Appunti di Analisi 2

Tommaso Miliani

2025/2026

Indice

Introduzione al corso

Il corso di analisi 2 si concentra sullo studio di equazioni differenziali, calcolo differenziale per funzioni vettoriali (ossia funzioni che da un vettore restituiscono un vettore), equazioni a più variabili e infine successioni e serie di funzioni.
L'esame di analisi 2 è composto da uno scritto e da un orale: lo scritto si passa con un voto minimo di 16 e durante l'anno ci saranno due prove parziali che sarà a Novembre (13) e l'altro parziale i primi giorni di Gennaio.

- Si può usare un libro di testo ed un foglio A4 (UNO SOLO) nel quale c'è tutto quello che si riesce a scriverci.
- Si può riprovare un parziale che si è fatto male
- Si può partecipare ai parziali anche se non si è fatto analisi 1
- Il libro di testo consigliato è il "Fuscolo, Marcellini Sbordone Lezioni di analisi matematica 2" oppure il "Bramanti Pagani Salsa analisi matematica 2" che purtroppo per alcuni argomenti non è completo.
- Nessuna dispensa quindi per esercizi svolti rifarsi ai libri di testo "Esercitazioni di analisi due".

Capitolo 1

Equazioni differenziali

Definizione 1.1 (Equazioni differenziali)**.**
Un'equazione differenziale è una equazione in cui l'incognita è una funzione di una qualche variabile. L'incognita è dunque $y = f(x)$. Si dice che una equazione differenziale è ordinaria se dipende solo da una variabile; nel caso di equazioni differenziali che dipendono da più variabili prendono il nome di equazioni differenziali a ***derivate parziali****.*

Esempio 1.1 (Esempi di equazioni differenziali)**.**

$$y'' - y = 0 \qquad y' = 3e^y \qquad y' = 4x + 8$$

La soluzione della prima è $y = \sin x$ in quanto $y'' = -\sin x$ e dunque $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 = 0$.

Definizione 1.2 (Ordine)**.**
Si definisce ***ordine*** *il numero della derivata massima che compare all'interno delle equazioni differenziali.*

Definizione 1.3 (Forma normale)**.**
Una equazione si dice in forma ***normale*** *se la derivata più grande è isolata rispetto alle altre*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.1}$$

Esempio 1.2.

$$(y')^2 + x^3 = 0 \implies y' = \pm\sqrt{x^3}$$

Non riesco a ricavare una equazione del primo ordine del tipo $F(x, y, y')$. Quando riesco ad isolare da una parte la derivata più grande si riesce a semplificare la risoluzione delle equazioni differenziali.

1.1 Equazioni differenziali del primo ordine

La forma generale delle equazioni di primo ordine è del tipo

$$y' = f(x, y) \tag{1.2}$$

Una soluzione per questa forma generale di equazioni differenziale è una funzione y della variabile x definita per $x \in \mathbb{A}$ (un qualche insieme) e tale che per ogni $x \in \mathbb{A}$ risulti che $(x, y(x))$ appartenente al dominio di $f(x, y)$ e inoltre la derivata di questa funzione calcolata in x è uguale a $y'(x) = f(x, y(x))$.

Esempio 1.3 (Esempio più semplice)**.**

$$y' = g(x)$$

Dove $g(x)$ è una funzione continua appartenente ad un qualche insieme $\mathbb{A}$ e quindi un'equazione di questo tipo equivale a trovare la primitiva di g. Allora posso dire che $G(x)+c$ è soluzione dell'equazione differenziale, ossia la primitiva di $g(x)$.

Esempio 1.4 (Esempio di prima con soluzione diversa)**.**
Nell'equazione differenziale

$$y'' - y = 0$$

Anche il coseno è soluzione in quanto si otterrebbe $y = \cos x$. Si ottiene allora che la seguente è anch'essa soluzione dell'equazione:

$$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$$

Generalmente l'equazione di n ordine ha n costanti $C_1, \ldots, C_n$ che moltiplicano.

Esempio 1.5.

