Fisica

Tommaso Miliani

01-04-25

1 Il teorema di Hoygen Steiner

IL teorema collega momenti di inerzia rispetto ad assi paralleli. Preso un corpo rigido con un dato centro di massa e scelto un asse lungo tale centro di massa farà in modo che il momento di inerzia si possa calcolare come:

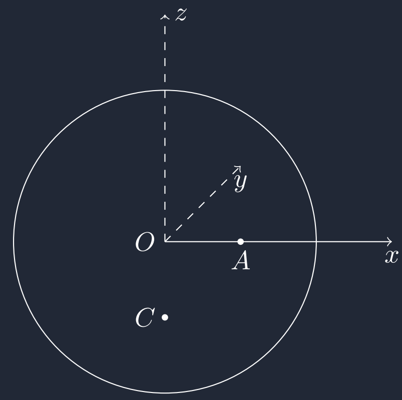
$$I_C = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

Con la seguente notazione posso esprimere un asse che passa lungo il centro di massa:

$$\hat{C}$$

Se prendessi un altro punto A che si trova a distanza d dall'asse passante per C voglio allora calcolarmi il momento di inerzia e ottengo che per un punto qualsiasi rispetto all'asse è proprio:

Figura 1:



$$I_{\hat{C}} = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Poiché posso considerare che stia su un piano perpendicolare all'asse e quindi il momento di inerzia del punto A sarà proprio:

$$I_{\hat{A}} = \sum m_i((x_i - D)^2 + y_i^2) = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + \sum m_i D^2 - 2\sum m_i x_i D$$

Il primo termine è proprio il momento di inerzia rispetto al centro di massa, mentre il secondo è il momento di inerzia totale della massa ed il terzo è il momento di inerzia uguale a zero. Allora il momento di inerzia tra due assi paralleli è proprio il momento di inerzia del primo asse più la distanza per la massa del corpo:

$$I_{\hat{A}} = I_{\hat{C}} + MD^2$$

E quindi il momento di inerzia minimo è quello che passa per il centro di massa.

2 Il momento di inerzia rispetto ad un asse

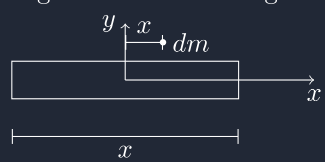
Si può calcolare il momento di inerzia rispetto ad un dato asse in un corpo rigido attraverso la seguente (per una figura piana):

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2 \tag{1}$$

2.1 La sbarra omogenea sottile

Per calcolare il suo momento di inerzia possiamo dividere la sbarra in tanti piccoli pezzi e dunque il mio momento di inerzia non è più una somma ma un integrale, scelto allora un sistema

Figura 2: Sbarra omogenea



di coordinate ed un asse ortogonale per il centro di massa si può dire che:

$$I = \int dm d^2$$

La massa infinitesima è data da:

$$dm = dx\lambda$$

SOstituendo nell'integrale allora:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx\lambda x^2$$

E allora il centro di massa di questo oggetto è dato da:

$$I_{\hat{C}} = \frac{1}{12}ML^2, \qquad M = \lambda L \tag{2}$$

Rispetto ad un asse passante per il bordo il momento di inerzia diventa:

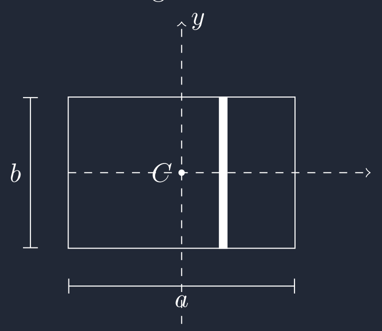
$$I_{\hat{A}} = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2$$

2.2 Il rettangolo omogeneo

In questo rettangolo essendo che è omogeneo, la sbarretta infinitesima di cui voglio calcolare il momento di inerzia posso schiacciarle tutte in un unica sbarrettina e quindi è proprio equivalente al caso della sbarretta omogenea di lunghezza b e massa M. Lo stesso vale per il momento di inerzia rispetto all'asse Y considerando le piccole sbarrette di lunghezza a. Dato che il momento di inerzia è additivo, il momento di inerzia somma rispetto all'asse z è proprio:

$$I_{\hat{z}} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \tag{3}$$

Figura 3:



