & x_0 = 0, y_0 = -1 \end{cases}$$

$f(x, y)$  è continua  $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ , lo stesso vale per  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\Delta xy$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2dx \quad -\frac{1}{y} = -x^2 + c$$

$$y(0) = -1 \quad \frac{1}{0 - c} = -1 = c = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

I teoremi che abbiamo visto finora dicono che esiste una soluzione in un certo intorno  $x_0$ , se la funzione è definita in un certo intervallo allora è possibile che la soluzione si trovi in quell'intervallo.

**Teorema 3.1** (di  $\exists$  globale).

Consideriamo il Pb.  $\boxed{*}$   $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$   
se:

i)  $f(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  sono definite e continue  $\forall x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$  dove  $x_0 \in (a, b)$

ii) Esistono due numeri positivi,  $h, k$  per cui risulti  $\boxed{|f(x, y)| \leq h + k|y|}$

**Proposizione 3.2.**

EDO di ordine  $n$

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_n \end{cases} \quad y'' = \overset{\text{es.}}{3xy + 7y'}$$

$$\begin{array}{c} \text{chiamo } \boxed{\mathbb{E}} \\ y_1(x) := y(x) \\ y_2(x) := y'(x) \end{array}$$

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = 4xy_1 + 7y_2 \end{cases} \quad \boxed{**}$$

$$y'' = 3xy + 7y' \boxed{*}$$

Se  $y$  risolve  $\boxed{*}$  allora la coppia  $y_1, y_2$  definite da  $\boxed{\mathbb{E}}$  risolve  $\boxed{**}$ .  
Viceversa se  $(y_1, y_2)$  risolvono  $\boxed{**}$  allora la funzione  $y_1$  risolve  $\boxed{*}$ .

**Proposizione 3.3.**

(EDO) Equazioni differenziali ordinari lineari del 1° ordine

□

$$y' = a(x)y = f(x)$$

□

$\boxed{*} z' + a(x)(z) = 0$  omogenee

se  $z_1(x)$  e  $z_2(x)$  sono soluzioni di  $\boxed{*}$

allora anche  $\alpha z_1(x) + \beta z_2(x), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

è soluzione di  $\boxed{*}$

infatti  $(\alpha z_1(x) + \beta z_2(x))' + a(x)(\alpha z_1 + \beta z_2(x)) \stackrel{?}{=} 0$

**Proposizione 3.4.**

$$y' + \frac{x}{y} = \sin(x) \quad a(x) = \frac{1}{x} \quad f(x) = -\sin(x)$$

$$A(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$F(x) = \int f(x)e^{A(x)} dx = \int -\sin(x)e^{\ln|x|} dx = \int -|x|\sin(x)dx$$

$$\text{quando } x > 0 \rightarrow - \int x \sin(x) = \sin(x) - x \cos(x)$$

$$\text{quando } x < 0 \rightarrow - \int x \sin(x) = -\sin(x) + x \cos(x)$$

$y(x)$  ha due soluzioni...

$$ce^{\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(\sin(x) - \cos(x)) \text{ quando } x > 0$$

$$ce^{\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(-\sin(x) + \cos(x)) \text{ quando } x < 0$$

$$y(x) = \frac{c}{|x|} + \frac{c}{x}(\sin(x) - x \cos(x)) \text{ quando } x > 0$$

$$y(x) = \frac{c}{|x|} + \frac{c}{-x}(-\sin(x) + x \cos(x)) \text{ quando } x < 0$$

L'equazione non ha senso quando  $x = 0$

**Definizione 3.1.**

Spazi di funzioni

$I$  è un intervallo in  $\mathbb{R}$

si considerano  $\{\text{insieme delle funzioni} : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ , chiamiamo questo sistema  $\boxed{*}$

prendiamo  $f, g \in \boxed{*}$  e  $\boxed{\alpha f(x) + \beta g(x)} \in \boxed{*}$  con  $f(x) \equiv 0$

e si considera  $\{\text{insieme delle funzioni} : I \rightarrow \mathbb{R}\}$  come spazio vettoriale

$$C^0(I) = \{\text{insieme delle funzioni continue} : I \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$C^1(I) = \{\text{insieme delle funzioni continue, derivabili in ogni } x \in I \text{ e la cui derivata è una funzione continua } \forall x \in I\}$$

.

.

.

$$C^n(I)$$

**Teorema 3.2.**

i) L'insieme  $V_0$  delle soluzioni di  $\boxed{2}$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$

ii) L'insieme delle soluzioni di  $\boxed{1}$  è

□

$$\left\{ y(x) + y_f(x) : y \in V_0 \text{ e } y_f \text{ è soluzione di } \boxed{1} \right.$$

□

$$\boxed{y^n a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)} \quad \boxed{1}$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  supponiamo che siano definite e continue in  $I \subset \mathbb{R}$

$$y \in C^n(I)$$

$$E(y) : C^n(I) \rightarrow C^0(I)$$

$$E(y) = y^{(n)}(x) + a_{(n-1)}(x) y^{(n-1)}(x) + \dots + a_0(x) y()$$

$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2)$$

$$\boxed{y^{(n)} + a_{(n-1)}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y(x) = 0} \quad \boxed{2}$$

## 4 23/09/25

abbiamo parlato delle equazioni differenziali lineari  $y' + a(x) = f(x)$  in questo caso del primo ordine.  
successivamente abbiamo introdotto quelle di ordine  $n$  che appaiono in una forma del tipo

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

dove  $a_i(x), i = 0, \dots, n-1$  sono funzioni definite e continue in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$

$$C^0(I) = \{ \text{insieme di funzioni continue: } I \rightarrow \mathbb{R} \}$$

$$C^1(I) = \{ \text{insieme di funzioni continue e derivabili con derivata continua in: } I \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Sono spazi vettoriali su  $\mathbb{R}$

$$E : C^n(I) \rightarrow C^0(I)$$

$$E(y(x) \in *) = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_1(x) y' + a_0(x) y = y(x)$$

$$E(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha E(y_1(x)) + \beta E(y_2(x))$$

$E$  è lineare

### Teorema 4.1.

$\exists!$  globale per soluzione di EDO lineari

Siano  $f(x), a_i(x) \quad i = 0, \dots, n-1$  funzioni continue in  $I$

Sia  $x_0$  interno ad  $I$

Allora  $\forall$  scelta dei numeri

$b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  il prob. di Cauchy:

$$\begin{cases} E(y) = f \\ y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases} \quad \text{Ha una sola soluzione definita in tutto } I$$

(no dim)

**Teorema 4.2.**

L'insieme delle soluzioni dell'EDO omogenea  $E(y) = 0$  è uno spazio vettoriale di dimensione  $n$ .

$\boxed{*}$  è spazio vettoriale.

La funzione  $y(x) \stackrel{?}{=} 0$  soddisfa l'eq  $E(y) = 0$  ovviamente.

Se  $y_1$  e  $y_2$  sono due soluzioni dell'omogenea, cioè

$$E(y_1) = 0 \text{ e } E(y_2) = 0$$

e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  allora

$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

*Dimostrazione.*

Dimostra il teorema quando  $n = 2$

Def. le due funzioni  $z_0(x)$  e  $z_1(x)$  nel modo:

$z_0$  è sol. del pb.

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

$z_1$  è sol. del pb.

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Richiamo cosa vuol dire nel contesto degli spazi di funzioni cosa vuol dire linearmente indipendenti  $z_0$  e  $z_1$  sono lin. indipendenti se

$$C_0 z_0(x) + C_1 z_1(x) = 0 \forall x \in I$$

dove  $C_0, C_1$  sono costanti, avviene solo quando  $C_0 = C_1 = 0$ .

Siano  $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$  :  $C_0 z_0(x_0 + C_1 z_1(x)) \stackrel{?}{=} 0 \forall x \in \mathbb{R}$

chiamo:  $z(x)$  è sol. di  $z(x_0) = C_0 z_0(x_0) + C_1 z_1(x_0) = C_0$  dove  $C_0 z_0(x_0) = 1$  e  $C_1 z_1(x_0) = 0$   
 $z'(x_0) = C_0 z'_0(x_0) + C_1 z'_1(x_0)$  dove  $C_0 z'_0(x_0) = 0$  e  $C_1 z'_1(x_0) = 1$

Ma per l'ipotesi  $z \stackrel{?}{=} 0$  quindi  $z(x_0) = 0$  Ma anche  $z' \equiv 0$  e  $z'(x_0) = 0$

Rimane da dimostrare che  $z_0$  e  $z_1$  generano tutto lo spazio delle soluzioni dell'omogenea.

Sia  $w(x)$  una sol. arbitraria di  $E(y) = 0$ .

Voglio dimostrare che è probabile scegliere  $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$

t.c.  $w(x) \equiv C_0 z_0(x) + C_1 z_1(x)$

Scelgo  $C_0$  e  $C_1$ :

$$\boxed{C_0 = w(x_0) \quad C_1 = w'(x_0)} \text{ Sia } w \text{ che } C_0 z_0 + C_1 z_1 \text{ sono soluzioni di:}$$

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = C_0 \\ y'(x_0) = C_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} C_0 z_0(x_0) + C_1 z_1(x_0) &= C_0 & \text{dove } C_0 z_0(x_0) = 1 \text{ e } C_1 z_1(x_0) = 0 \\ C_0 z'_0(x_0) + C_1 z'_1(x_0) &= C_1 \end{aligned}$$

□

**Teorema 4.3.**

L'integrale generale dell'equazione  $\boxed{E(y) = f}$

si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omogenea ad una soluzione particolare dell'equazione completa

$$E(y) = f.$$

*Dimostrazione.* Sia  $y_1$  una soluzione di  $E(y) = f$

e  $y_0$  una soluzione di  $E(y) = 0$

Allora  $y_1 + y_0$  è soluzione di:

$$E(y) = f \text{ infatti}$$

$$E(y_1 + y_0) = E(y_1) + E(y_0) = f + 0 = f$$

Viceversa sia  $y_2$  una qualsiasi soluzione di  $E(y) = f$

Allora:

$$E(y_2)y_1 = E(y_2) - E(y_1) = f - f = 0$$

Quindi  $y_2 - y_1 = z_0$  per una certa soluzione dell'omogenea.

Allora:  $y_2 = y_1 + z_0$

□

#### Proposizione 4.1.

Per risolvere lequazione lineare dell'ordine  $n$  posso:

- i) Trovare  $n$  soluzioni lineari indipendenti omogenee
- ii) Trovare una soluzione della equazione completa

Punto 1  $\exists$  una strategia generale solo quando  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sono costanti.

EDO lineari a coefficienti costanti

#### Esempio 4.1.

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Se parto da:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \leftarrow \text{associo caratteristico:}$$

$$P(\lambda) : \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

#### Teorema 4.4.

Sia  $\lambda \in \mathbb{R}$  ( o anche  $\lambda \in \mathbb{C}$ ).

La funzione:  $y(x) = e^{\lambda x}$

è soluzione dell'equazione omogenea  $E(y) = 0 \Leftrightarrow \lambda$  è radice del polinomio caratteristico cioè se  $P(\lambda) = 0$

*Dimostrazione.*

Chiamo

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

.

.

.

$$y^n(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned} E(y) &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \dots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0)e^{\lambda x} \\ P(\lambda)e^{\lambda x} &= 0 \quad \text{Se e solo se } P(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

#### Esempio 4.2.

se ho:  $y'' - 3y' + 2y = 0$  e considero il polinomio caratteristico associato:  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

procedendo a risolverlo per  $\lambda$  ottengo:  $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$  da qui si possono vedere ad occhio delle radici semplici di  $P(\lambda)$  che sono:  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$

di conseguenza:  $e^{2x}$  e  $e^x$  sono soluzioni di:  $E(y) = 0$

**Oss. 4.1.**

se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  sono numeri distinti  
allora  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_k x}$ , sono linearmente indipendenti.

□

**Teorema 4.5.**

Sia  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  o  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  radice di molteplicità  $s$  del polinomio  $P(\lambda)$  cioè:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s q(\lambda)$$

Con  $q(\lambda_0) \neq 0$  e  $P(\lambda_0) = 0$

Allora:

$$e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda_0 x}$$

Sono soluzioni linearmente indipendenti di  $E(y) = 0$

**Teorema 4.6.**

Sia  $\lambda = \alpha + i\beta$  una radice di molteplicità  $s$  del polinomio caratteristico.

Allora:

$$\begin{aligned} & e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x \\ & xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x \\ & x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned}$$

Sono soluzioni linearmente indipendenti Reali di  $E(y) = 0$

**Proposizione 4.2.**

Ho più o meno risposto adesso alla domanda del punto i).  
 Quindi sono in grado di risolvere la ED :

- i) Se  $f$  è un polinomio
- ii) Se  $f = \text{polinomio } e^{\alpha x}$
- iii) Se  $f = P_1(x) \sin \beta x + P_2(x) \cos \beta x$
- iv) Se l'equazione è a coefficienti costanti ( metodo di somiglianza).

Passiamo ora a vedere il metodo generale per trovare una soluzione della completa.

**Proposizione 4.3.**

Metodo generale, anche per equazioni non a coefficienti costanti. Lo vedremo solo quando  $n = 2$ .  
Metodo della variazione delle costanti.

Come punto di partenza devo avere due soluzioni lineari indipendenti dell'omogenea e le chiamo:

$$y_1(x), y_2(x)$$

Cerco una soluzione della forma:

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Come devo scegliere  $c_1(x)$  e  $c_2(x)$ ?

$$y' = c'_1 y_1 + c_1 y'_1 + c'_2 y_2 + c_2 y'_2 = \underline{c'_1 y_1 + c'_2 y'_2} + c_1 y_2 + c_2 y'_2$$

$$\text{e pongo } c'_1 y_1 + c'_2 y'_2 = 0$$

$$y'' = c'_1 y'_1 c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2$$

$$\text{riprendo } y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = f(x)$$

ora sostituisco  $y' = c'_1 y_1 + c'_2 y'_2 = f$  quindi  $c_1$  e  $c_2$  devono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f \end{cases}$$

## 5 30/09/25

### INTRODUZIONE spazi METRICI e NORMATI

#### Definizione 5.1.

$X$  insieme,  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $d$  è una METRICA su  $X$  se:

- i)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0 \quad$  (e questo implica che  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y)$ )
- ii)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$
- iii)  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

#### Definizione 5.2.

$(X, d)$  sp. METRICO

#### Esempio 5.1.

$X = \mathbb{R} \quad d(x, y) = |x - y|$

#### Definizione 5.3.

$V$  sp. vett.,  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  è una norma su  $V$  se:

- i)  $\forall v \in V, \|v\| \geq 0 \quad$  (e questo implica che  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ )
- ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$
- iii)  $\forall u, v \in V \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

#### Definizione 5.4.

$(V, \|\cdot\|)$  sp. normato.

#### Esempio 5.2.

$$V = \mathbb{R}^N \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{i=0}^N v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2} \quad (\text{teorema di Pitagora})$$

con  $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$

#### Definizione 5.5.

$(X, d\alpha), (X, d\beta)$  sp. metrici  $d\alpha, d\beta$  sono metriche equivalenti se:

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}^+ \quad t.c. \quad k_1 d\beta(x, y) \leq d\alpha(x, y) \leq k_2 d\beta(x, y)$$

$$\forall x, y \in X$$

si può anche riscrivere come:

$$k_1 \leq \frac{d\alpha(x, y)}{d\beta(x, y)} \leq k_2$$

Nel quale si vede che le norme sono equivalenti se il rapporto è confrontabile con numeri finiti.

#### Definizione 5.6.

$(X, \|\cdot\|_\alpha), (V, \|\cdot\|_\beta), (V, \|\cdot\|_\alpha), (V, \|\cdot\|_\beta)$  sono norme equivalenti se:

$$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_i$$

sp. normati

$$\forall v \in V \quad c_1 \|v\|_\beta \leq \|v\|_\alpha \leq c_2 \|v\|_\beta$$

#### Teorema 5.1.

Tutte le norme su  $\mathbb{R}^N$  sono EQUIVALENTI.

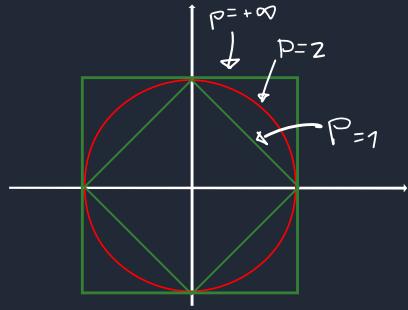


Figura 1: visualizzazione delle norme su  $\mathbb{R}^N$

### Esempio 5.3.

Norme su  $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
 \|\underline{x}\|_p &= \sqrt[p]{\sum_{i=1}^N |x_i|^p} \\
 \|\underline{x}_1\| &= \sum_{i=1}^N |x_i| \\
 \|\underline{x}_2\| &= \|\underline{x}\|_\epsilon \text{ euclidea} \\
 \|\underline{x}\|_\infty &= \lim_{p \rightarrow \infty} (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} = \max_{i=1-N} |x_i| \\
 \beta_p &= \{\underline{x} \in V : \|\underline{x}\|_p \leq 1\}
 \end{aligned}$$

### Esempio 5.4.

funzioni continue derivabili  $k$  volte  $X = C^k([a, b])$

I)  $X = C^0([a, b])$

i)  $\|f\|_{C_0} = \|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$

metrica  $d_{e^0}(f, g) = d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$

ii)  $d_{L_1}(f, g) = \int_a^b |f - g| dx$  è metrica su  $C^0$  ma NON è equivalente a  $d_e$

**OSS**

- $X = C_b^0((a, b)) \quad \|f\|_{c_b(a, b)} = \sup_{x \in (a, b)} |f(x)|$
- $X = C^1([a, b]) \quad \|f\|_{C^0} = \|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$
- $\|f\|_{C^1} = \|f\|_{C^0} + \|f'\|_{C^0}$

II)  $X = C^k$

$$([a, b])_{k \geq 0} d_{C^k}(f, g) = \sum_{i=0}^k d_{C^0}(f^{(i)} - g^{(i)}) = \sum_{i=0}^k \max_{x \in [a, b]} |f^{(i)} - g^{(i)}|$$

Cenni di TOPOLOGIA.  $(x, d)$  metrico.

### Definizione 5.7.

Presi  $x_0 \in X$  e  $R > 0$

Un intorno circolare aperto in centro  $x_0$  e raggio  $R$  è

$$B_R(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) < R\} = \mathcal{U}(x_0, R)$$

un intorno circolare chiuso in centro  $x_0$  e raggio  $R$  è

$$\overline{B_R}(x_0) = \{x \in X : d(x_0, x) \leq R\}$$

**Definizione 5.8.**

$A \subseteq X$  è un APERTO se  $\forall a \in A \quad \exists R_1 \quad t.c. \quad \mathcal{U}(a, R_1) \subseteq A$

**Definizione 5.9.**

$D \subseteq X$  è un CHIUSO se  $X \setminus D$  è aperto

**OSS**

$\bigcup$  di aperti (anche num) è aperto

$\bigcap$  finita di aperti

$\bigcup$  " di chiusi " CHIUSA

$\bigcap$  di chiusi (anche num) è CHIUSA

**Definizione 5.10.**

$x_0 \in X$  è punto interno se:

$\exists R \ t.c. \ \mathcal{U}(x_0, R) \subseteq X$

**Teorema 5.2.**

(HEINE-BOPEL)

Se  $d \subseteq \mathbb{R}^N$  è un insieme compatto allora è anche chiuso e limitato.

SUCCESSIONI in SPAZI METRICI  $(x, d)$

**Definizione 5.11.**

$\{x_k\} \subseteq X \quad x_k \xrightarrow{d} x \text{ in } X \text{ se}$

$x \in X$  e:

$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x_k, x) = 0$

**OSS**

se  $\exists$  il limite è !

**OSS**

$d_\alpha, d_\beta$  metriche equivalenti su  $X$

$x_k \subseteq X$

Allora:

$x_k$  converge in  $x$  rispetto alla metrica  $d_\alpha$   
uguale se  $x_k \xrightarrow{d_\beta} x$

**Definizione 5.12.**

$x_k \subseteq X$  è succ di cauchy in  $(X, d)$  se

$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \ t.c. \ d(x_k, x_m) < \epsilon \quad \forall k, m > N$

**OSS**

$x_k$  di cauchy in  $(x, d) \nRightarrow x_k$  converge in  $(x, d)$

$x_k$  di cauchy in  $(x, d) \Leftarrow x_k$  convergente in  $(x, d)$

**Esempio 5.5.**

$$\begin{aligned} X &= C^1([0, 1]) \\ d(f, g) &= d_{C^0}(f, g) = \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \\ x_k &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \quad \text{per } x \in [0, 1] \\ x_k : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, x_k \in C^1([0, 1]) \quad \forall k \Rightarrow \{x_k\} \subseteq C^1 \end{aligned}$$

**OSS**

$\{x_k\}$  di Cauchy

$$\begin{aligned} d(x_k, x_m) &= \max_{x \in [0, 1]} |x_k - x_m| = \max_{x \in [0, 1]} |\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{m}}| \underset{sia m > k}{=} \boxed{*} \\ \boxed{*} \max_{x \in [0, 1]} \frac{x^2 + \frac{1}{k} - (x^2 + \frac{1}{m})}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{m}}} &\stackrel{x^2 \geq 0}{\leq} \frac{\frac{1}{k} - \frac{1}{m}}{\sqrt{k} + \sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{m}} < \epsilon \end{aligned}$$

**OSS**

$$x_k \xrightarrow{d_{C^0}} \text{in } C^1$$
$$x_k \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \xrightarrow{d_{C^0}} \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} = f(x)$$
$$d_{C^0}(x_k, f) = \max_{x \in [0,1]} \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} - \sqrt{x^2} = \max_{x \in [0,1]} \frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow 0$$

## 6 1/10/25

**Esempio 6.1.**

$$X = C^1([a, b]) \ni \{x_k\} \text{ di Cauchy} \subseteq X \text{ t.c. } x_k \not\rightarrow x_0 \text{ in } X$$

**Teorema 6.1.**

$(X, d)$  metrico  $\{x_k\} \subseteq X$  t.c.  $x_k \xrightarrow{d} x_0 \in X \Rightarrow \{x_k\}$  di Cauchy rispetto a  $d$

**OSS**

NON è vero il viceversa

*Dimostrazione.* Sia  $m > n$ , considero

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0)$$

Poichè  $x_k \xrightarrow{d} x_0$  in  $X$  si ha che:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists N \text{ t.c. se } k > N \\ \text{allora } d(x_k, x_0) < \epsilon \end{aligned}$$

fix.  $\epsilon > 0$  sia  $N$  t.c.  $d(x_k, x_0) < \epsilon \quad \forall k > N$

allora  $\forall m, n > N$

$$d(x_m, x_n) \leq 2\epsilon$$

cioè  $\{x_k\}$  è di Cauchy in  $(X, d)$

□

**Definizione 6.1.**

$(X, d)$  metrico t.c.  $g_n$  è successione di Cauchy è conv. è detto sp. metrico COMPLETO.

**Definizione 6.2.**

$(V, \|\cdot\|)$  sp. vett. completo rispetto alla metrica indotta da  $\|\cdot\|$  è detto sp. di BANACH.

**OSS**

$(C^1([a, b]), d_{C^1})$  non è completo  
 $(C^0([a, b]), d_{C^0})$  non è completo

**OSS**

$(C^0([a, b]), d_{C^0})$  è completo  
 $(C^k([a, b]), d_{C^k})$  è completo

**OSS**

$(X, d)$  metrico  $\{x_k\} \subseteq X$  t.c.  $x_k \xrightarrow{d} x_0 \in \overline{Y}$  chiusura  
 $Y \subseteq X$ ,  $Y$  chiuso  $\Leftrightarrow$  contiene i limiti di tutte le succ. convergenti di  $Y$

**OSS**

$(X, d)$  completo,  $B$  chiuso  $\subseteq X \Rightarrow (B, d)$  sp. metrico completo.

**Definizione 6.3.**

$(X, dx), (Y, dy)$  metrici  $f : X \rightarrow Y$

- $f$  è continua in  $x_0$  se  $\forall \{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{\text{in } d(x, dx)} x_0$  si ha  $\{f(x_n)\} \subseteq Y$  converge a  $f(x_0)$  in  $(Y, dy)$
- $f$  è lipschitziana se  $\exists L > 0$  t.c.  $dy(f(x), f(y)) \leq L dx(x, y) \quad \forall x, y \in X$
- $f$  si dice contrazione se lipschitziana con  $L < 1$

## OSS

*Dimostrazione.*  $[f \text{ lip.}] \Rightarrow f \text{ cont.}$

sia  $x_0 \in X$  considero  $\{X_n\} \subseteq X$  t.c.  $x_n \rightarrow x_0$  in  $(X, d)$  cioè  $d(x_n, x_0) \xrightarrow{\text{in } \mathbb{R}} 0$   
 considero  $0 \leq dy(f(x_n), f(x_0)) \leq Ldx(x_n, x_0) \xrightarrow{\rightarrow 0} dy(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0$  cioè  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  in  $(y, dy)$

□

### Teorema 6.2.

delle CONTRAZIONI (o di BANACH-CACIPPOLI)

$(X, d)$  sp. metrico completo  $f : X \rightarrow X$  contrazione.

Allora:  $\exists! \bar{x} \in X$  punto fisso t.c.  $f(\bar{x}) = \bar{x}$

*Dimostrazione.* Scelgo  $x_0 \in X$  costruisco  $\{x_k\} \subseteq X$

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1)$$

$$x_3 = f(x_2)$$

.

.

.

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

- $\{x_k\}$  è succ. di Cauchy in  $x, d$  infatti:

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq Ld(x_k, x_{k-1})$$

ma:  $x_{k+1} = f(x_k)$ ,  $x_k = f(x_{k-1})$  e  $x_{k-1} = f(x_{k-2})$   
 quindi

$$Ld(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq L^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq L^3 d(x_{k-2}, x_{k-3}) \leq L^k d(x_1, x_0) = L^k d(x_0, f(x_0))$$

considero  $m > n$  ( $m = n + p$ )

$$\begin{aligned} (x_m, x_n) = d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \boxed{*} \\ \boxed{*} &\leq d(x_0, f(x_0)) [L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \dots + L^{n+1} + L^n] = \\ d(x_0, f(x_0)) \left( \frac{L^n - L^{n+p}}{1 - L} \right) &= d(x_0, f(x_0)) L^n \frac{1 - L^p}{1 - L} (< \frac{1}{1 - L}) \\ &< d(x_0, f(x_0)) \text{ (fix.)} \frac{L^n}{1 - L} \xrightarrow{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \text{ poichè } L \in (0, 1) \\ \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists N : \underline{\text{se}} \ m, n > N \underline{\text{allora}} \ d(x_m, x_n) &< \epsilon \text{ cioè } \{x_k\} \text{ di Cauchy in } (x, d) \end{aligned}$$

- $\exists \bar{x} \in X$  t.c.  $x : k \rightarrow \bar{x}$  in  $(X, d)$   
 poichè  $(x, d)$  p sp. metrico completo  
 $\{x_k\}$  è di Cauchy

- $\bar{x}$  è punto fisso cioè  $f(\bar{x}) = \bar{x}$
- infatti:  $f$  è continua  $\Rightarrow f$  è continua in  $(x, d)$

$$\begin{aligned} \text{Per l'unicità del limite } \bar{x} &= f(\bar{x}) \\ f(x_k) \rightarrow f(\bar{x}) \text{ in } (X, d) &\underset{\text{per def. di } \{x_k\}}{=} x_{k+1} \text{ in } (X, d) \end{aligned}$$

- il punto fisso è unico infatti:

$$\text{supp. } \exists \bar{x}, \bar{y} : f(\bar{x}) = \bar{x}, f(\bar{y}) = \bar{y} \text{ con } L \in (0, 1)$$

se  $d(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$   
allora  $d(\bar{x}, \bar{y}) < d(\bar{x}, \bar{y})$  assurdo  
 $\Rightarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  cioè  $\bar{x} = \bar{y}$

□

Esempio 6.2.

$$x = \mathbb{R}^2 d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y, 0 \text{ sono collineari in } \mathbb{R}^2 \\ |x| + |y| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$d$  è una metrica

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, d(x, y) \geq 0 \quad m = 0 \Leftrightarrow$$

- se  $x, y, 0$  sono collineari

$$\begin{aligned} & |x - y| = 0 \\ & y = kx \quad \exists k \in \mathbb{R} \Rightarrow |x - y| = |x - kx| = |1 - k||x| \\ & \Rightarrow \text{vale } |x - y| = 0 \Leftrightarrow |1 - k||x| = 0 \Leftrightarrow k = 1 \text{ cioè } y \equiv x \end{aligned}$$

- se  $x, y, 0$  non sono collineari

$$d(x, y) = |x| + |y| = 0 \Leftrightarrow |x| = |y| = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

- devo dim. che  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$  si ha  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 
  - [1]  $0, x, y$  collineari  
 $d(x, y) = |x - y|$   
sia  $z \in \mathbb{R}^2$  se  $[x, y, z, 0$  collineari]  
allora  $d(x, z) + d(z, y) = |x - z| + |z - y|$   
voglio dim.

$$d_\epsilon(x, y) = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| = d_\epsilon(x, z) + d_\epsilon(z, y)$$

vero perchè vale la dis. triang.

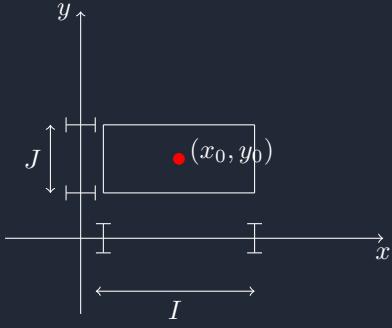
[2] non collineari con  $0, x, y$   
 $d(x, z) + d(z, y) = |x| + |z| + |z| + |y|$   
voglio dim.

$$|x - y| \leq |x| + 2|z| + |y|$$

uso la dis. triang. per  $d_\epsilon$

## 7 2/10/25

richiamo del th. di  $\exists!$  di cauchy (locale)  
si ricorda:



$$\begin{aligned} & \exists a, b \text{ t.c.} \\ & I = (x_0 - a, x_0 + a) \\ & J = (y_0 - b, y_0 + b) \end{aligned}$$

considero inoltre

*Dimostrazione.* (della formulazione integrale)

$$B = \{u(x) \in C^0(I_\delta) \text{ t.c. } \|u - y_0\|_{C^0(I_\delta)} \leq b\}$$

### OSS

$B = \subseteq C^0(I_\delta)$  è una palla chiusa  
 $(B, \|\cdot\|_{C^0})$  è sp. di BANACH poichè sottoinsieme completo di  $(C^0(I_\delta), \|\cdot\|_{C^0})$  che è completo

$$F : B \rightarrow C^0(I_\delta) \quad F(u) = z \text{ con } z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \quad \forall x \in I_\delta$$

### OSS

Immagine di  $F \subseteq B$

Infatti se  $u \in B$  allora  $F(u) \in C^0(I_\delta)$  inoltre:

$$|F(u) - y_0| = |z(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t))| dt \right| \leq$$

### OSS

$\forall x \in I_\delta, t \in [x_0, x] \subseteq I$

$u(t) \in J$  poichè  $u \in B$  e quindi  $\|u - y_0\|_{C^0} \leq b$  cioè  $|u(x) - y_0| \leq b \quad \forall x \in I_\delta$   
 quindi:

$$(t, u(t)) \in I \times J \Rightarrow |f(t, u(t))| \leq M$$

$$\leq M|x_0 - x|\delta \leq b \Rightarrow \max_{x \in I_\delta} |F(u) - y_0| \leq b$$

Cioè

$$\|F(u) - y_0\|_{C^0} \leq b \Rightarrow F(u) \subseteq B$$

### OSS

$\boxed{F \text{ è una contrazione}}$  rispetto  $\|\cdot\|_{C^0(I_\delta)}$

$$\begin{aligned} |F(y_1) - F(y_2)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t_1 y_1(t)) - f(t_1 y_2(t))| dt \right| \leq L|x - x_0| \|y_1 - y_2\|_{C^0(I_\delta)} \leq L\delta \|y_1 - y_2\|_{C^0(I_\delta)} \\ \|F(y_1) - F(y_2)\|_{C^0(I_\delta)} &= \max_{x \in I_\delta} |F(y_1) - F(y_2)| \leq \frac{L\delta}{L\delta < 1} \|y_1 - y_2\|_{C^0(I_\delta)} \\ &\Rightarrow F \text{ è una contrazione} \end{aligned}$$

## OSS

$$\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$$

$F : B \rightarrow B, (B, \|\cdot\|_{C^0(I_\delta)})$   
completo  
 F contrazione rispetto a  $\|\cdot\|_{C^0(I_\delta)} \Rightarrow$  (teh. contraz.)  
 $\Rightarrow \exists ! t = y(x) : F(y) = y$  cioè  
 $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad \forall x \in I_\delta$   
 cioè  $y$  risolve Cauchy integrale

□

### 7.1 Funzioni in 2 variabili

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$  aperto se  $\forall (x_0, y_0) \in A \exists R > 0$  t.c.  
 $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, 1) - (x_0, y_0)\| < R\} \subseteq A$
- $E \subseteq \mathbb{R}^2$   
 $\overline{E} =$  il più piccolo chiuso  $\supseteq E$  (chiusura di  $E$ )  
 $\overset{\circ}{E} =$  il più grande aperto  $\subseteq E$  (interno)
- $D$  è un dominio se  $D = \overline{A}$  con aperto  $D = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$

- Grafico di  $f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$
- linee di livello  $U_t = \{(x, y) \in D \text{ t.c. } f(x, y) = t\}$   
OSS.  $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} U_t = D$   
OSS. Se  $f$  ammette min/max allora:  
 $\max\{t : U_t \neq \emptyset\} = \max_{(x, y) \in D} f(x, y) \quad \min\{t : U_t \neq \emptyset\} = \min_{(x, y) \in D} f(x, y)$
- dominio naturale

#### Esempio 7.1.

Prendiamo la seguente funzione  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

- Determinare il  $D$  naturale (il dom naturale è il dominio più grande in cui la funzione è definita)
- Descrivere le linee di livello
- Trovare min/max di  $f$  in  $\mathbb{R}^2$        $\mathbb{Q}\{|x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$

Punto i)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

Punto ii)  $f(x, y) = t \Leftrightarrow \boxed{(x, y) \in D} \Leftrightarrow \ln(1 - x^2 - y^2) = t \Leftrightarrow (x, y) \in D$   
 $1 - x^2 - y^2 = e^t \quad \forall t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y) \in D \\ x^2 + y^2 = 1 - e^t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

OSS.

- se  $t > 0$  cioè  $e^t > 1 \quad U_t = 0$
- se  $t = 0 \quad U_t = \{ (0, 0) \}$
- se  $t < 0 \quad U_t = \text{circ. di centro } (0, 0) \text{ e raggio } R = \sqrt{1 - e^t}$

ovvero  $\lim_{t \rightarrow -\infty} (U_t)$

## 7.2 limiti di funzioni in 2 variabili

prendiamo una funzione  $f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$   
 $(x_0, y_0) \in \overline{D}$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

Significa che:

$$||(x, y) - (x_0, y_0)|| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x, y), L| \rightarrow 0$$

Cioè

$$\begin{aligned} \forall \{\underline{v}\} \subseteq \mathbb{R}^2 : & \underset{\underline{v}_n \neq P_0}{\underline{v}_n \rightarrow P_0 = (x_0, y_0)} \Rightarrow f(\underline{v}_n) \rightarrow L \\ & f(\underline{v}_n) = f((v_n)_1, (v_n)_2) \quad \underline{v}_n = ((v_n)_1, (v_n)_2) \\ \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } & (x, y) \in B_\delta^{x_0, y_0} / \{x, y\} \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{aligned}$$

### Definizione 7.1.

$(x_0, y_0) \in D$  continua in  $e_0 \equiv (x_0, y_0)$  se  
 $\forall \{\underline{v}_n\} \subseteq D : \underline{v}_n \rightarrow P_0$  si ha  $f(\underline{v}_n) \rightarrow f(P_0)$   
Cioè

$$\begin{aligned} ||(x, y) - (x_0, y_0)|| \rightarrow 0 \Rightarrow & |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \rightarrow 0 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = & f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

### Teorema 7.1.

$K$  compatto  $\subseteq \mathbb{R}^2, f : K \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^0(K)$

- (Weierstrass)  $f$  assume min/max in  $K$
- (Cantor)  $f$  è definita continua in  $K$  Cioè

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c.} \\ \text{se } x_1, x_2 \in K \quad & ||x_1, x_2|| < \delta \text{ allora } |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \end{aligned}$$

### Teorema 7.2.

Valori intermedi

$D$  dominio convesso e limitato  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

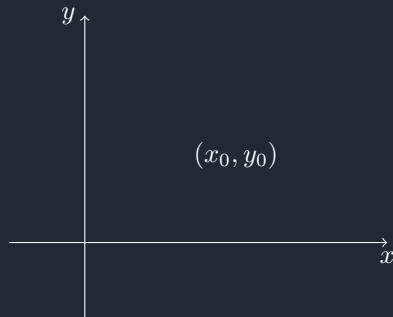
$f \in C^0(D) \Rightarrow f$  assume tutti i valori compresi tra il min e il max

### OSS.

$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L \Leftrightarrow$  Il limite coincide ( $= L$ ) qualsiasi sia il percorso di  $(x, 1) \rightarrow (x_0, y_0)$

quindi se  $\exists$  due percorsi  $(x(t), y(t))$  t.c.  $x(t) \rightarrow x_0$  e  $y(t) \rightarrow y_0$   
t.c.  $f(x(t), y(t)) \rightarrow$  a due valori  $\neq$ , allora  $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$

## 8.1 Introduzione più approfondita allo studio di funzioni in più variabili



## 8.2 Derivate parziali

Per studiare queste funzioni le derivate normali non ci bastano più e dobbiamo introdurre ciò che si chiama derivata parziale:

$$Ap \subseteq \mathbb{R}^2, f : A \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A \quad z = f(x, y)$$

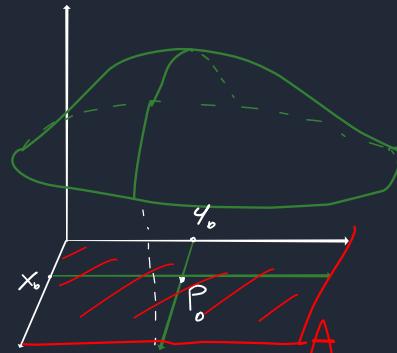
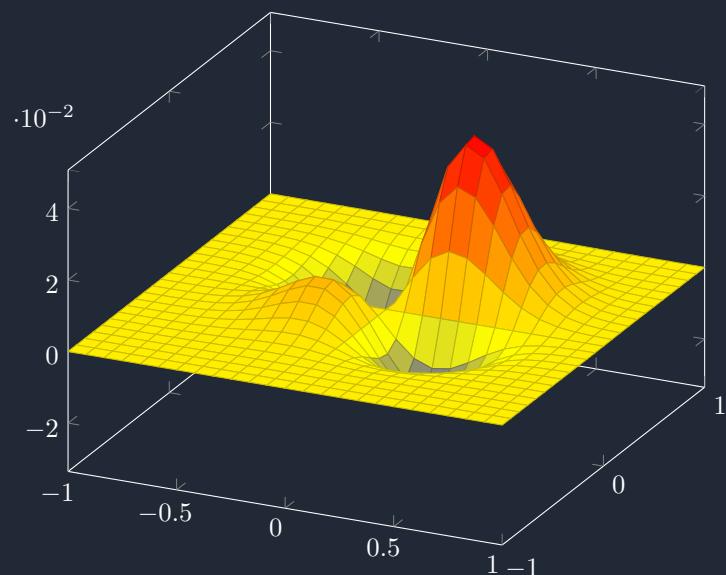


Figura 2: Grafico di  $f$  generica in due variabili

Esempio grafico di una funzione in due variabili:  $xye^{x+2y-9x^2-9y^2}$



### Definizione 8.1.

Derivata parziale rispetto a  $x$ :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \quad \boxed{**}$$

Derivata parziale rispetto a  $y$ :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + k) - u(x_0)}{k}$$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + k, y_0) - u(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \quad \boxed{*}$$

### Definizione 8.2.

Se  $\exists \boxed{*} e \boxed{**}$ , finite,  $f$  è detta derivabile e:

$$\exists Df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

in generale  $D$  indica il simbolo di derivata rispetto sia ad  $x$  che  $y$

Oss. 8.1. • Le funzioni elementari tra loro sono derivabili in  $D$

- Valgono le regole di derivazione e l'algebra delle derivate

### Esempio 8.1.

$$f(x, y) = xe^{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{he^{h^2} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k, 0) - f(0, 0)}{k} = 0$$

$f$  è derivabile in  $(0, 0)$  e  $Df(0, 0) = (1, 0)$

Cosa succede in  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  generico?

