* STIMA ESEMPLIFICATIVA dei contributi a $\frac{\Delta T_0}{T_0}$

$$\frac{\Delta T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{1}{8}\,\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\Delta\phi_0$$

- STIMA DELL'ORDINE DI GRANDEZZA DEL PERIODO $\Rightarrow$

nelle nostre condizioni sperimentali $\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right)_{max} \simeq 10^{-2} << 1$

$\Rightarrow$ PER ORDINE DI GRANDEZZA $T = T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}\right) \simeq T_0$

$\Rightarrow T \sim 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \simeq 2\pi\cdot\sqrt{\frac{2\,m}{9.8\,m/s^2}}$ $\left[\begin{cases}\ell\sim 2\,m\\ g\simeq 9.8\,m/s^2\end{cases}\right.$ per la stima GROSSOLANA che ci occorre QUI $\left.\right]$

$\Downarrow$

$$T\sim T_0 \sim 6.28\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^{\frac{1}{2}}s = 6.28\cdot(20\times10^{-2})^{\frac{1}{2}}s = 6.28\sqrt{20}\cdot10^{-1}s$$

$\Downarrow$ $\left(\sqrt{16}<\sqrt{20}<\sqrt{25} \Rightarrow 4<\sqrt{20}<5 \Rightarrow \sqrt{20}\sim4.5\right)$

$$T\sim 3.14*2*4.5*10^{-1}s = (3+0.14)*9*10^{-1}s = (27+14\times10^{-2}*9)*10^{-1}s =$$

$$=(2.7+126\times10^{-3})s = (2.7+0.126)s \simeq 2.83\,s \sim \boxed{3\,s\sim T\simeq T_0}$$

(una STIMA APPROSSIMATA di questo tipo è UTILE per controllare in lab. se per la misura di $\tau = nT$ stiamo contando il numero di oscillazioni correttamente!!)

- Esaminiamo adesso il termine $\frac{\Delta T}{T} \Rightarrow$

* se volessimo valutarlo $\boxed{\text{"a priori"}}$ SCEGLIENDO $n=10$

$$\Delta\tau = \Delta(nT) \simeq (\Delta t)_{az} \sim 0.1\,s \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta\tau}{n} \simeq \frac{0.1\,s}{10} = 0.01\,s$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{a\,priori} \simeq \frac{10^{-2}\,\cancel{s}}{3\,\cancel{s}} \sim 3\times10^{-3}$$

* QUI ci interessa una stima dell'ordine di grandezza dell'INCERTEZZA SPERIMENTALE ("a posteriori") che ci possiamo aspettare nel fare le misure $\Rightarrow$ facendo misure con attenzione si può ottenere $\Delta T \simeq$ qualche $\times10^{-3}s \simeq 3\times10^{-3} - 6\times10^{-3}s$ $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \quad \Delta T \simeq 3\times10^{-3} - 6\times10^{-3}\,s$ come possibile incertezza sperimentale risultante dalle misure in lab.

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{3\times10^{-3}\,\cancel{s}}{3\,\cancel{s}} - \frac{6\times10^{-3}\,\cancel{s}}{3\,\cancel{s}} \simeq \boxed{10^{-3} - 2\times10^{-3} \simeq \frac{\Delta T}{T}}$$

... come ordine di grandezza !!

- stima del contributo al $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ dovuto al $\Delta\phi_0$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\Delta\phi_0$$

* Ricordiamo che avevamo stimato $\Delta\phi_0 \simeq 0.003$ rad come rappresentativo per tutte le ampiezze angolari del range in cui facciamo misure in LAB.

$\Rightarrow$ PER ESEMPLIFICARE prendiamo nuovamente $X_0 \simeq 40$ cm

$$\Rightarrow \quad \sin\phi_0 \sim \frac{4\times10^{1}\,\cancel{cm}}{2\times10^{2}\,\cancel{cm}} = 0.2 \quad e \quad \phi_0 \simeq 0.201 \text{ rad} \simeq 0.2 \text{ rad} \simeq 11.5^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\phi_0}{2} \simeq 0.1 \text{ rad} \Rightarrow \sin\frac{\phi_0}{2} \simeq \frac{\phi_0}{2} \simeq 0.1 \Rightarrow \sin^2\frac{\phi_0}{2} \sim 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2} \simeq 2.5\times10^{-3} \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{8}\,\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\Delta\phi_0} \simeq \frac{1}{8}\cdot\frac{2\times10^{-1}}{1+2.5\times10^{-3}}\cdot 3\times10^{-3} \simeq \frac{3}{4}\times10^{-4} = 7.5\times10^{-5}$$

$\Rightarrow$ il contributo dovuto a $\Delta\phi_0$ sull'incertezza relativa $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ risulta molto più piccolo di quello dovuto al ΔT

$$10^{-3} - 2\times10^{-3} \simeq \frac{\Delta T}{T} \gg \frac{1}{8}\,\frac{\sin\phi_0\,\Delta\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} \simeq 8\times10^{-5}$$

$\Rightarrow$ trascurabile, per questo $\phi_0 \simeq 0.2$ rad

$\Rightarrow$ col crescere di ϕ_0, il contributo al $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ dovuto a $\Delta\phi_0$ tende a crescere ma resta sempre di piccola entità

$\Rightarrow$ se $X_0 \simeq 80$ cm $\Rightarrow \phi_0 \simeq 0.41$ rad $\simeq 23.6^\circ$

$$\frac{1}{8}\,\frac{\sin\phi_0\,\Delta\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}} \sim \frac{4}{8}\times10^{-1}\cdot 3\times10^{-3} \simeq 1.5\times10^{-4}$$

$\Rightarrow$ IN OGNI CASO, in LAB. DOVREMO VALUTARE QUESTO CONTRIBUTO PER LE NOSTRE SPECIFICHE SCELTE E MISURE !!

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per la valutazione di $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ il CONTRIBUTO DOMINANTE resta sempre il $\frac{\Delta T}{T}$, MA occorre comunque sempre valutare anche il contributo dovuto al $\Delta\phi_0$ e verificare.

$\Rightarrow$ COME ORDINE DI GRANDEZZA ci aspettiamo però $\Rightarrow$ $\frac{\Delta T_0}{T_0} \sim \frac{\Delta T}{T}$

* DETERMINIAMO g

$\Rightarrow$ $g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T_0^2}$

$\Rightarrow$ valutiamo l'incertezza relativa su g $\Rightarrow$ $\frac{\Delta g}{g}$

$d \ln g = d \ln\left(4\pi^2 \frac{\ell}{T_0^2}\right) \Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - \frac{d(T_0^2)}{T_0^2}$

$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - \frac{2\,dT_0}{T_0} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{2\Delta T_0}{T_0}}$

- che incertezza relativa ci aspettiamo di ottenere SPERIMENTALMENTE? utilizziamo le STIME PER ORDINE DI GRANDEZZA che abbiamo ottenuto per $\frac{\Delta\ell}{\ell}$ e $\frac{\Delta T_0}{T_0}$ $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + \frac{2\Delta T_0}{T_0} \simeq 1.5\times10^{-3} + 2\cdot10^{-3} \simeq 3\div4\times10^{-3} \simeq \frac{\Delta g}{g}$$

$\Rightarrow \Delta g \simeq 0.03 \div 0.04\ m/s^2$

- MA attenzione... questa valutazione semplice dell'incertezza su g, è utilizzabile ed è quella che utilizzeremo, ma richiede una riflessione e deve essere giustificata meglio in quanto A RIGORE non del tutto corretta FORMALMENTE, poiché T_0 ed ℓ (per come è misurato T_0) NON sono del tutto INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ per la procedura seguita $T_0 = T_0(T, \phi_0)$, dunque

$$T_0 = T_0(T,\phi_0) = T_0(T, \phi_0(\ell, x_0)) = T_0(T, \ell, x_0)$$

... in ultima analisi... $\Rightarrow$

⇒ a rigore $T_0 = T_0(T, \ell, x_0)$ ⇒ nella derivazione della relazione di propagazione delle incertezze su g PER UNA PIENA CORRETTEZZA FORMALE occorrerebbe intervenire a livello di differenziazione ⇒

$$\frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - 2\frac{dT_0}{T_0} = \frac{d\ell}{\ell} - 2\left\{\frac{dT}{T} - \frac{1}{8}\frac{\sin\phi_0 \, d\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\right\}$$

con $d\phi_0 = \tan\phi_0\left(\frac{dx_0}{x_0} - \frac{d\ell}{\ell}\right)$

⇓

$$\frac{dg}{g} = \frac{d\ell}{\ell} - 2\left\{\frac{dT}{T} - \frac{1}{8}\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\left[\tan\phi_0 \frac{dx_0}{x_0} - \tan\phi_0 \frac{d\ell}{\ell}\right]\right\}$$

⇒ prima di passare ai valori finiti occorre raccogliere i termini relativi ad ogni data grandezza indipendente: in questa nuova espressione formale avremo due termini in $\frac{d\ell}{\ell}$ e un termine in $\frac{dx_0}{x_0}$.

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\sin\phi_0 \tan\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\right)\frac{d\ell}{\ell} - 2\frac{dT}{T} + \frac{2}{8}\frac{\sin\phi_0 \tan\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\frac{dx_0}{x_0}$$

⇓ (passando ai valori finiti ...)

$$\frac{\Delta g}{g} = \underbrace{\left|1 - \frac{1}{4}\underbrace{\frac{\sin\phi_0 \tan\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}}_{\ll 1}\right|}_{\simeq 1 \; !!}\cdot\frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\underbrace{\left\{\frac{\Delta T}{T} + \underbrace{\frac{1}{8}\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\tan\phi_0\frac{\Delta x_0}{x_0}}_{\text{parte DOMINANTE del contributo a } \frac{\Delta T_0}{T_0} \text{ dovuto a } \Delta\phi_0}\right\}}_{\simeq \frac{\Delta T_0}{T_0} \; !!}$$

⇒ poiché

① $\frac{1}{8}\frac{\sin\phi_0}{1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\phi_0}{2}}\cdot\Delta\phi_0 \ll \frac{\Delta T}{T}$ e

② il termine dominante del $\Delta\phi_0$ è, nel caso della nostra configurazione sperimentale, quello in $\frac{\Delta x_0}{x_0}$ $\left(\frac{\Delta x_0}{x} \gg \frac{\Delta\ell}{\ell}\right.$ e comunque $\left.\frac{\Delta x_0}{x_0} > \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)$,

il risultato sul valore dell'incertezza relativa $\frac{\Delta g}{g}$ ottenuta dalla relazione FORMALMENTE CORRETTA ricavata sopra NON DIFFERISCE IN MODO SENSIBILE da quello della più semplice relazione di propagazione ottenuta considerando T_0 ed ℓ del tutto indipendenti

⇒ BENCHÉ CONSCI DELLA NON COMPLETA CORRETTEZZA FORMALE DELLA RELAZIONE DI PROPAGAZIONE "SEMPLICE" $\boxed{\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\frac{\Delta T_0}{T_0}}$, OK POSSIAMO COMUNQUE UTILIZZARLA COME BEN RAPPRESENTATIVA DELL'ERRORE RELATIVO su g !!