Esperienza ottica geometrica

Tommaso Miliani

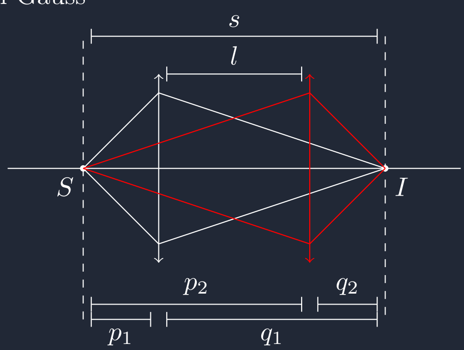
24-10-25

Continuo Esperienza ottica geometrica

1 La soluzione di Gauss

Il problema principale con la configurazione in laboratorio è che il centro di formazione dell'immagine virtuale ha un certo offset rispetto allo zero del nonio: l'allineamento centro della lente - lettura del nonio introduce dunque un errore ϵ per cui bisogna trovare un modo alternativo per poter misurare p e q. Gauss ha proposto una soluzione a questa problematica: se esistesse una configurazione per p e q per cui la legge delle lenti sottili è soddisfatta, allora esiste anche una configurazione simmetrica per cui:

Figura 1: Schematizzazione della soluzione di Gauss



$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=\frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{p_2}+\frac{1}{q_2}=\frac{1}{f}$$
$$\implies p_1=q_2 \ \wedge \ q_1=p_2$$

Ossia si invertono le distanze rispetto alla lente convergente considerata. Posso dunque pensare che se si disponesse la lente ad una certa distanza $p_2 \neq p_1$, si otterrebbe una situazione in cui la stessa sorgente S possa far formare la stessa immagine in I. Posso ora introdurre delle lunghezze (diverse da p e q, ma comunque loro funzione) che io conosco a priori e che sono definite come

1. $s = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$: ossia la distanza tra la sorgente e l'immagine;
2. $l = p_2 - p_1 = q_1 - p_1$: ossia la distanza tra le due lenti nelle due differenti configurazioni.

Con queste definizioni e con la legge delle lenti sottili si ottiene un sistema per cui, conosciuto s e l, posso ottenere p_1 e q_1:

$$\begin{cases} s = p_1 + q_1 \\ l = q_1 - p_1 \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \end{cases}$$

Dunque, risolvendo, si esprimono p_1 e q_1:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{s+l}{2} \\ p_1 = \frac{s-l}{2} \end{cases}$$

Adesso possiamo sostituire queste nella legge delle lenti sottili:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{s-l} + \frac{2}{s+l} = \frac{4s}{s^2-l^2} \implies f = \frac{s^2-l^2}{4s}$$

Ossia l'espressione della focale della lente in funzione di soli s ed l.

2 Applicazione della soluzione di Gauss all'esperienza geometrica

Per poter trovare s e l per porci nelle condizioni della soluzione di Gauss, ii possono ora indicare le posizioni:

- I_1^N la posizione misurata con il nonio dell'oculare quando la sorgente virtuale coincide con il crocefilo dell'oculare: ossia quando per il nostro occhio è a fuoco. Ci possiamo immaginare che a causa della differente posizione tra il nonio ed il crocefilo ci sia un certo ϵ di differenza tra le due posizioni.
- I_1^V diventa la posizione vera della sorgente virtuale rispetto alla scala graduata della guida.

Dato che c'è questo offset rispetto alla formazione dell'immagine virtuale, da qualche parte dietro la lente ci sarà un I_2^V dove c'è la formazione dell'immagine vera. Quando l'immagine è a fuoco allora vuol dire che l'immagine vera si sta generando sul crocefilo. I_2^V è dunque l'immagine reale, ossia la posizione dell'immagine vera rispetto alla scala graduata, ovviamente in corrispondenza della I_2^V ci sarà la lettura del nonio che è chiamata come I_2^N, ossia la posizione misurata dal nonio dell'oculare quando l'immagine è a fuoco. Dunque posso dire che

$$s = I_2^V - I_1^V$$

E, per l'offset di ϵ:

$$I_1^N = I_1^V + \epsilon$$
$$I_2^N = I_2^V + \epsilon$$

Per ricavare le misure vere bisogna fare in modo da ottenere una espressione per ϵ attraverso la distanza s:

$$s = (I_2^N - \epsilon) - (I_1^N - \epsilon)$$

Ho dunque legato la distanza tra due posizioni che non conosco, ma che sono traslate della medesima quantità; dunque, posso determinare la distanza come