### Oss. 8.2.

$f$  è composizione e prodotto di funzioni derivabili in  $\mathbb{R}^2$  quindi posso applicare le regole di derivazione:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial x}\theta + g \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ 1e^{(x^2+y^2)} + x(2x)e^{(x^2+y^2)} &= e^{(x^2+y^2)}(1 + 2x^2) \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1\right) \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}\theta + g \frac{\partial \theta}{\partial y} = x \frac{\partial}{\partial y}(e^{(x^2+y^2)}) = x2ye^{x^2+y^2} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}(e^{(x^2+y^2)}) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}\right)$$

### Esempio 8.2.

$$f(x, y) = \sin(x, y)$$

$f$  derivabile  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} y \cos(x, y) \\ x \cos(x, y) \end{pmatrix}$$

$$f_x(x, y) = y \cos(x, y)$$

$$f_y(x, y) = x \cos(x, y)$$

$$\begin{aligned} Df \parallel (1, 0) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c.} \\ Df(x, y) &= k(1, 0) \end{aligned}$$

### 8.3 Derivate di ordine successivo

le derivate successive di funzioni in due variabili crescono di numero con la derivazione: avrò due derivate prima e quattro derivate seconde (e così via).

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)\end{aligned}$$

Si intro duce così la matrice HESSIANA

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}$$

**Oss. 8.3.**

$$Tr(D^2 f) = \nabla f \text{ detto laplaciano}$$

**Teorema 8.1** (di Schwarz).

$A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in A, f_A \rightarrow \mathbb{R}$  2 volte derivabile

se  $f_{xy}, f_{yx}$  sono continue in  $x_0, y_0$  allora  $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$

Da cui: se  $f \in C^2(A)$  allora  $D^2 f$  è continua

**Oss. 8.4.**

l'Hp. di continuità NON può essere rimossa

$$\text{Infatti } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ha scritto sta merda dopo aver riempito 2 lavagne di cose che non ho capito perchè si fanno  
( $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ )

$$\exists f_{xy}(0, 0) \quad f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$$

# 9 9/10/25

## 9.1 Differenziabilità

**Definizione 9.1.**

$f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0) \in A$  se

- è derivabile in  $(x_0, y_0)$

$$\bullet \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \langle Df(x_0, y_0); (h, k) \rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

cioè  $\lim_{\Sigma \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Sigma) - f(x_0) - \langle Df(x_0); \Sigma \rangle}{|\Sigma|} = 0$

cioè  $f(\underline{x}_0 + \underline{\Sigma}) - f(\underline{x}_0) - \langle Df(\underline{x}_0); \underline{\Sigma} \rangle \underset{\underline{x}=(x,y)}{\underset{\text{per } \underline{\Sigma} \rightarrow 0}{=}} o(|\underline{\Sigma}|)$

cioè 
$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left\langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle + o\left(\left\| \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| \right) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

Per vederlo con  $x_0$  e  $y_0$ :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - P(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Dove  $P(x, y)$  è il polinomio di Taylor in due variabili e il denominatore è la norma tra le coordinate  $(x_0, y_0)$  che è dove centro il mio polinomio e  $(x, y)$  generici.

Posso espandere  $P(x, y)$  e scrivere:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Dove  $a$  e  $b$  sono:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ b &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali di  $x$  e  $y$  calcolate in  $(x_0, y_0)$ .

Se ora ci riconduciamo alla forma con  $h$  e  $k$  si ha:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bh}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Da qui si può costruire il differenziale primo:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

**Oss. 9.1.**

$f$  diff. in  $(x_0, y_0) \Rightarrow f$  continua in  $(x_0, y_0)$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x_0, y_0) - Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o\left(\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right) = f(x_0, y_0) \\ |Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}| &\leq |Df(x_0, y_0)| \cdot \left\| Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\| \end{aligned}$$

□

**Oss. 9.2.**

$f$  diff.  $\Rightarrow f$  si può approssimare (al 1° ordine) ad una funzione affine (un piano) vicino ad  $(x_0, y_0)$

$$\Pi_{tg} : z = f(x_0, y_0) + \left\langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

definisce il piano  $tg$  (tangente) al grafico di  $z = f(x, y)$  in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

## 9.2 equazioni cartesiane e parametriche

sia  $r_{y_0}$  la retta  $tg$  di grafico della sezione trasversale  $u(x) = f(x, y_0)$  in  $(x_0, y_0)$   
e sia  $r_{x_0}$  la retta  $tg$  di grafico della sezione trasversale  $v(y) = f(x_0, y)$  in  $(x_0, y_0)$

Si possono scrivere in forma sia cartesiana sia parametrica

$$\begin{aligned} r_{y_0} \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ r_{x_0} \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} s \quad \forall s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Da qui possiamo trovare il piano:

$$\begin{aligned} \Pi : \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} s \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \\ z &= \langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle + \frac{z_0}{\|Df(x_0, y_0)\|} \end{aligned}$$

i vettori direzione sono linearmente indipendenti e generano un piano uguale al piano tangenziale a:

$$\Pi_{P_0} : z = f(x, y) \text{ in } (x_0, y_0)$$

Dove  $P_0 = (x_0, y_0)$  ed è il punto in cui è calcolato il piano tangente Piano tangenziale:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle + o\left(\left\|\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\right\|\right) \quad \text{per } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

**Teorema 9.1** (del differenziale).

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

sia  $A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$  e  $f$  derivabile in  $A$

se  $f_x, f_y \in C^0(|x_0, y_0|)$

allora  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$

**Corollario 9.1.1.**

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$  differenziabile in  $A$  ( $\Rightarrow f \in C^0(A)$ )

*Dimostrazione.*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0 + y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h f_x(x_1, y_0 + k) + k f_y(x_0, y_1)$$

Per lagrange :

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in (x_0, x_0 + h) &= u'(x_1)h = f_x(x_1, y_0 + k)h \\ \exists y_1 \in (y_0, y_0 + k) &= v'(y_1)k = f_y(x_0, y_1)h \end{aligned}$$

considero

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x'_0, y_0) - \langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \\ &\left| \frac{h f_x(x_1, y_0) + k f_y(x_0, y_1) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \\ &\left| \frac{h(f_x(x_0, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) + k(f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0))}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \\ &\frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| + \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} |f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)| \leq \\ &|f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x_0, y_1) - f_y(x_0, y_0)| \end{aligned}$$

Passo al limite:  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)}$  Allora:

$$\begin{aligned} x_1 &\in (x_0, x_0 + h) \rightarrow x_0 \\ y_1 &\in (y_0, y_0 + h) \rightarrow y_0 \end{aligned}$$

da cui:

$$\lim_{h,k \rightarrow (0,0)} f_x(x_1, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) \quad \lim_{h,k \rightarrow (0,0)} f_y(x_0, y_1) = f_y(x_0, y_0)$$

Poichè per hp.  $f_x, f_y$  sono continue in  $(x_0, y_0)$   
si ottiene:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x_0 + \Sigma) - \langle Df(x_0); \Sigma \rangle}{|\Sigma|} \right| &\leq [\star] = \overbrace{|f_x(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)|} + \overbrace{|f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)|} \\ [\star] &\left\{ \lim_{\Sigma \rightarrow 0} |f_x(x_1, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)| + |f_y(x_0, y_1) - f_y(x_0, y_0)| \right\} \end{aligned}$$

□

### Definizione 9.2.

di DIFFERENZIALE

$f$  differenziabile

$df = \langle Df; dx \rangle$

$$df = \langle Df(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \rangle$$

### 9.3 derivate direzionali

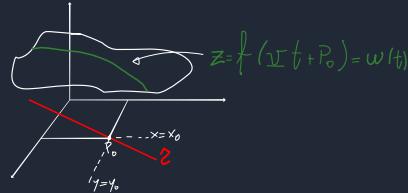


Figura 3:

la linea verde è:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= vt + P_0 \begin{pmatrix} v_1 t + x_0 \\ v_2 t + y_0 \end{pmatrix} \\ \forall t \in \mathbb{R} \\ |\underline{v}| &= 1 \quad \underline{v} = (v_1, v_2) \end{aligned}$$

$$\underline{v} \in \$' = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad \exists \theta \in [0, 2\pi]$$

$\$'$  è dunque lo spazio di vettori unitari che vivono nel piano  $x, y$  e "centrati nell'origine", in pratica tutte le direzioni possibili lungo la quale è possibile considerare una derivata direzionale.

### Definizione 9.3.

Derivata direzionale di  $f$  lungo la direzione  $\underline{v}$  il cui modulo è  $|\underline{v}| = 1$  in  $P_0$ , la derivata di  $u(t)$  in  $t = 0$  cioè:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h) - \omega(0)}{h} = \\ &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{v}h + P_0) - f(P_0)}{h} \end{aligned}$$

**Definizione 9.4.**

Def chiara derivata direzionale: Prendiamo una funzione che va da un insieme aperto di  $\mathbb{R}^2$  ( $\Omega$ )

$$f(x, y) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

E un punto di questo insieme  $\Omega$ :

$$p = (x_0, y_0) \in \Omega$$

Prendiamo ora un vettore generico e otteniamo da questo un versore dividendo per la sua norma:

$$\begin{aligned} \underline{v} &= (a, b) && \text{Una norma di un vettore è: } \|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \underline{u} &= \left( \frac{a}{\|\underline{v}\|}, \frac{b}{\|\underline{v}\|} \right) && \underline{u} = (a_u, b_u) \end{aligned}$$

Si definisce quindi la derivata direzionale come:

$$f'_{\underline{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + a_u h, y_0 + b_u h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Oss. 9.3.

$$\begin{aligned} \underline{v} &= (1, 0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = f_x \\ \underline{v} &= (0, 1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = f_y \end{aligned}$$

**Teorema 9.2.**

del Gradiente

sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{x}_0 \in A$

e sia  $f$  differenziabile in  $\underline{x}_0$

allora:

$$\forall \underline{\nu} \in \$' \quad \exists \frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_0)$$

e vale:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_0) = \langle Df(\underline{x}_0); \underline{\nu} \rangle$$

Quest'ultima è detta formula del gradiente

Dimostrazione. (e corollario th. gradiente)

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_0) = \langle |Df(\underline{x}_0)|; \underline{\nu} \rangle \leq \frac{|Df(\underline{x}_0)| \cdot |\underline{\nu}|}{\|\underline{\nu}\|}$$

In particolare se verso concorde:

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_0) = |Df(\underline{x}_0)|$$

e verso discorde

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}(\underline{x}_0) = -|Df(\underline{x}_0)|$$

□

Dimostrazione. (Formula del gradiente per  $\frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}}$ )

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{\nu}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{\nu}) - f(\underline{x}_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0) = \langle Df(\underline{x}(0)); \dot{\underline{x}}(0) \rangle = \langle Df(\underline{x}_0); \underline{\nu} \rangle \\ F(t) &= f(\underline{x}_0 + t\underline{\nu}) \quad \text{è funzione composta} \\ \underline{x}(t) &= \underline{x}_0 + t\underline{\nu} \quad \dot{\underline{x}}(t) = \underline{\nu} \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{aligned}$$

□

### Teorema 9.3.

Direzione di massima pendenza sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$   $A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\underline{x}_0 \in A$   
e sia  $f$  differenziabile in  $\underline{x}_0$   
allora:

- $Df(\underline{x}_0)$  indica la direzione (e verso) di massima crescita di  $f$
- $Df(\underline{x}_0)$  indica la direzione (e verso) di minima crescita di  $f$
- $\forall \underline{\nu} \in \$', \underline{\nu} \perp Df(\underline{x}_0) = 0$

## 9.4 funzioni composte

$$I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

### Definizione 9.5.

$\underline{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 (\in \mathbb{R}^2)$  è una curva parametrica

$$\text{se } \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$x, y, z \text{ derivabili in } I \quad \dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, |\dot{\underline{x}}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in I$$

### Definizione 9.6.

Funzione composta

$$F(t) = f(\underline{x}(t)) = f(x(t), y(t))$$

$$f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\underline{x}(t) \text{ curva piana} \quad \underline{x}(t) : I \rightarrow A$$

### Teorema 9.4.

di derivazione delle funzioni composte  $I = (a, b)$

$$\underline{x}(t) : I \rightarrow A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2, \underline{x} \text{ derivabile in } t_0, f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad \in I$$

$f$  differenziabile in  $\underline{x}(t_0) = (x_0, y_0)$

Allora  $F(t) = f(\underline{x}(t)) = f(x(t), y(t))$  è derivabile in  $t_o \in I$  e  $F'(t_o) = \langle Df(\underline{x}(t_o)); \dot{\underline{x}}(t_0) \rangle$

Dimostrazione.

chiamiamo  $t = t_0 \in I$

- $f$  differenziabile  $\Rightarrow f(y) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}); \underline{y} - \underline{x} \rangle + o(|\underline{y} - \underline{x}|)$  per  $\underline{y} \rightarrow \underline{x}$   
sia  $x = \underline{x}(t)$   $\underline{y} = \underline{x}(t+h)$ ,  $t+h \in I$   

$$f(\underline{x}(t+h)) - f(\underline{x}(t)) = \langle Df(\underline{x}(t)); \underline{x}(t+h) - \underline{x}(t) \rangle + o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|) \quad \text{per } h \rightarrow 0 \quad [\ast]$$

$$\bullet \quad \boxed{\frac{F(t+h) - F(t)}{h}} \stackrel{[\ast]}{=} \boxed{\frac{f(\underline{x}(t+h)) - f(\underline{x}(t))}{h}} = \boxed{\frac{\langle Df(\underline{x}(t)); \underline{x}(t+h) \rangle}{h}} \underset{\boxed{\text{I}}}{+} \boxed{\frac{o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|)}{h}} \underset{\boxed{\text{II}}}{}$$

• passo a  $\lim_{h \rightarrow 0}$  Voglio dimostrare che  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} [\ast] = 0$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} \boxed{\text{II}} = 0$ ,  $\boxed{\text{I}} = \langle Df(\underline{x}(t)); \dot{\underline{x}}(t) \rangle$

$$\begin{aligned} & \bullet \boxed{\text{I}} \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle Df(\underline{x}(t)); \frac{\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)}{h} \right\rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f_x \left[ \frac{(\underline{x}(t))(x(t+h) - x(t))}{h} \right] \underset{\rightarrow \dot{x}(t)}{\longrightarrow} + f_y(\underline{x}(t)) \left[ \frac{(y(t+h) - y(t))}{h} \right] \underset{\rightarrow \dot{y}(t)}{\longrightarrow} \\ &= f_x(\underline{x}(t)) \dot{x}(t) + f_y(\underline{x}(t)) \dot{y}(t) \\ &= \langle Df(\underline{x}(t)); \dot{\underline{x}}(t) \rangle \end{aligned}$$

$$\bullet \boxed{\text{II}} \lim_{h \rightarrow 0} \left| \boxed{\text{II}} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{o(|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|)}{h} \right| \underbrace{\frac{|\underline{x}(t+h) - \underline{x}(t)|}{|h|}}_{\lim \exists \text{ finito per } [\ast]} = 0$$

$$[\ast]: \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{\underbrace{\frac{(x(t+h) - x(t))^2}{h^2}}_{(\frac{x(t+h) - x(t)}{h})^2} + \underbrace{\frac{(y(t+h) - y(t))^2}{h^2}}_{\rightarrow (\dot{y}(t))^2}} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} = |\dot{\underline{x}}(t)|$$

•di conseguenza:  $\Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \langle Df(\underline{x}(t)) \rangle$

□

## 10 14/10/25

### 10.1 formula di Taylor

(in più variabili)  $A_{ap} \in \mathbb{R}^2 f : A \rightarrow \mathbb{R}$   
 $\underline{x} \in A \quad [\underline{x}, \underline{y}]$  segmento  $\subseteq A \quad \underline{x}(t) = \underline{x} + t\underline{h}, t \in [0, 1]$   
 $\underline{y} \in A, \quad \underline{y} = \underline{x} + \underline{h} \quad \underline{h} = (h_1, h_2) \neq 0$

**FORMULA DI TAYLOR** (I° ordine con resto di Peano)

$$f \in C^1(A) f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}), \underline{h} \rangle + o(|\underline{x}|)$$

I° ordine con resto di Lagrange

$$f \in C^1(A) \quad \exists \theta \in (0, 1) \text{ t.c. } f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x} + \theta \underline{h}); \underline{h} \rangle$$

**Oss. 10.1.**

$$\theta = (\underline{x}, \underline{h})$$

*Dimostrazione.* (resto di lagrange)

$$\begin{aligned} F(t) &= f(\underline{x} + t\underline{h}) = f(x + th_1; y + th_2) \\ F &\in C^1((0, 1)) \quad F'(t) = \langle Df(\underline{x} + t\underline{h}); \underline{h} \rangle \\ \text{Th. di Lagrange a } F &\Rightarrow \exists \theta \in (0, 1) : F(1) = F(0) + F'(\theta)(1 - 0) \\ \text{cioè: } f(\underline{x} + \underline{h}) &= f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x} + \theta \underline{h}); \underline{h} \rangle \end{aligned}$$

□

**Teorema 10.1.**

**FORMULA DI Taylor** (II° ordine con resto di lagrange)

$f \in C^2(A)$  allora  $\exists \theta \in (0, 1)$  (**OSS.**  $\theta = \theta(\underline{x}, \underline{h})$ ) t.c.

$$F(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x} + \theta \underline{h}); \underline{h} \rangle$$

*Dimostrazione.*

$$F(t) = f(\underline{x} + \underline{h}) \in C^2(0, 1)$$

Applico Taylor a:  $F$  in  $t = 1 \quad \exists \theta \in (0, 1)$  t.c.

$$\begin{aligned} F(1) &= F(0) + F'(0)1 + \frac{1}{2}F''(\theta)1^2 \\ f(\underline{x} + \underline{h}) &= f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}); \underline{h} \rangle + \frac{1}{2}F''(\theta) \\ &\stackrel{*}{=} f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}); \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2f(\underline{x} + \theta \underline{h})\underline{h}; \underline{h} \rangle \end{aligned}$$

devo Calcolare  $F''(t) = (F'(t))' = (f_x(\underline{x} + t\underline{h})h_1 + f_y(\underline{x} + t\underline{h})h_2)' = \langle Dg(\underline{x}(t)); \dot{\underline{x}}(t) \rangle$

$$D(f_x) = \begin{pmatrix} f_{xx} \\ f_{xy} \end{pmatrix}$$

$$D(f_y) = \begin{pmatrix} f_{yx} \\ f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{xy} \\ f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Dg &= \begin{pmatrix} f_{xx}h_1 + f_{xy}h_2 \\ f_{xy}h_1 + f_{yy}h_2 \end{pmatrix} = D(f_x)h_1 + D(f_y)h_2 \underset{\text{calcolato in } \underline{x} + t\underline{h}}{=} (f_{xx}h_1 + f_{xy}h_2)h_1 + (f_{xy}h_1 + f_{yy}h_2)h_2 \\ &= f_{xx}h_1^2 + 2f_{xy}h_1h_2 + f_{yy}h_2^2 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle D^2 f(\underline{x} + t\underline{h})\underline{h}; \underline{h} \rangle \quad \forall t \in (0, 1) \end{aligned}$$

□

### Teorema 10.2.

(II° ordine con resto di Peano)

$$f \in C^2(A) \quad f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + \langle Df(\underline{x}); \underline{h} \rangle + \boxed{\frac{1}{2} \langle D^2 f(\underline{x})\underline{h}; \underline{h} \rangle} + |\underline{h}|^2$$

*Dimostrazione.* Dalla formula con il resto di Lagrange  
basta provare che...

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{\langle D^2 f(\underline{x} + \theta \underline{h})\underline{h}; \underline{h} \rangle - \langle D^2 f(\underline{x})\underline{h}; \underline{h} \rangle}{|\underline{h}|^2} = 0$$

$$\boxed{\left| \langle D^2 f(\underline{x} + \theta \underline{h})[\underline{h}]; [\underline{h}] \rangle - \langle D^2 f(\underline{x})[\underline{h}]; [\underline{h}] \rangle \right| \underset{|h|^2}{\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq}} \langle A[\underline{v}]; \underline{w} \rangle - \langle B[\underline{v}]; \underline{w} \rangle = \langle (A - B)[\underline{v}]; \underline{w} \rangle}$$

$$\boxed{[A\underline{v}] \leq |A| |\underline{v}|} \quad \text{con } |A| \text{ norma euclidea di } \mathbb{R}^{n \times m} = \sqrt{\sum_i^n \sum_j^m a_{ij}^2}$$

$$\boxed{*}: \text{poichè } D^2 f \in C^0 \text{ e } \underline{x} + \theta \underline{h} \rightarrow \underline{x}$$

□

### Proposizione 10.1.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) \underset{\text{Piano tangente}}{\langle Df(\underline{x}_0; (\underline{x} - \underline{x}_0)) \rangle} + \frac{1}{2} \underset{\text{termine II° ordine}}{\langle D^2 f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0); \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle} + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|^2)$$

Se  $D^2 f(\underline{x}_0)$  è definita  $> 0$  allora il termine di II° ordine più il resto  $> 0$  **localmente**  $\Rightarrow f(x) >$  Piano tangente localmente vicino a  $x_0$

Se  $D^2 f(\underline{x}_0)$  è definita  $< 0$  allora il termine di II° ordine più il resto  $< 0$  **localmente**  $\Rightarrow f(x) <$  Piano tangente localmente vicino a  $x_0$

se è indefinita  $\exists$  direzione  $\underline{x} - \underline{x}_0$  per le quali  $f(x) <$  piano tangente e altre per cui  $f <$  piano tangente

### Esempio 10.1.

Prendiamo  $f(x, y) = \sin(2x + y^2)$   $P_0 \equiv (\frac{\pi}{3}, 0)$   $z_0 = f(P_0) = \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$   
differenziabile in  $\mathbb{R}^2$

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x + y^2) \\ 2y\cos(2x + y^2) \end{pmatrix}$$

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_{tgin(P_0, z_0)} : z - z_0 = \langle Df(P_0); \underline{x} - P_0 \rangle \Rightarrow z - \frac{\sqrt{3}}{2} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x - \frac{\pi}{3} \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow z = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

... foto

**Proposizione 10.2.**

$$DetA = \lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_i \text{ concordi}$$

$$TrA = \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \Rightarrow \lambda_i < 0$$

$$TrA = \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0$$

# 11 15/10/25

Introduzione allo studio di funzioni in due variabili

## 11.1 l'ottimizzazione

Cerchiamo il massimo di  $f(x, y)$  quando  $(x, y) \in A$

Se  $A$  è un insieme aperto, (quindi ogni punto è interno ad  $A$ ) allora si parla di massimi liberi.

Se  $A$  NON è aperto, ad es. se  $A$  è una curva o una superficie, si parla di massimi vincolati.

### Esempio 11.1.

Siano  $P_1, P_2, P_3$  punti del piano, si vuole trovare il punto del piano che rende minima la somma delle distanze dai tre punti.



$$A = \mathbb{R}^2 f(x, y) = \|(x, y) - P_1\| + \|(x, y) - P_2\| + \|(x, y) - P_3\|$$

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= xyz \\ S(x, y, z) &= 2xy + 2xz + 2yz \end{aligned}$$

Trovare il valore  $(x, y, z)$  nel 1° ottante di  $\mathbb{R}^3$  soggetti al vincolo:

$$2xy + 2yz + 2xz = 1 \quad (\text{ad esempio})$$

Mi serve definire il maxximo assoluto e relativo:

### Definizione 11.1.

Max assoluto

$f$  definita in  $A \rightarrow \mathbb{R}$   $(x_0, y_0) \in A$

dico che  $(x_0, y_0)$  è punto di max assoluto per  $f$  in  $A$ , e che  $f(x_0, y_0)$  è massimo assoluto.

### Definizione 11.2.

Max relativo o locale

$f$  definita in  $A \rightarrow \mathbb{R}$   $(x_0, y_0) \in A$

dico che  $(x_0, y_0)$  è punto di max relativo per  $f$  in  $A$ , e che  $f(x_0, y_0)$  è massimo setext:

$\exists$  un intorno  $U$  di  $(x_0, y_0)$  t.c.

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in U$$

In generale ho il problema di:

i) So che esiste?

ii) Come lo trovo?

Per i) posso usare il t. di Weierstrass:

Se  $A$  è chiuso e limitato e se  $f$  è continua in  $A$  allora esiste sia il max assoluto che il min assoluto.

Per usarlo so che certamente  $\exists$  una palla chiusa  $C$  t.c. il punto di minimo non va fuori da  $C$ . QUindi il problema dell'esistenza è fondamentalmente risolto.

## 11.2 trovare il min/max assoluto

Non è altrettanto scontato il punto *ii*), in questo caso cerchiamo delle condizioni analitiche necessarie o sufficienti.

### Proposizione 11.1.

*Condizione necessaria (Teorema di Fermat)*

Se  $(x_0, y_0)$  è di max relativo;  $x_0, y_0 \in_{(int)} A$  e  $f$  è derivabile in  $(x_0, y_0)$  allora  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$

$$\begin{array}{c} y_0 \\ \hline | \\ (x_0, y_0) \\ \hline + \end{array}$$

*Dimostrazione.*

$\varphi_1(x) = f(x, y_0)$   $x_0$  è punto di max relativo per la funzione di 1 variabile  $\varphi_1(x)$  è derivabile in  $x_0$ ,  $x_0$  è interno al dominio di  $\varphi_1 \Rightarrow \varphi'_1(x_0) = 0$

Ma  $\varphi'_1(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Analogamente si dimostra che  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$

□

### Proposizione 11.2.

*Un punto in cui  $\nabla f(x_0, y_0)$  è zero si chiama punto stazionario o punto critico*

### Esempio 11.2.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (0, 0) \text{ è critico e punto di min assoluto}$$

$$f(x, y) = x^2 = y^2 \quad (0, 0) \text{ è critico ma NON è ne di min. ne di max.}$$

Studio la restizione di  $f$  lungo l'asse  $x$ :

$$f(x, 0) = x^2$$

Studio la restizione di  $f$  lungo l'asse  $y$ :

$$f(0, y) = -y^2$$

Questo è un esempio di punto di sella.

### Oss. 11.1.

un punto di min. locale o assoluto può anche essere non critico. Questo può succedere se  $\nabla f$  in quel punto.

### Esempio 11.3.

$$f(x, y) = \|(x, y)\|$$

$(0, 0)$  è min assoluto, Ma  $\nabla f \neq 0$  in  $(0, 0)$

Quindi  $(0, 0)$  non è critico

### Teorema 11.1.

Supponiamo che  $f$  sia  $C^2$  in un intorno del punto critico  $(x_0, y_0)$ .

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + 0 + \frac{1}{2} \left\langle D^2 f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0); (x - x_0, y - y_0) \right\rangle + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|^2)$$

Devo studiare il segno di  $\boxed{*}$ :

se  $A$  è una matrice  $n \times n$  simmetrica,  $h \in \mathbb{R}^n$

$$q(h) = \langle Ah, h \rangle$$

**Proposizione 11.3.**

Richiamo:

q si dice def. positiva se  $q(h) > 0 \quad \forall h \neq 0$

q si dice indefinita se  $\exists h_1, h_2 \neq 0$  t.c.

$$q(h_1), q(h_2) < 0$$

**Teorema 11.2.**

(Condizione necessaria del secondo ordine).

se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è  $C^2$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0, y_0)$  è di minimo relativo ed è interno ad  $A$  allora la forma quadratica con associata la matrice  $h \rightarrow \langle D^2 f(x_0, y_0); h \rangle$  è semidefinita positiva

*Dimostrazione.* Sia  $h \in \mathbb{R}^2, h \neq 0$        $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) \\ t = 0 &\longleftrightarrow (x_0, y_0)\end{aligned}$$



Scelgo dunque un vettore

$$\begin{aligned}\varphi'(0) &= 0 \& \varphi''(0) \geq 0 \\ (\varphi(t))' &= (f(x_0 + th_1, y_0 + th_2))' \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(f(x_0 + th_1, y_0 + th_2))h_1 \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(f(x_0 + th_1, y_0 + th_2))h_2 \\ = (\varphi(t))'' &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_2\right)' \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)\right)'h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)\right)'h_2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_1^2 &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_2h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_2^2\end{aligned}$$

Se la calcolo per  $t = 0$  diventa:

$$\langle D^2 f(x_0, y_0)h; h \rangle$$

□

**Teorema 11.3.**

(condizione sufficiente)

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

sia  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  e

sia  $f C^2$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ .

Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  un punto critico.

Allora:

- i) se  $D^2 f(x_0, y_0)$  è definita positiva  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è punto di min relativo
- ii) se  $D^2 f(x_0, y_0)$  è definita negativa  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è punto di max relativo
- iii) se  $D^2 f(x_0, y_0)$  è indefinita  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  non è ne punto di min ne di max relativo

*Dimostrazione.* punto iii): segue dalla cond. necessaria

□

## 12 16/10/25

(Richiamo)

**Teorema 12.1.**

(condizione sufficiente)

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

sia  $(x_0, y_0)$  interno ad  $A$  e

sia  $fC^2$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ .

Supponiamo che  $(x_0, y_0)$  un punto critico.

Allora:

i) se  $D^2f(x_0, y_0)$  è definita positiva  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è punto di min relativo

ii) se  $D^2f(x_0, y_0)$  è definita negativa  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  è punto di max relativo

iii) se  $D^2f(x_0, y_0)$  è indefinita  $\Rightarrow (x_0, y_0)$  non è ne punto di min ne di max relativo

Dimostrazione. (punto i/ii)

Sia  $h = (h_1, h_2) \neq 0$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0); h \rangle + \frac{1}{2} \langle D^2f(x_0, y_0)h; h \rangle + o(\|h\|^2)$$

$$\frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{\|h\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\langle D^2f(x_0, y_0)h; h \rangle}{\|h\|^2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}$$

$\boxed{*}$

se  $q(h) = \langle Ah; h \rangle$

$$q(ch) = \langle A(ch); ch \rangle = \langle cAh; ch \rangle = c^2 \langle Ah; h \rangle$$

Quindi lo fo per:  $\boxed{*}$ :

$$\left\langle D^2f(x_0, y_0) \frac{h}{\|h\|}; \frac{h}{\|h\|} \right\rangle$$

vett. di  $\|\cdot\|_1$

Prendiamo  $v = (v_1, v_2) \in$  cerchio di centro  $(0, 0)$  e raggio 1. ovvero  $\mathbb{S}^1$   
 $p(v) = \langle D^2f(x_0, y_0)v; v \rangle$

- è una funzione continua su  $\mathbb{S}^1$
- $p(v) > 0 \quad \forall v \in \mathbb{S}^1$
- $\mathbb{S}^1$  è chiuso e limitato
- $\exists$  minimo. se lo chiamo  $m$

Posso dire che  $m > 0$ . Quindi  $\forall v \in \mathbb{S}^1 \quad p(v) \geq m > 0$

$$\frac{1}{2} \left\langle D^2f(x_0, y_0) \frac{h}{\|h\|}; \frac{h}{\|h\|} \right\rangle \geq \frac{1}{2}m$$

Per def. di  $o$  piccolo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} = 0$$

Allora  $\exists \delta > 0$  t.c. se :

$$\frac{-m}{4} < \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} < \frac{m}{4}$$

Tirando le conclusioni :

se  $\|h\| < \delta$  e  $h \neq 0$  allora:

$$\frac{f(x_0 h_1, y_0 + h_2) + f(x_0, y_0)}{\|h\|^2} \geq \frac{1}{2}m - \frac{m}{4} = \frac{m}{4} > 0$$

Quindi  $f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \geq f(x_0, y_0) + \frac{m}{4} \|h\|^2 > f(x_0, y_0)$

□

### Proposizione 12.1.

Sia  $A$  una matrice simmetrica  $n \times n$  e  $h \in \mathbb{R}^n$

Sia  $q(h) = \langle Ah; h \rangle$

### Teorema 12.2.

i)  $q$  è definita positiva  $\Leftrightarrow$  tutti gli autovalori sono  $> 0$

ii)  $q$  è definita negativa  $\Leftrightarrow$  tutti gli autovalori sono  $< 0$

iii)  $q$  è indefinita  $\Leftrightarrow \exists$  un autovalore  $> 0$  ed  $\exists$  un autovalore  $< 0$

### Teorema 12.3

(Condizioni per forme quadratiche per matrici  $3 \times 3$ ).

Sia  $A \in M(3 \times 3, \mathbb{K})$  con

$$A = (a_{1,1} \ a_{1,2} \ a_{1,3} \ a_{1,2} \ a_{2,2} \ a_{2,3} \ a_{1,3} \ a_{2,3} \ a_{3,3})$$

Allora, chiamate  $\det A_1 = a_{1,1}$ ,  $A_2 = \det(a_{1,1} \ a_{1,2} \ a_{1,3} \ a_{2,2})$  e  $A_3 = \det A$  i determinanti delle matrici:

i) Se  $\det A_1, \det A_2, \det A_3 > 0 \Leftrightarrow q$  è definita positiva;

ii) Se  $\det A_1 < 0, \det A_2 > 0, \det A_3 < 0 \Leftrightarrow q$  è definita negativa;

iii) Se  $\det A \neq 0$  e non valgono né i) né ii) allora è indefinita.

## 12.1 Cercare e classificare i punti critici

### Esempio 12.1.

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$$

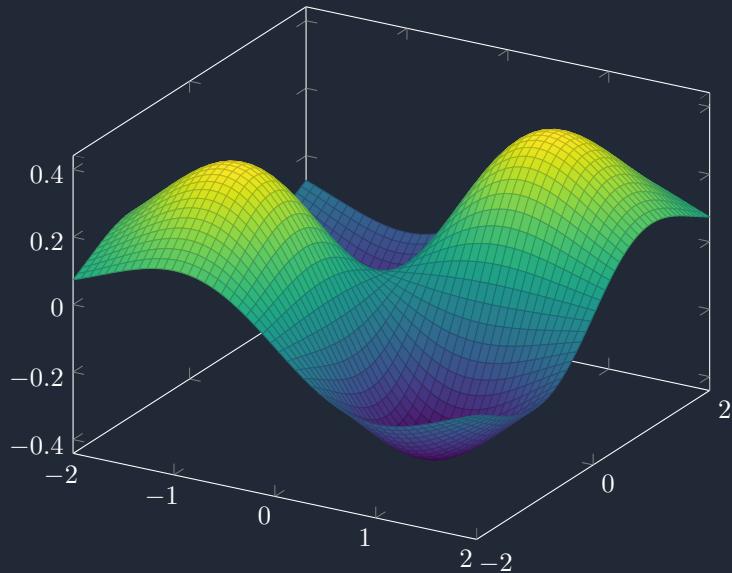
$$\begin{cases} 2xy - 2 = 0 \\ x^2 + 2yz = 0 \\ y^2 + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1 \\ x^2 - y^3 = 0 \\ z = -\frac{y^2}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^{\frac{5}{3}} = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y = 1 \\ z = -\frac{y^2}{2} \Rightarrow z = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad P = (1, 1, -\frac{1}{2})$$

Avrò l'hessiana che è:

$$\begin{aligned} D^2f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ 2x & 2z & 2y \\ 0 & 2y & 2 \end{pmatrix} \\ D^2f(1, 1, -\frac{1}{2}) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \det(2) = 2 > 0 \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= -6 < 0 \\ \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} &= -20 < 0 \end{aligned}$$

Quindi  $P$  è punto di sella

### Esempio 12.2.



$$f(x, y) = xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

- trovare e classificare i punti critici in  $\mathbb{R}^2$
- Esistono max o min assoluti in  $\mathbb{R}^2$ ?

Iniziamo con risolvere il punto 1 che è da procedura

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y(1-x^2)e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x(1-y^2)e^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}\end{aligned}$$

Soluzioni di  $\frac{\partial f}{\partial x}$ :

$$y = 0, x = 0$$

$x^2 = 1$  qui ho due casi:

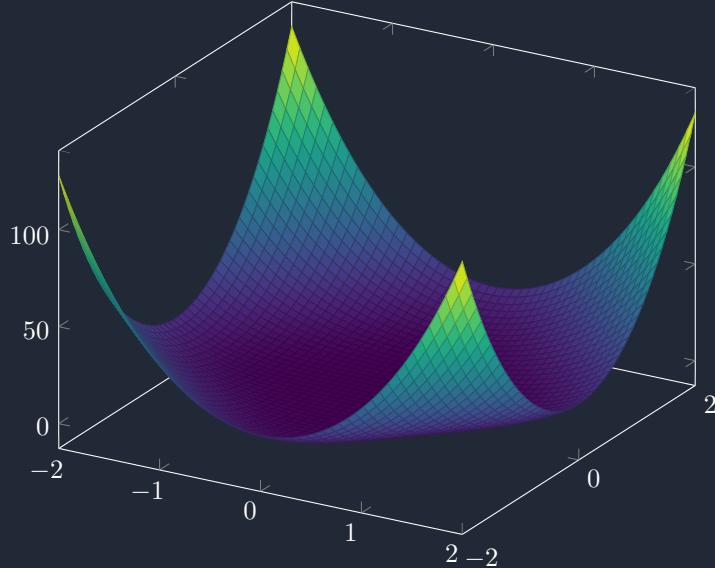
- i)  $x = 1 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$
- ii)  $x = -1 \rightarrow y^2 = -1 \rightarrow y = \pm 1$

Foto il resto...

Punto ii) In generale in questo caso posso pensare che un punto di min assoluto essite poichè ho un esponenziale e se fo il limite che va a infinito l'esponenziale vincerà e siccome ha come argomento il quadrato delle distanze x e y con un segno MENO farà andare il limite a 0. In generale si deve fare il limite all'infinito e se si trova un numero più grande o più piccolo dei min o max relativi, e confrontarli.

Esempi in cui  $D^2 f$  non è ne def positiva, ne def. negativa, ne indefinita in qualcuno dei suoi punti critici.

**Esempio 12.3.**



$$f(x, y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4$$

punti critici... blablabla...

$P = (0, 0)$  quindi:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) \\ & \quad \parallel \\ & 0 \end{aligned}$$

Proviamo a restringere sul punto  $(0, 0)$  con delle rette e vedo come passano (se crescono o decrescono).

Formalmente: Restringo la funzione a rette (o curve) che passano per il punto critico e studio il segno di questa funzione.

$$\begin{aligned} f(x, mx) &= x^4(1 - 6m^2 + m^4) \\ f(x, x) &= 4x^4 \end{aligned}$$

#### Esempio 12.4.

$f(x, y) = e^{x^3}(1 - y^4)$  in  $\mathbb{R}^2$ , si devono classificare i punti critici.

Ho un solo punto critico  $P = (0, 0)$

$$D^2f(0, 0) = (\text{qualcosa} \quad 0//0 \quad 0)$$

Devo usare il metodo delle restrizioni:

$$f(x, y) - f(0, 0) = e^{x^3}(1 - y^4)$$

Restrizione a  $x = 0$ :

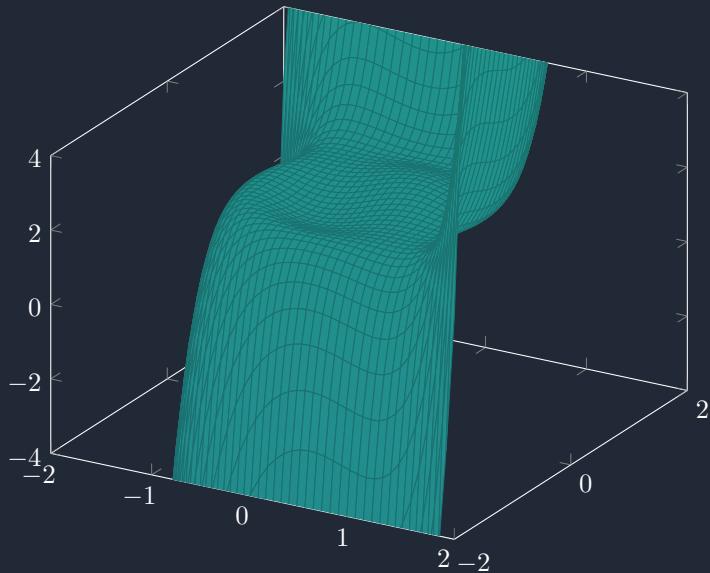
$$f(0, y) - f(0, 0) = -y^4$$

restrizione a  $y = 0$

$$f(x, 0) - f(0, 0) = e^{x^3} - 1$$

Quindi lungo l'asse x ho sempre qualcosa di negativo e se restringo lungo l'asse y ho dei punti positivi e negativi, quindi ho un punto di SELLA.

#### Esempio 12.5.



$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2(x + y) + 2$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(5x^2 + 4xy + y^2 - 1) = 0 \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + 4xy + 5y^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Ho "due" soluzioni:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0 \\ x^2 + 4xy + 5y^2 &= 1 \end{aligned}$$

In realtà in questo caso ogni volta che avviene una condizione tutto il sistema è nullo, quindi ho una circonferenza di raggio 1 che contiene tutti punti critici.

Punti critici:

- tutti i punti della circonferenza del cerchio  $\mathbb{S}^1$

$$\left( +\frac{1}{\sqrt{10}}, +\frac{1}{\sqrt{10}} \right), \left( -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \frac{14}{\sqrt{10}} & -\frac{4}{5} \frac{6}{\sqrt{10}} \\ -\frac{4}{5} \frac{6}{\sqrt{10}} & \frac{4}{5} \frac{14}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}, \quad \det > 0, \quad a_{11} < 0 \Rightarrow \text{max locale}$$

$$\begin{pmatrix} '' & '' \\ '' & '' \end{pmatrix} \Rightarrow \text{min locale}$$

$$f(x, y) - f(\text{punto cerchio}) = f(x, y) - 2 = (x^2 + y^2 - 1)^2(x + y)$$

## 12.2 altri casi

$D \subset \mathbb{R}^2$  non assumo niente su  $D$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \max_{(x,y) \in D} f$$

**Teorema 12.4.**

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di max/min locale per  $f$  in  $D$  allora:

- o  $(x_0, y_0)$  è interno e  $f$  on è derivabile in  $(x_0, y_0)$
- o  $(x_0, y_0)$  è interno a  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- o  $(x_0, y_0) \in \partial D$  (si trova nella frontiera)

**Proposizione 12.2.**

Strateia per trovare il max. assoluto fi una funzione continua su un insieme  $D$  chiuso e limitato

- Trovo punti interni critici
- Trovo punti interni in cui  $f$  non è derivabile
- Trovo i punti di max di  $f$  rispetta alla frontiera

Confronto il valore di  $f$  in tutti i punti trovati, il valore più grande corrisponde al max. assoluto

**Esempio 12.6.**

Trovare max assoluto di  $f(x, y) = 2xy$  su  $D = \{x, y : x^2 + y^2 \leq 4\}$

- punti di  $f$  non derivabile  $\rightarrow \emptyset$
- punti critici:  $(0, 0)$

$$g(\theta) := f(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = 8(\cos \theta, \sin \theta) \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Cerco i max di questa funzione:

- punti in cui  $\frac{d}{d\theta}(f) = 0$
- estremi dell'intervallo  $g(0) = 0$   $g(2\pi) = 0$

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= 8(\cos^2 \theta \sin^2 \theta) = 8(\cos \theta \sin \theta)(\cos \theta \sin \theta) \\ \theta &= \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= g\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 8 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \\ g\left(-\frac{3}{4}\pi\right) &= g\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -4 \\ (\sqrt{2}, \sqrt{2}) &(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \end{aligned}$$

## 13 21/10/25

Richiamo teorema 12.4.

### Teorema 13.1.

Se  $(x_0, y_0)$  è un punto di max/min locale o assoluto per  $f$  in  $D$  allora:

- i) o  $(x_0, y_0)$  è interno e  $f$  non è derivabile in  $(x_0, y_0)$
- ii) o  $(x_0, y_0)$  è interno a  $D$ ,  $f$  è derivabile e  $\nabla f(x_0, y_0) = 0$
- iii) o  $(x_0, y_0) \in \partial D$  (si trova nella frontiera)

Strategia per trovare max assoluti in una funzione continua in un insieme compatto.

- Trovare punti interni critici Trovare punti interni in cui  $f$  non è derivabile
- Trovare i punti di max di  $f$  ristretta alla frontiera
- Confrontare tutti i punti trovati e i valori di  $f$  in tali punti

### Esempio 13.1.

$$f(x, y) \text{ cerchio } x^2 + y^2 \leq 4$$

- punti di non derivabilità  $\emptyset$
- punti in cui  $\nabla = 0$
- Studio di  $\partial D$ , cioè in cui  $\{x^2 + y^2 = 4\}$

$$f \text{ ristretta a } \partial D \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \text{ cost.} \cdot 2 \text{ sent. } (= g(x))$$

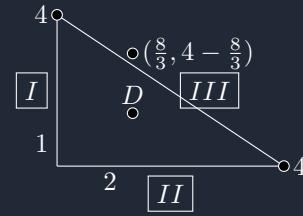
Cercare possibili max di  $g(t)$   $t \in [0, 2\pi]$

$$g'(t) = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi \quad \text{dove nei primi 2 } g \text{ vale 4 e negli altri -4}$$

$$g(0) = 0 \rightarrow g(2\pi) = 0$$

$$f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)} \quad \text{su } D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 4\}$$

- interni in cui  $f$  non è derivabile  $\emptyset$
- Interni in cui  $\nabla f = 0$



$$\{x = 0, y \in [0, 4]\} \cup \left\{ \begin{array}{c} (2, 1) \\ f=0 \\ f=\frac{4}{e^3} \approx 0,199 \end{array} \right\}$$

$$f \text{ ristretta a } \boxed{I} \quad f(0, y) \quad y \in [0, 4]$$

$$f|_I$$

$$f \text{ ristretta a } \boxed{II} \quad f(x, 0) \quad x \in [0, 4]$$

$$f|_{II}$$

$$f \text{ ristretta a } a \boxed{\begin{array}{c} III \\ x+y=4 \quad y=4-x \\ g(x) \end{array}} \quad f(x, 4-x) \quad x \in [0, 4]$$

$$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} \quad g' = 0 \quad x = 0 \quad x = \frac{8}{3}$$

$g$  vale 0  
 $g$  vale  $\frac{256}{27}e^{-4} \approx 0,174$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2(4-x)e^{-4} \\ g(0) &= 0 \quad g(4) = 0 \end{aligned}$$

### 13.1 Ricerca di massimo vincolato

cerca i max/min di  $x^2ye^{-(x+y)}$  sul segmento  $x + y = 4$  compreso tra  $(0, 4)$  e  $(4, 0)$

Ricerca di max  $f(x, y)$  sul vincolo  $\{g(x, y) = 0\}$

tra tutti i punti che soddisfano il vincolo  $g(x, y) = 0$ , trovare quelli che rendono max.  $f(x, y)$

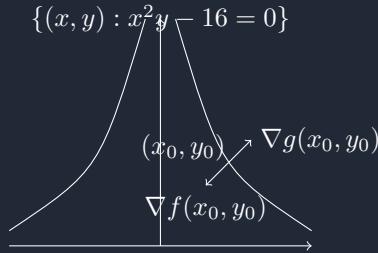
#### Esempio 13.2.

es. di prima studio sulla frontiera:

Trovare il max di  $f(x, y) = 2xy$  su  $x^2 + y^2 - 4 = 0$

#### Esempio 13.3.

Determinare il punto della curva  $x^2y - 16 = 0$  la cui distanza dal punto  $(0, 0)$  è minima



min  $x^2 + y^2$  sul vincolo  $x^2y - 16 = 0$   
una possibilità:  $y = \frac{16}{x^2}$

$$f(x, \frac{16}{x^2}) \text{ cioè } x^2 + \frac{16}{x^2} \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

### 13.2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

#### Teorema 13.2.

Sia  $G = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$

Sia  $(x_0, y_0)$  un punto di max locale per  $f(x, y)$  ristretta al vincolo  $G$ .

Supponiamo che sia  $f$  che  $g$  siano funzioni  $C^1$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e che  $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$

Allora  $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$  tale che  $(x_0, y_0, \lambda_0)$  è un punto critico della funzione.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Cosa vuol dire che  $(x_0, y_0)$  è punto critico per  $\mathcal{L}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Per trovare un punto di max o di minimo quando  $(x,y)$  è vincolato a stare sulla curva di eq.  $g(x,y) = 0$  si costruisce una funzione a partire dalla funzione  $f$  che voglio rendere massima e dalla funzione  $g$  che descrive il vincolo introducendo una variabile  $\lambda$ .

Il teorema mi dice proprio che il punto di max è un punto critico per questa funzione di tre variabili, quindi la prima ci dice che il p.

### Proposizione 13.1.

$$\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$$

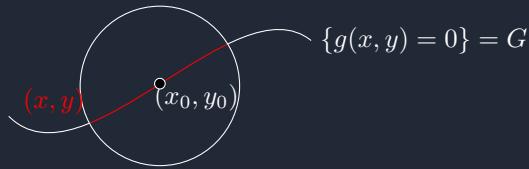
$\nabla G(\bar{x}, \bar{y})$  è perpendicolare alla linea di livello che contiene  $(\bar{x}, \bar{y})$

### Definizione 13.1.

Sia  $G = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$  e sia  $(x_0, y_0) \in G$

Si dice che  $(x_0, y_0)$  è un punto di max. locale **vincolato** per  $f$  sul vincolo  $G$  se  $\exists$  un intorno  $\mathcal{U}$  di  $(x_0, y_0)$  tale che

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{U} \cap G$$



### Esempio 13.4.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$\begin{cases} 2x + \lambda 2xy = 0 \\ 2y + \lambda x^2 = 0 \\ x^2y - 16 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima eq.

$$2x(1 + \lambda y) = 0$$

~~$x=0$~~  non soddisfa il vincolo

$$1 + \lambda y = 0$$

Dalla seconda eq.

$$\begin{cases} 2y - \frac{1}{y}x^2 = 0 \\ x^2y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2y^2 - x^2}{y} = 0 \\ x^2y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}y \\ 2y^2y = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$(2\sqrt{2}, 2) \quad (-2\sqrt{2}, 2)$$

Ho trovato che:

$$\min_G f = \min_{G \cap C} f$$

Quindi il minimo sarà uno dei due candidati, e so che la distanza di  $f(x, y)$  vale 12 in questi due punti, quindi la distanza è uguale in due punti, di conseguenza ho due punti di minimo (assoluto).

**Esempio 13.5.**

$$f(x, y) = 2xy \quad \{x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{cases} 2y + 2\lambda x = 0 & A \\ 2x + 2\lambda 2x + 2\lambda y = 0 & B \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo  $A + B$  al posto di  $A$  si ottiene

$$\begin{cases} 2(x+y) + 2\lambda(x+y) = 0 \rightarrow 2(x+y)(1+\lambda) = 0 \rightarrow y = -x \text{ o } \lambda = -1 \\ 2x + 2\lambda 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ 2x + 2\lambda y = 0 \\ 2x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ e } y = \mp\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ 2x - 2y = 0 \rightarrow x = y \\ x^2 + y^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ e } y = \mp\sqrt{2} \end{cases}$$

La tecnica si applica anche in dimensione  $> 2$

**Esempio 13.6.**

Trovare il min o max di  $f(x, y, z)$  sul vincolo  $G = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$

Esempio Trovare max. e min. di  $f(x, y, z) = xy^2z^3$

Sul vincolo  $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (superficie di una sfera di raggio 1).

$$\min f(x, y, z) \text{ su } G = \{x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, x + y + z - \frac{1}{2} = 0\}_{g(x,y,z), h(x,y,z)=0}$$

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Se introduco piu di un vincolo avrò piu parametri

## 14 funzioni implicite

Prendiamo una funzione  $\{F(x, y) = 0\}$  che definisce un grafico di funzione (di 1 variabile)

**Esempio 14.1.**

$$F(x, y) = x^3 - y + 1$$

$$F = 0 \Leftrightarrow x^3 - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^3 + 1$$

**Esempio 14.2.**

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Globalmente questo non è un grafico di funzione, MA localmente **si**, infatti se prendiamo il grafico delimitato dalle  $x$  e dai  $y$  otteniamo rispettivamente proprio un grafico di  $y = y(x)$  e  $x = x(y)$ :



**Teorema 14.1** (del DINI).

$$A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad F : A \rightarrow \mathbb{R}, F \in C^1(A)$$

sia  $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$  t.c.  $F(x_0, y_0) = 0, P_0$  Regolare (cioè  $DF(x_0, y_0) \neq 0$ )

Allora  $\exists U$  intorno di  $x_0$  e  $\exists V$  intorno di  $y_0$  t.c.  $F(x, y) = 0$  definisce un grafico di funzione  $y = f(x)$  oppure  $x = g(y)$  in  $U \times V$  intorno di  $P_0$

**In particolare:**

- se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  allora  $\exists! y = f(x) : U \rightarrow V$  t.c.  $F(x, f(x)) = 0, f \in C^1(U)$  e  $f'(x) = \frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in \overset{\circ}{U}$
- se  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  allora  $\exists! x = g(y) : V \rightarrow U$  t.c.  $F(g(y), y) = 0, g \in C^1(V)$  e  $g'(y) = \frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad \forall y \in \overset{\circ}{V}$

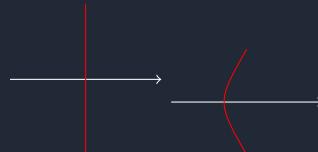
$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$DF = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

punti critici  $\Leftrightarrow DF = 0 \Leftrightarrow P \equiv (0, 0)$  linea ( $F(x, y) = 0$ )  $\Rightarrow$  Tutti i punti di  $F(x, y) = 0$  sono regolari.

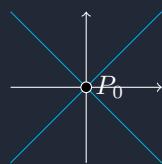
**Oss. 14.1.**

Geometricamente cosa significa che una curva non è grafico di funzione?



Questi sono esempi che NON sono grafici  $y = y(x)$

Ma sono grafici di  $x = x(y)$



Questo è un esempio dove l'intorno di  $P_0$  ovvero  $U_{P_0}$  NON può essere grafico di funzione

**Oss. 14.2.**

Se  $\underline{r}(t)$  è curva piana regolare  $t \in I \quad \forall t_0 \in \overset{\circ}{I}$  il sostegno è localmente grafico

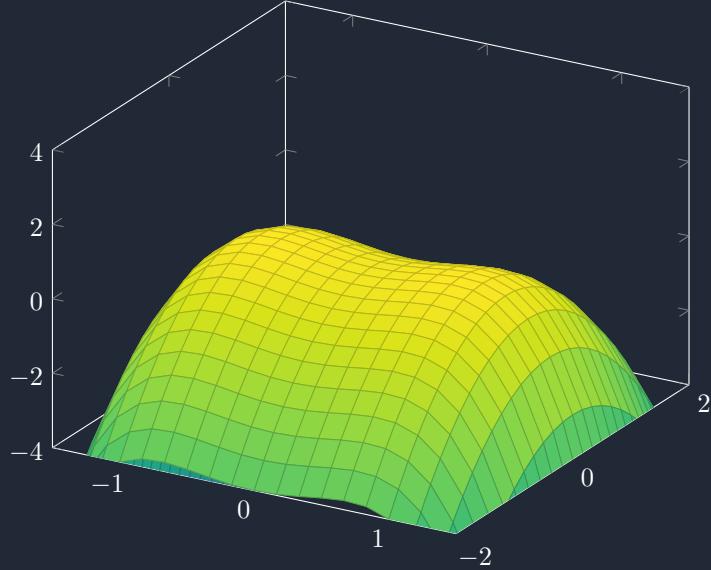
### Oss. 14.3.

$F \in C^2$  (e vale teorema Dini)  $\Rightarrow f \in C^2$

$$\text{Da cui } f(x) = f(x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{\parallel_{y_0}} (x - x_0) + \boxed{\frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)}$$

per  $x \in I_{x_0}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \right)' = -\frac{(F_x(x, f(x)))' F_y(x, f(x)) - F_x(x, f(x))(F_y(x, f(x)))'}{(F_y(x, f(x)))^2} \\ &= -\frac{1}{(F_y)^2} [(F_{xx} + F_{xy} f') F_y - F_x (F_{yy} + F_{xy} f')]|_{x, f(x)} \end{aligned}$$



### Esempio 14.3.

$$\begin{aligned} x^2 - x^4 - y^2 &= 0 \\ F(x, y) &= x^2 x^4 - y^2 \end{aligned}$$

$$DF = (2xx - 4x^3 - 2y) = 2(x(1 - 2x^2) - y)$$

$$\text{Punti critici} \Leftrightarrow y = 0 \wedge x(1 - 2x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_0 \equiv (0, 0) \quad P_1 \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad P_2 \equiv (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

$$F(P_0) = 0 \quad F(P_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \neq 0 \quad F(P_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \neq 0$$

Trovare adesso la retta tangente a  $F = 0$  in  $P \equiv (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{4})$

$$r_{tg} : y = f'(\frac{-1}{2})(x - (\frac{-1}{2})) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Dove  $f(x)$  è l'uncia funzione definita in  $I_{-\frac{1}{2}}$  data dal teorema DINI.

$$\Rightarrow f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{F_x(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})}{F_y(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4})}$$

*Dimostrazione.* (teor, FMS, Giusti)  $P_0$  regolare supp.  $F_y(x_0, y_0) \neq 0, F_y(x_0, y_0) > 0$   
 $[1] \exists U$  intorno di  $x_0$  e  $V = [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$  intorno di  $y_0$

$$\begin{aligned} F_y(x_0, y_0) > 0, F_y \in C^0 &\Rightarrow \exists R \text{ rettangolo chiuso} = W \times V \text{ t.c. } W \text{ int. di } x_0, V \text{ int. di } y_0 \\ F_y(x_0, y_0) > 0 &\quad \forall (x, y) \in R \end{aligned}$$

Quindi  $\forall x \in W$  fissato  $F(x, y)$  (come funzione di  $y$ )  $\nearrow$  strettamente  
 in part.  $F(x, y) \nearrow$  strettamente, con  $F(x_0, y_0) > 0$

$$\Rightarrow F(x_0, y_0 - \delta) < 0 \text{ e } F(x_0, y_0 + \delta)$$

Considero  $F(x_0, y_0 - \delta)$  funzione continua per la permanenza del segno  $F(x, y_0 - \delta) < 0 \quad \forall x \in U$   
 $F(x_0, y_0 + \delta) \exists U$  intorno di  $x_0$ ,  $U \subseteq W$  e  $F(x, y_0 + \delta) > 0 \quad \forall x \in U$   
 $\boxed{\text{II}} \exists! f : U \rightarrow V$  t.c.  $F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in U$   
osserviamo  $\forall x \in U \quad y \rightarrow F(x, y) \nearrow$  strett.  
con

$$\begin{aligned} F(x, y_0 - \delta) &< 0 \quad \forall x \in U \\ F(x, y_0 + \delta) &> 0 \quad \forall x \in U \\ F &\in C^0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (Th. esist. zeri + stretta monotonia)  $\forall x \in U \quad \exists! y \in V : F(x, y) = 0$  cioè  $y = f(x)$   
 $\boxed{\text{III}} \quad f \in C^0(U)$   
fix.  $x_1 \in U$  considero  $x \in U$

$$G(t) = F' \left( \begin{array}{c} (1-t)x_1 + tx; (1-t)f(x_1) + tf(x) \\ \xi_t \quad \eta_t \end{array} \right)$$

$$G \in C^1$$

$$\begin{aligned} G(0) &= F(x_1, f(x_1)) = 0 \\ G(1) &= F(x, f(x)) = 0 \end{aligned}$$

Usa Th. Rolle  $\Rightarrow \exists \tau \in (0, 1)$  t.c.  $G'(\tau) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= G'(\tau) = F_x(\xi_\tau, \eta_\tau)(x - x_1) + F_y(\xi_\tau, \eta_\tau)(f(x) - f(x_1)) \\ (f(x) - f(x_1))(F_y(1 - \tau)x_1 + \tau x; (1 - \tau)f(x_1) + \tau f(x)) &= -(x - x_1)(F_x(\xi_\tau, \eta_\tau)au) \\ f(x) - f(x_1) &= -(x - x_1) \frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)} \\ |f(x) - f(x_1)| &\leq |x - x_1| \max_{(x,y) \in \mathbb{R}} \left| \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} \right| \leq |x - x_1| \frac{\max_{(x,y) \in \mathbb{R}} |F_x(x, y)|}{\min_{(x,y) \in \mathbb{R}} |F_y(x, y)|} \neq 0 \end{aligned}$$

Poichè  $F_y \in C^0$ ,  $F_y \neq 0$  in  $\mathbb{R}$

Si evidenzia che  $|x - x_1|$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow x_1$  e il resto è limitato

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1} f(x) = f(x_1) \text{ cioè } f \in C^0(U)$$

$$\boxed{\text{IV}} \quad \exists f'(x) \quad \forall x \in U \text{ e } f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \forall x \in U$$

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \boxed{\text{per} \quad \text{**}} = \lim_{x \rightarrow x_1} -\frac{F_x(\xi_\tau, \eta_\tau)}{F_y(\xi_\tau, \eta_\tau)} \underset{\text{oss.}}{\boxed{*}} -\frac{F_x(x_1, f(x_1))}{F_y(x_1, f(x_1))}$$

Oss. 14.4.

$$\boxed{*} \quad F_x, F_y \in C^0(U \times V)$$

per  $x \rightarrow x_1 : \xi_\tau = (1 - \tau)x_1 + \tau x \rightarrow x_1$

$$\eta_\tau = (1 - \tau)f(x_1) + \tau \frac{f(x)}{per \quad \boxed{III}} \rightarrow f(x_1)$$

□

Oss. 14.5.

Vale il th. anche se  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  e solo  $F_y \in C^0$   
 $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  e solo  $F_x \in C^0$

**Teorema 14.2.**

Dini in 3 variabili

$$F(x, y, z) \in C^1(A) \quad A_{ap} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \in A$  Regolare e t.c.  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$

supponiamo  $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$  allora  $\exists \mathcal{U}_{P_0} \subseteq A$

t.c.  $\{F(x, y, z) = 0\} \cap \mathcal{U}_{P_0}$  è grafico  $z = f(x, y)$

inoltre  $f \in C^1$  e:

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) = -\frac{F_x(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))} \text{ localmente vicino a } (x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = -\frac{F_y(x, y, f(x, y))}{F_z(x, y, f(x, y))}$$

# 15 23/10/25

## 15.1 Curve parametriche

**Definizione 15.1.**

$$\begin{aligned}\underline{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 & \quad I = [a, b] \\ \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} & \quad x, y, z : I \rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma \text{ sostegno di } \underline{r} & \quad \gamma = \underline{r}(I)\end{aligned}$$

Con sostegno si intende proprio il disegno della traiettoria del punto.

**Esempio 15.1.**

$$\begin{aligned}\underline{r}(t) &= (1-t)P_0 + \sum_{t \in [0,1]} t P_1 \\ \underline{x}(s) &= P_0 + tg(s)(P_1 - P_0) \quad s \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \underline{\xi}(\mu) &= P_1 + \mu^2(P_0 - P_1) \quad \mu \in [0, 1]\end{aligned}$$

**Definizione 15.2.**

L'orientazione è il verso di percorrenza del sostegno

**Definizione 15.3.**

$\underline{r}(t)$  semplice se non ha autointersezioni cioè  $\underline{r}(t)$  è iniettiva

**Definizione 15.4.**

$\underline{r}$  semplice è chiusa se  $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$

**Esempio 15.2.**

circonferenza (nel piano)

$$\begin{aligned}\underline{x}(\theta) &= \begin{pmatrix} R \cos(\theta) + x_0 \\ R \sin(\theta) + y_0 \end{pmatrix} \\ c &\equiv (x_0, y_0) \quad R > 0\end{aligned}$$



$\underline{x}(\theta)$  è semplice e chiusa

**Definizione 15.5.**

$\underline{r}(t)$  è regolare se:

- è semplice
- $x, y, z$  sono derivabili
- $|\dot{\underline{r}}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \overset{\circ}{I}$

L'ultima condizione vuol dire che:

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} \quad t \in \overset{\circ}{I}$$

**Definizione 15.6.**

$\underline{r}(t)$  è Regolare a tratti se:

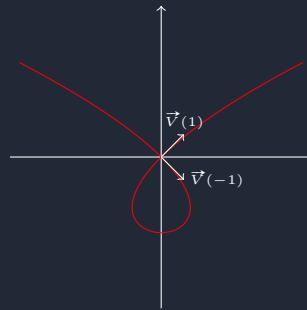
$$\underline{r}(t) = \begin{cases} \underline{r}_1(t) & \text{se } t \in [a, t_1] \\ \underline{r}_2(t) & \text{se } t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{r}_k(t) & \text{se } t \in [t_k, b] \end{cases}$$

Con  $\underline{r}_i$  curve regolari, e  $i = 1..k$

**Esempio 15.3.**

Prendiamo uno strofoide:

$$\underline{\mathcal{S}}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$



$\mathcal{S}$  ha un autointersezione quindi non è semplice.

Si può vedere che una curva è semplice verificando che due immagini hanno una sola soluzione, quindi:

$$\underline{\mathcal{S}}(t) = \underline{\mathcal{S}}(s) \Leftrightarrow t = s$$

E si può verificare in questo modo:

$$\begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^3 - s \\ s^2 - 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t^4 - t = s^3 - s \\ t^2 - 1 = s^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t(t^2 - 1) = s(s^2 - 1) \\ |t| = |s| \end{cases} \Leftrightarrow t^2 = s^2 = 1 \vee t = s$$

Vediamo che in questo caso abbiamo quattro possibilità:

$$\begin{aligned} t &= 1 \wedge s = -1 \\ t &= -1 \wedge s = 1 \\ (t &= s = 1 \wedge t = s = -1) \end{aligned}$$

Vediamo che in questo caso quindi la condizione iniziale non è soddisfatta infatti  $\exists t \neq s$  t.c.  $\underline{\mathcal{S}}(t) = \underline{\mathcal{S}}(s)$  cioè  $\mathcal{S}$  non iniettiva  $\Rightarrow$  non semplice

Prendiamo ora la sua derivata e vediamo i tratti in cui è definita oltre che semplice, anche regolare:

$$\dot{\underline{\mathcal{S}}}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

Possiamo verificare che  $\underline{\mathcal{S}}$  è regolare a tratti, infatti è definita regolare nei tratti:

$$\underline{\mathcal{S}}(t) = \begin{cases} t \in [1, 1] \\ t \in [-\infty, -1] \\ t \in [1, +\infty] \end{cases}$$

$\underline{\mathcal{S}}(I)$  sostegno di  $\mathcal{S}$

Con  $I$  l'intervallo su cui è definito  $t$

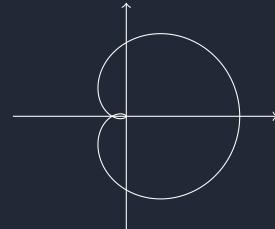
### Oss. 15.1.

Siccome una curva  $\underline{r}(t)$  è regolare in un punto  $t_0$  se  $\dot{\underline{r}}(t_0) \neq 0$  allora possiamo dire che la Regolarità dipende anche dalla parametrizzazione, due parametrizzazioni infatti possono descrivere lo stesso sostegno ma una può essere regolare e l'altra no, facendo un esempio:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= (\cos(t), \sin(t)) \rightarrow r'_1(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq 0 \forall t \quad \text{regolare } \checkmark \\ r_2(t) &= (\cos(t^3), \sin(t^3)) \rightarrow r'_2(t) = (-3t^2 \sin(t^3), 3t \cos(t^3)) \Rightarrow r'_2(0,0) = 0 \quad \text{non regolare } \times \end{aligned}$$

### Esempio 15.4.

Prendiamo l'esempio di un cardioide  $\mathcal{C}$ :



$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{C}}(\theta) &= \begin{pmatrix} (1 + \cos(\theta)) \cos(\theta) \\ (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, \pi] \\ \dot{\underline{\mathcal{C}}}(\theta) &= \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) \\ -\sin^2(\theta) + \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) \end{pmatrix} \\ \dot{\underline{\mathcal{C}}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin(\theta)(1 + 2\cos(\theta)) = 0 \\ \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 0 \end{cases} \quad \text{se } \theta = \pi \Rightarrow \dot{\underline{\mathcal{C}}}(\theta) = 0 \\ \Rightarrow \underline{\mathcal{C}} \text{ non regolare in } \theta = \pi &\underline{\mathcal{C}}(\theta) = \begin{pmatrix} (1 + \cos(\theta)) \cos(\theta) \\ (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

È parametrica regolare (equivalente), poiché  $\dot{\underline{\mathcal{C}}} \neq 0 \quad \forall \theta \in (-\pi, \pi)$

### Definizione 15.7.

Preso una curva  $\underline{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare

sia  $t_0 \in (a, b)$  con  $(a, b) = I$

e sia  $P_0 = \underline{r}(t_0)$

si definisce la retta tangente al sostegno di  $\underline{r}(I)$  in  $P_0$  come:

$$r_{tg} : x(s) = s\underline{r}(t_0) + P_0 \quad s \in \mathbb{R}$$

Dove  $s$  è il parametro che generalizza la retta nel punto  $P_0$  formandola lungo lo span impostato dall'inclinazione  $\dot{\underline{r}}(t_0)$  e traslata di  $P_0$  nel piano  $\mathbb{R}^3$ .

### Definizione 15.8.

Preso una curva  $\underline{r}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  regolare

sia  $(a, b) = I$

definiamo il versore tangente a una curva parametrica (ad un tempo  $t$  generico) come:

$$\vec{\tau}(t) = \frac{\dot{\underline{r}}(t)}{\|\dot{\underline{r}}(t)\|} \quad t \in (a, b)$$

**Ricordiamo che:**

$\underline{r}(t)$  è la traiettoria

$\dot{\underline{r}}(t)$  è la velocità

$\ddot{\underline{r}}(t)$  è l'accelerazione

### Definizione 15.9.

Due parametriche:

$$\begin{aligned} \underline{\varphi} &: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \underline{\psi} &: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

sono equivalenti se:

$$\begin{aligned} \exists g : I \rightarrow J &\quad g \in C^1 \text{ t.c. } I = [a, b] \quad J = [\alpha, \beta] \\ g'(t) \neq 0 &\quad \forall t \in \overset{\circ}{I} \text{ t.c. } \underline{\varphi}(t) = \underline{\psi}(g(t)) \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

### Oss. 15.2.

$g$  è invertibile

### Oss. 15.3.

Se  $\underline{\varphi}, \underline{\psi}$  sono equivalenti allora:

$\vec{\tau}_{\underline{\varphi}} = \vec{\tau}_{\underline{\psi}}$  nei punti corrispondenti  
oppure  $\vec{\tau}_{\underline{\varphi}} = -\vec{\tau}_{\underline{\psi}}$

## 15.2 lunghezza di una curva



Si chiama poligonale inscritta:

$$\begin{aligned} P_i &\equiv P(t_i) = \underline{r}(t_i) \\ \mathcal{L}(\underline{r}) &\geq \mathcal{L}(\varphi) \end{aligned}$$

### Oss. 15.4.

$$P_i \in \gamma \quad i = 0 \dots k$$

### Definizione 15.10.

$\underline{r}(t)$  è rettificante se:

$$\sup\{\mathcal{L}(\varphi) \text{ per poligonali inscritte}\} = L < +\infty$$

in tal caso  $\mathcal{L}(\underline{r}) = L$

### Teorema 15.1.

(di rettificabilità)

Preso una curva parametrica  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  quindi  $\underline{\varphi} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

Sia  $\varphi \in C^1((a, b))$   
e Regolare a tratti

allora  $\underline{\varphi}$  è rettificabile e  $\mathcal{L}(\varphi) = \int_a^b |\underline{\varphi}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$

### Proposizione 15.1.

Prese due curve parametriche  $\varphi, \underline{\psi}$

se sono parametriche equivalenti

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}(\underline{\psi})$$

cioè  $\int_a^b |\underline{\varphi}'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\underline{\psi}'(s)| ds := \mathcal{L}(|\gamma|)$  quindi dipende solo dal sostegno

## 15.3 ascissa curvilinea o parametro d'arco

### Definizione 15.11.

Preso una curva parametrica  $\underline{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

sia  $r(t)$  Regolare

sia  $t_0 \in [a, b]$  solitamente si considera il punto iniziale quindi  $t_0 = a$

Viene definita l'ascissa curvilinea  $S(t)$  nel seguente modo:

$\forall t \in [a, b] \quad S(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\underline{r}}(\ell)\| d\ell$  si cambia variabile da  $t$  a  $\ell$  perchè la variabile di integrazione e gli estremi di integrazione non possono essere uguali  
cioè la lunghezza dell'arco della curva  $\gamma$  tra  $\underline{r}(t_0)$ , che posso chiamare  $P_0$ , e  $\underline{r}(t)$  con  $S(t)$  ascissa curvilinea (di  $\underline{r}$ ) centrata in  $t_0$

Considero ora  $t_0 = a$ :

- $S : [a, b] \rightarrow [0, L] \quad L = \mathcal{L}(\gamma)$

- $S(t) = \int_a^b |\dot{r}(\tau)| d\tau \quad s(a) = 0 \quad s(b) = 0$

- $s \nearrow, \dot{s}(t) = |\dot{r}| > 0$  con  $s \in C^1$

l'ultimo punto ci conferma che è cambio di parametro ammissibile

$$\exists t(s)$$

$$s = s(t) \text{ cambio di parametro } \boxed{\underline{\varphi} = \underline{r}(t(s))}$$

parametrizzazione rispetto all'ascissa curvilinea

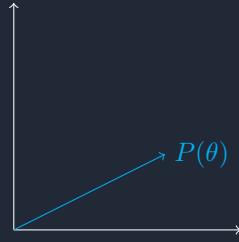
$$\underline{\dot{\varphi}}(s) = \dot{r}(t(s)) \dot{t}(s) \underset{*}{=} \dot{r}(t(s)) / |\dot{r}(t(s))|$$

$\boxed{*}$ : ma  $t(s)$  è inversa di  $s(t)$  quindi:

$$\dot{t}(s) = \frac{1}{\dot{s}(t(s))} = \frac{1}{|\dot{r}t(s)|}$$

# 16 28/10/25

## 16.1 curve in forma polare



Un esempio è una circonferenza:

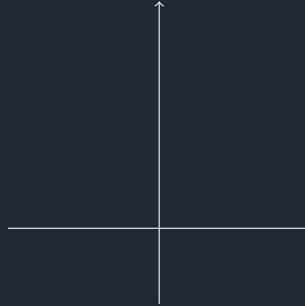
$$\rho(\theta) = R > 0$$

Equazioni in forma polare  $\rho = rho(\theta)$  con  $\rho(\theta) > 0$  con  $\theta \in I$

$$\underline{r}(\theta) = \begin{pmatrix} \rho(\theta) & \cos(\theta) \\ \rho(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \theta \in I$$

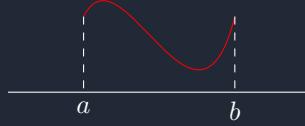
**Esempio 16.1.**

$$\rho(\theta) = A\theta \quad A > 0, \theta \geq 0$$



## 16.2 integrali di linea di prima specie

$$\int_a^b g(t) dt$$



$$\|\dot{\underline{r}}(t)\| = \left\| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt \right\|$$

L'area del sottografico di  $f(x, y)$  lungo la curva  $\underline{r}(t)$  è proprio

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt = \int_{\gamma} f(x, y) ds$$

**Teorema 16.1.**

$\underline{x}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzazioni equivalenti regolari (a tratti di  $\gamma$ )

$\underline{r}(u) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$f : a \rightarrow \mathbb{R}$   $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma \subseteq A$

Allora  $\int_a^b f(\underline{x}(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\underline{r}(u)) \|\dot{\underline{r}}(u)\| du$

e quindi è ben definito  $\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt$

Quindi non dipende dalla parametrizzazione scelta.

