



# Indice

<b>I</b>	<b>Vettori e cinematica</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Calcolo vettoriale</b>	<b>7</b>
1.1	Grandezze scalari e vettoriali . . . . .	7
1.2	Definizioni vettoriali e operazioni base . . . . .	7
1.3	Versori . . . . .	8
1.4	Scomposizione di vettori . . . . .	8
1.5	Prodotto scalare . . . . .	8
1.6	Prodotto vettoriale . . . . .	9
1.7	Rappresentazione cartesiana ortogonale . . . . .	9
1.8	Equivalenza tra rappresentazioni vettoriali . . . . .	10
1.9	Espressioni cartesiane delle operazioni tra vettori . . . . .	10
1.10	Derivazione di vettori . . . . .	10
1.11	Derivate di versori e di vettori . . . . .	11
1.12	Momento di un vettore applicato . . . . .	12
1.13	Vettore posizione e sistemi di coordinate . . . . .	12
1.13.1	coordinate polari piane . . . . .	12
1.14	Coordinate polari sferiche . . . . .	13
1.15	Coordinate polari cilindriche . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Cinematica</b>	<b>15</b>
2.1	I fondamenti della cinematica . . . . .	15
2.1.1	Sistemi di riferimento . . . . .	15
2.1.2	Equazioni vettoriali di un moto: traiettoria e legge oraria . . . . .	15
2.2	La velocità . . . . .	15
2.2.1	Il concetto di velocità ed il suo vettore . . . . .	15
2.2.2	Rappresentazione della velocità . . . . .	16
2.3	L'accelerazione . . . . .	17
2.3.1	Rappresentazione dell'accelerazione . . . . .	18
2.4	I moti elementari . . . . .	19
2.4.1	Moti con $\dot{s}$ costante . . . . .	19
2.4.2	Moti con $\ddot{s}$ costante . . . . .	19
2.5	I moti rettilinei . . . . .	20
2.6	Moti circolari . . . . .	20
2.6.1	Geometria e versori intrinseci della traiettoria . . . . .	20
2.6.2	Moto circolare uniforme . . . . .	21
2.6.3	Moto circolare uniformemente vario . . . . .	21
2.6.4	Grandezze angolari . . . . .	21
2.6.5	Periodicità del moto circolare uniforme . . . . .	22
2.6.6	Equazioni differenziali del moto circolare uniforme . . . . .	22
2.7	Moto oscillatorio armonico . . . . .	22
2.8	Moto piano in coordinate polari . . . . .	23
2.9	Moto con accelerazione costante: La caduta dei gravi . . . . .	24
2.10	Leggi di trasformazione della velocità ed accelerazione . . . . .	25
2.11	Giustificazione delle relazioni della velocità ed accelerazione nei moti relativi . . . . .	26
2.11.1	Derivate dei vettori nei moti relativi . . . . .	26
2.11.2	Dimostrazione formula velocità relativa . . . . .	27
2.11.3	dimostrazione formula accelerazione relativa . . . . .	27

<b>II</b>	<b>Dinamica e lavoro</b>	<b>28</b>
<b>3</b>	<b>Principi della dinamica</b>	<b>29</b>
3.1	Forza e definizione operativa . . . . .	29
3.2	Principi della dinamica . . . . .	29
3.3	Dinamica di Fletcher . . . . .	29
3.3.1	Il filo ideale . . . . .	30
3.3.2	Macchina di Atwood . . . . .	31
3.4	La molla ideale . . . . .	31
3.4.1	Il caso specifico: una molla attaccata al soffitto . . . . .	32
3.5	Moto del pendolo semplice (o pendolo matematico) . . . . .	33
3.6	Caduta di un filo con massa . . . . .	34
3.6.1	Focus su equazioni differenziali lineari omogenee con coefficienti costanti . . . . .	35
3.7	SDR non inerziali e esempi . . . . .	35
3.7.1	Il caso del pendolo sul treno . . . . .	36
3.7.2	Ascensore accelerato . . . . .	36
3.7.3	Il caso della piattaforma ruotante con $\vec{\omega} = 0$ . . . . .	37
3.7.4	Il caso della guida . . . . .	38
3.8	Il sistema di riferimento terrestre . . . . .	38
<b>4</b>	<b>L'Energia ed il lavoro</b>	<b>40</b>
4.1	Il lavoro . . . . .	40
4.2	Il teorema delle forze vive . . . . .	41
4.2.1	Teorema delle forze vive nel piano inclinato . . . . .	42
4.2.2	L'attrito nel teorema delle forze vive . . . . .	42
4.3	Definizione di campo conservativo . . . . .	42
4.4	Energia meccanica . . . . .	44
4.5	Forze conservative e loro esempi . . . . .	45
4.5.1	La forza peso . . . . .	45
4.5.2	Forza elastica . . . . .	46
4.5.3	Molla attaccata al soffitto . . . . .	47
4.6	Le forze centrali a simmetria sferica . . . . .	48
4.6.1	Forze a simmetria sferica non centrali . . . . .	48
4.6.2	Forze centrali non a simmetria sferica . . . . .	48
4.6.3	La forza di richiamo di una molla vista come forza centrale a simmetria sferica . . . . .	49
4.6.4	Piattaforma ruotante con $\vec{\omega} = 0$ . Risoluzione mediante il teorema delle forze vive . . . . .	49
4.6.5	Il sistema dell'antimolla . . . . .	50
4.7	Studio dell'equilibrio del sistema . . . . .	50
4.7.1	L'equilibrio nel pendolo . . . . .	50
4.7.2	L'equilibrio di una molla sul soffitto . . . . .	51
4.7.3	L'equilibrio nell'antimolla (Non da fare) . . . . .	52
4.8	Studio del moto con un piccolo spostamento dall'equilibrio . . . . .	52
<b>III</b>	<b>Dinamica dei sistemi e corpo rigido</b>	<b>54</b>
<b>5</b>	<b>Dinamica dei sistemi</b>	<b>55</b>
5.1	Sistemi non approssimabili ad un punto materiale . . . . .	55
5.2	Centro di massa nelle figure complesse . . . . .	56
5.2.1	Le figure piane . . . . .	56
5.2.2	Il centro di massa nelle figure solide: l'esempio del cono . . . . .	56
5.3	Quantità di moto . . . . .	57
5.3.1	Esempio di sistema isolato . . . . .	58
5.4	Il Momento angolare . . . . .	58
5.5	Seconda equazione cardinale della dinamica . . . . .	58
5.5.1	Il cambio di polo(rinuncia agli studi) . . . . .	59
5.5.2	Esempio per un sistema di due punti . . . . .	60
5.6	Le forze parallele . . . . .	60
5.6.1	Il centro delle forze parallele . . . . .	60
5.6.2	Il caso della forza peso . . . . .	61
5.7	Lavoro ed energia nei sistemi. Teoremi di Konig . . . . .	61

5.7.1	Teorema di Konig per l'energia cinetica . . . . .	62
5.7.2	Teorema di Konig per il momento angolare . . . . .	62
5.7.3	Il momento angolare del moto circolare uniforme . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Il corpo rigido</b>	<b>64</b>
6.1	Introduzione al concetto di corpo rigido . . . . .	64
6.2	Statica e dinamica del corpo rigido . . . . .	64
6.2.1	Moto rotatorio di un corpo rigido . . . . .	64
6.2.2	Moto di rotolamento puro . . . . .	65
6.2.3	Il moto dei punti interni alla circonferenza: la cicloide . . . . .	66
6.2.4	Esempio di statica del corpo rigido . . . . .	66
6.2.5	La carrucola fissa . . . . .	66
6.2.6	Il problema della scala . . . . .	67
6.2.7	Momenti angolari per casi particolari . . . . .	67
6.3	Il momento assiale e il momento di inerzia . . . . .	68
6.4	Il teorema di Huygens-Steiner e calcolo di vari momenti di inerzia . . . . .	69
6.4.1	Il momento di inerzia di una sbarra omogenea sottile . . . . .	69
6.4.2	Il rettangolo omogeneo . . . . .	70
6.4.3	Il parallelepipedo omogeneo . . . . .	70
6.4.4	Il cerchio omogeneo . . . . .	70
6.4.5	Il momento rispetto al cilindro . . . . .	71
6.4.6	La sfera omogenea . . . . .	71
6.5	Utilizzo dei principi del corpo rigido a situazioni fisiche . . . . .	72
6.5.1	Estensione della macchina di Fletcher con la carrucola reale . . . . .	72
6.5.2	La macchina di atwood reale attaccata al soffitto . . . . .	73
6.5.3	Il pendolo fisico (o composto) . . . . .	73
6.6	Il moto di rotolamento . . . . .	74
6.7	Carrucole mobili . . . . .	75
6.8	L'espressione del tensore di inerzia . . . . .	76
6.9	Momento del corpo rigido rispetto ad un asse . . . . .	77
6.10	Conservazione dell'energia e lavoro nei corpi rigidi . . . . .	78
6.10.1	Pendolo fisico . . . . .	79
6.10.2	Moto di rotolamento . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Gli urti</b>	<b>80</b>
7.1	L'impulso e gli urti . . . . .	80
7.1.1	Definizione di urto e forze in gioco . . . . .	80
7.1.2	E' sempre possibile trascurare le forze non impulsive? . . . . .	81
7.1.3	Dimostrazioni . . . . .	81
7.2	Urto unidimensionale tra due corpi . . . . .	81
7.2.1	Casi particolari dell'urto unidimensionale . . . . .	82
7.3	Urto bidimensionale . . . . .	82
<b>IV</b>	<b>Gravitazione universale</b>	<b>84</b>
<b>8</b>	<b>La gravitazione universale</b>	<b>85</b>
8.1	La gravitazione . . . . .	85
8.1.1	La prima di Keplero . . . . .	85
8.1.2	Seconda di Keplero . . . . .	85
8.1.3	La terza di Keplero . . . . .	86
8.2	In coordinate polari . . . . .	86
8.3	Momento angolare e l'inerzia delle forze . . . . .	87
8.4	La forza di gravità di un guscio sferico . . . . .	87
8.5	La gravità di una sfera piena . . . . .	88
8.6	Il moto dei razzi . . . . .	89
<b>A</b>	<b>Esercizi</b>	<b>90</b>
A.1	Esercizio su moodle (DPM) . . . . .	90
A.1.1	Esercizio di esame febbraio 2021 . . . . .	91
A.2	Esercizio esame novembre 24 . . . . .	92

# Le grandezze fisiche

## Grandezze e loro misurazione

L'insieme delle operazioni volte ad associare un numero ad una grandezza fisica si chiama **misurazione** e rende possibile e non ambigua ogni valutazione di uguaglianza o disuguaglianza tra due grandezze della stessa specie. Ogni misura, seppur ottenuta con strumenti diversi, ci consente di ottenere un rapporto con la misura di un'altra scelta come *unità di misura*. Le misure in fisica si definiscono in **modo operativo** ossia attraverso l'utilizzo di molteplici sistemi di misura volti a dare la medesima misura.

## Metodi di misurazione

Il modo per ottenere un numero associato ad una grandezza è quello di confrontare *direttamente* la grandezza con l'unità di misura, in questo modo si ottiene il rapporto tra le due che definisce la misura effettiva. La misurazione diretta richiede innanzitutto l'introduzione di un criterio di confronto per definire l'uguaglianza, un criterio per la def. della somma e la scelta di un campione come unità di misura. Un'altro tipo di misurazione è quella **strumentale**, che utilizza strumenti già precedentemente tarati. Infine c'è anche una misurazione **indiretta**, attraverso le relazioni tra grandezze fisiche.

## Dimensioni delle grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si possono classificare come **fondamentali** o **derivate**. Tradizionalmente nella meccanica le grandezze di lunghezza (L), massa (M) e tempo (T) sono definite come fondamentali e le altre derivate da esse.

Indicando con  $[L]$ ,  $[M]$ ,  $[T]$  le dimensioni delle grandezze fisiche, si ottiene che esse sono in relazione nella seguente maniera:

$$[L] = [L^1 M^0 T^0]; \quad [M] = [L^0 M^1 T^0]; \quad [T] = [L^0 M^0 T^1].$$

Le grandezze con potenza zero non contribuiscono alle dimensioni e possono essere tralasciate. Alla stessa maniera si definiscono quelle derivate come superficie e volume:

$$[S] = [L^2 M^0 T^0] = [L^2]; \quad [V] = [L^3 M^0 T^0] = [L^3].$$

Le grandezze nelle quali gli esponenti sono tutti nulli prendono il nome di **adimensionali**, un esempio sono gli angoli:

$$\alpha = \frac{s}{R} \text{ (arco e Raggio).}$$

In ogni legge le dimensioni di entrambi i membri devono sempre essere uguali.

## Sistemi di unità di misura

Multipli e sottomultipli dei sistemi decimali:

Ordine	Nome	Simbolo	Ordine	Nome	Simbolo
10	deca	da	$10^{-1}$	deci	d
$10^2$	etto	h	$10^{-2}$	centi	c
$10^3$	kilo	k	$10^{-3}$	milli	m
$10^6$	mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^9$	giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^{12}$	tera	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^{15}$	peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{18}$	exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{21}$	zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{24}$	yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y

## Tempo

La definizione di tempo è spiegata negli appunti di chimica, e grazie a tale definizione si è in grado di distinguere intervalli molto piccoli di tempo da  $10^{-26} - 10^{17} s$ . Tutto ciò che va sopra o sotto tali intervalli non ha senso. Si potrebbe supporre che il tempo sia continuo, ma la meccanica quantistica ci spiega che in realtà molte grandezze che sembravano continue, in realtà sono quantizzate, come la carica dell'elettrone o l'energia associata ad una radiazione. Il tempo in fisica classica è tuttavia assoluto ed uniforme, mentre nella fisica reale non è così.

## Lunghezza

Nella fisica classica lo spazio è *eucideo*, ed il metro è definito tra ordini di grandezza  $10^{-18} - 10^{26} m$ , sebbene recentemente si è associato la misura più piccola possibile nell'universo come la lunghezza di Planck.

## Massa

Definita tra gli intervalli  $10^{-31} - 10^{55} kg$ , la massa è in realtà doppiamente definita, da una parte si definisce massa *inerziale* e *gravitazionale*.

## Misure ed indeterminazione

A livello macroscopico potremmo accontentarci di una imprecisione dell'ordine di  $10^{-6}$  metri, ed il che potrebbe anche essere sufficiente per la maggior parte delle misure, tuttavia nel mondo microscopico tale precisione risulterebbe essere un errore macroscopico. Se si tentasse di misurare direttamente un elettrone, la natura ci mostrerebbe uno strano comportamento: se si trovasse accuratamente la sua posizione, avremmo una forte incertezza sulla sua velocità e così anche all'inverso. Questo comportamento segue la legge di Heisenberg:

$$\Delta x \Delta q_x \geq \frac{h}{4\pi}.$$

dove  $h = 6.62606896 \cdot 10^{-34} Js$ . A livello macroscopico l'incertezza sulla quantità di moto è irrilevante e in moltissimi casi nemmeno misurabile neanche dagli strumenti più sensibili.

Parte I

Vettori e cinematica

# Capitolo 1

## Calcolo vettoriale

### 1.1 Grandezze scalari e vettoriali

I numeri come la massa, il tempo o la temperatura in fisica sono chiamate grandezze **scalari** e si differenziano dalle grandezze **vettoriali** poiché quest'ultime non possono solo essere descritte da un numero ma anche da una direzione e da un verso.



Un vettore ha tre caratteristiche fondamentali:

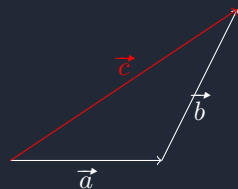
1. **modulo**: ossia l'intensità;
2. **direzione**: ossia la direzione nello spazio verso cui è orientato;
3. **verso**: ossia il verso di tale direzione.

I vettori possono essere sia **liberi** se non sono fissati su una loro origine, altrimenti **applicati** quando hanno un'origine ben definita.

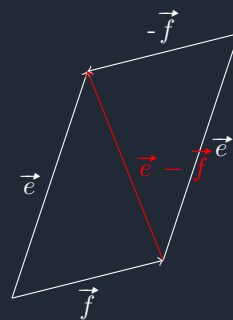
### 1.2 Definizioni vettoriali e operazioni base

Due vettori sono uguali quando hanno stesso modulo, direzione e verso, sono **opposti** se  $\vec{b} = -\vec{a}$ . La somma tra due vettori gode della proprietà **commutativa** e **associativa**, inoltre la somma avviene sommando le componenti dei vettori, la sottrazione è uguale alla somma di un vettore con l'inverso del secondo:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

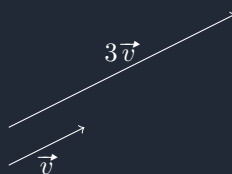


$$\vec{d} = \vec{e} - \vec{f}$$



Il prodotto tra un vettore ed uno scalare è così definito ed ha le seguenti proprietà:

$$\vec{a} = \lambda \vec{v}.$$



1.  $\lambda(\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a}) = (\mu\lambda)\vec{a}$ ;
2.  $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ ;
3.  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ ;
4.  $\lambda\vec{a} = 0 \Rightarrow \lambda = 0$  oppure  $\vec{a} = 0$ .

### 1.3 Versori

Il rapporto tra un vettore qualsiasi  $\vec{a}$  ed il suo modulo è per definizione un vettore adimensionale e prende il nome di **versore**:

$$\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (1.1)$$

e quindi, dato che il vettore è sia vincolato al modulo che ad una direzione ed un verso, allora si può esprimere un vettore in relazione al proprio versore, il quale, indica esattamente la direzione ed il verso del vettore

$$\vec{a} = a\hat{u}_a \quad (1.2)$$

Così come per un vettore, possiamo esprimere una retta orientata come un vettore, anche una retta orientata è caratterizzata da un versore  $\hat{u}$  e coincide con il versore di un qualsiasi vettore parallelo alla retta stessa e con verso concorde e quindi tutti i vettori che hanno la direzione di tale retta si può esprimere come

$$\vec{a} = \lambda\hat{u}$$

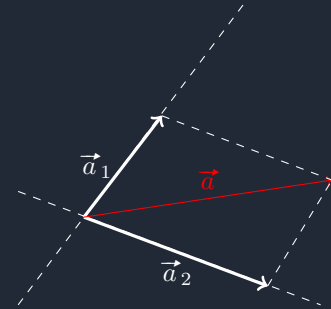
Il numero  $\lambda$  è chiamato **parte scalare** di  $\vec{a}$ .

### 1.4 Scomposizione di vettori

Un qualsiasi vettore  $\vec{a}$  può essere espresso come somma dei versori  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  se è complanare al piano  $\sigma$  individuato dai versori stessi, per cui:

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = a_1\hat{u}_1 + a_2\hat{u}_2$$

Da notare che i versori si chiamano *i componenti* e non *le componenti*, in quanto le componenti di un vettore sono le parti scalari che lo compongono, mentre i componenti sono i versori del vettore. Se  $\vec{a}$  non giacesse sul piano, allora sarebbe necessario un versore non complanare.



### 1.5 Prodotto scalare

Il prodotto scalare è anche definito come prodotto interno tra due vettori poiché opera sullo stesso piano di appartenenza dei vettori utilizzando l'angolo tra di essi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos(\theta). \quad (1.3)$$

Le proprietà del prodotto scalare sono le seguenti:

1. commutativa (simmetrica)  $(\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a})$ ;
2. distributiva bilineare  $(\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c})$ ;
3.  $\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Il prodotto scalare tra due vettori è quindi considerato come il prodotto del modulo di uno qualsiasi di essi per la proiezione ortogonale dell'altro sul primo. Dimostrazioni delle tre proprietà:

1. La prima è ovvia in quanto

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= ab \cos \theta \\ \vec{b} \cdot \vec{a} &= ba \cos \theta \end{aligned}$$

Che sono ovviamente uguali.

2. Indicando con  $\hat{u}_a$  il versore del vettore  $\vec{a}$  dobbiamo dimostrare allora che

$$a((\vec{b} + \vec{c}) \cdot \hat{u}_a) = ab_a + ac_a \implies (\vec{b} + \vec{c}) \cdot \hat{u}_a = b_a + c_a$$

ossia è dimostrata.

- 3.

$$\vec{a} \cdot \lambda \vec{b} = a \cdot \lambda b \cos \theta$$

$$\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda ab \cos \theta$$

Che sono ovviamente uguali.

## 1.6 Prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale invece è il prodotto di un vettore per un altro e dà come risultato un terzo vettore ortogonale al piano individuato tra i due.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}. \quad (1.4)$$

Ha le seguenti caratteristiche:

1. Il modulo del nuovo vettore è  $c = ab|\sin(\theta)|$ ;
2. Direzione  $\perp$  al piano di  $\vec{a}, \vec{b}$ ;
3. Verso nel quale disporsi determinato dalla rotazione antioraria del primo vettore sul secondo (se  $< \pi$ ), determinato con la regola della mano destra.

Questa definizione di prodotto vettoriale fissa una direzione convenzionale per il nuovo vettore  $\vec{c}$ : tale convenzione è chiamata **regola della mano destra** e si può affermare allora che il verso del prodotto vettoriale (se l'incide è  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  è il medio) è dato dal pollice. Adesso, dalla definizione di prodotto vettoriale è implica

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0; \quad \vec{a} \times (\lambda \vec{a}) = 0$$

E quindi valgono le seguenti proprietà:

1. anticommutativa:  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ;
2. distributiva:  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ ;
3.  $\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ .

Le cui dimostrazioni sono le seguenti:

1. La prima deriva dalla convenzione della rotazione imposta: infatti, scambiando l'ordine dei vettori, per ottenere un risultato uguale dobbiamo invertire la rotazione della mano e quindi si inverte il verso.
2. E' ovvia
- 3.

$$c = a\lambda b|\sin \theta|$$

$$c = \lambda(ab \sin \theta)$$

che sono uguali.

## 1.7 Rappresentazione cartesiana ortogonale

Il sistema di coordinate più utilizzato consiste nell'utilizzo di tre rette orientate passanti per uno stesso punto O chiamato origine e  $\perp$  tra loro  $x, y, z$  ed i cui versori sono  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ : ossia la terna cartesiana destra. Una retta orientata sulla quale sia stato definito un punto specifico detto *origine* prende il nome di **asse**, e quindi le tre rette e lo spazio che identificano prende il nome di **terna cartesiana ortogonale**.

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad \vec{v} = \begin{cases} v_x = \vec{v} \cdot \hat{i} = v \cos(\alpha) \\ v_y = \vec{v} \cdot \hat{j} = v \cos(\beta) \\ v_z = \vec{v} \cdot \hat{k} = v \cos(\gamma) \end{cases}$$

Dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono gli angoli che il vettore forma rispettivamente con l'asse  $x, y, z$ .

## 1.8 Equivalenza tra rappresentazioni vettoriali

Col teorema di Pitagora si ricava che:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.5)$$

e quindi il versore di questo vettore sarà

$$\hat{u}_v = \cos(\alpha)\hat{i} + \cos(\beta)\hat{j} + \cos(\gamma)\hat{k}.$$

Si può ricavare, dalle espressioni cartesiane ortogonali le espressioni dei **coseni direttori**, ossia le espressioni per il coseno degli angoli che forma ogni componente con ogni asse.

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad \cos \beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \quad (1.6)$$

e quindi si ricava

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

## 1.9 Espressioni cartesiane delle operazioni tra vettori

Dati due vettori, espressi in componenti cartesiane ortogonali,  $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$  e  $\vec{w} = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$ , valgono le seguenti:

1.  $\vec{v} + \vec{w} = (v_x + w_x)\hat{i} + (v_y + w_y)\hat{j} + (v_z + w_z)\hat{k}$ ;
2.  $\vec{v} = \vec{w} \Leftrightarrow v_x = w_x, \quad v_y = w_y, \quad v_z = w_z$ ;
3.  $\lambda\vec{v} = \lambda v_x\hat{i} + \lambda v_y\hat{j} + \lambda v_z\hat{k}$ ;
4.  $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ ;
- 5.

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

6.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} = (v_y w_z - v_z w_y)\hat{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\hat{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\hat{k}.$$

## 1.10 Derivazione di vettori

Prendendo un vettore in funzione di qualche variabile tipo:  $\vec{w} = \vec{w}(t)$ , la sua derivata sarà:

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{w}(t + \Delta t) - \vec{w}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{w}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Se si utilizza un sistema di coordinate cartesiane ortogonali i cui versori non dipendono dal tempo, la funzione vettoriale

$$\vec{w}(t) = w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k}$$

dove la dipendenza dalla variabile tempo è univocamente determinata da quelle delle tre componenti scalari. In questo caso la derivazione della funzione vettoriale si riduce alla derivata rispetto al tempo delle componenti. Si hanno allora le seguenti proprietà con relative dimostrazioni

1.

$$\frac{d}{dt}(\vec{w}(t) + \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} + \frac{d\vec{v}(t)}{dt};$$

2.

$$\frac{d}{dt}(\lambda(t)\vec{w}(t)) = \frac{d\lambda(t)}{dt}\vec{w}(t) + \lambda(t)\frac{d\vec{w}(t)}{dt};$$

3.

$$\frac{d}{dt}(\vec{w}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) + \vec{w}(t) \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt};$$

4.

$$\frac{d}{dt}(\vec{w}(t) \times \vec{v}(t)) = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \times \vec{v}(t) + \vec{w}(t) \times \frac{d\vec{v}(t)}{dt};$$

5.

$$\vec{w}(t) = \vec{w}(s(t)) \implies \frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \frac{d\vec{w}(s)}{ds} \frac{ds}{dt};$$

6.

$$d\vec{w}(t) = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} dt$$

E' il differenziale di  $\vec{w}$  il quale rappresenta l'incremento della funzione nell'intervallo infinitesimo  $dt$ .

## 1.11 Derivate di versori e di vettori

Sia  $\Delta\phi$  l'angolo di rotazione corrispondente ad un  $\Delta t$  positivo e quindi, la derivata del versore  $\hat{u}$  di un vettore  $\vec{v}$ , per  $\Delta t \rightarrow 0$  e  $\Delta\phi \rightarrow 0$ , si ha che  $\Delta\hat{u}$  tende ad essere  $\perp$  rispetto a  $\hat{u}(t)$  e come verso il verso dalla parte in cui ruota  $\hat{u}$ , ossia la direzione di  $\hat{n}$  e per quanto riguarda il modulo si osserva che, dato che  $u = 1$ ,  $|\Delta\hat{u}| = 2u \sin \frac{\Delta\phi}{2}$ :

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta\phi} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Passando ora al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$  si ha:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\phi}{2}}{\frac{\Delta\phi}{2}} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}.$$

Si ottiene dunque la seguente relazione, in quanto il versore  $\hat{n}$  è il versore perpendicolare al versore  $\hat{u}$  e che dà il verso al versore e giace sul piano  $\sigma$  contenente  $\hat{u}(t)$  e  $\hat{u}(t + dt)$  perpendicolare a  $\hat{u}$  dalla parte di  $\hat{u}(t + dt)$  e  $\frac{d\phi}{dt}$  è una quantità positiva.  $\Delta\hat{u}$ :

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n}.$$

Per caratterizzare la rotazione di  $\hat{u}$  si utilizza invece un'altro vettore  $\vec{w}$  che ha modulo  $\frac{d\phi}{dt}$ , direzione  $\perp$  al piano dei due vettori e verso tale da individuare la rotazione del versore di partenza:  $\vec{w} = \hat{u} \times \hat{n}$ . Si dimostra quindi che:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \hat{n} = \vec{w} \times \hat{u}. \quad (1.8)$$

Questa è vera perché per le definizioni date  $\hat{w}$  ed il versore  $\vec{w}$  si ha che

$$\vec{w} = \frac{d\phi}{dt} \hat{u}_w \quad \hat{u}_w = \hat{u} \times \hat{n}$$

I versori  $\hat{u}, \hat{n}, \hat{u}_w$  costituiscono una terna ortogonale destra. Di conseguenza si ha che  $\hat{u}_w \times \hat{u} = \hat{n}$  e quindi si ha che

$$\vec{w} \times \hat{u} = \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{u}_w \times \hat{u} = \left( \frac{d\phi}{dt} \right) \hat{n} = \frac{d\hat{u}}{dt}$$

Si osservi che moltiplicando vettorialmente tutti i membri per  $\hat{u}$  si ottiene facilmente che

$$\vec{w} = \hat{u} \times \frac{d\hat{u}}{dt}$$

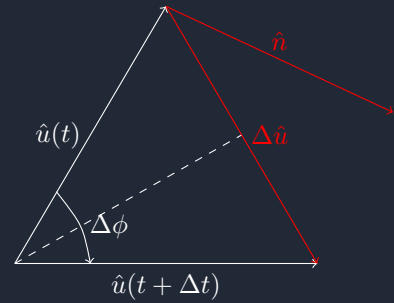
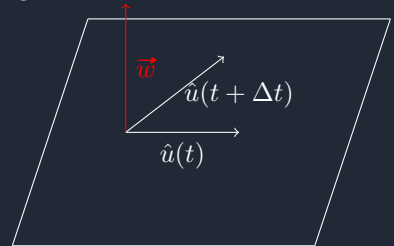


Figura 1.1: Direzione del vettore  $\vec{w}$



Preso però un generico vettore  $\vec{z}(t)$  anche il modulo può dipendere dal tempo e dunque purché sia definito il suo versore ed il suo modulo non sia nullo allora

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{d}{dt}(z\hat{u}_z) = \frac{dz}{dt}\hat{u}_z + z\frac{d\hat{u}_z}{dt} = \frac{dz}{dt}\hat{u}_z + z\vec{w} \times \hat{u}_z$$

quindi:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = \frac{dw}{dt}\hat{u}_w + \vec{w} \times \vec{z} \quad (1.9)$$

## 1.12 Momento di un vettore applicato

Conoscere il punto di applicazione di un vettore è fondamentale per alcune grandezza come il lavoro oppure il momento torcente etc... Un vettore  $\vec{v}$  applicato (in A) rispetto ad un punto  $\Omega$  chiamato *polo*, è il vettore libero definito come:

$$\vec{m} = \vec{r} \times \vec{v}. \quad (1.10)$$

Dove  $\vec{r} = \overrightarrow{\Omega A}$ , il momento è  $\perp$  al piano e individuato dai due vettori del prodotto vettoriale e ha come modulo  $m = rv \sin(\theta)$ . Mostriamo ora come il momento non dipenda dal polo, ma dalla posizione della retta di applicazione rispetto al polo stesso: presi i due vettori  $\vec{r} = \overrightarrow{\Omega A}$ ,  $\vec{v}$ , consideriamo un punto B che appartiene alla retta su cui giace  $\vec{v}$ , il quale è traslato in modo da essere applicato in B invece che in A. Il momento risultante sarà dunque:

$$\vec{m}' = \overrightarrow{\Omega B} \times \vec{v} = (\overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{AB}) \times \vec{v} = \overrightarrow{\Omega A} \times \vec{v} = \vec{m}.$$

in quanto i due vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli. Ne consegue che il momento non cambia se spostiamo il punto di applicazione del vettore lungo la sua retta di azione.

Si definisce **momento assiale** di  $\vec{v}$  rispetto ad un asse di versore  $\hat{u}$  la grandezza scalare:

$$m_u = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{u} \quad (\text{con } \vec{r} = \overrightarrow{\Omega A}).$$

La posizione di  $\Omega$  sulla retta d'azione non cambia il momento assiale del vettore. Il momento assiale (se il vettore  $\vec{m}$ ) è parallelo all'asse  $z$ , diventa:

$$m_z = \vec{m} \cdot \hat{k} = (\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \hat{k}.$$

Per esplicitare  $m_z$  possiamo utilizzare il determinante del prodotto vettoriale, ossia moltiplicare il versore  $\hat{k}$  con ciascuno degli elementi della prima riga del determinante e quindi

$$m_z = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ r_x & r_y & r_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = r_x v_y - r_y v_x$$

In pratica per calcolare il momento assiale, si considerano solo i contributi su quell'asse e si ignorano quelli sugli altri assi, dunque possiamo concludere che il momento assiale di un vettore rispetto ad una retta assegnata si annulla se e solo se il vettore è parallelo alla retta o la retta d'azione del vettore incontra la retta.

## 1.13 Vettore posizione e sistemi di coordinate

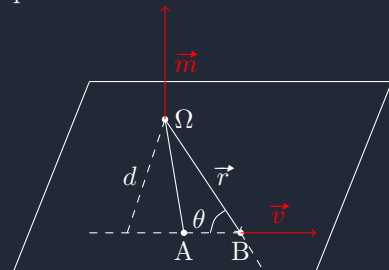
Il vettore posizione è un vettore particolare poiché è definito a partire da un origine nella quale il suo modulo è pari a zero. Nei sistemi di coordinate curvilinee ortogonali il vettore posizione può essere scomposto nelle sue tre componenti:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (1.11)$$

Le sue componenti rispetto ai versori degli assi si chiamano **coordinate cartesiane**.

### 1.13.1 coordinate polari piane

Figura 1.2: Il momento di un vettore applicato in A rispetto ad un certo polo  $\Omega$



Su un piano cartesiano, oltre all'utilizzo delle coordinate cartesiane, si può utilizzare anche un sistema di coordinate che fa utilizzo di una coppia di scalari che esprimono la distanza dall'origine, anche chiamata **polo**, e l'angolo del vettore posizione  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ . Ogni punto sul piano possiede una coppia di versori chiamati *versore radiale* che è il versore del vettore posizione ed il *versore trasverso* che è il versore della tangente in P alla circonferenza di raggio OP.

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (1.13)$$

La dipendenza da  $\hat{u}_r$  e da  $\hat{u}_\theta$  da  $\theta$  è data dalla geometria della relazione tra i versori polari:

$$\begin{cases} \hat{u}_r = (\hat{u}_r \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_r \cdot \hat{j})\hat{j} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j} \\ \hat{u}_\theta = (\hat{u}_\theta \cdot \hat{i})\hat{i} + (\hat{u}_\theta \cdot \hat{j})\hat{j} = -\sin(\theta)\hat{i} + \cos(\theta)\hat{j} \end{cases} \quad (1.14)$$

Si ottengono anche le derivate di questi versori:

$$\frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = \hat{u}_\theta \quad \frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = -\hat{u}_r \quad (1.15)$$

Che si dimostra esprimendo tale vettore in termini di versori che non dipendano dalla variabile rispetto a cui si deriva. Nel nostro caso si utilizzano le relazioni per i versori e dato che  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  che non sono funzioni dell'angolo.

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \hat{u}_\theta \\ \frac{d\hat{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\hat{i} - \sin\theta\hat{j} = -\hat{u}_r \end{cases}$$

## 1.14 Coordinate polari sferiche

E' un sistema di coordinate che si basa sulla scelta di un origine O, una asse che prende il nome di **asse polare** e di un semipiano  $\sigma$  di riferimento contenente tale asse. Le superfici individuate sono:

1. Le sfere individuate dal loro raggio  $\vec{r}$ ;
2. Il semicono con vertice O e base il cerchio su cui è poggiato il punto P e caratterizzato dalla colatitudine  $\theta$ ;
3. I semipiani passanti per l'asse polare e caratterizzati dalla longitudine  $\phi$

Le coordinate del punto P sono quindi esprimibili attraverso il  $\vec{r}$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , mentre il vettore nel punto è scomponibile in tre componenti:  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  e  $\vec{u}_\phi$ , che sono rispettivamente perpendicolari alle superfici sferica, conica e al semipiano. Questa terna di vettori prende il nome di **terna locale** in quanto dipende dal punto P scelto. Nel caso in cui l'asse polare coincida con z ed il semipiano passi per  $y = 0$ , le coordinate di P sono:

$$P = \begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases} \quad (1.16)$$

Si ottiene allora che il versore  $\hat{u}_r$  sarà dato da:

$$\hat{u}_r = \sin\theta \cdot \cos\phi\hat{i} + \sin\theta \cdot \sin\phi\hat{j} + \cos\theta\hat{k} \quad (1.17)$$

E che le espressioni cartesiane degli altri versori sono:

$$\hat{u}_\theta = \cos\theta \cdot \cos\phi\hat{i} + \cos\theta \cdot \sin\phi\hat{j} - \sin\theta\hat{k} \quad (1.18)$$

$$\hat{u}_\phi = -\sin\theta\hat{i} + \cos\phi\hat{j} \quad (1.19)$$

## 1.15 Coordinate polari cilindriche

Figura 1.3: Relazione tra versori polari piani e cartesiani

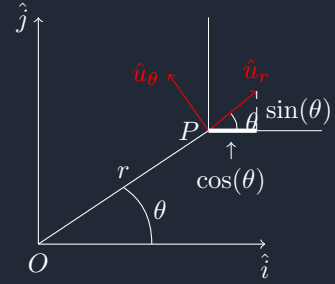
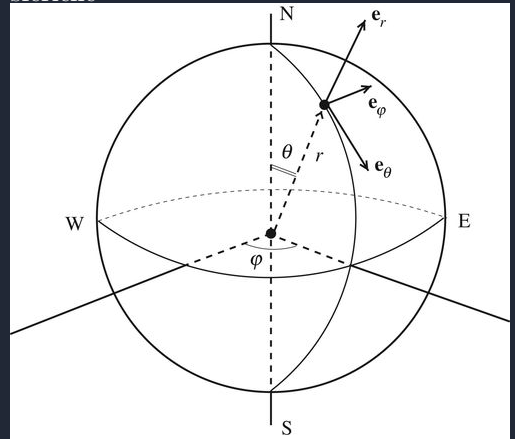


Figura 1.4: Versori delle coordinate polari sferiche



Analogamente alle coordinate polari sferiche, le coordinate polari cilindriche si basano sulla scelta di una retta orientata  $Oz$  di riferimento e di un semipiano  $\sigma$  di riferimento contenente tale asse. Si chiama ora  $\pi$  il semipiano passante per  $O$  e  $\perp Oz$ , le superfici sono:

1. I piani paralleli al piano  $\pi$  individuati dalla quota  $z$  dove il vettore  $\vec{P}_z$  è  $\perp$ ;
2. Le superfici cilindriche con asse di simmetria  $Oz$  definite dal raggio  $\vec{r}$  della sezione normale del cilindro; alla superficie cilindrica per  $P$  è  $\perp \vec{P}_r$ ;
3. I semipiani passanti per  $Oz$  caratterizzati dall'angolo  $\theta$  formati con  $\sigma$  ai quali sono  $\perp \vec{P}_\theta$

Le coordinate cilindriche di un punto generico sono date dagli scalari appena visti che individuano le coordinate che si intersecano in  $P$ . Le relazioni sono dunque:

$$P = \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1.20)$$

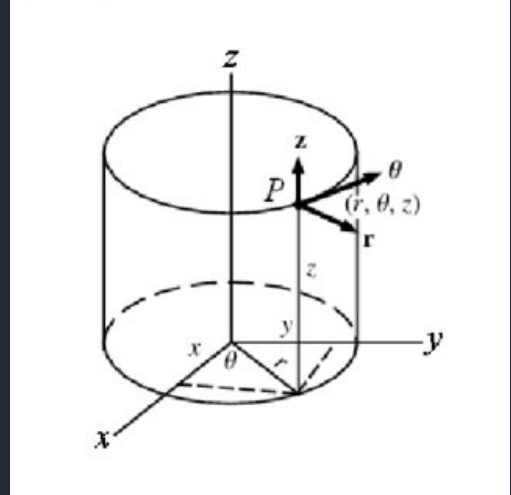
Allora la rappresentazione dei tre versori è dunque:

$$\hat{P}_z = \hat{k} \quad (1.21)$$

$$\hat{P}_r = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \quad (1.22)$$

$$\hat{P}_\theta = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \quad (1.23)$$

Figura 1.5: Coordinate polari cilindriche



# Capitolo 2

## Cinematica

### 2.1 I fondamenti della cinematica

#### 2.1.1 Sistemi di riferimento

Il concetto di moto presuppone l'esistenza di qualcos'altro su cui fare riferimento. La scelta di un sistema di riferimento è arbitraria e sistemi di riferimento più semplici e comodi permettono di giungere a conclusioni in modo semplice e veloce. Un sistema di riferimento è composto da corpi, osservatori, regoli e orologi tutti fissi gli uni rispetto agli altri.

I corpi possono avere le più varie forme dimensioni e caratteristiche anche se in molte situazioni è possibile adottare una schematizzazione che consiste nel trascurare le dimensioni geometriche e di ridurre un corpo ad un punto geometrico in cui è concentrata tutta la massa che prende il nome di **punto materiale**. Questa approssimazione è accettabile quando le dimensioni sono trascurabili rispetto alle distanze che vengono percorse e non influiscono in maniera rilevante sulle caratteristiche del moto.

#### 2.1.2 Equazioni vettoriali di un moto: traiettoria e legge oraria

Si dice che un corpo è in moto rispetto ad un dato sistema di riferimento  $S$  quando la sua posizione in  $S$  cambia nel tempo. Nello schema di un punto materiale le caratteristiche sono fornite dalla conoscenza del vettore posizione  $\vec{r}$  in funzione del tempo.

Nell'ipotesi che il tempo sia continuo, si può affermare che:

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}(t + \Delta t)| \rightarrow 0, \quad \text{per } \Delta t \rightarrow 0$$

E questo ci porta a definire moti complessi continui esprimendo il vettore posizione in funzione del tempo:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (2.1)$$

La funzione vettoriale è anche rappresentabile mediante le tre funzioni scalari:

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

Con queste informazioni si può costruire la **traiettoria** del corpo, ossia l'insieme delle posizioni occupate in certi istanti di tempo. A livello geometrico questa è un caso particolare della rappresentazione in forma parametrica di una curva nello spazio. Per separare l'aspetto geometrico da quello cinematico si usa la **rappresentazione intrinseca di un moto**: supponiamo di conoscere la traiettoria  $\gamma$  di un punto materiale e supponiamo di creare una successione di segmenti infinitesimi definendo un'origine  $\Omega$ , un verso e un'unità di misura. Ad ogni punto  $P$  si fa corrispondere  $s$  ossia un numero reale chiamato **ascissa curvilinea** e sarà positivo o negativo a seconda se si trova dopo o prima di  $\Omega$ . Grazie ad  $s$  possiamo ricavare l'**equazione della traiettoria** e l'equazione  $s = s(t)$  ci fornisce la **legge oraria**.

