Appunti analisi

Tommaso Miliani

23-10-25

1 Il teorema di esistenza ed unicità globale

Teorema 1.1 (Teorema di esistenza globale per soluzioni di equazioni differenziali omogenee lineari)**.**
Sia $f(x), a_1(x), i = 0, \dots, n-1$ funzioni continue in $I \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 interno ad I, allora per ogni scelta dei numeri $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} E(y) = f \\ y(x_0) = b_0 \\ y'(x_0) = b_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1} \end{cases}$$

Allora ha una sola soluzione definita in tutto I. E' un problema di esistenza ed unicità globale poiché mi dice che se i coefficienti della funzioni sono tutti definiti nell'intervallo I, allora la funzione non è solo definita nell'intorno x_0 ma anche su tutto $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. La dimostrazione non fa parte del programma. □

Definizione 1.1 (Funzioni linearmente indipendenti)**.**
Due funzioni (nel contesto degli spazi di funzioni) sono linearmente indipendenti se z_0 e z_1 sono due funzioni linearmente indipendenti se

$$c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x) = 0 \qquad \forall x \in I$$

con $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ solo quando $c_0 = c_1 = 0$.

Teorema 1.2 (Teorema 1)**.**
L'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea $E(y) = 0$, è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Dimostrazione. Si può dimostrare che è uno spazio vettoriale in quanto la funzione $y(x) \equiv 0$, ossia che è sempre uguale a zero ed è quindi sempre costante, voglio dimostrare che $E(y) = 0$ è un sottospazio di $E(C^{(n)(I)})$. L'equazione $y(x) = 0$ soddisfa ovviamente $E(y) = 0$.
Se y_1, y_2 sono due soluzioni dell'equazione differenziale omogena, ossia $E(y_1) = 0 = E(y_2)$, allora anche una qualsiasi combinazione lineare soddisfa l'equazione differenziale omogenea (deriva dalla linearità e dal fatto che il ker dell'applicazione lineare è anch'esso uno spazio vettoriale). Dimostro il teorema per dimensione $= 2$: definsico due funzioni $z_0(x)$ e $z_1(x)$. $z_0(x)$ è soluzione del probleema di Cauchy

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Mentre $z_1(x)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Voglio dimostrare che queste funzioni sono linearmente indipendti e che genraeno tutto lo spazio vettoriale. Ricordando la definizione di funzione linearmente indiependnte:

$$c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x) = 0$$

Chiamo allora $z(x)$ soluzione del problema di cauchy

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \end{cases}$$

allora, dato che $z_1(x_0) = 0$, si ottiene che

$$\begin{aligned} z(x_0) &= c_0 z_0(x_0) + c_1 z_1(x_0) \implies z(x_0) = c_0 \\ z'(x_0) &= c_0 z_0'(x_0) + c_1 z_1'(x_0) \implies z'(x_0) = c_1 \end{aligned}$$

Per ipotesi ho che $z \equiv 0$ e quindi anche la sua derivata deve necessariamente zero, allora si ottiene che c_0 e c_1 sono zero e quindi sono linearmente indipendenti.
Rimane da dimostrare che z_0 e z_1 generano tutto lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di ordine due. Prendo allora una qualsiasi soluzione dell'omogenea e faccio vedere che può essere scritta come combinazione lineare di queste due funzioni. Sia allora $w(x)$ una soluzione arbitraria di $E(y) = 0$. Voglio dimostrare che è possibile scegliere $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ tali che $w(x) \equiv c_0 z_0(x) + c_1 z_1(x)$. Scelgo c_0 e c_1:

$$\begin{cases} w(x_0) = c_0 \\ w'(x_0) = c_1 \end{cases}$$

Sia w che $c_0 z_0 + c_1 z_1$ sono soluzioni del problema

$$\begin{cases} E(y) = 0 \\ y(x_0) = c_0 \\ y'(x_0) = c_1 \end{cases}$$

Questo è vero perché w è stato costruito in modo tale che sia soluzione di questo problema di cauchy. La combinazione di due soluzioni dell'omogenea è anch'essa soluzione:

$$\begin{aligned} c_0 z_0(x_0) + c_1 z_1(x_0) &= c_0 \\ c_0 z_0'(x_0) + c_1 z_1'(x_0) &= c_1 \end{aligned}$$

E quindi questa combinazione lineare è effettivamente soluzione del problema di Cauchy. □

Teorema 1.3 (Teorema di struttura delle funzioni)**.**
L'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea $E(y) = f$ si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea ad una soluzione particolare dell'equazione completa $E(y) = f$.

Dimostrazione. Sia y_1 una soluzione di $E(y) = f$ e y_0 una soluzione di $E(y) = 0$. Allora $y_1 + y_0$ è soluzione di $E(y) = f$. Infatti $E(y_0 + y_1) = f + 0 = f$. Viceversa sia y_2 una qualsiasi soluzione dell'equazione differenziale omogenea $E(y) = f$, per la linearità della funzione E si ha che $E(y_2 - y_1) = E(y_2) - E(y_1) = f - f = 0$. Allora $y_2 - y_1$ è uguale a z_0 per una certa soluzione dell'omogenea. Allora $y_2 = y_1 + z_0$. □

Per risolvere una equazione lineare di ordine n devo prima trovare n soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea e troavare almeno una soluzione completa. Non c'è una strategia per trovare le soluzioni indipendenti eccetto nel caso in cui i coefficienti della differenziale sono tutte costanti e non funzioni di x.

