Geoemtria rubei

Tommaso Miliani

04-03-25

1 ALtri affini

In questa sezione si elencheranno altre proprietà degli spazi affini

Definizione 1.1. *Due sottospazi affini di un campo K^n si dicono* ***paralleli*** *se uno dei due ha la direzione contenuta nella direzione dell'altro.*

Definizione 1.2. *Sia Z un sottospazio di R^n. Definiamo allora:*

$$Z^\perp = \{v \in R^n : (v, z) = 0, \forall z \in Z\} \tag{1}$$

dove (v, z) denota il prodotto scalare standard di v, z.

Proposizione 1.0.1. *Sia Z un sottospazio vettoriale di R^n. Allora $Z^\perp$ è un sottospazio di R^n e si ha:*

1. $$\dim(Z^\perp) = n - \dim(Z); \tag{2}$$

2. $$R^n = Z sm Z^\perp \tag{3}$$

3. $$(Z^\perp)^\perp = Z; \tag{4}$$

4. $$W \subset Z, Z^\perp \subset W^\perp, W \in R^n \tag{5}$$

Dimostrazione. TODO □

Definizione 1.3. *Siano S_1 e S_2 due sottospazi affini di R^n siano allora*

$$z_1 = \dim(S_1) \qquad z_{"} = \dim(S_2)$$

Dico che S_1 e S_2 sono perpendicolari se valgono le seguenti condizioni

$$Z_1 \subset Z_2^\perp \qquad se \qquad \dim(S_1) + \dim(S_2) \leq n \tag{6}$$

$$Z_1^\perp \subset Z_2 \qquad se \qquad \dim(S_1) + \dim(S_2) \geq n \tag{7}$$

Esempio

Esempio 1.1. *Siano $\Pi_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ e $\Pi_2 = \langle e_2, e_3 \rangle \in R^3$ sono vettoriali e quindi sono anche affini, essendo che la loro somma però è maggiore della dimensione di R, allora devo apllicare le condizioni e quindi ottengo che*

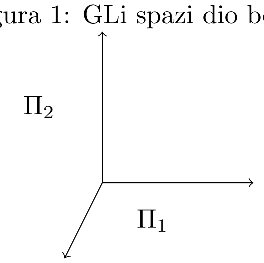
$$Z_1^\perp = \{x \in R^3 : (x, v) = 0 \forall v \in < e_1, e_2 >\} = < e_3 >$$

Allora si ottiene che:

$$Z_1^\perp \subset Z_2$$

QUindi sono perpendicolari.

Figura 1: GLi spazi dio bono



Proposizione 1.0.2. *Supponendo che* $\dim(Z_1) + \dim(Z_2) = n$*, allora*

$$\dim(Z_2^{\perp}) = n - \dim(Z_2) = \dim(Z) \tag{8}$$

e quindi

$$Z_1 = Z_2^{\perp}, Z_1^{\perp} \subset Z_2 \tag{9}$$

Quindi se $\dim(Z_1) + \dim(Z_2) = n$ *allora se vale una delle due vale anche l'altra.*

Proposizione 1.0.3. *Se la nostra direzione è simmetrica con* S_1, S_2 *allora se* $Z_1 \subset Z_2^{\perp}$ *allora* $(Z_2^{\perp})^{\perp} \subset Z_1^{\perp}$ *e quindi* $Z_2 \subset Z_1^{\perp}$*.*

Definizione 1.4 (Proiezione ortogonale di un punto su di un sottospazio affine)**.** *SIa* S *un sottospazio affine di* R^n *e sia* P *un punto che* $\in R^n$*, definisco la proiezione ortogonale di* P *su di* S *e la defnsico come l'unico punto di intersezione tra* S *ed il sottospazio affine*

$$P + (dir(S))^{\perp} \tag{10}$$

Proposizione 1.0.4.

$$S \cap (P + dir(S)^{\perp}) \tag{11}$$

è formato da un solo punto.

Dimostrazione. Posto $S = Q + Z$, dove Q è un punto in R^n e Z un sottospazio affine di R^n allora considero

$$S' = P + Z^{\perp}$$

e voglio dimostrare che

$$S \cap S'$$

E' dato da un punto solo e quindi che $z \in Z, w \in Z^{\perp}$ esistono unici e quindi

$$Q + z = P + w.$$

ossia

$$Q - P = w - z$$

Il primo membro $\in R^n$ e quindi questo è vero perché abbiamo dimostrato che R^n è la somma diretta di $Z + Z^{\perp}$ e quindi ogni elemento è possibile scriverlo come somma diretta di elementi unici. $\square$

Definizione 1.5. *Siano* P *e* Q *due punti di* R^n *definisco allora la loro distanza come la norma ossia il numero reale:*

$$d(P, Q) = |P - Q| \tag{12}$$

Definizione 1.6. *Siano* $A, B \subset R^n$*, si definisce la distanza tra due insiemi come :*

$$d(A, B) = \inf\{d(P, Q) : P \in A, Q \in B\} \tag{13}$$

Ossia l'estremo inferiore di quella distanza.