Figura 2.1: L'Ascissa curvilinea



### 2.2 La velocità

#### 2.2.1 Il concetto di velocità ed il suo vettore

Osservando un dato moto con una macchina fotografica che scatta delle foto ogni  $\Delta\tau$  secondi, si osserva una certa regolarità che è più evidente nei casi in cui si diminuisca  $\Delta\tau$ ; ci si aspetta dunque che la curva formata dal moto goda di certe proprietà di regolarità. Con riferimento ad un esperimento di lancio di una pallina orizzontalmente, si osserva che la pallina sembra compiere due moti distinti, uno verticale (quadratico) ed uno orizzontale (lineare), con queste assunzioni possiamo considerare due istanti:  $t' = t + \Delta t$ . Poste come  $P$  e  $P'$  le posizioni occupate dalla pallina negli istanti  $t$  e  $t'$  e posti  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{r}(t')$  i corrispondenti vettori posizione rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento, possiamo ricavare una prima informazione sul moto come

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t') - \vec{r}(t)$$

Naturalmente si tratta di un'informazione sulla velocità media su quanto è accaduto tra i due istanti di tempo e non ci dà informazioni su come si sia mossa la pallina tra i due istanti, se abbia seguito una traiettoria retta oppure una parabola...

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

La **velocità media** non dipende dal percorso ma dalle posizioni iniziali e finali. Si ottengono più informazioni però dal vettore **velocità istantanea** al ridursi di  $\Delta t$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Si conclude, tenendo a mente la derivata di un vettore, che  $\vec{v}$  è:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

Le caratteristiche generali di questo vettore sono ottenute dall'analisi del moto di un corpo, in modo da ottenere la curva  $\gamma$  con opportune approssimazioni ed interpolazioni. Si osserva per ipotesi, che la velocità istantanea è esattamente parallela allo spostamento  $\overrightarrow{PP'}$  e ha quindi la direzione della retta che interseca  $\gamma$  in  $P$  e  $P'$ . In altri termini:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{PP'}|}{|\Delta s|} = 1$$

### 2.2.2 Rappresentazione della velocità

Dati due punti  $P$  e  $P'$  della curva individuate dalle ascisse curvilinee  $s$  ed  $s' = s + \Delta s$  e detto  $\Delta\vec{r}$  il vettore  $\overrightarrow{PP'}$ , si considera il rapporto  $\Delta\vec{r}/\Delta s$  e il suo limite per  $\Delta s \rightarrow 0$ . Questo vettore ha la direzione della secante e il verso concorde con gli archi crescenti. Il limite tende ad assumere la direzione della tangente alla curva in  $P$  ed ad avere modulo unitario con verso concorde con quello dell'orientamento della curva. Esso è dunque il **versore tangente** alla curva orientata e si esprime come:

$$\hat{u}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

Si può stabilire il legame tra della velocità con le equazioni della traiettoria e con la legge oraria tenendo conto del ruolo di variabile intermedia fra  $\vec{r}$  e  $t$  giocato da  $s$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_t \quad (2.3)$$

Questa mostra che il modulo è dato da  $|\frac{ds}{dt}|$  ed il verso di  $\vec{v}$  coincide con  $\hat{u}_t$  e la grandezza:

$$v_s = \frac{ds}{dt}$$

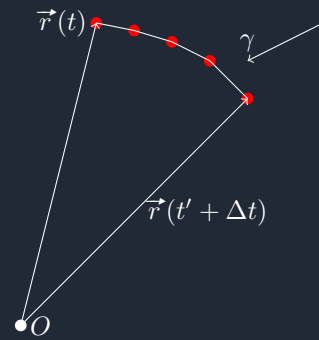
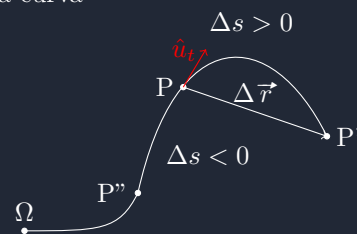


Figura 2.2: Costruzione del versore tangente alla curva



è chiamata **parte scalare** della velocità rispetto al versore  $\hat{u}_t$  ed è chiamata anche **velocità scalare**:

$$\vec{v} = v_s \quad \hat{u}_t = \dot{s} \hat{u}_t$$

Essendo a conoscenza della dell'equazione oraria del moto si può determinare l'equazione della velocità scalare ad ogni istante con la derivazione rispetto al tempo.

Si è detto come il moto possa considerarsi la successione di di spostamenti infinitesimi  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  in intervalli temporali  $dt$  e tali spostamenti hanno direzione e verso uguale alla velocità istantanea e modulo proporzionale a  $dt$ . Lo **spazio percorso** è quindi la somma delle lunghezze degli archi infinitesimi percorsi  $|ds| = |\vec{v}| dt = v dt$ , ossia l'integrale della velocità:

$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)| dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (\text{spazio percorso}) \quad (2.4)$$

Essendo lo spazio percorso per definizione non negativo (può essere nullo tuttavia), questa quantità è in genere diversa dalla somma degli archi infinitesimi  $ds$  ossia dall'integrale definito della velocità scalare, che dà la differenza fra i valori iniziali e finali dell'ascissa curvilinea:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v_s(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{dt} dt = \int_{s_1}^{s_2} ds \quad (2.5)$$

La quale potrebbe essere nulla anche se il corpo è in movimento.

Oltre che alla forma intrinseca, la velocità si rappresenta anche in forma cartesiana a seconda del sistema di coordinate usato per il vettore posizione nel sistema scelto. In un sistema di riferimento con origine O,  $\vec{r}$  ha la rappresentazione cartesiana e quindi dato che i versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  degli assi coordinati non dipendono da  $t$ , si può scrivere:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} \quad (2.6)$$

Le componenti cartesiane di  $\vec{v}$  sono dunque le derivate rispetto al tempo delle corrispondenti componenti del vettore posizione.

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

e quindi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k}$$

Il modulo è quindi calcolabile come:  $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

## 2.3 L'accelerazione

Durante il moto il vettore  $\vec{v}$  non resta costante al trascorrere del tempo ma cambia poiché variano il suo modulo, la sua direzione orientata o entrambi. Se ad un dato istante  $t$  la velocità è  $\vec{v}(t)$  e all'istante  $t' = t + \Delta t$  la velocità è  $\vec{v}(t')$  si definisce **accelerazione media** nell'intervallo  $\Delta t$  il vettore:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Questa grandezza vettoriale ci da informazioni sull'accelerazione media e sul cambiamento del vettore velocità in un certo intervallo di tempo. Quando questo intervallo di tempo si riduce, allora si considera l'accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Questo essendo il limite del rapporto incrementale della velocità è la **derivata prima del vettore velocità**:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (2.7)$$

L'espressione cartesiana dell'accelerazione è dunque:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x} \hat{i} + \ddot{y} \hat{j} + \ddot{z} \hat{k}$$

Con le parti scalari dell'accelerazione che si esprimono come:

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z} \end{cases}$$

### 2.3.1 Rappresentazione dell'accelerazione

Il vettore accelerazione riflette le diverse possibili variazioni elementari del vettore velocità; in generale il vettore  $\vec{a}$  è esprimibile come la somma di due componenti distinte: una parallela alla velocità e collegata alla rapidità di variazione della sua parte scalare e un'altra perpendicolare alla velocità dipendente dalla rapidità di variazione della sua direzione.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_s \hat{u}_t) = \frac{dv_s}{dt} \hat{u}_t + v_s \frac{d\hat{u}_t}{dt} \quad (2.8)$$

Allora dato che  $v_s = \frac{ds}{dt}$  si ha che la componente tangenziale:

$$\vec{a}_t = \frac{d^2 s}{dt^2} \hat{u}_t = \ddot{s} \hat{u}_t \quad (2.9)$$

Tale componente ha lo stesso verso di  $\hat{u}_t$  se la velocità scalare cresce. Esso è il componente di  $\vec{a}$  che riflette le variazioni del modulo e/o del verso di  $\vec{v}$  e viene anche detto componente tangenziale di  $\vec{a}$  chiamata **accelerazione tangenziale**.

Per ottenere un'espressione più significativa del secondo componente di  $\vec{a}$  si esplicita la derivata di  $\hat{u}_t$  rispetto al tempo: dato che il versore tangente  $\hat{u}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$  dipende dalla scelta del verso positivo per le ascisse curvilinee sulla traiettoria, e non dalle effettive caratteristiche istantanee del moto, conviene esprimere la dipendenza di  $\hat{u}_t$  dal tempo attraverso la variazione di  $\hat{u}_t$  al cambiare di  $s$ :

$$\frac{d\hat{u}_t}{dt} = \frac{d\hat{u}_t}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\hat{u}_t}{ds}$$

La derivata del versore  $\hat{u}_t$  rispetto a  $s$  è la caratteristica intrinseca della traiettoria dipendente dalle sue proprietà locali in P; con il medesimo procedimento si trova, data la definizione di derivata di un versore:

$$\frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \hat{u}_n \quad (\text{vettore } \perp)$$

Dalla geometria un elemento di curva attorno ad un generico punto P può essere approssimato con un elemento di arco di circonferenza, il cui cerchio associato è detto *cerchio osculatore* e ha il centro nel **centro di curvatura** della curva P e raggio  $\rho$  mentre la curvatura è data da  $1/\rho$ . La retta  $\perp$  alla tg in P della curva è chiamata normale principale e il versore della sua direzione è proprio  $\hat{u}_n$ . Tutte queste proprietà sono locali poiché dipendono dal punto P. Poiché  $d\phi$  è uguale all'angolo  $\frac{ds}{\rho}$  sotto il quale viene visto l'elemento di arco di curva dal centro di curvatura si ha allora che:

$$\frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \dot{s} \hat{u}_n \quad (2.10)$$

Allora sostituendo nell'espressione di  $\vec{a}_t$  si ottiene:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = a_t \hat{u}_t + a_n \hat{u}_n = \dot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (2.11)$$

La componente normale dell'accelerazione è  $\vec{a}_n$  ed è sempre non negativa per cui  $\vec{a}_n$  punta sempre al centro di curvatura; essa è chiamata allora **accelerazione centripeta** ed è esprimibile come:

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_n \quad (2.12)$$

Quindi  $\vec{a}_n$  è presente in ogni moto su traiettoria non rettilinea e ogni moto di curva è dunque accelerato. Nella sua rappresentazione intrinseca (ossia con i versori), l'accelerazione ha modulo:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Non si potrebbe introdurre un terzo vettore, chiamato per esempio strappo che determina la velocità di variazione dell'accelerazione? Sì, potremmo indicarlo come:  $\vec{b} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d^3 \vec{r}}{dt^3}$  ma come si vedrà nel capitolo della dinamica, l'accelerazione è l'unica direttamente legata ai fenomeni e alle interazioni con l'ambiente che determinano il moto di un corpo.

Figura 2.3: Cerchio osculatore

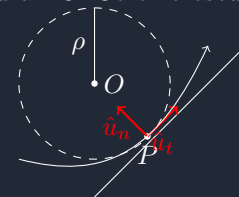
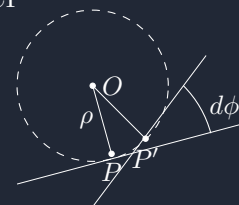


Figura 2.4: L'angolo  $d\phi$  fra le tangenti in P e P' è uguale all'angolo al centro formato da CP e CP'



## 2.4 I moti elementari

Le due relazioni:

$$\begin{cases} \vec{v} = \dot{s}\hat{u}_t \\ \vec{a} = \ddot{s}\hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{u}_n \end{cases} \quad (2.13)$$

ci permettono di definire in modo semplice i moti elementari su traiettoria nota poiché riescono a separare l'aspetto cinematico da quello geometrico della traiettoria nel piano.

Fissando l'attenzione sull'equazione oraria si possono definire diverse classi di moti:

1. Moti uniformi ( $\dot{s}$  costante);
2. Moti uniformemente vari (con  $\ddot{s}$  costante);
3. Moti rettilinei ( $\rho \rightarrow \infty$ );
4. Moti circolari ( $\rho$  costante).

### 2.4.1 Moti con $\dot{s}$ costante

La ricerca della funzione  $s(t)$  di cui è nota la derivata, equivale a trovare una primitiva di  $\dot{s}(t)$  e farne l'integrale indefinito:

$$s(t) = \int \dot{s}(t)dt + c \quad (2.14)$$

nel caso in cui  $\dot{s}$  sia costante si ha che:

$$s(t) = \dot{s}_0 t + c$$

Il valore  $c$  si determina a conoscenza dell'ascissa curvilinea  $s_0 = s(t_0)$  ad un certo istante  $t_0$  e quindi:

$$s(t) - s(t_0) = \dot{s}_0(t - t_0) \Rightarrow s(t) = \dot{s}_0(t - t_0) + s_0$$

Ossia l'equazione oraria del moto uniforme. Se invece si ha che  $t_0 = 0$  allora:

$$s = \dot{s}_0 t + s_0 \quad (2.15)$$

da cui si deduce che nel moto uniforme il punto materiale percorre archi di traiettoria di uguale lunghezza in tempi uguali. Si ottiene lo stesso risultato con il processo di separazione di variabili:

$$\begin{aligned} ds &= \dot{s}_0 dt \\ \int ds &= \int \dot{s}_0 dt = \dot{s}_0 \int dt \end{aligned}$$

E quindi l'ultima equazione ci da nuovamente l'equazione di moto.

### 2.4.2 Moti con $\ddot{s}$ costante

In questo caso si ha che  $\frac{d\dot{s}}{dt} = \ddot{s}_0$  e separando le variabili  $\dot{s}$  e  $t$  si ha che  $d\dot{s} = \ddot{s}_0 dt$ . Scelto allora  $t_0 = 0$  ed integrando per separazione di variabili si ottiene:

$$\dot{s} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

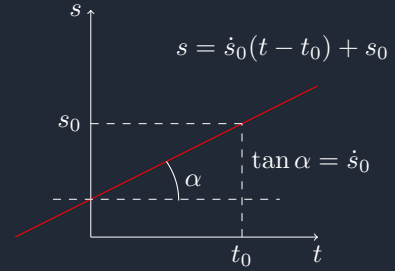
Ossia la legge oraria con cui varia nel tempo la velocità scalare e che può essere scritta come

$$\frac{ds}{dt} = \ddot{s}_0 t + \dot{s}_0$$

per cui separando le variabili ed integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} ds &= \ddot{s}_0 t dt + \dot{s}_0 dt \Rightarrow \int ds = \int \ddot{s}_0 t dt + \int \dot{s}_0 dt = \ddot{s}_0 \int t dt + \dot{s}_0 \int dt \\ \Rightarrow s &= \frac{1}{2} \ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 \end{aligned}$$

Figura 2.5: Diagramma orario del moto uniforme



Ossia la legge oraria dei moti uniformemente vari. Estendendo il caso generale con  $(t - t_0)$  si ottiene quindi le due relazioni:

$$\begin{cases} \dot{s} = \dot{s}_0(t - t_0) + \dot{s}_0 \\ s = \frac{1}{2}\dot{s}_0(t - t_0)^2 + \dot{s}_0(t - t_0) + s_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Eliminando dunque  $t$  si ottiene l'utile relazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2\dot{s}_0(s - s_0) = v_0^2 + 2a_t(s - s_0)$$

## 2.5 I moti rettilinei

Il moto rettilineo è di gran lunga il moto più importante poiché qualsiasi moto in tre dimensioni può essere visto come la composizione dei moti rettilinei rispetto ai tre assi cartesiani con  $\hat{u}_t$  parallelo alla velocità e parallelo alla accelerazione e spostamenti. Due casi particolari sono il **moto rettilineo**, con lo scalare  $v_0$  costante

$$x(t) = v_0 t + x_0 \quad (2.17)$$

e il moto **uniformemente accelerato**, il quale, partendo dalla formulazione generale

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \quad (2.18)$$

si può ottenere l'equazione che esprime la dipendenza temporale dalla parte scalare della velocità:

$$\dot{x}(t) = a_0 t + v_0$$

## 2.6 Moti circolari

### 2.6.1 Geometria e versori intrinseci della traiettoria

Scegliendo un asse cartesiano con origine centrata al centro del cerchio che descrive la traiettoria del moto circolare, si hanno le equazioni parametriche del moto circolare in termini di  $\theta$  nella forma:

$$x = R \cos \theta; \quad y = R \sin \theta; \quad z = 0.$$

Durante il moto il vettore posizione ha modulo costante  $R$  e come versore:

$$\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{R} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$$

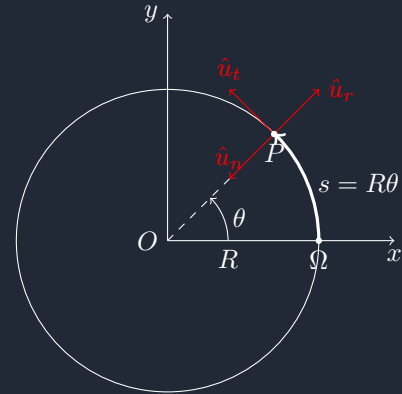
Assunto sulla circonferenza un sistema di coordinate curvilinee con origine  $\Omega$  e orientazione *antioraria* si ha che lo spostamento  $s$  è dato da  $R\theta$  se si considera un sistema di riferimento con origine in  $\Omega$ , mentre la traiettoria è rappresentata da:

$$\vec{r}(s) = R \cos \frac{s}{R} \hat{i} + R \sin \frac{s}{R} \hat{j} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} \quad (2.19)$$

In ogni punto della traiettoria i *versori tangente*  $\hat{u}_t$  e *normale*  $\hat{u}_n$  sono diretti come in figura. Dato che il centro  $O$  coincide con il centro della circonferenza, e che il raggio  $R$  sia il raggio delle circonferenza in questione, si ha che:

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\hat{u}_r}{d\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \\ \hat{u}_n &= R \frac{d\hat{u}_t}{ds} = \frac{d\hat{u}_t}{d\theta} = -\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j} = -\hat{u}_r \end{aligned}$$

Figura 2.6: Ascissa curvilinea  $s$  ed angolo di rotazione  $\theta$  nel moto circolare



### 2.6.2 Moto circolare uniforme

Se la velocità scalare e anche  $\dot{\theta} = v_0/R$  è costante allora il moto è uniforme e vale:

$$\theta(t) = \frac{v_0}{R}(t - t_0) + \theta_0 \quad (2.20)$$

Essendo allora  $\ddot{s} = 0$  l'accelerazione ha solo la componente normale:

$$\vec{a} = \frac{\dot{s}^2}{R} \hat{u}_n = \frac{v_0^2}{R} \hat{u}_n$$

Così come per i moti vari, l'accelerazione è solo centripeta per cui in questo moto è costante in modulo ma non in direzione. Considerato il caso  $\theta_0 = 0$  e sia  $\dot{\theta}_0 = \omega > 0$  allora il punto materiale all'istante  $t = 0$  si trova in  $\Omega$  e si muove sulla circonferenza con velocità scalare  $v_0 = \omega R$ . Essendo allora  $\theta = \omega t$  e  $s = \omega R t$  si trovano le seguenti espressioni per  $\vec{r}(t)$  derivando rispetto al tempo per  $\vec{v}(t)$  e  $\vec{a}(t)$ :

$$\begin{cases} \vec{r} = R \cos(\omega t) \hat{i} + R \sin(\omega t) \hat{j} \\ \vec{v} = -\omega R \sin(\omega t) \hat{i} + \omega R \cos(\omega t) \hat{j} = \omega R \hat{u}_t \\ \vec{a} = -\omega^2 R \cos(\omega t) \hat{i} - \omega^2 R \sin(\omega t) \hat{j} = -\omega^2 \vec{r} \end{cases} \quad (2.21)$$

### 2.6.3 Moto circolare uniformemente vario

In questo caso la velocità scalare varia linearmente nel tempo e l'equazione oraria si trasforma come:

$$s(t) = \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + s_0 \quad (2.22)$$

Oppure l'analogia

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \frac{a_0}{R} (t - t_0)^2 + \frac{v_0}{R} (t - t_0) + \theta_0 \quad (2.23)$$

### 2.6.4 Grandezze angolari

Il moto circolare introduce nuove grandezze cinematiche e la sua comodità è quella di avere il vettore posizione  $\vec{r}$  costante nel tempo per cui la sua derivata:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) \quad (2.24)$$

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \hat{k} = \dot{\theta} \hat{k}. \quad (2.25)$$

Dove  $\hat{k}$  è un versore  $\perp$  al piano del moto: il vettore  $\vec{\omega}(t)$  è chiamato **velocità angolare** e caratterizza la rapidità di variazione nel tempo della direzione del vettore  $\vec{r}$ . Dalla definizione discende che la velocità angolare ha il verso di  $\hat{k}$  se la variazione è positiva altrimenti il verso opposto.

In un moto circolare generico il modulo ed il verso di  $\omega$

cambiano col tempo ma la direzione è sempre la stessa, il vettore **accelerazione angolare** è definito come:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \hat{k} = \ddot{\theta} \hat{k} \quad (2.26)$$

che è  $\perp$  al piano del moto. Anche l'accelerazione  $\vec{a}$  si esprime in funzione delle grandezze angolari:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Per cui si ottiene l'espressione dell'accelerazione mediante la velocità e l'accelerazione angolari:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (2.27)$$

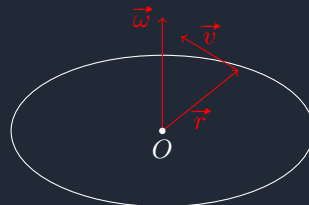
Se l'origine del sistema di riferimento è proprio il centro della circonferenza allora si può esprimere come:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad (2.28)$$

E nel moto circolare uniforme si riduce a  $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$ .

Le definizioni della velocità e dell'accelerazione angolari possono essere estese a traiettorie non circolari e eventualmente anche non piane assumendo in tal caso che il punto materiale si muova lungo un arco infinitesimo di un cerchio osculatore.

Figura 2.7: Relazioni tra i vettori nel moto circolare con centro in  $O$



### 2.6.5 Periodicità del moto circolare uniforme

Dopo aver ruotato di  $2\pi$  i vettori  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$  si ripetono periodicamente, e proprio il moto circolare uniforme è l'esempio perfetto del **moto periodico**. Un moto è definito periodico se, in un dato sistema di riferimento a partire da un qualsiasi istante  $t$  le sue caratteristiche si ripresentano inalterate dopo un intervallo di tempo  $T$  chiamato **periodo**. Un moto periodico è quindi tale che  $\forall t, n$ :

$$\vec{r}(t + nT) = \vec{r}(t)$$

Il periodo del moto circolare è:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} \quad (2.29)$$

Infatti, passando da  $t$  a  $t+T$  i valori delle funzioni trigonometriche non cambiano in quanto il loro argomento  $\theta$  varia di  $\omega T = \pm 2\pi$ .

La **frequenza** è il numero di periodi in un unità di tempo (in genere il secondo):

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (2.30)$$

mentre la **pulsazione** coincide con la velocità angolare nel moto uniforme e quindi non ha validità generale:

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (2.31)$$

### 2.6.6 Equazioni differenziali del moto circolare uniforme

La relazione

$$\vec{a} = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{r}$$

si può anche esprimere come:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\omega_0^2 \vec{r}$$

dove la pulsazione corrisponde alle due equazioni:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t); \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 y(t).$$

Tali equazioni hanno la medesima struttura del tipo:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega_0^2 f(t) = 0$$

una funzione del tipo:

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (2.32)$$

è l'integrale generale dell'**equazione differenziale**.

## 2.7 Moto oscillatorio armonico

Considerato un punto materiale che si muove lungo una retta, che scegliamo come asse  $x$ , secondo la legge oraria:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (2.33)$$

Dato che il coseno è un numero puro,  $A$  ha le dimensioni di una lunghezza e prende il nome di **ampiezza** (o *elongazione*), l'argomento del coseno  $\phi$  prende il nome di **fase**;  $\phi_0$  è il valore all'istante iniziale ed è dunque la **fase iniziale**, la terza costante è invece la pulsazione.

Da questo, essendo il coseno periodico e dipendente da  $t$ , allora anche la funzione risultante sarà periodica e quindi si ripete regolarmente da un qualsiasi istante  $t$  ad ogni periodo  $T$  e poiché un cambiamento di fase di  $2\pi$  corrisponde ad un intervallo di tempo  $T$ , allora

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Il moto in questione ha come legge oraria una funzione seno di ampiezza  $A$ , ma il moto vero e proprio avviene su una traiettoria rettilinea. Per ogni valore di  $t$  si può calcolare:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ a_x = \ddot{x} = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \phi_0) = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (2.34)$$

Velocità ed accelerazione hanno la stessa Periodicità del moto

ma sono sfasate in anticipo rispettivamente di  $\pi/2$  e  $\pi$ . A partire dalla soluzione generale dell'equazione differenziale  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  si può ricavare la soluzione particolare corrispondente alle assegnate condizioni iniziali attraverso le seguenti:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \cos \phi_0 \\ v_x(0) = v_{0x} = -\omega_0 A \sin \phi_0 \\ \tan \phi_0 = -\frac{v_{0x}}{\omega_0 x_0} \\ A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega_0^2}} \end{cases}$$

Si parla di moto oscillatorio armonico anche su traiettoria qualunque, quando la funzione  $s(t)$  soddisfa la corrispondente differenziale:

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 \quad (2.35)$$

Ogni funzione periodica secondo il teorema di Fourier può essere espressa attraverso la serie:

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^N c_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad (2.36)$$

E dunque ogni moto armonico complesso diventa la somma finita o infinita di moti armonici semplici.

## 2.8 Moto piano in coordinate polari

In questo paragrafo si vedrà come i sistemi di coordinate polari sono applicabili ai moti nel piano, in quanto, spesso, il sistema di coordinate polari è un metodo di gran lunga migliore per potere determinare posizioni, velocità ed accelerazioni dei corpi.

Ogni vettore parallelo al piano può essere espresso in termini dei suoi versori  $\hat{u}_r$  e  $\hat{u}_\theta$  relativi al generico punto  $P$  chiamati *componente radiale e trasversa*. Essendo il vettore posizione:

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

e essendo  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  allora:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$$

$\vec{v}$  è esprimibile quindi come la somma vettoriale della componente radiale e trasversa:

$$\vec{v} = v_r\hat{u}_r + v_\theta\hat{u}_\theta = \dot{r}\hat{u}_r + (r\dot{\theta})\hat{u}_\theta$$

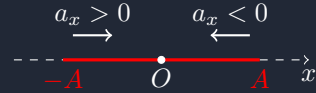
Il modulo è quindi:

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

Il significato delle componenti polari della velocità è il seguente: la componente radiale dà la rapidità istantanea con cui cambia la distanza del punto dal polo mentre quella trasversa è dovuta alla variazione di direzione del vettore posizione. Derivando la velocità come componente radiale e trasversa si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{dv_r}{dt}\hat{u}_r + v_r\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \frac{dv_\theta}{dt}\hat{u}_\theta + v_\theta\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} \\ \frac{d\hat{u}_r}{dt} &= \dot{\theta}\hat{u}_\theta \\ \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\hat{u}_r \\ \frac{dv_r}{dt} &= \ddot{r} \\ \frac{dv_\theta}{dt} &= \ddot{\theta} \\ \Rightarrow \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta \end{aligned}$$

Figura 2.8: Traiettoria del moto oscillatorio armonico



Possiamo quindi indicare l'accelerazione come:

$$\vec{a} = a_r \hat{u}_r + a_\theta \hat{u}_\theta$$

E quindi le sue componenti radiali e trasverse sono:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad (2.37)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \quad (2.38)$$

Il modulo dell'accelerazione sarà dato dalla seguente

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})^2} \quad (2.39)$$

## 2.9 Moto con accelerazione costante: La caduta dei gravi

Tutti i corpi nella cinematica in caduta libera si muovono sotto l'effetto di una accelerazione, ossia l'accelerazione di gravità che agisce solo sulla componente verticale della velocità di un corpo (ovviamente trascurando la resistenza dell'aria). Si ha quindi che:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{g} dt' = \vec{v}_0 + \vec{g} \int_{t_0}^t dt' = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0) \quad (2.40)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g}(t - t_0)^2. \quad (2.41)$$

Si osservi che sia  $\vec{v}$  sia il vettore  $\vec{r} - \vec{r}_0$  si ottengono sommando due vettori che hanno le direzioni di  $\vec{v}_0$  e di  $\vec{g}$ . La traiettoria è dunque una curva che giace sul piano verticale. Nello studio del moto dei gravi è particolarmente conveniente utilizzare un sistema di coordinate cartesiane e scrivere:

$$\vec{a} = \vec{g} = -g\hat{j}$$

All'istante generico  $t$ , se  $\alpha$  è l'angolo della velocità all'istante iniziale:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (v_0 \cos \alpha) \hat{i} + (v_0 \sin \alpha - gt) \hat{j} \\ \vec{r}(t) &= (v_0 \cos \alpha)t \hat{i} + \left( (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \hat{j} \end{aligned}$$

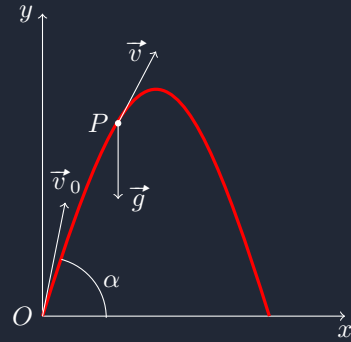
Per le componenti cartesiane si ottiene la proiezione del moto del punto sull'asse delle ascisse che si muove di moto rettilineo uniforme e la proiezione lungo l'asse  $y$  che è un moto uniformemente accelerato. Si rappresenta dunque il moto come **composizione di moti rettilinei indipendenti**:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha - gt \\ v_z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x = (v_0 \cos \alpha)t \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Eliminando ora il parametro  $t$  si ottiene invece la traiettoria in forma esplicita:

$$\begin{aligned} \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \\ y = (\tan \alpha)x - \left( \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) x^2 = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Figura 2.9: Parabola nel piano e traiettoria di un moto di grave generico



## 2.10 Leggi di trasformazione della velocità ed accelerazione

Cosa succede se le velocità e le posizioni sono in sistemi di riferimento diversi? In questo si deve operare una trasformazione che ci consente di trasformare le velocità e le accelerazioni tra sistemi di riferimento diversi. Preso un sistema di riferimento  $S$  ed un sistema di riferimento  $S'$  in moto con una certa velocità rispetto a  $S$ , allora

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}$$

dove  $\vec{R} = \overrightarrow{OO'}$ , ossia la distanza tra i due sistemi di riferimento e  $\vec{r}'$  (e tutti gli altri con l'apice) il vettore posizione del punto rispetto all'origine  $O'$ . supponendo lo spazio ed il tempo assoluti (non vero):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_\tau$$

Dove  $\vec{v}_\tau$  è chiamata **velocità di trascinamento**, e dipende esattamente dalla posizione del punto materiale. Il significato è chiaro se preso un punto  $P$  solidale con  $S'$  dove  $\vec{v}' = 0$  e quindi la sua velocità è  $\vec{v}_\tau$ : il sistema in quiete  $S$  vede il punto  $P$  muoversi con una certa velocità rispetto al sistema  $S'$ . La relazione della velocità è chiamata *legge di trasformazione classica delle velocità*.

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S && \text{velocità del punto materiale in } S; \\ \vec{v}' &= \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S' && \text{velocità del punto materiale in } S' .\end{aligned}$$

Posto allora  $\vec{V}(t) = \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S$  allora la velocità di trascinamento sarà:

$$\vec{v}_\tau = \vec{V}(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}(t) - \vec{R}(t)) \quad (2.44)$$

Dipende dal moto relativo dei due sistemi di riferimento e dalla posizione particolare occupata dal punto mobile nell'istante considerato. Inoltre  $\vec{v}_\tau$  non è la stessa per tutti i punti di  $S'$ .

Consideriamo due casi particolari:

1.  $\vec{\omega} = 0$ : In questo caso si ha che  $\vec{v}_\tau$  è indipendente dalla posizione e tutti i punti di  $S'$  si muovono con la stessa velocità rispetto a  $S$ .
2.  $\vec{\omega} \neq 0$ : In questo caso  $\vec{v}_\tau$  cambia da punto a punto ed è uguale alla somma vettoriale della velocità di  $O'$  e del vettore  $\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$ .
3.  $\vec{V}(t) = 0$ : in questo caso  $O'$  è fisso in  $S$ , per cui  $\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})$ .

Il caso più generale di quando si ha un moto di rotazione di  $S'$  rispetto ad  $S$  è il caso del **moto di rototraslazione**, in questo caso l'asse lungo cui avviene la rotazione è considerabile come luogo dei punti solidali con  $S'$  la cui velocità di trascinamento è uguale a  $\vec{V}(t)$ .

Per quanto riguarda invece l'accelerazione si ha che:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_\tau + \vec{a}_{co} \quad (2.45)$$

Dove  $\vec{a}_\tau$  dipende dal moto relativo dei sistemi di riferimento e dalla posizione del punto materiale. mentre il terzo termine è presente se e solo se  $\vec{v}'$  è diversa da zero.

$$\vec{a}_\tau = \vec{A} + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})) \quad (2.46)$$

e

$$\vec{a}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}' . \quad (2.47)$$

Dove:

$$\vec{A} = \left( \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right)_S \quad \vec{\alpha} = \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S$$

Anche qui il termine  $\vec{a}_\tau$  ha un significato simile a quello della velocità di trascinamento: infatti rappresenta l'accelerazione relativa solidale al sistema di riferimento  $S'$  se osservata dal sistema di riferimento  $S$ . L'accelerazione ha tuttavia un'altro termine, ossia l'accelerazione di Coriolis, che è presente se e solo se un oggetto è in rotazione rispetto al sistema di riferimento inerziale  $S$ .

## 2.11 Giustificazione delle relazioni della velocità ed accelerazione nei moti relativi

Dati due sistemi di riferimento  $S$  ed  $S'$ , in cui  $S$  è il sistema di riferimento inerziale, possiamo individuare il vettore  $\vec{R}$  come il vettore  $\vec{OO'}$ , adesso posso dire che un punto di  $S'$  è individuato rispetto all'origine  $O$  dal vettore

$$\vec{r} \equiv (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{R} \quad (2.48)$$

In  $S'$  si denota con  $\vec{r}'$  il vettore che individua la posizione di un punto rispetto all'origine  $O'$ ; implicando due ipotesi fondamentali:

1. Lo spazio sia **assoluto**: ossia indipendente dal sistema di riferimento
2. Il tempo sia **assoluto**: ossia gli osservatori misurino  $\Delta t \equiv \Delta t'$ .

E quindi possiamo definire il vettore  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ .

### 2.11.1 Derivate dei vettori nei moti relativi

Per poter dimostrare le relazioni della velocità e dell'accelerazione è necessario prima dimostrare che i vettori possono essere derivati e che tipo di derivata si ottiene. Considerato il generico vettore nei due sistemi di riferimento:

$$\vec{w} = w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k} = w'_x \hat{i}' + w'_y \hat{j}' + w'_z \hat{k}'$$

Per valutare adesso la derivata di questo vettore rispetto al tempo, possiamo partire dalla sua rappresentazione in  $S'$ : ossia derivo rispetto al tempo i versori ed i moduli in  $S'$  all'interno del sistema di riferimento  $S$ :

$$\left( \frac{dw'_x}{dt} \right)_S = \left( \frac{dw'_x}{dt} \right)_S \hat{i}' + w'_x \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S + \left( \frac{dw'_y}{dt} \right)_S \hat{j}' + w'_y \left( \frac{d\hat{j}'}{dt} \right)_S + \left( \frac{dw'_z}{dt} \right)_S \hat{k}' + w'_z \left( \frac{d\hat{k}'}{dt} \right)_S$$

avendo però la definizione di tempo assoluto:

$$\left( \frac{dw'_x}{dt} \right)_S = \left( \frac{dw'_x}{dt} \right)_{S'}$$

Dobbiamo ora valutare la derivata rispetto a

$$\left( \frac{d\vec{w}}{dt} \right)_{S'}$$

Posso ora analizzare cosa succede nelle derivate dei versori di  $S'$  rispetto a  $S$ , ossia come

$$w'_x \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S$$

Adesso, se i versori non cambiano nel tempo (ossia non ruotano) e dunque la loro derivata è nulla. Se i versori invece ruotassero rispetto nel tempo allora le loro derivate sarebbe espresse come

$$\left( \frac{d\hat{i}'(t)}{dt} \right)_S = \vec{\omega}_1(t) \times \hat{i}'(t) \quad \left( \frac{d\hat{j}'(t)}{dt} \right)_S = \vec{\omega}_2(t) \times \hat{j}'(t) \quad \left( \frac{d\hat{k}'(t)}{dt} \right)_S = \vec{\omega}_3(t) \times \hat{k}'(t)$$

Esistendo allora questo vettore  $\vec{\omega}(t)$  e quindi è possibile scrivere per ciascuno dei versori

$$\left( \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \right)_S = \vec{\omega}(t) \times \hat{u}(t)$$

Ciò discende dalla permanenza nel tempo della ortogonalità della terna di versori di  $S'$  e quindi  $\vec{\omega}(t)$  caratterizza il moto relativo delle due terne di assi associato al moto relativo dei due sistemi di riferimento. Allora si può dire che

$$w'_x \left( \frac{d\hat{i}'}{dt} \right)_S = \vec{\omega} \times w'_x \hat{i}'$$

E analoghe per gli altri termini dello stesso tipo, allora si ottiene che la loro somma è esattamente uguale a  $\vec{\omega} \times \vec{w}$  per le regole del prodotto vettoriale ottenendo allora

$$\left( \frac{d\vec{w}}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{w}}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{w} \quad (2.49)$$

### 2.11.2 Dimostrazione formula velocità relativa

Per il vettore velocità nel riferimento  $S$  possiamo scrivere che il vettore velocità sarà allora dato dalla derivata di  $\vec{r}$  e dunque

$$\vec{v} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S$$

Posso allora applicare la formula generale nel caso di  $\vec{\omega} = \vec{\omega}$  come abbiamo dimostrato prima, ottenendo che la velocità rispetto all'origine di  $S'$  è

$$\left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

Per cui si ottiene, dato  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$ :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S + \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ \vec{v} &= \vec{v}' + \left( \frac{d\vec{R}}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) \implies \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_\tau \end{aligned}$$

L'espressione della velocità di trascinamento dipenderà dal moto relativo dei due sistemi di riferimento e dalla particolare posizione occupata dal punto mobile all'istante considerato.

### 2.11.3 dimostrazione formula accelerazione relativa

Per ottenere l'accelerazione nei sistemi di riferimento  $S$  e  $S'$ , allora si deriva rispetto al tempo e si ottiene

$$\vec{a} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S + \left( \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right)_S + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S$$

Possiamo allora utilizzare la derivate dei vettori posso esprimere la derivata rispetto a  $\vec{v}'$  come

$$\left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_S = \left( \frac{d\vec{v}'}{dt} \right)_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Si ottiene allora il secondo termine della derivata di  $\vec{v}'$  come

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \left( \left( \frac{d\vec{r}'}{dt} \right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) &= \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\ \vec{a} &= \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \left( \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right)_S + \left( \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_S \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})) \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \left( \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} \right)_S + \vec{\alpha} \times (\vec{r} - \vec{R}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R})) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

Parte II

Dinamica e lavoro

## Capitolo 3

# Principi della dinamica

### 3.1 Forza e definizione operativa

Per definire operativamente una forza si introduce un dinamometro: una molla collegata ad un estremo fissato ed una scala graduata a fianco che misura la deformazione della molla dovuta dall'azione di una forza.

Per dare una definizione operativa devo dire quando due grandezze sono uguali e come si sommano.  $F_1$  e  $F_2$  sono uguali se producono la stessa deformazione della molla (che sia allungamento o accorciamento). Dal momento che la forza ha una direzione (quella della molla) e un verso ossia quello che determina l'accorciamento o l'allungamento. Se io ho due forze, per far sì che queste siano vettori io dico che la loro somma è un'altra forza che produce una deformazione sulla molla pari alla somma delle loro deformazioni.

### 3.2 Principi della dinamica

Si può definire il sistema di riferimento inerziale come un sistema di riferimento orientato secondo una terna cartesiana destrorsa di versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  nel quale valgono i seguenti principi della dinamica:

1. **Primo principio:** Se la forza totale è uguale a zero, il corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Principio di esistenza non riconducibile al secondo valido in sistemi di riferimento inerziali.
2. **Secondo principio:**  $\vec{F} = m\vec{a}$ : per ogni corpo vale per forze diverse tra di loro

$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{a}_1|} = \dots = \frac{|\vec{F}_i|}{|\vec{a}_i|} = m$$

Ossia ogni forza applicata è proporzionale all'accelerazione che imprime su di un corpo di massa  $m$ ; ne segue che non è universale in quanto dipende dal corpo (massa inerziale).

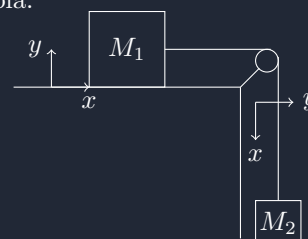
3. **Terzo principio** (Azione e reazione): Se vediamo  $\vec{F}$  applicata ad un corpo allora esisterà una forza uguale ed opposta (con stesso modulo e direzione ma verso opposto)

### 3.3 Dinamica di Fletcher

Per lo studio di questo sistema prima di tutto si individua un sistema di riferimento inerziale: in questo caso si centra le assi del nostro sistema di riferimento nel primo oggetto. Così si può approssimare il sistema di riferimento come se fosse inerziale e solidale con la Terra entro certe approssimazioni. Disegniamo ora lo schema delle forze che agiscono sui corpi. A questo punto possiamo impostare il sistema con tutte le forze (considerato che non si ha attrito) fissando un SdR inerziale vicino all'oggetto e ottenendo il seguente schema della forze:

$$\begin{cases} \vec{N} = N\vec{j} \\ m_1\vec{g} = -m_1g\vec{j} \\ \vec{T} = T\vec{i} \end{cases}$$

Figura 3.1: Dinamica di due corpi ed una carrucola.



