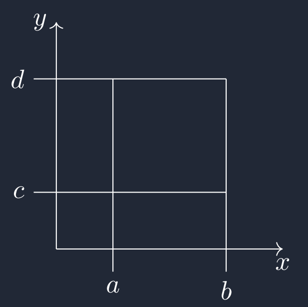
Appunti di Analisi (Bianchi)

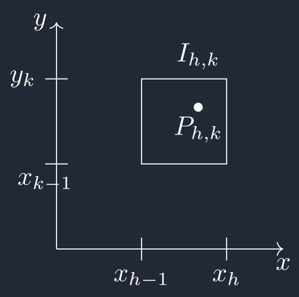
Tommaso Miliani

18-11-25

1 Integrali per funzioni a più variabili

Quando si parla di integrali a più variabili si tratta di andare a dare un significato al concetto di ”area di un insieme piano” o di misura di un insieme n dimensionale. Bisogna allora definire il concetto di area e di volume per gli insiemi perché quando si lavora con insiemi che sono ”strani”. Pensando ad un quadrato in cui si prende $x = 1$ e $y = 1$ e tali che si prendono solamente i lati razionali, il concetto di area non è ben definito. Se si considera una funzione solamente definita su di un rettangolo $[a, b] \times [c, d]$.





Preso $n \in \mathbb{N}$ e dividendo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, faccio lo stesso per $[c, d]$, in modo tale che posso definire degli intervalli x_{h-1} e x_h sull'asse x e y_{k-1} e y_k in modo tale da ottenere il quadrato fatto di lati $x_h - x_{h-1}$ e $y_k - y_{k-1}$. Si indica allora l'area con il valore assoluto (indica la **misura**), per l'area del quadrato considerato è proprio

$$I_{h,k} = |I_{h,k}| = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n}$$

Poiché ogni distanza $x_h - x_{h-1}$ e $y_k - y_{k-1}$ è l'n-esima parte del segmento ab e del segmento cd rispettivamente. Posso allora definire le somme di Cauchy-Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} f(p_{h,k})\, |I_{h,k}|$$

Definizione 1.1.
Si dice che la funzione $f : [a, b] \times [c, d]$, limitata, è integrabile sul rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ se esiste finito

$$\lim_{n\to\infty} s_n \tag{1}$$

E se tale limite non dipende da come si sono scelti i punti $P_{h,k}$ nei rispettivi rettangoli ad ogni passo della costruzione.

Esempio 1.1 (Funzione non integrabile)**.**
Presa $f : [0, 1] \times [0, 1] \to R$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Questa funzione non è integrabile in quanto se si dividesse l'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali e si scegliessero i punti come fatto prima, si potrebbero scegliere tutti in modo tale che la coordinata x sia razionale per tutti gli intervalli (poiché l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso). La funzione vale dunque 1 per tutti i punti, dunque le somme di Reimann vengono:

$$s_n = \sum 1\, |I_{h,k}| = 1$$

Ottengo allora l'area del rettangolo finita. Se scegliessi invece tutti i numeri irrazionali, allora la funzione somme di Reimann vale esattamente zero. Questo porta dunque ad una ambiguità: il limite esiste ma non è definito in quanto dipende dalla scelta dei punti e allora la funzione non è integrabile.

Teorema 1.1 (Criterio di integrabilità di funzioni)**.**
Se $f : [a,b] \times [c,d]$ è continua, allora è integrabile.

