Appunti di analisi

Tommaso Miliani

15-10-25

L'Ottimizzazione: ricerca dei valori massimi e minimi delle funzioni

1 Ricerca dei valori massimi e minimi liberi

Data una funzione $f(x, y)$ e voglio cercare il massimo di questa funzione quando $(x, y) \in \mathbb{A}$. Se $\mathbb{A}$ è un insieme aperto, (e dunque ogni punto di $\mathbb{A}$ è interno ad esso), allora si parla di ricerca di **massimi liberi**. Se invece $\mathbb{A}$ non fosse aperto (ossia $\mathbb{A}$ fosse una curva o una superficie), allora si parla di **massimi vincolati**.

Esempio 1.1.
Siano P_1, P_2, P_3 punti del piano xy, si vuole trovare il punto del piano che rende minima la somma delle distanze dai tre punti. La funzione $f(x, y)$ è la distanza di (x, y) da P_1 sommata alle distanze degli altri due punti. In questo caso $\mathbb{A} \equiv \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = ||(x, y) - P_1|| + ||(x, y) - P_2|| + ||(x, y) - P_3||$$

Un problema di ottimizzazione molto comune è quello dei problemi geometrici:

Esempio 1.2.
Tra tutti i parallelepipedi di superficie 1, determinare il parallelepipedo con volume massimo. Posso definire la superficie che caratterizza l'area come

$$S(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz = 1$$

L'intersezione tra la superficie e il primo ottante di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.1 (Massimo assoluto)**.**
*Data una funzione f definita in $\mathbb{A}$ con valori in $\mathbb{R}$, dato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, dico che x_0 e y_0 è un punto di **massimo assoluto** per f in $\mathbb{A}$ e che $f(x_0, y_0)$ è il massimo assoluto se*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{A} \tag{1}$$

Definizione 1.2 (Massimo relativo)**.**
*Data una funzione f definita in $\mathbb{A}$ con valori in $\mathbb{R}$, dato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, dico che x_0 e y_0 è un punto di **massimo relativo**, o **locale**, per f in $\mathbb{A}$ e che $f(x_0, y_0)$ è il massimo relativo se $\exists$ un intorno U di (x_0, y_0) tale che*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in U \tag{2}$$

Le definizioni per il minimo sono del tutto analoghe

Definizione 1.3 (Minimo assoluto)**.**
*Data una funzione f definita in $\mathbb{A}$ con valori in $\mathbb{R}$, dato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, dico che x_0 e y_0 è un punto di **minimo assoluto** per f in $\mathbb{A}$ e che $f(x_0, y_0)$ è il minimo assoluto se*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{A} \tag{3}$$

Definizione 1.4 (Minimo relativo)**.**
*Data una funzione f definita in $\mathbb{A}$ con valori in $\mathbb{R}$, dato un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, dico che x_0 e y_0 è un punto di **minimo relativo**, o **locale**, per f in $\mathbb{A}$ e che $f(x_0, y_0)$ è il minimo relativo se $\exists$ un intorno U di (x_0, y_0) tale che*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \qquad \forall (x, y) \in U \tag{4}$$

Sorgono due problematiche per i punti di massimo e minimo:

- Esiste il punto di massimo o minimo?
- Come posso trovare questi punti?

Posso dimostrare l'esistenza dei punti di massimo e minimo secondo l'analogo del teorema di Weierstrass per le funzioni a due variabili

Teorema 1.1 (Teorema di Weierstrass)**.**
Se $\mathbb{A}$ è chiuso e limitato e se f è continua in $\mathbb{A}$, allora $\exists$ sia il massimo assoluto e anche il minimo assoluto.

Si elaborano adesso delle condizioni analitiche necessarie o sufficienti per capire se un punto è di minimo o di massimo. La prima condizione e l'analoga del teorema di Fermat per le funzioni a due variabili

Teorema 1.2 (Teorema di Fermat)**.**
Se (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo e se $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$ e se f è derivabile in (x_0, y_0), allora

$$Df(x_0, y_0) = 0 \tag{5}$$

Dimostrazione. Considerato $\phi_1(x) = f(x, y_0)$, ossia la funzione che determina l'aumento sulle x. Dato che ϕ_1 è derivabile, x_0 è un punto di massimo relativo per la funzione di una variabile $\phi_1(x)$. ϕ_1 è derivabile in x_0 e x_0 è interno al dominio di ϕ_1, valgono allora tutte le condizioni per l'applicazione del teorema di Fermat per le funzioni ad una variabile, dunque, applicandolo:

$$\implies \phi_1'(x_0) = 0 \qquad \phi_1'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Analogamente dimostro che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

□

Definizione 1.5 (Punto critico)**.**
*Un punto (x_0, y_0) in cui $Df(x_0, y_0)$ si annulla, si chiama **punto stazionario** o **punto critico**.*

Esempio 1.3 (Esempio di punto critico)**.**
Data una funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Il punto $(0, 0)$ è critico ed è un punto di minimo relativo.

