Appunti di analisi

Tommaso Miliani

25-09-25

1 Studio qualitativo delle differenziali

Esempio 1.1.

$$\begin{cases} y' = 4y(1-y) \\ y(0) = a \end{cases}$$

Si vede che esistono delle soluzioni a variabili costanti in quanto mi delimitano regioni del piano nel quale esistono tutte le altre soluzioni. In pratica, dato il teorema di unicità delle soluzioni, se $0 < a < 1$ allora $y(x)$ è anch'essa compresa tra zero e uno e lo stesso vale se è minore o maggiore di uno. Questo è un grande aiuto perché posso dividere i casi di studio del problema.
$0 < a < 1$: allora anche $y(x)$ è limitata tra 0 e 1 ma prolungabile in $\mathbb{R}$.
$a > 1 \implies y(x) > 1$: è infinita e limitata e quinid il segno della derivata è uguale al segno della funzione, allora la funzione in un intervallo I_0 è decrescente e definito come $I_0 = (-\epsilon, \epsilon)$. Considero allora questo intervallo da $[0, \epsilon)$, allora la funzione è decrescente nell'intervallo e so che $y(x)$ appartiene all'intervallo $(a, 1)$.
$a < 0 \implies y(x) < 0$: allora il segno della derivata è uguale al segno della funzione e dunque decresce e quindi per ogni x nell'intervallo I_0^-.

Esempio 1.2.

$$\begin{cases} y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \\ y(0) = a \end{cases}$$

Se è C^1 allora è una funzione anche Lipstchizana e quindi è definita nell'intervallo massimale I_0, ossia il più grande intervallo dove può essere definita la funzione.

$$f(x, y) \in x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \in C^1\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

E' dunque Lipstchizana in $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} - \{0\}$ allora vale che esiste una unica $\forall a \neq 0$ definita in un intervallo I_0. La soluzione costante $y = -1$.

$$a \in (0, 1) \implies y(x) \in (-1, 0) \forall x \in I_0$$

Allora dato che esiste una soluzione limitata allora è prolungabile su $\mathbb{R}$.

$$a > 0 \implies y(x) > 0 \forall x \in I_0$$

Il segno della derivata è maggiore di zero per $x > 0$ e quindi la funzione è crescente per $x > 0$ allora $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{a}$. Ossia $f(x, y) < xk$, ossia per $x > 0$ la funzione è sub lineare. Per il teorema dell'esistenza globale si ha che $I_0 = (-\epsilon, +\infty)$ per $x < 0$ è analogo. Considero $u(x) = y(-x)$ per dimostrare che sia pari e per risolvere il problema di Cauchy considero pure la funzione $u'(x) = -y(-x)$.

$$x\left(1 + \frac{1}{u}\right) = x\left(1 + \frac{1}{y(-x)}\right) = -\left(-x\left(1 + \frac{1}{y(-x)}\right)\right)$$

Con la sostituzione $t = -x$ si ha la seguente

$$-t\left(1 + \frac{1}{y(t)}\right) = -y'(t) = -y'(-x) = u'(x)$$

Allora si è dimostrato che se $a > 0$ allora si ha che $I_0 = \mathbb{R}$

$$a < -1 \implies y(x) < -1 \forall x \in I_0$$

Inoltre dato che il segno di y' è o positivo o negativo si ha ch $y(x)$ è limitata E si prolunga su tutto $\mathbb{R}$.

Figura 1: