FIsica

Tommaso Miliani

10-3-25

1 Condizione di equilibrio

La derivata dell'energia potenziale rispetto ad x presuppone di avere solo un grado di libertà.

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

Ci da la condizione di equilibrio: infatti nel caso del pendolo si ha che:

$$V = mg(L - L\cos\theta)$$

Facendo la derivata sul grado di libertà che sto considerando allora posso fare la derivata su θ e questo automaticamente tiene conto del vincolo poiché se parlo di $x, y.z$ non sto considerando i vincoli del sistema, se invece li considero e lo vincolo nel piano allora l'unico grado di libertà è proprio θ.

$$\frac{dV}{d\theta} = mgL\sin\theta$$

Ossia le soluzioni sono, considerato un filo che è resistente alla trazione ma non alla compressione:

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Se invece considerassi il caso di una asta, allora se il pendolo è perpendicolare l'asta impedisce al punto materiale di cadere e compensa il peso. Matematicamente si esprime la piccola variazione di teta rispetto alla verticale se il punto materiale e l'asta sono sopra con l'energia potenziale, nel caso della condizione di equilibrio $\theta = 0$, l'energia potenziale è minima, altrimenti è massima, infatti facendo la derivata seconda rispetto al grado di libertà, si ottiene proprio:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgL\cos\theta$$

Quindi:

$$V^{''}(0) = mgL > 0, \qquad V^{''}(\pi) = -mgL < 0,$$

Quindi in $\theta = \pi$ c'è proprio un massimo (equilibrio instabile) per l'energia potenziale ed un minimo per $\theta = 0$ (equilibrio stabile). IN più dimensioni la stazionarietà si ottiene con le derivate parziali di tutte le variabili:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ldots$$

E quindi facendo la derivata parziale due volte rispetto ad x, y... allora la sua forma può essere o un massimo o un minimo in funzione proprio delle variabili si ottengono o paraboloidi, oppure una sella: una condizione di minimo in una variabile ed una di massimo in un'altra. Sarebbe stabile in una direzione ma sostanzialmente è instabile: nel punto di sella infatti non c'è una vera stabilità.

1.1 Molla ed equilibrio sul soffitto

Scelto il punto di equilibrio dove la molla è a riposo:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

messo ora il peso devo considerare anche l'energia potenziale della forza peso che dipende dalla quota data dalla coordinata x e quindi sarà negativa. Per trovare la condizione di equilibrio faccio allora la derivata rispetto ad x:

$$\frac{dV}{dx} = kx - mg$$

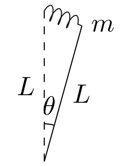
E quindi si annulla proprio per $kx = mg$ ossia dove le due forze si eguagliano in funzione dell'unica coordinata x e quindi un solo punto di equilibrio. Troviamo ora se è instabile o stabile attraverso la derivata seconda:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k > 0, \text{equilibrio stabile}$$

1.2 L'antimolla

Nell'antimolla l'asta ha massa zero e vincola il punto materiale ad avere solo un grado di libertà facendo sì che l'energia potenziale della massa diventi proprio:

Figura 1: Antimolla



$$V = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl\cos\theta$$

E allora si ottiene l'espressione, utilizzando taylor per il coseno:

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$
$$V \approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

Facendo la derivata prima si ottiene la soluzione::

$$\frac{dV}{d\theta} = L(kL - mg)\theta$$
$$\theta = 0.$$

C'è anche il caso in cui $kL = mg$; facendo invece la derivata seconda si ha:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = L(kL - mg)$$

Se $kL > mg$ allora la derivata seconda è maggiore di zero ho un equilibrio stabile, altrimenti la derivata seconda è minore di zero e ho un equilibrio instabile, se sono uguali allora fisicamente la derivata seconda è zero e significa che è un equilibrio indifferente.