**Oss. 16.1.**

$$f \equiv 1 \quad \int_{\gamma} f ds = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt = \mathcal{L}(\gamma)$$

*Dimostrazione.*

sia  $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  cambio di paraetro  $t \mapsto u = g(t)$   
supponiamo  $g' > 0$  (viene mantenuta l'orientazione)

$\underline{x}(t) = \underline{r}(g(t))$  Specifichiamo la seguente uguaglianza che viene da questo termine

$$\|\dot{\underline{x}}(t)\| = \|\dot{\underline{r}}(g(t))g'(t)\| = \|\dot{\underline{r}}(g(t))\| \|g'(t)\| = g'(t) \|\dot{\underline{r}}(g(t))\| \quad g' > 0$$

Ora si prosegue con i conti:

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} f(\underline{r}(u)) \|\dot{\underline{r}}(u)\| du = \\ & \text{sostituzione: } u = g(t) \quad du = g'(t)dt \\ & = \int_a^b f(\underline{r}(g(t))) \|\dot{\underline{r}}(g(t))\| g'(t)dt = \int_a^b f(\underline{x}(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \end{aligned}$$

□

### 16.3 applicazioni

$\gamma$  sostegno di  $\underline{x}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

• Massa di un filo con densità:

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) \quad M_{\gamma} = \int_{\gamma} \rho ds &= \int_a^b \rho(x(t), y(t), z(t)) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \\ \left( \rho(t) \quad M_{\gamma} = \int_a^b \rho(t) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \right) \end{aligned}$$

• Centro di massa di un filo materiale:

$$\begin{aligned} G &\equiv (x_G, y_G, z_G) \\ x_G &= \frac{1}{m_{\gamma}} \int_{\gamma} \rho x ds = \frac{1}{m_{\gamma}} \int_a^b \rho(\underline{x}(t)) x(t) \|\dot{\underline{x}}(t)\| dt \\ & \quad y_G, z_G \end{aligned}$$

**Oss. 16.2.**

se  $\varphi \equiv 1, M_{\varphi} = \mathcal{L}_{\gamma}$

Centro di massa  $\equiv$  baricentro geometrico.

**Esempio 16.2.**

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 + 1 \end{pmatrix} t \in [0, 2]$$

Sia  $\gamma$  il sostegno:

- a) provare che  $\underline{x}$  è parametrizzazione regolare
- b) Calcolare  $\mathcal{L}(\gamma) = L$
- c) calcolare il baricentro geometrico
- d) calcolare massa di un filo materiale di profilo  $\gamma$  e densità

- $\varphi = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$
- $\rho(t) = t$

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} t \in (0, 2) \quad \| \underline{\dot{x}}(t) \| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2} \quad \forall t \in (0, 2)$$

$$B \equiv (x_B, y_B)$$

$$L(x_B) = \int_{\gamma} x ds = \int_0^2 t^2 t \sqrt{4 + 9t^2} dt \stackrel{P.P.}{=} \\ t^2 \frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} |_0^2 - \int_0^2 \frac{2t}{27} (4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} dt = \\ \frac{t^2 (4 + 9t^2)^2}{27} |_0^2 - \frac{2}{27} (4 + 9t^2)^{\frac{5}{2}} |_0^2$$

$$L(y_B) = \int_{\gamma} = \int_0^2 (t^3 + 1) t \sqrt{4 + 9t^2} dt = \\ \int_0^2 t^3 t \sqrt{4 + 9t^2} dt = \int_0^2 t \sqrt{4 + 9t^2} dt \\ " per es$$

$$M_{\gamma} = \int_{\gamma} \rho ds = \int_0^2 \rho(x(t)), y(t) \| \dot{x}(t) \| dt \\ \Rightarrow \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t^2} t \sqrt{4 + 9t^2} dt = \int_0^2 \frac{1}{2} t (4 + 9t^2) dt$$

esercizio del teorema dini su foto cell

## 17.1 forme differenziali

sono un modo matematico per esprimere i campi vettoriali

**Definizione 17.1** (Campo vettoriale).

sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale su  $A$

è una funzione  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$

Se  $(x, y, z) \xrightarrow{\in A} F(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

le componenti si possono scrivere anche con la forma con i versori:  $F_1(x, y, z)\underline{i}, F_2(x, y, z)\underline{j}, F_3(x, y, z)\underline{k}$

**Esempio 17.1.**

massa puntiforme  $m$  che si trova nel punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , il campo sarà:

$$F(x, y, z) = -c m \frac{x - x_0, y - y_0, z - z_0}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = -c m \frac{(P - P_0)}{\|P - P_0\|^{\frac{3}{2}}}$$



Qui  $c > 0, P = (x, y, z)$

**Esempio 17.2.**

campo di velocità di un corpo rigido che ruota intorno all'asse  $z$  con velocità anolare  $\Omega$

$$v(x, y, z) = -\Omega_y \underline{i} + \Omega_x \underline{j} + o \underline{k}$$



**Esempio 17.3.**

Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in ogni punto di  $A$

allora  $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\nabla f(x, y, z) := \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

**Esempio:** se  $f(x, y, z) = x^2, y^2, z^2$

$$\nabla f = (2x, 2y, 2z);$$

**Definizione 17.2** (forma differenziale).

Sia  $V$  uno spazio vettoriale,

si considera l'insieme: applicazioni lineari  $: V \rightarrow \mathbb{R}$ , per definizione questo si indica il duale di  $V$  come  $V^*$

Consideriamo ora  $L \in (\mathbb{R}^3)^*$

$$a_1 = L(e_1)$$

$$a_2 = L(e_2)$$

$$a_3 = L(e_3)$$

Preso  $v \in \mathbb{R}^3$  si ha che  $L(v) = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3$   
definisco una base di  $(\mathbb{R}^3)^*$

$$dx_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx_1)(\overset{\mathbb{R}^3}{v}) = v_1$$

$$dx_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx_2)(\overset{\mathbb{R}^3}{v}) = v_2$$

$$dx_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (dx_3)(\overset{\mathbb{R}^3}{v}) = v_3$$

Così posso scrivere  $L$  come:

$$L = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$$

Si ricorda a questo punto che  $L(v)$  può essere riscritto come:

$$L(v) = a_1 dx_1(v) + a_2 dx_2(v) + a_3 dx_3(v) = (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3)(v)$$

Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^3$ , una forma differenziale  $\omega$  su  $A$ , è un'applicazione che ad ogni elemento di  $A$  associa un elemento di  $(\mathbb{R}^3)^*$

$$(x, y, z) \in A \longrightarrow L(x, y, z) \in (\mathbb{R}^3)^*$$

Gli elementi costanti dipendono però dall'elemento  $(x, y, z)$  di partenza:

$$L(x, y, z) = a_1(x, y, z)dx_1 + a_2(x, y, z)dx_2 + a_3(x, y, z)dx_3$$

A questa forma differenziale posso associare il campo vettoriale ( $F$ ):

$$F(x, y, z) = (a_1(x, y, z), a_2(x, y, z), a_3(x, y, z))$$

### Proposizione 17.1.

se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile allora chiamo differenziale di  $f$ :  $df$

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dx_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dx_3$$

Questo può essere visto come il gradiente della forma differenziale.

Ci si chiede ora quali forme differenziali siano esatte

### Definizione 17.3.

Sia  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$  una forma differenziale  $\omega$  si dice **esatta** se

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile t.c.  $\omega = df$

cioè (se  $\omega = a_1(x, y, z)dx_1 + a_2(x, y, z)dx_2 + a_3(x, y, z)dx_3$ ) se  $\exists f$  t.c.

$$a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad a_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

Tale  $f$  si chiama **primitiva**

### Oss. 17.1.

se  $f$  è primitiva di  $\omega$  anche  $f + c$  lo è

### Definizione 17.4 (Campo conservativo).

Sia  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vettoriale  $F = (F_1, F_2, F_3)$

$F$  si dice **conservativo** se  $\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile t.c.  $F = \nabla f$

In più la funzione  $f$  si chiama potenziale di  $F$ .

### Esempio 17.4.

$$F(x, y, z) = -c m \frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

è conservativo e un suo potenziale è:

$$f(x, y, z) = c m / ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{\frac{3}{2}}$$

Infatti ad esempio:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} c m ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= c m \left(-\frac{1}{2}\right) (\cdots)^{-\frac{3}{2}} \not{Z}(x - x_0) \end{aligned}$$

**Ogni campo è conservativo?**

**Ogni forma differenziale è esatta?**

Ovviamente no...

**Esempio 17.5.**

siamo in  $\mathbb{R}^2$  e  $\omega(x, y) = 3x^2 dx - xy dy$   
non è esatta. infatti se lo fosse e  $\omega = df$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -y \\ f(x, y) &= x^3 + c(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 + c'(y)\end{aligned}$$

**Proposizione 17.2.**

Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva orientata (o integrale curvilineo di II specie)

$$\begin{gathered}F : A \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma \text{ curva orientata } \subset A\end{gathered}$$

sia  $\gamma$  regolare a tratti,  $F$  (campo vettoriale) sia continua (il che vuol dire che entrambe le sue componenti sono continue)

$\varphi : [a, b] \rightarrow A$  una parametrizzazione regolare di  $\gamma$  concorde con l'orientamento di  $\gamma$

$$\varphi(a) = P_0, \varphi(b) = P_1, \tau(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|}$$

**Definizione 17.5.**

Si definisce lavoro di  $F$  su  $\gamma$  come:

$$\int_a^b \langle F(\varphi(t)); \dot{\varphi}(t) \rangle \|\dot{\varphi}(t)\| dt$$

Può essere scritto anche come:

$$\int_{\gamma} \langle F; \tau \rangle ds$$

Dove ogni punto di  $\gamma$   $\tau$  è un versore tangente a  $\gamma$  concorde con l'orientazione di  $\gamma$

Infatti:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \langle F; \tau \rangle ds &= \int_a^b \langle F(\varphi(t)); \tau(\varphi(t)) \rangle \|\dot{\varphi}(t)\| dt \\ \text{con } \tau(\varphi(t)) &= \int_a^b \left\langle F(\varphi(t)); \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \right\rangle \left\| \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \right\| dt\end{aligned}$$

Dipende dall'orientazione su  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma^-} \langle F; \tau \rangle ds = \int_{\gamma^+} \langle F; \tau \rangle ds$$

**Esempio 17.6.**

$F(xy, y, 0)$  con  $\varphi_1 = \cos(t), \sin(t), 0 \quad t \in [0, 2\pi]$   
contenuta nel piano  $\{z = 0\}$  di  $\mathbb{R}^3$

$$\int_0^{2\pi} \langle (\cos(t), \sin(t), 0); (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -\sin(t) \cos(t) + \sin(t) \cos(t) dt = \left[ \frac{-\sin^3(t)}{3} + \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Prendo ora un'altra curva:  $\varphi_2(t) = (2, 0, 0) + (\cos(t), \sin(t), 0) = (2 + \cos(t), \sin(t), 0) \quad t \in [-\pi, \pi]$

$$w_2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \langle ((2 + \cos(t)) \sin(t), \sin(t), 0); (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} -2 \sin^2(t) + l'integrale di prima =$$

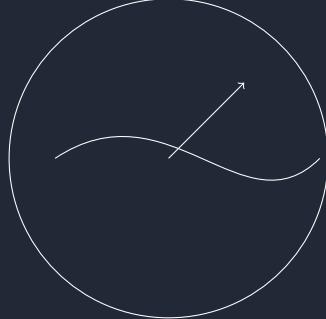
$$\left[ -2(t + \frac{1}{4} \sin(2t)) - \frac{\sin^3(t)}{3} + \frac{\sin^2(t)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = -2\pi$$

## 18 30/10/25

### Proposizione 18.1.

sia  $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^3)^*$   $A \subset \mathbb{R}^3$  una forma differenziale continua  
 se  $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3$  con  $dx$  funzioni  $A \rightarrow \mathbb{R}$

sia  $\gamma$  unca curva orientata con supporto  $\subset A$  regolare a tratti e sia  $\varphi(t) : [a, b] \rightarrow A$  una sua parametrizzazione concorde cn l'orientazione di  $\gamma$



c'è poi un punto x e il versore a quel punto.

Definisco:

$$\int_{\gamma} \omega : \int_{\gamma} \omega(x)[\tau(x)]ds$$

ed è proprio l'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

con componente a x applicata al variare dela tangente  $\tau(x)$  alla curva  $\gamma$  nel suo punto x.

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \underbrace{\omega(\varphi(t)) \left[ \frac{\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|} \right]}_{\frac{\omega(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{\varphi}(t)\|}} \|\dot{\varphi}(t)\| dt \\ &\quad \int_a^b (a_1(\varphi(t))dx_1 + a_2(\varphi(t))dx_2 + a_3(\varphi(t))dx_3) [\varphi_1'(t)] dt \\ &\quad \boxed{\int_a^b a_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + a_2(\varphi(t))\varphi_2'(t) + a_3(\varphi(t))\varphi_3'(t) dt} \end{aligned}$$

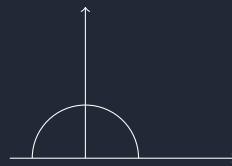
Non dipende dalla parametrizzazione.Dipende dal verso:

$$\int_{\gamma^+} \omega = - \int_{\gamma^-} \omega$$

### Esempio 18.1.

$$\omega(x, y) = ydx - xydy$$

$\gamma : (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$  percorsa in senso orario



$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{\pi} \sin(t)(-\sin(t)) + (-\sin(t)\cos(t))\cos(t) dt = \int_0^{\pi} \sin^2(t) + \sin(t)\cos^2(t) dt = \left[ \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{\cos^3(t)}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

**Teorema 18.1** (integrazione delle forme differenziali esatte).

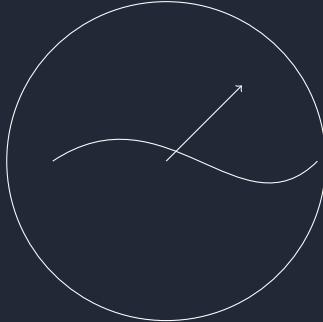
sia  $\omega$  una forma differenziale **esatta e continua** definita nell'aperto di  $A$  di  $\mathbb{R}^3$

sia  $\gamma$  una curva **regolare** a tratti con sostegno contenuto in  $A$  di estremi  $P_0$  e  $P_1$ , orientata nel verso che va da  $P_0$  a  $P_1$

sia  $f$  una primitiva di  $\omega$

Allora:

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_1) - f(P_0)$$



*Dimostrazione.* In gradiente:  $\omega$  è esatta e  $f$  è una sua primitiva. Questo vuol dire che:

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) \\ a_2(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) \\ a_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Sia  $\varphi : [a, b] \rightarrow A$  una parametrizzazione di  $\gamma$  concorde con l'orientazione, in particolare:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= P_0 & \varphi(b) &= P_1 \\ \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \underbrace{\left[ \frac{\partial f}{\partial x_1} \dot{\varphi}_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \dot{\varphi}_2(t) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \dot{\varphi}_3(t) \right]}_{\frac{d}{dt} f(\varphi(t))} dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\varphi(t)) dt \underset{th.f.c.i.}{=} f(\varphi(t))|_a^b = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = f(P_1) - f(P_0) \end{aligned}$$

□

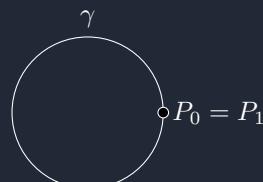
Il lavoro di questo campo lungo una curva è uguale al potenziale calcolato nel punto finale meno il potenziale calcolato nel punto iniziale

**Teorema 18.2** (caratterizzazione delle forme esatte).

sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  un **aperto连通**,  $\omega$  una forma differenziale continua definita su  $A$  e  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  curve regolari a tratti con sostegno contenuto in  $A$ . le tre proprietà seguenti sono equivalenti:

1.  $\omega$  è esatta
2. per ogni curva chiusa  $\gamma$  contenuta in  $A$  risulta  $\int_{\gamma} \omega = 0$
3. Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno gli stessi estremi e lo stesso verso di percorrenza si ha  $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

*Dimostrazione.* •1 → 2



dal teorema precedente

$$\int_{\gamma} \omega = f(P_1) - f(P_0) = 0$$

•2 → 3

$$\gamma_1 \cup \gamma_2^-$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \\ \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{\gamma_2} \omega \end{aligned}$$

•3 → 1

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \int_{\gamma} \omega \\ f(x_1 + h, x_2, x_3) &= \int_{\gamma \cup \varphi} \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3)}{h} &= \int_{\gamma \cup \varphi} \omega - \int_{\gamma} \omega \\ &= \int_{\gamma} \omega + \int_{\varphi} \omega - \int_{\gamma} \omega = \frac{1}{h} \int_0^h (a_1(x_1 + t, x_2, x_3) 1 + a_2(') 0 + a_3(') 0) dt = \frac{1}{h} \int_0^h a_1(x_1 + t, x_2, x_3) dt \quad \text{se chiamato } P(h) = \int \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, x_3) - f(x_1, x_2, x_3)'}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h) - P(0)}{h} = P'(0) = \end{aligned}$$

Il t.f.c.i. garantisce che  $P'(0)$  esiste e che coincide con l'integranda calcolata per  $t = 0$ . cioè con  $a_1(x_1, x_2, x_3)$

Ho quindi dimostrato che:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_1, x_2, x_3)$$

□

### Esempio 18.2.

$$\omega = d(x^2y + \frac{y^3}{3}) = 2xd dx + (x^2 + y^2) dy$$

$$A = \mathbb{R}^2 \quad P_0 = (0, 0) \quad P = (x, y) \quad \gamma : (tx, ty) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{array}{c} | \\ (tx, ty) \xrightarrow{\gamma} P = (x, y) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 (2txty)x + ((tx)^2 + (ty)^2)y dt \\ &= \int_0^1 2t^2 x^2 y + t^2 (x^2 + y^2) y dt = \frac{2}{3} t^3 x^2 y + \frac{t^3}{3} (x^2 + y^2) y \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} x^2 y + \frac{1}{3} (x^2 + y^2) y = x^2 y + \frac{y^3}{3} \end{aligned}$$

**Proposizione 18.2** (Forme chiuse e forme esatte).

sia  $\omega$  una forma differenziale  $C^1$  in  $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\omega = a_1(x)dx_1 + \dots + a_n(x)dx_n$$

DOve  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Si dice che  $\omega$  è **chiusa** se

$$\begin{aligned} \forall i, j = 1, \dots, n \quad i \neq j & \quad \text{risulta} \\ \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i} \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

Cosa diventa se  $n=2$

**Teorema 18.3.**

sia  $A \subset \mathbb{R}^3$  e  $\omega$  una forma differenziale  $C^1$  in  $A$

se  $\omega$  è esatta allora  $\omega$  è chiusa

(vale anche in  $\mathbb{R}^3 \forall n \geq 2$ )

*Dimostrazione.* Se  $\omega$  è esatta,  $\omega = df$ , cioè  $a_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}$   $a_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$   $a_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}$  con  $f$  potenziale di  $\omega$ .

Scegliete  $i, j = 1, 2, 3$  con  $i \neq j$

Poichè  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  sono  $C^1$  sono derivabili e le loro derivate sono continue

In particolare esistono e sono continue:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

La continuità e il teorema di Schwarz garantiscono che sono uguali allora:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} a_j$$

□

**RICHIAMO**  $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(A)$

definisco:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= \nabla_x F = \\ &\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} \\ &= i \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) + j \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) + k \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

**Teorema 18.4.**

sia  $F \in C^1(A)$

se  $F$  è conservativo allora

$$\text{rot } F \equiv 0$$

( $F$  è irrotazionale)

**Domanda:** Se  $\omega$  è una forma chiusa  $\omega$  è esatta?

Se  $F$  è un campo irrotazionale  $F$  è conservativo?

La risposta breve è: in generale no se il dominio è semplicemente connesso si

**Esempio 18.3.**

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Definita e  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\omega$  è chiusa infatti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) &= \frac{-1(x^2+y^2)-(-y)^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) &= \dots = //\end{aligned}$$

È esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ?

Cioè  $\exists f$  definita in tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  t.c.  $\omega = df$  ? **NO**

Se scelgo come curva chiusa la circonferenza:

$$\begin{aligned}(\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi] &= S^1 \\ \int_0^{2\pi} \left( \frac{-\sin(t)}{\sin^2(t) + \cos^2(t)}, (-\sin(t)) \right) + \left( \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \right) \cos(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \\ \int_{S^1} \omega &= 2\pi \neq 0\end{aligned}$$

**Domanda:**  $\omega$  è esatta nel piano  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ ? **SI** es:  $\arctan(\frac{y}{x})$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\text{"}) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \left( \frac{-y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2+y^2} = a_1 \checkmark \\ \frac{\partial}{\partial x}(\text{"}) &= \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{x}{x^2+y^2} = a_2 \checkmark\end{aligned}$$

### Teorema 18.5.

se  $\omega$  è una forma differenziale **chiusa** definita e  $C^1$  in un insieme semplicemente connesso  $A$   
allora  $\exists$  una primitiva di  $\omega$  definita in  $A$ .

### Oss. 18.1.

Un insieme si dice semplicemente connesso se data una curva contenuta in quell'insieme posso deformarla in modo continuo fino a ridurla a un punto.

## 19 4/11/25

Ricordiamo dalle scorse volte:

Se  $\omega$  è esatta  $\Rightarrow \omega$  è chiusa

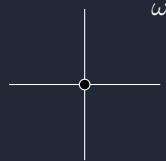
Se  $F$  è conservativo  $\Rightarrow \text{rot} F = 0$

Ci siamo poi chiesti vale il viceversa?  $\leftarrow ?$

In generale NO. Se  $\omega$  è definita su un certo insieme  $A$  ed è chiusa allora non è detto che una funzione  $f$  definita su tutto  $A$  tale che  $\omega = df$

### Esempio 19.1.

Se si cambia il dominio è possibile riuscirci:



$\nexists f$  definita in tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : \omega = df \exists f$  definita in  $\{(x,y) : x > 0\} : \omega = df$

Se  $A$  è semplicemente connesso quindi la risposta è sì.

**Definizione 19.1** (essere semplicemente connesso).

Un aperto  $A$  si dice semplicemente connesso se è connesso e inoltre ogni curva chiusa è internamente contenuta in  $A$  può essere ridotta mediante una deformazione continua in un unico punto senza mai uscire da  $A$

questa definizione è abbastanza intuitiva ma non rigorosa, quella rigorosa si vedrà più avanti.

### Esempio 19.2 (in $\mathbb{R}^2$ ).

Sono semplicemente connessi:

- cerchi
- ellissi
- poligonali
- semipiani
- il piano intero
- il piano privato di una semiretta

Non sono semplicemente connessi:

- il piano o un cerchio (o un ellisse o un poligono) privato di un punto interno: una corona circolare.
- un insieme che presenta un buco.

### Esempio 19.3 (in $\mathbb{R}^3$ ).

sono Sono semplicemente connessi:

- Sfere
- ellisoidi
- poliedri convessi
- una corona sferica
- un semispazio
- lo spazio privato di un numero finito di punti

Non sono semplicemente connessi:

- il toro (ciambella)
- la sfera privata di un diametro
- lo spazio privato di una retta

Tutti gli insiemi connessi sono semplicemente connessi Tutti gli insiemi stellati sono semplicemente connessi

**Definizione 19.2** (insieme stellato).

Un insieme  $A$  si dice stellato

se  $\exists P_0 \in A$  t.c.  $\forall P \in A$ : tutto il segmento ci estremi  $P$  e  $P_0$  è contenuto in  $A$

Per introdurre la seconda def. di semplicemente connesso serve introdurre il concetto di Omotopia tra curve:

### Definizione 19.3 (Omotopia tra curve).

Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  curve contenute in un aperto connesso  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  o  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  e supponiamo che:

$\varphi_1[a, b] \rightarrow A$  sia una curva parametrica di  $\gamma_1$

$\varphi_2[a, b] \rightarrow A$  sia una curva parametrica di  $\gamma_2$

tali che:  $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$   $\varphi_1(b) = \varphi_2(b)$

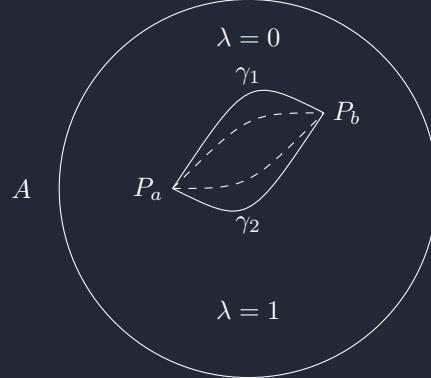
$\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si dicono **omotope** in  $A$  se esiste una funzione continua:  $\phi(t, \lambda) \quad t \in [a, b] \quad \lambda \in [0, 1]$

tale che:

$$1. \phi(t, 0) = \varphi_1(t) \quad \phi(t, 1) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

$$2. \phi(a, \lambda) = P_a \quad \phi(b, \lambda) = P_b \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

E infine che  $\forall \lambda \in [0, 1]$  la curva  $\phi_\lambda$  di equazione  $\phi = \phi(t, \lambda)$  sia contenuta in  $A$ .



### Proposizione 19.1.

Se  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono chiuse  $\varphi_1(a) = \varphi_1(b), \varphi_2(a) = \varphi_2(b)$ , esse si dicono omotope in  $A$  se vale la definizione precedente con la condizione 2) sostituita dalla seguente:

$$2)' \quad \varphi(a, \lambda) = \varphi(b, \lambda) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

### Definizione 19.4 (rigorosa di essere semplicemente connesso).

Un aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^2$  o di  $\mathbb{R}^3$  si dice semplicemente connesso se è connesso e due curve qualsiasi contenute in  $A$  e aventi gli stessi estremi sono omotope.

La def. può essere data in termini di curve chiuse: ogni curva chiusa contenuta in  $A$  è omotopa a una curva costante (cioè che si riduce ad un solo punto).

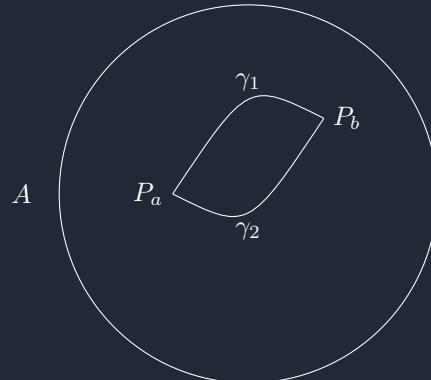
### Teorema 19.1.

Sia  $\omega = a_1(x, y) dx + a_2(x, y) dy$  una forma differenziale  $C^1$

e chiusa in un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^2$  semplicemente connesso

Allora  $\omega$  è esatta.

Vale un enunciato analogo in  $\mathbb{R}^3$



*Dimostrazione.* Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due curve in  $A$  con gli stessi estremi. Poiché  $A$  è semplicemente connesso  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  sono omotope.

$\exists \gamma(t, \lambda) : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow A$  che soddisfa le proprietà enunciate nella def. di omotopia.

Definisco  $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$I(\lambda) = \int_{\text{curva } \gamma_\lambda} \omega = \int_a^b a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) dt$$

Suppongo che  $\varphi(t, \lambda)$  sia  $C^1([a, b] \times [0, 1])$  e che le derivate seconde miste  $\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t}$  siano continue. Ora calcolo la derivata rispetto a  $\lambda$  i calcoli del passaggio precedente:

$$\frac{d}{d\lambda} (I(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda} \left( \int_{\text{curva } \gamma_\lambda} \omega \right) = \int_a^b \frac{d}{d\lambda} \left( a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right) dt$$

Voglio dimostrare che l'ipotesi  $\omega$  chiusa implica che:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \frac{d}{d\lambda} (\quad) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \left( a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right) dt \\ &= \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right]_{t=a}^{t=b} = 0 \\ \\ & \frac{d}{d\lambda} \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial t}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial t}(t, \lambda) \right] \quad \boxed{I} \\ & \frac{d}{dt} \left[ a_1(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(t, \lambda) + a_2(x(t, \lambda), y(t, \lambda)) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(t, \lambda) \right] \quad \boxed{II} \end{aligned}$$

Voglio far vedere che le loro derivate sono uguali:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \boxed{I} &= \left[ \frac{\partial a_1}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot) + \frac{\partial a_1}{\partial y}(\cdot) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(\cdot) \right] \frac{\partial x}{\partial t}(\cdot) + a_1(\cdot) \frac{\partial^2 x}{\partial \lambda \partial t} + \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot) + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\cdot) \frac{\partial y}{\partial \lambda}(\cdot) \right] \frac{\partial y}{\partial t} + a_2(\cdot) \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial t} \\ \frac{d}{d\lambda} \boxed{II} &= \left[ \frac{\partial a_1}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial x}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial a_1}{\partial y}(\cdot) \frac{\partial y}{\partial t}(\cdot) \right] \frac{\partial x}{\partial \lambda}(\cdot) + a_1(\cdot) \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \lambda} + \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x}(\cdot) \frac{\partial x}{\partial t}(\cdot) + \frac{\partial a_2}{\partial y}(\cdot) \frac{\partial y}{\partial t}(\cdot) \right] \frac{\partial y}{\partial \lambda} + a_2(\cdot) \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial \lambda} \end{aligned}$$

So che è chiusa cioè che  $\forall (x, y) \in A \frac{\partial^2 a_1(x, y)}{\partial y} (x, y) = \frac{\partial^2 a_2}{\partial x} (x, y)$

□

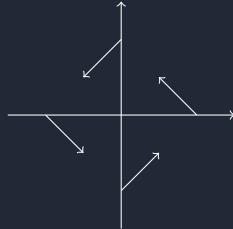
Vari esempi sui campi:

**Esempio 20.1.**

Consideriamo il campo  $F = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

È conservativo?

Calcolare il suo integrale lungo l'ellisse:  $\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$  Questo è un campo di vettori ortogonali:



Per prima cosa per veder ese è conservativo bisogna verificare che sia irrotazionale.

$$\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}$$

Per verificare che sia irrotazionale bisogna verificare che:

$$\left( \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \quad \text{se } F = (F_1, F_2)$$

Il che vorrebbe dire che il rotore di  $F$  sarebbe:

$$rotF(x, y) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & \emptyset \end{pmatrix} = i \left( \cancel{\frac{\partial F_2}{\partial z}} \right) + j \left( \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial z}} \right) + k \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

Svolgendo...

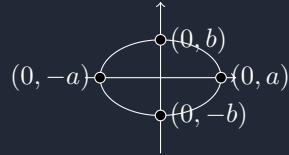
$$F_1(x, y) = -y$$

$$F_2(x, y) = x$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1$$

Un inciso importante:



Le equazioni parametriche di questa ellisse sono:

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

L'equazione cartesiana è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calcoliamo ora il lavoro:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \langle (F_1, F_2); (\dot{x}, \dot{y}) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-y(t), x(t)); (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \langle (-b \sin(t), a \cos(t)); (-a \sin(t), b \cos(t)) \rangle \, dt \\
&= +ab \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = +2\pi ab
\end{aligned}$$

### Esempio 20.2.

Consideriamo il campo  $F = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\|F\| = \frac{\|(x, y)\|}{x^2 + y^2} = \frac{\|x, y\|}{\|(x, y)\|^2} = \frac{1}{\|(x, y)\|}$$

I punti richiesti sono:

- a) è conservativo?
- b) calcolare il lavoro lungo l'ellisse  $3x^2 - xy + 10y^2 = 1$  posta in centro amtiorario
- c) Calcolare il lavoro lungo l'arco di parabola  $\gamma$  di equazione  $y = 1 + x^2$   $x \in [0, 2]$

**punto a**

Comincio col calcolare il lavoro lungo un qualsiasi arco di una qualsiasi circonferenza centrata in  $(0, 0)$ . Mi chiedo quindi se è irrotazionale:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{0(x^2 + y^2) - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{0(x^2 + y^2) - y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2yx}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Quindi è irrotazionale.

$$f(x, y) = \int (F_1, F_2)(x, y) \, dt$$

Cammino che collega un punto fisso  $(x_0, y_0)$  ad un punto  $(x, y)$  (nel verso da  $(x_0, y_0)$  a  $(x, y)$ ) Se il dominio è stellato rispetto a  $(0, 0)$



$$t \in [0, 1] \rightarrow (tx, ty)$$

Ma il mio insieme è stellato?

$$f(x, y) = \int_0^1 \langle (F_1(tx, ty), F_2(tx, ty)), (x, y) \rangle \, dt$$

Qindi  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  **non** è stellato

Qualunque centro  $(x_0, y_0)$  vuoi consideriate c'è sempre un punto  $(x, y)$  con la proprietà che il segmento che unisce  $(x, y)$  a  $(x_0, y_0)$  **non** è tutto contenuto in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Cerco quindi  $f(x, y)$ :

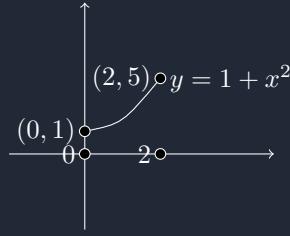
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= F_1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F_2 \\ \text{cioè } \left[ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} \right], \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \int \frac{x}{x^2 + y^2} dx &\xrightarrow{\text{rispetto a } x} \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + d \\ \boxed{f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + d(y)} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{y}{x^2 + y^2} + d'(y) \end{aligned}$$

Se  $d'(y) = 0$   $f$  è primitiva del campo. Basta che scelga  $f(y)$  costante o addirittura  $d \equiv 0$ .

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

**punto b**

è zero **punto c**



$$x \in [0, 2] \rightarrow (x, 1 + x^2)$$

$$\int_{\gamma} F(x, y) = f(2, 5) - f(0, 1) = \frac{1}{2} \ln(4 + 25) - \frac{1}{2} \ln(1)$$

### Esempio 20.3.

Consideriamo il campo  $F = (xy - \sin(z), \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x \cos(z))$  definito in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$

- Controllare se è conservativo e se lo è trovare il potenziale

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} = x \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x} = -\cos(z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{e^y}{z^2} \end{aligned}$$

✓ è irrotazionale

Cerco un potenziale in  $\{z = 0\}$ :

$$\begin{array}{c} \diagup \overbrace{(x, y, z)} \\ (0, 0, 1) \end{array} \xrightarrow{z = 0} (tx, ty, t(z - 1)) \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned}
f \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= xy - \sin(z) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{e^y}{z^2} - x \cos(z)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \frac{x^2}{2}y - (\sin(z))x + c(y, z) \\
\frac{\partial}{\partial y} (") &= \frac{x^2}{2} + \frac{\partial c}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{e^y}{2} \\
\boxed{f = \frac{x^2}{2}y - (\sin(z))x - \frac{e^y}{2} + d(z)} \quad \text{se } \frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{e^y}{z} \Rightarrow c = -\frac{e^y}{z} + d(z) \\
\frac{\partial}{\partial z} (") &= 0 - (\cos(z))x + \frac{e^y}{z^2} + d'(z) \stackrel{?}{=}
\end{aligned}$$

Deve essere  $d'(z) = 0$  ad esempio  $d \equiv 0$

#### Esempio 20.4.

Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, Determinare  $f$  in modo che la forma diff:

$$\omega = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}f(\sqrt{x^2 + y^2})dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}dy$$

sia chiusa in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Trovare anche una primitiva di  $\omega$ .

È chiusa se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}f(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}_{-xy(x^2+y^2)^{-3/2}} \\
\frac{\partial}{\partial y} \left( -x(x^2 + y^2)^{-1/2}f(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \\
&= -x \left[ -\frac{1}{2} \right]
\end{aligned}$$

## 21 6/11/25

**Definizione 21.1** (EDO famiglia di curve).

$$F_c(x, y) = 0$$

famiglia ad 1 parametro ( $c \in \mathbb{R}$ ) di curve. Le ipotesi che devono essere soddisfatte sono

- $F_c \in C^1(A)$  Aperto  $\subseteq \mathbb{R}^2$ , derivabile rispetto  $c$ .