Data la definizione delle forze, si può ora disegnare lo schema delle forze e isolare i contributi lungo l'asse  $x$  e lungo l'asse  $y$ :

$$\begin{cases} (y) & N - m_1 g = 0 \\ (x) & T = m_1 \ddot{x}_1 \end{cases}$$

Adesso si scrive lo schema delle forze per quanto riguarda il secondo corpo con il sistema di riferimento sotto la carrucola:

$$\begin{cases} \vec{T}' = -T' \hat{i} \\ m_2 \vec{g} = m_2 g \hat{i} \\ \vec{T}' + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2 \\ -T' + m_2 g = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

A questo punto si fanno delle assunzioni per risolvere il problema: prima di tutto il filo è ideale (non si estende né si deforma); inoltre ho considerato le tensioni come se fossero uguali e da questo si ottiene che:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \ddot{x}_2 \\ |\vec{T}| &= |\vec{T}'| \\ T &= T' \end{aligned}$$

Imposto ora il sistema tra le tensioni ottenendo:

$$\begin{cases} T = m_2 \ddot{x}_1 \\ -T + m_2 g = m_2 \ddot{x}_1 \end{cases}$$

Sommando si ottiene:

$$m_2 g = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (3.1)$$

Questo ci torna poiché l'inerzia è la somma delle masse e la forza che agisce su questo oggetto è solo la forza peso del secondo oggetto. Se ora tolgo  $m_1$  allora  $m_2$  è in caduta libera. Altrimenti se non ci fosse  $m_2$  allora  $\ddot{x}_1 = 0$  Si ottiene allora la tensione moltiplicando per  $m_1$ :

$$T = m_1 \ddot{x}_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \quad (3.2)$$

Adesso integriamo quella di prima:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} t + a \\ x_1 &= \frac{m_2 g}{2(m_1 + m_2)} t^2 + at + b \end{aligned}$$

La posizione fisicamente è descritta con queste formule ma sono io che decido dove mettere l'origine degli assi cartesiani e se io decido che l'origine di essi è dove si trovava  $m_1$  al tempo  $t = 0$  allora  $b = 0$  altrimenti  $b$  diventa la distanza dall'origine della massa al tempo  $t = 0$ . La macchina di Fletcher permette di eguagliare le tensioni ai due capi di una fune passata in una carrucola (entrambe però prive di massa).

### 3.3.1 Il filo ideale

Il concetto di filo ideale in fisica presuppone che se si applica una forza da entrambe le parti del filo di pari intensità allora non si ha alcuna deformazione. Nel caso del filo da solo allora, assumendo:

$$m_{filo} \sim 0 \quad \vec{T} + \vec{T}' = m_{filo} \vec{a} = 0$$

Figura 3.2: Schema delle forze corpo uno

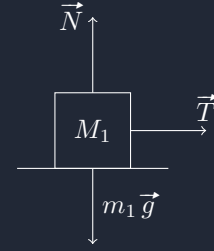


Figura 3.3: Schema delle forze corpo due

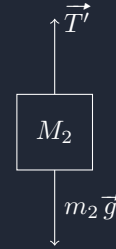


Figura 3.4: Filo ideale



Nel caso della dinamica di Fletcher invece si ha che lo stesso filo ideale e le stesse tensioni hanno però somma diversa da zero in quanto la carrucola riesce in qualche modo ad "agire" sul filo con una forza diversa da zero dal punto di vista fisico il sistema si esprime quindi con le seguenti:

$$d\vec{N} + \vec{T}_\phi + \vec{T}'_\phi = m_{filo} \vec{a} \sim 0 \left\{ dN - T_\phi \sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - T_\phi \right.$$

### 3.3.2 Macchina di Atwood

La macchina di Atwood è forse una delle macchine più importanti della fisica classica poiché è riuscita a dare una spiegazione al secondo principio della dinamica. Considerando una semplice macchina di Atwood composta da una sola carrucola e due masse per ogni estremità della fune, si hanno 2 gradi di libertà anche se, complessivamente, se ne hanno quattro in quanto si ha anche la possibilità di oscillare. Il filo in questo caso si appoggia per metà giro alla carrucola; attraverso un'accorta preparazione dell'esperimento si possono ridurre i gradi di libertà a due eliminando le oscillazioni e fissando la carrucola il più stabilmente possibile e cercando di non far oscillare le masse. Utilizzando un filo ideale, le posizioni delle masse sono legate in modo tale che il filo possa scendere dalla parte della massa più grande riducendo quindi il grado di libertà a 1. In poche parole sappiamo a priori che il sistema si muoverà solamente verso la massa più pesante. Posso allora applicare i principi della dinamica per risolvere il problema:

$$\begin{aligned} 1: \quad & \vec{T} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1 \\ 2: \quad & \vec{T}' + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2 \\ & \begin{cases} T - m_1 g = m_1 \ddot{y}_1 \\ T' - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \end{cases} \\ \text{Posto } T = T' \quad & \ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1 \end{aligned}$$

Si ha l'accelerazione per il primo corpo:

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} \quad (3.3)$$

Se  $m_2 \gg m_1$  allora  $\ddot{y}_1 = g$ . Se invece  $m_1 \gg m_2$  allora  $\ddot{y}_1 = -g$ . Si trova ora la tensione come

$$T = m_1 g + m_1 \ddot{y}_1 \implies T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (3.4)$$

## 3.4 La molla ideale

Una molla è in posizione di riposo quando su di essa non agiscono forze esterne (si dimostrerà più avanti che la somma delle forze interne è pari a zero in qualsiasi sistema), pertanto se è sollecitata da forze esterne, la molla imprimerà una forza di **richiamo** (perché tende a riportare la molla stessa alla posizione di lunghezza di equilibrio) definita come:

$$\vec{F} = -k(x - l_r)\hat{i} \quad (3.5)$$

Dove  $k$  è chiamata **costante di elasticità**, ed è una caratteristica propria della molla,  $x$  è la posizione dell'oggetto rispetto all'origine della molla centrato in  $O$  e  $l_r$  è la **lunghezza a riposo della molla**, ossia la lunghezza che ha la molla rispetto all'origine quando non è sollecitata da alcuna forza. La molla è quindi un apparato che tende ad esercitare sempre una forza che la fa tornare sempre alla posizione di riposo. Lo schema delle forze del sistema si rappresenta come segue, ponendo ora il sistema di riferimento inerziale proprio nel punto in cui la molla è a riposo  $O'$ . Dal punto di vista delle forze quindi:

$$\vec{F} = -kx\hat{i} \implies -kx = m\ddot{x}$$

Figura 3.5: Macchina di Atwood

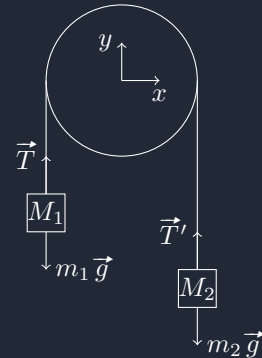
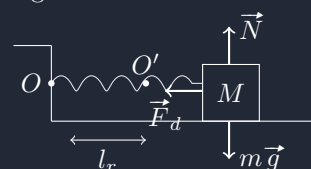


Figura 3.6: La molla ideale



Di conseguenza si ottiene la legge oraria di un moto attaccato ad una molla:

$$\boxed{m\ddot{x} + kx = 0} \quad (3.6)$$

Ossia l'equazione del moto armonico. Questa equazione differenziale del secondo ordine omogenea non è integrabile facilmente, comunque si ottiene:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \implies \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Con  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ . Allora possiamo, data la soluzione generale di questa equazione differenziale, ottenere a sistema le espressioni per la velocità e l'accelerazione:

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \phi) \\ \dot{x} = -A \sin(\omega t + \phi) \omega \\ \ddot{x} = -A \cos(\omega t + \phi) \omega^2 \end{cases}$$

Ottenendo ora l'equazione di moto come

$$-A \cos(\omega t + \phi) \omega^2 + \omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = 0$$

### 3.4.1 Il caso specifico: una molla attaccata al soffitto

Scegliendo un sistema di riferimento nel punto in cui la molla è a riposo, posso definire i versori dei vari vettori e ottenere la seguente relazione (dalla definizione) per la forza elastica:

$$\vec{F}_e = k\Delta l \hat{j}$$

Gli altri vettori posso esprimerli come segue:

$$\vec{g} = -g\hat{j} \quad \vec{a} = \ddot{y}\hat{j}$$

E quindi posso ricavare dall'equazione differenziale della molla ideale

$$k\Delta l = -mg = m\ddot{y}$$

Se si chiama allora  $\Delta l = -y$  come l'abbassamento di quota dovuto alla massa che è attaccata alla molla; si ottiene l'equazione del moto armonico non omogeneo:

$$\begin{aligned} -ky - mg &= m\ddot{y} \\ m\ddot{y} + ky &= -mg \end{aligned}$$

Per risolvere questa equazione differenziale posso operare attraverso una sostituzione di variabile nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} y(t) &= \zeta(t) + \hat{y} \Rightarrow \ddot{y}(t) = \ddot{\zeta}(t) \\ m\ddot{\zeta} + k\zeta + k\hat{y} &= -mg \\ \text{Posto } \hat{z} &= -\frac{mg}{k} \\ m\ddot{\zeta} + k\zeta &= 0 \end{aligned}$$

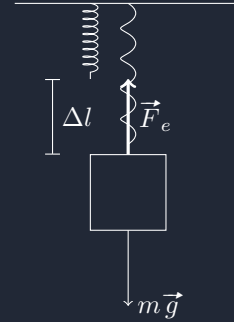
Quando  $\zeta$  è zero, allora si ritorna alla situazione in cui l'origine del sistema di riferimento è proprio la posizione di equilibrio.

$$y(t) = A \cos(\Omega t + \phi) - \frac{mg}{k} \quad (3.7)$$

Derivando si ottiene :

$$\dot{y}(t) = -\Omega A \sin(\Omega t + \phi) \quad (3.8)$$

Figura 3.7: Sistema con molla attaccata al soffitto



E quindi si hanno le impostazioni delle soluzioni:

$$\begin{cases} A \cos \phi = \frac{mg}{k} \\ A \sin \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{mg}{k} \\ \phi = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

Poiché  $A = 0$  non ci da alcuna informazione sul moto .

$$y(t) = \frac{mg}{k} (\cos(\Omega t) - 1)$$

$$y_{max} = -2 \frac{mg}{k} \quad (3.10)$$

$$\dot{y}_{max} = \frac{mg}{k} \Omega = g \sqrt{\frac{m}{g}} \quad (3.11)$$

Dopo quanto tempo si raggiunge la quota massima:

$$\begin{aligned} \Omega t_{min} &= \pi \\ t_{min} &= \frac{\pi}{\Omega} = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

Quando si raggiunge il massimo modulo per la prima volta:

$$t_{max} = \frac{\pi}{2\Omega} = \frac{\text{Periodo}}{4}$$

### 3.5 Moto del pendolo semplice (o pendolo matematico)

Un pendolo è costruito con un filo ed una massa sufficientemente piccola da poter essere approssimata ad un punto materiale. Dal punto di vista matematico qualunque punto materiale su di una traiettoria circolare su di un piano verticale si comporta come la massa nel pendolo. Questo accadrà se e solo se il filo è completamente teso e se il punto materiale è vincolato in qualche modo tale da poter solo ruotare sul piano verticale senza che cada verticalmente (ovviamente senza attrito). La risultante in questo caso sarà:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Chiamiamo i versori  $\hat{u}_n$  il versore di  $\vec{N}$  e  $\hat{u}_t$  il versore della velocità tangenziale. Se il punto è attaccato ad un filo rigido allora si ha che  $N \geq 0$ , inoltre se è una guida o un asticella allora  $N \equiv R$  ossia la reazione vincolare della guida. Si decompone ora la forza peso nella componente radiale e tangenziale ottenendo la seguente relazione

$$m\vec{g} = -mg \cos \theta \hat{u}_n - mg \sin \theta \hat{u}_t$$

Data l'accelerazione

$$\vec{a} = \ddot{s} \hat{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{l} \hat{u}_n$$

Dividendo le componenti tangenziali e normali si ottengono le relazioni:

$$\begin{cases} -mg \sin \theta = m\ddot{s} \\ -mg \cos \theta + N = \frac{\dot{s}^2}{l} \end{cases}$$

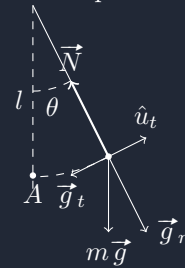
Noi però sappiamo che dalla definizione degli archi con gli angoli in radianti:

$$s = \theta l \implies \dot{s} = \dot{\theta} l \implies \ddot{s} = \ddot{\theta} l$$

Quindi possiamo riscrivere le due equazioni con le nuove sostituzioni:

$$\begin{cases} ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \\ N = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \end{cases}$$

Figura 3.8: Un pendolo semplice



Il primo membro della seconda è sicuramente positiva e quindi sarà soddisfatta se e solo se  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  altrimenti sarà negativo. Se l'oggetto nel movimento si ferma, allora non arriverà mai sopra il corpo del pendolo poiché si azzererebbe  $\dot{\theta}$ : fisicamente si spiega poiché il filo si affloscia. Posso allora risolvere la prima equazione ed ottenere l'equazione differenziale che mi rappresenta il moto di un pendolo semplice in assenza di attrito:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Per piccole oscillazioni, ossia  $\theta(t) \leq \frac{\pi}{20}$  si può applicare lo sviluppo di Taylor cosicché  $\sin \theta \approx \theta$  e quindi si ottiene la differenziale di un moto armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (3.12)$$

Il moto è armonico solo per questa approssimazione, altrimenti non è armonico. Posto

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

il periodo sarà dato da

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.13)$$

L'isocronismo del pendolo funziona se e solo se si compiono piccole oscillazioni, altrimenti il periodo è un'altra cosa. Se l'oscillazione è più grande si trova una formula in sviluppo in serie (senza dimostrazione poiché si fa a lab) che è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) + \left( \frac{13}{24} \right)^2 \sin^4 \left( \frac{\theta}{2} + \dots \right) \right) \quad (3.14)$$

### 3.6 Caduta di un filo con massa

Assumendo che il filo abbia una densità costante, fissato un sistema di riferimento allora noi sappiamo che i due pezzi di filo hanno una certa dimensione. La massa del filo su cui agisce la forza peso sarà densità per lunghezza, ossia:

$$x\lambda \implies \lambda = \frac{M}{L}$$

Per cui la forza peso sul filo che ciondola è:

$$\vec{F} = x\lambda \vec{g}$$

E quindi si ottiene per il secondo principio:

$$M\ddot{x} = \lambda xg$$

Si ottiene allora l'espressione dell'accelerazione del filo come:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{L}x = 0$$

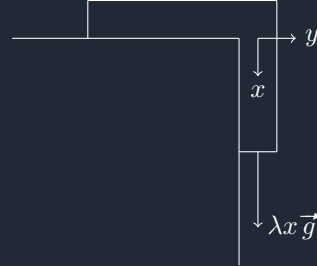
Chiamato allora  $\beta^2 = \frac{g}{L}$ , si ottiene una equazione simile a quella della molla anche se non si può applicare seno e coseno come risoluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \beta^2 x &= 0 \\ x &= Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t} \\ \dot{x} &= Ae^{\beta t} \beta - Be^{-\beta t} \beta \\ \ddot{x} &= Ae^{\beta t} \beta^2 + Be^{-\beta t} \beta^2 = \beta^2 x \end{aligned}$$

Il solo segno meno ha cambiato completamente l'equazione. Ora ricavo  $A$  e  $B$  dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$

Figura 3.9: Filo con massa



Allora si ha che:

$$\begin{aligned}x(0) &= x_0 = A + B \\ \dot{x}(0) &= 0 = \beta(A - B)\end{aligned}$$

Quindi le nostre soluzioni sono proprio il coseno e seno iperbolici:

$$x = x_0 \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2} = x_0 \cosh \beta t$$

Se  $\beta t \ll 1$ , allora si ha che in  $t = 0$  e  $x = x_0$  si può sviluppare con Taylor i membri del coseno iperbolico:

$$\begin{aligned}e^{\beta t} &= 1 + \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2 \\ e^{-\beta t} &= 1 - \beta t + \frac{1}{2}\beta^2 t^2\end{aligned}$$

$$x = x_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 t^2\right)$$

In  $t = 0$  allora il moto è uniformemente accelerato, se invece  $t \gg 0$ , diventa un moto esponenziale, ossia le leggi che vincolano il moto fanno crescere la velocità esponenzialmente. Questo vuol dire che il corpo continua ad aumentare la sua velocità? No poiché una volta che il filo è finito allora continuerà a cadere come tutti i corpi e quindi:

$$x = \frac{x_0}{2} e^{\beta t}$$

### 3.6.1 Focus su equazioni differenziali lineari omogenee con coefficienti costanti

Un'equazione del genere è:

$$a_1 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_3 x = 0 \quad (3.15)$$

Un'equazione tipo:

$$x = Ae^{\alpha t}$$

se si sostituisce nella differenziale si ottiene

$$Ae^{\alpha t}(a_1 \alpha^2 + a_2 \alpha + a_3) = 0$$

La soluzione è data dalla risoluzione dell'equazione di secondo grado, il che ci porta a dare la soluzione della differenziale di prima che contiene però due soluzioni: una parte reale data dal coseno ed una parte immaginaria data dal seno:

$$\begin{aligned}\cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\end{aligned}$$

Se il determinante dell'equazione di secondo grado si annulla allora si ottiene la soluzione.

$$x = (A + Bt)e^{\beta t}$$

## 3.7 SDR non inerziali e esempi

Accade spesso che la scelta di un SDR non inerziale sia fisicamente più chiara e semplice per descrivere alcune situazioni fisiche e vale quindi la pena di discuterlo. Bisogna cambiare però il modo in cui si utilizzano le leggi della dinamica: con le leggi della trasformazione si era già visto la trasformazione dell'accelerazione e della velocità dei SDR non inerziali, definite quindi l'accelerazione di trascinamento e di Coriolis per cui si esprime ( si chiama SDR mobile il SDR non inerziale):

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_{co}$$

Posso esprimere la risultante delle forze nel sistema di riferimento  $S'$  trovando quindi l'espressione per la prima cardinale nei SdR non inerziali:

$$m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_t - \vec{a}_{co})$$

L'osservatore  $S$  osserva che non gli torna l'accelerazione e dunque ipotizza che ci siano delle accelerazioni (e quindi delle forze) immaginarie che non riesce per qualche motivo a vedere ma che agiscono e modificano il moto. La forza di trascinamento e la forza di Coriolis possono essere espresse come

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_t, \quad \vec{F}_{co} = -m\vec{a}_{co}$$

L'osservatore di  $S$  riprendendo la definizione operativa di forza col dinamometro osserva che quelle forze apparenti si comportano come delle forze vere anche se non sono forze dovute ad interazione e non rispettano dunque il primo né tantomeno il terzo principio. La forza di trascinamento in particolare dipende proprio dal sistema di riferimento e sostanzialmente questa formula diventa il nuovo secondo principio della dinamica:

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_t + \vec{F}_{co} \quad (3.16)$$

Dati i riferimenti di  $S$  e  $S'$  allora considerate le componenti dell'accelerazioni e la distanza dal punto  $P$  che vogliamo misurare si ottengono le espressioni per le forze di trascinamento e di Coriolis del punto  $P$  rispetto alle origini dei sistemi di riferimento:

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= -m\vec{a}_t = -m\vec{a}_O - m\vec{\omega} \times (P - O') - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \\ \vec{F}_{co} &= -m\vec{a}_{co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' \end{aligned}$$

### 3.7.1 Il caso del pendolo sul treno

Con  $\vec{\omega} = 0$  e  $\vec{a}_O$  costante, l'osservatore su di un treno osserva che il dinamometro che utilizza per misurare l'accelerazione di un corpo risulta modificato: l'accelerazione del treno produce una forza contraria al verso dell'accelerazione che prende il nome di **forza di trascinamento**. Se al posto del dinamometro mettessi un pendolo, nel caso in cui il treno abbia la stessa  $\vec{a}_t$  e lasciassi oscillare il pendolo otterrei lo stesso effetto: il pendolo sembra oscillare maggiormente da una parte (quella con verso opposto al moto del treno) rispetto all'altra. Delle diverse forze in gioco solo quella di trascinamento fa inclinare il pendolo all'indietro. Impostando il problema dal punto di vista trigonometrico si ottiene:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a}_t|}{\sqrt{g^2 + a_t^2}}$$

Sono in grado di definire il periodo di questo pendolo con accelerazione costante? Utilizzo  $\vec{g}'$  dato dalla composizione della forza peso e dall'accelerazione di trascinamento, il cui modulo sarà:

$$|\vec{g}'| = \sqrt{g^2 + a_t^2} \quad (3.17)$$

### 3.7.2 Ascensore accelerato

Anche nel caso dell'ascensore accelerato dovrò considerare i contributi della forza di trascinamento del sistema di riferimento  $S'$  (ossia il sistema solidale con la base dell'ascensore); data allora la formula della forza di trascinamento che si è vista prima:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) - m\vec{\omega} \times (P - O)$$

Se l'ascensore sta accelerando verso l'alto, allora accade che io mi senta schiacciato verso il basso a causa del segno della forza di trascinamento e, poiché non c'è componente rotatoria, si ottiene:

$$\vec{F}_t = -m\vec{a}_{O'}$$

Figura 3.10: Pendolo nel treno

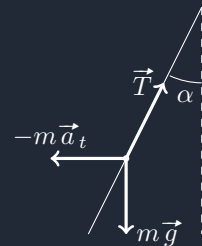
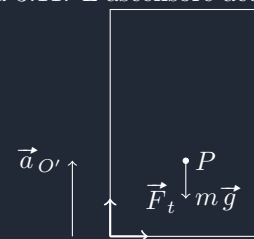


Figura 3.11: L'ascensore accelerato



In questo caso la forza di trascinamento si somma alla forza peso e quindi si ottiene una forza peso nuova data da:

$$m\vec{g}' = \vec{F}_t + m\vec{g} = m(a_{O'} + g)\hat{g} \quad (3.18)$$

Lungo il versore  $\hat{g}$  che è comune ad entrambe le forze. Nel caso in cui l'ascensore stia invece scendendo (rispetto ad un SdR inerziale) con una certa accelerazione, il nuovo peso effettivo diminuisce in quanto è dato dalla relazione:

$$m\vec{g}' = m(-|a_{O'}| + g) \quad (3.19)$$

Se invece fosse in caduta libera allora dato che  $\vec{a}_{O'} = \vec{g}$ , non c'è nessuna forza peso "nuova" l'accelerazione è proprio solo quella di gravità. Questa situazione è un sistema di riferimento non inerziale in cui siamo in una situazione in caduta libera e sperimentalmente si può realizzare con un aereo (l'esperimento zero gravity). Si deduce dunque che le accelerazioni di trascinamento (posto che non vi sia rotazione), producono sempre una forza apparente contraria al verso dell'accelerazione stessa per un SdR inerziale.

### 3.7.3 Il caso della piattaforma rotante con $\dot{\vec{\omega}} = 0$

Preso  $\vec{\omega}$  costante nel caso della piattaforma rotante non potremmo ignorare i termini delle forze apparenti dati dalla velocità di rotazione della piattaforma. Posso considerare  $x, y, z$  gli assi per il sistema di riferimento inerziale e gli assi  $x', y', z'$  per il SDR non inerziale, in modo tale che l'asse  $z$  sia ortogonale al piano di rotazione e coincida con  $z'$ . Posso impostare ora la forza di trascinamento e la forza complementare (Coriolis):

$$\begin{aligned} \vec{F}_t &= -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (P - O)) \\ \vec{F}_{co} &= -2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r\hat{u}_r) \end{aligned}$$

La forza di trascinamento è semplificata in quanto i vettori sono paralleli e dunque si annulla il prodotto vettoriale. Nel piano possiamo anche ottenere una rappresentazione dall'alto che ci consente di esprimere le forze con le coordinate cilindriche, la distanza  $P - O$  è proprio:

$$P - O = \rho\hat{u}_\rho + z\hat{k}$$

E quindi la forza di trascinamento, essendo  $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$$\vec{F}_t = +m\omega^2\rho\hat{u}_\rho \quad (3.20)$$

Dato che ha segno positivo, questa tende ad andare verso l'esterno rispetto all'origine e prende quindi il nome di forza centrifuga. La velocità a questo punto può essere espressa come:

$$\vec{v}' = \frac{d}{dt}(P - O) = \dot{\rho}\hat{u}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{u}_\phi + \dot{z}\hat{k}$$

E quindi possiamo trovare la forza di Coriolis che sarà, vista l'impostazione precedente delle forze, data da:

$$\vec{F}_{co} = -2m\omega^2\rho\hat{u}_\phi \quad (3.21)$$

Che relazione c'è tra  $\dot{\phi}$  e  $\omega$ ? Ad una prima analisi potrebbero sembrare la stessa cosa, ma in realtà sono due cose complementari diverse.  $\omega$  è costante sia in modulo che direzione ed è la velocità angolare con cui ruota la piattaforma mentre  $\phi$  è la posizione nel sistema di riferimento ruotante che l'osservatore sta guardando e quindi  $\dot{\phi}$  è la variazione della posizione del punto  $P$  rispetto all'osservatore  $S$ .

Ci possiamo chiedere adesso che moto avrebbe l'osservatore rispetto al SDR non inerziale? L'osservatore appare ruotare rispetto al SDR non inerziale ma in senso opposto e quindi

$$\dot{\phi} = -\omega \quad \dot{\rho} = 0$$

Figura 3.12: Piattaforma rotante

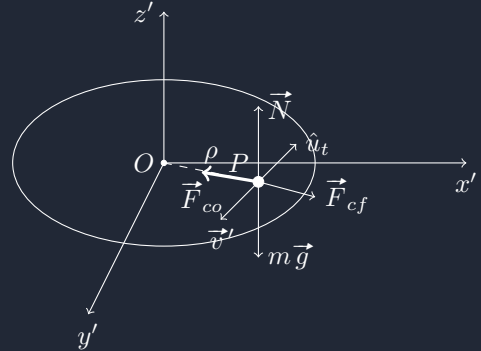
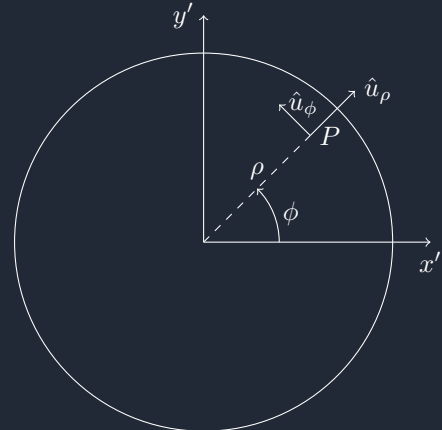


Figura 3.13: Schematizzazione del moto dall'alto



La forza centrifuga resta inalterata e non cambia mentre  $\rho$  non cambia e quindi posso esprimere la forza centrifuga e di Coriolis (che diventa la forza complementare):

$$\begin{aligned}\vec{F}_t &= m\omega^2 \rho \hat{u}_\rho \\ \vec{F}_{co} &= 2m\omega^2 \rho \hat{u}_\phi\end{aligned}$$

Il corpo rispetto al centro del SdR non inerziale appare muoversi verso l'esterno e verso destra se la giostra ruota verso destra e verso sinistra se la giostra ruota verso sinistra. Rispetto all'SdR inerziale invece appare spinto verso l'esterno.

### 3.7.4 Il caso della guida

Un punto materiale che scorre su di una guida senza attrito ha solo un grado di libertà in quanto può solo scorrere lungo la traiettoria forzata dalla guida. Dal momento che il sistema  $S'$  è solidale con l'oggetto, allora  $\dot{\phi} = 0$ , allora essendo che ho la componente radiale

$$\begin{aligned}\hat{u}_\rho : m\omega^2 \rho &= ma_\rho \\ \hat{u}_\phi : -2m\omega\dot{\rho} + N &= 0\end{aligned}$$

La guida quindi deve produrre una reazione vincolare per tenere fermo l'oggetto dentro sé stessa. Quindi possiamo definire l'accelerazione (Ricordando la definizione di accelerazione di Coriolis) come:

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{d}{dt} \vec{v}' = \dot{\rho} \hat{u}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{u}_\phi + \dot{z} \hat{k} \\ \vec{a}' &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \hat{u}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\phi} + \rho \ddot{\phi}) \hat{u}_\phi\end{aligned}$$

Allora si ottengono le descrizioni per i versori:

$$\begin{aligned}\hat{u}_\rho : \omega^2 \rho &= \ddot{\rho} \\ \hat{u}_\phi : N &= 2m\omega\dot{\rho}\end{aligned}$$

E allora si ottiene l'equazione del moto armonico modificata (quella per il filo con massa che cade):

$$\ddot{\rho} - \omega^2 \rho = 0 \implies \rho = \rho_0 \cosh(\omega t) \implies \dot{\rho} = \rho_0 \omega \sinh(\omega t)$$

Allora la reazione vincolare della guida è proprio:

$$N = 2m\rho_0\omega \sinh(\omega t) \quad (3.22)$$

che è proprio la forza che accelera il corpo che scorre nella guida per cui un osservatore in un SDR inerziale vede il corpo accelerato.

## 3.8 Il sistema di riferimento terrestre

Se facessimo degli esperimenti sulla Terra dovremmo riuscire a mettere in luce le forze apparenti di un SDR non inerziale. La Terra ruota intorno al proprio asse rispetto alle stelle fisse da Ovest verso Est e quindi mentre ruota su sé stessa con velocità angolare  $|\vec{\omega}_T| = \frac{2\pi}{86'164}$  essa dovrebbe ritrovare il Sole nel medesimo punto ad ogni rivoluzione anche se questo non accade. Questo perché il giorno solare medio è più lungo del giorno sidereo: rispetto alle stelle fisse, infatti, la Terra ha compiuto un giro in più. Che conseguenza ha il fatto che la Terra non è un SDR inerziale? Questo vuol dire che ci sono delle forze apparenti in tutti gli esperimenti e quindi rispetto alla Terra nei moti su larga scala intervengono queste forze apparenti. All'equatore per l'osservatore inerziale, un oggetto vicino alla Terra è soggetto alla forza di gravità dovuta all'interazione con

Figura 3.14: Guida circolare

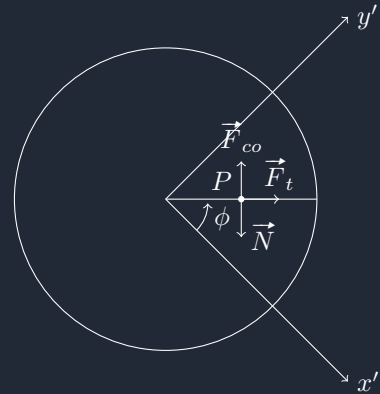
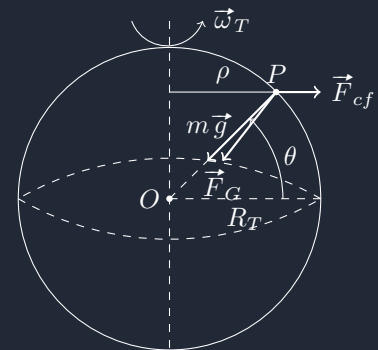


Figura 3.15: Terra e riferimento



la Terra (che si assume sferica), mentre per l'osservatore sulla Terra mi aspetto che ci sia una forza centrifuga. Usando un filo a piombo, la sua verticale non passerà per il centro della Terra ma sarà leggermente inclinata rispetto alla forza peso ideale a causa della forza centrifuga. Voglio calcolare allora il vero peso degli oggetti e misuro oltre che la direzione del pendolo anche la forza peso. Associa  $\hat{u}_\rho$  il versore  $\perp \hat{k}$  che giace nello stesso piano del versore  $\hat{u}_r$  (il versore parallelo all'asse  $\overrightarrow{OP}$ ) e che è il versore della centrifuga. Allora:

$$\hat{u}_r = (\cos \theta \vec{u}_\rho + \sin \theta \hat{k})$$

La forza peso allora si esprimerà come:

$$m\vec{g} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf} = -mg_0\hat{u}_r + m\omega_T^2\rho\hat{u}_\rho$$

Dove  $g_0$  è  $g$  senza la correzione della forza centrifuga, sostituendo allora quanto ottenuto prima si ottiene.

$$m\vec{g} = m(\cos \theta (-g_0 + \omega_T^2 R_T) \hat{u}_\rho + g_0 \sin \theta \hat{k})$$

Volendo ora calcolarne il modulo, si ottiene la seguente:

$$|g| = \sqrt{\cos^2 \theta (g_0^2 + \omega_T^4 R_T^2 - 2g_0\omega_T^2 R_T) + g_0^2 \sin^2 \theta}$$

Che sostituendo, raccogliendo e semplificando si ottiene:

$$|g| = \sqrt{g_0^2 \left( 1 - \frac{2\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos^2 \theta + \left( \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \right)^2 \cos^2 \theta \right)}$$

Usando lo sviluppo di Taylor allora si può semplificare i coseni (in particolare il primo) poiché hanno un contributo molto piccolo e quindi:

$$|g| \approx g_0 \left( 1 - \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos^2 \theta \right)$$

L'accelerazione al polo è  $g_{polo} = 9.823m/s^2$  e quella all'equatore  $g_{eq} = 9.789m/s^2$  poiché la Terra è un ellissoide di rotazione e la forza di Coriolis ha fatto schiacciare la Terra in modo tale che all'equatore il raggio terrestre sia più grande che ai poli. Preso un triangolo i cui lati sono la forza centripeta, una la forza di gravità vera e una quella ideale, applicando la trigonometria si ottiene l'espressione dell'angolo tra le due forze ( $\delta$ ):

$$\frac{F_{cf}}{\sin \delta} = \frac{g}{\sin \theta}$$

$$\sin \delta \approx \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0} \cos \theta \sin \theta$$

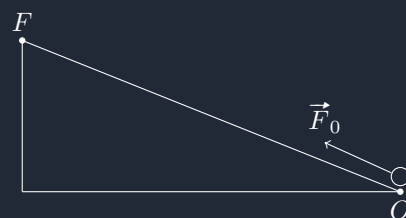
# Capitolo 4

## L'Energia ed il lavoro

### 4.1 Il lavoro

Se avessi un grande oggetto da spostare molto massiccio, dovrei avere una forza tale che possa equilibrare e vincere la forza peso dell'oggetto per poterlo sollevare, oppure vincere la resistenza della forza di attrito statica per poterlo muovere orizzontalmente. Come hanno quindi fatto gli egiziani a portare i blocchi delle piramidi sopra le piramidi stesse per la loro costruzione? Hanno creato delle impalcature che permettessero di far strisciare i blocchi su di un piano inclinato con angolo molto piccolo. Come misuro quindi lo "sforzo" necessario per compiere questo spostamento? La grandezza che abbiamo bisogno per poter spingere il blocco fino alla fine è proprio il lavoro. Si definisce il **lavoro** come la quantità che descrive gli scambi di energia in un sistema. In particolare, il **lavoro di una forza**, è definito come il prodotto scalare tra il modulo della forza per lo spostamento che fa compiere all'oggetto su cui è applicata. Il lavoro è sempre di una forza e si indica con il simbolo  $\delta L$ , ossia il lavoro infinitesimo definito come il prodotto scalare

Figura 4.1: Il lavoro di una forza su di una superficie inclinata



$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta \vec{S} \quad (4.1)$$

E' quindi lo spostamento della forza lungo un certo cammino, ma il suo valore non cambia poiché dipende solo dagli istanti iniziali e finali; si definisce quindi il lavoro lungo un certo cammino. Per trovare il valore devo fare l'integrale di linea, ossia l'integrale della traiettoria con il limite che mi fa tendere lo spostamento a  $dx$ . Per ognuno di questi divido il mio percorso in tanti pezzi per cui si ottiene il lavoro di una forza  $\vec{F}$  lungo uno specifico tratto  $AB$  su di una curva  $\Gamma$ :

$$L_{AB,\Gamma} = \oint_A^B \vec{F} \cdot \delta \vec{S} \quad (4.2)$$

Definiamo il lavoro di una forza come:

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (4.3)$$

Dove  $dr$  rappresenta lo spostamento infinitesimale della forza  $\vec{F}$ .  $\delta L$  non è un differenziale esatto in quanto il differenziale esatto in fisica presuppone la scomposizione lungo le componenti di una data grandezza; essendo però il lavoro una quantità scalare, allora il suo differenziale non è esatto. Allora possiamo definire il lavoro totale come la somma di tutti gli infinitesimi spostamenti:

$$L_{AB,\vec{F}} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \vec{dr}_i = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot \vec{dr} \quad (4.4)$$

Nel disegno, il lavoro compiuto dalla forza dipende dall'angolo del piano inclinato e quindi:

$$L_{\vec{F}_0} = \int_{OF} \vec{F}_0 \cdot \vec{dr} = Mg \sin \alpha L = Mgh$$

Se volessi esplicitare l'integrale allora posso dividerlo lungo tutte le direzioni e quindi risolvere la somma degli integrali. Con il concetto di integrale possiamo anche dimostrare il teorema delle forze vive.

## 4.2 Il teorema delle forze vive

Data l'espressione del lavoro per una forza che produce un certo spostamento infinitesimo  $\vec{dr}$ :

$$\delta L = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Se avessi più forze, ognuna di esse dovrebbe compiere un certo lavoro che dipende dallo spostamento che causano: posso considerare quindi la risultante delle forze applicate su di un corpo lungo una traiettoria istante per istante come se le forze fossero tutte applicate insieme come somma in un'unica forza:

$$\vec{F}_{tot} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i$$

e definire quindi il lavoro totale:

$$\delta L_{tot} = \sum_{i=0}^n \vec{F}_i \cdot \vec{dr} = \sum_{i=0}^n \delta L_{\vec{F}_i}$$

Il secondo principio della dinamica ci dice che in un sistema di riferimento la risultante delle forze produce sempre una certa accelerazione su di un corpo di massa  $m$ :

$$\vec{F}_{tot} = m \vec{a}.$$

Si può allora riscrivere il lavoro iniziale come:

$$\delta L_{\vec{F}_{tot}} = m \vec{a} \cdot \vec{dr}$$

Essendo la velocità la derivata rispetto al tempo del vettore posizione, allora è proprio  $\frac{dr}{dt}$  e quindi al posto di  $\vec{F}$  posso mettere:

$$\delta L_{\vec{F}_{tot}} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

Eseguendo allora il prodotto scalare si ottiene

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = 2\vec{v} \cdot \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)$$

Dato che questo prodotto ha un 2 davanti, allora devo mettere un mezzo nell'espressione del lavoro. A questo punto posso integrare ed ottenere l'energia cinetica come

$$\int \frac{1}{2} m \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m \int \vec{v} d\vec{v} = dK$$

Se io avessi da compiere un lavoro continuo e non infinitesimo? Allora su di una traiettoria il lavoro diventerà:

$$L_{AB,\Gamma} = \int_{A,\Gamma}^B \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{A,\Gamma}^B dK = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

E allora possiamo concludere con il teorema delle forze vive che il lavoro è proprio la variazione dell'energia cinetica:

$$L_{AB,\Gamma} = \Delta K \quad (4.5)$$

Questo ci dice inoltre che se io compio lavoro su di un oggetto allora sto provocando una variazione dell'energia cinetica. Il differenziale di  $K$  dipende solo dalle condizioni iniziali e finali e non è quindi una funzione della posizione.

### 4.2.1 Teorema delle forze vive nel piano inclinato

Posso impostare il problema nella seguente maniera: sapendo che devo trovare la funzione della discesa dell'oggetto, questa è proprio:

$$mg \sin \alpha = m\ddot{x}$$

$$x = \frac{1}{2}g \sin \alpha t^2$$

E poi si ricava la velocità finale combinando le varie derivate. Il metodo due è quello dell'energia cinetica con un vincolo semplice: la forza normale è ortogonale allo spostamento e quindi non produce alcun tipo di lavoro poiché non impedisce lo spostamento lungo la traiettoria permessa. Allora il lavoro è proprio:

$$L_{AB} = Mg \sin \alpha L \quad \text{con } v_B = v_f \quad v_A = 0$$

Utilizzando ora il teorema delle forze vive, per cui ho solo  $v_B$

$$Mg \sin \alpha L = \frac{1}{2}Mv_f^2$$

E allora:

$$v_f = \sqrt{2g \sin \alpha L}$$

Questo non ci dà il tempo di arrivo dell'oggetto (come invece avrei con la risoluzione mediante la dinamica) ma solamente la velocità finale. E' importante notare (come si vedrà più avanti, che la derivate delle'energia totale rispetto al vincolo mi permetta di ottenere l'equazione di moto).

### 4.2.2 L'attrito nel teorema delle forze vive

Considerando lo stesso piano inclinato, su cui però è presente attrito, la forza di attrito su di un corpo nel piano inclinato sarà data da

$$|\vec{F}_{at}| = \mu_d Mg \cos \alpha$$

Posso quindi ottenere l'espressione dell'energia cinetica come la differenza tra l'energia potenziale del corpo e l'energia dissipata dall'attrito:

$$Mg \sin \alpha L - \mu_d Mg \cos \alpha = \frac{1}{2}Mv_f^2$$

La velocità finale diventerà allora:

$$v_f = \sqrt{2gL(\sin \alpha - \mu_d \cos \alpha)}$$

Mentre la forza peso è costante, la forza di attrito non è costante poiché dipende dal verso in cui sta andando l'oggetto. Se analizzassimo il caso di un oggetto che scorre giù da un piano lungo una guida allora la forza peso non fa lavoro sui tratti orizzontali ma la forza di attrito, quando è presente, ha sempre verso contrario al moto.

## 4.3 Definizione di campo conservativo

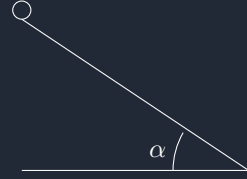
Una forza posizionale è una forza che dipende dalla posizione di un oggetto, come la forza elastica; forze come l'attrito non sono posizionali poiché dipendono dal verso di applicazione della forza; possiamo allora scrivere la definizione di forza posizionale nella seguente maniera:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) \quad (4.6)$$

Si distinguono le forze conservative (sottoclasse) che sono quelle forze posizionali in cui il lavoro non dipende dal cammino seguito:

$$L_{AB, \Gamma_1} = L_{AB, \Gamma_2}, \forall \Gamma_1, \Gamma_2$$

Figura 4.2: Un corpo su di un piano inclinato



La seconda proprietà di queste forze è che il lavoro in un percorso chiuso è zero (chiamata anche circuitazione):

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4.7)$$

Lungo una traiettoria chiusa, che io la percorra in un senso o nell'altro, non cambia il lavoro, cambia solo di segno per cui la sua circuitazione sarà sempre 0. La prima implica la seconda e viceversa.

