Analisi II - Formule di Gauss-Green

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1. Calcolare l'area racchiusa dalla curva:
$$\rho(\theta) = 2 + \cos\theta$$
con $\theta \in [0, 2\pi]$

2. Calcolare l'area dell'ellisse:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

3. Calcolare l'area della regione di piano delimitata da:
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

4. Provare che:
$$\iint_{\mathbb{D}} \Delta g \; dx \; dy = \oint_{\partial\mathbb{D}} \frac{\partial g}{\partial \nu} \; ds$$
dove $g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile di classe C^2 e Δ indica l'operatore di Laplace

5. Provare che:
$$\oint_{\partial^+\mathbb{D}} f \; \frac{\partial g}{\partial \nu} \; ds = \iint_{\mathbb{D}} (f \; \Delta g + \nabla f \; \nabla g) \; dx \; dy$$

6. Calcolare:
$$\iint_{\mathbb{E}} \frac{x}{x^2 + y^2} \; dx \; dy \quad \text{su } \mathbb{E} = \left\{ \frac{4}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 12;\; y \geq x^2 \right\}$$

*esercizi della prof.ssa *Chiara Bianchini*

7. Sia $\omega: \mathbb{R}^2 \to \left(\mathbb{R}^2\right)^*$ definita da:

$$\omega(x, y) = (2x \ \cos y - 3y) \ dx + \left(2 - x^2 \ \sin y\right) \ dy$$

Sia γ una curva di estremi A e B semplice e regolare a tratti e t.c. l'area della regione $\mathbb{D} = 4$, con $\partial\mathbb{D} = \gamma \cup \overline{OA} \cup \overline{OB}$ con:

$$O \equiv (0, 0); \quad A \equiv (0, 1); \quad B \equiv (0, 2)$$

8. Sia $\mathbb{C}$ una curva semplice chiusa sottostante il piano xy, $\mathbb{C} = \partial\mathbb{D}$. Sia M_z il momento di inerzia di D rispetto all'asse z.
Provare che:

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad t.c. \quad n \ M_z = \oint_{\mathbb{C}} \left(x^3 \ dy - y^3 \ dx\right)$$

9. Sia μ armonica in $B(0, R)$ con $R > 2$ (cioè μ t.c. $\Delta\mu = 0$ in $B(0, R)$).
   - Provare che div $\left((x^2 + y^2) \ \Delta\mu(x, y)\right) = 2r \ \frac{\partial\mu}{\partial r}(r, \theta)$ con (r, θ) coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.
   - Calcolare:
   $$\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \ \mu_r \ dr \ d\theta$$
   Sapendo che $\mu_r \equiv 1$ sulla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

10. Calcolare:

$$\iint_{\mathbb{E}} y \ dx \ dy$$

dove $\mathbb{E}$ è l'intersezione tra $B(0, 1)$ e il cerchio di centro $(x_0, 0)$ che incontra $B(0, 1)$ nel punto $(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ t.c. $\partial B(0, 1)$ e ∂C si tagliano ortogonalmente, considerando $y \geq 0$.

11. Calcolare:

$$\int_\gamma (y + z) \ dx + (z + x) \ dy + (x + y) \ dz \text{ su } \ \gamma = \begin{Bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x + y + z = 0 \end{Bmatrix}$$

12. Sia Σ una superficie regolare. Calcolare il flusso del campo

$$\rho(x, y, z) \ \underline{v}(x, y, z)$$

attraverso Σ

13. Sia $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 : \ |\mathbb{D}| > 0$. Provare che $\nexists \mu : \ \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenziabile t.c.:

$$\begin{cases} \Delta\mu = 1 & \text{in } \mathbb{D} \\ \frac{\partial \mu}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\mathbb{D} \end{cases}$$

14. Calcolare il lavoro del campo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x-y \end{pmatrix}$$

lungo la circonferenza γ data dall'intersezione tra la superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e il piano $z = y$ di equazione:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \ \sin t \end{pmatrix}_{t \in [0, 2\pi]}$$

15. Calcolare il flusso del campo:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x^2 y \\ y^z \end{pmatrix}$$

uscente dal solido S:

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2 \right\}$$

16. Calcolare:

$$\iint_{B(0,1)} \vec{F} \cdot \vec{G} \ dx \ dy$$

dove:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \nu(x,y) \\ \mu(x,y) \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \mu_x - \mu_y \\ \nu_x - \nu_y \end{pmatrix} \quad B(0,1) = \left\{ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

sapendo che $\mu(x,y) \equiv 1, \ \nu(x,y) = y$ su $\partial B(0,1)$

17. Siano:

$$\mathbb{D} = \left\{ x^2 + y^2 > 0 \right\}, \ P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \ Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

Sia γ una curva di Jordan regolare sottostante $\mathbb{D}$.
Calcolare:

$$\int_\gamma P \ dx + Q \ dy$$

- nel caso in cui $(0,0)$ è interno a γ
- nel caso in cui $(0,0)$ è esterno a γ

18. Siano P e Q campi scalari t.c.:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{R_1, R_2, R_3\}$$

con R_1, R_2, R_3 punti del piano.
Sia:

$$I_i = \oint_{C_i} P \; dx + Q \; dy$$

dove C_i sono le circonferenze di centro R_i con $C_j \cap C_i \neq \varnothing$.
Sia: $I_1 = 12,\; I_2 = 10 \; I_3 = 15$.

- Trovare:

$$\oint_C P \; dx + Q \; dy$$

- Tracciare la curva chiusa Γ t.c.:

$$\oint_\Gamma P \; dx + Q \; dy = 1$$

19. Calcolare il flusso del campo $\operatorname{rot} \vec{F}$ dove:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

attraverso la porzione di superficie Σ di equazione $z = xy$ che si proietta nel dominio $T = \left\{x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, orientata in modo che $\vec{N}$ abbia la terza componente maggiore di 0.

20. Calcolare la circuitazione del vettore:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

lungo la circonferenza sul piano $z = 0$ di equazione $x^2 + y^2 = 4$ percorsa in senso antiorario

21. Sia $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2,\; f, g \in C^2(\mathbb{D})$ differenziabili e t.c. $f = g = 0$ su $\partial\mathbb{D}$. Allora:

$$\iint_{\mathbb{D}} g \; \Delta f \; dx \; dy = \iint_{\mathbb{D}} f \; \Delta g \; dx \; dy$$

22. Dato:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ -3z \end{pmatrix}$$

- Calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la linea di intersezione tra le superfici $z = xy$ e $x^2 + y^2 = 1$
- Calcolare il flusso uscente dal cubo unitario avente tre spigoli sugli assi, un vertice nell'origine e il vertice opposto in $(1, 1, 1)$