- $(x, y)$  regolare,  $\frac{\partial F_c}{\partial y} \neq 0$

La seconda ipotesi vuol dire che una curva parametrica la possiamo considerare come grafico in  $f(x)$  in un punto in cui è regolare.

Quindi cerco  $y = y(x)$  t.c.  $\boxed{F_c(x, y(x)) = 0} \quad \forall x \in I}$  Derivando si ottiene:

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad & \frac{d}{dx}(F_c(x, y(x))) = 0 \\ \text{cioè} \quad & \boxed{\frac{\partial F_c(x, y(x))}{\partial x} + y'(x) \frac{\partial F_c(x, y(x))}{\partial y} = 0} \quad \forall c \end{aligned}$$

Cerco di ricavare  $c$  e trovo l'equazione:

$$f(x, y, y') = 0$$

**Esempio 21.1.**

parabola con  $v \equiv (0, 0)$

$$\begin{aligned} y &= cx^2 \\ y - cx^2 &= 0 \quad * \\ F_c(x, y) &= y - cx^2 \\ y' - 2cx &= 0 \end{aligned}$$

dalla eq.  $\boxed{*}$  ricavo  $c = \frac{y}{x^2}$  se  $s \neq 0$ , e posso sostituire:

$$\begin{aligned} y' - 2\frac{y}{x^2}x &= 0 \\ y' - 2\frac{y}{x} &= 0 \\ xy' - 2y &= 0; y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{aligned}$$

Ricerca di traiettorie ortogonali a  $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} \Leftrightarrow f(x, y, y') = 0$  E traiettorie ortogonali sono curve che intersecano in un uncio punto ogni curva della famiglia e in tale punto sono  $\perp$  (cioè i rispettivi vettori tangentici sono  $\perp$ )

- Passa per  $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$  cioè  $\exists t \in J$  t.c.  $\begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$
- in  $\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$  i vettori sono  $\perp$

Cioè:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ u(t) \end{pmatrix}_{t=x}$$

Cioè  $1 + y'(x)u'(x) = 0$   
cioè  $u'(x) = -\frac{1}{y'(x)}$        $y' = \frac{1}{u'}$   
Troo l'edo delle traiettorie ortogonali:

$$f(x, u(x), \frac{-1}{u'(x)}) = 0$$

Cerco dunque le traiettorie ortogonali alla famiglia di parabole localmente grafici  $(x, u(x))$  deve soddisfare  $f(x, u, \frac{-1}{u}) = 0$   
cioè:

$$\begin{aligned}\frac{-1}{u'} - 2\frac{u}{x} &= 0 \\ 2uu' &= -x\end{aligned}$$

Passo a risolverla, per prima cosa la metto in forma normale:

$$\begin{aligned}(u^2) &= \frac{-x^2}{2} + k \quad k \in \mathbb{R} \\ u^2 + \frac{x^2}{2} &= k\end{aligned}$$

### Esempio 21.2.

Trovare le curve piane regolari (localmente grafico  $y = y(x)$ )

t.c.  $\forall (x, y) \in \gamma$  la distanza  $((x, y), Q) = \text{distanza}(Q; u(0))$

Dove  $Q =$  intersezione tra la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x, y)$  e l'asse  $y$   
abbiamo il sostegno della curva:

$$\gamma \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Questa è regolare quindi è localmente grafico di funzione, quindi supponiamo  $y = y(x)$ , quindi il vettore tangente a  $\gamma$  in  $(x, y(x))$  è  $\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}$

Questo perchè ho parametrizzato secondo la funzione nel punto come grafico. quindi  $x(t) = t$  e  $y(t) = y(t)$ . che derivati mi danno il vett. tangente. Ora calcoliamo la retta tangente a  $\gamma$  in  $(x, y(x))$  :  $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y(x) \end{pmatrix} \tau + \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}_{\tau \in \mathbb{R}}$

Di conseguenza posso calcolare la distanza come:

$$\begin{aligned}Y - y &= y'(x)(X - x) \Rightarrow Q \equiv (0, y - xy'(x)) \\ \text{dist}^2(Q, (x, y)) &= (x - 0)^2 + (y - (y - xy'(x)))^2 = x^2 + x^2y'^2(x) \\ \text{dist}^2(Q, (1, 0)) &= (1 - 0)^2 + (y - xy' - 0)^2 = (x - xy')^2 + 1 \leftrightarrow x^2 + x^2y'^2 = 1 + y^2 - 2xyy' + y^2x^2 \quad \forall x \in J \\ 2xyy' &= 1 - x^2 + y^2\end{aligned}$$

Siamo in un caso in cui l'equazione diff. non è né lineari né a variabili separabili, il modo migliore (come abbiamo visto nei casi di euler e bernulli) è cercare una sostituzione:

$$2yy' = (y^2)'$$

$$\text{sostituz. } u(x) = y^2(x)$$

$$\boxed{xu' = x^2 + u} \quad \text{è edo lineare in } u$$

$$u' + Au + B = 0$$

Ci chiediamo se è calcolabile per  $x = 0$  che è dove da problemi.

Infatti per  $x = 0$  si ha  $u(0) = -1$  cioè  $y^2(0) = -1$  il che è impossibile quindi imponiamo la condizione  $\boxed{x \neq 0}$

Procedo a risolvere:

$$\begin{aligned}u' - \frac{u}{x} + \frac{x^2 - 1}{x} &= 0 \\ u(x) &= x^2 + cx - 1 \\ y^2(x) &= -x^2 + cx - 1 \\ x^2 - cx + y^2 + 1 &= 0 \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Facciamo un altro esempio

**Esempio 21.3.**

trovare le linee di massima pendenza della funzione  $u(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$

una linea di massima pendenza è il cammino lungo la funzione in cui il gradiente è sempre massimo:

$$\underline{x}(t)_{t \in I} \text{ linea di max. pend. } \Leftrightarrow \dot{\underline{x}} \parallel Du(x(t, y(t)))$$

Mi restringo a studiare le linee che sono localmente grafici  $y = y(x)$ .

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \begin{pmatrix} t \\ y(t) \end{pmatrix}_{t \in I} & \dot{\underline{x}}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}_{t \in I} \\ \text{cerco } y &= y(t) \text{ t.c. } \begin{pmatrix} 1 \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 3t^2 - 3y^2(t) \\ -6ty(t) \end{pmatrix} \\ Du &= \begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 + 2x^2 \\ -6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 \\ -6xy \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 = k(3t^2 - 3y^2(t)) \\ \dot{y}(t) = k(-6ty(t)) \end{cases} \\ \exists k \neq 0 \Rightarrow \dot{y} &= \frac{-6ty}{3(t^2 - y^2)} \\ k &= \frac{1}{3(t^2 - y^2)} \\ \dot{y} &= \frac{-2ty}{t^2 - y^2} & [z = \frac{y}{t}] \end{aligned}$$

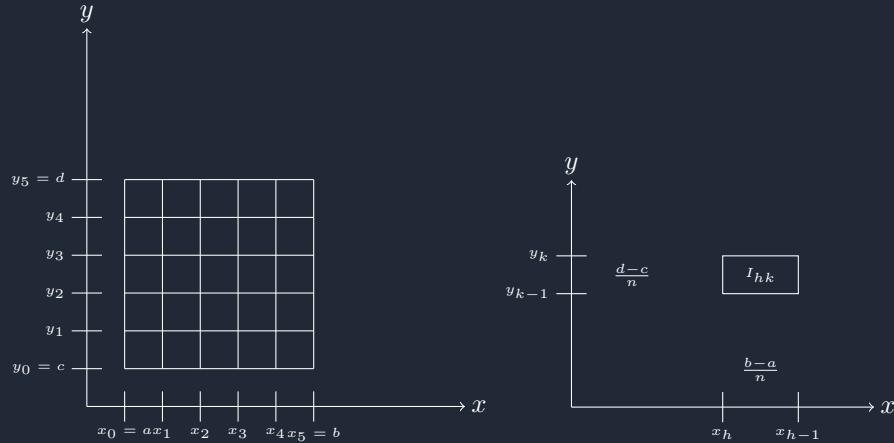
## 22.1 Integrali per funzioni a più variabili

Quando si parla di questi integrali si parla di più concetti.

Ad esempio si può parlare di area in tre o più dimensioni, in intuizione geometrica sarebbe il volume sotteso dal grafico. Anche se non sembra non sono concetti chiari poiché devo definire cosa intendo per area e per volume e fare una th di integrazione si intende definire volumi di insiemi e aree di insiemi, l'area non è un concetto universale (se si parla di casi più particolare), ad es. si prende un quadrato di  $x \leq 1$  e  $y \leq 1$  ma si prendono solo le  $x$  t.c siano razionali e  $y$  t.c siano irrazionali, e questo caso è difficile da definire un'area.

I casi più completi sono le integrazioni di Lebege che non tratteremo in questo corso ci concentreremo invece sull'integrazione di cauchy-riemann e quella di jordan.

Prendiamo per prima cosa il dominio:



Prendo  $n$  parametro,  $n \in \mathbb{N}$

divido  $[a, b]$  in  $n$  parti uguali.

divido  $[c, d]$  in  $n$  parti uguali.

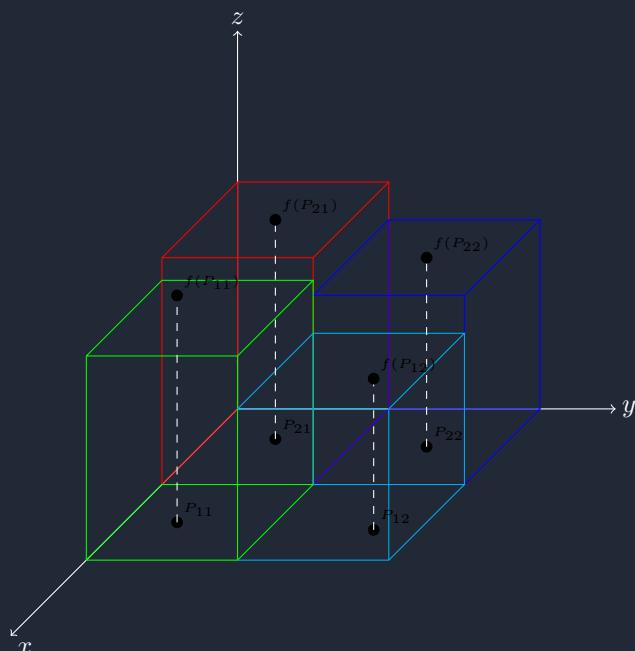
Ottengo così una griglia di  $n^2$  rettangoli.

Chiamo  $I_{hk}$  il rettangolo in posizione  $h, k$

Area di  $I_{hk} = |I_{hk}| = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$  Definisco somma di Cauchy-Riemann come:

**Definizione 22.1.**

$$S_n = \sum_{h,k=1}^n f(P_{hk}) |I_{hk}|$$



Questo è un esempio di somma di Cauchy-Riemann con  $n = 2$ . In cui viene approssimata una funzione  $f(x, y)$  con dei parallelepipedi.

**Definizione 22.2.**

Diremo che la funzione  $f : [a,b] \times [c,d]$ , limitata, è integrabile sul rettangolo  $R = [a,b] \times [c,d]$  se esiste finito il limite di  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  e se tale limite non dipende da come si sono scelti i punti di  $P_{hk}$  nei rispettivi rettangoli ad ogni passo della costruzione.

**Esempio 22.1.**

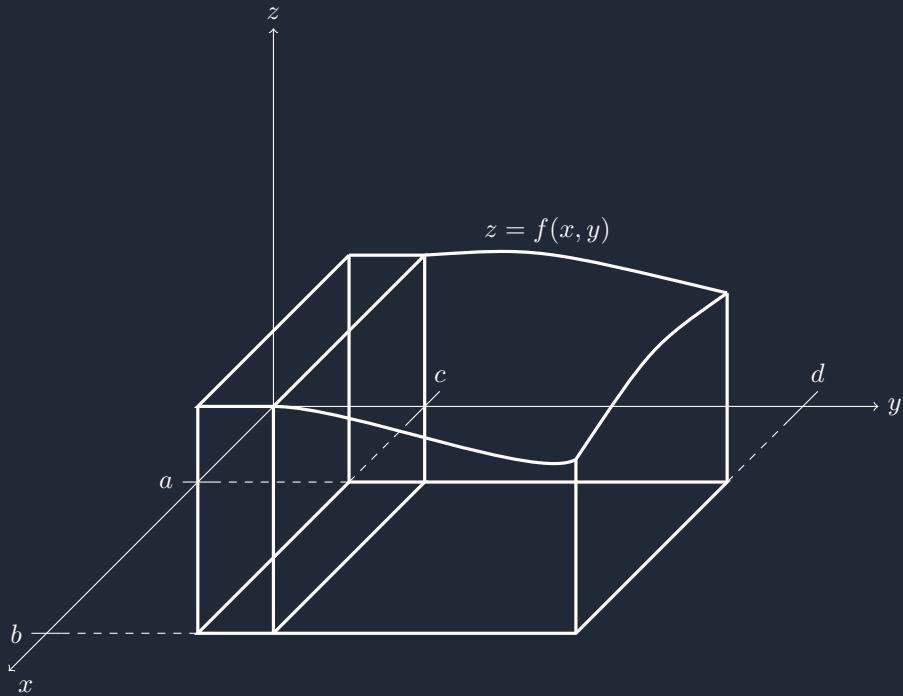
$$f[0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ definita } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f$  NON è integrabile       $S_n = \sum 1|I_{hk}| = 1$

**Teorema 22.1.**

se  $f : [a,b] \times [c,d]$  è continua allora è integrabile.

(no dim)



$$\left( \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy \right) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y) \, dx \right) \, dy$$

**Esempio 22.2.**

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1] \times [0,2]} xe^{xy} \, dx \, dy \\ & \int_0^1 \left( \int_0^2 f(x,y) \, dx \right) \, dy \Rightarrow e^{xy} \Big|_{y=0}^2 \end{aligned}$$

**Teorema 22.2.**

Se  $f : [a,b] \times [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$  è continua  
allora

$$\left( \int_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) \, dx \, dy \right) = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y) \, dx \right) \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) \, dy \right) \, dx$$

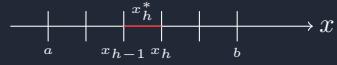
**Lemma 22.1.**

Se  $f(x,y)$  è continua in  $[a,b] \times [c,d]$

La funzione  $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y) \, dy$  è continua in  $[a,b]$ .

Analogamente  $\psi(y) = \int_a^b f(x,y) \, dx$       (no dim)

Ho diviso l'intervallo in varie parti:



$$\int_a^b dx = \sum_{h=1}^n \int_{x_{h-1}}^{x_h} \varphi(x) dx \stackrel{\text{th. della m. int.}}{=} \sum_{h=1}^n \varphi(x_h^*)(x_h - x_{h-1}) = \left( \frac{b-a}{n} \right) \sum_{h=1}^n \varphi(x_h^*)$$

Nell'ultimo passaggio praticamente si è considerato che ogni intervallo è uguale a  $\frac{b-a}{n}$  e questo termine è moltiplicato per ogni termine della sommatoria, siccome non dipende dall'indice si porta in evidenza.

$$= \left( \frac{b-a}{n} \right) \sum_{h=1}^n \int_c^d f(x_h^*, y) dy = \left( \frac{b-a}{n} \right) \sum_{k=1}^n \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_h^*, y) dy$$

Ora siamo passati dalla funzione  $\varphi(x_h^*)$  a  $f(x_h^*, y)$ , lo possiamo fare perchè  $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$  in generale ero solo partito dall'intervallo  $[a, b]$  ma posso farlo con entrambi, così facendo posso riscrivere l'integrale con la sommatoria e riapplicare il th. della media integrale per finire i passaggi.

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{b-a}{n} \right) \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n f(x_h^*, y_k^*)(y_k - y_{k-1}) \\ &= \sum_{h,k=1}^n f(x_h^*, y_k^*) \underbrace{\left( \frac{b-a}{n} \right) \left( \frac{d-c}{n} \right)}_{|I_{hk}|} \\ &= \sum_{h,k=1}^n f(x_h^*, y_k^*) |I_{hk}| \end{aligned}$$

Si ricorda che abbiamo supposto che la funzione sia continua, e quindi integrabile. Arriviamo ad una particolare somma di rimann che dipende dai punti che non possiamo scegliere arbitrariamente ma ci sono stati forniti dal th. della media integrale.

## 22.2 Integrali su domini non rettangolari

**Definizione 22.3.**

sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato

sia  $R = [a, b] \times [c, d]$  un rettangolo contenente  $\Omega$

e sia  $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$  definita:  $\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$

Se  $\tilde{f}$  è integrabile su  $R$  diremo che  $f$  è integrabile su  $\Omega$  e:

$$\int_R \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_\Omega f(x, y) dx dy$$

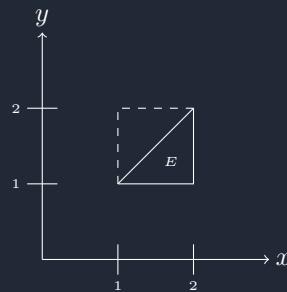
**Definizione 22.4** (insiemi semplici e regolari).

$E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice *y-simplice* se è del tipo:

$$E \{ (x, y) : x \in [a, b] \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

con  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue

Inoltre si dice *regolare* se è unione di un numero finito di insiemi semplici.





## 23 19/11/25

### Definizione 23.1.

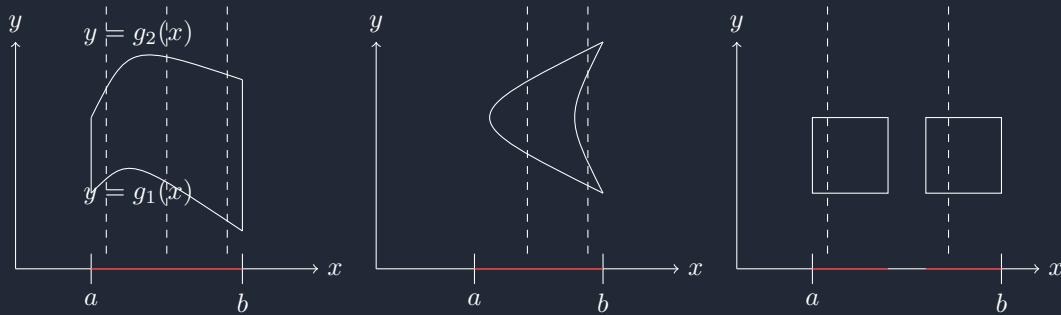
Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$

y-simplice è del tipo:

$$E = \{(x, y) : x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Dove  $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue

\*Un nome spesso usato per y-simplice è "normale rispetto alle x"



Perchè una funzione sia y-simplice deve poter essere proiettata sull'asse delle x in modo che formi un solo segmento, inoltre qualsiasi retta lo intersechi verticalmente intersecandolo al massimo in due punti.

Perchè una funzione sia x-simplice deve poter essere proiettata sull'asse delle y in modo che formi un solo segmento, inoltre qualsiasi retta lo intersechi orizzontalmente intersecandolo al massimo in due punti.

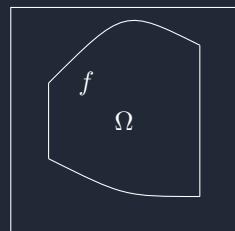
### Esempio 23.1.

### Teorema 23.1.

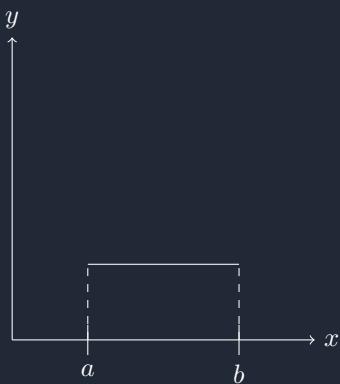
Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $\Omega$  e

se  $\Omega$  è regolare

allora  $f$  è integrabile



### 23.1 Misura di un insieme del piano



### Definizione 23.2.

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato

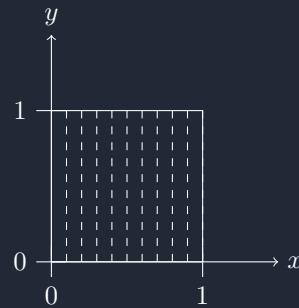
$\Omega$  si dice misuraile se la funzione costante 1 in  $\Omega$  è integrabile.

In tal caso chiameremo misura (o area) di  $\Omega$  e indicheremo con il simbolo  $|\Omega|$  il numero:

$$|\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy$$

Oss. 23.1.

- i) Se  $\Omega$  è regolare allora è misurabile (perchè la funzione è continua in  $\Omega$  e quindi integrabile per il th. precedente).
- ii) Se  $\Omega = \{(x, y) : x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, y \in [0, 1]\}$



$\Omega$  NON è misurabile

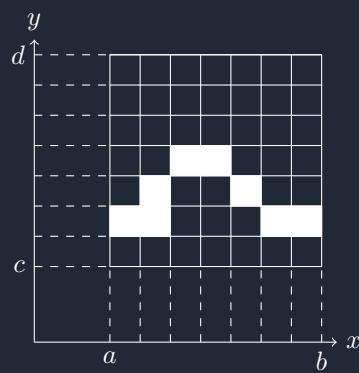
Quando Un insieme è misurabile e ha misura uguale a zero?

### Proposizione 23.1.

Un insieme limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  è misurabile e ha misura zero

se e solo se vale la seguente proprietà:

Detto  $R$  un rettangolo contenente  $\Omega$  considerata la suddivisione di  $R$  in  $n^2$  rettangoli uguali (come nella def. di integrale) e detta  $A_n$  la somma delle aree dei rettangoli che hanno intersezione non vuota con  $\Omega$  si ha che  $A_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$



Rappresentazione di una curva sul dominio.

$g(x)$  continua in  $[a, b]$

Il grafico di  $g$  ha misura nulla

### Proposizione 23.2.

L'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

### Corollario 23.1.1.

Il bordo di un insieme semplice e il bordo di un insieme regolare hanno misura nulla.

**Teorema 23.2.**

Sia  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un dominio regolare e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata continua a eccezione di un insieme di misura nulla di punti di discontinuità.

Allora è integrabile

**Esempio 23.2.**

$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \leq x \\ -1 & \text{se } y < x \end{cases}$$

**Teorema 23.3.**

se  $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  è limitata e continua salvo un insieme di misura nulla di punti di discontinuità allora valgono ancora le formule di riduzione cioè:

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

**Proposizione 23.3.**

sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  limitato e misurabile,  $f$  e  $g$  funzioni integrabili in  $\Omega$ ,  $c \in \mathbb{R}$

a) l'integrale è lineare:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g) \, dx \, dy &= \int_{\Omega} f \, dx \, dy + \int_{\Omega} g \, dx \, dy \\ \int_{\Omega} c f \, dx \, dy &= c \int_{\Omega} f \, dx \, dy \end{aligned}$$

b) se  $f \geq 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f \, dx \, dy \geq 0$

se  $f \geq g \Rightarrow \int_{\Omega} f \, dx \, dy \geq \int_{\Omega} g \, dx \, dy$

In particolare dato che  $-|f| \leq f < |f|$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega} |f| \, dx \, dy \leq \int_{\Omega} f \, dx \, dy \leq \int_{\Omega} |f| \, dx \, dy \Rightarrow \left| \int_{\Omega} f \, dx \, dy \right| \leq \int_{\Omega} |f| \, dx \, dy$$

c) se  $\Omega' \subseteq \Omega$  è misurabile

allora  $f$  è integrabile in  $\Omega'$ , se inoltre  $f \geq 0$

allora  $\int_{\Omega'} f \, dx \, dy \leq \int_{\Omega} f \, dx \, dy$

d) se  $\Omega_1, \Omega_2$  sono domini regolari,  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  ha misura nulla e  $f$  è integrabile in  $\Omega_1 \cup \Omega_2$

allora

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f \, dx \, dy = \int_{\Omega_1} f \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} f \, dx \, dy$$

e) se  $|\Omega| = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} f \, dx \, dy = 0$

**Teorema 23.4** (formula di riduzione nel caso di insiemi semplici).

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $\Omega$  un dominio x-semplice, cioè:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

con  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Allora:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) \, dy$$

**Esempio 23.3.**

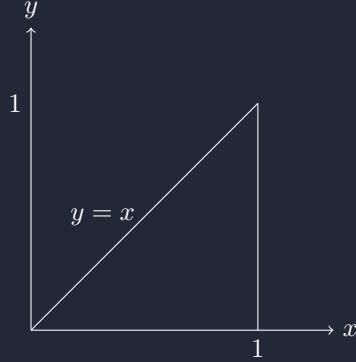
calcolare  $\int_{\Omega} xy \, dx \, dy$

$$\Omega = \{(x, y) : y \in [0, 1], y^2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\int_{\Omega} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_y^{\sqrt{y}} xy \, dx \right) \, dy = \int_0^1 \left( \frac{x^2 y}{2} \Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}} \right) \, dy = \int_0^1 \left( \frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{2} \right) \, dy = \left[ \frac{y^3}{6} - \frac{y^6}{12} \right]_0^1 = \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{12} \right) - 0$$

**Esempio 23.4.**

$$\int_{\Omega} e^x \, dx \, dy$$



$$y\text{-semplice} = \{(x, y) : x \in [0, 1] \quad 0 \leq y = x\}$$

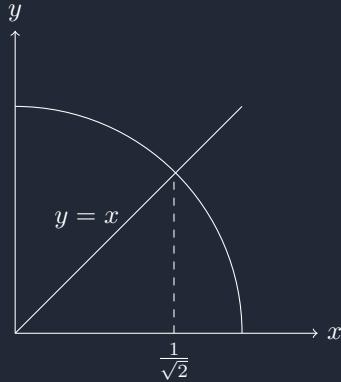
$$\int_0^1 \left( \int_0^x e^{x^2} \, dy \right) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2}]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$$

$$x\text{-semplice} = \{(x, y) : y \in [0, 1] \quad y \leq x \leq 1\}$$

$$\int_0^1 \left( e^{x^2} \, dx \right) \, dy$$

**Esempio 23.5.**

Calcolare  $\int_{\Omega} x(1-y) \, dx \, dy$  con  $\Omega$  che è l'area tra un arco di raggio 1 e una retta  $y = x$ :



$$\Omega \text{ è } x\text{-semplice} = \{(x, y) : y \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \quad y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left( \int_y^{\sqrt{1-y^2}} x(1-y) \, dx \right) \, dy$$

$$y\text{-semplice} = \{(x, y) : x \in [0, 1] \quad 0 \leq y \leq h(x)\}$$

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ \sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, 1] \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{h(x)} x(1-y) \, dy \right) \, dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (x(1-y)) \, dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (x(1-y)) \, dy$$

## 24 20/11/25

Dalla lez. precedente si richiama un teorema:

### Teorema 24.1.

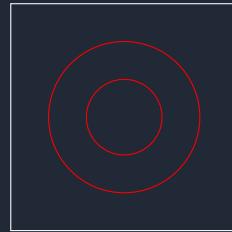
*Sia  $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  un dominio regolare e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata continua a eccezione di un insieme di misura nulla di punti di discontinuità.*

Allora è integrabile

Tra quelli visti fino ad esso è il più generale

### Esempio 24.1.

*ci permette ad esempio di dire che se ho una funzione in un dominio regolare, questa è integrabile perché se la vado a mettere in un rettangolo.*



Da qui si vede che la ha misura 0.

Altro richiamo dalla lezione scorsa:

### Teorema 24.2 (formula di riduzione nel caso di insiemi semplici).

Sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continua e sia  $\Omega$  un dominio x-semplice, cioè:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

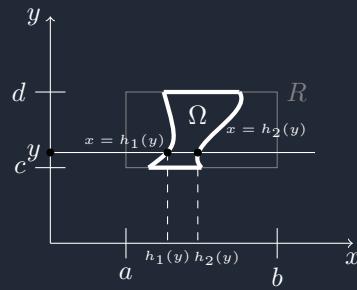
con  $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  continue.

Allora:

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Vale una formula analoga per domini y-semplici

*Dimostrazione.* Ora procediamo a dimostrarla

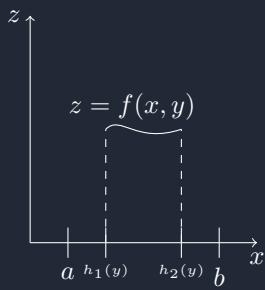


definisco

$$\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R} \text{ come } \tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{se } (x, y) \in R \setminus \Omega \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} f dx dy = \int_R \tilde{f} dx dy = \int_c^d \left( \int_a^b \tilde{f}(x, y) dx \right) dy \quad [\ast]$$

grafico di  $\tilde{f}(x, y)$  come funzione di  $x$  con  $y$  fissato



$$\begin{aligned} \int_a^b \tilde{f} dx &= \left( \int_a^{h_1(y)} + \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} + \int_{h_2(y)}^b \right) \tilde{f}(x, y) dx \\ &= 0 + \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx + 0 = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \end{aligned}$$

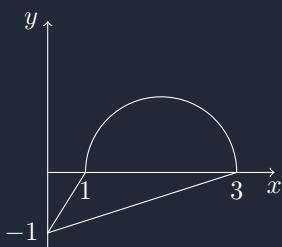
Da adesso se torniamo al passaggio  $\boxed{*}$

$$= \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

□

### Esempio 24.2.

Ho un semicerchio di raggio 1 e centro (2, 0)



Prendo il dominio:  $(x - 2)^2 + y^2 = 1$  e lo scrivo come x-semplifico e y-semplifico:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y) : x \in [0, 1] \quad -1 + \frac{x}{3} \leq y \leq -1 + x\} \\ D_2 &= \{(x, y) : x \in [1, 3] \quad -1 + \frac{x}{3} < y \leq \sqrt{1 - (x - 2)^2}\} \end{aligned}$$

Procedo ora con l'integrale:

$$\text{si ricorda: } \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

Calcolo vero e proprio:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} xy \, dx \, dy &= \int_{D_1 \cup D_2} = \int_{D_1} + \int_{D_2} = \int_0^1 dx + \int_{-1+\frac{x}{3}}^{-1+x} xy \, dx \, dy + \int_1^3 dx \int_{-1+\frac{x}{3}}^{\sqrt{1+(x-2)^2}} xy \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 dx \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_{y=-1+\frac{x}{3}}^{y=-1+x} + \frac{1}{3} dx \left[ \frac{xy^2}{2} \right]_{y=-1+\frac{x}{3}}^{y=\sqrt{1-(x-2)^2}} \end{aligned}$$

## 24.1 Cambiamenti di variabili

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx \, dy$$

### Esempio 24.3.

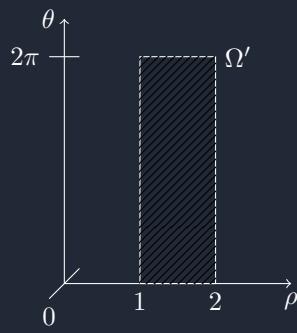
$$\Omega = [B(0, 2) \setminus B(0, 1)]$$

$$\int_{\Omega} x^2 \, dx \, dy$$

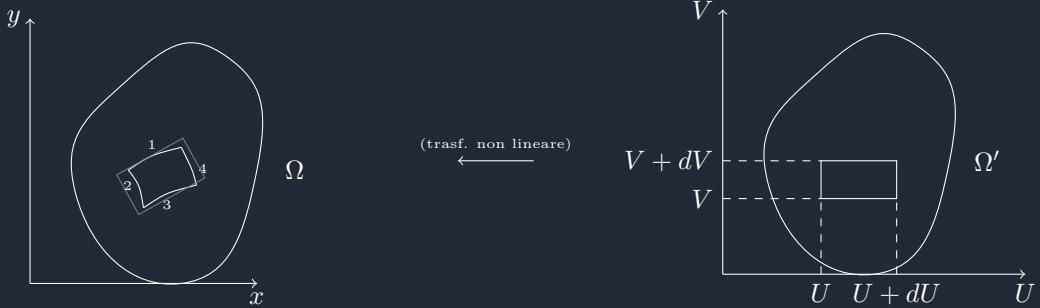
Cambio in coordinate polari:

$$(x, y) \rightarrow (\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\int_{\Omega'} \rho^2 \cos^2(\theta) \, dx \, dy \xrightarrow{?} (d\rho \, d\theta)$$



## 24.2 cambiamento di differenziale



I vari lati distorti del parallelepipedo sono descritti dalle seguenti equazioni:

- 1 :  $g(U, V + dV), h(U, V + dV)$
- 2 :  $g(U, V), h(U, V)$
- 3 :  $g(U + dU, V), h(U + dU, V)$
- 4 :  $g(U + dU, V + dV), h(U + dU, v + dV)$

Fondamentalmente approssimeremo l'area del parallelepipedo irregolare ad una regolare per calcolarla...

$$\begin{cases} x = g(U, V) \\ y = h(U, V) \end{cases} \quad T : \underset{\subseteq \text{piano}}{\Omega'} \rightarrow \underset{\subseteq \text{piano}}{\Omega}$$

Supponiamo che:

- $T$  sia biunivoca  $\Omega' \rightarrow \Omega$
- le funzioni  $g$  e  $h$  siano  $C^1(\Omega')$
- la matrice Jacobiana di  $T$  ha  $\det \neq 0$  in ogni  $(U, V) \in \Omega'$

Con lo Jacobiano che è:

$$\mathcal{J}(U, V) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial U} & \frac{\partial g}{\partial V} \\ \frac{\partial h}{\partial U} & \frac{\partial h}{\partial V} \end{pmatrix}$$

**Teorema 24.3** (formula di cambiamento di variabili).

se  $\Omega$  è regolare

se  $T$  soddisfa le ipotesi scritte adesso

allora:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Omega'} f(g(U, V), h(U, V)) |\det \mathcal{J}_T(U, V)| \, du \, dv$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) = g(\rho, \theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) = h(\rho, \theta) \end{aligned}$$

La mia Jacobiana diventa:

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix} \det(\mathcal{J}) = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho \\ \int_{\Omega} x^2 dx dy &= \int_{\Omega'} \rho^2 \cos^2(\theta) d\rho = \int_0^{2\pi} d\theta (\cos^2(\theta)(4 - \frac{1}{4})) \\ &= \frac{15}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{15}{4}(0 + \pi) = \frac{15\pi}{4}\end{aligned}$$

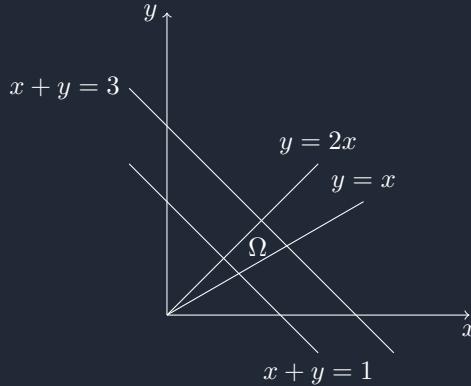
$$\begin{aligned}(g(U, V + dV) - g(U, V), h(U, V + dV) - h(U, V)) \\ \approx \left( \frac{\partial g}{\partial V} dV, \frac{\partial h}{\partial V} dV \right) \left( \frac{\partial g}{\partial U} dU, \frac{\partial h}{\partial U} dU \right) \\ = \left( \frac{\partial g}{\partial V}, \frac{\partial h}{\partial V} \right) dV \\ \mathcal{J}(U, V) = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial U} & \frac{\partial g}{\partial V} \\ \frac{\partial h}{\partial U} & \frac{\partial h}{\partial V} \end{pmatrix} \right| dU dV\end{aligned}$$

#### Esempio 24.4.

Prendiamo l'integrale:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{xy} dx dy$$

Sul dominio  $\Omega$ :



$$\begin{aligned}\begin{cases} U = x + y \\ V = \frac{y}{x} \end{cases} \quad \left\{ \Omega' = \{(U, V) : 1 \leq U \leq 3, 1 \leq V \leq 2\} \right. \\ \begin{cases} x = \frac{U}{1+V} \\ y = \frac{UV}{1+U} \end{cases} \rightarrow \mathcal{J}_T = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+V} & -\frac{U}{(1+V)^2} \\ \frac{U}{1+V} & \frac{1}{(1+V)^2} \end{pmatrix} |\det \mathcal{J}| = \frac{|U|}{(1+V)^2} \\ \int_{\Omega'} \frac{1}{\left(\frac{U}{1+V}\right) \left(\frac{UV}{1+U}\right) \frac{|U|}{(1+V)^2}} dU dV = \int_1^3 dU \int_1^2 \frac{(1+V)^2}{U^2 V} dV = \dots \ln(2) \ln(3)\end{aligned}$$

#### Esempio 24.5.

$$\int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \quad \Omega = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Cambio di variabile che semplifica il dominio:

$$\begin{aligned}x - 1 &= \rho \cos(\theta) \\ y &= \rho \sin(\theta) \\ \det \mathcal{J} &= \rho \quad \Omega' = \{0 \leq \rho \leq 1, \theta \int [0, 2\pi]\} \\ \int_{\Omega'} \rho \sqrt{1 + \rho \cos(\theta)} d\rho d\theta &= \int_{\Omega'} \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos(\theta)} d\rho d\theta\end{aligned}$$

Cambio di variabile che mi semplifica la funzione, scelgo coordinate polari cnetrate in  $(0, 0)$  quindi avrò:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \\ & (\rho \cos(\theta))^2 + \rho^2 \sin^2(\theta) = 1 \\ & \rho^2 \cos^2(\theta) + 1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) = 1 \\ & \rho^2 - 2\rho \cos(\theta) = 0 \\ & \rho(\rho - 2 \cos(\theta)) = 0 \\ & \Omega' = \{(\rho, \theta) : \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad , \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos(\theta)\} \\ & \int_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \ dx \ dy = \int_{\Omega''} \sqrt{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)} \rho \ d\rho \ d\theta \\ & \int_{\Omega''} \rho^2 \ d\rho \ d\theta \quad \text{se } (x, y) \in \Omega \text{ allora } 0 \leq \rho \leq 2 \\ & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos(\theta)} \rho^2 \ d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \cos(\theta))^3}{3} \ d\theta = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \dots \end{aligned}$$

**Esempio 24.6.**

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)} \ dx \ dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \ d\rho \\ & \left[ -\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_0^R \\ & - \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{-R^2}}{2} - 1 \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{e^{-R^2}}{2} \right) - \int_0^{2\pi} \left( \frac{e^{-R^2}}{2} - 1 \right) = 2\pi \left( 1 - \frac{e^{-R^2}}{2} \right) \end{aligned}$$

### 24.3 integrali doppi generalizzati

- o il dominio è illimitato
- o la funzione è illimitata

**Esempio 24.7.**

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+y^2} \ dx \ dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} e^{-x^2+y^2} \ dx \ dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \pi(1 - e^{R^2}) = \pi$$

Posso pensare  $\mathbb{R}^2$  come:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+y^2} \ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} \ dy \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \ dy = \pi \end{aligned}$$

Questo lo so che perchè so che il quadrato di questo integrale è  $\pi$  quindi cos' posso conoscere l'integrale della gaussiana che è  $\sqrt{\pi}$

**Esempio 24.8.**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \ dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \ dx$$

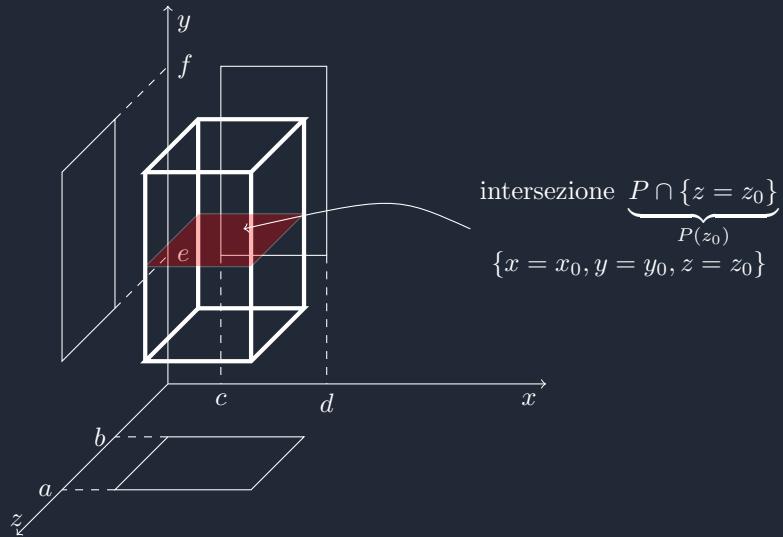
Quindi il primo integrale è finito se  $\alpha < 1$  mentre il secondo è finito se  $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} & \int_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \ dx \ dy \quad \int_{R^2 \setminus (B(0,1))} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} \ dx \ dy \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

Quest'ultimo è finito se  $\alpha < 2$  ed è infinito se  $\alpha \geq 2$

**25 25/11/25**

## 25.1 integrali tripli



**Proposizione 25.1** (integrazione per fili).

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y, z) : x \in [a, b], y \in [c, d], z \in [e, f]\} \\ &= [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \\ \int_P f \, dx \, dy \, dz &= \int_{[a, b] \times [c, d]} \left( \int_e^f f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy \end{aligned}$$

**Proposizione 25.2.**

Formula di integrazione "per fili" per un dominio più generale:

Supponiamo che  $\Omega$  si possa rappresentare in questa forma:

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

dove  $D$  è un dominio

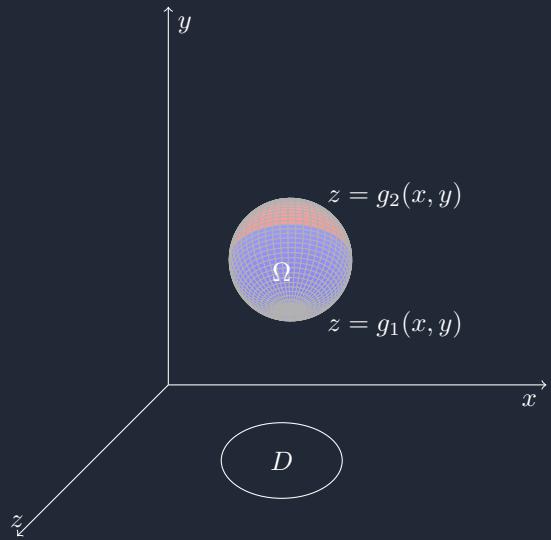
Allora se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è continua l'integrale si può calcolare mediante:

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_D \left( \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

**Esempio 25.1.**

Una sfera nello spazio il cui dominio è un cerchio di raggio 1 e centrato nell'origine.