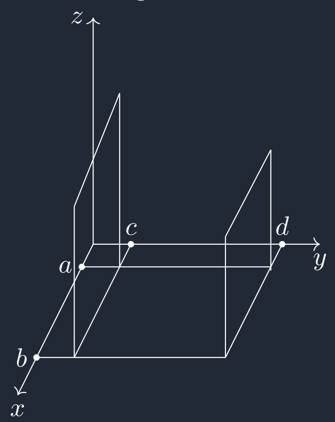
Dimostrazione. Senza dimostrazione. □

1.1 Integrazione di funzioni a due variabili

Posso considerare l'integrazione di funzioni a due variabili come il volume del sottografico della superficie descritta dalla funzione $f(x,y)$. Il processo di integrazione è un processo iterativo che si svolge in due tempi: in un primo momento fisso la coordinata y e svolgo l'integrale in funzione di x ottenendo l'area del sottografico quando è fissata y. L'integrale risulta dunque essere

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy \tag{2}$$

Figura 1:



Esempio 1.2.

$$\int_{[0,1]\times[0,2]} xe^{xy}\ dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xe^{xy}\ dy \right)\ dx$$

Posso allora risolvere gli integrali secondo i seguenti passaggi:

$$\int_0^1 (e^{2x} - 1)\ dx = \frac{e^2}{2} - 1$$

Teorema 1.2.
SIa $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right)\ dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx \tag{3}$$

Proposizione 1.1.
La funzione

$$\phi(x) = \int_c^d f(x,y)\ dy \tag{4}$$

è continua in $[a,b]$. Analogamente

$$\psi(y) = \int_a^b f(x,y)\ dx \tag{5}$$

è continua in $[c,d]$.

Dimostrazione. $\phi(x)$ è definita per $x \in [a,b]$, dividendolo in n parti uguali, per cui ciascuna parte è x_{h-1} fino a x_h. Allora l'integrale

$$\int_a^b \phi(x)\ dx = \sum_{h=1}^{n} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \phi(x)\ dx$$

Con il teorema della media integrale, $\forall h$ esiste un qualche punto x_h^* nell'intervallo $[x_{h-1}, x_h]$ per cui

$$\int_a^b \phi(x)\ dx = \sum_{h=1}^{n} \int_{x_{h-1}}^{x_h} \phi(x)\ dx = \sum_{h=1}^{n} \phi(x_h^*) \cdot (x_h - x_{h-1})$$

Dato che sono tutti uguali gli ultimi termini, posso portarli fuori e dire che

$$\sum_{h=1}^{n} \phi(x_h^*) \cdot (x_h - x_{h-1}) = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n} \phi(x_h^*)$$

Dunque posso scriverlo esplicitamente ottenendo:

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n} \int_c^d f(x_h^*, y)\ dy = \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(x_h^*, y)\ dy$$

Ossia ho fatto lo stesso procedimento anche per la funzione $\psi(y)$, adesso posso esplicitare anche quell'integrale ed esprimerlo attraverso il teorema della media integrale:

$$\left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_h^*, y_k^*)(y_k - y_{k-1}) \implies \left(\frac{d-c}{n}\right) \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_h^*, y_k^*)$$

Ottenendo allora

$$\sum_{h,k=1}^{n} f(x_h^*, y_k^*)\, |I_{h,k}|$$

□

Definizione 1.2.
Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitata e sia $R = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo contenente Ω e sia $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$ definita come

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ 0 & (x,y) \in R - \{\Omega\} \end{cases} \tag{6}$$

Se $\tilde{f}$ è integrabile su di R, allora f è integrabile su Ω e il suo integrale è tale che

$$\int_\Omega f(x,y)\ dxdy = \int_R \tilde{f}(x,y)\ dxdy \tag{7}$$

Definizione 1.3 (Insiemi semplici)**.**
Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice y semplice se è del tipo

$$E = \{(x,y) : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \tag{8}$$

Con $g_1 < g_2$ e $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Questi insiemi sono degli insiemi compresi tra due funzioni generiche i cui estremi non sono fissi ma variano in base alla x. Analogamente si definisce un insieme x semplici se valgono le precedenti ma gli estremi variano in funzione delle y.

Definizione 1.4 (Insiemi regolari)**.**
Si definiscono gli insiemi regolari come degli insiemi che sono unioni finite di insiemi semplici.

Esempio 1.3.
La corona circolare non è né x semplice né y semplice ma può essere decomposta in parti x semplici ed y semplici. Unendole si ottiene un insieme regolare che è proprio la corona circolare.