

# Esperienza Diffrazione

Gruppo 19

Fabbri Marco, Miliani Tommaso, Mongatti Giulio, Tinacci Lorenzo

10 Dicembre 2025

## 1 Scopo dell'esperienza ed ipotesi

Lo scopo generale dell'esperienza è la verifica delle leggi per la distribuzione angolare dell'intensità di un'onda piana in uscita da una singola fenditura e da un reticolo nel limite di Fraunhofer (grandezza della fenditura molto maggiore della distanza a cui si misura l'intensità). La legge che regola la diffrazione da singola fenditura è la seguente:

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \quad (1)$$

Mentre quella per la diffrazione da un reticolo di fenditura

$$I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD}{2} \sin \theta\right) \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi k}{2} \sin \theta\right)}{n^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2} \sin \theta\right)} \quad (2)$$

## 2 Diffrazione da singola fenditura

### 2.1 Schema generale di misura

Gli sperimentatori devono ottenere, attraverso un sistema di acquisizione e un programma di analisi, delle immagini per poter ricavare una stima del fattore  $B$ , tramite la seguente relazione:

$$B = \frac{kD}{2} = \frac{\pi D d}{\lambda x} \quad (3)$$

Dove

- $D$  è lo spessore della fenditura attraverso la quale passa il fascio laser;
- $\lambda$  è la lunghezza d'onda del laser utilizzato;
- $x$  è la distanza tra la fenditura e il rilevatore CCD che permette di acquisire l'immagine;
- $d$  è lo spessore dei pixel della fotocamera.

Per tale verifica gli sperimentatori misurano, mediante una telecamera, il profilo di intensità generato da una fenditura su cui incide un fascio laser e lo confrontano con quanto previsto dalla teoria. Il valore misurato di  $B$  dal programma va quindi comparato con un valore atteso ottenuto dalla formula data; se i due valori  $B_{\text{atteso}}$  e  $B_{\text{medio}}$  risultano consistenti, la legge può dirsi verificata. Per misurare  $B$  si allinea il CCD con la fenditura in modo tale che si possano vedere il massimo di intensità centrale e primi due massimi laterali; si acquisisce quindi il profilo di intensità e si analizzano più righe del rilevatore per ottenere un profilo unidimensionale di intensità, determinato dalla legge:

$$I(y) = I_0 \text{sinc}^2\left(\frac{kD dy}{2x}\right) \quad (4)$$

Dove

$$\frac{dy}{x} = \theta \approx \tan \theta \approx \sin \theta$$

nel limite di Fraunhofer.

Per fare un confronto quantitativo è necessario determinare  $B_{\text{atteso}}$  ottenendo le misure di  $x$  e  $d$  con relativa

incertezza, mentre le altre grandezze sono fornite dal costruttore.  $x$  viene definito dalla somma della distanza  $x'$  tra i supporti rispettivamente della fenditura e del CCD, e la somma delle distanze dei due apparati dai rispettivi supporti  $\delta_1 + \delta_2$ .  $x'$  viene misurato più volte con un calibro di sensibilità di 0.1 cm, così da ottenere media e scarto massimo e poter dunque determinare  $x$  ed il suo errore secondo la seguente relazione:

$$x = \delta_1 + x' + \delta_2 \quad \Delta x = \Delta\delta_1 + \Delta x'. \quad (5)$$

Per stimare l'errore sulla dimensione dei pixel, si sfrutta il fatto che la riflessione del rilevatore suddiviso in pixel quadrati è analoga alla trasmissione di un reticolo bidimensionale con fenditure di separazione  $a = d$ . Per la misura si usufruisce di un laser con lunghezza d'onda nota ( $\lambda = 532$  nm), osservando una diffrazione che segue la legge

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m \in \mathbb{Z}$$

la quale è approssimabile, nel limite di Fraunhofer, alla seguente:

$$\frac{l}{2L} = m \frac{\lambda}{d} \quad (6)$$

Dove

- $l$ : distanza tra ordini di diffrazione 1 e -1;
- $L$ : distanza fra la CCD e la parete su cui appare la diffrazione, ottenuta trovando la distanza tra telecamera e la parete  $L'$  e sommandoci  $\delta_2$ .