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Si ha che la primitiva di y' è proprio $y = \frac{x^3}{3} + C$, data la seconda condizione nel sistema allora si ottiene che

$$\frac{1}{3} + C = 2 \implies C = \frac{5}{3}$$

1.2 Il problema di Cauchy

Se in una equazione differenziale del primo ordine avessi una situazione del tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Ossia se ho delle condizioni sulle derivate fino alla $n - 1$ esima, allora questa tipologia di esercizi prenderà il nome di **problema di Cauchy**: nel caso di una equazione del secondo ordine le condizioni non sono qualsiasi ma seguono il seguente schema:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Esistono alcuni teoremi che permettono di definire l'insieme delle soluzioni date le condizioni del secondo membro di ciascuno dei due sistemi. Iniziamo dai teoremi di esistenza delle soluzioni per il problema di Cauchy del primo ordine in forma normale

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

SI definiscono alcune ipotesi prima di procedere:

Definizione 1.4 (Punto interno ad un insieme)**.**

$$Se\ \mathbb{A} \subset \mathbb{R}^2, (x_0, y_0) \in \mathbb{A}$$

Si dice che (x_0, y_0) è interno all'insieme $\mathbb{A}$, se esiste un cerchio di raggio positivo tale per cui il centro sia (x_0, y_0) e sia contenuto dentro all'insieme $\mathbb{A}$. Nel caso in cui $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^3$ allora diciamo che un punto (x_0, y_0, z_0) è interno all'insieme $\mathbb{A}$ se esiste una sfera di raggio positivo tale per cui (x_0, y_0, z_0) sia il centro e sia contenuto all'interno dell'insieme.

Teorema 1.1 (Teorema di Peano)**.**
Se la funzione $f(x, y)$ è una funzione definita e continua in un qualche insieme $\mathbb{A}$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{A}$, allora il problema di Cauchy ammette almeno una soluzione definita in un intorno di x_0.

Da questo possiamo fare due considerazioni:

1. La continuità di $f(x, y)$ è necessaria per l'esistenza di una soluzione:
2. La sola ipotesi di continuità non è garantisce che esista una sola soluzione

Esempio 1.6 (differenziale risolta col problema dii Cauchy).

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Allora dato che $f(x,y) = y^{2/3}$ è definita continua sull'intervallo $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e quindi una funzione costante $f(x) = 0$ ha valore zero in zero e derivata prima uguale a zero. Anche $y(x) = \frac{x^3}{27}$ è soluzione in quanto la derivata di questa funzione $y' = \frac{x^2}{9}$ ed è uguale a zero se calcolata in zero. Questo problema di Cauchy ha allora due soluzioni distinte anche se in realtà ha soluzioni infinite:

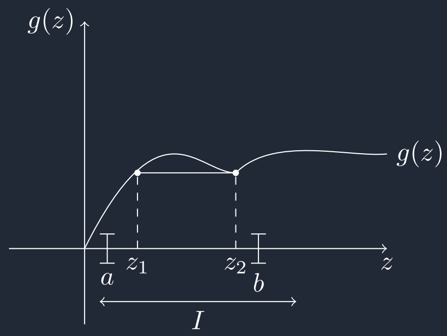
$$y(x) = \begin{cases} 0 \ \textit{se} \ x \in (-\infty, 0) \\ \frac{(x-a)^3}{27} \ \textit{se} \ x \in (a, +\infty) \end{cases}$$

Il teorema di Cauchy allora mi garantisce che esitano almeno una soluzione ma non mi da la certezza che sia solo una (potrebbero essere infatti infinite).

1.3 I teoremi di esistenza di Cauchy

Per spiegare il teorema di esistenza e di unicità bisogna chiarire innanzitutto cosa è una funzione Lipschitziana.