3 Il parallelepipedo omogeneo

Dato che il parallelepipedo è omogeneo, posso calcolare il momento di inerzia come se fosse tutto schiacciato nel caso del rettangolo omogeneo e quindi il suo momento di inerzia è proprio:

$$I_{\hat{z}} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \tag{4}$$

3.1 Il cerchio omogeneo

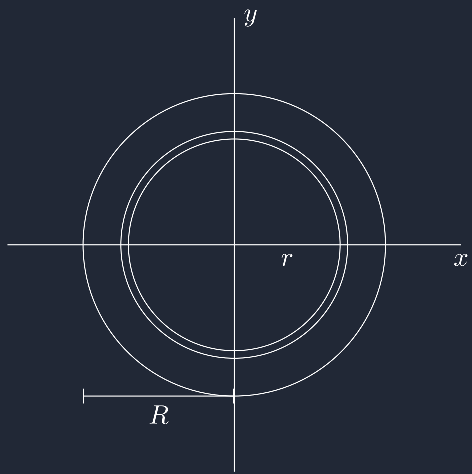
Posso considerare per calcolare il suo momento di inerzia una corona circolare infinitesima e quindi calcolare il momento di inerzia per una corona spessa dr. La superficie infinitesima della corona sarà data da:

$$dS = 2\pi r dr.$$
$$dm = \sigma dS$$

Dato che la corona ha un certo spessore dr, allora posso calcolare il momento di inerzia per una corona e fare l'integrale unidimensionale per considerare tutte le corone e ricavare il momento totale rispetto all'asse z

$$I_z = \int_0^R \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4}$$

Figura 4: Il momento del cerchio



E dato che la massa totale è proprio $M = \pi R^2 \sigma$, allora il momento di inerzia del cerchio omogeneo sarà:

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2 \tag{5}$$

Allora dato che il momento di inerzia è la somma dei momenti di inerzia rispetto agli altri assi, posso dire che:

$$I_z = I_x + I_y$$

E quindi

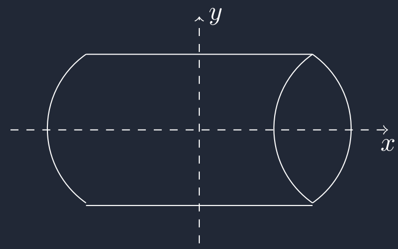
$$I_x = \frac{1}{4} M R^2 \tag{6}$$

$$I_y = \frac{1}{4} M R^2 \tag{7}$$

3.2 Il momento rispetto al cilindro

Posso considerarlo equivalente al momento del cerchio tutto schiacciato (dato che è omogeneo) e quindi la ruota fisica è proprio un cerchio e questo è del tutto lecito in quanto non cambia considerarlo come un cerchio della massa del cilindro. Rispetto all'asse y invece la cosa si complica: il momento di inerzia rispetto a quell'asse è dato da quello del cerchio più il termine di Hoygen Steiner:

Figura 5: Il cilindro



$$dI = \frac{1}{4} dm R^2 + dm x^2$$

ALlora dato che

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dx$$

E allora il momento di inerzia è esprimibile come integrale unidimensionale

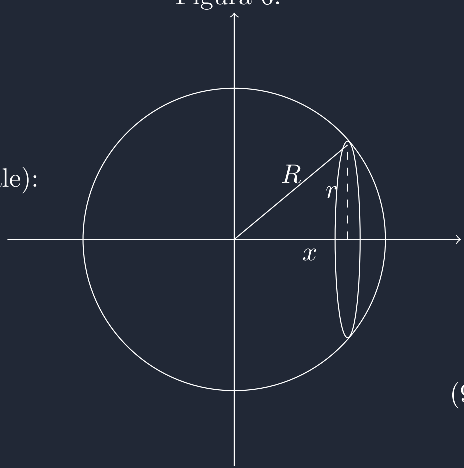
$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\rho \pi R^2 dx \left(\frac{R^2}{4} + x^2 \right) \right)$$

$$I_y = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \tag{8}$$

3.3 La sfera omogenea

$$r^2 = R^2 - x^2$$
$$dS = \pi r^2 = \pi (R^2 - x^2)$$
$$dV = dx dS = \pi (R^2 - x^2) dx$$
$$dm = \rho dV$$

Figura 6:



Il momento di inerzia rispetto ad un asse (per gli altri assi è uguale):

$$I_x = \int \frac{1}{2} dm r^2$$

Per cui sostituendo e risolvendo (Lazy ahh)

$$I_x = \frac{2}{5} M R^2 \tag{9}$$