Appunti di Analisi

Tommaso Miliani

02-10-25

1 Dimostrazione teorema di esistenza ed unicità di Cauchy locale

Abbiamo già dimostrato il teorema di esistenza ed unicità del teorema. Ora si dimostra tutto il teorema basata sulla formulazione integrale:

Dimostrazione. Posso definire $M = \max |f(x,y)|$ nell'insieme $I \times J$ e possiamo definire $\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$. Se definiamo l'insieme B come l'insieme delle funzioni continue C^0 tali che hanno la norma del sup della differenza:

$$B = \{u(x) \in C^0(I_\delta) : ||u - y_0||_{C^0(I_\delta)} \leq b\}$$

Si osserva che B è sottoinsieme dell'insieme C^0 e dunque è una palla chiusa e allora $(B, ||||_{C^0})$ è uno spazio di Banach perché è un sottoinsieme chiuso di dello spazio normato $(C^0(I_\delta), || \cdot ||_{C^0})$ che è completo. POsso allora definire una funzione

$$F : B \to C^0 \qquad F(u) = z \qquad z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))dt \forall x \in I_\delta$$

Vogliamo provare ora che $Im\ F \subseteq B$: infatti se applico la definizione di F e sia $u \in B$, allora posso dire che $F(u) \in C^0$: infatti:

$$|F(u) - y_0| = |z(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, u(t))| \ dt \right|$$

Si osserva che $\forall x \in I_\delta$ si ha che $t \in [x_0, x] \subseteq I$:

$$u(t) \in J \implies ||u - y_0||_{C^0} \leq b \implies |u(t) - y_0| \leq b \forall x \in I_\delta$$

Allora si ha che

$$(t, u(t)) \in I \times J \implies |f(t, u(t))| \leq M \leq M|x_0 - x| \leq M\delta, x \in I_\delta$$

Dato che avevo scelto δ più piccolo sicuramente di $\frac{b}{M}$, allora posso dire che quella espressione è $\leq b$: ho dimostrato allora che $\forall x \in I_\delta$ $f(u, u(t)) \leq b$ anche se non mi basta per dire che le immagini sono contenute in B. Quindi posso dire che

$$\max |F(u) - y_0| \leq b \implies ||F(u) - y_0|| \leq b \implies F(u) \subseteq B$$

L'idea è dimostrare ora che questa funzione F ha un punto fisso attraverso il teorema delle contrazioni: posso considerare ora il valore assoluto tra le funzioni:

$$|F(y_1) - F(y_2)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| \ dt \right|$$

Posso allora maggiorare l'integrale seconodo la definizione di funzione Lipszitchiana poiché valgono le ipotesi del teorema:

$$\leq L|x - x_0| \ ||y_1 - y_2||_{C^0(I_\delta)}$$

Maggiorato già con la norma: posso allora dire che è

$$\leq L\delta||y_1 - y_2||_{C^0(I_\delta)}$$

Quindi posso dire che l'immagine di

$$||F(y_1) - F(y_2)||_{C^0(I_\delta)} = \max |F(y_1) - F(y_2)| \leq L\delta ||y_1 - y_2||_{C^0(I_\delta)}$$

allora per definizione, dato che delta è stato preso più piccolo di M, ho dimostrato che è Lipszitchiana e quindi anche una contrazione. Allora posso dire che

$$F : B \to B, (B, || \cdot ||_{C^0(I_\delta)})$$

UNo spazio completo e con F contrazione rispetto a $|| \cdot ||_{C^0(I_\delta)}$ allora per il teorema delle contrazioni esiste una unica soluzione del problema di Cauchy nella forma integrale:

$$y = y(x) : F(y) = y \implies y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\ dt$$

Cioè y risolve il teorema di Cauchy integrale. $\square$

2 Le funzioni a 2 variabili

IN questo corso ci si concentra solo sulle funzioni a due variabili anche se i procedimenti da applicare nel caso di più variabili sono gli stessi per le funzioni a due variabili. Nel caso di funzioni a due variabili cambiano molto le proprietà delle funzioni ed i loro teoremi rispetto alle loro controparti ad una variabile sola. Lo spazio metrico $\mathbb{R}^n$ è uno spazio metrico molto speciale. Preso un certo insieme

Definizione 2.1 (Insieme aperto in $\mathbb{R}^2$)**.**

$$A \subset \mathbb{R}^2$$

Questo è aperto se e solo se $\forall (x_0, y_0) \in A \exists R > 0$ *tale che*

$$B_R(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y) - (x_0, y_0)||_\epsilon < R\} \subset A$$

Definizione 2.2 (Insieme chiuso in $\mathbb{R}^2$)**.**

$$E \subset \mathbb{R}^2$$

dove $\overline{E}$ *è il più più piccolo chiuso in* $\supseteq E$ *(ossia la chiusura di* E*) e dove* $\dot{E}$ *è il più grande aperto* $\subseteq E$ *(interno).*

Definizione 2.3 (Dominio su $\mathbb{R}^2$)**.**
D è un dominio se $D = \overline{A}$ con A insieme aperto e

$$D = \dot{D} \cup \ni D$$

I grafici di una funzione a più variabili si chiama **superficie**.

Esempio 2.1 (esercizio tipo in una funzione a due variabili)**.**

$$f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$$

- *Determinare il dominio naturale*
- *Descrivere le linee di livello*
- *Trovare* $\min / \max$ *di* f *su di un insieme* Q

$$Q = \{|x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}\}$$

Il dominio naturale della funzion sarà dato da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0\} \implies D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

Ossia la circonferenza di raggio uno centrata sull'origine.

POsso ora definire le linee di livello come

$$f(x,y) = t = \ln(1 - x^2 - y^2) \implies e^t = 1 - x^2 - y^2.$$

OSsia

$$\begin{cases} (x,y) \in D \\ x^2 + y^2 = 1 - e^t \end{cases}$$

- $t > 0 \implies U_t = \emptyset$;
- $t = 0 \implies U_t = \{(0,0)\}$;
- $t < 0 \implies U_t$ è una circonferenza di raggio $R = \sqrt{1 - e^t}$.

Nel limite in cui t tende a meno infinito allora si ottiene la circonferenza di raggio 1 e quindi U_t coinciderà con l'insieme del $\ni D$. Si possono trovare ora il minimo ed il massimo della funzione nell'insieme Q

3 Limiti di funzioni in due variabili

I limiti in due funzioni funzionano in maniera simile ai limiti in una variaabile

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \tag{1}$$

Per cui la metrica

$$||(x,y) - (x_0,y_0)|| \to 0 \iff |f(x_0), L| \to 0$$