Figura 1.1:



Definizione 1.5 (Funzione Lipschitziana).
Presa una funzione definita come $g : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subset \mathbb{R}$; posto $[a,b] \subset I$, si dice allora che la funzione g è Lipschitziana nell'intervallo $[a,b]$ se $\exists L \in \mathbb{R} > 0$ tale che comunque si scelgano a, b risulta che, per ogni coppia di numeri $z_1, z_2 \in [a,b]$,

$$g(z_1) - g(z_2) \leq L|z_1 - z_2| \tag{1.3}$$

Che è equivalente alla seguente formulazione:

$$-L \leq \frac{g(z_1) - g(z_2)}{z_1 - z_2} \leq L \tag{1.4}$$

Ossia ogni funzione ha un certo valore massimo per la sua derivata prima. Una funzione non è Lipschitziana se presenta dei flessi a tangenti verticali o dei punti di non derivabilità.

Si può dare un esempio di una funzione che è Lipschitziana solo per un certo intervallo:

Esempio 1.7 (Esempio di una funzione potenza).

$$g(z) = z^\alpha, \alpha \in (0,1)$$

Se si prende un intervallo che non contiene lo zero allora è Lipschitziana in quanto le rette avranno sempre una pendenza ben definita. Se invece si prendesse un intervallo che contiene anche lo zero, allora si vede che non è una funzione Lipschitziana perché il rapporto incrementale diventa grande quanto si vuole.

Definizione 1.6 (Derivate parziali).
Presa $f(x,y)$ definita nel punto (x_0, y_0) all'interno del dominio di F. Si ottiene allora che la derivata parziale rispetto alla y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0, y_0 + h) - F(x_0, y_0)}{h} \tag{1.5}$$

Ossia eseguo la derivata rispetto alla variabile considerata, considerando come costanti tutte le variabili per cui non derivo.

Esempio 1.8 (Esempio pratico).

$$f(x,y) = xy^3 + \sin y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, y_0) = 9y^2 + \cos y$$

Nel punto $(3, y_0)$ la derivata della funzione rispetto a y diventa $3y^3 + \sin y$.

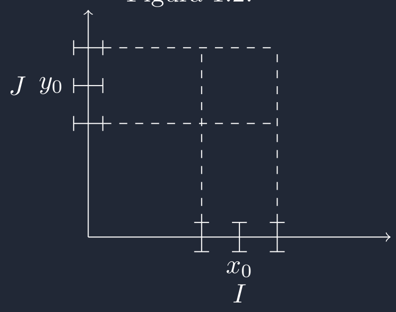
Possiamo ora introdurre il seguente teorema

Teorema 1.2 (Teorema di esistenza di Cauchy)**.**
Si considera il problema di Cauchy per una differenziale di primo ordine

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Possiamo supporre allora che ogni $f(x,y)$ sia definita $\forall(x,y) \in I \times J$, ossia su di un prodotto cartesiano tra due sottoinsiemi qualsiasi di $\mathbb{R}$: $I = (x - x_0, x + x_0)$ e $J = (y - y_0, y + y_0)$. Supponiamo allora le seguenti ipotesi:

Figura 1.2:



1. *$f(x,y)$ è continua in $I \times J$;*
2. *$\exists$ costante $L > 0$ tale che la funzione $f(x,y)$ rispetta la definizione di funzione Lipschitziana nell'intervallo J $\forall x \in I$, $\forall y_1, y_2 \in J$.*

Allora esisterà $\delta > 0$ e esisterà una funzione $y(x)$ che risolve il sistema in una funzione definita nell'insieme $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Per poter dimostrare questo teorema dovremmo allora introdurre prima dei lemmi che ci consentano di dimostrare il teorema

Dimostrazione.

Proposizione 1.1 (Equivalenza tra il teorema del calcolo integrale e la derivata della differenziale)**.**
Sia $\delta > 0$ e supponiamo che siano valide le ipotesi del teorema, allora le seguenti sono equivalenti

1. *$\exists y(x)$ derivabile in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che $y'(x) = f(x, y(x))$ $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], y(x_0) = y_0$.*
2. *$\exists y(x)$ funzione continua in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ tale che*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Dimostrazione. Posso dimostrare questa attraverso il teorema del calcolo integrale: se $g(z)$ è continua, allora posso scrivere che $g(z) = g(z_0) + \int_{z_0}^{z} g'(t)\ dt$.
$1 \implies 2$ So che $y(x)$ è una funzione che soddisfa la prima definizione e allora y' è continua e quindi dal teorema fondamentale del calcolo integrale io so che