Il dominio è un cilindro per ottenere una sfera devo prendere come limitazioni superiori e inferiori le funzioni che mi danno due semisfere.



$\Omega$  = sfera di centro  $(0,0,0)$  e raggio 1

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : (x, y) \in D, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \right\}$$

Ora si passa a fare l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x^2 z \, dx \, dy \, dz &= \int_D \left( \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 z \, dz \right) dx \, dy \\ &= \int x^2 (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho (\rho \cos \theta)^2 (1 - \rho^2) \, d\rho = \dots = \frac{\pi}{24} \end{aligned}$$

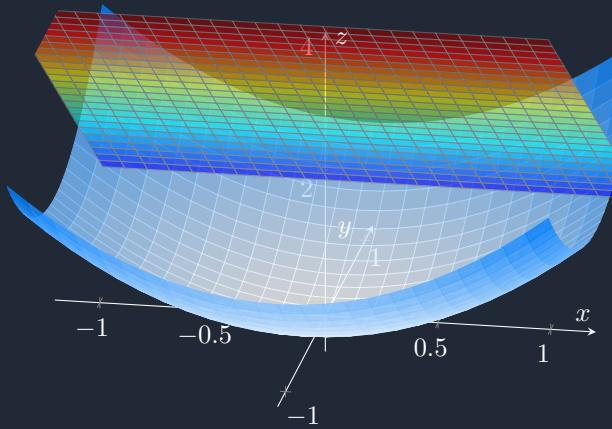
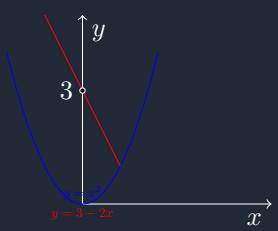
### Esempio 25.2.

Prendiamo ora il paraboloide  $z = x^2 + y^2$

E prendiamo  $\Omega =$  la regione compresa tra il paraboloide  $z = x^2 + y^2$  e il piano  $z = 3 - 2y$

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz \\ \Omega &= \{(x, y, z) : (x, y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 3 - 2y\} \end{aligned}$$

Vista da davanti viene:



Per determinare  $D$  cerco gli  $(x, y)$  tali che la  $z$  del piano e la  $z$  del paraboloide sono uguali:

$$\begin{cases} z = 3 - 2y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 3 - 2y \\ x^2 + (y + 1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

Passando ora a calcolare l'integrale:

$$\int_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{3-2y} 1 dz =$$

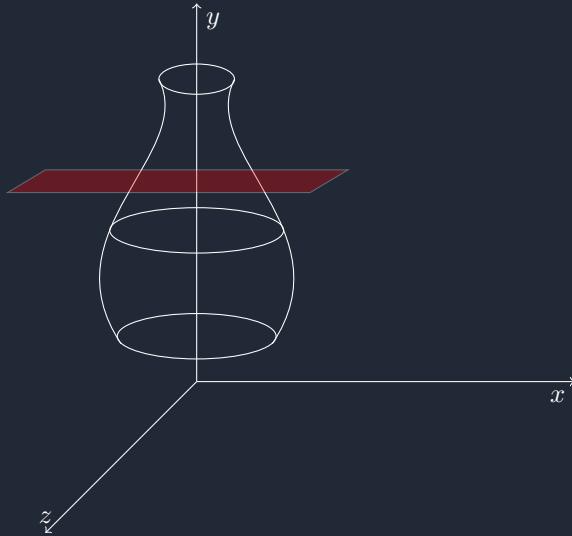
→ passaggio in polari  $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y + 1 = \rho \sin(\theta) \end{cases}$

$$\int_D dx dy 4 - x^2 - (y+1)^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho (4 - \rho^2) d\rho = 8\pi$$

$$D \rightarrow \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq 2, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

## 25.2 curve nello spazio

Prendiamo una curva di questo tipo:



Qui l'integrale per fili è poco pratico se non addirittura impossibile.

Si usa quindi il metodo della cosiddetta integrazione "per fette" o "per strati".

$$\Omega = \{(x, y, z) : h_1 \leq z \leq h_2, (x, y) \in \Omega(z)\}$$

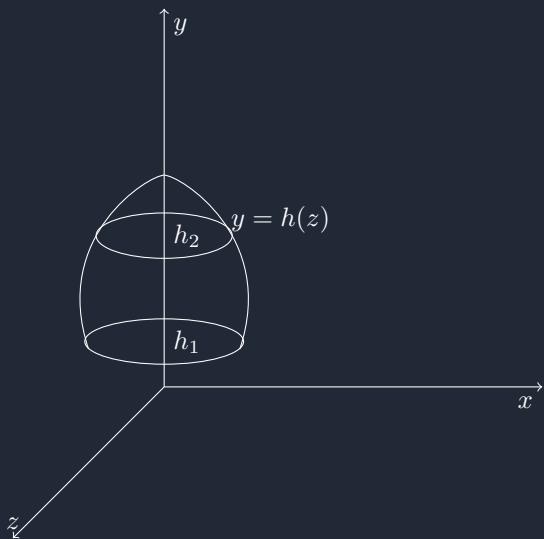
Dove  $\forall z \in [h_1, h_2]$ ,  $\Omega(z)$  è un dominio regolare del piano.

**Proposizione 25.3** (integrazione per strati).

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \int_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

**Esempio 25.3.**

volume di un solido di rotazione:



Ruotando la curva attorno all'asse  $y$  ottengo un solido di rotazione.

$$\Omega(z) = \text{cerchio } x^2 + y^2 \leq h^2(z)$$

Per calcolare il volume:

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\Omega) &= |\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{h_1}^{h_2} \left( \underbrace{\int_{x^2+y^2 \leq h^2(z)} \, dy}_{\text{area del cerchio } = \pi h^2(z)} \right) dz = \pi \int_{h_1}^{h_2} h^2(z) \, dz \end{aligned}$$

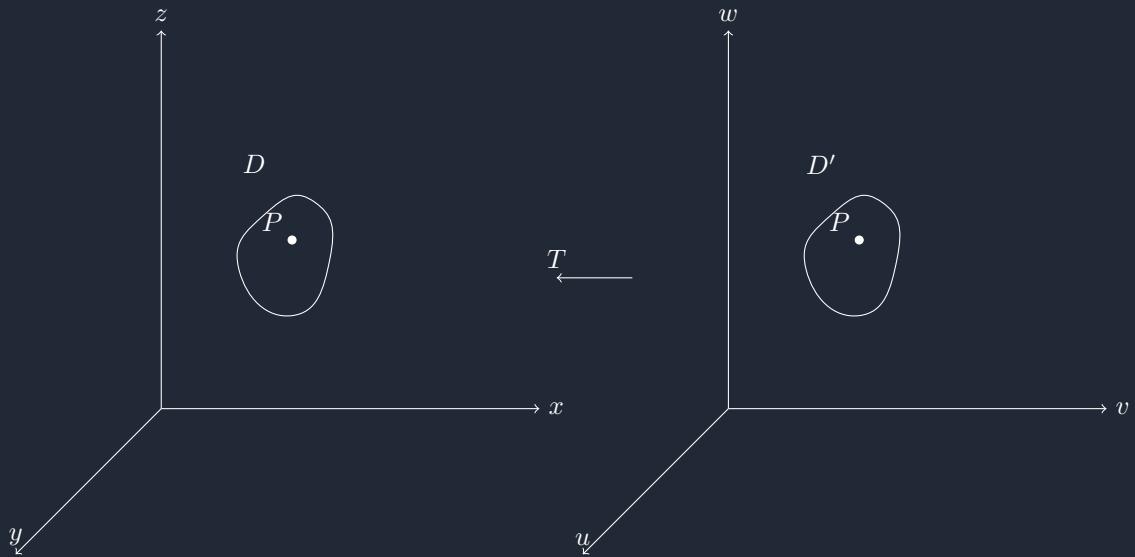
Quindi sfera di raggio  $R$  e centrata nell'origine:

$$\text{volume sfera} = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) \, dz = \pi \left[ R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

## 26 26/11/25

### 26.1 cambiamenti di variabili per integrali triple

La situazione è analoga al caso del piano e agli integrali doppi.



$$\begin{aligned}x &= a(u, v, w) \\y &= b(u, v, w) \\z &= c(u, v, w)\end{aligned}$$

- Si suppone che  $a, b, c$  siano  $C^1$
- La trasformazione da  $D \rightarrow D'$  è biunivoca
- La matrice Jacobiana della trasformazione abbia  $\det \neq 0$  in ogni punto di  $D'$

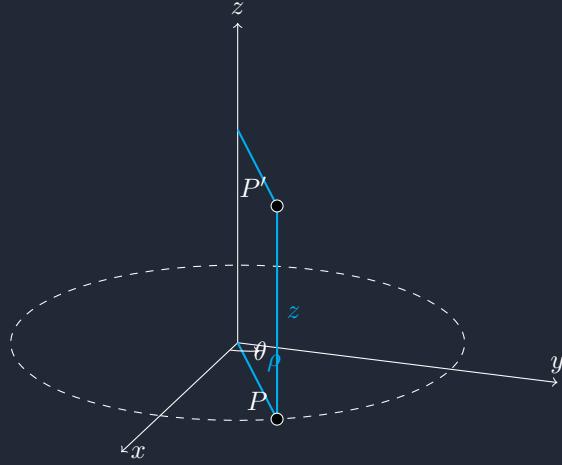
Se  $f$  è continua in  $D$  allora:

$$\int_D f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{D'} f(a(u, v, w), b(u, v, w), c(u, v, w)) \cdot |\det(\text{Jac})| \, du dv dw$$

**Definizione 26.1** (Coordinate cilindriche).

$$P = (x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \theta, z)$$

$$\begin{cases} z = z \\ x = \rho \cos(\theta) & |\det J| = \rho \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$



**Esempio 26.1.**

$$\int_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$$

$D$  è l'insieme del limitato da  $z = 0, z = 1$  dalle superfici cilindriche:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 4$$

Dai piani  $x = 0$  e  $y = 0$

**Come lo scrivo in coordinate cilindriche?**

$z$  si può scrivere come  $1 \leq \rho \leq 4$  per le altre coordinate:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq y \\ 0 &\leq \rho \cos(\theta) \leq \rho \sin(\theta) \end{aligned}$$

Quindi il dominio in coordinate cilindriche diventa:

$$D' = \left\{ (\rho, \theta, z) : z \in [0, 1], \quad \rho \in [1, 2], \quad \theta \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Quindi procedendo con l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{D'} \underbrace{(\rho \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\theta))^2}_{f \text{ è espressa in termini di } \rho, \theta, z} \cdot \underbrace{\rho}_{|\det J|} \, d\rho \, d\theta \, dz \\ &= \int_{D'} \rho^3 \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_{\rho \in [1, 2], \theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]} \left( \int_0^1 \rho^3 \, dz \right) \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \int_1^2 \left( \rho^3 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \, d\rho = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \cdot \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15\pi}{16} \end{aligned}$$

### Esempio 26.2.

Sia  $D$  l'insieme di punti sopra il paraboloido  $z = x^2 + y^2$  e dentro la sfera i centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $\sqrt{6}$ . In termini di disuguaglianze.

$$D = \{(x, y, z) : z \geq x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 6\}$$

Calcolare volume  $D = \int_D 1 \, dx \, dy \, dz$

Esprimere  $D$  in coordinate cilindriche:

$$D' = \{(\rho, \theta, z) : z \geq \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta), \quad \rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta) + z^2 \leq 6\}$$

$$D' = \{(\rho, \theta, z) : z \geq \rho^2, \quad \rho^2 + z^2 \leq 6\}$$

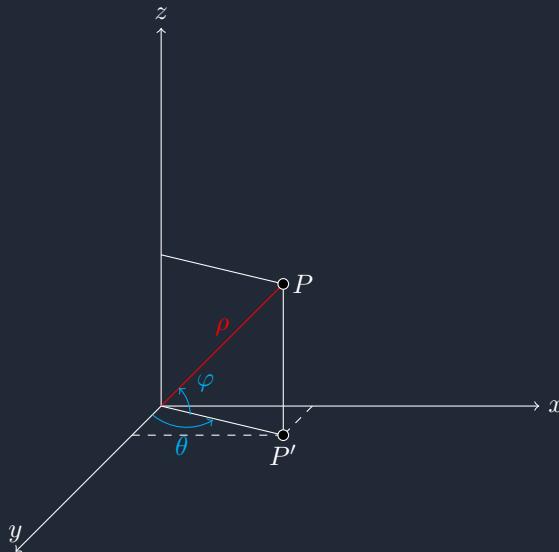
$$D' = \{(\rho, \theta, z) : (\rho, z) \in E, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Passando all'integrale:

$$\begin{aligned} \int_D 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_{D'} 1 \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_E \left( \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \right) d\rho \, dz \\ &= 2\pi \int_E \rho \, d\rho \, dz \\ E &= \{(\rho, z) : \rho \in [0, \sqrt{2}], \quad \rho^2 \leq z \leq \sqrt{6 - \rho^2}\} \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{6-\rho^2}} \rho \, dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \left( \sqrt{6 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho \\ &= 2\pi \left( \int_0^{\sqrt{2}} \rho \sqrt{6 - \rho^2} \, d\rho - \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \, d\rho \right) \\ &= 2\pi \left( \left[ -\frac{1}{3}(6 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} - \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \right) = 2\pi \left( -\frac{1}{3}(6 - 2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}6^{\frac{3}{2}} - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \right) \\ &= 2\pi \left( -\frac{8}{3} + \frac{6\sqrt{6}}{3} - 1 \right) = \frac{2\pi}{3}(6\sqrt{6} - 11) \end{aligned}$$

## 26.2 coordinate sferiche

A differenza delle coordinate cilindriche, si utilizzano due angoli invece di uno e due coordinate per la distanza.

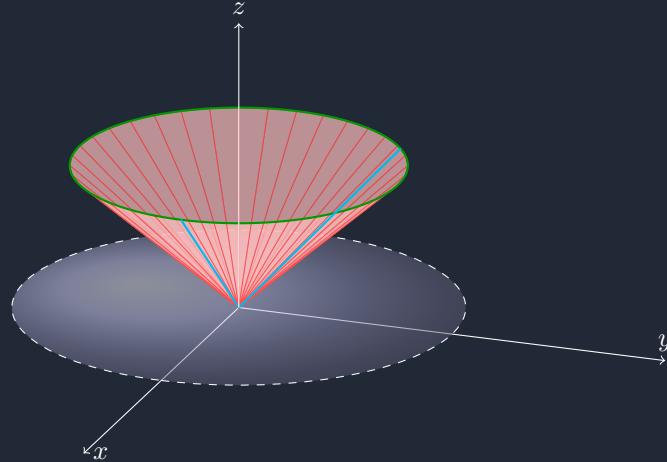


Dove  $\rho$  è la distanza di  $P$  da  $(0,0,0)$ , e  $P$  è definito da  $\rho, \theta, \varphi$

$$\begin{aligned}\rho &\geq 0 \\ \varphi &\in [0, \pi] \\ \theta &\in [0, 2\pi)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} z = \rho \cos(\varphi) \\ x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \end{cases} \quad |\det J| = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Prendiamo ora  $\rho = \text{cost}$  e  $\varphi = \text{cost}$  e ho quindi due sfere centrate in  $(0,0,0)$  e ho quindi coni circolari con asse di simmetria l'asse  $z$ .



Se invece tengo  $\theta$  costante ho dei semipiani contenenti l'asse  $z$ .

### Esempio 26.3.

Sia  $H$  la sfera  $\{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$

Supponiamo che la densità di massa  $d(x, y, z) = (2R - \rho)$

Dove  $\rho$  è la distanza da  $(0,0,0)$

Calcolare la massa di  $H$ :

$$M = \int_H d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$H' = \left\{ \rho \right\}$$

$\Omega$  sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$

Volume di  $(\Omega) = |\Omega| = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy \, dz$

massa totale di un corpo che occupa la regione  $\Omega$  e che ha densità di massa  $d(x, y, z)$  è:

$$M = \int_{\Omega} d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Devo calcolare il baricentro:

$$\text{coordinata } x: = \int_{\Omega} x d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{coordinata } y: = \int_{\Omega} y d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{coordinata } z: = \int_{\Omega} z d(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Diviso per la massa totale.

Calcoliamo ora il momento di inerzia facendo:

$$\int_{\Omega} \delta^2(x, y, z) d(x, y, z) dx dy dz$$

Dove  $\delta(x, y, z)$  è la distanza di un punto  $(x, y, z)$  dall'asse di rotazione, ovvero l'asse rispetto a cui si calcola il momento di inerzia.

Ad esempio momento di inerzia rispetto all'asse  $z$ :

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) d(x, y, z) dx dy dz$$

Massa di  $H$ :

$$\begin{aligned} M &= \int_H (2R - \rho) dx dy dz = \int_{H'} (2R - \rho) \cdot \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi) d\varphi \int_0^R (2R - \rho) \rho^2 d\rho \\ &= 2\pi \cdot 1 \cdot \left[ 2R \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R = 2\pi \left( \frac{2R^4}{3} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{5\pi R^4}{6} \end{aligned}$$

## 27 27/11/25

In queste lezioni ci concentreremo sulle applicazioni dei teoremi: th. della divergenza e th. di Stokes. Prima nel piano e poi nello spazio.

Per il caso de piano vedremo che saranno casi particolari delle formule di Gauss-Green.

In seguito si vedranno le successioni di funzioni e serie di funzioni.

Se abbiamo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1$

Se si valuta l'integrale:

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x) dx = f(b) - f(a)$$

Questo è il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Consideriamo ora un insieme in  $\mathbb{R}^2$ :



E questa formula appunto lega l'integrale di questo intervallo a "qualcosa" che dipende soltamente dai valori degli estremi degli intervalli.

Se abbiamo una certa forma differenziale  $\omega$  esatta, e  $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$  è una curva orientata allora:

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy = f(P_2) - f(P_1)$$

Dove  $P_2$  è l'estremo finale della curva e  $P_1$  l'iniziale.



Se  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  che sodisfa certe  $h_1$  e  $\partial D$  è la curva frontiera orientata in un certo modo

$$\int_D \left( \begin{array}{l} \text{Espress. che} \\ \text{coinvolge } f(x, y) \end{array} \right) dx dy = \int_{\partial D} f$$

$D$  insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$  supponiamo che  $\partial D$  sia una curva semplice chiusa regolare a tratti.

Chiameremo orientazione positiva di  $\partial D$  quella antioraria.

Si noti che percorrendo  $\partial D$  in nel verso positivo l'insieme  $D$  mi rimane sempre sulla sinistra.

### Lemma 27.1.

Sia  $F$  un campo vettoriale piano, di componenti:

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

Supponiamo che  $F \in C^1(\overline{D})$  Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Se  $D$  è y-semplice e  $\partial D$  è una curva, chiusa, regolare a tratti allora:

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\partial^+ D} P(x, y) dx \quad (1)$$

se  $D$  è x-semplice e  $\partial D$  è una curva, chiusa, regolare a tratti allora:

$$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial^+ D} Q(x, y) dy \quad (2)$$

*Dimostrazione.* punto (1)

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b] \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

Con  $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1$  a tratti.

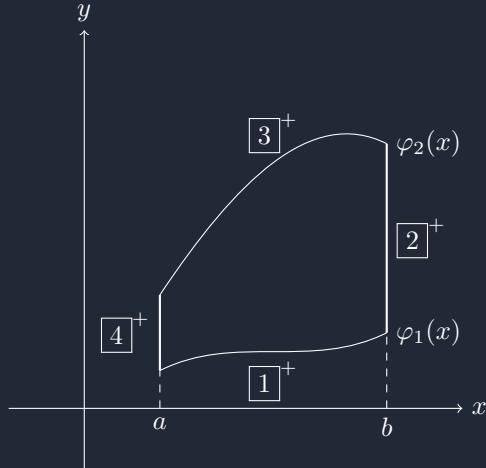


Fig. di riferimento

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P(x, y)]_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dx = \int_a^b [P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))] dx \end{aligned}$$

Richiamo cosa è esattamente  $\int_\gamma g(x, y) dx$  dove  $\gamma : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una curva orientata  $\int_c^d g(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) dt$

Ora considero i vari integrali di linea sui 4 tratti della curva (segnati nel disegno):

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ P} P dx &= \int_{[1]^+} P dx + \int_{[2]^+} P dx + \int_{[3]^+} P dx + \int_{[4]^+} P dx \\ \int_{[2]^+} P dx &= \int_{[4]^+} P dx = 0 \end{aligned}$$

Perchè in quei tratti la variazione di  $x$  è nulla:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow (b, t) \quad t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)] \\ \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} P(b, t) \cdot 0 dt &= 0 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora gli integrali sui tratti rimanenti:

$$\begin{aligned} &\int_{[1]^+} P(x, y) dx \\ \text{tenendo a mente: } t &\rightarrow (t, \varphi_1(t)) \quad t \in [a, b] \\ &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) \cdot 1 dt = \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt \\ &\int_{[3]^+} P(x, y) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{tenendo a mente: } t &\rightarrow (t, \varphi_2(t)) \quad t \in [a, b] \\ &= - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$\int_a^b P(x, \varphi_2(x)) dx - \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\ - \int_{[3]^+} P dx = \int_{[1]^+} P dx$$

□

**Lemma 27.2.**

Sia  $F$  un campo vettoriale piano, di componenti:

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

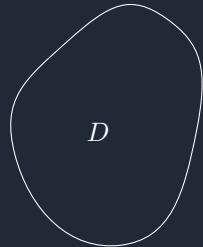
Supponiamo che  $F \in C^1(\overline{D})$ . Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Se  $\partial D$  sia una curva semplice, chiusa, regolare a tratti.

Se  $D$  è sia x-semplice che y-semplice allora:

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

Quest'ultima è la stessa cosa che dire  $\int_{\partial^+ D} \langle F, T \rangle ds$

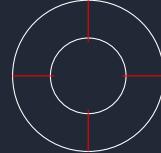


Diciamo che un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  è s-decomponibile

se esso è decomponibile in un numero finito di sottodomini  $D_1, D_2, \dots, D_k$  semplici rispetto ad entrambi gli assi.

**Esempio 27.1.**

La corona circolare non è né x-semplice né y-semplice ma se si divide in quattro parti ogni parte è sia x-semplice sia y-semplice:



Se  $D$  è s-decomponibile come orientazione positiva su  $\partial D$  si intende quella data alle singole componenti di  $\partial D$  in modo che percorrendole si lasci il dominio sempre alla propria sinistra.

**Teorema 27.1.**

Se  $D$  è s-decomponibile e  $F \in C^1(\overline{D})$

allora vale la formula:

$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

(già vista nel lemma prec.)

*Dimostrazione.*



$$\int_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{i=1}^k \int_{\partial^+ D_i} P dx + Q dy = \int_{\partial^+ D} P dx + Q dy$$

□

### Esempio 27.2.

Usare le formule di Gauss-Green per calcolare:

$$\int_{\gamma} (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy$$

Dove  $\gamma$  è la frontiera di  $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$  orientata positivamente.

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ D} (x - y^3) dx + (y^3 + x^3) dy &= \int_D \frac{\partial}{\partial x} (y^3 + x^3) - \frac{\partial}{\partial y} (x - y^3) dx dy \\ &= \int_D (3x^2 + 3y^2) dx dy = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \rho \cdot \rho^2 d\rho = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

**Teorema 27.2** (di Stokes nel piano).

Riprendiamo la definizione di rotore dato un campo vettoriale:

$$\begin{aligned} F &= (F_1(x, y), F_2(x, y), 0) \\ rot F &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{pmatrix} = k \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

th. vero e proprio:

Se  $D$  è s-decomponibile e  $F \in C^1(\overline{D})$  allora:

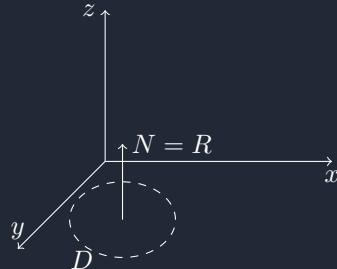
$$\int_D (rot F) \cdot k dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle F, T \rangle ds$$

Quando fa il prodotto scalare con  $k$  si ricorda che  $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$F = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$$rot F = ( )i + ( )j + ( )k$$

$$\int_D rot \cdot k dx dy = \int_{\partial^+ D} \langle F \cdot T \rangle ds$$



**Definizione 27.1** (Divergenza).

Se

$$F = (F_1(x, y), F_2(x, y))$$

Chiamo  $div F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$

Se  $F = (F_1, F_2, F_3)$  chiamo  $div F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$div F$  è una funzione da  $\mathbb{R}^2$  (o  $\mathbb{R}^3$ ) in  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 27.3** (della divergenza nel piano).

Sia  $D$  s-decomponibile e  $F = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \in C^1(\overline{D})$ :  
allora

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} \langle F, N \rangle \, ds \quad \text{il prof non ha il de col + ma forse c'è}$$

dove ogni punto di  $\partial D$   $N$  indica il versore normale a  $\partial D$  orientato in modo da puntare all'esterno.

$$\int_D \operatorname{div} F = \int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \, dx \, dy \quad (*)$$

Definisco  $P$  e  $Q$  in modo che:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

cioè definisco  $Q = F_1$  e  $P = F_2$

Ritornando al punto (\*):

$$\int \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} P \, dx + Q \, dy = \int_{\partial^+ D} -F_2 \, dx + F_1 \, dy$$

se  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  è una parametrizzazione coerente con l'orientazione di  $\partial D$ :

$$\begin{aligned} & \int_a^b -F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_1(t) + F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \dot{\gamma}_2(t) \, dt \\ &= \int_a^b \langle (F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) ; (\dot{\gamma}_2(t), -\dot{\gamma}_1(t)) \rangle \, dt \\ &= \int_a^b \left\langle (F_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), F_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))) ; \underbrace{\frac{(\dot{\gamma}_1(t), -\dot{\gamma}_2(t))}{\sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2}}}_N \right\rangle \left( \sqrt{\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2} \right) \\ &= \int_{\gamma} \langle F; N \rangle \, ds \end{aligned}$$

- Come usare le formule di G-G per calcolare l'area di  $D$
- Se si sceglie  $Q = 0$  e  $P = y$

$$\int_D 0 - 1 \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} y \, dx$$

o anche area:

$$D = - \int_{\partial^+ D} y \, dx$$

In maniere analoghe:

$$\begin{aligned} \text{area } D &= \int_{\partial^+ D} x \, dy \\ \text{area } D &= \frac{1}{2} \int_{\partial^+ D} x \, dy - y \, dx \end{aligned}$$

## 28 2/12/25

Si introducono le superfici regolari parametriche.

Sono di fatto come le curve ma ad un parametro in più, avendo due parametri si può descrivere una superficie a due dimensioni nello spazio.

Come per le curve, distinguiamo una superficie parametrica regolare da una ordinaria.

**Definizione 28.1.**

Una superficie parametrica è una funzione:

$$\underline{\varphi} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow \underline{\varphi}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

dove  $x, y, z$  sono funzioni reali di due variabili reali (i due parametri che sto considerando).

La superficie è regolare se:

- $\underline{\varphi}$  è di classe  $C^1$  in un aperto  $A$  contenente  $D$
- $\underline{\varphi}$  è iniettiva in  $AV$
- la matrice jacobiana ha rango 2 in ogni punto del dominio.

La matrice jacobiana si ricorda essere:

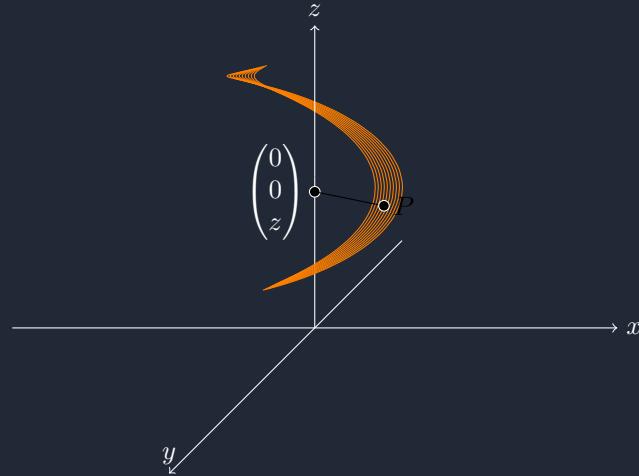
$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} = (r_u \mid r_v) = \mathcal{J}_r(u, v)$$

Si ricorda che dire che  $\mathcal{J}$  ha rango 2 implica che i due vettori "colonna"  $r_u, r_v$  sono linearmente indipendenti.

Facciamo alcuni esempi di Superfici di rotazione:

**Esempio 28.1.**

Elicoide



Si parte dall'equazione dell'elica cilindrica:

$$\xi(u) = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ ku \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R} \text{ oppure } u \in [a, b]$$

Si ottiene l'elicoide:  $\underline{\varphi}_\xi$  collegando ogni punto di  $\xi$  con l'asse  $z$  tramite un segmento  $\parallel$  al piano  $xy$ :

$$\underline{\varphi}_\xi(u, v) = \begin{pmatrix} Ru \cos(u) \\ Rv \sin(u) \\ ku \end{pmatrix} \quad u \in I, v \in [0, 1]$$

Considero quindi ad esempio il segmento da  $P_z$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zP_\xi \end{pmatrix}$  cioè da  $\begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ ku \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ku \end{pmatrix} \quad \forall u \in I$

$$\text{segmento da } P_\xi \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ zP_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(R \cos(u)) \\ v(R \sin(u)) \\ (1-v)ku + vku \end{pmatrix} \quad v \in [0, 1]$$

Quando una superficie è regolare?

Guardo la matrice jacobiana:  $\underline{\varphi}_\xi$  è superficie regolare in  $D = [a, b] \times [0, 1]$  e  $A = (a, b) \times (0, 1)$     $I = [a, b]$

Se ho le seguenti proprietà:

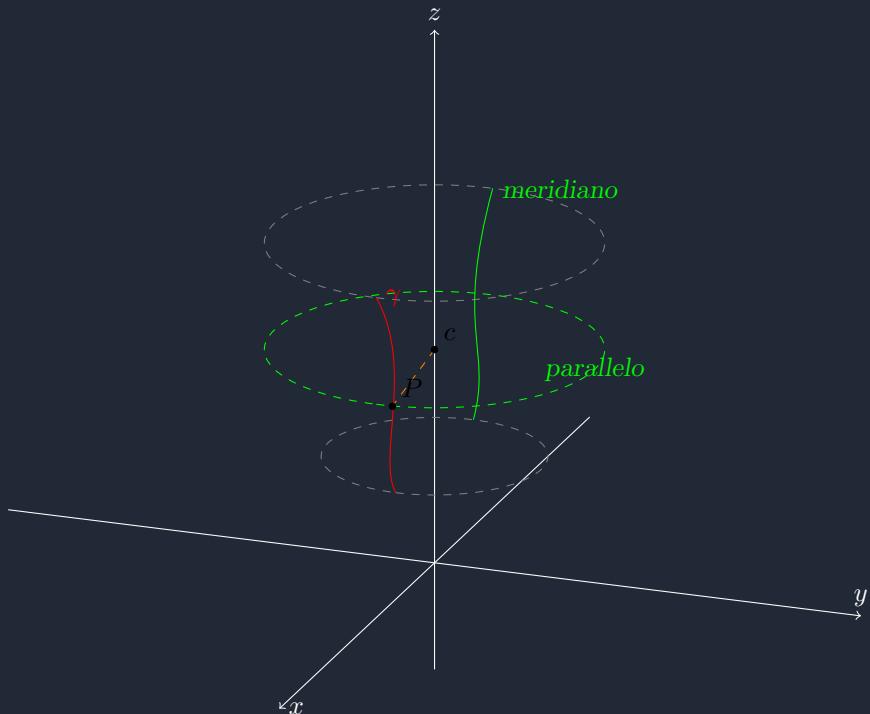
(nel caso specifico dell'elica)

- $\underline{\varphi}_\xi \in C^1(A)$
- $\underline{\varphi}_\xi$  è iniettiva in  $AV$
- Se la jacobiana ha rango 2 quindi:  

$$\left(\underline{\varphi}_\xi\right)_u = \begin{pmatrix} -Rv \sin(u) \\ Rv \cos(u) \\ k \end{pmatrix} \text{ e } \left(\underline{\varphi}_\xi\right)_v = \begin{pmatrix} R \cos(u) \\ R \sin(u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall u \in (a, b) \quad \forall v \in (0, 1)$$

### Esempio 28.2.

Superficie di rotazione generale da una cuva piana  $\gamma$  ( $\subseteq$  piano considerato) che ruota attorno ad un asse (asse coordinato).



$\gamma \subseteq$  piano  $yz$  (cioè  $x = 0$ ) che ruota attorno all'asse  $z$ .

Parametrizzo la curva:

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad t \in I$$

Con  $y(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$  e  $y, z \in C^1(I)$

Prendo un punto  $P$  sulla curva che descrive la circonferenza di centro sull'asse  $z$  e raggio  $y_P$ , inoltre chiamo  $c$  il punto sull'asse  $z$  che connette il centro della circonferenza con il punto  $P$ :

$$\begin{pmatrix} y_P \sin(\theta) \\ y_P \cos(\theta) \\ z_P \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Osservo che  $y_P = y(t)$  e  $z_P = z(t)$  quindi la parametrizzazione della superficie di rotazione è:

$$\underline{\varphi}(t, \theta) = \begin{pmatrix} y(t) \sin(\theta) \\ y(t) \cos(\theta) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad t \in I \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

per ex  $\underline{\varphi}_\gamma$  è superfic. parametrica regolare (partendo da  $\gamma$  curva regolare)

## 28.1 caso assi scambiati

Possiamo avere lo stesso fenomeno solo con un'altro asse di rotazione ovviamente, per esempio prendiamo l'asse  $y$ :

E prendiamo una curva  $\gamma$  nel piano  $yz$  che ruota appunto attorno all'asse  $y$ .

