Appunti di fluidi

Tommaso Miliani

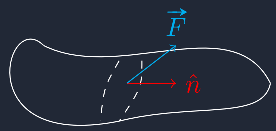
23-09-25

1 Fluidodinamica

1.1 Il concetto di fluido ideale

La Fluidodinamica si occupa di definire come si comporta un fluido. Un fluido è un corpo continuo formato da tanti puntini (molecole o atomi) con massa e dimensione finita. Supponendo di dividere il fluido in due parti A e B separate da una sezione, la cui superficie indichiamo con Σ. Devo avere una qualche forza che esercita la sezione A sulla sezione B sulla superficie di contatto Σ.

Figura 1: Il fluido diviso in due



$$\overrightarrow{F_{AB}} = F_{\parallel}\hat{n} + \overrightarrow{F_{\perp}}$$

Con il versore $\hat{n}$ perpendicolare alla superficie Σ considerata e il vettore $\overrightarrow{F_{\perp}}$ perpendicolare al versore $\hat{n}$; si definisce allora fluido se

$$|F_{\perp}| \lll |F_{\parallel}| \qquad F_{\parallel} > 0$$

Posso considerare ora la forza che imprime B su di A. Dato che conosco la forza che imprime A su B, allora posso dire che

$$\overrightarrow{F_{BA}} = -\overrightarrow{F_{AB}}$$

La definizione di F parallelo è una definizione che vale sempre anche per l'altro senso in quanto il prodotto scalare con il versore uscente è sempre lo stesso. E' proprio una cosa fisica: si suppone di prendere un contenitore e di porvi un fluido: questo fluido spingerà da entrambe le direzioni esercitando una forza uscente rispetto alla normale (ossia la sua pressione) . Esiste anche una proprietà per la quale il fluido non si scompone in pezzi ma rimane sempre unito che è la **tensione**. Un fluido può scorrere su di una superficie proprio perché la sua forza perpendicolare è molto piccola; tuttavia il fluido ideale scorre senza attrito: il fluido reale invece presenta attrito viscoso di taglio. Nella trattazione dei fluidi in fluidodinamica utilizziamo solamente l'ipotesi di fluido ideale che scorre senza attrito.

Figura 2:

1.2 Definizione del campo scalare della pressione

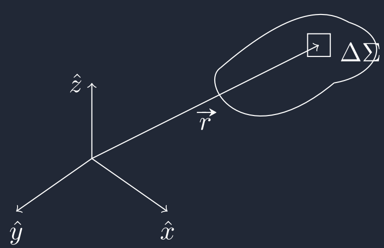
Riprendendo il volume arbitrario (o una porzione di fluido ideale) posso considerare un sistema di riferimento con terna destrorsa di versori e, preso un punto sulla superficie del volume di fluido,posso identificarlo con un raggio vettore $\vec{r}$ il punto sulla superficie del fluido, sulla sezione della superficie $\Delta\Sigma$ io identifico la spinta verso l'esterno rispetto alla massa del volume

$$\Delta\vec{R} = \overline{P}\Delta\Sigma\hat{n}$$

Dove $\overline{P}$ è una quantità positiva definita come

$$\overline{P} = \frac{\Delta R}{\Delta\Sigma}$$

Figura 3:



Ossia la pressione esercitata dal fluido verso l'esterno. Posso allora definire la pressione come

$$P(x, y, z) = \lim_{\Delta\Sigma \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta\Sigma} \quad \frac{[F]}{[L]^2} = \frac{[E]}{[L]^3} \tag{1}$$

Siamo allora passati da una quantità finita ad una quantità puntiforme: questa funzione è quindi univocamente definita in un punto dello spazio sulla superficie del fluido stesso. Questo è quello che si definisce un **campo scalare**. Un campo scalare è una funzione che associa uno scalare a ogni punto dello spazio. E' utile definire la pressione come energia per unità di volume (molto utile per lavorare con l'energia in termodinamica).

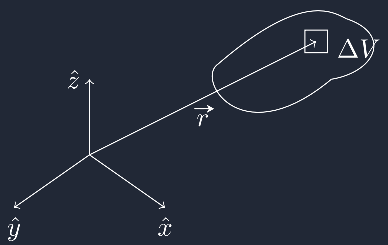
1.3 Definizione del campo scalare della densità

Considerato il solito sistema di riferimento stavolta, invece di intercettare un punto sulla superficie, prendo un punto interno al volume del fluido: invece di prendere un elemento di superficie, prenderò un elemento di volume per cui posso misurare una certa massa: posso allora scrivere la densità media di quel cubetto di fluido come

$$\overline{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Ossia la densità media. Posso trasformarla in una quantità che è definita per ogni punto del fluido e quindi ottenere il campo scalare della densità come

Figura 4:



$$\rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Si definiscono allora, data la densità, due classi di fluidi: i liquidi, che sono incomprimibili, ed i gas che sono invece dei fluidi comprimibili. Infatti nei liquidi se prendiamo una sezione molto piccola di fluido la densità non varia ma è sempre costante per tutto il liquido (fluido incomprimibile) mentre per un gas la densità può cambiare a seconda della sezione di volume considerata(fluido comprimibile).