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\ dt$$

Allora posso dire che, dato $y'(t) = f(t, y(t))$, posso sostituire nell'integrale e ottenere la tesi.
$2 \implies 1$: Sia y una funzione che soddisfi la seconda proposizione, allora posso utilizzare un'altra forma del teorema del calcolo integrale per cui se h è continua, allora la funzione $h(x) \to z_0 + \int_{x_0}^{x} h(t)\ dt$ e quindi se h è continua e derivabile, la derivata di questa funzione è esattamente $h(x)$. Si ottiene che la funzione all'interno della tesi dell'integrale è continua e quindi l'integrale è una funzione derivabile e la sua derivata è esattamente (con l'implicita formulazione che $y(x_0) = y_0$)

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Proprio come si voleva ottenere. □

Proposizione 1.2 (Se valgono queste considerazioni le ipotesi del teorema sono verificate)**.**
Se f è continua in un insieme $\mathbb{A}$, (x_0, y_0) è interno all'insieme e inoltre si ha che

1. *$\exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.*
2. *$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ è continua*

$\forall (x,y) \in \mathbb{A}$ e allora le ipotesi di questo teorema sono verificate.

La dimostrazione è da finire nelle prossime lezioni. □

Esempio 1.9 (Funzione non Lipschitziana)**.**

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Quindi dico che il mio x_0 e y_0 contengano l'origine, se io facessi il grafico di $y^{\frac{2}{3}}$, allora si ottiene che questo grafico è una radice simmetrica rispetto all'asse y e per questo non è Lipschitziana nell'intorno di 0: le immagini non comprendono le ordinate negative.

1.4 Equazioni a variabile separata

Le equazioni di funzioni a più variabili prendono il nome di funzioni a variabili separabili, ossia della forma

$$y' = a(x)b(y) \implies y'(x) = a(x)b(y(x)) \tag{1.6}$$

Dove $a(x)$ è continua in $I \subset \mathbb{R}$ e $b(y)$ è continua in $J \subset \mathbb{R}$. Posso trovare delle soluzioni per queste equazioni nella seguente maniera: se $\overline{y}$ è univoco tale che $b(\overline{y}) = 0$ allora la funzione $y(x) \equiv \overline{y}$ è soluzione. Se si suppone che $b(y) \neq 0$ allora posso dire che se due funzioni sono uguali il loro integrale sarà uguale:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(x) \implies \frac{y'(x)}{b(y(x))} = a(x) \implies \int \frac{y'(x)}{b(y(x))}\ dy = \int a(x)\ dx$$

Se ponessi ora $y = y(x)$ che soddisfano questa equazione

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\ dx$$

Se $B(y)$ è una primitiva, allora posso dire che

$$B(y) = A(x) + c$$

Se si riuscisse a invertire invece la funzione B si ottiene che esiste una soluzione, la quale è data proprio da:

$$y(x) = B^{-1}(A(x) + c)$$

Esempio 1.10 (Esempio di separazione di variabili)**.**

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Dato che $a(x) \equiv 1$ e $b(y) = \frac{1}{y}$, si può integrare ed ottenere che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \implies \int y\ dy = \int 1\ dx \implies \frac{y^2}{2} = x + c$$

Dato che il quadrato non è sempre invertibile, devo stare attento alle soluzioni che ottengo, in questo caso però mi va bene qualsiasi funzione inversa ed entrambre sono soluzioni ma scelgo quella positiva

$$y = \sqrt{2x + 2c} \implies y = \sqrt{2x + 4}$$

Esempio 1.11 (Altro Esempio)**.**

$$y' = ay(1 - by), a, b > 0$$

In questo caso ho delle soluzioni costanti che mi permettono di dire che $y(x) \equiv 0$, $y(x) \equiv \frac{1}{b}$, allora posso passare all'integrale separando le variabili e ottenere:

$$\int \frac{dy}{y(1 - by)} = \int a\ dx \implies \ln\left|\frac{y}{1 - by}\right| = ax + c$$
$$\implies \left|\frac{y}{1 - by}\right| = e^{ax} \cdot e^{c} = e^{ax}c_0, c_0 \in \mathbb{R}$$

