

# FIsica lenti

Tommaso Miliani

06-03-25

## 1 Energia meccanica

Un dominio si dice semplicemente connesso se, presa una curva chiusa la posso deformare fino a farla diventare un punto. Considerato un toroide, se prendo una curva all'interno del dominio, non posso farla collassare in un punto. Se abbiamo un sistema su cui agiscono solo forze conservative, (anche forze non conservative che non fanno lavoro), allora il teorema delle forze vive mi dice che:

$$\delta L = -dV = dK$$

E quindi isolando posso dire che

$$dK = -dV$$

E allora

$$dK + dV = 0$$

Se ho quindi solo forze conservative allora la somma dell'energia potenziale e cinetica non variano: ossia quella somma è costante. La somma di due contributi energetici che danno una costante è chiamata **energia meccanica**.

$$E = K + V \tag{1}$$

Che è uno dei concetti più importanti nella meccanica classica e nella fisica moderna e diventa un concetto fondamentale della fisica in generale. Lo stesso vale se ho due forze conservative considerando la somma delle forze conservative.

$$dE = 0 \tag{2}$$

Se invece ho una forza non conservativa, l'energia meccanica non si conserva: se si avesse una forza non conservativa allora  $\delta L = -dV$  non vale più. INFatti, considerati i contributi energetici delle forze conservative e non si ottiene

$$\begin{aligned} \delta L_{tot} &= \delta L_{cons} + \delta L_{ncons} \\ dK &= - \sum dV_i + \delta L_{ncons} \end{aligned}$$

Quindi se lo porto dall'altra parte ottengo;

$$d(K + \sum dV_i) = \delta L_{ncons}$$

Chiamato allora

$$E = K + \sum dV_i$$

L'energia meccanica non sarà più uguale ad una costante ma uguale al lavoro che compiono le forze non conservative:

$$dE = \delta L_{ncons}$$

Se il lavoro dell'attrito è negativo allora tende a diminuire.

## 2 Le forze conservative in particolare

### 2.1 la forza peso

Se la forza peso è costante allora il suo gradiente è zero poiché non c'è alcuna variazione ed il suo rotore è quindi anche zero. Provando a fare un lavoro infinitesimo o finito provo a trovare l'energia potenziale e provando a fare il gradiente devo trovare la forza di partenza:

$$\begin{aligned} m\vec{g} &= mg\hat{j} \\ d\vec{r} &= dy\hat{j} \\ \delta L &= (m\vec{g}) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Allora:

$$\delta L = -mg\hat{j} \cdot dy\hat{j}$$

Il lavoro finito allora:

$$\int_A^B \delta L = -mg(y_B - y_A) = V(A) - V(B)$$

E' del tutto ragionevole che per un punto generico P che l'energia potenziale sia:

$$V(P) = mg y_P$$

Dato che è definita a meno di una costante, il lavoro è dato dalla differenza delle potenziali e potevo scegliere come riferimento dell'asse y un punto qualunque e non sarebbe cambiato nulla rispetto al risultato. Se aggiungo la stessa quantità sia a  $V(A)$  che a  $V(B)$  allora questa costante che aggiungo si cancella in quanto per definizione l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

$$gradV = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Ottenendo proprio

$$gradV = mg\hat{j}$$

Dato che io per definizione di gradiente:

$$\vec{F} = -gradV \Rightarrow -mg\hat{j}$$

La direzione dell'asse y è un'altra scelta arbitraria che ho fatto a priori nell'esperimento così come l'orientazione degli assi. Ma non cambia niente in quanto fin tanto che seguo le leggi della mano destra posso comunque scegliere qualsiasi sistema di riferimento in qualsiasi verso lo voglia orientare. Nel caso di un corpo in caduta, se pongo come riferimento l'asse z rivolto verso l'alto, allora l'energia meccanica la posso esprimere come:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

A:  $t = 0$  ottengo:

$$z = h \cdot v = 0, E = mgh$$

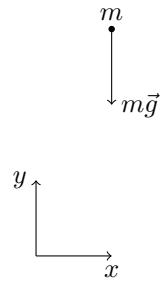
Al tempo finale  $t = t_F$ :

$$z = 0, v = v_f, E = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Allora

$$v_F = \sqrt{2gh}$$

Figura 1: Forza peso



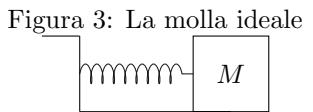
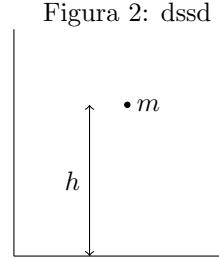
In un moto verticale se avessi usato  $F = ma$  allora si ottiene:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgt \\ \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \dot{z}(m\ddot{z} + mg) &= 0 \end{aligned}$$

Per cui le soluzioni solo:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \end{aligned}$$

CHe vale solo se i vincoli sono onesti ed ideali e se non si muovono. IN generale questa è molto comoda se ho pochi vincoli, altrimenti con la conservazione dell'energia posso considerare sempre un grado di libertà solo.



## 2.2 Forza elastica

Dalla legge della forza elastica:

$$\vec{F}_d = -kx\hat{i}$$

La forza elastica è conservativa e posso vederlo o facendo il rotore oppure attraverso un lavoro infinitesimo:

$$\delta L = \vec{F}_d \cdot d\vec{r} = -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

E allora il lavoro:

$$L_{AB} = \int_A^B -kx dx = -\frac{1}{2}kx_b^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = V(A) - V(B)$$

Questa è proprio la definizione di energia potenziale, allora posso prendere

$$V(P) = \frac{1}{2}kx^2$$

Posso allora determinare il gradiente e quindi si ottiene proprio

$$\text{grad}V = kx\hat{i}$$

Quindi essendo:

$$\vec{F} = -\text{grad}V = -kx\hat{i}$$

Allora abbiamo dimostrato che la forza elastica è proprio una forza conservativa. Dato che è definita a meno di una costante, allora posso cambiare l'origine dell'asse  $x$  e cambierebbe solo la forma dell'energia potenziale ma pur sempre compatibile con quella che abbiamo qui. Se io tirassi la molla nell'istante  $T = 0$  allora l'energia è conservata e quindi in ogni istante posso ricavarne la velocità:

$$\begin{aligned} t = 0, x = x_0, v = 0, E &= \frac{1}{2}kx_0^2 \\ t = t_f, x = 0, v = v_f, E &= \frac{1}{2}mv_f^2 \end{aligned}$$

E quindi la velocità:

$$v_F = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0$$

Con la relazione  $ma = F$  allora:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{dE}{dt} &= 0 \\ \dot{x}(m\ddot{x} + kx) &= 0 \end{aligned}$$

Dato che  $\dot{x}$  non è sempre zero, allora pongo solo:

$$m\ddot{x} = -kx$$

## 2.3 Molla attaccata al soffitto

Allora con le equazioni dell'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

$$v = \dot{x}$$

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx - mg) = 0$$

Figura 4: fes