Terza proprietà:  $\exists V$  energia potenziale tale che:

$$\delta L = -dV \quad (4.8)$$

$$L_{AB,\Gamma} = V(A) - V(B), \quad \forall \Gamma \quad (4.9)$$

Abbiamo un differenziale non esatto eguagliato ad un differenziale esatto: questo vuol dire che il differenziale di  $V$  è quello totale della funzione (che considera dunque tutte le variabili). Si dimostra che esiste questa funzione energetica  $V$ , ossia l'energia potenziale, considerando lungo una traiettoria un punto di riferimento  $P_0$  da cui facciamo passare il percorso  $A, P_0, B$  e quindi si ottiene che la circuitazione di questo percorso sia:

$$L_{AP_0} + L_{P_0B} + L_{BA} = 0$$

Fissato il punto  $P_0$  allora questa è una funzione di  $A$  e posso esprimerla secondo le seguenti relazioni definendo una funzione energetica che possa variare a seconda del punto considerato  $V(x, y, z)$ :

$$L_{AP_0} = -V(x_A, y_A, z_A)$$

$$L_{P_0B} = -V(x_B, y_B, z_B)$$

E per cui si ottiene che il lavoro da  $A$  a  $B$  è dato dalla seguente relazione:

$$L_{AB} = V(A) - V(B)$$

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante; possiamo allora esprimere il lavoro mediante l'energia potenziale (che è posizionale e quindi in funzione dello spazio) e allora scrivere:

$$\delta L = -dV = -(V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y, z))$$

Matematicamente questo si può scrivere come:

$$\begin{aligned} & -(V(x + dx, y + dy, z + dz) - V(x, y + dy, z + dz) + V(x, y + dy, z + dz) \\ & - V(x, y, z + dz) + V(x, y, z + dz) - V(x, y, z)) \end{aligned}$$

Facendo la derivata parziale per ogni variabile che compare nell'espressione dell'energia potenziale ottengo il suo differenziale esatto espresso come

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

Esprimendo la forza nella sue componenti posso ottenere l'espressione del lavoro rispetto al differenziale di tutte le componenti:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

questa relazione vale per qualunque sia  $dx, dy, dz$ . Eguagliando allora lo stesso incremento infinitesimo dell'energia potenziale ad ogni componente della forza, si ottiene proprio che ogni componente della forza è la derivata parziale rispetto a quella componente della funzione di energia  $V$  che ho considerato.

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla}V$$

Dove  $\nabla$  è l'operatore differenziale (**gradiente**) che esprime la derivata parziale rispetto a tutte le componenti di un certo vettore. Posso esprimere il lavoro con il gradiente attraverso la seguente trasformazione e eguagliando al differenziale della mia funzione energetica  $V$ :

$$\delta L = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = -dV$$

Con questa si hanno le seguenti relazioni quando  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (4.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}V = 0 \quad (4.11)$$

la prima prende il nome di **rotore della forza** che è zero se la forza è conservativa. Svolgendo il prodotto vettoriale si ha

$$\det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \right) = 0. \quad (4.12)$$

Dal momento che le derivate parziali sono le stesse, allora il determinante è zero ed il rotore della forza è zero. Si riassumono le proprietà dei campi conservativi:

1.

$$L_{AB,\Gamma_1} = L_{AB,\Gamma_2}$$

2. Per ogni possibile linea chiusa nel campo si ha

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

3. Esiste una funzione scalare  $V(\vec{r})$  detta energia potenziale tale che si può calcolare indipendentemente dalla curva  $\Gamma$  per cui si è calcolato il lavoro:

$$L_{AB} = V(\vec{r}_A) - V(\vec{r}_B)$$

4.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \implies \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \implies \text{rot}\vec{F} = 0$$

## 4.4 Energia meccanica

Un dominio si dice semplicemente connesso se, presa una curva chiusa, la posso deformare fino a farla diventare un punto. Considerato un toroide, se prendo una curva all'interno del dominio, non posso farla collassare in un punto. Se abbiamo un sistema su cui agiscono solo forze conservative, (anche forze non conservative che non fanno lavoro), allora il teorema delle forze vive mi dice che:

$$\delta L = -dV = dK$$

E quindi isolando posso dire che

$$dK = -dV$$

E allora

$$dK + dV = 0$$

Se avessi solo forze conservative la somma dell'energia potenziale e cinetica non varierebbero: quella somma rimarrebbe costante nel tempo. La somma di questi due contributi energetici prende il nome di **energia meccanica**:

$$E = K + V \quad (4.13)$$

Lo stesso vale per due forze conservative qualsiasi: se avessi solo forze conservative allora avrei che la derivata dell'energia cinetica è esattamente zero in quanto è una funzione costante:

$$dE = 0$$

Se invece ho una forza non conservativa, l'energia meccanica non si conserva: se si avesse una forza non conservativa allora  $\delta L = -dV$  non varrebbe più. Considerati i contributi energetici delle forze conservative possiamo esprimere il lavoro totale come la somma dei contributi conservativi e non conservativi

$$\begin{aligned} \delta L_{tot} &= \delta L_{cons} + \delta L_{ncons} \\ dK &= - \sum dV_i + \delta L_{ncons} \end{aligned}$$

Quindi se lo porto dall'altra parte ottengo;

$$d\left(K + \sum dV_i\right) = \delta L_{ncons}$$

Chiamato allora

$$E = K + \sum dV_i$$

L'energia meccanica non sarà più uguale ad una costante ma uguale al lavoro che compiono le forze non conservative:

$$dE = \delta L_{ncons}$$

Se il lavoro dell'attrito è negativo allora l'energia meccanica tenderà a diminuire nel sistema considerato, in quanto l'energia cinetica viene **dissipata** in calore mediante l'attrito; questo si osserva nel mondo reale ed è il motivo per il quale le macchine perpetue non esistono.

## 4.5 Forze conservative e loro esempi

### 4.5.1 La forza peso

La forza peso è una forza conservativa in quanto rispetta le proprietà di forza conservativa: il suo rotore è zero in quanto è una forza costante e il suo lavoro lungo una curva qualsiasi chiusa è esattamente zero. Si può dimostrare considerando un lavoro infinitesimo compiuto dalla forza peso: la forza peso è un **campo uniforme**: ossia caratterizzata da modulo  $mg$  costante e indipendente da  $\vec{r}$ . Se volessimo allora calcolare l'energia potenziale attraverso il gradiente in un certo percorso  $AB$ , otterrei la seguente espressione:

$$\delta L = (m\vec{g}) \cdot d\vec{r}$$

Allora:

$$\delta L = -mg\hat{j} \cdot dy\hat{j}$$

Il lavoro finito allora:

$$\int_A^B \delta L = -mg(y_B - y_A) = V(A) - V(B)$$

E' del tutto ragionevole, che per un punto generico P, l'energia potenziale sia data dalla seguente:

$$V(P) = mgy_P \quad (4.14)$$

Ossia l'energia potenziale è direttamente proporzionale alla quota rispetto al SdR scelto e, dato che è definita a meno di una costante, il lavoro è dato dalla differenza delle potenziali; anche se avessi scelto come riferimento dell'asse y un punto qualunque, non sarebbe cambiato nulla rispetto al risultato ottenuto: se aggiungessi la stessa quantità sia a  $V(A)$  che a  $V(B)$  allora questa costante che viene aggiunta si cancella in quanto per definizione l'energia potenziale è definita a meno di una costante.

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Ottenendo proprio

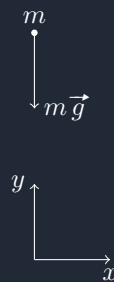
$$\nabla V = mg\hat{j}$$

Dato che io per definizione di gradiente:

$$\vec{F} = -\nabla V \Rightarrow -mg\hat{j}$$

La direzione dell'asse y è un'altra scelta arbitraria che ho fatto a priori nell'esperimento così come l'orientazione degli assi. Ma non cambia niente in quanto fin tanto che seguo le leggi della mano destra posso comunque scegliere qualsiasi sistema di riferimento in qualsiasi verso lo voglia orientare.

Figura 4.3: Forza peso



Nel caso di un corpo in caduta, se si ponesse come riferimento l'asse  $z$  rivolto verso l'alto, allora l'energia meccanica si potrebbe esprimere come:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

Quando  $t = 0$  si ottiene:

$$z = h \quad v = 0 \quad E = mgh$$

Al tempo finale  $t = t_f$ :

$$z = 0 \quad v = v_f \quad E = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Si ha allora l'utile espressione della velocità finale per un corpo in caduta libera:

$$v_F = \sqrt{2gh} \quad (4.15)$$

Se volessi determinare l'equazione di moto, potrei derivare rispetto al vincolo l'energia meccanica e ottenere le seguenti espressioni:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \dot{z}(m\ddot{z} + mg) = 0$$

Questa è l'equazione di moto di un corpo in caduta libera. Dato che la velocità iniziale è nulla, allora si ottiene lo stesso caso che si avrebbe con l'applicazione del teorema delle forze vive:

$$\dot{z} = 0$$

$$m\ddot{z} = -mg$$

Che vale solo se i vincoli sono ideali e se non si muovono: infatti per poter applicare la conservazione dell'energia è necessario avere solamente un vincolo. Nel caso di pochi vincoli è possibile cercare approssimazioni o modellizzazioni che mi consentano di tornare ad avere un vincolo solo (quando possibile) per poter utilizzare la conservazione dell'energia meccanica. Quando non è possibile applicare l'energia meccanica devo risolvere le situazioni fisiche attraverso la dinamica.

### 4.5.2 Forza elastica

Dalla legge della forza elastica ottengo la forza che imprime una molla (ideale) come risposta ad una forza che provochi un certo allungamento  $x$  (con allungamento si intende anche una contrazione della molla).

$$\vec{F}_d = -kx\hat{i}$$

Si può allora prendere in considerazione un lavoro infinitesimo per determinare se è un campo conservativo (oppure farne il rotore) e ottenere la seguente espressione:

$$\delta L = \vec{F}_d \cdot d\vec{r} = -kx\hat{i} \cdot dx\hat{i}$$

L'espressione del lavoro lungo la traiettoria  $AB$ , dove  $A$  e  $B$  sono due punti scelti arbitrariamente:

$$L_{AB} = \int_A^B -kx \, dx = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2 = V(A) - V(B)$$

Questa è proprio la definizione di energia potenziale, dunque il campo è conservativo e posso dunque considerare l'energia potenziale per un punto  $P$  arbitrario ad distanza  $x_P$  dalla lunghezza di riposo della molla come

$$V(P) = \frac{1}{2}kx_P^2$$

Figura 4.4: Moto verticale

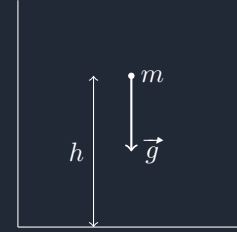


Figura 4.5: La molla ideale



Si può allora determinare il gradiente per la forza elastica

$$\nabla V = kx\hat{i}$$

Quindi essendo:

$$\vec{F} = \nabla V = -kx\hat{i}$$

Allora abbiamo dimostrato che la forza elastica è proprio una forza conservativa. Dato che è definita a meno di una costante, allora posso cambiare l'origine dell'asse  $x$  e cambierebbe solo la forma dell'energia potenziale. Se si tirasse la molla nell'istante  $t = 0$  allora l'energia sarebbe conservata e quindi in ogni istante posso ricavarne la velocità:

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies x = x_0 & v = 0 & E = \frac{1}{2}kx_0^2 \\ t = t_f &\implies x = 0 & v = v_f & E = \frac{1}{2}mv_f^2 \end{aligned}$$

E quindi si trova l'utile relazione per la velocità finale di un oggetto richiamato da una molla ad una distanza di  $x_0$  rispetto alla posizione di riposo della molla:

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}}x_0 \quad (4.16)$$

Con la relazione  $F = ma$  posso ottenere una dimostrazione diversa al posto del rotore:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \end{aligned}$$

Se  $\dot{x}$  è zero si ottiene esattamente l'equazione del moto armonico:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

### 4.5.3 Molla attaccata al soffitto

Nel caso di una molla attaccata al soffitto con una massa che pende da essa, è possibile definire un sistema di riferimento (e considerare ovviamente una molla ideale che non oscilla lungo la direzione perpendicolare rispetto alla forza gravitazionale). Si ha dunque un solo grado di libertà nel mio sistema e posso applicare le definizioni di energia meccanica.

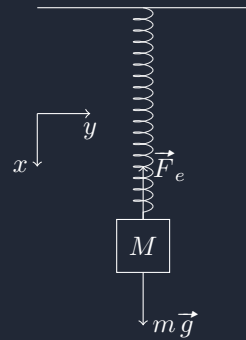
$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx \\ v &= \dot{x} \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \dot{x}(m\ddot{x} + kx - mg) = 0 \end{aligned}$$

Una soluzione è sicuramente  $v = \dot{x}$  mentre l'altra soluzione è data dalla differenziale non omogenea di forma:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g$$

La cui soluzione generale è esattamente:

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{mg}{k} \quad (4.17)$$



## 4.6 Le forze centrali a simmetria sferica

Le forze centrali sono delle forze sempre dirette verso un stesso punto, come la gravità nella gravitazione universale o la forza elettrostatica nell'elettromagnetismo; si dicono inoltre a simmetria sferica poiché il loro modulo è in funzione solamente del raggio vettore. Posso dimostrare che il lavoro di queste forze sia conservativo nella seguente maniera:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \vec{r} = r\hat{u}_r$$

Per cui:

$$d\vec{r} = dr\hat{u}_r + r d\hat{u}_r$$

Dato che il prodotto scalare tra lo stesso vettore è uguale ad 1 ma la somma dei contributi  $dr \cdot \hat{u}_r + \hat{u}_r dr = 0$  allora  $d\vec{r} \perp \hat{u}_r$ , quindi il lavoro diventa (considerato che il primo termine è parallelo al vettore  $\vec{F}$  mentre il secondo termine è perpendicolare):

$$\delta L = F(r)\hat{u}_r \cdot (dr\hat{u}_r + r d\hat{u}_r) = F(r)dr.$$

Per cui preso l'integrale per uno spostamento continuo e finito

$$L_{AB} = \int_A^B F(r)dr = G(r_B) - G(r_A)$$

Dove  $G(r)$  è una primitiva ausiliaria che ho definito come primitiva dell'integrale generica, dunque, posta uguale all'energia potenziale

$$V(r) = -G(r)$$

Posso risalire alla definizione di energia potenziale e quindi questo tipo di forze sono conservative.

### 4.6.1 Forze a simmetria sferica non centrali

Le forze non centrali a simmetria sferica sono delle forze il cui modulo dipende dalla distanza e dal fatto che non è centrale (per cui la direzione non è radiale e quindi diretta verso un punto specifico). Queste forze non conservano il momento angolare. Prendendo in considerazione una curva qualsiasi posso ottenere la circuitazione come

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = F(r)2\pi R$$

Essendo questo integrale non uguale a zero, allora la forza non è conservativa. Per cui tutte le forze non centrali a simmetria sferica non sono conservative.

### 4.6.2 Forze centrali non a simmetria sferica

Queste forze sono centrali ma non hanno una simmetria sferica per cui il loro modulo cambia se cambia la loro posizione sulla sfera (ma non la distanza dal centro). In questo caso la forza sarà data dalla seguente relazione:

$$\vec{F} = F(r) \cos \theta \hat{u}_r$$

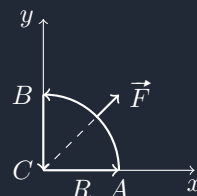
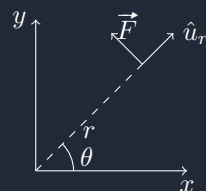
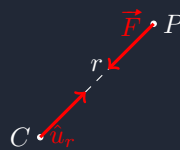
Allora l'integrale di linea:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_C^A \vec{F} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F} d\vec{r} + \int_B^C \vec{F} d\vec{r}$$

Quindi l'integrale di linea, risolvendo tutti gli integrali spezzati diventa:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{r=0}^{r_A=R} F(r)dr + 0 + 0$$

Così come nel disegno, la forza non è simmetrica rispetto ad una sfera poiché non dipende solo ed esclusivamente dal modulo del raggio vettore che congiunge la forza al centro della sfera ideale ma anche dall'orientazione del vettore forza.



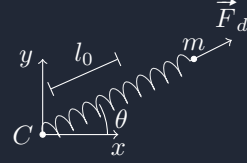
### 4.6.3 La forza di richiamo di una molla vista come forza centrale a simmetria sferica

Attaccando una molla ad vincolo qualsiasi, quando si tira la molla si ha una forza di richiamo verso il centro della molla: la forza è di tipo centrale a simmetria sferica e avrà quindi una certa energia potenziale e sarà anche conservativa .

Figura 4.6: Molla tridimensionale

$$\vec{F}_d = -k(r - l_0)\hat{u}_r$$

$$V = \frac{1}{2}k(r - l_0)^2$$



Allora l'energia meccanica diventa nel caso di un certo angolo rispetto da uno degli assi nel piano di giacenza della molla:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2$$

$$\vec{r} = r\hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

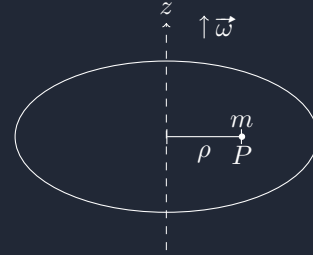
$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

La sola energia meccanica non basta per risolvere il problema poiché si hanno due gradi di libertà.

### 4.6.4 Piattaforma ruotante con $\dot{\vec{\omega}} = 0$ . Risoluzione mediante il teorema delle forze vive

Considerata una piattaforma ruotante ed un sistema di riferimento  $S'$  solidale con la piattaforma e avente origine nel centro ed asse  $z$  coincidente con l'asse di simmetria. Rispetto ad un osservatore inerziale posto fuori dalla piattaforma il moto non è inerziale e risulta accelerato da delle forze che non sembrano rispettare le leggi della dinamica. Un punto  $P$  sulla piattaforma di massa  $m$  a distanza  $\rho$  dal centro della piattaforma è soggetto allora ad una certa forza di trascinamento

Figura 4.7: La piattaforma ruotante



$$\vec{F}_t = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\rho\hat{u}_\rho + z\hat{k})) = +m\omega^2\rho\hat{u}_\rho$$

Vale solo il contributo di  $\rho$  poiché l'oggetto non si muove lungo la verticale. Nel caso di un piccolo spostamento  $d\vec{r}$  allora si ottiene:

$$d\vec{r} = d\rho\hat{u}_\rho + \rho d\hat{u}_\rho + dz\hat{k}$$

Allora si ottiene proprio il lavoro come:

$$\delta L = \vec{F}_t d\vec{r} = (m\omega^2\rho\hat{u}_\rho) \cdot (d\rho\hat{u}_\rho + \rho d\hat{u}_\rho + dz\hat{k}) = m\omega^2\rho d\rho$$

L'energia potenziale centrifuga è data da

$$V = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$$

La forza di coriolis

$$\vec{F}_{co} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}$$

La forza di Coriolis non fa lavoro poiché è sempre ortogonale allo spostamento infatti:

$$\delta L = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (-2m\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot dt = 0$$

Fa sempre lavoro zero e quindi non altera il bilancio energetico mentre se si muove allora si cambiano le condizioni e quindi potrebbero non valere più le condizioni di vincolo liscio.

Nel SDR non inerziale in assenza di attriti e altre forze, si conserva l'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2$$

Per un osservatore esterno alla piattaforma in un SdR inerziale, l'energia meccanica non si conserva. Infatti un'osservatore esterno vede che l'energia cinetica cambia e non vede altre forze conservative (la centrifuga non c'è) tuttavia l'energia meccanica non si conserva poiché c'è  $\omega$  costante data dal motore della piattaforma ruotante che compie lavoro per tenere un certo regime di rotazione della piattaforma. Nel caso della pallina che è su questa piattaforma:

$$\begin{array}{llll} t = 0 & \rho = \rho_0 & \dot{\rho} = 0 & E = -\frac{1}{2}m\omega^2\rho_0^2 \\ t = t_f & \rho = R & \dot{\rho} = ? & E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \end{array}$$

Dato che l'energia si conserva allora posso uguagliarle e ottenere:

$$\dot{\rho} = \pm\omega\sqrt{R^2 - \rho_0^2}$$

Ha senso? Si perché  $R$  è il bordo della giostra e quindi quella radice è ben definita e quindi è vero sia per la conservazione dell'energia ed in tutti i casi del movimento da  $\rho_0$  a  $R$  e viceversa. Derivando l'espressione dell'energia posso ottenere l'equazione di moto

$$\dot{\rho}(m\ddot{\rho} - m\omega^2\rho) = 0$$

#### 4.6.5 Il sistema dell'antimolla

Se una molla è fissata al centro di una piattaforma ruotante con una massa, se vince il contributo della rotazione allora si ha una antimolla poiché la massa attaccata alla molla tende ad uscire dalla piattaforma ruotante vincendo la costante della molla; altrimenti si ha un moto armonico semplice se  $k \gg \omega$ . Posso descrivere l'energia meccanica come il contributo rotatorio tangenziale più il contributo rotatorio puro e la forza di richiamo della molla:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \frac{1}{2}k\rho^2$$

### 4.7 Studio dell'equilibrio del sistema

Nello studio di un sistema con vincoli ideali e forze conservative, allora lo studio della posizione di equilibrio è relativamente facile. In un qualsiasi SdR, tenendo conto delle forze apparenti e riconducendoci dunque al caso ideale, un corpo rimane fermo (equilibrio più semplice) quando la risultante è zero. Se le forze sono conservative allora se la risultante è nulla vuol dire che si ha un solo grado di libertà e dunque si può esprimere la forza risultante come il gradiente dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = 0$$

Nei campi di forze conservativi, è spesso utili individuare i punti in cui l'energia potenziale assume lo stesso valore. Il luogo geometrico di tali punti è detta **superficie equipotenziale**. Per ogni spostamento lungo questa superficie il lavoro infinitesimo  $\delta L$  è nullo e da ciò segue che la forza è sempre perpendicolare rispetto alla superficie. Questa è proprio la proprietà generale del gradiente di una funzione scalare. L'energia potenziale allora avrà un minimo se

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

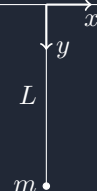
Posso poi valutare la derivata seconda rispetto al grado di libertà per determinare la stabilità dell'equilibrio: se la derivata seconda è maggiore di zero, allora l'equilibrio è **stabile**, altrimenti **instabile**.

