Fluidi

Tommaso Miliani

21-10-25

1 Riprendendo l'esempio dell'atmosfera

L'equazione fondamentale dell'idrostatica non può essere utilizzata per poter determinare il problema dell'atmosfera di fluido. Si era infatti scelto

$$p = \text{const } \rho$$

In modo tale che

$$\rho(z) \text{ simile a } p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{k}\right)$$

La prima osservazione che si può fare è che compaiono delle coordinate termodinamiche che non sono costanti nello spazio (ma non dal tempo). Questo non è un vero e proprio equilibrio termodinamico in quanto è vero che non dipendono dal tempo, ma dipendono anche dallo spazio; dunque si parla di **equilibrio termodinamico locale**. La dipendenza dalla coordinata z è la conseguenza dell'azione di qualcosa di esterno al fluido. Qui è come si trattasse di tanti strati di fluido in equilibrio termodinamico tutti leggermente diversi tra di loro. Il fluido che si studia è che sia l'atmosfera terrestre. E' del tutto ragionevole considerare l'atmosfera come un gas perfetto in quando ha la seguente composizione:

$$\begin{gathered} O_2 \quad N_2 \to 99\% \\ CO_2 \quad H_2O \qquad CH_4 \to 1\% \end{gathered}$$

Un gas è approssimabile ad un gas perfetto se la sua temperatura non è confrontabile con la sua temperatura critica. La temperatura critica dell'azoto molecolare è circa 125 K mentre la temperatura critica dell'ossigeno è circa 155 K. Anche ai bordi della troposfera si parla di temperature dell'ordine di 200 K (più freddo della temperatura sulla superficie ma comunque molto superiori delle varie temperature critiche). Approssimare l'atmosfera ad un gas perfetto non è esatto ma è una buona approssimazione. Se l'atmosfera è un gas perfetto, dire che l'atmosfera ha una relazione di pressione costante con l'indice politropico uguale ad 1. Questo significa assumere che tutte le trasformazioni che avvengono nel gas (e che dunque ci sia una equazione che mi permetta di determinare la pressione in funzione di una costante), equivale a dire che tutte le trasformazioni avvengano a temperatura costante. Questo modello prende il nome di **modello di atmosfera isotermica**.

Il fatto che l'atmosfera sia stratificata e che dunque la pressione diminuisca con la quota mi permette di definire dei processi che avvengono all'interno dell'atmosfera. Tipicamente è possibile che ci siano delle porzioni di fluido che cambiano di densità per motivi termodinamici oppure dinamici; dunque le porzioni meno dense salgono e, dato che la pressione è minore, allora questa porzione di fluido continua ad espandersi via via che sale nel fluido. Se invece succede che una porzione di fluido diventi più densa, allora questa viene spinta verso il basso e dunque continua a ricevere spinta verso il basso. Questo fenomeno prende il nome di **convezione**. Mediamente non esiste una dipendenza dal tempo e queste trasformazioni non sono descritte da una legge che vincola la pressione ad essere costante. Questi movimenti sono sufficientemente veloci in modo tale che non ci sia scambio di energia tra la bolla di fluido ed il fluido intorno (di fatto il moto avviene in un ambiente adiabatico).

1.1 La formulazione rigorosa

Dato il primo principio e, dato che si è detto che questi movimenti non scambiano energia con il resto del fluido, posso dire che

$$dU + pdV = 0 \implies dU = \mathcal{C}_V dT$$

E dunque

$$dU = mc_V dT \qquad pdV = -dp\frac{V}{\gamma} \implies mc_V dT - dp\frac{V}{\gamma} = 0$$

Posso quindi risolvere e ottenere

$$\frac{m}{V}c_V dT - \frac{dp}{\gamma} = 0 \implies \rho c_V dT - \frac{dp}{\gamma} = 0$$

Sostituendo con l'espressione di γ, ottengo l'espressione per la pressione infinitesimo è data da

$$\rho c_V dT - \frac{c_V}{c_p}dp = 0 \implies dp = c_P \rho dT$$

Dato che

$$c_p \rho dT = -\rho g dz$$

Posso esprimere la variazione della temperatura rispetto al rapporto dell'accelerazione di gravità è del calore specifico a pressione costante.

$$dp = -\rho g dz$$

Dunque si ottiene

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} \tag{1}$$

Quello che si trova in questo modo è che se si integrasse questa espressione si otterrebbe l'espressione della temperatura del fluido in funzione della quota come

$$T(z) = T_0 - \frac{g}{c_p}z \tag{2}$$

Dunque per l'atmosfera terrestre

$$\frac{dT}{dz} \approx -0.98 \cdot 10^{-2} K \cdot m^{-1}$$

Dunque questa equazione riesce a predire il profilo di temperatura del fluido in funzione della quota: il profilo di temperatura è, con ottima approssimazione, lineare. Quello che viene fuori è che le misure ci dicono che se si prova a misurare quella derivata, in realtà è leggermente più piccola:

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)_{Misurata} \approx -0.7 \cdot 10^{-2} \; K \cdot m^{-1}$$

Ossia una discrepanza del 30%. Questo si spiega con il fatto che c'è un cambiamento di stato tra il vapore acqueo e l'aria: con l'effetto della convezione l'acqua sale e si raffredda e dunque ricade sottoforam di pioggia: il punto è che non altera il modello del fluido ma è un fluido nel quale si ha una fonte di energia che rilascia il suo calore latente di vaporizzazione: ogni goccia d'acqua sputa energia e scalda il sistema. SI può ottenere una controprova cerando la dipendenza dall'umidità di questa formulazione.