geometric

Tommaso Miliani

19-03-25

1 Autovettori

Teorema 1.1. *SIa V uno spazio vettoriale su di un campo K, di dimensione finita n e sia $f : V \to V$ lineari. Sia $\lambda \in K$. Affermo allora che λ è radice del polinomio caratteristico se e solo se λ è autovalore di f.*

Dimostrazione. λ è autovalore di f se e solo se

$$\exists v \in V - \{0\} : f(v) = \lambda v.$$

ossia equivale a dire che

$$\exists v \in V - \{0\} : f(v) - \lambda I_V(v) = 0$$

E quindi questo equivale a dire che sono linearmente indipendenti e quindi equivale a dire che il rango meno λ volte l'identità è minore di n.

$$rkM_{B,B}(f - \lambda I_V) < n$$

Ossia è come dire

$$\det(M_{B,B}(f)\lambda I_V) = 0$$

e quindi si ottiene la tesi:

$$P_f(\lambda) = 0$$

□

Proposizione 1.1.1. *Sia $A \in M(n \times n, K)$ dove K è un campo e $n \in N - \{0\}$ allora:*

1. *Il termine di grado zero di P_A è $\det(A)$;*
2. *P_A ha grado n e scrivendo i termini di tutti i gradi si ha:*

$$P_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} \cdots + \det(A) \tag{1}$$

Dimostrazione. Per la prima per calcolare il termine di grado zero basta porre $x = 0$ e quindi il termine di grado zero è proprio il determinante poiché

$$P_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$$
$$(P_A(t) = \det(A - tI_n))$$

Per la seconda si procede per induzione su n:

$$n = 1, \qquad A = (a), \qquad P_A(t) = \det((a) - tI_n)$$

Allora si ottiene, per la matrice $A, n \times n$:

$$P_A(t) = \det(A - tI_n) = \det(\dots)$$

Sviluppando per la prima colonna e moltiplicando per la matrice complementare si ottiene il determinante.

□

Proposizione 1.1.2. *Sia* $A \in M(n \times n, K)$ *se*

$$P_A(t) = (\lambda_1 - t) \dots$$

allora

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \tag{2}$$
$$tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \tag{3}$$

Dimostrazione. Per la proposizione appena vista il polinomio caratteristico di A è proprio:

$$P_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} tr(A) t^{n-1} \dots$$

Ma per ipotesi io so che:

$$P_A(t) = (\lambda_1 - t) \dots = (-t)^n$$

E allora è dimostrata. □

Definizione 1.1. *Sia* V *uno spazio vettoriale su di un campo* K*, allora se* f *è l'applicazione lineare su quello spazio e* λ *un suo autovalore allora definisco* ***autospazio di*** f ***relativo a*** λ *il seguente sottospazio vettoriale di* dV*:*

$$\ker(f - \lambda I_V) \tag{4}$$

che coincide con

$$\{v \in V : v \text{ autovettore di } f \text{ con autovalore } \lambda\} \cup \{0_V\}$$

I due insiemi sono uguali perché

$$v \in Ker(f - \lambda I_V) \Leftrightarrow (f - \lambda I_V)(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) - \lambda I_V(v) = 0 \Leftrightarrow f(v) = \lambda v$$

Definizione 1.2. *Si definisce* ***molteplicità geometrica di*** λ *come la dimensione dell'autospazio e si indica come* $m_g(\lambda)$*. Per cui* λ *è autovalore per* f *se e solo se* $m_g(\lambda) \geq 1$*.*

Definizione 1.3. *Supponiamo adesso che la definizione di* V *sia finita, allora posso definire* ***molteplicità algebrica di*** λ *il massimo* $s \in N$ *rale che:*

$$(t - \lambda)^s \tag{5}$$

divide p_f *e si denota come* $m_a(\lambda)$*.Per cui* λ *è autovalore per* f *se e solo se* $m_a(\lambda) \geq 1$*.*