Analisi 1 - Ultimate Cheatsheet

5 febbraio 2025

1 Trigonometria

Angoli e valori

Angolo	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0	1	0

Angoli associati

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

Identità fondamentali

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{cos^2(x)}$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$
$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$
$$Posto\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$$
$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Somma e differenza

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta) cos(\alpha)$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Duplicazione, bisezione, abbassamento di grado

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$$
$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$
$$\sin(x)^2 = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
$$\cos(x)^2 = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Formule di prostaferesi

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Seno e coseno iperbolici

$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2 Limiti

Limiti di successioni

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & se \quad a>1, \\ 1, & se \quad a=1, \\ 0, & se \quad -1<a<1, \\ non\exists, & se \quad a\leq -1, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} \log_a(n) = \begin{cases} -\infty, & se \quad 0<a<1, \\ +\infty, & se \quad a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}-a_n)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

2.0.1 Definizioni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \iff \forall\epsilon>0, \exists\delta>0 : |f(x)-l|<\epsilon, \quad \forall x\in A : 0\neq|x-x_0|<\delta$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall M>0, \exists\delta>0 : f(x)>M, \quad \forall x\in A : 0\neq|x-x_0|<\delta.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall M>0, \exists\delta>0 : f(x)<-M, \quad \forall x\in A : 0\neq|x-x_0|<\delta.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon>0, \exists k : |f(x)-l|<\epsilon, \quad \forall x\in A : x>k.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M>0,\ \exists k : f(x)>M, \quad \forall x\in A : x>k.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists k : f(x)<-M, \quad \forall x\in A : x>k.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon>0, \exists k : |f(x)-l|<\epsilon, \quad \forall x\in A : x<-k.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall M>0,\ \exists k : f(x)>M, \quad \forall x\in A : x<-k.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall M>0,\ \exists k : f(x)<-M, \quad \forall x\in A : x<-k.$$

Limiti di funzioni

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\log(a)}$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{a^{f(x)}-1}{f(x)} = \log(a)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

$$\lim_{x\to0} \frac{(1+f(x))^c-1}{f(x)} = c$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2}$$

Gerarchia degli infiniti

Per $n\to+\infty$:

$$\log_a(n) << n^b << c^n << n! << n^n$$
$$con\ a,b,c\in R$$

2.0.2 Definizioni

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad oppure \quad a_n\to a,$$
$$\forall\epsilon>0\ \exists v\ :\ |a_n-a|<\epsilon\ \forall n>v.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad oppure \quad a_n\to+\infty.$$
$$\forall\ M>0\ \exists v\in R\ :\ a_n>M\ \forall\ n>v$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad oppure \quad a_n\to-\infty.$$
$$\forall\ M>0\ \exists v\in R\ :\ a_n<-M\ \forall\ n>v$$

2.1 Teoremi utili

2.1.1 Successioni

TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE
TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO
TEOREMA DEI CARABINIERI
CRITERIO DEL RAPPORTO
TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS

2.1.2 Funzioni

TEOREMA DI WEIERSTRASS
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI (I e II)
CRITERIO DI INVERTIBILITA'

3 Derivate

3.1 Derivate fondamentali

$$D\ cf(x) = cf'(x)$$
$$D\ (f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$D\ (f(x) \cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$D\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2}$$
$$D\ f(g(h(x))) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$
$$D\ f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$
$$D\ x^n = nx^{n-1}$$
$$D\ \log_a(x) = \frac{1}{x}\log_a(e),\ \forall x > 0, a > 0, a \neq 1.$$
$$D\ \sin(x) = \cos(x)$$
$$D\ \cos(x) = -\sin(x)$$
$$D\ \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

3.2 Definizione e retta tangente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3.3 Teoremi utili

TEOREMA DI FERMAT
TEOREMA DI ROLLE
TEOREMA DI LAGRANGE
CRITERIO DI MONOTONIA (e stretta)
CRITERIO DI CONVESSITA'
TEOREMA DI CAUCHY
TEOREMA DI L'HOPITAL