Definizione 1.2 (polinomio caratteristico di una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti)**.**
In una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti posso associare ad ogni funzione $y^{(n)}$ associo un λ elevato alla potenza della funzione:

$$p(\lambda) = \lambda^{(n)} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

questo prende il nome di polinomio caratteristico.

Teorema 1.4 (Utilizzare il polinomio caratteristico per troavare solzioni)**.**
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ (o anche $\in \mathbb{C}$) tale per cui

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

è soluzione dell'equazione omogenea se e solo se $E(\lambda) = 0$ se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico di una equazione differenziale.

Dimostrazione. La dimostrazione è facile in quanto basterà chiamare

$$y(x) = e^{\lambda x}$$
$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

Allora la funzione

$$E(y) = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0)e^{\lambda x} \implies p(x)e^{\lambda x}$$

Allora posso trovare le soluzioni del polinomio caratteristico e dunque questa funzione ha come sole soluzioni proprio quando $p(\lambda) = 0$. □

Corollario 1.4.1.
Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ esistono e sono linearmente indipendenti, allora $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ sono linearmente indipendenti e generano lo spazio delle soluzioni di $E(y) = 0$ per questo tipo particolare di equazioni differenziali.

Esempio 1.1 (Utilizzo del polinomio caratteristico)**.**
*Esiste una strategia generale per la (1) nel caso in cui tutte le funzioni $a_0, \ldots, a_{n-1}$ siano tutte costanti. Allora la mia equazione differenziale prederà il nome di **equazioni differenziale lineare a coefficienti costanti**. Ad esempio*

$$y'' - 3y' + 2 = 0$$

Se parto dall'equazione generale associo il polinomio caratteristico: in questo caso il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

Allora si ottengono le soluzioni del polinomio caratteristico come

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

quindi e^{2x} e e^x sono allora soluzioni di $E(y) = 0$.

Teorema 1.5.
Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\lambda \in \mathbb{C}$ radice di molteplicità s del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ ossia

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^s q(\lambda)$$

Con $q(\lambda_0) \neq 0$. Allora $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{s-1}e^{\lambda_0 x}$ sono tutte soluzioni linearmente indipendenti di $E(y) = 0$.

Esempio 1.2.

$$y'' - 2y' + y = 0 \implies p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

Le radici sono esattamente $(\lambda - 1)^2 = 0$, per cui $\lambda_0 = 1$ è radice doppia dell'equazione differenziale e quindi e^x e xe^x sono soluzioni di $E(y) = 0$.

Teorema 1.6.
Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ sono radici di molteplicità s del polinomio caratteristico. Allora

$$\begin{aligned} e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ xe^{\alpha x}\cos\beta x \qquad & xe^{\alpha x}\sin\beta x \\ \vdots \\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad & x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{aligned}$$

Posso togliere il complesso in quanto per ogni soluzione $\lambda = \alpha + i\beta$ esiste anche la soluzione coniugata. Posso quindi trovare combinazioni lineari che mi elimino le parti complesse e mi facciano trovare solo soluzioni reali. Sono soluzioni linearmente indipendenti di $E(y) = 0$.

Esempio 1.3.

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$
$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

Allora le soluzioni sono

$$\begin{aligned} \lambda = 0 \qquad & e^{0x} = 1 \\ \lambda = 1 + i \qquad & e^x \sin x \\ \lambda = 1 - i \qquad & e^x \cos x \end{aligned}$$

Altri metodi risolutivi per travare delle soluzioni a delle equazioni differenziali. Si chiama metodo di **simiglianza** se la struttura delle equazioni differenziali ha una struttura simile a una di queste:

- Se f è un polinomio
- Se f è un polinomio per $e^{\alpha x}$
- Se $f = p_1(x) \sin \beta x + p_2(x) \cos \beta x$.

E se l'equazione p a coefficienti costanti. Il metodo generale si applica anche alle equazioni non a coefficienti costanti (solo per il secondo ordine). Si può risolvere con il metodo della variazione delle costanti. Bisogna innannzitutto avere delle soluzioni linearmente indipendenti dell'omogenea E che chiamo $y_1(x), y_2(x)$, cerco una soluzione della forma

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

Come devo scegliere c_1 e c_2? Posso prendere

$$\begin{aligned} y' &= c_1'y_1 + c_1y_1' + c_2'y_2 + c_2y_2' \\ &= c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2' \end{aligned}$$

Impongo che $c_1'y_1 + c_2'y_2$ sia uguale a zero perché y_1 e y_2 siano soluzione dell'omogenea, allora facendo la derivata seconda quel termine scompare e devo solo derivare gli altri termini. Dall'equazione della derivata seconda ho

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = f(x)$$
$$c_1'y_1' + c_2'y_2' = f$$

Alla fine posso scegliere c_1 e c_2 che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = f \end{cases}$$

Se c_1 e c_2 sono linearmente indipendenti allora il determinenat è sempre diverso da zero e trovo le espresioni di c_1 e c_2 . Se riesco a trovare una primitiva allora se le metto nella forma di $y(x)$ ho trovato una soluzione.