$P(t) = (0, y(t), z(t))$  compie una circonferenza nel piano  $\parallel zx$

Quindi avremo il centro  $C \equiv (0, y_P, 0)$  ed un raggio  $R = |z_P|$ :

$$\underline{\varphi}_\gamma(t, \theta) = \begin{pmatrix} z(t) \sin(\theta) \\ y(t) \\ z(t) \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \theta \in [0, 2\pi], t \in I$$

**Oss. 28.1.**

La regolarità dipende: sia dalla geometria che dalla parametrizzazione usata.

**Definizione 28.2.**

Le curve  $t \rightarrow \varphi_\gamma(t, \theta_{\text{fix}})$  sono meridiani

Le curve  $\theta \rightarrow \varphi_\gamma(t_{\text{fix}}, \theta)$  sono paralleli.

*Dimostrazione.*

Proviamo che la superficie di rotazione è regolare:

Bisogna provare:

- che sia iniettiva

- 

$$(\underline{\varphi}_\gamma)_t = (\dot{y} \sin \theta, \dot{y} \cos \theta, \dot{z}),$$

$$(\underline{\varphi}_\gamma)_\theta = (y \cos \theta, -y \sin \theta, 0),$$

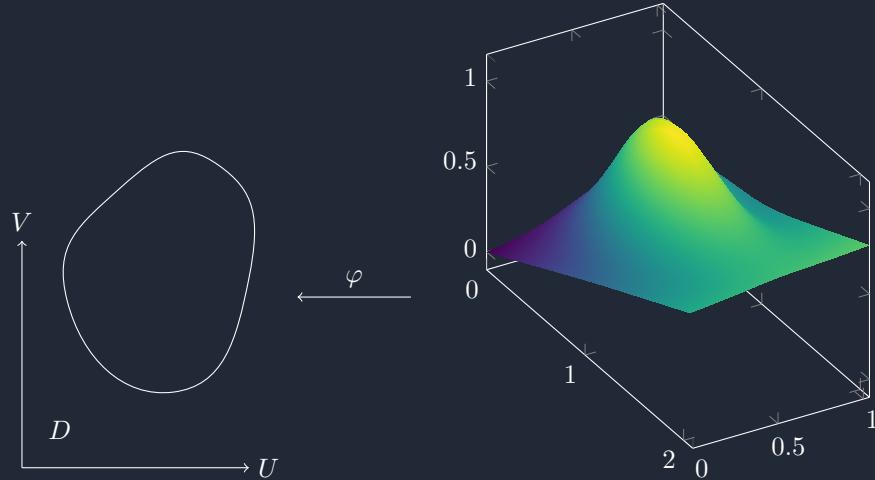
$$(\underline{\varphi}_\gamma)_t \times (\underline{\varphi}_\gamma)_\theta = (y \dot{z} \sin \theta, -y \dot{z} \cos \theta, -y \dot{y}).$$

□

## 29 3/12/25

In questa lezione vedremo come trovare il piano tangente ad una superficie data la sua parametrizzazione, e come calcolare l'area di una superficie(gli integrali di superficie)

**Superficie generica:**



Consideriamo quindi \$\varphi\$ che porta un dominio \$D\$ da \$\mathbb{R}^2\$ a \$\mathbb{R}^3\$:

$$\varphi : \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

E deve soddisfare la proprietà:

$$S = \varphi(D)$$

Ovvero l'immagine di \$D\$ tramite \$\varphi\$ è la superficie \$S\$.

Posso ora considerare \$(U\_0, V\_0) \in \overset{\circ}{D}\$ ovvero un punto interno al dominio \$D\$.

E il suo punto immagine sulla superficie tramite \$\gamma(t)\$ che è la curva che si comporta in modo che \$V\_0\$ sia costante e \$U\_0\$ varia con un parametro \$(t)\$.

Inoltre considero \$\tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))\$ che è proprio \$\tilde{\gamma} = \varphi(U\_0 + t, V\_0)\$. Prendendo \$U\$ e \$V\$ generici ho:

$$\begin{aligned} \varphi(U, V) &= (X(U, V), Y(U, V), Z(U, V)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial U} &= \left( \frac{\partial X}{\partial U}(U, V), \frac{\partial Y}{\partial U}(U, V), \frac{\partial Z}{\partial U}(U, V) \right) = \varphi_U(U, V) \end{aligned}$$

Considero adesso \$\dot{\tilde{\gamma}}(t)|\_{t=0}\$, che è proprio:

$$\frac{d}{dt} \varphi(U_0 + t, V_0)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial U} \varphi(U_0, V_0)$$

Inoltre siccome \$\tilde{\gamma}(t) = \varphi(U\_0 + t, V\_0)\$ se riconsidero la sua derivata ho:

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \varphi(U_0 + t, V_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial U}(U_0 + t, V_0) \boxed{\frac{d}{dt}(U_0 + t)}_{=1} + \frac{\partial \varphi}{\partial V}(U_0 + t, V_0) \frac{d}{dt}(V_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial U}(U_0 + t, V_0)$$

Prendiamo ora un'altro caso in cui \$\gamma(t)\$ è una qualsiasi curva che passa per il mio punto \$(U\_0, V\_0)\$, quindi adesso cos'è \$\tilde{\gamma}\$?

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= \varphi \gamma(t) = \varphi(U(t), V(t)) \\ \dot{\tilde{\gamma}}(0) &= \frac{d}{dt} \varphi(U(t), V(t))|_{t=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial U}(U_0, V_0) \cdot \frac{d}{dt} U(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial V}(U_0, V_0) \cdot \frac{d}{dt} V(0) \end{aligned}$$

Per domodità useremo la notazione:  $\frac{\partial \varphi}{\partial U} \leftrightarrow \varphi_U$

Prendiamo ora un vettore normale al piano tangente alla superficie in  $\varphi(U_0, V_0)$ , per farlo farò il prodotto vettoriale (o prodotto wedge  $\wedge$ )

$$(\varphi_U \wedge \varphi_V)(U_0, V_0)$$

Questo è un vettore normale al piano tangente a  $S$  in  $\varphi(U_0, V_0)$ .

Se ora lo divido per la sua norma ottengo il versore normale:

$$N = \frac{\varphi_U \wedge \varphi_V}{\|\varphi_U \wedge \varphi_V\|}$$

Se rappresento questa operazione con una matrice ho:

$$\begin{array}{ccc} i & j & k \\ X_U & Y_U & Z_U \\ X_V & Y_V & Z_V \end{array}$$

$$\underbrace{i \det \begin{pmatrix} Y_U & Z_U \\ Y_V & Z_V \end{pmatrix}}_{\frac{\partial(y,z)}{\partial(U,V)}} - j \underbrace{\det \begin{pmatrix} X_U & Z_U \\ X_V & Z_V \end{pmatrix}}_{\frac{\partial(x,z)}{\partial(U,V)}} + k \underbrace{\det \begin{pmatrix} X_U & Y_U \\ X_V & Y_V \end{pmatrix}}_{\frac{\partial(x,y)}{\partial(U,V)}}$$

Se ora considero  $(x, y, z) \in$  piano tang. a  $S$  in  $\varphi(U_0, V_0)$ , posso scrivere l'equazione del piano tangente:

$$\begin{aligned} \langle (x, y, z) - \varphi(U_0, V_0), (\varphi_U \wedge \varphi_V)(U_0, V_0) \rangle &= 0 \\ \langle (x - x(U_0, V_0), y - y(U_0, V_0), z - z(U_0, V_0)), (\varphi_U \wedge \varphi_V)(U_0, V_0) \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Questo considerando la scrittura precedente può anche essere espresso come:

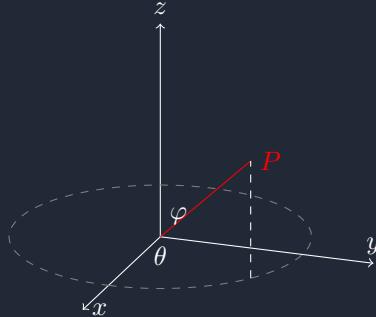
$$\det \begin{pmatrix} x - x(U_0, V_0) & y - y(U_0, V_0) & z - z(U_0, V_0) \\ X_U(U_0, V_0) & Y_U(U_0, V_0) & Z_U(U_0, V_0) \\ X_V(U_0, V_0) & Y_V(U_0, V_0) & Z_V(U_0, V_0) \end{pmatrix} = 0$$

Facciamo ora alcuni esempi:

### Esempio 29.1.

La sfera, prendiamone una di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $R > 0$ :

$$D = [\theta \in [0, \pi]] \times [\psi \in [0, 2\pi]]$$



$$(\psi, \theta) \in D \rightarrow \varphi(\psi, \theta) : (R \sin(\psi) \cos(\theta), R \sin(\psi) \sin(\theta), R \cos(\psi))$$

Ricercò il piano tangente in un punto generico  $(\theta_{cost}, \psi_{cost})$ , quindi calcolo:

$$\varphi_\psi = (R \cos(\psi) \cos(\theta), R \cos(\psi) \sin(\theta), -R \sin(\psi))$$

$$\varphi_\theta = (-R \sin(\psi) \sin(\theta), R \sin(\psi) \cos(\theta), 0)$$

$$\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta = \left( \underbrace{R^2 \sin(\psi) \cos(\theta), R^2 \sin(\psi) \sin(\theta), R^2 \cos(\psi)}_{R \varphi(\psi, \theta)} \right) = R \sin(\psi) \varphi(\psi, \theta)$$

Calcolo ora il versore normale:

$$N = \frac{\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta}{\|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\|} = \frac{R \sin(\psi) \varphi(\psi, \theta)}{\underbrace{R \sin(\psi)}_{=R} \|\varphi(\psi, \theta)\|} = \frac{\varphi(\psi, \theta)}{R}$$

$$\|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\| = R^2 \sin(\psi)$$

### Esempio 29.2.

Prendiamo ora in esempio un piano generico:

$$\begin{aligned}\varphi : D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(x, y) &= (x, y, f(x, y)) \\ \varphi_x(x, y) &= (1, 0, f_x(x, y)) \\ \varphi_y(x, y) &= (0, 1, f_y(x, y))\end{aligned}$$

Calcoliamo ora il vettore normale:

$$\begin{aligned}\varphi_x \wedge \varphi_y &= \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1) \\ \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| &= \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \\ N &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}}\end{aligned}$$

Troviamo ora l'equazione del piano tangente al grafico in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

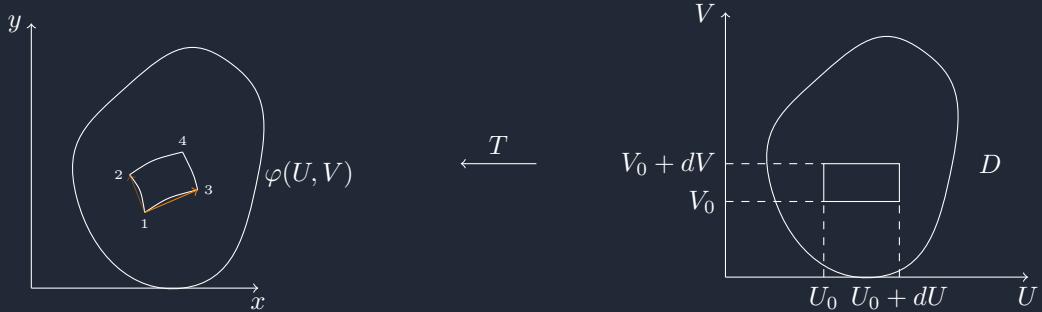
$$\begin{aligned}\langle (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)), (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \rangle &= 0 \\ (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) &= z\end{aligned}$$

## 29.1 integrali di superficie

Per integrali di superficie si intende calcolare l'area superficiale di una data funzione.

Per fare questo in generale si considera la trasformazione non lineare  $T$  che porta dal piano del dominio  $D$  alla superficie ovvero la funzione, dopodiché si considera il piano tangente ad una superficie infinitesima e si calcola quel'area, si fa questo per tutta la superficie e si somma il tutto. Vediamo nel dettaglio cosa significa.

Consideriamo la trasformazione  $T$



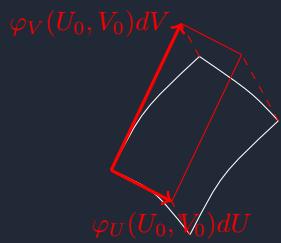
I vari vertici del segmento infinitesimo della funzione sono:

- 1 :  $\varphi(U_0, V_0)$
- 2 :  $\varphi(U_0, V_0 + dV)$
- 3 :  $\varphi(U_0 + dU, V_0)$
- 4 :  $\varphi(U_0 + dU, V_0 + dV)$

Se ora consideriamo da ognuno di questi punti i vertici che partono da essi e collegano direttamente i vertici adiacenti otteniamo un parallelogramma infinitesimo, per esempio quello in arancione intenso è:

$$\varphi(U_0 + dU, V_0) - \varphi(U_0, V_0) \approx \varphi_U(U_0, V_0)dU + o(dU)$$

Così facendo stiamo considerando i segmenti rettifiche partono dal punto  $(U_0, V_0)$  in questo modo:



Questa rappresentazione **non** è coerente con l'esempio precedente per via di prospettiva ma è utile per visualizzare i vettori considerati.

Una volta che abbiamo questi due vettori ne consideriamo l'area del parallelogramma che formano, che è data dal modulo del loro prodotto vettoriale:

$$\|\varphi_U(U_0, V_0) \wedge \varphi_V(U_0, V_0)\| dUdV$$

Che è proprio l'area infinitesima della superficie considerata.

Se ne consideriamo quindi la somma (e quindi l'integrale) otteniamo:

$$Area(S) = \iint_D \|\varphi_U \wedge \varphi_V\| dUdV$$

## 30 4/12/25

Presi una superficie  $S$  una superficie descritta da una parametrizzazione:

$$\begin{aligned}\varphi : D &\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \\ \varphi_u &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} = (x_u, y_u, z_u) \\ \varphi_v &= \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (x_v, y_v, z_v)\end{aligned}$$

E considerando un punto nella superficie considerato il piano tangente alla superficie in quel punto si identifica il vettore normale al piano tangente come:

$$N = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

E abbiamo anche definito l'area della superficie come:

$$Area(S) = \iint_D \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv$$

### 30.1 Integrali di una funzione su una superficie

Presi una funzione  $f(x, y, z)$  sia una funzione definita in un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  che contiene  $S$  integrale (superficiale), di  $f$  su  $S$ .

$$\int_S f d\sigma$$

Questa funzione va ha come dominio la superficie  $S$  e come codominio i numeri reali.

Per calcolare questo integrale si usa la parametrizzazione della superficie:

$$\begin{aligned}\int_S f d\sigma &= \iint_D f(\varphi(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv \\ &= \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv\end{aligned}$$

**Esempio 30.1.**

Paraboloide grafico di :

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

dove  $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 8\}$ , e VOglio calcolare l'area di questa superficie.

$$Area(S) = \iint_D \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| dxdy$$

Con  $\|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2}$

Procedendo con i calcoli:

$$\int_{x^2+y^2 \leq 8} \sqrt{1 + \|\nabla f(x, y)\|^2} dxdy$$

Calcoliamo il dragiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y\end{aligned}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\int_{x^2+y^2 \leq 8} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$$

Passo in coordinate polari:  $x = \rho \cos(\theta)$ ,  $y = \rho \sin(\theta)$

$$dx dy = \rho d\rho d\theta$$

$$\rho \in [0, \sqrt{8}], \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{8}} \rho \sqrt{1+\rho^2} d\rho d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{8}} \rho \sqrt{1+\rho^2} d\rho$$

$$= 2\pi \left[ \frac{(1+\rho^2)^{3/2}}{3} \right]_0^{\sqrt{8}}$$

$$= \frac{2\pi}{3} (9^{3/2} - 1) = \frac{2\pi}{3} (27 - 1) = \frac{52\pi}{3}$$

## 30.2 Facciamo alcuni esempi fisici

**Esempio 30.2.**

Se  $S$  superficie e  $\delta$  indica la densità superficiale di massa allora

$$M = \int_S \delta d\sigma$$

Il centro di massa della superficie ha coordinate:

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{1}{M} \int_S x \delta(x, y, z) d\sigma \\ y_b &= \frac{1}{M} \int_S y \delta(x, y, z) d\sigma \\ z_b &= \frac{1}{M} \int_S z \delta(x, y, z) d\sigma \end{aligned}$$

E il baricentro geometrico è:

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{Area(S)} \int_S x d\sigma \\ y_G &= \frac{1}{Area(S)} \int_S y d\sigma \\ z_G &= \frac{1}{Area(S)} \int_S z d\sigma \end{aligned}$$

Che è quando la densità è costante.

**Esempio 30.3.**

Prendo  $S =$  calotta superiore della superficie sferica di centro  $(0, 0, 0)$  e raggio  $R$  quindi:  
(uso le coordinate sferiche per parametrizzare la superficie)

$$\begin{aligned} D &= \left\{ (\psi, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}] \right\} \\ \varphi(\psi, \theta) &= \begin{pmatrix} x = R \sin(\psi) \cos(\theta) \\ y = R \sin(\psi) \sin(\theta) \\ z = R \cos(\psi) \end{pmatrix} \\ \|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\| &= R^2 \sin(\psi) \end{aligned}$$

Per la massa  $S$  con la densità data di  $\delta = x^2 + y^2$

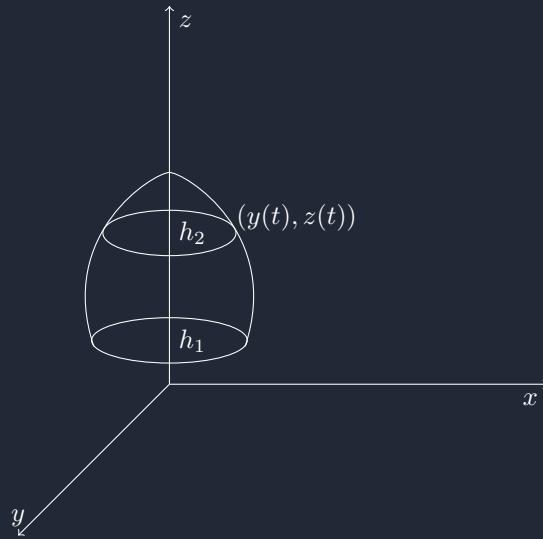
$$\begin{aligned}
\int_S d\sigma &= \iint_D \underbrace{\delta(x(\psi, \theta), y(\psi, \theta), z(\psi, \theta))}_{R^2 \sin^2(\psi)} \underbrace{\|\varphi_\psi \wedge \varphi_\theta\|}_{R^2 \sin(\psi)} d\psi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2(\psi) \cdot R^2 \sin(\psi) d\psi d\theta \\
&= 2\pi R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^3(\psi) d\psi \\
&= 2\pi R^4 \left[ -\cos(\psi) + \frac{\cos^3(\psi)}{3} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi R^4 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi R^4}{3}
\end{aligned}$$

Calcoliamone ora il centro di massa  $x_b = y_b = 0$  per simmetria di  $S$

$$\begin{aligned}
z_b &= \frac{1}{M} \int_S z \delta(x, y, z) d\sigma \\
&= \frac{1}{M} \iint_D R \cos(\psi) \cdot R^2 \sin^2(\psi) \cdot R^2 \sin(\psi) d\psi d\theta \\
&= \frac{2\pi R^5}{M} \int_0^{\pi/2} \cos(\psi) \sin^3(\psi) d\psi \\
&= \frac{2\pi R^5}{M} \left[ -\frac{\sin^4(\psi)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi R^5}{M} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi R^5}{2M} \\
&= \frac{\pi R^5}{2 \cdot \frac{4\pi R^4}{3}} = \frac{3R}{8}
\end{aligned}$$

#### Esempio 30.4.

Superficie di rotazione ottenuta intorno all'asse  $z$  da una curva contenuta nel piano  $yz$ , (cioè  $x = 0$ ) in cui  $x > 0$ :

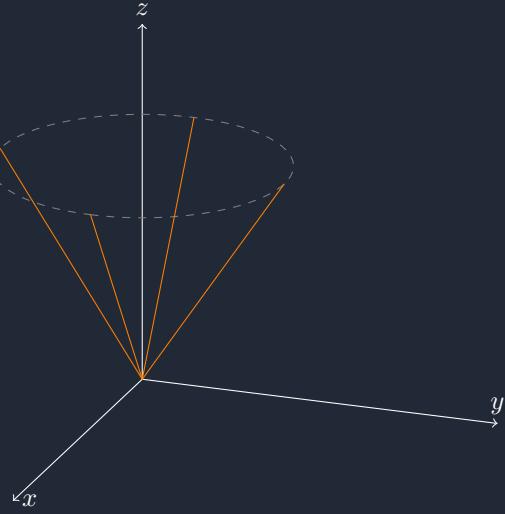


$\gamma \subseteq$  nel piano  $(y, z)$  e la sua parametrizzazione è

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &: [a, b] \rightarrow (y(t), z(t)) \\
S : \varphi(t, \theta) &= (y(t) \cos(\theta), y(t) \sin(\theta), z(t)) \\
D &= \{(t, \theta) : t \in [a, b], \theta \in [0, 2\pi]\}
\end{aligned}$$

#### Esempio 30.5.

Prendiamo un cono descritto nel seguente modo:



$$\begin{aligned}
\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| &= y(t) \sqrt{(\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \\
\text{area}(S) \int_D \|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| dt d\theta \\
\varphi(t) : [0, 1] \rightarrow (t, t) \\
\|\varphi_t \wedge \varphi_\theta\| &= \frac{t\sqrt{1+1}}{y(t) \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2} = t\sqrt{2} \\
\text{area}(S) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 t\sqrt{2} dt d\theta = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

### 30.3 Perchè cambiando parametrizzazione di una superficie non cambiano i risultati

Prendo una mappa  $\phi : T \rightarrow D$

Ho ipotesi su  $\phi$  quelle che ho supposto quando ho parlato di cambiamento di variabili negli integrali doppi:

- $\phi$  è biunivoca
- $\phi$  è di classe  $C^1$
- Il det Jacobiano di  $\phi \neq 0$  in ogni punto di  $T$

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(s, t) &\xrightarrow{\phi} (u, v) \\
\psi(s, t) &= (u(s, t), v(s, t))
\end{aligned}$$

Definisco ora  $\psi := \varphi_0 \phi$

$$\begin{aligned}
\psi(s, t) &= \varphi(u(s, t), v(s, t)) = (x(u(s, t), v(s, t)), y(u(s, t), v(s, t)), z(u(s, t), v(s, t))) \\
\psi_s(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} \psi(s, t) = \varphi_u(u(s, t), v(s, t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) + \varphi_v(u(s, t), v(s, t)) \cdot \frac{\partial v}{\partial s}(s, t) \\
\psi_t(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \psi(s, t) = \varphi_u(u(s, t), v(s, t)) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) + \varphi_v(u(s, t), v(s, t)) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(s, t)
\end{aligned}$$

Che relazione c'è tra  $\psi_s, \psi_t$  e  $\varphi_u, \varphi_v$ ?

Andiamo ora a farne il prodotto vettoriale:

$$\begin{aligned}
&\psi_s(s, t) \wedge \psi_t(s, t) = \\
&(\underline{\varphi_u} u_s + \underline{\varphi_v} v_s) \wedge (\underline{\varphi_u} u_t + \underline{\varphi_v} v_t) \\
&= u_s u_t (\varphi_u \wedge \varphi_u) + u_s v_t (\varphi_u \wedge \varphi_v) + v_s u_t (\varphi_v \wedge \varphi_u) + v_s v_t (\varphi_v \wedge \varphi_v) \\
&= (u_s v_t - v_s u_t) (\varphi_u \wedge \varphi_v) \cdot \det \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Una notazione comoda è:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} = \det \begin{pmatrix} u_s & u_t \\ v_s & v_t \end{pmatrix}$$

### 30.4 gli integrali non dipendono dalla parametrizzazione

$$\int_S f d\sigma \stackrel{\text{usando } \varphi}{=} \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv$$

cambio var. ass. a  $\phi$

$$\int_T f(x(u(s, t), v(s, t)), y(u(s, t), v(s, t)), z(u(s, t), v(s, t))) \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \cdot \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt$$

usando la param. $\psi$

$$\begin{cases} = \int_T f(\text{""}) \cdot \|(\psi_s \wedge \psi_t)(s, t)\| ds dt \\ = \int_S f d\sigma \end{cases}$$

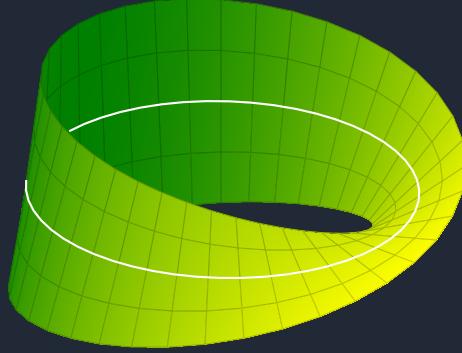
### 30.5 Orientazione e bordo di una superficie

Generalmente per questi concetti si utilizza la geometria differenziale. Per quello che ci interessa useremo delle definizioni intuitive.

Sia  $S$  una superficie e supponiamo che si possa scegliere il verso normale in ogni punto di  $S$  in modo che partendo da un punto  $P_0 \in S$  e seguendo una qualsiasi curva continua chiusa (che dunque vi torni in  $P_0$ ) contenuta in  $S$  il vettore normale vari con continuità e ritorni alla posizione iniziale. In tal caso diremo che  $S$  è orientabile.

Un esempio di superficie orientabile è una sfera.

Un esempio di superficie non orientabile è il nastro di Moebius



La parametrizzazione del nastro di Moebius è:

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) &= \left( \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \cos(u), \left(1 + \frac{v}{2} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\right) \sin(u), \frac{v}{2} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right) \\ u &\in [0, 2\pi], \quad v \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Un'altra definizione importante è quella di bordo di una superficie.

Prendiamo in esempio una semisfera e consideriamone la sua superficie  $S$ .

Il suo bordo è il cerchio che si ottiene tagliando la sfera (che formerei da due delle mie semisfere) a metà. Se ad esempio invece di una semisfera perfetta si ha una parte di una sfera il bordo sarà la circonferenza che seziona la sfera.

Più in generale il bordo di una superficie  $S$  è l'insieme dei punti di  $S$  che possono essere raggiunti da una curva contenuta in  $S$  che non può essere estesa oltre  $S$ .

Un esempio di superficie senza bordo è la sfera.

Un esempio di superficie con bordo è il paraboloide limitato da un piano orizzontale.

Passiamo ora al concetto di orientazione della superficie del bordo. teniamo a mente l'esempio della semisfera per praticità

Fissiamo una orientazione della superficie (orientabile [presa per hp.])  $S$ .

Si determina due "lati" di  $S$ , chiamando lato positivo quello verso cui punta il versore normale  $N$  e lato negativo quello opposto.

Diciamo che  $\partial S$  è orientato positivamente rispetto a  $S$  se, percorrendo  $\partial S$  orientandosi sul lato positivo di  $S$  si lasciano i punti di  $S$  sulla sinistra.

Ci sono figure che non hanno bordo:

- sfera  $\partial = \emptyset$
- toro  $\partial = \emptyset$
- Paraboloide non limitato  $\partial = \emptyset$

Tutte le superfici chiuse non hanno bordo ma non tutte le superfici senza bordo sono chiuse (es. paraboloide non limitato).

**Definizione 31.1** (Per th. di Stokes).

Si parla di flusso di un campo lungo una superficie.

Se io ho un campo  $F$  definito in un intorno di una superficie orientabile e se  $N$  è una scelta del vettore normale a  $S$ .

Definisco flusso di  $F$  normale a  $S$  come:

$$S = \int_S \langle F, N \rangle d\sigma$$

Appurato questo:

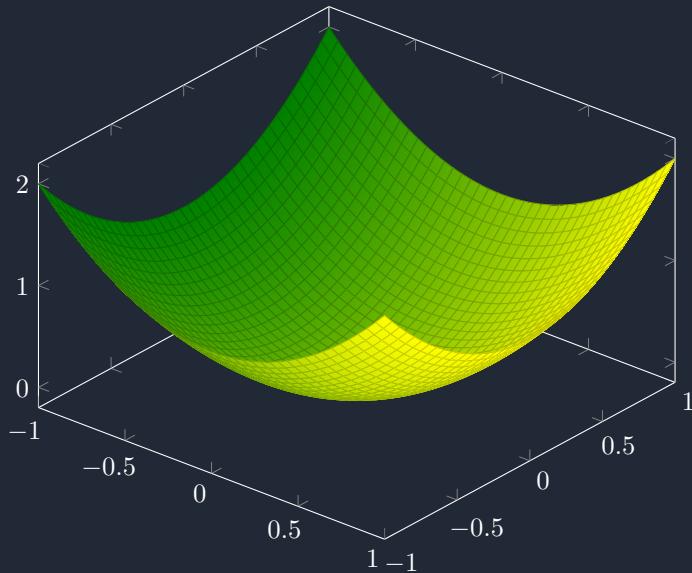
se  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione di  $S$  quell'integrale,  
se  $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , diventa:

$$\begin{aligned} & \int_D \underbrace{\left\langle F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} \right\rangle}_{\langle F, N \rangle} \cdot \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du dv \\ &= \int_D \langle F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \varphi_u \wedge \varphi_v \rangle du dv \end{aligned}$$

**Esempio 31.1.**

Prendiamo la funzione  $z = x^2 + y^2$  e il dominio:

$$D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$



Ho  $S : (x, y) \in D \rightarrow (x, y, x^2 + y^2)$   
e oriento  $S$  scegliendo la normale che punta verso l'alto:  
In questo esempio ho  $f(x, y) = x^2 + y^2$  quindi:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\left( \frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1 \right)}{\left\| \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \right\|} \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} \\ N &= \frac{\left( \frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1 \right)}{\left\| \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \right\|} \|\varphi_x \wedge \varphi_y\| = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \end{aligned}$$

Questo vale perchè  $S$  è grafico di una funzione  $f(x, y)$

Ora scelgo il campo  $F(x, y, z) = z, 0, x^2$  (il campo è dato dall'esercizio è indipendente dalla funzione)

Quindi il flusso di  $F$  attraverso  $S$  è:

$$\begin{aligned}
S &= \int_S \left\langle F(x, y, \underbrace{z(x, y)}_{x^2 + y^2}), N \right\rangle d\sigma \\
&= \int_D \left\langle (x^2 + y^2, 0, x^2), \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \right\rangle \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\
&= \int_D (-x^2 - y^2) 2x + x^2 dx dy \\
&= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (-2x^3 - 2xy^2 + x^2) dy \\
&= \int_{-1}^1 \left( -2x^3 y - 2x \frac{y^3}{3} + x^2 y \right)_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= \int_{-1}^1 \left( -4x^3 + \frac{4}{3}x + 2x^2 \right) dx \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

**Teorema 31.1** (di Stokes).

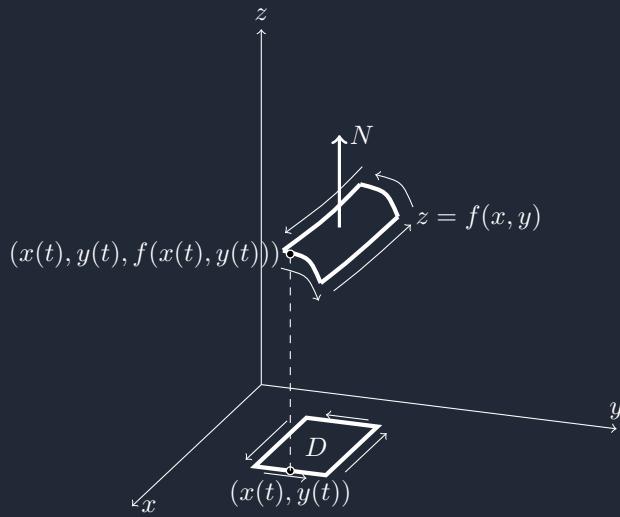
Sia  $S$  una superficie orientabile di  $\mathbb{R}^3$ , avente un campo normale unitario  $N$  il cui bordo consiste in un numero finito di curve chiuse con orientazione ereditata dall'orientazione di  $S$ . Se  $F$  è un campo vettoriale definito su un insieme aperto contenente  $S$  e  $C^2$ , e  $T$  è un versore tangente a  $\delta^+ S$ , orientato in modo concorde al verso positivo di  $\delta^+ S$  allora:

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle F, T \rangle ds$$

*Dimostrazione.*

Questa dim. la vedremo solo in un caso particolare, quando  $S$  è il grafico di una funzione  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in D$ .

Supponiamo come nell'esempio precedente che  $N$  punti verso l'alto.



A  $\delta D$  corrisponde  $\delta S$ , e all'orientazione positiva di  $\delta D$  corrisponde l'orientazione positiva di  $\delta S$

$$\begin{aligned}
\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle d\sigma &= \int_D \left\langle \underbrace{\left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{-\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)}_{\operatorname{rot}(F_1, F_2, F_3)}, \left( \frac{-\partial f}{\partial x}, \frac{-\partial f}{\partial y}, 1 \right) \right\rangle dx dy \\
&= \int_D \left[ - \left( \frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \left( \frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, f(x, y)) \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \right) \right] dx dy
\end{aligned}$$

Abbiamo fatto la parte sinistra ora facciamo la destra e verificheremo che sono uguali:

$$\int_{\partial^+ S} \langle F, T \rangle \, ds$$

Supponiamo che  $\partial^+ D$  consista di una sola curva chiusa.

Sia  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$  una parametrizzazione di  $\partial^+ D$  coerente con l'orientazione positiva.  
Allora una parametrizzazione di  $\partial^+ S$  è:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \quad t \in [a, b] \\ &\int_a^b F(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \cdot \tilde{\gamma}'(t) dt \end{aligned}$$

Calcoliamo  $\dot{\tilde{\gamma}}$ :

$$\dot{\tilde{\gamma}} = \frac{d}{dt} \tilde{\gamma}(t) = \left( \dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \right)$$

Quindi l'integrale di linea diventa:

$$\begin{aligned} &\int_a^b F(x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \cdot \left( \dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left[ F_1(\ ) \dot{x}(t) + F_2(\ ) \dot{y}(t) + F_3(\ ) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \dot{y}(t) \right) \right] dt \end{aligned}$$

Voglio raccogliere  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \left( \left[ F_1(\ ) + F_3(\ ) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \dot{x}(t) + \left[ F_2(\ ) + F_3(\ ) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \dot{y}(t) \right) dt \\ &= \int_{\partial^+ D} \left( \left[ F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] dx + \left[ F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] dy \right) \end{aligned}$$

Sono passato da un integrale su  $t$  ad uno su  $\partial^+ D$ , a questo posso applicare le formule di Gauss-Green.  
Le formule di Gauss-Green dicono che tale integrale è:

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x} \left[ F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right] \, dx dy$$

Devo derivare rispetto a  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} &= \int_D \left[ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, f(x, y)) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(\ ) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_3}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\ ) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(\ ) + F_3(\ ) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] - \\ &\quad \left[ \frac{\partial F_1}{\partial y}(\ ) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\ ) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}(\ ) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + F_3(\ ) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] \, dx dy \end{aligned}$$

Dopo aver tolto i termini che si cancellano ottengo:

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \left[ \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right] + \frac{\partial f}{\partial y} \left[ \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\ ) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right] \, dx dy$$

□

### Esempio 31.2.

Calcolare  $\int_{\gamma^+} \langle F, T \rangle \, ds$  dove  $F(x, y, z) = (-y^3, x^3, -z^3)$  e  $\gamma^+$  è la curva di sezione del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  e del piano  $z = 3 - 2x - 2y$

Voglio utilizzare il Teorema di Stokes.

$\gamma^+$  è il bordo della superficie  $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow (x, y, 3 - 2x - 2y)$

Scelgo su  $S$  l'orientazione in modo che  $\gamma^+$  sia il bordo di  $S$  orientato positivamente. Questo succede se  $N$  punta verso l'alto. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{rot } F &= (0, 0, 3(x^2 + y^2)) \\ N &= \frac{(-2, -2, 1)}{\|(-2, -2, 1)\|} \end{aligned}$$



## 32 11/12/25

In questa lezione parleremo di successioni di funzioni.

Per prima cosa consideriamo uno spazio metrico particolare, lo spazio delle funzioni reali continue su un intervallo:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_i &= \{g : I \rightarrow \mathbb{R} \mid I \subseteq \mathbb{R}\} \\ \{f_k(x)\} &\subseteq \mathcal{F}_i\end{aligned}$$

**Definizione 32.1** (Convergenza puntuale e uniforme).

Una successione converge puntualmente a  $f \in \mathcal{F}_i$  se:

$$f_k \rightarrow f \quad \text{in } (\mathcal{F}_i; |\cdot|) \quad \text{cioè} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - f(x)| = 0 \quad \forall x \in I$$

Una successione converge uniformemente a  $f \in \mathcal{F}_i$  se:

$$f_k \rightrightarrows f \quad (\mathcal{F}_i; \|\cdot\|) \quad \text{cioè} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_k(x) - f(x)| = 0$$

**Oss. 32.1.**

La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

$$f_k \rightrightarrows f \Rightarrow f_k \xrightarrow{I} f$$

Non è vero il viceversa

**Esempio 32.1.**



infatti se  $x = 0$  ✓  
se  $x \neq 0$  esiste  $\bar{k}$  tale che  $x > \frac{1}{\bar{k}}$ , quindi per ogni  $k > \bar{k}$  vale  $f_k(x) = b$  ✓  
**Ma non converge uniformemente:**

$$f_k \not\rightrightarrows f$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| &= |b - a| \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| &= \lim_{k \rightarrow \infty} |b - a| = |b - a| \neq 0\end{aligned}$$

**Teorema 32.1** (continuità del limite).

Preso un intervallo  $I = [a, b]$

se  $\{f_k\} \in C^0(I)$  e  $f_k \in I$

allora  $f \in C^0(I)$

*Dimostrazione.* fissiamo  $x_0 \in [a, b]$

fisso inoltre  $\varepsilon > 0$

Per valutare la continuità devo valutare:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ f_k \rightrightarrows f &\Rightarrow \exists \nu : \forall k_0 > \nu \quad |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I\end{aligned}$$

Ora sappiamo che:

$$\begin{aligned}|f(x) - f_{k_0}(x_0)| &< \varepsilon \\ |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| &< \varepsilon\end{aligned}$$

Devo stimare:

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)|$$

**Oss. 32.2.**

$$\begin{aligned}f_{k_0} \in C^0(I) \Rightarrow \exists \delta > 0 : \text{se } x \in I \text{ con } |x - x_0| < \delta \\ \text{allora } |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon\end{aligned}$$

Quindi:

$$|f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \varepsilon$$

se  $x \in I$  con  $|x - x_0| < \delta$

□

**Teorema 32.2** (criterio di cauchy per la convergenza uniforme).

$$f_k \Rightarrow f \in I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall h, k > \nu \quad |f_k(x) - f_h(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in I$$

**Oss. 32.3.**

$$\begin{aligned}f_k(x) &= x^k \not\rightarrow f \in [0, 1] \\ f(x) &= \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Non è preservata la continuità quindi **non** c'è convergenza uniforme

Questo ci dice che questo teorema si usa per dimostrare che non c'è convergenza uniforme.

