

Fisica

Tommaso Miliani

07-03-25

1 Le forze centrali a simmetria sferica

Le forze centrali sono delle forze sempre dirette verso un punto come la gravità nella gravitazione universale, o la forza elettrostatica nell'elettromagnetismo; inoltre sono a simmetria sferica poiché il loro modulo è in funzione solamente del raggio vettore e nient'altro. Questo tipo di forze sono conservative? il lavoro di questo tipo di forze non è altro che

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

E quindi il vettore

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

Per cui:

$$\vec{dr} = dr\hat{u}_r + r\vec{d}\hat{u}_r$$

Dato che il prodotto scalare tra lo stesso vettore è uguale ad 1 ma la somma dei contributi $\vec{d}\hat{u}_m \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{d}\hat{u} = 0$ allora

$$\vec{d}\hat{u} \perp \hat{u}$$

Allora il lavoro diventa:

$$\delta L = f(\hat{u}_r) \cdot (d\hat{u}\vec{u} + \vec{u}d\hat{u})$$

Per cui preso l'integrale per un lavoro continuo e finito, allora si ottiene:

$$L_{AB} = \int_A^B f(r)dr = G(r_B) - G(r_A)$$

Posto allora

$$V(r) = -G(r)$$

Posso risalire alla definizione di energia potenziale e quindi questo tipo di forze sono conservative.

1.1 Forze a simmetria sferica non centrali

Prendendo una circuitazione allora l'integrale di linea:

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = f(r)2\pi R$$

Essendo questo integrale non uguale a zero, allora la forza non è conservativa.

Figura 1:

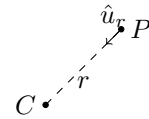
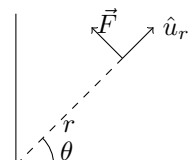


Figura 2: Forza non centrale a simmetria sferica



1.2 Forze centrali non a simmetria sferica

Queste forze sono centrali ma non hanno una simmetria sferica per cui il loro modulo cambia se cambia la loro posizione sulla sfera allora in questo caso, la forza è:

$$\vec{F} = f(r) \cos \theta \hat{u}_r$$

Allora l'integrale di linea:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_C^A \vec{F} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F} d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} d\vec{r}$$

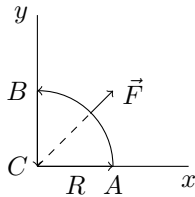
Quindi l'integrale di linea, risolvendo tutti gli integrali spezzati diventa:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{r=0}^{r_A=R} f(r) dr + 0 + 0$$

Così come nel disegno, la forza non è simmetria rispetto ad una sfera poiché non dipende solo ed esclusivamente dal modulo del raggio vettore che congiunge la forza al centro della sfera ideale ma anche dall'orientazione del vettore forza.

2 Il caso della molla tridimensionale

Figura 3: Forza centrale non a simmetria sferica



Se io attacco la molla in un certo punto allora quando tiro la molla si ha una forza di richiamo verso il centro della molla e quindi questa forza è proprio centrale a simmetria sferica e avrà quindi una certa energia potenziale e sarà anche conservativa .

$$\vec{F}_d = -K(r - l_0) \hat{u}_r$$

$$V = \frac{1}{2} K(r - l_0)^2$$

Allora l'energia meccanica diventa nel caso di un certo angolo rispetto da uno degli assi nel piano di giacenza della molla:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$\vec{r} = r \hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\theta} \hat{u}_\theta$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

La sola energia meccanica non mi basta per risolvere il problema poiché ho due gradi di libertà e dunque un'equazione sola non mi basta per poter risolvere il problema.

