Appunti di Ottica

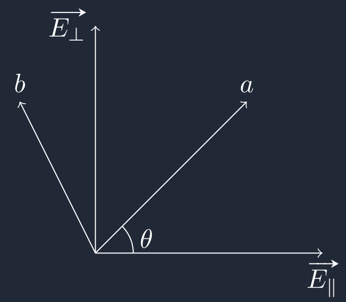
Tommaso Miliani

13-10-25

1 Aberrazioni delle lamine in condizioni non ideali

Quando si opera con delle lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ che non hanno ritardi di fase ideali, ossia quando la polarizzazione non è lineare oppure si è in condizioni di umidità e temperatura che differiscono da quelle specificate dal costruttore, si introducono inevitabilmente delle aberrazioni. Si è detto, fino ad ora, che esistono degli assi relativi ai cubi paralleli e degli assi ortogonali relativi alla lamina. Si potrebbe avere che la mia lamina di ritardo ha gli assi lenti e veloci inclinati di un certo angolo θ rispetto agli assi paralleli al polarizzatore. Per poter analizzare questa situazione, si ricorda l'espressione dei complessi in forma esponenziale

Figura 1:



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Ricordando ora l'espressione del campo elettrico:

$$\vec{E} = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \phi_z)\hat{k} + E_{0y}\cos(kx - \omega t + \phi_y)\hat{y}$$

Utilizzando i complessi posso esprimere il campo elettrico come una componente lungo l'asse reale e l'altra lungo l'asse degli immaginari. Mi ricordo però di prendere solamente la parte reale di questa espressione e dunque:

$$\vec{E} = Re\left(E_{0z}e^{i(kx-\omega t+\phi_z)}\hat{z} + E_{0y}e^{i(kx-\omega t+\phi_y)}\hat{y}\right)$$

Posso pensare di avere una matrice 2×1 ed esprimere il campo in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} E_{0z}e^{i(kx-\omega t+\phi_z)} \\ E_{0y}e^{i(kx-\omega t+\phi_y)} \end{pmatrix}$$

Allora lungo gli assi a, b, che sono orientati di un certo θ rispetto agli assi paralleli ed ortogonali, si esprime il campo elettrico come:

$$\vec{E}_{a,b} = E_{0z}\cos(kx - \omega t + \phi_z)\left(\cos\theta\hat{a} - \sin\theta\hat{b}\right) + E_{0y}\cos(kx - \omega t + \phi_z)\left(\sin\theta\hat{a} + \cos\theta\hat{b}\right)$$

Questa espressione si può allora riscrivere come le coordinate del campo rispetto ai versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Posso dunque pensare a questa espressione come il prodotto tra una matrice due per due e il vettore del campo elettrico nelle sue componenti:

$$Re\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{0z}e^{i(kx-\omega t+\phi_z)} \\ E_{0y}e^{i(kx-\omega t+\phi_y)} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matrice a sinistra prende il nome di matrice delle rotazioni in funzione dell'angolo θ, questa matrice permette di ottenere l'espressione di un vettore rispetto a degli assi ruotati di un certo angolo θ, e si indica con $R(\theta)$. La matrice che serve per tornare agli assi di partenza è la matrice inversa (ossia quella coi segni invertiti per il seno). Adesso, data l'espressione del campo elettrico generico rispetto alla base $\hat{a}, \hat{b}$

$$\vec{E}_{a,b}E_{0a}\cos(kx - \omega t + \phi_a)\hat{a} + R_{0b}\cos(kx - \omega t + \phi_b)\hat{b}$$

Posso esprimerlo attraverso i numeri complessi nel vettore

$$Re\begin{pmatrix} E_{0a}e^{i(kx-\omega t+\phi_a)} \\ E_{0b}e^{i(kx-\omega t+\phi_b)} \end{pmatrix}$$

Posso introdurre sull'asse lento un ritardo di fase. Per cui il campo elettrico uscente è dato dal campo rispetto al versore $\hat{b}$ e dal campo rispetto al versore $\hat{a}$ con un ritardo di fase:

$$\overrightarrow{E^{OUT}_{a,b}} = E_{0a}\cos(kx - \omega t + \phi_a + \delta\phi)\hat{a} + E_{0b}\cos(kx - \omega t + \phi_b)\hat{b}$$

Partendo dal vettore di ingresso nella lamina, posso ottenere l'espressione del campo in uscita attraverso il prodotto tra matrici come

$$Re \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0a}e^{i(kx-\omega t+\phi_a)} \\ E_{0b}e^{i(kx-\omega t+\phi_b)} \end{pmatrix}$$

Analogamente a quanto detto prima, se si volesse ottenere il campo elettrico in entrata a partire dal campo elettrico in uscita, si può applicare la matrice inversa. Si riassume che l'espressione del campo elettrico in uscita da una lamina, che è entrato con un certo angolo, ha espressione

$$\overrightarrow{E^{OUT}_{a,b}} = Re \left(R(-\theta) \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} E_{0z}e^{i(kx-\omega t+\phi_z)} \\ E_{0y}e^{i(kx-\omega t+\phi_y)} \end{pmatrix} \right) \tag{2}$$

2 Interferenza

L'Interferenza si verifica quando sono presenti due o più campi elettromagnetici con fasi differenti. Di fatto, quando si sommano i campi elettromagnetici si utilizzano le formule di prostaferesi per il coseno:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \tag{3}$$

Dato che ci sono molte variabili per cui i campi potrebbero differire, possiamo partire dall'analisi del caso semplice in cui solamente la fase differisce per i due campi elettrici.

2.1 Interferenza semplice

Il caso semplice di Interferenza si ha quando i due campi elettromagnetici hanno la stessa direzione di propagazione e quindi stessa frequenza (o pulsazione) ; inoltre, per rimanere nel caso semplice, hanno anche stessa polarizzazione e stessa ampiezza. L'unica differenza è la fase differente.

$$\overrightarrow{E_1} = E_0\cos(kx - \omega t + \phi_1)\hat{y}$$
$$\overrightarrow{E_2} = E_0\cos(kx - \omega t + \phi_2)\hat{y}$$

Posso ottenere allora il campo elettrico totale come la somma tra i due contributi secondo la formula di prostaferesi:

$$\overrightarrow{E_{TOT}} = 2E_0\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

Il totale dell'intensità mediata nel tempo, si ottiene come

$$\langle I_{TOT}\rangle = c\epsilon_0 \left\langle \overrightarrow{E}_{TOT} \right\rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T}\int_0^T 4E_0^2\cos^2\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\phi_1+\phi_2}{2}\right)\ dt \tag{4}$$

Ossia la media temporale dell'integrale del campo elettrico mi dà l'intensità totale media in un certo intervallo di tempo $\Delta T = T$. Questo mi permette allora di esprimere l'intensità delle due onde come l'intensità di una unica onda "somma".

$$\langle I_{TOT}\rangle = 4I_0\cos^2\left(\frac{\phi_1-\phi_2}{2}\right)$$

Quando $\phi_1 = \phi_2$ allora c'è un istante in cui l'intensità è molto maggiore dell'intensità generata dalla semplice somma delle onde, mentre c'è un istante in cui si "distrugge" l'energia delle due onde, ossia quando $\phi_1 = \pi + \phi_2$. Si riassume con

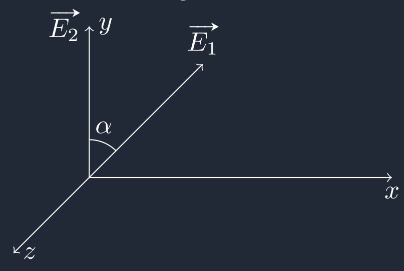
- Se $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n$: le onde sono in **fase**, e si ha interferenza costruttiva;
- Se $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n + \pi$: le onde sono in **controfase** e si ha interferenza distruttiva.

2.2 Oscillazione con polarizzazioni diverse

In questo caso l'ampiezza e la direzione dei campi elettrici non sono mai gli stessi per le due onde. Supponiamo ancora che abbiano lo stesso $\hat{k}$ ma i due hanno polarizzazioni lineari diverse.

$$\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{E_{01}}\cos(kx - \omega t + \phi_1)$$
$$\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E_{02}}\cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

Figura 2:



Si può ora scrivere il campo elettrico totale e poi si va a farne il modulo al quadrato per determinarne l'intensità. Dato che i due campi adesso hanno stessa ampiezza e direzione ma con polarizzazioni diverse, posso determinare la somma totale del vettore campo elettrico come il modulo

$$\left|\overrightarrow{E_{TOT}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{E_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{E_2}\right|^2 + 2\overrightarrow{E_1}\cdot\overrightarrow{E_2}$$

Questo deve essere equivalente alla seguente espressione, ossia il modulo del vettore campo elettrico totale:

$$|\overrightarrow{E_{01}}|^2\cos^2(kx - \omega t + \phi_1) + \left|\overrightarrow{E_{02}}\right|^2\cos^2(kx - \omega t + \phi_2) + 2\overrightarrow{E_{01}}\cdot\overrightarrow{E_{02}}\cos(kx - \omega t + \phi_1)\cdot\cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

Il terzo termine si può pensare come il prodotto scalare tra i due vettori che compongono il campo elettrico:

$$\left|\overrightarrow{E_{01}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{E_{02}}\right|\cos\alpha$$

Dove α è l'angolo compreso tra i due vettori del campo elettrico come nel disegno. Con le formule di prostaferesi inverse posso esprimere il coseno che moltiplica il terzo termine in funzione di angoli generici β e γ (gli argomenti dei due coseni):

$$\cos\beta\cdot\cos\gamma = \frac{1}{2}\left(\cos(\beta+\gamma) + \cos(\beta-\gamma)\right)$$

Allora il terzo termine del modulo del campo totale è esprimibile come:

$$2\left|\overrightarrow{E_{01}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{E_{02}}\right|\cos\alpha + \frac{1}{2}\left(\cos(2kx - \omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)\right)$$

Si può esprimere allora l'intensità totale del campo elettrico come la somma delle intensità delle due onde più l'intensità dovuta al terzo termine dell'espressione del modulo totale (Ossia l'espressione di prima).

$$\langle I_{TOT}\rangle = I_1 + I_2 + c\epsilon_0\frac{2\left|\overrightarrow{E_{01}}\right|\left|\overrightarrow{E_{02}}\right|\cos\alpha}{2}\cdot\cos(\phi_1 - \phi_2)$$

L'intensità I_1 (I_2 è analoga) si esprime come:

$$I_1 = c\epsilon_0\cdot\frac{\left|\overrightarrow{E_{01}}\right|^2}{2} \implies \sqrt{I_1} = \sqrt{c}\sqrt{\epsilon_0}\frac{|\overrightarrow{E_{10}}|}{\sqrt{2}}$$

Che posso sostituire nell'espressione dell'intensità totale al terzo termine:

$$\langle I_{TOT}\rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2}\cos\alpha\cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Il terzo termine dell'intensità totale è chiamato **termine di interferenza**. Questo termine determina se c'è interferenza oppure no.

- Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$: non c'è alcuna Interferenza poiché le polarizzazioni sono perpendicolari tra di loro.
- Se $I_1 = I_2$, allora si ritrova il caso trattato nel paragrafo precedente:

$$I_{TOT} = 2I_0(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \implies 4I_0\cos^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

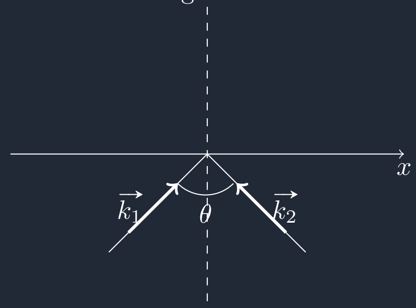
- Se $\alpha = 0$: si ha il caso con Interferenza trattato ora.

3 L'onda stazionaria

L'onda stazionaria si ottiene nel caso in cui si ha interferenza di vettori d'onda delle due onde elettromagnetiche che interferiscono tali che $\overrightarrow{k_1}$ e $\overrightarrow{k_2}$ non sono più paralleli: si ottiene un'onda stazionaria.

$$\overrightarrow{E_1} = E_0 \hat{y} \cos(\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \phi_1)$$
$$\overrightarrow{E_2} = E_0 \hat{y} \cos(\overrightarrow{k_2} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \phi_2)$$

Figura 3:



Nel caso del modulo totale del campo elettrico:

$$\left|\overrightarrow{E_{TOT}}\right| E_0^2 \left(\cos(\overrightarrow{k_1} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \phi_1) + \cos(\overrightarrow{k_2} \cdot \overrightarrow{r} - \omega t + \phi_2)\right)^2$$

Applico nuovamente le formule di prostaferesi al contrario ottenendo

$$4E_0^2 \left(\cos^2\left(\frac{(\overrightarrow{k_1} + \overrightarrow{k_2}) \cdot \overrightarrow{r}}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{(\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}) \cdot \overrightarrow{r}}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)\right)$$

C'è una parte del campo che ha dipendenza temporale ed un apart del campo che non ha dipendenza temporale. Quando calcolo l'intensità totale mediata nel tempo allora la parte che dipende dal tempo è mediata, l'altra è costante:

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4c\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \cos^2\left(\frac{\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}}{2} \cdot \overrightarrow{r} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\overrightarrow{k_1} - \overrightarrow{k_2}}{2} \cdot \overrightarrow{r} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

Si trova allora che l'intensità dipende dalla posizione in cui si posiziona il rilevatore: l'intensità è diventata funzione della posizione e non dipende dal tempo (dunque è una onda stazionaria). Potrei esprimere questa espressione attraverso il vettore differenza $\overrightarrow{\Delta k}$ tra i vettori d'onda delle due onde:

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4I_0 \cos^2\left(\frac{|\overrightarrow{\Delta k}|}{2} \cdot x + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

Posso esprimere allora il prodotto del vettore d'onda come δx, ossia la periodicità spaziale dell'onda stazionaria. Se si considera θ l'angolo tra i due vettori d'onda, allora il vettore dentro il coseno è esattamente:

$$\left|\overrightarrow{k}\right| \sin\frac{\theta}{2} \cdot \delta x = \pi$$

Allora, ricordando il modulo di $\overrightarrow{k}$, posso esprimere

$$\frac{2}{\lambda} \sin\frac{\theta}{2} \delta x = 1$$

Dunque possiamo scegliere δx in modo arbitrario

$$\delta x = \frac{\lambda}{2\sin\frac{\theta}{2}} \qquad \theta << 1 \implies \delta x = \frac{\lambda}{\theta}$$

Se l'angolo tra le due onde è molto piccolo, allora si può approssimare con l'argomento e dunque la lunghezza d'onda si amplifica.