4 Utilizzo dei teoremi sui limiti

TEOREMA DI UNICITA' DEL LIMITE:
Una successione convergente non può avere due limiti distinti.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO:

$$se\ \lim_{n \to +\infty} a_n = a > 0\ \exists\ v \mid a_n > 0\ \forall n > v.$$

TEOREMA DEI CARABINIERI:

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad \forall n \in N.$$
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = a$$
$$c_n \to a.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$b_n = a_{n+1}/a_n$$
$$se\ b_n \to b, b < 1 \Rightarrow a_n \to 0.$$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS:

$$a_n\ limitata$$
$$a_{n_k} \to l$$

TEOREMA DI WEIERSTRASS:

$$f(x)\ derivabile\ in [a, b]$$
$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2),\ \forall x \in [a, b]$$

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI:

$$\forall x \in [a, b]\ se\ f(x)\ continua$$
$$\Rightarrow\ \exists f(x) = y.$$
$$\forall x \in [a, b]\ se\ f(x)\ continua$$
$$\Rightarrow\ min\{f(x)\} \leq f(x) \leq max\{f(x)\}.$$

CRITERIO DI INVERTIBILITA':

$$se\ f(x) \nearrow\nearrow\ \vee f(x) \searrow\searrow$$
$$f(x)\ invertibile$$

5 Utilizzo dei teoremi sulle derivate

TEOREMA DI FERMAT:

$$f \in [a, b],\ f(x_0) = min\{f(x)\}\ \vee\ max\{f(x)\}$$
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

TEOREMA DI ROLLE

$$f(x)\ continua \in [a, b]\ e\ derivabile \in (a, b)$$
$$se\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0.$$

TEOREMA DI LAGRANGE:

$$f(x) continua \in [a, b]\ e\ derivabile \in (a, b)$$
$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

CRITERIO DI MONOTONIA:

$$f(x) continua \in [a, b]\ e\ derivabile \in (a, b)$$
$$f'(x) \geq 0, \qquad \forall x \in (a, b)\ f \nearrow \in [a, b]$$
$$f'(x) \leq 0, \qquad \forall x \in (a, b)\ f \searrow \in [a, b]$$

CRITERIO DI CONVESSITA':

$$f(x) \textit{ continua} \in [a,b] \textit{ e derivabile} \in (a,b)$$
$$f(x) \textit{ convessa} \in [a,b];$$
$$f'(x) \textit{ crescente} \in [a,b];$$
$$f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b).$$

TEOREMA DI CAUCHY:

$$f(x) \textit{continua} \in [a,b] \textit{ e derivabile} \in (a,b)$$
$$g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$$
$$\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

TEOREMA DI L'HOPITAL:

$$f(x), g(x) \to 0 \textit{ derivabili in un intorno di } x_0$$
$$\textit{se } g'(x) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

6 Integrali

6.1 Integrali immediati

$$\int x^b \ dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c;$$
$$\int \frac{1}{x} \ dx = \log(x) + c;$$
$$\int a^x \ dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c;$$
$$\int e^x \ dx = e^x + c;$$
$$\int \sin(x) \ dx = -\cos(x) + c;$$
$$\int \cos(x) \ dx = \sin(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \ dx = \tan(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \arcsin(x) + c;$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx = \arccos(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \ dx = \arctan(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{a^2+x^2} \ dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c;$$
$$\int \log(x) = x\log(x) - x + c$$
$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \ dx = -\cot(x) + c;$$
$$\int \cosh(x) \ dx = \sinh x + c;$$
$$\int \sinh(x) \ dx = \cosh(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} \ dx = \tanh(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} \ dx = -\coth(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ dx = arcisinh(x) + c;$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ dx = arccosh(x) + c;$$

6.2 Altri integrali immediati

$$\int \frac{b}{(cx+a)^2} \ dx = -\frac{b}{c} \cdot \frac{1}{(x+\frac{a}{c})^2} + C$$
$$\int \frac{1}{\sin(x)} \ dx = \int \csc(x) \ dx = -\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + c$$

si risolve moltiplicando per $\cot(x) + \csc(x)$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \ dx = \int \sec(x) \ dx = \ln\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) + c$$

