Geometria(RUBEI)

Tommaso Miliani

28-02-25

1 Sottospazi affini

Definizione 1.1 (Sottospazi affini)**.** *Sia K^n un campo,allora sia $n \in N - \{0\}$. SIa S un sottospazio di K^n. Si dice che S è un sottospazio affine se $\exists v \in K^n \wedge \exists Z \subset K^n$ tale che:*

$$S = v + Z. \tag{1}$$

Dove

$$v + Z = \{v + z : z \in Z\}$$

Un sottospazio affine è un sottospazio traslato rispetto al sottospazio di uno spazio qualsiasi.

Definizione 1.2 (Direzione del sottospazio)**.** *Il sottospazio dal quale si ricava il sottospazio affine S si chiama **direzione** di S, o si scrive anche: $Z = dir(S)$ ed è univocamente determinata.*

Proposizione 1.0.1. *La direzione è univocamente determinata*

Dimostrazione. Sia S un sottospazio affine con direzione Z quindi:

$$S = v + ZeS = v' + Z'$$

Con $v, v' \in K^n$ e quindi essendo $z, z' \in K^n$, si ha che:

$$\{v + z : z \in Z\} = \{v' + z' : z' \in Z\}$$

In particolare in questo insieme ci sta proprio v e quindi se sta in questo insieme allora sta anche nell'altro e quindi $\exists z' \in Z' : v = v' = z' \in Z'$. e allora: $v - v' = z' \in Z'$. Allora $\exists z \in Z : v' = v + z$ e quindi $v - v' = z \in Z$. Ho dimostrato che $v - v'$ ed il suo opposto $\in Z, Z'$ allora devo dimostrare che $Z \subseteq Z' \wedge Z' \subseteq Z$. PReso $t \in Z$, io so che $v + t \in v + Z = v' + Z'$, esiste allora $v + t \in v' + Z'$ e quindi $\exists t' \in Z'$ tale che $v + t = v' + t'$ ALlora posso scrivere:

$$t = v' - v + t'$$

ALlora entrambi i pezzi del secondo membro sono in Z' ed essendo chiuso per la somma, $t \in Z'$. Allora è dimostrato che $Z \subseteq Z' \wedge Z' \subseteq Z$ e allora $Z = Z'$. □

Definizione 1.3 (DImensione del sottospazio affine)**.** *La dimensione di un sottospazio affine è proprio la dimensione della direzione del sottospazio affine.*

Esempio:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in R \right\}$$

Allora questo sottospazio sarà proprio la retta che passa dal punto $(1, 2)$ e tutti i punti della retta sono ottenuti sommando come multiplo di t che diventa allora la sua direzione.

Definizione 1.4. *UN sottospazio affine di dimensione 1 è una retta, di dimensione 2 è piano, di dimensione $n - 1$ si dice iperpiano.*

Proposizione 1.0.2. *SIa K un campo, e sia $n \in N$, e sia Z un sottospazio vettoriale di K^n di dimensione r, allora $\exists A \in M((n - r) \times n, K) : Z = \{x \in K^m : Ax = 0\}$.*
Sia S un sottospazio affine di K^n di dimensione r allora $\exists A \in M((n-r) \times n, K)$ di rango $n-r$ e $\exists b \in K^{m-n}$ tale che:

$$S = \{x \in K^n : Ax = b\}$$

Dimostrazione. Dato un sottospazio vettoriale Z di K^n, allora questo è lo span di r vettori indipendenti e sia $\langle Z_1, \ldots, Z_r \rangle$ una base di Z. Creando la trasposta delle righe si ottiene una matrice che ha quindi un formato $r \times n$ di rango r.
SI considera $L = \{x \in K^n\} : (z_i, x) = 0$ ossia il prodotto scalare diventa l'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$ ed in pratica la trasposta di $z_1 \cdot x$ e così via e quindi il suo prodotto scalare è zero se e solo $x = 0$.
Quindi essendo $\dim(L) = n - r$:

$$L = \langle l_1, \ldots, l_{n-r} \rangle$$

Posso chiamare A' la matrice ottenuta trasponendo tutte queste soluzioni e diventa quindi una matrice di formato $n - r \times n$ e di rango $n - r$. COnsiderato l'insieme

$$U = \{x \in K^n : A'x = 0\}$$

Ossia l'insieme dei prodotti scalari con gli elementi di L e quindi fare il prodotto e quindi:

$$\dim(U) = rkcol(A') - rk(A') = r$$

SI osserva inoltre che $Z \subset U$ poiché se prendessi un elemento qualsiasi di Z come combinazione lineare degli elementi di Z e questo è uguale a qualsiasi elemento di L, essendo che $\dim(Z) = r$ allora si ha proprio:

$$U = Z$$

Si è provato allora che Z è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo. Proviamo la seconda parte del lemma: Sia S un sottospazio affine di Z, allora voglio dimostrare che sia proprio l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare:

$$\begin{aligned} S &= \{x \in K^n : \exists z \in Z : x = v + z\} \\ &= \{x \in K^n : x - v \in Z\} \end{aligned}$$

Per la prima parte della proposizione si sa che Z è proprio l'insieme delle soluzioni e quindi :

$$S = \{x \in K^n : A(x - v) = 0\}$$

Quindi posso vedere che $Ax = Av$ e quindi, posto $b = Av$ si vede che S è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. □

Posso vedere quindi i sottospazi affini come le soluzioni dei sistemi lineari con le matrici Si ha allora un corollario:

Proposizione 1.0.3. *Sia s una retta in R^3 e quindi un sottospazio affine di dimensione 1 allora c'è una matrice tale che s è l'insieme delle soluzione dell'insieme $Ax = b$ e allora $\exists A \in M(2 \times 3, R)$ ed $\exists b \in R^2$.*

$$\exists \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \delta, \delta' : rk \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$$
$$s = \{x \in R^3 : \begin{matrix} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = \delta \\ \alpha' x_1 + \beta' x_2 + \gamma' x_3 = \delta' \end{matrix} \}$$

Sia Π un piano din R^3, quindi $\exists A \in M(2 \times 3, R)$ di rango 1 e $\exists b \in R^1$:

$$\Pi = \{x \in R^3 : Ax = b\}$$

In pratica quest mi da un equazione sola:

$$\Pi = \{x \in R^3 : \alpha x_1 \beta x_2 + \gamma x_3\}$$

Almeno uno dei tre deve essere diverso da zero.