Dato che c_0 è una costante sempre positiva, posso sostituirla con $c_1 \in \mathbb{R} > 0$:

$$y = \frac{c_1 e^{ax}}{1 + bc_1 e^{ax}}$$

1.5 Equazioni omogenee

Sono delle equazioni del tipo

$$y' = f(x, y)$$

dove $f(x, y)$ è omogenea di grado 0, ossia $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Esempio 1.12 (Questa funzione differenziale è omogenea)**.**

$$y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = f(x, y)$$

Queste equazioni possono essere riscritte attraverso una opportuna funzione per essere risolte:

$$y' = b\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ossia posso trasformare la differenziale come funzione di $\frac{y}{x} = t$, quindi cambio varibile nel seguente modo:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \implies y(x) = xz(x) \implies y'(x) = z + xz'$$

Adesso posso risolvere in funzione di z:

$$b(z) = z + xz' \implies z' = \frac{b(z) - z}{x}$$

Coni passaggi all'indietro ottengo nuovamente $y(x) = xz(x)$.

Esempio 1.13.

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}$$

Se io definisco $f(x, y)$ questo oggetto è facile vedere che è omogenea. Posso ora mettere in evidenza la x sopra e dunque ottenere

$$\frac{x^3(1 + \frac{y^3}{x^3})}{x^3(\frac{y^2}{x^2})} = b\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ossia si ottiene una funzione in rapporto tra y e x, allora posso dire che

$$b(t) = \frac{1 + t^3}{t^2}$$

Allora, data la definizione di z' si ottiene

$$z' = \frac{\frac{1+z^3}{z^2} - z}{x} \implies z' = \frac{1}{z^2}\frac{1}{x}$$

Allora per separazione di variabili possiamo trovare la soluzione come

$$\int z^2 dz = \int \frac{dx}{x}$$

1.6 Esistenza locale ed esistenza globale

Esempio 1.14.

$$\begin{cases} y' = -2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Essendo questo un problema di Cauchy, possiamo allora risolverlo con i metodi che conosciamo; tuttavia si osserva anche che, essendo $f(x, y)$ continua, allora anche la differenziale è continua e quindi siamo nelle *ipotesi del teorema di esistenza ed unicità. Esiste allora una sola soluzione per questa equazione e si trova con separazione di variabili*

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int -2x\ dx$$
$$-\frac{1}{y} = -x^2 + c \implies c = 1$$

La soluzione è la seguente, con $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$*:*

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

I teoremi di esistenza locale mi dicono che è possibile trovare delle soluzioni negli intorni di x_0 in quanto sono interessato solo alle soluzioni vicine a questo intorno. Nei teoremi di esistenza globale invece io considero l'intero insieme di esistenza della funzione trovando delle soluzioni globali.

Teorema 1.3 (Teorema di esistenza globale)**.**
Consideriamo il problema di Cauchy del primo ordine

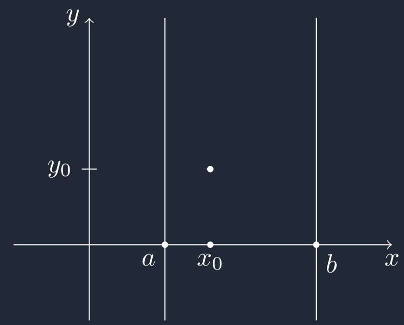
$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

1. $f(x, y)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ *sono continue e definite* $\forall x \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$*;*
2. *Esistano due valori positivi* $h, k \in \mathbb{R}$ *per cui risulta:*

$$|f(x, y)| \leq h + k|y| \qquad \forall x \in [a, b], y \in \mathbb{R}$$

Allora la soluzione è unica e definita su tutto $[a, b]$*.*

Figura 1.3: Teorema di esistenza globale



Dimostrazione. Non fatta in classe (si farà? boooh) □

1.7 Sistemi di equazioni differenziali

Un sistema di equazioni differenziali è un sistema i cui membri sono vettori di funzioni:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