Si risolve moltiplicando per $\tan(x) + \sec(x)$

$$\int \sqrt{x^2+1} \ dx = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x)$$

Si risolve con la sostituzione di $x = \sinh(t)$

6.3 Tecniche di integrazione

PER PARTI

$$\int f(x)g'(x) \ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \ dx$$

DERIVATE DI COMPOSTE

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x) \ dx = F(g(x)) + c$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int f(x) \ dx \Rightarrow t = g(x), dt = g'(x)dx$$

6.4 Integrali impropri e loro carattere

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{x_0}^{c} f(x) \ dx = \lim_{c\to+\infty} F(c) - F(x_0)$$

Se due funzioni integrabili sono tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora se la maggiore converge anche la minore converge, altrimenti se la maggiore diverge anche la minore diverge.

6.5 Teoremi degli integrali

TEOREMA DI CANTOR
TEOREMA DI INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI CONTINUE
PRIMO TEOREMA DELLA MEDIA

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a)$$

SECONDO TEOREMA DELLA MEDIA

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)(b-a)$$

INTEGRABILITA' DELLE FUNZIONI MONOTONE

7 Taylor

7.1 Sviluppi di alcune funzioni

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ...\\
e^x =& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);\\
\log(1+x) =& x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);\\
\sin(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) :\\
\cos(x) =& 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});\\
\tan(x) =& x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)\\
\sinh(x) =& x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cosh(x) =& 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2})\\
\tanh(x) =& x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)\\
arctanh(x) =& x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\arctan(x) =& x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2});\\
\arcsin(x) =& x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)\\
\arccos(x) =& \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\\
(1+x)^\alpha =& 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \ldots \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} =& 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
\sqrt{1+x} =& 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).
\end{aligned}$$

7.2 Proprietà degli o piccoli

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n) \tag{1}$$

$$c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n) \tag{2}$$

$$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n) \tag{3}$$

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \tag{4}$$

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \tag{5}$$

$$o(o(x^n)) = o(x^n) \tag{6}$$

$$o(x^n + o(x^n)) = o(x^n) \tag{7}$$

8 Serie numeriche

8.1 Somma parziale

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

8.2 Serie geometriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, se\ q < |1|$$

8.3 Serie armoniche

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

Converge se $p > 1$, diverge se $p \leq 1$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \log(n)^\beta}$$

1. Converge se $\alpha > 1$ e $\forall \beta$.
2. Converge se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$
3. Diverge per $\alpha = 1$ e $\beta \leq 1$
4. Diverge per $\alpha < 1$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{n\gamma} n^\alpha \log(n)^\beta}$$

1. Converge per $\forall \gamma > 0, \forall a, b$
2. Diverge per $\gamma < 0$
3. Per $\gamma = 0$ vedere sopra

8.4 Teoremi delle serie

CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DELLA SERIE

$$Se \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ converge \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

CRITERIO DEL CONFRONTO

$$Prese\ 0 \leq a_n \leq b_n$$
$$Se\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$
$$Se\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$$a_n \geq 0, b_n > 0 \Rightarrow$$
$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), L \neq 0. \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ e\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$
$$hanno\ lo\ stesso\ carattere$$

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI

$$Se\ \lim_{n\to\infty} n^p a_n = l$$
$$l \neq +\infty, p > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$
$$l \neq 0, p \leq 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow$$
$$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$
$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow$$
$$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$$
$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

$$Se\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\ e\ decresce \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (a_n) = l$$

CRITERIO DELL'INTEGRALE
L'integrale improprio di una funzione continua e decrescente e la sua serie associata hanno lo stesso carattere.

