Fisica (Lenti)

Tommaso Miliani

27-02-25

1 SDR non inerziali

1.1 Ascensore accelerato

In questi sistemi di riferimento dobbiamo anche considerare i contributi di della forza di trascinamento, della rotazione del sistema di riferimento mobile:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) - m\vec{\omega} \times (P - O) \tag{1}$$

$$\vec{F}_c o = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R \tag{2}$$

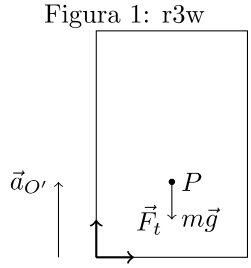
Se l'ascensore sta accelerando verso l'alto, allora accade che io mi senta schiacciato verso il basso a causa del segno della forza di trascinamento e, poiché non c'è componente rotatoria, si ottiene:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'}$$

In questo caso la forza di trascinamento si somma alla forza peso e quindi si ottiene una forza peso nuova data da:

$$m\vec{g}' = \vec{F}_t + m\vec{g} = -m(a_{O'} + g)\hat{g} \tag{3}$$

Figura 1: r3w



Lungo il versore $\hat{g}$ che è comune ad entrambe e le forze. Nel caso in cui l'ascensore stia invece cascando con una certa accelerazione, allora si ottiene che il nuovo peso effettivo diminuisce in quanto è dato dalla relazione:

$$m\vec{g}' - m(-|a_{O'}| + g) \tag{4}$$

Nel caso in cui l'ascensore fosse in caduta libera allora dato che $\vec{a}_{O'} = \vec{g}$, non c'è nessuna forza peso "nuova" l'accelerazione è proprio solo quella di gravità. Questa situazione è un sistema di riferimento non inerziale in cui siamo in una situazione in caduta libera e sperimentalmente si può realizzare con un aereo (l'esperimento zero gravity)

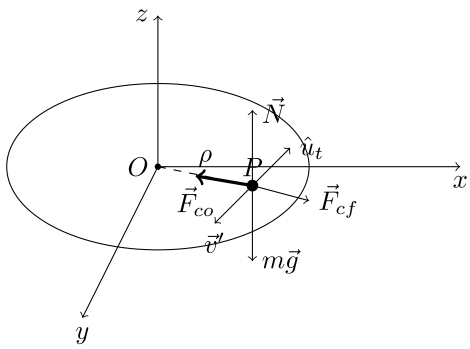
1.2 Caso $\vec{\omega} \neq 0$ e $\vec{a}_{O'} = 0$

Prendendo $\vec{\omega}$ costante, si ha il caso della piattaforma rotante: una giostra è un esempio è il seguente in cui x, y, z sono il sistema di riferimento inerziale e x', y', z' sono quelle del SDR non inerziale, l'asse z è l'asse ortogonale e coincide con z'. Impostando ora la forza di trascinamento e la forza complementare (Coriolis):

$$\vec{F}_t = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \tag{5}$$

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_R \tag{6}$$

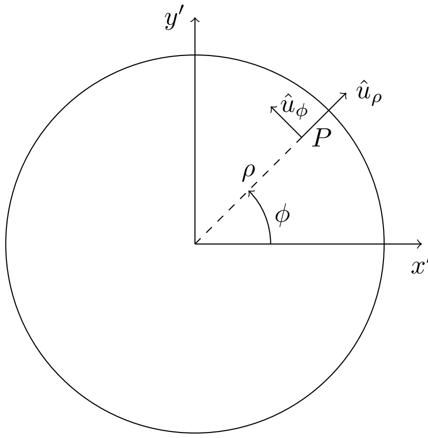
Figura 2: gsd



Nel piano possiamo anche ottenere una rappresentazione dall'alto che ci consente di esprimere in coordinate cilindriche per cui si ottiene che la distanza $P - O$ è proprio:

$$P - O = \rho\hat{u}_\rho + z\hat{k} \tag{7}$$

Figura 3:



E quindi la forza tdi trascinamento, essendo $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$$\vec{F}_t = +m\omega^2\rho\hat{u}_\rho \tag{8}$$

Essendo col segno positivo, questa tende ad andare verso l'esterno rispetto all'origine e prende quindi il nome di forza centrifuga. La velocità a questo punto può essere espressa come:

$$\vec{v}_R = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{\rho}\hat{u}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{u}_\phi + \dot{z}\hat{k} \tag{9}$$

E quindi possiamo trovare la forza di Coriolis che sarà, vista l'impostazione precedente delle forze, data da:

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega\rho\dot{\phi}\hat{u}_\rho - 2m\omega\rho\dot{\phi}\hat{u}_\rho \tag{10}$$

Che relazione c'è tra $\dot{\phi}$ e ω? Ad una prima analisi potrebbero sembrare la stessa cosa, ma in realtà sono due cose complementare diverse. ω è costante sia in modulo che direzione ed è la velocità angolare con cui ruota la piattaforma mentre ϕ è la posizione nel sistema di riferimento ruotante che l'osservatore sta guardando e quindi $\dot{\phi}$ è la variazione di questa posizione. Che moto avrebbe l'osservatore rispetto al SDR non inerziale? L'osservatore appare ruotare rispetto al SDR x', y', z' ma in senso opposto e quindi

$$\dot{\phi} = -\omega$$
$$\dot{\rho} = 0$$

La forza centrifuga resta inalterata e non cambia mentre ρ non cambia e quindi posso esprimere la forza centrifuga e di Coriolis(che diventa la forza complementare):

$$\vec{F}_t = m\omega^2\rho\hat{u}_\rho$$
$$\vec{F}_{co} = 2m\omega^2\rho\hat{u}_\rho$$

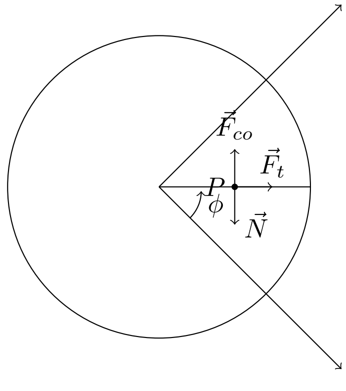
La somma delle forze non è zero, ma l'osservatore non è soggetto ad alcuna forza, infatti l'osservatore sta fermo rispetto al sistema in movimento.

1.3 Il caso della guida

Nel caso di un moto che scorre su di una guida senza attrito lo lascio andare: ha solo un grado di libertà in quanto può solo scorrere, le forze reagiscono sul punto materiale e ci saranno sicuramente delle forze peso e vincolanti che si compensano, delle forze di trascinamento e di Coriolis se si dovesse muovere. Dal momento che il sistema S' è solidale con l'oggetto, allora $\dot{\phi} = 0$, allora essendo che ho la componente radiale

$$\hat{u}_\rho : m\omega^2\rho = ma_\rho$$
$$\hat{u}_\phi : -2m\omega\dot{\rho} + N = 0$$

Figura 4: 23



La guida quindi deve produrre una reazione vincolare per tenere fermo l'oggetto dentro sé stessa. Quindi possiamo definire l'accelerazione come:

$$\vec{a}_R = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\hat{u}_\rho \tag{11}$$

Allora si ottengono le descrizioni per i versori:

$$\begin{cases} \omega^2\rho = \ddot{\rho} \\ N = 2m\omega\dot{\rho} \end{cases} \tag{12}$$

E allora si ottiene l'equazione del moto armonico modificata (quella per il filo con massa che cade) la cui soluzione è proprio:

$$\ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$
$$\rho = \rho_0\cosh(\omega t)$$
$$\dot{\rho} = \rho_0\omega\sinh(\omega t)$$

Allora la reazione vincolare della guida è proprio:

$$N = 2m\rho_0\omega\sinh(\omega t) \tag{13}$$

che è proprio la forza che accelera che accelera il corpo che scorre nella guida per cui un osservatore in un SDR inerziale vede il corpo accelerato.