La soluzione del sistema è allora un vettore di funzioni (chiamata anche **funzione vettoriale**):

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \ x \in I,\ I \subset \mathbb{R} :$$
$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases}$$

Allora posso chiamare il vettore

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Tale che $Y'(x)$ contenga tutte le derivate, allora posso chiamare il vettore funzione come $F(x, Y) = Y'$, allora posso dire che i sistemi di equazioni differenziali sono tutti risolvibili allo stesso modo. Se si avesse invece delle condizioni per tutte le derivate fino alla $n-1$ esima, allora saremmo in presenza di un sistema di equazioni differenziali di Cauchy. Questo vuol dire che la sua soluzione, tenuto conto delle considerazioni fatte fino ad ora

$$\begin{cases} Y'(x) = F(x, Y) \\ Y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Teorema 1.4 (Teorema 1)**.**
Sia $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e sia $F : D \to \mathbb{R}^n$,una funzione continua e sia (x_0, y_0) un punto interno a D, allora il problema di Cauchy (sistema di equazioni differenziali) ha almeno una soluzione definita in un intorno di x_0.

Teorema 1.5 (Teorema 2)**.**
Nelle ipotesi del teorema precedete supponiamo che

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Siano continue in D , allora il problema di Cauchy con sistema di equazioni differenziali ha una sola soluzione definita nell'intorno di x_0.

Teorema 1.6 (Teorema 3)**.**
Supponiamo che $f_i(x, y_1, \dots, y_n)$ sia definita per ogni $i = 1, \dots, n$, $\forall x \in [a, b]$ e $\forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ si suppone anche che f_i e la derivata parziale rispetto ad ogni f_i rispetto a y_j siano continue $\forall y \in [a, b], y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Si suppone anche che $\exists h, k > 0$ tali per cui risulti

$$||F(x, Y)|| \leq h + k||Y|| \tag{1.7}$$

Con $||Y||$ si indica la norma e ogni soluzione dell'equazione $Y' = F(x, Y)$ è definita su tutto l'intervallo $[a, b]$.

Esempio 1.15 (Esempio fondamentale)**.**
In un sistema di equazioni differenziali di ordine n, tale per cui

$$y_1(x) \equiv y(x) \qquad \underset{\heartsuit}{} \quad y_2(x) \equiv y'(x) \qquad y'' = 3xy + 7y'(\star)$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 3xy_1 + 7y_2(\star\star) \end{cases}$$

Se y risolve $\star$ allora y_1, y_2 definite da $\heartsuit$ risolve $\star\star$ viceversa se (y_1, y_2) risolvono $\star\star$ allora la funzione y_1 ha ordine $\star$.

1.8 Equazioni differenziali omogenee lineari del primo ordine

Definizione 1.7 (Equazioni differenziali omogenee lineari)**.**
Si chiamano equazioni differenziali lineari equazioni del tipo

$$y^{(n)} + a(x)_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a(x)y = f(x) \tag{1.8}$$

*Se $f(x)$ è zero, allora prendono il nome di **omogenee**, altrimenti **complete**. Queste equazioni si chiamano lineari perché hanno la caratteristica che riprendono le funzioni lineari negli spazi vettoriali.*

$$y' = a(x)y = f(x)$$

Posso utilizzare la risoluzione vista prima per cui posso eseguire un cambio di variabile opportuno in modo tale da renderla omogenea

$$z' + a(x)z = 0$$

Se z_1 e z_2 sono soluzioni dell'omogenea, allora anche $\alpha z_1(x) + \beta z_2(x)$ sono soluzioni. Posso dimostrarlo nel seguente modo:

$$(\alpha z_1(x) + \beta z_2(x))' + a(x)(\alpha z_1(x) + \beta z_2(x)) = 0$$
$$\alpha(z_1' + a(x)z_1) + \beta(z_2' + a(x)z_2) = 0$$