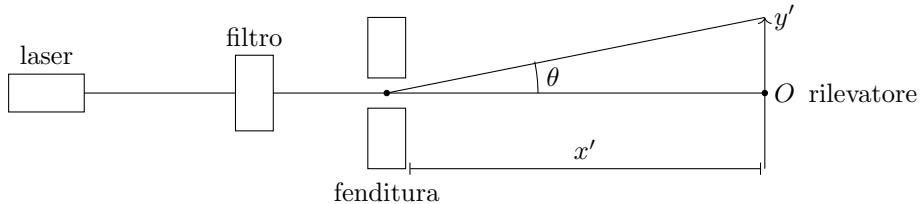
Per la stima dell'errore su  $d$  si è misurato 5 volte  $L$  e  $l$  usando il metro in dotazione. Calcolati media e scarto massimo, abbiamo ottenuto l'errore su  $d$  usando la propagazione dell'errore secondo le derivate logaritmiche.

$$\Delta d = D \left( \Delta l \left| -\frac{1}{l} \right| \cdot \Delta \lambda \left| \frac{1}{\lambda} \right| + \Delta L \left| \frac{1}{L} \right| \right) \quad (7)$$

Dopo aver ottenuto l'errore su  $d$  si utilizza nuovamente la propagazione per trovare  $\Delta B_{\text{atteso}}$ :

$$\Delta B_{\text{atteso}} = B_{\text{atteso}} \left( \Delta d \left| \frac{1}{d} \right| + \Delta D \left| \frac{1}{D} \right| + \Delta \lambda \left| -\frac{1}{\lambda} \right| + \Delta x \left| -\frac{1}{x} \right| \right) \quad (8)$$

## 2.2 Apparato sperimentale



L'apparato sperimentale per la verifica della legge per una singola fenditura è composto da un laser, una fenditura e di una telecamera dotata di rilevatore CCD, tutti allineati fra loro. Per prevenire la saturazione della telecamera, si pone inoltre un filtro aggiuntivo opportunamente regolabile. Dell'apparato sperimentale si conoscono le seguenti caratteristiche:

- lunghezza d'onda laser  $\lambda = (668.66 \pm 0.01)$  nm;
- spessore fenditura  $D = (30 \pm 2)$   $\mu\text{m}$ ;
- distanza fenditura-supporto  $\delta_1 = (2.8 \pm 0.3)$  mm;
- distanza entrata fotocamere-CCD  $\delta_2 = 12.536$  mm;
- dimensione del singolo pixel della CCD di 5.2  $\mu\text{m}$ .

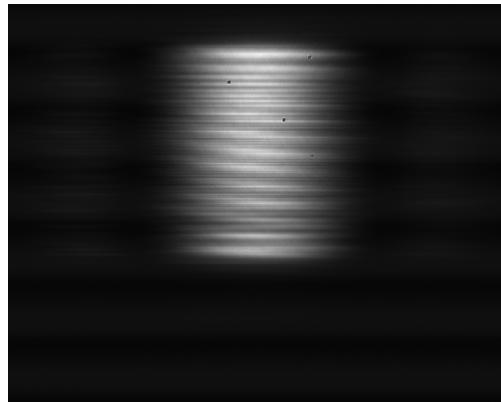
Si hanno a disposizione, inoltre, i seguenti strumenti:

- calibro con sensibilità di 0.05 mm;
- metro con sensibilità di 2 mm.

Il rilevatore CCD è collegato ad un computer sul quale è presente un programma di prelievo ed analisi delle immagini ottenute mediante il rilevatore, che permette di eseguire il fit su un'area di pixel scelta arbitrariamente dallo sperimentatore. Per la buona riuscita del fit, è necessario disabilitare il gain e la gamma riducendo al minimo il segnale in ingresso, diminuire il tempo di esposizione per rendere più visibili i massimi ed i minimi di intensità del fascio e settare il framerate a circa 10 fps per eliminare il flickering causato dalle lampade a led del laboratorio.

### 2.3 Misure

Per trovare  $B$  si è utilizzato un programma di analisi dati scritto in Mathematica, ricavando, dalla seguente foto,



le seguenti misure di  $B$ , a seconda delle righe di pixel considerate.

Prima foto

$B$	Righe
0.00980836	376 – 401
0.00976523	375 – 610
0.00956782	513 – 617
0.00989841	374 – 474
0.00970475	465 – 624

Di seguito si riportano le misure di  $x'$  misurate con il calibro e le misure di  $l$  ed  $L$  misurate con il metro:

$x'$ (mm)	$l$ (cm)	$L$ (m)
61.40	93.8	4.10
61.25	93.6	4.08
61.15	93.6	4.08
61.20	94.0	4.09
	93.8	4.09

Da questi dati si ottengono le seguenti misure con errore associato (ricordando di sottrarre l'offset di 10.0 cm dalle misure di  $l$ ):

- $x' = (61.2 \pm 0.2)$  mm;
- $l = (83.8 \pm 0.4)$  cm;
- $L = (4.09 \pm 0.02)$  m.
- $B_{\text{medio}} = 0.00977 \pm 0.00013$ .