1.4 Comprimibilità

Si può stimare la comprimibilità del fluido spingendolo con una certa pressione:

$$\frac{\Delta P}{\epsilon} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

Ossia ci si aspetta una compressione del volume a seguito dell'applicazione di una certa pressione P in modo uniforme su tutta la superficie del fluido. Chiamato allora ϵ il fattore di comprimibilità, questo definisce la comprimibilità del fluido considerato: più è grande e più il fluido è incomprimibile. A condizioni standard la comprimibilità dell'aria è circa $10^5\ Pa$ mentre l'acqua è più incomprimibile dell'aria con un $\epsilon = 10^9\ Pa$.

1.5 La resistenza all'espansione di un fluido

Se volessi trovare l'equilibrio delle forze del fluido potrei considerare un sistema di riferimento ed una piccola porzione di superficie del fluido. Questa porzione del fluido agisce in modo tale da imprimere una forza infinitesima

$$d\overrightarrow{F_\Sigma} = -p\hat{n}d\sigma$$

per resistere alla forza che vorrebbe fare espandere il fluido, mentre $d\sigma$ è un elemento di superficie infinitesimo. Un fluido cercherà allora di mantenere i legami tra le sue molecole ad una pressione esterna. La risultante delle forze di superficie sarà allora la somma di tutti i contributi delle forze sulla superfici. Calcolando allora la reazione che imprime la parte interna del liquido sulla superficie totale

$$\overrightarrow{R_\Sigma} = -\oint_{\Sigma(V)} p\hat{n}\ d\sigma$$

Per ogni punto posso allora associare una quantità vettoriale e dunque definisco un campo vettoriale derivante dalle forze esterne che agiscono sul fluido:

$$d\overrightarrow{F_V} = \vec{f}(x, y, z)dV$$

quindi

$$\overrightarrow{R_V} = \int_V \rho \vec{g}\ dV$$

dove $\vec{g}$ è una accelerazione generica. Dato che ora voglio l'equilibrio di un volume finito di fluido, ora impongo:

$$-\oint_{\Sigma(V)} p\hat{n}\ d\sigma + \int_V \rho\vec{g}\ dV = 0$$

Ossia l'equazione di **equilibrio idrostatico**. Si può risolvere in un caso particolare in cui le forze di volume sono trascurabili rispetto a quelle di superficie (dipende da diversi fattori); generalmente se si riduce il volume del fluido considerato che le forze di volume diminuiscono 10 volte più velocemente delle forze di superficie, Ci poniamo allora nelle condizioni per cui

$$\overrightarrow{R_\Sigma} = 0 \qquad \oint_{\Sigma(V)} p\hat{n}\ d\sigma = 0$$

La seconda condizione vale se e solo se la pressione sulla superficie del fluido è costante; dato che la superficie è arbitraria, allora la pressione è costante in tutto il fluido poiché potrei considerare una superficie che tocca il bordo del fluido e sia parzialmente contenuta nel fluido stesso, allora anche questa porzione avrà pressione costante. Questa affermazione è dimostrabile nel seguente modo:

$$\oint_{\Sigma(V)} p\hat{n}\ d\sigma = 0 \implies p = const \implies p\oint \hat{n}\ d\sigma = 0$$

Il secondo integrale è una proprietà geometrica e dunque è per forza zero: se prendessi infatti il generico vettore $\hat{n}$ di un certo δr, allora ottengo il volume del cilindro che avrà altezza il prodotto scalare dei due vettori normale e $\delta\vec{r}$ e questa traslazione non cambia il volume ma si forma un cilindro che indica il volume dovuto alla traslazione di ogni punto del fluido:

$$dV = d\sigma\delta\vec{r}\cdot\hat{n} \implies \Delta V = \int_{\Sigma(V)} \delta\vec{r}\cdot\hat{n}\ d\sigma = \delta r_0 \oint_\Sigma \hat{n}\ d\sigma = 0$$