A Studio di funzione

1. *Dominio* di $f(x)$;
2. parità($f(-x) = f(x), \forall x$) o disparità($-f(-x) = f(x), \forall x$), oppure periodica;
3. intersezioni con gli assi cartesiani;

4. segno della funzione;
5. limiti agli estremi del dominio;
6. asintoti orizzontali, verticali o obliqui, trovare asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} &m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \\ &q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) \\ &y = mx + q \end{aligned}$$

7. intervalli di monotonia;
8. massimi e minimi relativi e relativi valori (quando ci sono massimi e minimi assoluti);
9. intervalli di concavità o convessità e punti di flesso con la derivata seconda;
10. classificazione delle discontinuità (se presenti).

B Polinomi

B.1 Divisione tra polinomi

Esempio di divisione tra polinomi

$$\frac{x^2+4x}{x+2} = \begin{array}{c|c} x^2+4x & x+2 \\ \hline -x^2-2x & x+2 \\ 2x & \\ -2x-4 & \\ -4 & \end{array} = x+2-\frac{4}{x+2}$$

B.2 Falso quadrato

Il falso quadrato è molto utile per la scomposizione dei cubi:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

dove al secondo membro $x^2 \pm xy + y^2$ è il falso quadrato.

C Dimostrazioni per induzione

Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice $n \in N$ sia vera per $n = 1$ e che inoltre, supposta vera per n, sia vera anche per il successivo n + 1. Allora la proposizione è vera $\forall n \in N$. Esempio pratico: dimostrare che $n^2 + n + 3$ è dispari $\forall n \in N$. Posto che l'ipotesi sia vera, allora trovo un indice n per cui questa vale (banalmente per n = 1). Ponendo ora n+1, voglio vedere se vale ancora:

$$(n+1)^2 + (n+1) + 3 \;=\; n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 3 \;=\; n^2 + n + 1 + 2n + 2$$

Per ipotesi anche questa è verificata in quanto $2n+2$ è un numero pari mentre n^2+n+1 è la nostra ipotesi -2, per induzione è quindi verificata.

D Combinatoria

Definizione di numero fattoriale:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1)).$$

Il numero di disposizioni di k elementi tra n elementi dati è:

$$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Il numero di combinazioni di k elementi è:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Da cui seguono le identità:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right), \qquad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right).$$

Binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) a^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) a^{n-1}b + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k}b^k + \cdots + \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) ab^{n-1} + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) b^n. =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k}b^k$$

E Integrazione di fratte

Si può dividere una fratta nei seguenti modi:
Prima di tutto si cerca di ridurre il numeratore al primo grado attraverso la divisione tra polinomi. Passando ora al delta del denominatore (posto che sia di secondo grado), nel caso in cui il $\Delta > 0$ allora si procede come segue:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$$
$$\int \frac{ax+b}{(x+e)(x+f)} = \int \frac{A}{x+e} + \int \frac{B}{x+f}$$

A questo punto si ricombinano le due frazione e si ottengono i valori di A e B per cui si ottiene il numeratore di partenza.
$\Delta = 0$
Si procede in maniera simile:

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}$$
$$\int \frac{ax+b}{(x+e)(x+e)} = \int \frac{A}{x+e} + \int \frac{B}{(x+e)^2}$$

Se $\Delta < 0$ si prova un raccoglimento parziale o a scomporre la frazione in modo da risolvere per parti o da ricondurre all'integrale dell'arcotangente col completamento del quadrato. Altrimenti esiste la forma (grazie Alessandro):

$$\int \frac{ax+b}{(x-1)(cx^2+dx+e)}\,dx = \int \frac{A}{x-1} + \frac{B+Cx}{(cx^2+dx+e)}\,dx$$

F Integrazione di trigonometriche (principalmente seno e coseno) e e^x

Nel caso in cui un integrale contenga seno e coseno oppure e^x (o anche entrambi), si cerca di integrare per parti in modo tale da avere a destra dell'uguale lo stesso integrale di partenza: così possiamo portarlo dall'altra parte e dividere per il coefficiente risultante ed ottenere il risultato dell'integrale.

G Numeri complessi

Forma algebrica e formule di base

$a + ib$
$i^2 = -1$
$z' = a - ib$ (*coniugato*)

Forma trigonometrica e radici

$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \rho e^{i\theta}$
$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$