$$s = I_2^N - I_1^N$$

Ossia semplicemente la distanza tra le due posizioni trovate dall'oculare. Bisogna ora trovare la distanza l e determinare se effettivamente esiste sempre questa distanza per la quale si ottiene la situazione simmetrica nella soluzione di Gauss. Dato un certo s, c'è una condizione matematica per la quale ci sono solamente certi valori di s per cui si osserva la formazione dell'immagine. Fissata la focale f e dato s, posso ora ricavare la distanza l in funzione delle altre due:

$$l^2 = s^2 - 4sf$$

In questo modo posso ottenere che se $s^2 - 4sf \geq 0$, allora l^2 ha una soluzione. Posso allora risolvere la disequazione (considerando che s è positivo in quanto è una distanza):

$$s(s - 4f) \geq 0 \implies s \geq 4f$$

Dunque la formazione di questa situazione simmetrica è possibile solamente per questa condizione. Dire che $s = 4f$, equivale a porci nel caso limite in una configurazione $2f - 2f$. Si pone il nonio e la lente misurando la prima posizione e poi la seconda in modo tale che la sorgente virtuale e l'oculare siano fissati e si deve spostare le lenti per far sì che si veda sempre a fuoco l'immagine

2.1 Le lenti dell'esperienza

Si possono determinare le posizioni vere e misurate dal nonio delle lenti con un altro offset diverso

- L_1^V: posizione vera della prima lente
- L_1^N: posizione dello zero del nonio della prima lente
- L_2^V: posizione vera della seconda lente

- L_2^N: posizione dello zero del nonio della seconda lente

Posso allora chiamare ϵ' l'incertezza tra le due misure e dunque posso ottenere la relazione

$$L_2^V = L_2^N + \epsilon'$$
$$L_1^V = L_2^N + \epsilon'$$

Dunque posso ottenere la distanza tra le due lenti l con la stessa procedura che si è utilizzato per determinare s:

$$l = L_2^V - L_1^V = L_1^N - L_1^N$$

3 Presa delle misure

Ci sono due metodi di misura:

Primo metodo Scegliere la posizione per cui un osservatore vede a fuoco l'immagine e leggere il nonio (per cui ci sarà l'errore di sens del nonio); si sposta dunque l'oculare e ripeto questa misura un certo numero di volte (almeno 5 misure) di I_1. Adesso posso ottenere media e scarto massimo per la posizione

$$I_1 = \overline{I_1} \pm \Delta I_1$$

A questo punto posso posizionare l'oculare ad una posizione fissata rispetto alla guida (la sua incertezza è solo la sens del nonio). Si sceglie quindi I_2 in modo tale che $s \geq 4f$ e si ottiene la posizione

$$I_2 = I_2 \pm \Delta I_2$$

Dove la posizione è misurata una sola volta e l'incertezza è proprio la sensibilità del nonio. Adesso si misura L_1 ossia la posizione per la quale si vede a fuoco l'immagine in I_2 5/6/7 volte in modo che si ottenga

$$L_1 = \overline{L_1} \pm \Delta L_1$$

E la stessa cosa faccio per la posizione della seconda lente

$$L_2 = \overline{L_2} \pm \Delta L_2$$

Si determina ora s come

$$\overline{s} = \overline{I_2} - \overline{I_1} \qquad \Delta s = \Delta I_1 + \Delta I_2$$
$$\implies s = \overline{s} + \Delta s$$

E lo stesso si fa per l:

$$\overline{l} = \overline{L_2} - \overline{L_1} \qquad \Delta l = \Delta L_1 + \Delta L_2$$
$$\implies l = \overline{l} + \Delta l$$

Adesso posso riprendere la formulazione che mi permette di trovare f:

$$f = \frac{s^2 - l^2}{4s}$$

Dunque per determinare $\overline{f}$ posso determinare i valori $\overline{l}$ e $\overline{s}$ e sostituirli mentre per l'incertezza si fa la propagazione degli errori:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial s}\right| \Delta s + \left|\frac{\partial f}{\partial l}\right| \Delta l$$

E dunque si ottiene

$$\Delta f = \left|\frac{1}{4} + \frac{l^2}{4s^2}\right| \Delta s + \left|\frac{l}{2s}\right| \Delta l$$

Bisogna anche assicurarsi che si riesca sempre a vedere l'immagine anche spostando indietro l'oculare perché in questo modo si è più suscettibili al cattivo allineamento dei componenti ottici: si verifica che l'asse ottico sia ben allineato prima di procedere con la determinazione delle altre misure di f_i. Ogni sperimentatore può ottenere il valore di f e della sua incertezza; si verifica dunque che tutte le misure di f siano consistenti tra di loro entro le rispettive barre di errore. Posso prendere la media pesata e confrontarla con le singole incertezze (dovrebbe essere minore).

Figura 2: Queste misure della focale sono consistenti tra di loro