Appunti Analisi

Tommaso Miliani

21-10-25

1 Dimostrazione teorema volta scorsa

Teorema 1.1.
Se (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo o assoluto per f nell'insieme $\mathbb{D}$, allora

- (x_0, y_0) *è interno a* $\mathbb{D}$ *e* f *non è derivabile ;*
- (x_0, y_0) *è interno a* $\mathbb{D}$ *e* f *è derivabile e* $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.
- $(x_0 y_0) \in \partial\mathbb{D}$ *(ossia è un punto di frontiera).*

Da questo teorema deriva il seguente corollario:

Corollario 1.1.1 (Strategia per trovare punti di massimo)**.**
La strategia per trovare dei massimi assoluti di una funzione continua in un insieme compatto:

1. *Trovare punti interni critici*
2. *Trovare punti interni in cui* f *non è derivabile*
3. *Trovare i punti di massimo di* f *ristretta alla frontiera*
4. *Confrontare tutti i punti trovati ed i valori di* f *in tali punti.*

Esempio 1.1.
Riprendendo lo studio delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = 2xy \qquad \text{cerchio } x^2 + y^2 \leq 4$$

- *Non esistono punti critici*
- *L'unico punto in cui il gradiente è nullo è* $(0, 0)$.
- *Studio su* ∂D *, ossia* $\{x^2 + y^2 \leq 4\}$;

f *è iniettiva sulla frontiera solamente se e solo se si esprimono i 4 punti del cerchio in cui si interseca la funzione* $f(x, y)$*: I punti possono essere espressi come:*

$$2 \cos t \sin t \implies g(t) = 2 \cdot 2 \cos t \cdot \sin t$$

Per cui i punti di massimo della funzione sono esattamente:

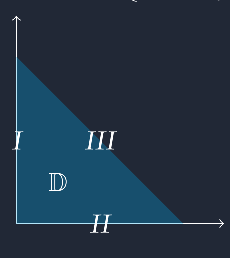
$$g'(t) = 0 \implies t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Per cui per il primo ed il terzo vale 4 e per il secondo ed il quarto vale -4*. Per*

$$g(0) = 0 \qquad g(2x) = 0$$

Esempio 1.2.
Voglio trovare in punti di intersezione tra la funzione

$$f(x, y) = x^2 y e^{-(x+y)} \qquad D = \{x \geq 0, y \geq 0 \qquad x + y \leq 4\}$$



- *I punti interni in cui f non è derivabile non esistono;*
- *I punti interni in cui $\nabla f = 0$ sono*

$$\{y = 0, x \in [0,1]\} \cup \{(2,1)\}$$
$$\implies f = 0 \cup f = \frac{4}{e^3}$$

Adesso voglio studiare i punti sulle tre frontiere del dominio della funzione:

1. *In questa frontiera*

$$f(0,y) \qquad f \in [0,4]$$

Per cui la funzione ristretta a questa frontiera

$$f_{|_I} \equiv 0$$

2.

$$f(x,0) \qquad x \in [0,4]$$

Per cui la funzione ristretta

$$f_{|_{II}} \equiv 0$$

3. *In questa frontiera invece considero*

$$f(x, 4-x) \qquad x \in [0,4]$$

Dove, posto $g(x) = f(x, 4-x)$, posso avere che

$$g(x) = x^2(4-x)e^{-4} \implies g' = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Per cui il punto di massimo è esattamente $(\frac{8}{3}, \frac{256}{27})$.

La ricerca di un massimo vincolato, ossia cercando un massimo o di un minimo di una funzione: ossia si cerca un massimo di una funzione $f(x,y)$ su di una funzione vincolo $g(x,y)$ (che è possibile a volte ridurre ad una funzione ad una variabile) . Tra tutti i punti che soddisfano $g(x,y) = 0$ si trovano quelli che rendono massima la funzione $f(x,y)$.

2 Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Teorema 2.1 (Moltiplicatori di Lagrange)**.**
Sia $G = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$ un vinicolo e sia (x_0, y_0) un punto di massimo locale per f ristretta al vincolo G. Supponiamo che sia f che g siano funzioni C^1 in un intorno di (x_0, y_0) e che il $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Allora esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tale che il punto (x_0, y_0, λ_0) è un punto critico della funzione

$$\mathfrak{L}(x,y,\lambda) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

Si introduce quindi una nuova funzione con una variabile di più in modo da cercare i punti candidati ad essere punti di minimo o di massimo vengono cercati nei punti critici per questa funzione. Essere punti critici per questa funzione significa che

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\lambda_0 \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\lambda_0 \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = 0 \qquad g(x,y) = 0$$

Se un punto x_0, y_0 è un punto di massimo vincolato, allora il gradiente di g è ortogonale alle linea di livello e che il gradiente di f deve essere ortogonale alle linee di livello:

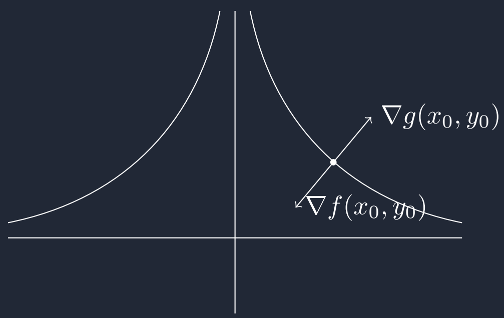
$$\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda \nabla g(x_0, y_0) \tag{1}$$

Il $\nabla g(\overline{x}, \overline{y})$ è perpendicolare alla linea di livello della funzione $g(x,y)$ che contiene il punto $\overline{x}, \overline{y}$.

Definizione 2.1 (Definizione di punto di massimo locale vincolato)**.**
Sia $G = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ *e sia* $(x_0, y_0) \in G$. *Si dice che* (x_0, y_0) *è un punto di massimo locale vincolato per* f *sul vincolo* G *se esiste un intorno* U *di* (x_0, y_0) *tale che*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \forall (x, y) \in U \cap G \tag{2}$$

Esempio 2.1 (Punto di minimo vincolato)**.**
Determinare il punto della curva $x^2y - 16 = 0$ *la cui distanza dal punto* $(0, 0)$ *è minima: cerco una circonferenza* $x^2 + y^2$ *tangente al vincolo della funzione.*



I possibili candidati che possono essere punti di massimo e di minimo si può costruire una funzione a partire da f *e dal vincolo secondo il teorema dei moltiplicatori dei Lagrange e con la definizione di massimo locale vincolato.*

$$\mathfrak{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$$

Ossia, secondo il metodo di Lagrange:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} = 0 \qquad 2x + 2\lambda xy = 0$$
$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} = 0 \qquad 2y + \lambda x^2 = 0$$
$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda} = 0 \qquad x^2y - 16 = 0$$

Da queste condizioni si ricavano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{y} \\ 2y = \frac{1}{y}x^2 \\ x^2y = 16 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{y} \\ x = \pm\sqrt{2}y \\ y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Se c'è un punto di minimo vincolato allora deve stare su questi due punti: $(2\sqrt{2}, 2)$ *e* $(-2\sqrt{2}, 2)$, *dunque si ottiene che*

$$\min_G f = \min_{G \cap C} f$$

Osservazione 2.1.
La tecnica si applica anche in dimensioni maggiori di 2.

Esempio 2.2.
Per esempio trovare il minimo oppure il massimo di una funzione $f(x, y, z)$ *sul vincolo* $G = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$. *Per esempio trovare il massimo o il minimo per*

$$f(x, y, z) = xy^2z^2 \qquad G = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

In questi casi il metodo di moltiplicatori di Lagrange è l'unico applicabile.

$$G = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = \frac{1}{2}\}$$

Con il metodo dei moltiplicatori posso chiamare la prima $g(x, y, z)$ *e la seconda* $h(x, y, z)$, *allora la Lagrangiana è*

$$\mathfrak{L}(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$