Appunti analisi 2

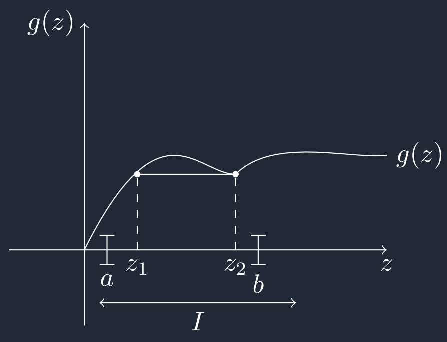
Tommaso Miliani

17-09-25

1 I teoremi di esistenza di Cauchy

Per spiegare il teorema di esistenza e di unicità bisogna chiarire innanzitutto cosa è una funzione Lipschitziana.

Figura 1:



Definizione 1.1 (Funzione Lipschitziana).
Presa una funzione definita come $g : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subset \mathbb{R}$; posto $[a, b] \subset I$, si dice allora che la funzione g è Lipschitziana nell'intervallo $[a, b]$ se $\exists L \in \mathbb{R} > 0$ tale che comunque si scelgano a, b risulta che, per ogni coppia di numeri $z_1, z_2 \in [a, b]$,

$$g(z_1) - g(z_2) \leq L|z_1 - z_2| \tag{1}$$

Che è equivalente alla seguente formulazione:

$$-L \leq \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \leq L \tag{2}$$

Esempio 1.1 (Esempio di una funzione potenza).

$$g(z) = z^\alpha, \alpha \in (0, 1)$$

Se si prende un intervallo che non contiene lo zero allora è Lipschitziana in quanto le rette avranno sempre una pendenza ben definita. Se invece si prendesse un intervallo che contiene anche lo zero, allora si vede che non è una funzione Lipschitziana perché il rapporto incrementale diventa grande quanto si vuole.

Definizione 1.2 (Derivate parziali).
Presa $f(x, y)$ definita nel punto (x_0, y_0) all'interno del dominio di F. Si ottiene allora che la derivata parziale rispetto alla y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h} \tag{3}$$

Ossia eseguo la derivata rispetto alla variabile considerata, considerando come costanti tutte le variabili per cui non derivo.

Esempio 1.2 (Esempio pratico).

$$f(x, y) = xy^3 + \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, y_0) = 9y^2 + \cos y$$

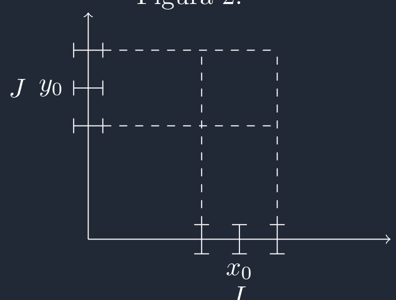
Nel punto $(3, y_0)$ la funzione diventa $3y^3 + \sin y$.

Possiamo ora introdurre il seguente teorema

Teorema 1.1 (Teorema di esistenza di Cauchy).
Si considera il problema di Cauchy per una differenziale di primo ordine

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Figura 2:



Possiamo supporre allora che ogni $f(x, y)$ sia definita $\forall(x, y) \in I \times J$, ossia su di un prodotto cartesiano tra due sottoinsiemi qualsiasi di $\mathbb{R} : I = (x - x_0, x + x_0)$ e $J = (y - y_0, y + y_0)$. Supponiamo allora le seguenti ipotesi:

1. *$f(x, y)$ è continua in $I \times J$;*

2. *$\exists$ costante $L > 0$ tale che la funzione $f(x, y)$ rispetta la definizione di funzione Lipschitziana nell'intervallo J $\forall x \in I$, $\forall y_1, y_2 \in J$.*

Allora esisterà $\delta > 0$ e esisterà una funzione $y(x)$ in una funzione definita nell'insieme $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Per poter dimostrare questo teorema dovremmo allora introdurre prima dei lemmi che ci consentano di dimostrare il teorema

Dimostrazione.

