Analisi II - Spazi Metrici e Normati

Marco Delton[*]

November 2025

1. Sia (X, d) spazio metrico. Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y \in X$
$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
Provare che (X, d) è spazio metrico.

2. Sia $X = \mathbb{R}^2$. $\forall x, y \in X$ definiamo:
$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se x,y sono collineari in } \mathbb{R}^2 \\ |x| + |y| & \text{altrimenti} \end{cases}$$
   - Provare che d è una metrica su $\mathbb{R}^2$
   - Descrivere graficamente le palle di D

3. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ t.c. $d(x, y) = \arctan(|x - y|)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
   - Provare che $(\mathbb{R}, d)$ è spazio metrico
   - Stabilire se è completo

4. Sia $X = C^0([0, 1])$. Sia $|| \cdot ||_{L^2} = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$
Provare che $|| \cdot ||_{L^2}$ è una norma su X

   Suggerimento: Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

5. Sia $(\mathbb{R}, d\varepsilon)$ spazio metrico. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$.
Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni:
   - $f(A)$ aperto $\implies$ A$aperto$
   - A aperto $\implies$ f(A)$aperto$
   - $fA)$ chiuso $\implies$ A$chiuso$
   - A chiuso $\implies$ f(A)$chiuso$

[*]esercizi dei prof. *Gabriele Bianchi* e *Chiara Bianchini*

6. Sia $X = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

   - Provare che $\{x_n\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{Q}, d\varepsilon)$
   - Dedurre che $(\mathbb{Q}, d\varepsilon)$ non è uno spazio metrico completo

7. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \textsf{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \textsf{se } x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) \\ 1 & \textsf{se } x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

   - Provare che $\{f_n\}$ è di Cauchy in $\left(C^0([0,1]), d_{L^1}\right)$ con $d_{L^1} = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$
   - Dedurre che $\left(C^0([0,1]), d_{L^1}\right)$ non è completo

8. Sia $X = (0, 1)$. Provare che $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ è una metrica su X

9. Sia $X = \mathbb{R}$. Quali delle seguenbti funzioni sono metriche su X?

- $d(x, y) = \begin{cases} x^3 - y^3 & \textsf{se } x \geq y \\ y - x & \textsf{se } x < y \end{cases}$

   - $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$
   - $d(x, y) = |x - y| + |x^3 + y^3|$
   - $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$