2 Studio del moto con un piccolo spostamento dall'equilibrio

In funzione di una certa distanza x rispetto alla posizione di equilibrio x_{eq} è dato dallo sviluppo di taylor della funzione dell'energia potenziale:

$$V(x) = V(x_eq) + \frac{dV}{dx}|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq})^2 + \dots$$

Allora date le definizioni di prima con le derivate prime e seconde si ha proprio:

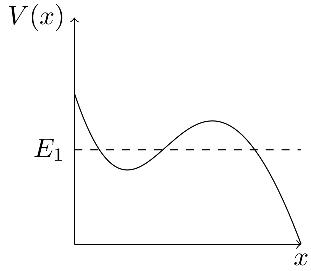
$$V(x) = c + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

Dove $V_{eq} = c$ e k è un parametro della derivata seconda che può essere positivo o negativo.

$$k = \begin{cases} k > 0 & \text{moto armonico} \\ k < 0 & \text{moto esponenziale} \end{cases}$$

Questo vuol dire che possiamo sapere, discostandosi di poco rispetto all'equilibrio, il tipo di moto che accadrà. Spesso si trova il grafico rispetto al parametro e quindi quando si ha un vincolo si ha l'energia potenziale con un vincolo liscio e forze conservative, allora si conserva l'energia e quindi essendo l'energia la somma tra la potenziale e la cinetica, l'energia cinetica è sempre positiva per definizione. Questo però ci pone dei limiti poiché una è sempre positiva o zero e l'altra cambia sempre di segno e l'energia meccanica è sempre costante. Si ha quindi una situazione in cui ci sono alcune configurazioni permesse mentre altre non sono proprio possibili a causa della natura dell'energia cinetica: nel caso in figura le configurazioni permesse sono sempre quelle sotto l'energia meccanica, altrimenti l'energia cinetica dovrebbe essere negativa.

Figura 2: dsf



$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$
$$v = \pm\sqrt{2\frac{E - V(x)}{m}}$$

Per costruzione, dipendendo da x cambierà il segno. Si può allora fare qualcosa di più e quindi essendo la velocità

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v = \dot{s}, \quad s = s(x).$$

Posso separare le variabili s, t e quindi:

$$\frac{ds}{\pm\sqrt{2\frac{E-V(s)}{m}}} = dt$$

Prendendo allora l'integrale da entrambe le parti tra due intervalli di tempo t_1, t_2 e s_1, s_2 allora:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\pm\sqrt{2\frac{E-V(s)}{m}}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$
$$2(t_2 - t_1) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{2m}{E - V(s)}}\, ds.$$

In linea di principio posso calcolarmi questo integrale nelle piccole oscillazioni. Si introduce allora il concetto di **barriera di potenziale**: ossia l'altezza oltre la quale la pallina non può muoversi tra due cunette, non può allora andare nell'altra cunetta e classicamente non può essere attraversato.

3 Sistemi non approssimabili ad un punto materiale (Dinamica dei sistemi)

Il mio sistema non è più formato da un punto materiale ma da degli oggetti estesi che possono essere divisi in tanti punti materiali e studiarne la dinamica. IN generale posso scegliere quali corpi posso ingegare nel mio sistema a seconda di come è più comodo. Per ciascun punto conosco massa e vettore posizione. Il centro di massa è un punto ideale definito come (in un sistema discreto):

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_I} \tag{1}$$

Dove m_i è la massa propria di ogni misura, posso definire nella stessa maniera la massa del centro di massa come la somma delle masse totali e quindi ottenere l'espressione di prima come:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

IN un sistema continuo non posso semplicemente fare l'integrale di quella roba ma devo invece considerare in volumetto elementare di massa molto piccola dm e volume dV e, se sono sufficiente piccole, allora $dm = \rho dV$

tra di loro ed in generale sono funzione della posizione $\vec{r}$, allora posso sostituire questa espressione con un integrale come:

$$\vec{r} = \frac{\int_V \vec{r}\rho dV}{\int_V \rho dV}$$

C'è una relazione se divido in due il corpo? Il centro di massa di tutto l'oggetto è sempre il solito ma posso considerare le somme pe rle due partizioni e quindi il centro di massa è proprio la somma tra le due masse delle partizioni.