Da queste misure si possono ottenere le altre misure indirette mediante le relazioni descritte prima con relativo errore associato:

- $x = (76.4 \pm 0.5)$  mm;
- $d = (5.20 \pm 0.03)$   $\mu\text{m}$ ;
- $B_{\text{atteso}} = 0.0096 \pm 0.0008$ .

## 2.4 Commento qualitativo

I valori ottenuti di  $B_{\text{medio}}$  e  $B_{\text{atteso}}$  risultano compatibili. Si noti che l'errore di  $B_{\text{atteso}}$  è di gran lunga maggiore rispetto a quello di  $B_{\text{medio}}$  a causa dell'errore considerevole sulla larghezza della fenditura ( $\frac{\Delta D}{D} = 7\%$ ). Possiamo dunque dirsi verificate le leggi sulla diffrazione per una singola fenditura nel limite di Fraunhofer.

## 3 Seconda parte dell'esperienza: il reticolo di diffrazione

### 3.1 Scopo dell'esperienza ed ipotesi

La seconda parte dell'esperienza mira a verificare che la posizione angolare dei massimi principali di diffrazione seguia la regola data dalla seguente relazione:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{a} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (9)$$

E verificare dunque l'equazione (2).

In questa relazione:

- $\theta$ : Angolo di diffrazione;
- $\lambda$ : la lunghezza d'onda;
- $m$ : ordine di diffrazione;
- $a$ : il passo del reticolo.

### 3.2 Schema generale di misura

Per trovare il passo del reticolo a partire dalla separazione angolare delle bande luminose, si utilizza la seguente relazione:

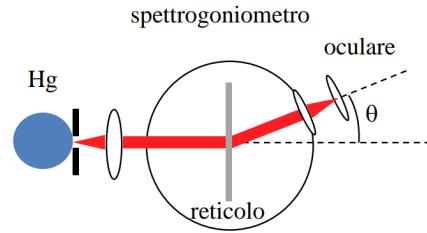
$$a = \frac{m\lambda}{\sin \theta} \quad m \in \mathbb{Z} \quad (10)$$

L'errore relativo ad  $a$  è dato dalla seguente espressione ottenuta dalla propagazione degli errori:

$$\Delta a = a |m| \left( \Delta \lambda \left| \frac{1}{\lambda} \right| + \Delta \theta \left| -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right| \right) \quad (11)$$

Di seguito viene descritta la corretta procedura per la calibrazione dell'apparato sperimentale: inizialmente, si cerca di ottimizzare al massimo il sistema ottico dello sperimentatore regolando l'oculare finché il crocefilo non risulta a fuoco. Puntando poi il cannocchiale verso un oggetto lontano, si muove l'intero sistema crocefilo-oculare per rendere l'immagine nitida. In questo modo il cannocchiale risulterà correttamente focalizzato all'infinito. Si posiziona, in seguito, la fenditura ad una distanza pari alla lunghezza focale della lente: in questo modo la luce emessa dalla lampada sarà perfettamente collimata. Quindi, osservando la fenditura dal cannocchiale mobile appena regolato, si cerca la distanza ottimale per cui essa apparirà nitida. La luce è ora assimilabile ad un'onda piana. Prima di effettuare le misure effettive è necessario posizionare il reticolo sullo spettrogoniometro e verificare che la direzione di propagazione dell'onda piana sia ortogonale al piano del reticolo. Lo sperimentatore può adesso avvicinare l'occhio con cui ha calibrato l'intero sistema ottico al cannocchiale per osservare l'effetto di diffrazione prodotto dal reticolo; noterà che, spostando il cannocchiale, appariranno molteplici fenditure di colore diverso (fenomeno verificatosi a causa della composizione spettrale della lampada a Mercurio). Posizionando approssimativamente il crocefilo sul centro della fenditura interessata, e servendosi della vite tangenziale, si misurerà l'angolo di diffrazione leggendo la scala dello spettrogoniometro. Durante questo processo lo sperimentatore noterà che certe lunghezze d'onda saranno meno vivide di altre; è consigliato prendere più di una misura per le suddette, farne la media e calcolare lo scarto massimo.