Se scelgo arbitrariamente il vettore $\vec{r}$ come $\vec{r_0}$ allora si ottiene che quell'integrale deve fare zero in quanto tutti i contributi all'area devono annullarsi. (Il volume del cilindro rappresenta l'area dello spostamento di un certo punto). Si vede anche che a pressione costante il momento delle forze agenti sul fluido è uguale a zero:

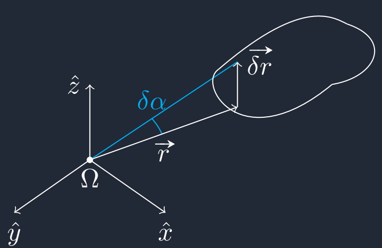
$$\oint_\Sigma \vec{r}\times(p\hat{n})\ d\sigma = 0$$

La conservazione della quantità di moto rappresenta l'invarianza delle leggi della fisica nel movimento. La conservazione del momento angolare rappresenta che le leggi della fisica sono invarianti rispetto alla rotazione. La conservazione dell'energia invece implica che le leggi della fisica sono invarianti rispetto ai cambiamenti di tempo. Scegliendo come polo Ω l'origine del sistema di riferimento allora posso ruotare il fluido di un certo angolo $\delta\alpha$ ottenendo allora un certo nuovo vettore $\vec{r'} = \vec{r} + \delta\vec{r}$, ossia il nuovo vettore è dato dal vettore

$$\delta r = \delta\alpha\hat{\Omega}\times\vec{r}$$

Con $\hat{\Omega}$ si indica il versore dell'asse di rotazione.

Figura 5: La rotazione del fluido non cambia la risultante delle forze



$$\delta V = d\sigma\delta\alpha(\hat{\Omega}\times\vec{r})\hat{n}$$

$$\Delta V = \int_{\Sigma(V)} d\sigma\delta\alpha(\hat{\Omega}\times\vec{r})\hat{n} \implies \Delta V = \oint_\Sigma \delta\alpha\hat{\Omega}\cdot(\vec{r}\times\hat{n})\ d\sigma$$

Allora si ottiene con le proprietà del prodotto triplo e col fatto che in una rotazione, così come in una traslazione, il volume non cambia, allora si ottiene la seguente

$$\Delta V = \delta a\hat{\Omega}\int(\vec{r}\times\hat{n})\ d\sigma = 0$$

Si è appena dimostrato il **principio di Pascal**, il cui enunciato dice che: un sistema isolato si dice all'equilibrio in cui le forze di volume sono trascurabili e la pressione è costante.

1.6 Torchio idraulico

Posso utilizzare i fluidi e la loro pressione per poter applicare più forza: infatti la spinta che sente la macchina sulla destra sarà data dalla relazione di pressione costante

$$p = \frac{F_1}{\Sigma_1} = \frac{F_2}{\Sigma_2}$$
$$F_2 = \frac{\Sigma_2}{\Sigma_1} F_1$$

Figura 6:

Con il principio di Pascal si possono risolvere i problemi a pressione costante e nell'ipotesi in cui i volumi di fluidi coinvolti siano sufficientemente piccoli.

1.7 Trovare l'equilibrio con le equazioni differenziali

Avrò i contributi delle forze che agiscono sull'asse z sono sia quelle di superficie che quelle di volume.

$$\begin{aligned}
&x : -(p(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z - p(x,y,z)\Delta y \Delta z) = 0 \\
&y : -(p(x, y+\Delta y, z)\Delta y \Delta z - p(x,y,z)\Delta y \Delta z) = 0 \\
&z : \rho g \Delta x \Delta y \Delta z - (p(x, yz+\Delta z)\Delta x \Delta y - p(x,y,z)\Delta x \Delta y) = 0
\end{aligned}$$

Si ottiene allora le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&x : \frac{-(p(x+\Delta x, y, z) - p(x,y,z))}{\Delta z} = 0 \\
&y : \frac{-(p(x, y+\Delta y, z) - (p(x,y,z)))}{\Delta y} = 0 \\
&z : \rho g - \frac{(p(x, y, z+\Delta z)\Delta x \Delta y - p(x,y,z))}{\Delta z} = 0
\end{aligned}$$

Posso allora eseguire la derivata parziale rispetto alle singole coordinate

$$\begin{cases}
-\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\
-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\
\rho z - \frac{\partial p}{\partial z} = 0
\end{cases}$$

Le altri componenti non hanno le componenti ρg perché stiamo considerando solamente l'asse z. In assenza di forze di volume, allora la derivate rispetto sia ad x che y sono uguali a zero e dunque da qualunque parte io la prenda p non cambia. anche perché se io mi sposto di una certa quantità infinitesima

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

Anche se mi spostassi di un certo angolo qualunque la pressione sarebbe comunque costante.