Appunti di Fluidi

Tommaso Miliani

25-09-25

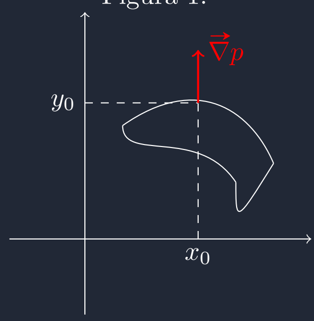
1 Isolivelli

Posso vedere che il rotore della pressione è il piccolo vettorino sulla superficie della curva chiusa per cui posso scrivere l'equazione per la mia superficie come

$$-\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = 0 \tag{1}$$

Ossia l'equazione fondamentale dell'idrostatica. Ogni vettorino $\vec{\nabla} p$ è ortogonale alla superficie del fluido. Si ottengono allora gli **isolivelli** per p sulla superficie del fluido: ossia la pressione del fluido è costante su tutta la sua superficie. Dato che la densità non si conosce a priori, devo derivarla dalla pressione: posso prendere un gas e, comprimendolo, se riduce il suo volume allora deve necessariamente aumentare la densità.

Figura 1:



2 Legge di Stevino

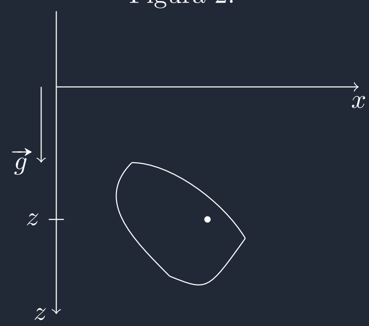
Il caso più semplice della risoluzione dell'equazione è con $\vec{g}$ costante e nel caso in cui il fluido sia **incomprimibile** ($\rho = \rho_0$). Tutte le derivate parziali della pressione rispetto ai vari assi sono allora zero tranne che per l'asse z (perché l'unica forza è proprio lungo la direzione di z, ossia la forza gravitazionale), per cui l'equazione fondamentale dell'idrostatica ci darà

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g$$

A questo punto la funzione varia solo per z. La derivata parziale diventa una derivata totale.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{dz} dz = \int_{z_0}^{z} \rho g \; dz$$

Figura 2:



Si ha quindi la **legge di Stevino** per cui la differenza di pressione è legata unicamente alla profondità all'interno del fluido.

$$p - p_0 = \rho g (z - z_0) \tag{2}$$

In un fluido incomprimibile la pressione di un fluido dipende interamente dalla sua altezza. La pressione spinge in tutte le direzioni del contenitore e più ci si addentra dentro al fluido e più diventa grande la pressione: questo è dovuto proprio alla legge di Stevino.

2.1 Stima per un caso specifico

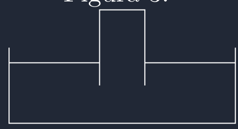
Quanta pressione esercita un metro d'acqua: data la densità $\rho_a \approx 1 \; g/cm^3$ e preso $g \approx 10$, in modo tale che la pressione dell'acqua è $10^4 N/m^2$. In 10 metri si avrebbe invece $10^5 N/m^2$. L'esperimento di Pascal consiste nel prendere un piccolo tubo di una sezione molto piccola tale per cui per 3 metri di tubo si ha un litro d'acqua (per esempio) per esercire una grossa pressione nel contenitore sottostante.

2.2 Contenitore con liquido

Bernoulli in questo esperimento ha osservato che la pressione che agisce sul fluido all'interfaccia con l'aria deve bilanciarsi con la pressione dell'aria. Per la legge di Stevino posso osservare che

$$p = p_{\perp} gh$$

Figura 3:



Questa pressione dovrà coincidere con la pressione atmosferica in quanto i due fluidi devono essere in equilibrio sull'interfaccia. L'interfaccia tra liquido ed aria non si sposta in quanto le pressioni che intercorrono tra le due facce sono in equilibrio. Bernoulli con questo esperimento è riuscito a calcolare la pressione dell'aria di $10^5 Pa$ al livello del mare (e coincide con la sua comprimibilità). Posso definire allora

$$10^5 \; N/m = 1 \; Bar \approx 1 \; Atm(1,03 \cdot 10^5 \; Pa) \approx 1 \; kg/cm^2$$

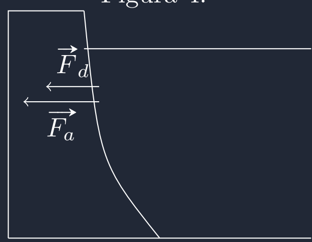
Se si ipotizzasse che dentro al contenitore ci sia acqua, allora la legge di Stevino diventerebbe

$$p - p_0 = \rho_{acqua} gh$$

Quando si è alla profondità dell'ordine di un chilometro la comprimibilità dell'acqua è da tenere in considerazione e la densità dell'acqua aumenta a causa della pressione del liquido sovrastante. Le dighe infatti non sono dei muri dritti Il pezzo sotto della diga deve resistere sia alla pressione del cemento sovrastante che alla pressione dell'acqua che cresce con la profondità. La pressione totale a cui deve resistere la diga con una certa quota di acqua rispetto alla base della diga è l'integrale della pressione

$$R(z) = \int_0^z \rho g z' \; dz' = \frac{\rho}{2} g z^2$$

Figura 4:



2.3 Fluido immerso in un fluido

Nel caso in cui si immerga un fluido all'interno di un fluido, se il fluido immerso è lo stesso fluido contenitore F, allora la risultante è diretta lungo la stessa direzione della gravità ma con verso opposto per avere l'equilibrio

$$\rho_F g V = R_\Sigma$$

La risultante nel caso in cui il fluido S contenuto nel fluido F sia diverso sarà allora data dall'integrale rispetto al volume

$$R_\Sigma = -\int_V \rho \; dV \vec{g} = -M_F \vec{g}$$

Figura 5: