

Banchi esercizi

Tommaso Miliani

20-03-25

1 Esercizio esame novembre 24

Sul filo agiscono diverse forze ma non essendoci la gravità, la forza che la rimpiazza è quella centrifuga e tende a spostarlo verso una direzione (è radiale). Le ipotesi sono:

1. La piattaforma ruota con velocità ω_0 costante (c'è un motore esterno che tiene in rotazione il disco).
2. Il filo del pendolo è ideale;
3. Si lavora con la schematizzazione del punto materiale;
4. Sistema non inerziale O_{xy} .

Punto a:

Per calcolare la distanza si può scrivere per le coordinate:

$$\begin{cases} x_P = l \sin \phi \\ y_P = a + l \cos \phi \end{cases}$$

Adesso per calcolare la distanza dal centro O basterà calcolare la distanza dal filo come:

$$|P - O|^2 = x_P^2 + y_P^2 = l^2 \sin^2 \phi + a^2 + l^2 \cos^2 \phi + 2al \cos \phi$$

E quindi

$$|P - O| = \sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos \phi}$$

PUNTO B:

Sul punto P ci sono diverse forze: prima di tutto la forza di trascinamento verso l'esterno, la forza di Coriolis (che non so dove agisce) e la forza centrifuga. Di queste forze quella che compie lavoro è quella di trascinamento mentre quelle che non compiono lavoro sono la forza di Coriolis e la tensione (poiché è sempre ortogonale alla direzione tangente).

Il lavoro della forza di trascinamento è data da:

$$V = -\frac{1}{2}m\omega_0^2|P - O|^2 = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(l^2 + a^2 + 2al \cos \phi)$$

I termini sono quasi tutti costanti, possiamo allora considerare solo il coseno e riassumere quindi l'energia potenziale come una costante meno il pezzo non costante:

$$V = \text{cost} - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

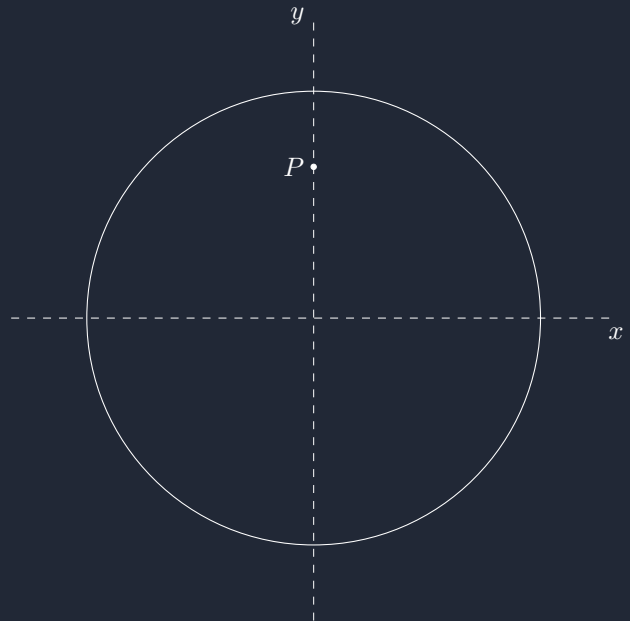
Derivando si ottiene proprio l'espressione:

$$V' = -m\omega_0^2 al(-\sin \phi) = 0$$

Le cui soluzioni per ottenere l'equilibrio sono proprio $0, \pi$. Verifichiamo allora la stabilità di questo equilibrio, per cui la derivata seconda sarà proprio:

$$V'' = m\omega_0^2 al \cos \phi \Rightarrow \begin{cases} > 0, & \phi = 0 \text{ stabile} \\ < 0, & \phi = \pi \text{ instabile} \end{cases}$$

Figura 1: Schematizzazione del problema



PUNTO C:

L'energia non è conservata in un sistema di riferimento esterno a causa del motore del disco che lo tiene in rotazione mentre si conserva nel sistema di riferimento ruotante $O_{x,y}$. Il ruolo del motore allora è descritto con la forza di trascinamento. Possiamo allora scrivere l'energia nel sistema di riferimento ruotante con un termine cinetico e uno potenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}_P = l \cos \phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{y}_P = -l \sin \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