### 3.3 Apparato sperimentale



Per la seconda parte dell'esperienza si utilizza uno spettrogoniometro, strumento di misura che permette di misurare gli angoli di deviazione o diffrazione della luce con una sensibilità di  $30''$ . Su di esso è posto un reticolo di diffrazione di 600 linee/mm nominali. Per quanto riguarda la sorgente luminosa, viene utilizzata una lampada a Mercurio (Hg) capace di produrre colori puri a lunghezze d'onda molto precise: 404.656 nm (viola), 407.781 nm (violetto), 435.881 nm (blu), 491.604 nm (verde scuro), 546.074 nm (verde chiaro), 576.959 nm (giallo), 579.065 nm (giallo scuro). La fenditura è posta tra la lampada e il cannocchiale fisso; l'onda piana prodotta da essa, incidendo sul reticolo, è diffratta ad angoli diversi secondo la legge sopracitata ed è proiettata sull'oculare del cannocchiale mobile, usato dallo sperimentatore per misurare gli angoli di diffrazione.

### 3.4 Misure

Per effettuare la misura dell'angolo di diffrazione, esistono due approcci:

- Il metodo più semplice ma meno preciso consiste nel misurare la posizione angolare del massimo centrale (ordine 0,  $\alpha_0$ ) e la posizione della riga spettrale di interesse (ordine 1,  $\alpha_1$ ), per cui si otterrebbe l'angolo di diffrazione come:

$$\theta_d = |\alpha_0 - \alpha_1| \quad (12)$$

- Il “metodo della semidifferenza”, invece, sfrutta la simmetria del fenomeno della diffrazione. La procedura consiste nel rilevare la posizione angolare della stessa riga spettrale (medesimo colore) in modo simmetrico rispetto all'asse ottico: prima in corrispondenza dell'ordine positivo ( $n = +1, \alpha_+$ ) e successivamente per l'ordine negativo ( $n = -1, \alpha_-$ ). L'angolo di diffrazione  $\theta$  viene quindi determinato calcolando la semidifferenza tra le due coordinate angolari registrate

$$\theta_d = \frac{|\alpha_0 - \alpha_1|}{2} \quad (13)$$

Non è consigliato usare il primo metodo visto che si potrebbero introdurre errori sistematici associati alla ricerca del massimo centrale, spesso non individuabile con alta precisione siccome molto luminoso e largo. Per effettuare i calcoli abbiamo deciso di usare il secondo al fine di minimizzare gli errori sistematici. Infatti, in nessun caso è richiesto di centrare il crocefilo con un colore che abbia un'intensità alta quanto quella bianca al centro.

Per le lunghezze d'onda verde scuro e violetto si sono inoltre compiute 5 misure per poter determinare la loro media poiché sono le lunghezze d'onda meno visibili e dunque quelle più soggette ad errore. L'errore sulla media di queste due lunghezze d'onda è utilizzato come errore sulle misure per  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$ .

Di seguito si riportano le misure per le due lunghezze d'onda:

Colore	Misura 1	Misura 2	Misura 3	Misura 4	Misura 5
Verde scuro $\alpha_+$	127° 5'	127° 4' 30"	127° 5'	127° 4' 30"	127° 4' 30"
Verde scuro $\alpha_-$	92° 39'	92° 38' 30"	92° 38'	92° 38' 30"	92° 38'
Violetto $\alpha_+$	124° 5' 30"	124° 4' 30"	124° 5'	124° 5' 30"	124° 5'
Violetto $\alpha_-$	95° 40'	95° 39'	95° 38' 30"	95° 39' 30"	95° 40'