Esempio 1.4 (Un punto critico non sempre è un massimo o un minimo)**.**
Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Il punto $(0, 0)$ è critico ma non è né di massimo relativo né di minimo relativo. Questo è un prototipo di punto non di minimo e neanche di massimo. Infatti, se restringessi lo studio solamente alla funzione

$$f(x, 0) = x^2$$

Sarebbe un punto di minimo, ma se fissassi invece la x:

$$f(0, y) = -y^2$$

*Avrei un punto di massimo locale. Questo punto prende il nome di **punto di Sella** poiché è un punto critico che si comporta in modo ambivalente: la sua matrice Hessiana è dunque negativa.*

Osservazione 1.1 (Punti non critici)**.**
Un punto di minimo locale o massimo può anche essere non critico nel caso in cui per la generica funzione $f(x, y)$ non esiste il gradiente in quel punto specifico.

Esempio 1.5.
La funzione norma

$$f(x, y) = ||(x, y)||$$

Il punto $(0, 0)$ è un punto di minimo assoluto, ma il gradiente non esiste in quel punto e dunque non è un punto critico. (E' essenzialmente lo stesso concetto nelle funzioni ad una sola variabile).

Osservazione 1.2.
Supponiamo che f sia C^2 in un intorno del punto critico (x_0, y_0). Lo sviluppo di Taylor mi permette di dire che

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + 0 + \frac{1}{2}\left\langle D^2 f(x,y)(x-x_0, y-y_0), (x-x_0, y-y_0)\right\rangle + o\left(||(x-x_0, y-y_0)||\right)^2$$

Vado allora a studiare la matrice Hessiana, per il teorema di Schwartz, se f è C^2 questa è simmetrica. Devo allora studiare il segno del prodotto scalare. Se A è una matrice $n \times n$ simmetrica e $h \in \mathbb{R}^n$, si considera la forma quadratica

$$q(h) = \langle Ah, h\rangle$$

- *Definita positiva: se $q(h) > 0$ $\forall h \neq 0$ allora ho un punto di minimo;*
- *Semidefinita positiva: se $q(h) \geq 0$ $\forall h$;*
- *Definita negativa: se $q(h) < 0$ $\forall h \neq 0$ allora ho un punto di massimo;*
- *Semidefinita negativa: se $q(h) \leq 0$ $\forall h$;*
- *Indefinita: se $\exists h_1, h_2 \neq 0$ tale che*

$$q(h_1) > 0 \qquad q(h_2) < 0$$

  E dunque ho un punto di Sella.

La funzione nel minimo quindi presenta l'errore (sottoforma di o piccolo), che non è trascurabile nel caso in cui la matrice A sia semidefinita: dunque devo ricorrere al teorema seguente per questo caso specifico.

Teorema 1.3 (Condizione necessaria per l'esistenza di un punto di minimo (analoga per un massimo))**.**
Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ è C^2 in un intorno di (x_0, y_0) e questo punto (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo, ed è interno ad $\mathbb{A}$. allora la forma quadratica associata alla matrice

$$h \to \left\langle D^2 f(x_0,y_0)h, h\right\rangle \tag{6}$$

è semidefinita positiva

Dimostrazione. Sia $h \in \mathbb{R}^2$ con $h \neq 0$, si considera la funzione

$$\phi(t) = f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) \qquad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Se $t = 0 \iff (x_0, y_0)$, scelgo $h \neq 0$ solo perché voglio che il vettore identifichi una direzione.

$$\phi'(0) = 0 \qquad \phi''(0) \geq 0$$

Perché ho imposto che per $t = 0$, la funzione presenti un minimo. Adesso, se facessi la deriavata della funzione $\phi(t)$:

$$(\phi(t))' = (f(x_0 + th_1, x_0 + th_2))' =$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_2$$

Posso allora fare la derivata seconda della funzione

$$(\phi(t))'' = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th_1, y_0 + th_2)h_2\right)'$$

Ossia

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)\right)' h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)\right)' h_2 =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_1 h_2 +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + th_1, x_0 + th_2)h_2^2$$

Se la calcolassi ora per $t = 0$, si ha che

$$\left\langle D^2 f(x_0,y_0)h, h\right\rangle$$

□

Teorema 1.4 (Condizione sufficiente).
Sia $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$ e sia f C^2 in un intorno di quel punto. Supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto critico della funzione. Allora

1. *Se $D^2 f(x_0, y_0)$ è definita positiva $\implies$ (x_0, y_0) è un punto di minimo relativo.*
2. *Se $D^2 f(x_0, y_0)$ è definita negativa $\implies$ (x_0, y_0) è un punto di massimo relativo.*
3. *Se $D^2 f(x_0, y_0)$ è indefinita $\implies$ (x_0, y_0) non è né un punto di massimo né di minimo relativo, ma è un punto di sella.*

Dimostrazione. Si dimostrano le tre:

1.
2.
3. La dimostrazione segue dal principio di condizione necessaria di esistenza del punto di minimo relativo.

□