Da qui allora si ha che

$$\dot{V}_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = l^2 \dot{\phi}^2$$

Troviamo allora il classico risultato del moto circolare e l'energia allora è ora:

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - m \omega_0^2 a l \cos \phi$$

Con la costante dell'energia potenziale che posso liberamente mettere uguale a zero poiché l'energia meccanica è definita a meno di una costante. Con il metodo dell'energia allora posso derivare l'energia ottenendo:

$$\dot{E} = 0 = \frac{1}{2} m l^2 2 \dot{\phi} \ddot{\phi} - m \omega_0^2 a l (-\sin \phi) \dot{\phi} = 0$$

Semplificando si ottiene la seguente equazione di moto:

$$l \ddot{\phi} + \omega_0^2 a \sin \phi = 0$$

Diventa allora l'equazione del pendolo senza la forza peso ma con la forza centrifuga. Nel limite allora delle piccole oscillazioni sappiamo allora che ϕ è vicino a quella di equilibrio.

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = 0, \quad \Omega^2 = \frac{\omega_0^2 a}{l}$$

Allora il periodo delle oscillazioni si ha che è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \Omega = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

PUNTO D:

Senza le approssimazioni delle piccole oscillazioni dobbiamo prima studiare il moto e trovare la tensione del filo. Si sa da Newton che:

$$m \vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{co} + \vec{F}_T$$

Allora queste si esprimono come:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{co} &= -2m\omega_0 \times \vec{v} \\ &= -2m\omega_0 l \dot{\phi} \hat{u}_n \end{aligned}$$

Dato che la tensione è opposta a \hat{u}_n si ha:

$$\vec{T} = -T \hat{u}_n$$

E la trascinamento:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2 (P - O)$$

Proietto allora lungo la direzione N tutte le forze ottenendo che: posso scrivere intanto la tensione:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= m \vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T \\ \vec{T} &= -\hat{u}_n \vec{T} = -(m \vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T) \hat{u}_n \end{aligned}$$

Allora scriviamo i vettori che compaiono come proiezioni sulla direzione n:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{u}_n &= -l \dot{\phi}^2 \text{ centripeta} \\ \vec{F}_T \cdot \hat{u}_n &= m\omega_0^2 (P - O) \cdot \hat{u}_n \end{aligned}$$

Possiamo esprimere il versore lungo n come:

$$\hat{u}_n = \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

E si ottiene allora la forza di trascinamento come:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2(x_P \sin \phi + y_P \cos \phi)$$

Allora date le sostituzioni delle coordinate di P, possiamo allora dire che:

$$m\omega_0^2(l + a \cos \phi)$$

Adesso la proiezione della forza di coriolis è proprio:

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Sostituendo tutte le espressioni trovate ora nell'espressione per la tensione si ottiene allora:

$$T = ml\dot{\phi}^2 - 2m\omega_0 l \dot{\phi} - 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Dobbiamo allora trovare $\dot{\phi}$ per poter trovare l'espressione per la tensione. L'energia la abbiamo scritta prima come:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Parte da fermo ($\dot{\phi} = 0$) e quindi:

$$E_0 = -m\omega_0^2 al \cos \phi_0$$

E quindi portando dall'altra parte possiamo ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 &= -m\omega_0^2 al(\cos \phi - \cos \phi_0) \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) \geq 0 \end{aligned}$$

Dato che l'espressione ha senso se e solo se è positiva, allora devo (dato $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$) che

$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$$

Anche senza le piccole oscillazioni allora so che il pendolo può oscillare (in questa situazione) solo tra quei due valori. Allora $\dot{\phi}$ diventa:

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

Il segno meno è dovuto poiché nel primo periodo ϕ diminuisce e quindi la tensione diventa:

$$T = ml \left(\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) - 2\omega_0 \cdot \left(-\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right) + \frac{\omega_0^2}{l}(l + a \cos \phi) \right)$$

Raccogliendo allora:

$$T = ml\omega_0^2 \left(\frac{3a}{l} \cos \phi - \frac{2a}{l} \cos \phi_0 + 1 + 2\sqrt{\frac{2a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right)$$