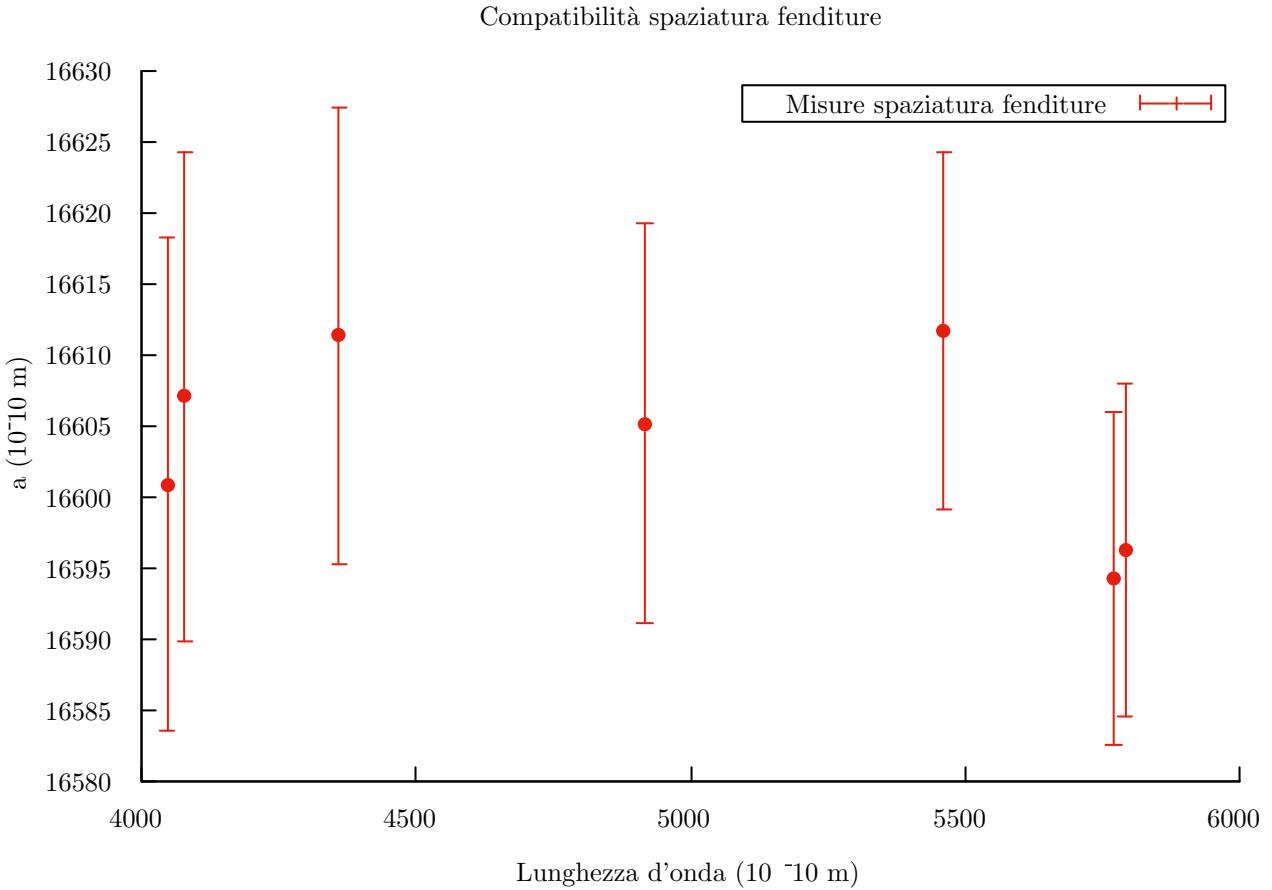
Di seguito la tabella riassuntiva per ogni lunghezza d'onda. Per i valori del verde scuro e del violetto si sono utilizzate le medie delle misure sopraelencate:

Colore	$\lambda \cdot 10^{-10}$ m	$\alpha_+$	$\alpha_-$
Giallo scuro	5790.65	130° 15'	89° 24' 30"
Giallo	5769.59	130° 10'	89° 28' 30"
Verde chiaro	5460.74	129° 2'	90° 39'
Verde scuro	4916.04	127° 4' 42"	92° 38' 12"
Blu	4358.81	125° 5' 30 "	94° 40'
Violetto	4077.81	124° 5' 6"	95° 39' 24"
Viola	4046.56	123° 59' 30"	95° 46' 30"

Da queste misure, si sono utilizzate le relazioni per ottenere i seguenti risultati

Colore	$a \pm \Delta a \cdot 10^{-10}$ m	$N \pm \Delta N$
Giallo scuro	$16596 \pm 12$	$602.5 \pm 0.4$
Giallo	$16594 \pm 12$	$602.6 \pm 0.4$
Verde chiaro	$16611 \pm 13$	$602.0 \pm 0.5$
Verde scuro	$16605 \pm 14$	$602.2 \pm 0.5$
Blu	$16611 \pm 16$	$602.0 \pm 0.6$
Violetto	$16607 \pm 17$	$602.1 \pm 0.6$
Viola	$16661 \pm 17$	$602.4 \pm 0.6$

### 3.5 Commento qualitativo



Dal grafico sopra si evince che esiste compatibilità tra le misure indirette della spaziatura tra le fenditure del reticolo di diffrazione utilizzato. Svolgendo la media pesata delle misure di  $a$ , si ottiene un valore di  $a$  più preciso per il nostro set di dati:

$$a = (16604 \pm 5) \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Anche se questa media pesata differisce di oltre  $12\sigma_a$  dal valore dato dal costruttore di  $16666.66 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , possiamo, data la compatibilità delle nostre misure, dire verificate la legge di diffrazione da reticolo.