Dato che z_1 e z_2 sono soluzioni, allora è verificata.
Posso ora verificare che esistono soluzioni per l'equazione generica $z' + a(x)z = 0$. Sia $A(x)$ una primitiva finita senza le costanti di $a(x)$ e quindi $A'(x) = a(x)$. Posso eseguire allora la seguente trasformazione:

$$e^{A(x)}z' + a(x)e^{A(x)}z = 0 = (e^{A(x)}z)'$$
$$e^{A(x)}z = c \qquad c \in \mathbb{R} \qquad z = ce^{-A(x)}$$

Esiste un modo più veloce per poter trovare le soluzioni, questo è dato dalla seguente formulazione

$$y'e^{A(x)} + a(x)e^{A(x)}y = f(x)e^{A(x)}$$
$$(ye^{A(x)})' = f(x)e^{A(x)}$$

Se considero $F(x)$ come primitiva del prodotto a destra, allora si ottiene che

$$ye^{A(x)} = F(x) + c$$

$$y = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)}F(x) \tag{1.9}$$

Si può anche utilizzare un secondo metodo per risolvere le equazioni e si chiama **metodo della variazione delle costanti**. Penso che c ora sia una funzione e non più una costante, allora dato che devo considerare una soluzione generale, allora devo considerare c come funzione. Posso ottenere la derivata

$$y' = C'e^{-A(x)} - Ce^{-A(x)}a$$
$$y' + a(x)y = f \implies C' = f(x)e^{A(x)}$$

Se C ha questa espressione, ossia la primitiva di C', allora $C = F(x) + d, d \in \mathbb{R}$, le soluzioni sono allora

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} \implies y(x) = (F(x) + d)e^{-A(x)}$$

Esempio 1.16 (Prima formula)**.**

$$y' + \frac{y}{x} = -\sin x \qquad \begin{cases} a(x) = \frac{1}{x} \\ f(x) = -\sin x \\ A(x) = \int a(x) \implies \ln|x| \end{cases}$$
$$F(x) = \int f(x)e^A\ dx = \int -\sin xe^{A(x)}\ dx = \int -\sin xe^{\ln|x|}\ dx = \begin{cases} x > 0 : \sin x - x\cos x \\ x < 0 : -\sin x + x\cos x \end{cases}$$

Allora si ottiene dalla formula di risoluzione veloce:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(\sin x - x\cos x) & x > 0 \\ Ce^{-\ln|x|} + e^{-\ln|x|}(-\sin x + x\cos x) & x < 0 \end{cases}$$

Si ottengono allora due due soluzioni distinte a seconda di come si svolge il valore assoluto.

1.9 Spazi di funzioni

Definizione 1.8 (Spazi di funzioni)**.**
Sia I un intervallo su di $\mathbb{R}$, allora definisco lo spazio delle funzioni di da $I \to \mathbb{R}$ lo spazio vettoriale che contiene le funzioni con le seguenti proprietà:

1. *$\alpha f(x) + \beta g(x)$ appartiene allo spazio;*
2. *$f(x) \equiv 0$.*

All'interno di questo spazio vivono anche gli spazi:

- *$C^0(I)$, ossia l'insieme dello spazio delle funzioni continue su $I \to \mathbb{R}$;*
- *$C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni continue derivabili in ogni punto la cui derivata è una funzione continua e $\forall x \in I$.*
- $\vdots$

- $C^{(n)}$ *è l'insieme delle derivate n esime continue.*

Si possono ora risolvere le equazioni differenziali omogenee lineari di ordine n-esimo considerando la generica funzione

$$y = C^{(n)}(I)$$

Posso definire l'operatore $E(y) : C^{(n)}(I) \to C^{(0)}(I)$ come l'operatore che trasforma le derivate n-esime continue in primitive e posso esprimerla (se le soluzioni sono y_1 e y_2)

$$E(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha E(y_1) + \beta E(y_2)$$

Teorema 1.7.

1. *L'insieme V_0 delle soluzioni delle equazioni differenziali omogenee lineari è uno spazio vettoriale di dimensione n;*
2. *L'insieme delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari è l'insieme $\{y(x) + y_f(x) : y \in V_0\}$ con y_f soluzione delle equazioni differenziali lineari.*