Appunti di analisi

Tommaso Miliani

01-10-25

1 Esempio pisel

Esempio 1.1.

$$X = C^0([-1,1]) \qquad d = d_{L^1}$$
$$d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f-g|\, dx \implies \{x_k\} \leq X$$

Definizione 1.1.
Ogni successione di Cauchy convergente è detto spazio metrico completo.

Definizione 1.2.
Se si ha uno spazio normato che è completo come spazio metrico rispetto alla metrica indotta dallo spazio normato è detto ***Spazio di Banach****.*

Osservazione 1.1.
$C^1([a,b]); d_{C^1}$ *non è completo.*
$C^0([a,b]); d_{C^1}$ *non è completo.*

Alcune proprietà degli spazi di Banach

Osservazione 1.2.
Consideriamo uno spazio metrico ed una successione che converge in un punto $x_0 \in \mathbb{X}$, allora posso dire che il punto limite appartiene alla chiusura dell'insieme Y. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{X}$ è chiuso se e solo se contiene i limiti di tutte le successioni convergenti di Y.

Osservazione 1.3.
Se $(\mathbb{X}, d)$ è uno spazio metrico completo ed un suo sottoinsieme B è chiuso allora (B, d) è uno spazio metrico completo.

Definizione 1.3.
Prendiamo due spazi metrici ognuno con una sua distanza definita come

$$(\mathbb{X}, d_X) \qquad (\mathbb{Y}, d_Y) \qquad f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$$

- *f è continua in un punto $x_0 \in \mathbb{X}$ se $\forall \{x_k\} \subseteq \mathbb{X} : x_n \to x_0$ si ha che $\{f(x_n)\} \subseteq \mathbb{Y}$ converge a $f(x_0)$ in $(\mathbb{Y}, d_Y)$.*
- *f è Lipszitchiana se $\exists L > 0$ tale che $d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$.*
- *f si dice* ***contrazione*** *se Lipszitchiana con $L < 1$.*

Dimostrazione. Dimostrazione che se una funzione è Lipszitchiana allora è anche continua.
Sia $x_0 \in \mathbb{X}$ considero allora una successione $\{x_k\} \subseteq \mathbb{X}$ tale che $x_n \to x_0 \in (\mathbb{X}, d)$ ossia $d(x_n, x_0) \in \mathbb{R} \to 0$. Considero allora

$$0 \leq d_Y(f(x_n), f(x_0)) \leq L d_X(x_n, x_0) \implies d_Y(f(x_n), f(x_0)) \to 0$$

Ossia

$$f(x_n) \to f(x_0) \in (\mathbb{Y}, d_Y)$$

E quindi f è continua in x_0. Se e solo se l'insieme è ordinato allora posso dire che quest dimostrazione è valida. □

Teorema 1.1 (Teorema di contrazione)**.**
Il teorema di contrazione (o Teorema di Banach-Caccioppoli) parte da uno spazio metrico completo. Considerata f una applicazione da $\mathbb{X}$ in sé stessa, allora esiste ed è unico un punto $\overline{x} \in \mathbb{X}$ detto punto fisso tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$.

Dimostrazione. La dimostrazione costruisce analiticamente il punto $\overline{x}$ andando a costruire una successione di punti così definita:

$$x_1 = f(x_0) \qquad x_2 = f(x_1) \dots$$

L'elemento $k+1$ esimo è l'immagine dell'elemento k esimo. Posso allora affermare che la successione x_k è di Cauchy in $(\mathbb{X}, d)$ secondo la seguente dimostrazione: prima di tutto stimo la distanza tra l'elemento $k+1$ e l'elemento k esimo della successione. Per come è stata definita la succession $x_{k+1} = f(x_k) = f(x_{k-1})$ ossia è come scrivere la distanza tra $f(x_k)$ e $f(x_{k-1})$. Dato che f è una contrazione:

$$d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq Ld(x_k, x_{k-1})$$

Date la definizione della successione, allora si ha che

$$d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq Ld(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq L^2 d(x_{k-1}, x_{k-2})$$

Se si procede applicando questo algoritmo recursivamente allora si otterrebbe che $\dots \leq L^k d(x_1, x_0) = L^k d(x_0, f(x_0))$. IN questo modo la funzione distanza dipende solo ed esclusivamente dal punto x_0. Adesso voglio dimostrare che questa successione sia di Cauchy. Prendo $m > n$ con $m = n + p$ e quindi considero la distanza tra

$$d(x_m, x_n) = d(x_{n+p}, x_n)$$

Posso allora valutare la distanza di tutti gli elementi fino a $n+1$ fino a $n+p$; dato che posso valutare solo la distanza tra elementi consecutivi allora utilizzo la disuguaglianza triangolare.

$$\begin{gathered} d(x_{n+p}, x_n) \leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \leq \\ d(x_0, f(x_0)) \left(L^{n+p-1} + L^{n+p-2} + \dots + L^n\right) = d(x_0, f(x_0)) \left(\frac{L^n - L^{n+p}}{1-L}\right) = \\ d(x_0, f(x_0)) L^n \frac{1 - L^p}{1-L} < d(x_0 f(x_0)) \frac{L^n}{1-L} \end{gathered}$$

L'ultimo passaggio è valido in quanto $L < 1$ e dunque la frazione è minore di $\frac{1}{1-L}$. Dato che la distanza mi tende a zero

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N : m, n > 0 \implies d(x_m, x_n) < \epsilon$$

E quindi la succession $\{x_k\}$ è di Cauchy. Non resta che dimostrare la tesi del teorema. SI osserva che f è una contrazione e dunque è Lipszitchiana e dunque è continua. Allora

$$f(x_k) \to f(\overline{x})$$

Per definizione $f(x_k)$ è l'elemento x_{k+1} per definizione, ma x_{k+1} è un elemento della successione e dunque converge verso $\overline{x}$. Dato che questa successione ha ora due punti limite, per l'unicità del limite allora $\overline{x} = f(\overline{x})$. Si dimostra ora che è unico: ponendo che esistano $\overline{x}$ e $\overline{y}$ che mi validano il teorema. Devo dimostrare allora che la distanza tra i due sia zero. Dato che sono punti fissi allora devo valutare la distanza tra le loro immagini: dato che f è una contrazione, allora con $0 < L < 1$ l'oggetto è sicuramente minore della distanza. Se la distanza è diversa da zero, allora posso dire che

$$d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d(f(\overline{x}, f(\overline{y}))) \leq Ld(\overline{x}, \overline{y})$$

Avrei allora che la distanza tra due elemenit è minore o uguale della loro distnza e dunque se $d(\overline{x}, \overline{y}) \neq 0$ sarebbe assurdo $\implies d(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. □