**Teorema 32.3** (Passaggio sotto  $\int$ ).

$$\begin{aligned}I &= [a, b] \quad \{f_k\} \subseteq C^0(I), f_k \Rightarrow f \in I \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx &= \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx\end{aligned}$$

*Dimostrazione.*  $f \in C^0(I)$  per th. continuità del limite  $\Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx$

□

Si usa adesso la lineraità dell'integrale e porto dentro il valore assoluto maggiorandolo.

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{\leq \max_{x \in [a, b]} |f_k(x) - f(x)| = \|f_k - f\|_\infty} dx \leq (b - a) \cdot \|f_k - f\|_\infty \xrightarrow{\substack{\text{poichè } f_k \rightrightarrows f \in [a, b]}} \overbrace{0}^{\widehat{\rightarrow}}\end{aligned}$$

**Oss. 32.4.**

non vale il th. se la convergenza è puntuale

se  $\not\rightarrow$   
ma solo  $\rightarrow$

**Esempio 32.2.**

$$\begin{aligned} f_k(x) &= kxe^{-kx^2} \quad \forall x \in [0, 1] \\ f_k(x) &\rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, 1] \\ f_k &\rightrightarrows f \in [0, 1] \end{aligned}$$

Infatti  $\max_{x \in [0, 1]} |f_k(x) - f(x)|$  da studio di funz.  $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{k}{\sqrt{2k}} e^{-\frac{1}{2k}}$  assume max in  $x_k = \frac{1}{\sqrt{2k}} 0$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_k(x) dx &= \int_0^1 kxe^{-kx^2} dx = \frac{-1}{2} e^{-kx^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} [1 - e^{-k}] \rightarrow \frac{1}{2} \\ \int_0^1 f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

**Teorema 32.4** (Passaggio al limite sotto).

Preso un intervallo  $I = [a, b]$

Sia  $\{f_k\} \in C^0(I)$

Se  $\exists x_0 \in I$  t.c.  $f_k(x_0) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$

e  $f'_k \rightrightarrows g \in I$

allora

$$\begin{aligned} \exists f \in C^1(I) : f_k &\rightrightarrows f \in I \\ \text{e } f'_k &\rightarrow f' \in I \end{aligned}$$

**Oss. 32.5.**

$f_k$  derivabile,  $f_k \stackrel{I}{\rightrightarrows} f$  non implica che  $f$  sia derivabile.

**Esempio 32.3.**

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} \quad x \in \mathbb{R} \quad x \in [-1, 1] \\ \{f_k\} &\subseteq C^1(I), f_k \rightrightarrows f(x) = |x| \notin C^1 \quad I = [-1, 1] \end{aligned}$$

**Esempio 32.4.**

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \frac{1}{k} \sin(kx) \quad x \in [a, b] \subseteq \mathbb{R} \\ f_k(x) &\rightarrow f(x) \equiv 0 \\ f_k &\rightrightarrows f \in \mathbb{R} \\ f'_k(x) &= \cos(kx) \not\rightarrow g \quad \text{non converge puntualmente in } \mathbb{R} \\ f'_k(x) &\not\rightarrow 0 = f'(x) \quad \text{perchè non converge} \end{aligned}$$

**Teorema 32.5** (Del DINI della convergenza monotona).

Preso un intervallo  $I = [a, b]$

Sia  $\{f_k\} \subseteq C^0(I)$  t.c. monotona rispetto a  $k$  (cioè  $f_{k+1} \overset{\text{o}}{\leq} f_k(x) \quad \forall x \in I$ )

e  $f_k(x) \rightarrow f(x) \in C^0(I)$

allora  $f_k \rightrightarrows f \in I$

**Esempio 32.5.**

$$f_k(x) = x^k \quad x \in [0, \frac{1}{2}]$$

**Oss. 32.6.**

$$f_k(x) \rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in I$$

Continuando con l'esercizio:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - f_k(x) &= x^{k+1} - x^k = \underbrace{x^k}_{\geq 0} \underbrace{(x-1)}_{< 0} \leq 0 \quad \text{cioè } f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \quad \forall x \in I \\ &\Rightarrow f_k \rightrightarrows f \in I \end{aligned}$$

**Strategie** per studiare la convergenza di  $\{f_k\}$ :

Quindi  $f_k \rightrightarrows f$  in  $I$ :

- usare la definizione calcolando  $\max_{x \in [a,b]} \sup_{x \in (a,b)} g_k(x) = |f_k(x) - f(x)|$
- Usare la convergenza monotona

Più utile può essere vedere quando NON c'è convergenza uniforme:

Quindi  $f_k \not\rightrightarrows f$  in  $I$ :

- $\{f_k\} \subseteq C^0, f \not\in C^0$  perchè contraddirà il th. della continuità del limite
- Usare la definizione (cerco quindi max e min di  $g_k(x) = |f_k(x) - f(x)|$  e vedo che il limite per  $k \rightarrow \infty$  non è 0)
- cerco  $\{x_k\} \subseteq I$  t.c.  $|f_k(x_k) - f(x_k)| \not\rightarrow 0$

**Esempio 32.6.**

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\begin{cases} \text{se } x = 0 & f_n(0) = 0 \\ \text{se } x \neq 0 & f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{1}{nx}}{1 + \underbrace{\frac{n^2x^2}{1}}_{\rightarrow 1}} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Guardo adesso se c'è convergenza uniforme  $f_n \stackrel{?}{\rightrightarrows} f \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (-1, 1)} \underbrace{|f_k(x) - f(x)|}_{g_k(x)} &= \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{kx}{1+k^2x^2} \right| \\ g_k(x) &= \frac{kx}{1+k^2x^2} \quad x \in [0, 1] \quad (\text{funz. pari}) \\ g'_k(x) &= \frac{k(1+k^2x^2) - kx(2k^2x)}{(1+k^2x^2)^2} = \frac{k - k^3x^2}{(1+k^2x^2)^2} = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{k} \\ g_k &\text{ cresce in } \left[0, \frac{1}{k}\right] \text{ e decresce in } \left[\frac{1}{k}, 1\right] \end{aligned}$$

Guardo adesso  $f_n \stackrel{?}{\rightrightarrows} f \in \mathcal{J} \subseteq [-1, 1]$

In più so che  $k$  è grande quindi nell'intervallo  $[0, 1]$   $\frac{1}{k}$  è vicino a 0, prendo quindi un sottointervallo  $[0, a]$  vicino a 0 che contiene  $\frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= [a, 1] \quad a > 0 \\ \mathcal{J} &= [a, 1] \cup [-1, -a] \quad a > 0 \end{aligned}$$



## 33 15/12/25

### 33.1 recupero della lezione 10/12/25

**Teorema 33.1** (Teorema di Stokes (richiamo)).

se  $S$  è una superficie regolare orientabile

$\partial^+ S$  indica il suo bordo orientato in modo concorde alla scelta della scelta del versore normale  $N$

e  $F$  è un campo vettoriale  $C^1$  definito in un intorno di  $S$

allora si ha che:

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, N \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle F, T \rangle ds$$

Con  $T$  versore tangente a  $\partial S$  concorde con l'orientazione

**Teorema 33.2** (della divergenza (richiamo)).

Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^3$  un aperto limitato la cui frontiera è una superficie regolare (o regolare a tratti) chiusa orientabile.

Sia in ogni punto di  $\partial D$  sia il versore normale  $N$  orientato in modo da puntare verso l'esterno di  $D$ .

Sia  $F$  un campo definito e  $C^1$  in un intorno di  $D$ .

Allora:

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx dy dz = \int_{\partial D} \langle F, N \rangle d\sigma$$

In generale si ha che:

Per Stokes quindi si ha che un integrale di superficie è uguale all'integrale del bordo di quella superficie (una curva)

Per il th. della divergenza l'integrale di volume è uguale ad un integrale del bordo di quel volume (una superficie).

Questo si rivede un po' sul th. fondamentale del calcolo dove si ha che l'integrale di una funzione su un intervallo è uguale alla differenza dei valori della primitiva agli estremi dell'intervallo (che sono i bordi dell'intervallo stesso).

**Esempi** a cui si applica il th. della divergenza:

- sfere
- semisfere
- cubi (regolare a pezzi che sarebbero le varie facce del cubo)
- cilindri (si intende un cilindro solido, pieno)
- la regione compresa tra due sfere concentriche

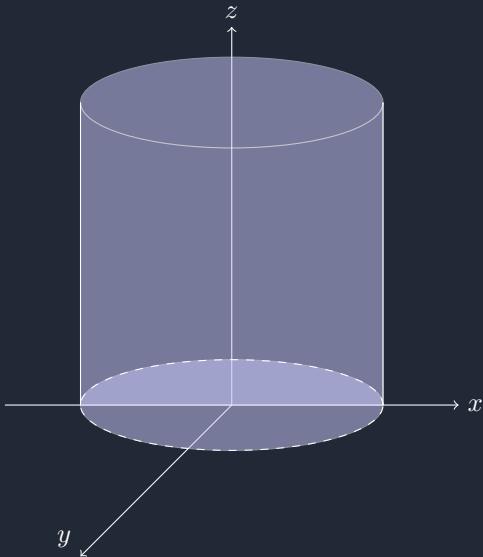
Non si applica a:

- la sfera privata di un punto (non è regolare a pezzi)

**Esempio 33.1.**

Prendiamo come dominio un cilindro di raggio 1 e altezza 1:

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$



Calcolare l'integrale di superficie:

$$F = (1 - (x^2 + y^2)^3, 2(1 - (x^2 + y^2)^3), x^2 z^2)$$

$$\int_D \operatorname{div} F \, dx dy dz \quad [\star]$$

Calcoliamo  $\operatorname{div} F$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (1 - (x^2 + y^2)^3) + \frac{\partial}{\partial y} (2(1 - (x^2 + y^2)^3)) + \frac{\partial}{\partial z} (x^2 z^2) = \\ -6x(x^2 + y^2)^2 - 12y(x^2 + y^2)^2 + 2xz \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale usiamo coordinate cilindriche:

$$D \rightarrow D' = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^1 (-6\rho \cos \theta \rho^4 - 12\rho \sin \theta \rho^4 + 2(\rho \cos(\theta))^2 z) \, dz = \dots = \frac{\pi}{4}$$

Calcoliamo ora l'integrale  $[\star]$  usando il th. della divergenza:

$$\int_{\partial D} \langle F, N \rangle \, d\sigma = \int_{\text{base}} + \int_{\text{coperchio}} + \int_{\text{sup. laterale}}$$

Partiamo dalla base:

$$\int_{\text{base}} \langle F, N \rangle \, d\sigma = \int_{\text{base}} \langle F(x, y, 0), (0, 0, -1) \rangle \, d\sigma = \int_{\text{base}} \langle F((1 - (x^2 + y^2)^3), (2(1 - (x^2 + y^2)^3)), 0), (0, 0, -1) \rangle \, d\sigma$$

Di fatto questo è il grafico di  $z \equiv 0$  con  $(x, y) \in \{x^2 + y^2 \leq 1\}$   
ad es. se

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R} \\ N &= \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \\ \|N\| &= \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \end{aligned}$$

Questa è una formula generale per il calcolo del versore normale ad un grafico.

Guardiamo adesso cosa accade con il coperchio, e sarà definito da  $(x, y) \in B(0, 1)$  con  $b$  che è la base del cilindro e  $z = 1$ :

$$\int_{\text{coperchio}} \langle F, N \rangle d\sigma = \int_{\text{coperchio}} \langle F(x, y, 1), (0, 0, 1) \rangle d\sigma = \int_{\text{coperchio}} \underbrace{\langle F((1 - (x^2 + y^2)^3), (2(1 - (x^2 + y^2)^3)), x^2), (0, 0, 1) \rangle}_{x^2} d\sigma$$

$$\int_{\text{coperchio}} x^2 d\sigma = \int_{(x,y):x^2+y^2 \leq 1} x^2 \sqrt{1 + 0} dx dy$$

Passiamo di nuovo in coordinate polari:

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Adesso tocca alla superficie laterale:

$$\int_{\text{superficie laterale}} \langle F, N \rangle d\sigma = \int_{\text{superficie laterale}} \underbrace{\langle (0, 0, x^2 z), (N_x, N_y, 0) \rangle}_{0} d\sigma = 0$$

Non so quanto sono  $N_y$  e  $N_x$  ma so che in ogni caso il prodotto scalare sarà 0.

Il th. della divergenza espresso con le varie componenti afferma che:

$$\int_D \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial D} F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3 d\sigma$$

Con  $N_1, N_2, N_3$  componenti del versore normale esterna.

### Proposizione 33.1.

se  $f$  è una funzione (scalare) def e  $C^1$  in un intorno di  $D$   
allora:

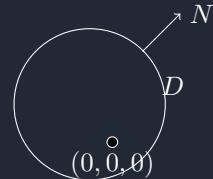
$$\int_D \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_1 d\sigma$$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_2 d\sigma$$

$$\int_D \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz = \int_{\partial D} f N_3 d\sigma$$

Come si può aggirare la presenza di un punto interno a  $D$  in cui il campo non è definito o non è  $C^1$ ? Prendiamo come esempio il campo  $F$ :

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}$$



Calcoliamo:

$$\int_{\partial D} \langle F, N \rangle d\sigma$$

La prima componente sarà:

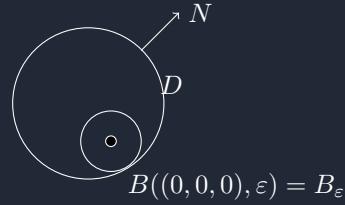
$$\operatorname{div} F = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x^3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cancel{x}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

La divergenza è la somma delle tre derivate parziali, in ogni caso le componenti per  $y$  e  $z$  vengono in maniera analoga:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r}) \\ & \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r}) \\ \operatorname{div} F = & \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = 0 \end{aligned}$$

Adesso si fa un passaggio furbo, si considera una sfera di raggio  $\varepsilon$  centrata nell'origine (punto in cui  $F$  non è definito) e si definisce:



Quindi ora posso dire:

$$\underbrace{\int_{D \setminus B_\varepsilon} \operatorname{div} F \, dx dy dz}_0 = \int_{\partial(D \setminus B_\varepsilon)} \langle F, N \rangle \, d\sigma$$

Quel campo viene 0 dai calcoli precedenti dove abbiamo visto che veniva un campo a divergenza nulla. Continuando:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial(D \setminus B_\varepsilon)} \langle F, N \rangle \, d\sigma \\ &= \int_{\partial D} \langle F, N \rangle \, d\sigma + \int_{\partial B_\varepsilon} \langle F, N \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

Ora consideriamo che:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} \langle F, N \rangle \, d\sigma &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left\langle \frac{(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|^3}, \frac{-(x, y, z)}{\|(x, y, z)\|} \right\rangle \, d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} \frac{-\|(x, y, z)\|^2}{\|(x, y, z)\|^4} \, d\sigma = \int_{\partial B_\varepsilon} \underbrace{\frac{-1}{\|(x, y, z)\|^2}}_{\varepsilon^2} \, d\sigma \\ &= \frac{-1}{\varepsilon^2} \int_{\partial B_\varepsilon} \, d\sigma = \frac{-1}{\varepsilon^2} \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{\text{area di } \partial B_\varepsilon} = -4\pi \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato:

$$\int_{\partial D} \langle F, N \rangle \, d\sigma = 4\pi$$

## 34 16/12/25

### 34.1 Serie di funzioni

**Definizione 34.1.**

$$\begin{aligned} \{f_k\} \subseteq \mathcal{F}_I & \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \in \mathcal{F}_I \\ \sum_0^{+\infty} f_k(x) \text{ serie} & = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \quad (\mathcal{F}_I; \text{norma}) \end{aligned}$$

**Definizione 34.2.**

$\sum_0^{+\infty} f_k$  converge puntualmente a  $S(x)$  se  $S_n(x) \rightarrow S(x)$  puntualmente in  $I$   
 $\sum_0^{+\infty} f_k$  converge assolutamente a  $S(x)$  se  $\sum_0^n |f_k(x)| \rightarrow S(x)$  puntualmente  
 $\sum_0^{+\infty} f_k$  converge uniformemente a  $S(x)$  se  $S_n(x) \rightarrow S(x)$  uniformemente in  $I$   
 rie  $\sum_0^{+\infty} f_k$  converge totalmente a  $S(x)$  se  $\exists \{M_n\} \subseteq \mathbb{R}$  t.c.  $|f_n(x)| \leq M_n \forall x \in I$  e  $\sum_0^{+\infty} M_n$  converge  
 quest'ultima vuol dire anche che  $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$  converge.

**Teorema 34.1.**

$\sum f_k$  converge totalmente  $\stackrel{\epsilon^I}{\Rightarrow}$  converge uniformemente in  $I$   $\stackrel{\epsilon^I}{\Rightarrow}$  converge puntualmente in  $I$ .

**Teorema 34.2.**

- continuità della somma.

$$\{f_k\} \subseteq C^0(I), \sum f_k(x) \Rightarrow S(x) \in I \Rightarrow S(x) \in C^0(I)$$

- Integrazione per Serie

$$I = [a, b] \{f_k\} \subseteq C^0(I), \sum f_k(x) \stackrel{I}{\Rightarrow} S(x) \in I \Rightarrow \int_a^b S(x) dx = \sum_0^{+\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

- Derivazione per Serie

$$I = [a, b] \{f_k\} \subseteq C^1(I), \sum f_k(x) \stackrel{I}{\Rightarrow} S(x) \in I, \sum f'_k(x) \Rightarrow G(x) \in I \Rightarrow S(x) \in C^1(I), S'(x) = \sum f'_k(x) \quad \forall x$$

**Esempio 34.1.**

$$\sum_0^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

a) studiare la vosc. puntuale e totale

b) detta  $S(x)$  la somma della serie, calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$

Punto a)

$$f_n(x) = 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{2^n}{3^n} x \frac{\sin\left(\frac{x}{3^n}\right)}{\frac{x}{3^n}}$$

Per  $x$  fissato ha segno (definitivamente) costante (quindi posso applicare il th del confronto)

$$\begin{aligned} \sum f_n & \text{ha lo stesso carattere di } \sum \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ che converge} \\ & \Rightarrow \sum f_n(x) \text{ converge puntualmente } \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Voglio studiare la convergenza totale

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)| = \sup_{x \in I} 2^n |\sin(\frac{x}{3^n})| \leq 2^n$$

Così non funziona dobbiamo trovare una magiorazione meno grossolana

considero  $I = [a, b]$  invece che come prima  $I = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\sup_{x \in I} 2^n \frac{|x|}{3^n}}_{|\sin(t)| \leq |t|} ? (\frac{2}{3})^n \sup_{x \in I} |x| \\ &= (\frac{2}{3})^n \max\{|a|, |b|\} := M_n \end{aligned}$$

$\sum M_n$  converge  $\Rightarrow \sum f_n$  converge totalmente in  $[a, b] \forall a, b \in \mathbb{R}$

Per provare che non c'è convergenza totale cerco  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$  t.c.  $\sum f_n(x_n)$  non converge  
**es.**  $\{x_n\} = \{3^n\} \subseteq \mathbb{R}$   $f_n(3^n) = 2^n$  con  $\sum 2^n$  diverge  
 Punto b)

**Oss. 34.1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) \stackrel{?}{=} S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \sin(\frac{0}{3^n}) = 0$$

$S(x) \in C^0$  ( $\{x = 0\}$ ) poiché  $\sum f_n$  converge totalmente in  $[-a, a]$  e quindi  $\sum f_n$  converge uniformemente, il th. di continuità del limite garantisce  $S(x) \in C^0([-a, a])$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} \stackrel{0/0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x) - S(0)}{x - 0} \stackrel{se \exists}{=} S'(0) = \sum_0^{+\infty} f'_k(0) = \sum_0^{+\infty} \frac{2^n}{3^n} \cos(\frac{0}{3^n}) = 1$$

L'ultimo passaggio abbiamo usato il th. di derivazione per Serie

Da questo:

$\sum f_k$  converge puntualmente a  $S(x)$  ✓

$\sum f'_k \Rightarrow G \in I$  ✓

$\Rightarrow S'(x) = \sum f'_k(x)$

$$|f'_k(x)| = \left| \frac{2^n}{3^n} \cos\left(\frac{x}{3^n}\right) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \sup_{x \in [-a, a]} |f'_k(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n = M_n$$

$\Rightarrow \sum f'_k$  converge totalmente in  $[-a, a]$  quindi converge uniformemente, inoltre:  $\sum M_n$  conv

$$= \sum_0^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3$$

## 34.2 serie di potenze

**Definizione 34.3.**

$\{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$  serie di potenze di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$   $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$

**Oss. 34.2.**

posso supporre  $x_0 = 0$   $y = x - x_0$  considerando  $\sum a_n y^n$

**Oss. 34.3.**

$\sum a_n x^n$  converge in  $x = 0$  sempre (poiché  $S_n(0) = a_0$ )

**Teorema 34.3.**

$\exists \xi \neq 0$  t.c.  $\sum a_n x^n$  converge in  $\xi$

$\Rightarrow$  la serie converge totalmente in  $[a, b] \quad \forall [a, b] \subseteq (-|\xi|, |\xi|)$   
 e quindi converge puntualmente in  $(-\xi, \xi)$

**Oss. 34.4.**

$(-\lvert \xi \rvert, \lvert \xi \rvert) \subseteq L$  l'insieme di convergenza

*Dimostrazione.*

sia  $\eta \in (-\lvert \xi \rvert, \lvert \xi \rvert)$

$$I = [-\eta, \eta] \in I$$

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= \underbrace{|a_n \xi^n|}_{\text{e oss. che } \sum M_n \text{ conv.}} \left| \frac{x}{\xi} \right|^n := M_n \text{ e oss. che } \sum M_n \text{ conv. } \left( \left| \frac{\eta}{\xi} \right| < 1 \right) \\ \exists M \text{ t.c. } &\leq M \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum a_n x^n \text{ converge totalmente } \in I = [-\eta, \eta] \end{aligned}$$

□

**Oss. 34.5.**

$(-\lvert \xi \rvert, \lvert \xi \rvert)$  L'insieme di convergenza di una serie di potenze

**Definizione 34.4.**

$$\boxed{\rho := \sup \{ \xi \in \mathbb{R} : \sum a_n x^n \text{ conv. in } \xi \}}$$

Detto raggio di convergenza della serie di potenze

$$\rho = \begin{cases} +\infty \leftrightarrow \sum a_n x^n \text{ conv. } \forall x \in \mathbb{R} \\ = R \in \mathbb{R} \\ = 0 \leftrightarrow \sum a_n x^n \text{ conv. solo per } x = 0 \end{cases}$$

**Teorema 34.4.**

$$\rho = R \leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sum a_n x^n &\text{ converge se } |x| < R \\ \sum a_n x^n &\text{ non converge se } |x| > R \end{aligned}$$

Con  $R :=$  raggio di convergenza

**Oss. 34.6.**

per  $|x| = R$  non si sa nulla in generale

**parte 1**  $\Rightarrow$ .  $\exists \xi \in \mathbb{R} : |x| < |\xi| \leq R$  e  $\sum a_n \xi^n$  converge.

Dal th. prec si ha convergenza in  $(-\lvert \xi \rvert, \lvert \xi \rvert)$  quindi anche in  $x$  (poichè converge in  $-|x|$  e  $|x|$ )

sia  $\xi : \xi > R$  suppongo  $\sum a_n \xi^n$  converge  $\implies$  dal th.prec.  $\sum a_n \xi^n$  converge anche in  $x$  t.c.  $R < x \leq \xi$  è assurdo perchè  $R = \sup \{ \dots \}$

[**parte 2**  $\Leftarrow$ ]  $\sum a_n x^n$  conv per  $|x| < \rho$  o non conv per  $|x| > \rho$  (vogliamo dimostrare  $\rho = R$ )

- se  $x \in (-\rho, \rho)$  dal th. prec. si ha  $x \leq \sup \{ \dots \} = R \quad \forall x \in (-\rho, \rho) \implies \rho \leq R$
- se fosse  $\rho < R \quad \exists \rho < \xi < R$  con  $\sum a_n \xi^n$  converge dal th. prec. Ma per hp.  $\sum a_n \xi^n$  non converge per  $|x| > \rho$  quindi  $\rho = R$

**Oss. 34.7.**

$(-R, R) \subseteq$  l'insieme di convergenza ed è un intervallo

□

**Teorema 34.5** (di Cauchy-Hadamard).

$$\sum_0^{+\infty} a_n x^n \quad \ell := \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$$

allora:

- se  $\ell = 0 \implies R = +\infty$
- se  $\ell = +\infty \implies R = 0$
- $\ell \in R, \ell \neq 0 \implies R = \frac{1}{\ell}$

*Dimostrazione.*

**casi possibili:**  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \begin{cases} 0 \\ +\infty \\ \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \end{cases}$

**caso 1:**  $\ell = 0$

• sia  $x \neq 0 \lim \sqrt[k]{|a_k||x|^k} = |x| \cdot \ell = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = 0 \\ +\infty & \text{se } \ell = +\infty \\ |x| \cdot \ell & \text{se } \ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0 \end{cases}$  **caso 2:**  $\ell = +\infty$

• se  $\ell = 0$  il criterio della radice per la serie numerica  $\sum |a_n||x|^n$  garantisce la convergenza.

• se  $\ell = +\infty$  il criterio della radice per la serie numerica  $\sum |a_n||x|^n$  garantisce la divergenza.

• **caso 3:**  $\ell \in \mathbb{R}, \ell \neq 0$

il criterio della radice fa sì che la serie converga se  $\ell|x| < 1$  e non converga se  $|x| > 1$

Dal th. 1.4 segue  $R = \frac{1}{\ell}$

□

**Esempio 34.2.**

$$\sum_1^{+\infty} 2^n x^n$$

Un esempio su foto.

## 35 17/12/25

### 35.1 limiti superiori

si indicano con  $\overline{\lim} a_n = \max\{\lim a_{nk}\}$

**Esempio 35.1.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{2n} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \dots$$

Serie di potenze  $\leftrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$

I)  
 $y = x^2$  considero  $\sum 2^k y^k$  è serie potenza  $a_k = 2^k$   
questa serie converge per la  $y = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ne dedco quello per  $x$ .

$$\frac{-1}{2} < x^2 < \frac{1}{2} \implies -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

II)

$$\sum a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + \dots$$

$$a_k = \begin{cases} 2^n & k = 2n \text{ quindi k pari} \\ 0 & k = 2n+1 \text{ quindi k dispari} \end{cases}$$

$$\underbrace{\overline{\lim}_{\substack{\parallel \\ \limsup}}}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ (2^n)^{\frac{1}{2n}} & k \neq 2n \end{cases} = \begin{cases} 0 & k \text{ dispari} \\ \sqrt{2} & k \text{ pari} \end{cases}$$

**Esempio 35.2.**

$$\sum_0^{+\infty} 2^n x^{n^2} = 1 + 2x + 4x^4 + 8x^9 + 16x^{16} + \dots$$

è serei di potenze  $\sum a_k x^k$

$$a_k = \begin{cases} 2^n & k = n^2 \\ 0 & k \neq n^2 \text{ quindi se non è un quadrato perfetto} \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \neq n^2 \\ (2^n)^{\frac{1}{n^2}} = 2^{\frac{1}{n}} & k = n^2 \end{cases}$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$R = 1$$

Quindi ho il raggio di convergenza  $= 1$  e converge nell'aperto  $I_{\text{conv}} = (-1, 1)$  di conseguenza ho  $I_{\text{non conv}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

**Teorema 35.1** (derivazione serie di potenze).

$\sum_0^{+\infty} a_n x^n \quad R = \text{raggio di convergenza}$

allora: la serie derivata  $\sum_1^{+\infty} k a_k x^{k-1}$  ha ancora raggio di convergenza  $R$ .

**Oss. 35.1.**

**Teorema 35.2** (di derivazione e integrazione per serie di potenze).

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  con  $R \neq 0$  raggio di convergenza, e  $S(x) = \sum a_n x^n$  per  $x \in I$

allora:  $S'(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x : |x| < R$  cioè in  $\overset{\circ}{I}$

e  $\int_0^x S(t) dt = \sum_0^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad \forall x : |x| < R$

*Dimostrazione.*

segue dal teorema della serie derivate e dalla convergenza uniforme della serie di potenze in  $[a, b] \subseteq (-R, R)$   
+ valgono i teoremi di derivazione e integrazione per serie di funzioni applicati a:

$$S(x) = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_1^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

□

**Esempio 35.3.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n 2^n x^n \quad R = \frac{1}{2}$$

$$I_{\text{conv}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

**Oss. 35.2.**

$$x(2^n x^n)' = n 2^n x^n \quad \text{quindi } \sum n 2^n x^n = \sum x(2^n x^n)' = \boxed{x \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n x^n)'} = x \cdot S'(x)$$

dove  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x}$  (serie geometrica nota) e quindi:

$$= x \cdot S'(x) = x \cdot \left( \frac{1}{1-2x} \right)' = x \cdot \frac{2}{(1-2x)^2} = \frac{2x}{(1-2x)^2}$$

**Teorema 35.3** (di Abel).

Presa:  $\sum a_n x^n$  con  $R > 0$  e  $\sum a_n R^n$  converge

allora:  $\sum a_n x^n$  converge uniformemente in  $[0, R]$  e la somma è  $C^0$  per  $x \rightarrow R$

**Problema 35.1.**

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n \stackrel{?}{=} \sum (a_n + b_n) x^n$$

**Soluzione 35.1.**

Vale quando:

$a_n x^n$  converge  $\leftrightarrow$  converge  $|x| < R_1$

$b_n x^n$  converge  $\leftrightarrow$  converge  $|x| < R_2$

e definisco  $R := \min\{R_1, R_2\}$

*Dimostrazione.* vediamo di dimostrare questo fatto.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum a_n x^n & g(x) \\ g(x) &= \sum b_n x^n \\ S_N &= \sum_{n=0}^N (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^N a_n x^n + \sum_{n=0}^N b_n x^n \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che  $\lim S_N = f(x) - g(x)$

$$\begin{aligned} |S_N(x) - (f(x) - g(x))| &= \left| \sum_0^N a_n x^n - f(x) + \sum_0^N b_n x^n - g(x) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_0^N a_n x^n - f(x) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ se } |x| < R} + \underbrace{\left| \sum_0^N b_n x^n - g(x) \right|}_{\rightarrow 0 \text{ se } |x| < R} \end{aligned}$$

□

**Teorema 35.4.**

$\sum a_n x^n$  con  $R \neq 0$  raggio di convergenza e  $f(x) = \sum a_n x^n$  per  $x \in I = (-R; R)$

allora:  $f \in C^\infty(\overset{\circ}{I}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$  si ha:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m} \text{ in } \overset{\circ}{I}$$

e in particolare:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{cioè} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

*Dimostrazione.* Si applica il teorema di derivazione per serie m-volte:

Calcolo:

$$f^{(m)}(0) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)a_k x^{k-m} \Big|_{x=0} = m(m-1)\dots2 \cdot 1 \cdot a_m = m! a_m$$

□

### Definizione 35.1.

Si chiama serie di Taylor di  $f \in C^\infty$  centrata in  $x_0$ :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = S_{T,x_0}$$

### Oss. 35.3.

sia  $f(x) = \sum a_n (x - x_0)^n \quad x \in (a, b)$   
allora  $\forall I_{x_0} \subseteq (a, b), |x - x_0| < \rho$  si ha:

- $f$  è  $\infty$ -derivabile per  $|x - x_0| < \rho$

- $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$  se  $f(x)$

Quindi  $f$  è sviuppabile in serie di Taylor se  $f(x)$  stessa è uguale alla sua serie di Taylor

### Oss. 35.4.

se  $f$  è  $\infty$ -derivabile e  $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$  convergente  $\Rightarrow f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

### Esempio 35.4.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ \infty - \text{deriv. in } 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k)}(0) = 0$$

ma  $f(x) \neq \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0$  poiché  $f \not\equiv 0$

**Teorema 35.5** (criterio di sviluppabilità in serie di Taylor).

Presa  $f$   $\infty$ -derivabile in  $(a, b)$  ed  $\exists M, L > 0 : |f^{(k)}(0)| \leq ML^k \quad \forall x \in (a, b)$

allora:  $\forall x_0 \in (a, b) f$  è Taylo-sviluppabile di centro  $x_0 \in (a, b)$

cioè  $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \forall x \in (a, b)$

### Esempio 35.5.

Sviluppare in un intorno di  $x_0 = 0$  e calcolare  $g^{17}(0)$  della funzione:

$$g(x) := \ln(1 + x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n$$

$$g(x) = \int_0^x g'(t) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-t)^n dt \stackrel{\text{th. di integ. per serie pot.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-t)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad n+1 =$$

Andiamo ora a calcolare la derivata 17-esima in 0:

$$g^{17}(0) = 17! \cdot a_{17} = 17! \cdot \frac{(-1)^{18}}{17} = 16!$$

### Esempio 35.6.

Calcolare il valore di  $\pi$  con un errore massimale di  $\varepsilon$  assegnato.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$$

Sappiamo che:

$$\arctan(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^2)^n dt \stackrel{\text{th. di int.}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{n+1} \Big|_0^1 \underset{|x| \leq 1}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Ho quindi che  $\arctan(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_N$

$$\begin{aligned} \text{Con } |R_N| &= \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \right| = \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)+1} + \frac{(-1)^{N+2}}{2(N+2)+1} + \frac{(-1)^{N+3}}{2(N+3)+1} \right| \\ &\leq \left| \frac{(-1)^{N+1}}{2(N+1)+1} \right| = \frac{1}{2(N+1)+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

Questa è piccola a piacere proprio perchè la serie  $\frac{1}{2n+1}$  è decrescente.  
**Curiosità:**

$$\pi = 48 \arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 32 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 20 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

### Esempio 35.7.

Data questa serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n - (-1)^n 3^n) x^{n^2}$$

Determinare  $I_{conv}$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$

Si vede intanto che è serie di potenze  $\sum a_k x^k$

$$a_k = \begin{cases} 2^n - (-1)^n 3^n & k = n^2 \\ 0 & k \neq n^2 \end{cases}$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} 0 & k \neq n^2 \\ (2^n - (-1)^n 3^n)^{\frac{1}{n^2}} & k = n^2 \end{cases}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |2^n - (-1)^n 3^n|^{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{3^{\frac{1}{n}}}_{\substack{\rightarrow 1 \\ (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^2}} < |\cdot| < 2^{\frac{1}{n^2}}}} \underbrace{\left( \frac{2}{3} \right)^n - (-1)^n}_{\substack{\frac{1}{n^2} \\ (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n^2}} < |\cdot| < 2^{\frac{1}{n^2}}}} = 1$$

$$R = 1$$

Quindi  $(-1, 1) \subseteq I_{conv}$  poichè per  $x = 1$  non converge  $x = -1$  neanche.

Passo ora al secondo punto dell'esercizio cioè calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$ :

$$S(x) = 0 + (2 - (-3))x^1 + (4 - 9)x^4 + R_N(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + (-5)x^4 + o(x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 + (-5)x^3 + \frac{o(x^2)}{x} = 5 + 0 + 0 = 5$$

### Esempio 35.8.

Data la serie di potenze generica:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Ed è dato che il raggio di convergenza è  $R = 1$ .

• Sapendo che  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = L \in \mathbb{R}$  si può dire che  $\sum a_n$  converge?

Sospetto che la risposta sia no (poichè dal th. di Abel vale il contrario ma non viceversa) e cerco un controsenso:

$$S(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$$

Il limite per  $x \rightarrow 1^-$  è:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Ma la serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

non converge.

Quindi la risposta è no. • Mi chiedo ora:

$\sum |a_n| < +\infty \stackrel{?}{\implies} \exists$  finiti  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x)$   
 Qua mi aspetto che la risposta sia sì ma devo dimostrarlo:

$$\sum |a_n|_{\text{conv.}} \implies \sum a_n x^n I_{\text{conv}} = [0, 1]$$

Inoltre converge totalmente in  $[-1, 1]$  che implica che converge uniformemente in  $[-1, 1]$   
 Quindi vale il teorema di continuità della somma il che implica che:

$$S(x) \in C^0([-1, 1])$$

• Adesso ancora mi chiedo  $\sum a_n$  div. con  $a_n \geq 0$  si può dire che  $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = +\infty$   
 Di nuovo mi aspetto che sia vero ma devo dimostrarlo:  
 fisso  $M > 0$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum a_n x^n \geq \sum_0^k a_n x^n \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \sum a_n \text{div.} &\implies \exists k_m : \sum_0^{k_m} a_n > M \\ \text{sia } \delta > 0 : 1 - \delta &< x < 1, (1 - \delta)^{k_m} > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\sum_0^k a_n \underbrace{x^n}_{>(1-\delta)^k} > (1 - \delta)^{k_m} \sum_0^{k_m} a_n > \frac{1}{2} 2M = M$$