Proposizione 1.1 (Equivalenza tra il teorema del calcolo integrale e la derivata della differenziale)**.** *Sia $\delta > 0$ e supponiamo che siano valide le ipotesi del teorema, allora le seguenti sono equivalenti*

1. *$\exists y(x)$ derivabile in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che $y'(x) = f(x, y(x))$ $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], y(x_0) = y_0$.*

2. *$\exists y(x)$ funzione continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Dimostrazione. Posso dimostrare questa attraverso il teorema del calcolo integrale: se $g(z)$ è continua, allora posso scrivere che $g(z) = g(z_0) + \int_{z_0}^{z} g'(t)\ dt$.
$1 \implies 2$ So che $y(x)$ è una funzione che soddisfa la prima definizione e allora y' è continua e quindi dal teorema fondamentale del calcolo integrale io so che

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\ dt$$

Allora posso dire che, dato $y'(t) = f(t, y(t))$, posso sostituire nell'integrale e ottenere la tesi.
$2 \implies 1$: Sia y una funzione che soddisfi la seconda proposizione, allora posso utilizzare un'altra forma del teorema del calcolo integrale per cui se h è continua, allora la funzione $h(x) \to z_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt$ e quindi se h è continua e derivabile, la derivata di questa funzione è esattamente $h(x)$. Si ottiene che la funzione all'interno della tesi dell'integrale è continua e quindi l'integrale è una funzione derivabile e la sua derivata è esattamente (con l'implicita formulazione che $y(x_0) = y_0$)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Proprio come si voleva ottenere. □

Proposizione 1.2 (Se valgono queste considerazioni le ipotesi del teorema sono verificate)**.** *Se f è continua in un insieme $\mathbb{A}$, (x_0, y_0) è interno all'insieme e inoltre si ha che*

1. *$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.*

2. *$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ è continua*

$\forall(x, y) \in \mathbb{A}$ e allora le ipotesi di questo teorema sono verificate.

La dimostrazione è da finire nelle prossime lezioni. □

Esempio 1.3 (Funzione non Lipschitziana)**.**

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quindi dico che il mio x_0 e y_0 contengano l'origine, se io facessi il grafico di $y^{\frac{2}{3}}$, allora si ottiene che questo grafico è una radice simmetrica rispetto all'asse y e per questo non è Lipschitziana nell'intorno di 0: le immagini non comprendono le ordinate negative.

2 Equazioni a variabile separata

Le equazioni di funzioni a più variabili prendono il nome di funzioni a variabili separabili, ossia della forma

$$y' = a(x)b(y) \implies y'(x) = a(x)b(y(x)) \tag{4}$$

Dove $a(x)$ è continua in $I \subset \mathbb{R}$ e $b(y)$ è continua in $J \subset \mathbb{R}$. Posso trovare delle soluzioni per queste equazioni nella seguente maniera: se $\overline{y}$ è univoco tale che $b(\overline{y}) = 0$ allora la funzione $y(x) \equiv \overline{y}$ è soluzione. Se si suppone che $b(y) \neq 0$ allora posso dire che se due funzioni sono uguali il loro integrale sarà uguale:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \implies \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \implies \int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\ dy = \int a(x)\ dx$$

Se ponessi ora $y = y(x)$ che soddisfano questa equazione

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\ dx$$

Se $B(y)$ è una primitiva, allora posso dire che

$$B(y) = A(x) + c$$

Se si riuscisse a invertire invece la funzione B si ottiene che esiste una soluzione, la quale è data proprio da:

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

Esempio 2.1 (Esempio di separazione di variabili).

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Dato che $a(x) \equiv 1$ *e* $b(y) = \frac{1}{y}$, *si può integrare ed ottenere che*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \implies \int y\ dy = \int 1\ dx \implies \frac{y^2}{2} = x + c$$

Dato che il quadrato non è sempre invertibile, devo stare attento alle soluzioni che ottengo, in questo caso però mi va bene qualsiasi funzione inversa ed entrambre sono soluzioni ma scelgo quella positiva

$$y = \sqrt{2x + 2c} \implies y = \sqrt{2x + 4}$$

Esempio 2.2 (Altro Esempio).

$$y' = ay(1 - by), a, b > 0$$

In questo caso ho delle soluzioni costanti che mi permettono di dire che $y(x) \equiv 0$, $y(x) \equiv \frac{1}{b}$, *allora posso passare all'integrale separando le variabili e ottenere:*

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a\ dx \implies \ln\left|\frac{y}{1 - by}\right| = ax + c$$
$$\implies \left|\frac{y}{1 - by}\right| = e^{ax} \cdot e^{c} = e^{ax}c_0, c_0 \in \mathbb{R}$$

Dato che c_0 *è una costante sempre positiva, posso sostituirla con* $c_1 \in \mathbb{R} > 0$:

$$y = \frac{c_1 e^{ax}}{1 + bc_1 e^{ax}}$$

2.1 Equazioni omogenee

Sono delle equazioni del tipo

$$y' = f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è omogenea di grado 0, ossia $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Esempio 2.3 (Questa funzione differenziale è omogenea).

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = f(x, y)$$