3 Piattaforma ruotante con $\vec{\omega} = 0$

Poniamo l'osservatore in un SDR non inerziale proprio sopra la Piattaforma osservando un punto P anch'esso sulla piattaforma. Sul punto p agiscono una forza di trascinamento mentre la forza di gravità è bilanciata dalla normale del piano.

$$\vec{F}_t = -m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\rho \hat{u}_P + z \hat{k})) = +m \omega^2 \rho \hat{u}_P$$

Figura 4: ads

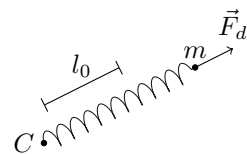
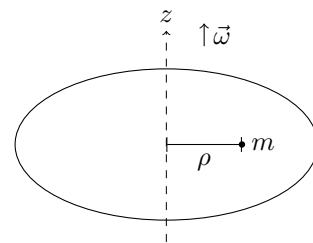


Figura 5: La piattaforma ruotante



Vale solo il contributo di $\rho\dot{\theta}$ poiché l'oggetto non si muove lungo la verticale. Nel caso di un piccolo spostamento \vec{dr} allora si ottiene:

$$\vec{dr} = d\rho\hat{u}_P + \rho d\hat{u}_P + dz\hat{k}$$

Allora si ottiene proprio il lavoro come:

$$\delta L = \vec{F}_t \vec{dr} = (m\omega^2 \rho \hat{u}_P) \cdot (d\rho \hat{u}_P + \rho d\hat{u}_P + dz\hat{k}) = m\omega^2 \rho d\rho$$

L'energia centrifuga

$$V = -\frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2$$

La forza di coriolis

$$\vec{F}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

La forza di Coriolis non fa lavoro poiché è sempre ortogonale allo spostamento infatti:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr} = (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$$

FA sempre lavoro zero e quindi non altera il bilancio energetico mentre se si muove allora si cambiano le condizioni e quindi potrebbero non valere più le condizioni di vincolo liscio.

Nel SDR non inerziale in assenza di attriti e altre forze, si conserva l'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2$$

Per un osservatore esterno alla piattaforma ruotante l'energia meccanica non si conserva. Infatti un'osservatore esterno vede che l'energia cinetica cambia e non vede altre forze conservative (la centrifuga non c'è) ma l'energia meccanica non si conserva poiché c'è ω costante data dal motore della piattaforma ruotante che compie lavoro per tenere un certo regime. Nel caso della pallina che è su questa piattaforma:

$$t = 0, \rho = \rho_0, \dot{\rho} = 0, E = -\frac{1}{2}m\omega^2 \rho_0^2$$

$$t = t_f, \rho = R, \dot{\rho} = ?, E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$$

Dato che l'energia si conserva allora posso uguagliarle e ottenere:

$$\dot{\rho} = \pm \omega \sqrt{R^2 - \rho_0^2}$$

Ha senso? Si perché R è il bordo della giostra e quindi quella radice è ben definita e quindi è vero sia per la conservazione dell'energia ed in tutti i casi del movimento da ρ_0 a R e viceversa. Derivando l'espressione dell'energia posso ottenere il caso $F = ma$ nel caso della potenziale della centrifuga:

$$\dot{\rho}(m\ddot{\rho} - m\omega^2 \rho) = 0$$

3.1 Il sistema dell'antimolla

Nel caso di una molla che è fissata al centro di una piattaforma ruotante con una massa, se vince il contributo della rotazione allora si ha una antimolla poiché la massa attaccata alla molla tende ad uscire dalla piattaforma ruotante vincendo la costante della molla; altrimenti si ha un moto armonico semplice se $k \gg \omega$.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 \rho^2 + \frac{1}{2}k\rho^2$$

4 Studio dell'equilibrio del sistema

Nello studio di un sistema con vincoli ideali e forze conservative, allora lo studio della posizione di equilibrio è relativamente facile. In un qualsiasi SdR, tenendo conto delle forze apparenti e riconducendoci dunque al caso ideale, allora un corpo rimane fermo (equilibrio più semplice) quando la risultante è zero. Se le forze sono conservative allora se la risultante è nulla vuol dire che in un solo grado di libertà

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 0$$

vuol dire che:

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Posso impostare il sistema di riferimento di un pendolo dove voglio in funzione dell'unico grado di libertà, ossia dell'angolo θ e quindi posso identificare col SdR centrato nella massa

$$V = mgz$$

Le energie potenziali V_1 e V_2 differiscono di una costante e quindi vanno bene entrambe e le loro derivate sono proprio:

$$V_1 = (L - L \cos \theta)mg$$

$$V_2 = -mgL \cos \theta$$

Derivando:

$$\frac{dV}{d\theta} - mgL(-\sin \theta) = mgL \sin \theta$$

Allora quando $\theta = 0$ la derivata è zero.

Figura 6: Pendolo