#### 4.7.1 L'equilibrio nel pendolo

Considerato un pendolo semplice, è possibile impostare il sistema di riferimento in modo tale che l'unico grado di libertà sia l'angolo  $\theta$ : si identifica col SdR centrato nella massa l'energia potenziale gravitazionale in base alla quota assunta dalla massa del pendolo rispetto al SdR centrato sul perno del pendolo:

$$V = mgy$$

Figura 4.8: Pendolo



Le energie potenziali per un punto  $V_P$  si riferisce alla quota rispetto alla massa  $m$  per cui quando  $\theta = 0$  allora l'energia potenziale nel sistema di riferimento scelto varierà di un certo  $\Delta V = mgL \cos \theta$ :

$$V_P = (L - L \cos \theta)mg$$

Derivando:

$$\frac{dV_P}{d\theta} = -mgL(-\sin \theta) = mgL \sin \theta$$

Allora quando  $\theta = 0$  la derivata è zero. Se avessi voluto considerare invece la posizione della massa  $m$  non in funzione dell'angolo rispetto alla verticale passante per un dato sistema di riferimento, ma secondo la sua posizione  $(x, y)$  rispetto ad un dato SdR fisso, allora non avrei potuto trovare l'equazione di moto dall'energia potenziale. La scelta intelligente del grado di libertà si rivela essere dunque cruciale per poter analizzare le situazioni fisiche. Se il pendolo fosse composto da un filo resistente alla trazione, allora  $\theta = 0$  sarebbe l'unico punto di equilibrio, altrimenti, se si considerasse il pendolo costituito da una sbarra, i punti di equilibrio sarebbero due:

$$\theta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

È possibile ora valutare le condizioni di equilibrio e determinare la loro stabilità attraverso la derivata del secondo ordine:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = mgL \cos \theta$$

Quindi:

$$V''(0) = mgL > 0, \quad V''(\pi) = -mgL < 0,$$

Quindi in  $\theta = \pi$  c'è proprio un massimo (equilibrio instabile) per l'energia potenziale ed un minimo per  $\theta = 0$  (equilibrio stabile). In più dimensioni la stazionarietà si ottiene con le derivate parziali di tutte le variabili:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \dots$$

E quindi facendo la derivata parziale due volte rispetto ad  $x, y, \dots$  allora la sua forma può essere o un massimo o un minimo in funzione proprio delle variabili si ottengono o paraboloidi, oppure una sella: una condizione di minimo in una variabile ed una di massimo in un'altra. Sarebbe stabile in una direzione ma sostanzialmente è instabile: nel punto di sella infatti non c'è una vera stabilità (analisi due).

#### 4.7.2 L'equilibrio di una molla sul soffitto

Nella situazione di una molla appesa al soffitto, scelto come SdR il punto di riposo della molla (e considerato che la molla non oscilla rispetto alla direzione della forza peso) posso impostare l'energia potenziale di una massa  $m$  a distanza  $x$  dalla posizione di riposo:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - mgx$$

Per trovare la condizione di equilibrio faccio allora la derivata rispetto ad  $x$ :

$$\frac{dV}{dx} = kx - mg$$

E quindi si annulla proprio per  $kx = mg$  ossia dove le due forze si eguagliano in funzione dell'unica coordinata  $x$  e quindi un solo punto di equilibrio. Troviamo ora se è instabile o stabile attraverso la derivata seconda:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k > 0 \implies \text{equilibrio stabile}$$

### 4.7.3 L'equilibrio nell'antimolla (Non da fare)

Nell'antimolla l'asta ha massa zero e vincola il punto materiale ad avere solo un grado di libertà facendo sì che l'energia potenziale della massa diventi proprio:

$$V = \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl \cos \theta$$

E allora si ottiene l'espressione, utilizzando taylor per il coseno nel caso in cui si ha  $\theta \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \cos \theta &\approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \\ V &\approx \frac{1}{2}kL^2\theta^2 + mgl \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Facendo la derivata prima si ottiene la soluzione:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= L(kL - mg)\theta \\ \theta &= 0 \end{aligned}$$

C'è anche il caso in cui  $kL = mg$ ; facendo invece la derivata seconda si ha:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = L(kL - mg)$$

Se  $kL > mg$  allora la derivata seconda è maggiore di zero ed ho un equilibrio stabile, altrimenti, se la derivata seconda è minore di zero, ho un equilibrio instabile; se sono uguali allora fisicamente la derivata seconda è zero e significa che è un equilibrio "indifferente".

Figura 4.9: Antimolla



## 4.8 Studio del moto con un piccolo spostamento dall'equilibrio

In funzione di una certa distanza  $x$  rispetto alla posizione di equilibrio  $x_{eq}$  è dato dallo sviluppo di taylor della funzione dell'energia potenziale:

$$V(x) = V(x_{eq}) + \frac{dV}{dx}\bigg|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq}) + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x=x_{eq}}(x - x_{eq})^2 + \dots$$

Allora date le definizioni di prima con le derivate prime e seconde si ha proprio:

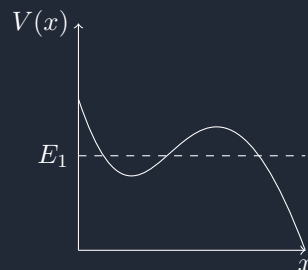
$$V(x) = c + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

Dove  $V_{eq} = c$  e  $k$  è un parametro della derivata seconda che può essere positivo o negativo.

$$k = \begin{cases} k > 0 & \text{moto armonico} \\ k < 0 & \text{moto esponenziale} \end{cases}$$

Questo vuol dire che possiamo sapere, discostandoci di poco rispetto all'equilibrio, il tipo di moto che accadrà. Spesso si trova il grafico rispetto al parametro e quindi, quando si ha un vincolo liscio, si conserva l'energia e quindi essendo l'energia la somma tra la potenziale e la cinetica, l'energia cinetica è sempre positiva per definizione. Questo però ci pone dei limiti poiché una è sempre positiva o zero e l'altra cambia sempre di segno e l'energia meccanica è sempre costante. Si ha quindi una situazione in cui ci sono alcune configurazioni permesse mentre altre non sono proprio possibili a causa della natura dell'energia cinetica: nel caso in figura le configurazioni permesse sono sempre quelle sotto l'energia meccanica, altrimenti l'energia cinetica dovrebbe essere negativa.

Figura 4.10: Il grafico dell'energia potenziale



$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(x) \\ v &= \pm \sqrt{2\frac{E - V(x)}{m}} \end{aligned}$$

Per costruzione, dipendendo da  $x$  cambierà il segno. Si può allora fare qualcosa di più e quindi essendo la velocità

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad v = \dot{s}, \quad s = s(x).$$

Posso separare le variabili  $s, t$  e quindi:

$$\frac{ds}{\pm \sqrt{2 \frac{E-V(s)}{m}}} = dt$$

Prendendo allora l'integrale da entrambe le parti tra due intervalli di tempo  $t_1, t_2$  e  $s_1, s_2$  allora:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\pm \sqrt{2 \frac{E-V(s)}{m}}} = \int_{t_1}^{t_2} dt$$

$$2(t_2 - t_1) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{\frac{2m}{E - V(s)}} ds.$$

In linea di principio posso calcolarmi questo integrale nelle piccole oscillazioni. Si introduce allora il concetto di **barriera di potenziale**: ossia l'altezza oltre la quale la pallina non può muoversi tra due cunette, non può allora andare nell'altra cunetta e classicamente non può essere attraversato. (fluidi)

## Parte III

# Dinamica dei sistemi e corpo rigido

## Capitolo 5

# Dinamica dei sistemi

### 5.1 Sistemi non approssimabili ad un punto materiale

Nella dinamica dei sistemi non si hanno più sistemi formati da un solo punto materiale ma da degli oggetti estesi che possono essere divisi in tanti punti materiali per studiarne la dinamica. In generale posso scegliere quali corpi posso integrare nel mio sistema a seconda di come è più comodo. Per ciascun punto conosco massa e vettore posizione e posso allora determinare il centro di massa che, in un sistema discreto, è il un punto ideale definito dal vettore

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad (5.1)$$

dove  $m_i$  è la massa di ogni punto materiale. Posso definire nella stessa maniera la massa del centro di massa come la somma delle masse totali e quindi ottenere l'espressione di prima come:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i.$$

In un sistema continuo non posso semplicemente fare l'integrale di questa espressione ma devo invece considerare un volumetto elementare di massa molto piccola  $dm$  e volume  $dV$  e, se sono sufficientemente piccole, potrò utilizzare la relazione  $dm = \rho dV$ , che è funzione della posizione  $\vec{r}$ ; posso sostituire questa espressione con un integrale come:

$$\vec{r} = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV}$$

Possiamo definire la **densità volumetrica di massa** (o semplicemente densità) come il limite a cui tende il suo valore medio quando tende a zero il volume:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (5.2)$$

Possiamo anche definire la **densità superficiale** se il sistema è schematizzabile come una superficie:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} \quad (5.3)$$

Nel caso in cui il sistema sia schematizzabile con una linea posso definire la **densità lineare**:

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dl} \quad (5.4)$$

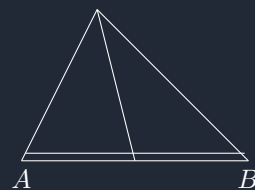
## 5.2 Centro di massa nelle figure complesse

### 5.2.1 Le figure piane

Nel caso di due masse, il centro di massa si trova tra le due masse. Nel caso in cui una delle due masse sia molto maggiore dell'altra allora il centro di massa sarà spostato verso la massa maggiore. Ma se ci fossero molte più masse? Se io avessi delle figure geometriche semplici, allora il centro di massa risiede sull'asse di simmetria delle masse. Si chiama allora asse di simmetria un asse sul quale ogni massa è tale per cui c'è sempre un'altra massa a distanza uguale. Un sistema si dice **omogeneo** se la sua densità è costante, altrimenti è **non omogeneo**: nel caso del vettore del centro di massa:

$$\vec{r}_C = \frac{\int_V \vec{r} \rho dV}{\int_V \rho dV} \Rightarrow \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV}$$

Nel caso di simmetrie o strutture note, come nel caso di una figura piana di cui conosco gli assi di simmetria tipo il quadrato, il centro degli assi di simmetria sarà proprio il centro del quadrato. Nel caso di figure meno semplici, come già il triangolo, la posizione del centro di massa non è intuitiva poiché il centro del triangolo non è così evidente. Scegliendo uno dei lati possiamo prenderne una fetta parallela al lato scelto ed indicarne il centro e ripetere il procedimento fino a tracciare la mediana rispetto all'angolo opposto, faccio lo stesso per tutti gli altri lati e quindi, essendo che tutte e tre le mediane si incontrano esattamente a due terzi della lunghezza delle mediane, allora quello è il centro di massa del triangolo.



### 5.2.2 Il centro di massa nelle figure solide: l'esempio del cono

Nel caso di una figura solida come un cono, lo scopo è cercare di ridurre gli integrali bi-tridimensionali in integrali unidimensionali con certe approssimazioni e con certi procedimenti. Nel caso in cui il cono considerato sia omogeneo, posso considerare delle piccole circonferenze e calcolarne il volume infinitesimo per poter determinare il centro di massa:

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$$

considerando che il cono abbia densità uniforme e che sia simmetrico rispetto all'asse  $x$  sul quale risiede la sua altezza, il volume infinitesimo da trovare di una sezione  $dx$ :

$$dV = 2\pi r dx$$

Dato che conosco la distanza dalla cima ( $h$ ) posso ricavare il raggio  $r$  in funzione del raggio della base  $R$  e della sua quota  $x$  rispetto alla punta del cono.

$$r = \frac{R}{h}x \Rightarrow dV = \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 dx$$

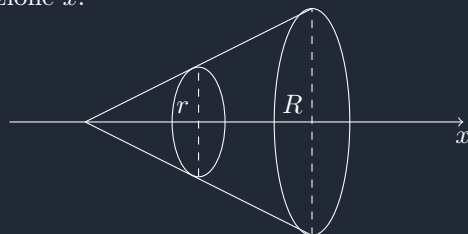
Sono passato da un integrale tridimensionale fino ad un integrale unidimensionale:

$$\vec{r}_c = \frac{\int x \left( \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \right)}{\int \left( \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \right)} dx$$

Allora risolvendo:

$$x_c = \frac{\left. \frac{x^4}{4} \right|_0^h}{\left. \frac{x^3}{3} \right|_0^h} = \frac{3}{4}h$$

Figura 5.1: Il cono.  $r$  è funzione della posizione  $x$ .



### 5.3 Quantità di moto

Possiamo definire la quantità di moto come il *vettore libero*:

$$\vec{q} = m \vec{v}$$

la quantità di moto del centro di massa è proprio la somma dei contributi di tutte le quantità di moto all'interno del sistema dato dalla seguente:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Analogamente posso considerare la quantità di moto di un sistema finito come l'integrale dei singoli prodotti della velocità per il differenziale della massa:

$$\vec{Q} = \int \vec{v} \, dm \quad (5.5)$$

Se volessi ottenere la velocità del centro di massa allora dovrei derivare rispetto al tempo la posizione del centro di massa:

$$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{M}$$

Se si deriva invece la quantità di moto del sistema si ottiene la derivata delle quantità di moto dei singoli punti materiali oppure la somma delle masse per l'accelerazione dei singoli punti:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{q}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i$$

ossia la risultante della forza che agisce sul corpo:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (5.6)$$

Possiamo scomporre la forza totale come la somma tra le forze esterne al sistema e le forze interne (dovute all'interazione tra i vari corpi del sistema stesso):

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(INT)} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Per le forze interne devo considerare il terzo principio della dinamica per ogni punto, che mi porta, per ogni forza applicata ad un punto, a dire che ce ne sia una uguale e contraria per ogni punto del sistema; di conseguenza la sommatoria delle forze interne è equivalente a zero:

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(INT)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \vec{F}_{i,j} = 0}$$

Dalla prima cardinale si ha che la derivata della quantità di moto non è altro che la sommatoria delle forze esterne applicate al corpo:

$$\dot{\vec{Q}} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{(EXT)} = \vec{F}^{(EXT)}$$

che permette di descrivere i sistemi più complessi con descrizioni molto semplici. Si arriva anche alla seconda equazione del centro di massa:

$$\boxed{\vec{F} = M \vec{a}_c} \quad (5.7)$$

Se la risultante delle forze esterne che agisce su di un corpo è zero, allora la quantità di moto è conservata poiché

$$\vec{F}^{EXT} = 0 \implies \dot{\vec{Q}} = 0 \implies \vec{Q} = \text{costante}$$

che prende il nome di **prima equazione cardinale della dinamica**. Quando un sistema non è soggetto a forze esterne, e dunque la sua quantità di moto rimane costante (cioè si conserva), allora tale sistema prende il nome di **isolato**.

### 5.3.1 Esempio di sistema isolato

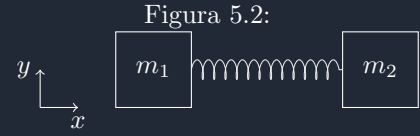
Considerando un sistema composto da due masse attaccate ad una molla, posso dire che questo sistema è isolato in quanto non agiscono forze esterne (la forza peso sulle  $y$  è bilanciata dalla reazione vincolare del piano). Questo sistema non riesco ad esprimerlo mediante  $F = ma$  e nemmeno attraverso la conservazione dell'energia poiché ho due gradi di libertà. Essendo che la forza elastica è una forza interna, lungo l'orizzontale si conserva la quantità di moto; dunque, impostando la quantità di moto, posso ridurre il grado di libertà del sistema ad uno solo: è quindi possibile applicare il principio della conservazione dell'energia meccanica:

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l_0)^2$$

e metterlo a sistema con la conservazione della quantità di moto lungo l'asse  $x$ :

$$Q_x = m_1v_1 + m_2v_2$$

La quantità di moto mi permette dunque, sotto specifiche condizioni, di prendersi in carico un grado di libertà.



## 5.4 Il Momento angolare

Dato che un sistema di  $n$  punti ha  $n \cdot 3$  gradi di libertà, allora dobbiamo trovare un'analoga per le forze esterne in modo tale che possa descrivere tutti i gradi di libertà. Si definisce allora il momento angolare per un sistema di punti come

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{q}_i = \sum_{i=1}^n \vec{l}_i \quad (5.8)$$

Il momento angolare è una quantità vettoriale applicata rispetto ad un punto qualsiasi  $\Omega$  che prende il nome di **polo**, il quale non deve per forza coincidere con l'origine degli assi cartesiani (è totalmente arbitrario), che descrive il momento rotatorio di un certo sistema di punti rispetto al polo di riferimento. Per ciascun punto del sistema posso definire il vettore posizione e spostamento come  $(P_i - \Omega)$  e dunque tutte le definizioni del momento angolare sono ugualmente valide, così come la somma dei singoli momenti angolari ed il momento angolare del sistema o del singolo punto è una quantità vettoriale rispetto ad un punto qualsiasi  $\Omega$ . Scegliendo un sistema di riferimento qualsiasi, posso allora definire la distanza rispetto all'origine delle coordinate come:

$$\vec{r}_{i,\Omega} = \vec{r}_i - \vec{r}_\Omega$$

## 5.5 Seconda equazione cardinale della dinamica

Derivando rispetto al tempo il momento angolare, ottengo la seguente espressione:

$$\dot{\vec{L}}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i - \vec{v}_\Omega) \times m_i \vec{v}_i$$

Noi sappiamo che per la seconda di Newton la risultante delle forze è proprio la somma delle masse per accelerazione, inoltre, dato che  $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$ , posso fare la somma solo sul secondo prodotto vettoriale della seconda somma ottenendo allora una nuova espressione della derivata del momento angolare:

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i - \vec{v}_\Omega \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Considerando allora la definizione di momento di una forza rispetto ad un polo  $\Omega$  qualsiasi, come:

$$\vec{M} = (P - \Omega) \times \vec{F} \quad (5.9)$$

e dato che le forze sono la somma delle forze interne ed esterne, posso esprimere la singola forza agente su di un punto  $P_i$  come:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i}^n \vec{F}_{i,j}^{(INT)} + \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Con queste considerazioni posso esprimere la somma dei momenti torcenti come:

$$\sum_{i=1}^n (P - \Omega) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n (P_i - \Omega) \times F_{i,j}^{(INT)} + \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i^{(EXT)}$$

Dato che la sommatoria delle forze interne è zero e non contribuisce al momento, l'espressione della derivata del momento angolare prende il nome di **seconda equazione cardinale della dinamica**:

$$\boxed{\dot{L}_\Omega = \vec{M}_\Omega^{(EXT)} - \vec{v}_\Omega \times \vec{Q}} \quad (5.10)$$

Il secondo termine è nullo quando si verifica una di queste tre condizioni:

1.  $\vec{v}_\Omega = 0$ : ossia il polo è fisso rispetto al sistema di riferimento inerziale considerato;
2.  $\Omega = C_M$ : ossia il polo coincide con il centro di massa;
3.  $\vec{v}_\Omega \times \vec{v}_{CM} = 0$ : la velocità del polo e del centro di massa sono parallele tra di loro.

Questa equazione presenta, così come la prima cardinale, 3 gradi di libertà.

### 5.5.1 Il cambio di polo(rinuncia agli studi)

Se invece di determinare il momento angolare rispetto al polo  $\Omega$ , decidessi di utilizzarsi il polo  $\Omega'$ , l'espressione del momento angolare non cambierebbe assolutamente. Infatti, partendo dall'espressione del momento angolare:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n ((P_i - \Omega') - (\Omega' - \Omega)) \times m_i \vec{v}_i$$

Tornerei a quella di partenza con  $\Omega \equiv \Omega'$ . Se volessi spezzare invece la sommatoria si otterrebbe:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_{\Omega'} + (\Omega' - \Omega) \times \vec{Q}$$

Se la quantità di moto è zero allora il momento angolare non dipenderebbe dal polo scelto: questo vuol dire che il momento angolare, se la quantità di moto è nulla, è indipendente dal polo scelto. Dato che si può esprimere anche il momento delle forze esterne rispetto a questo polo nuovo  $\Omega'$ :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{TOT}^{EXT} &= \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega') \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n (\Omega' - \Omega) \times \vec{F}_i = \\ &= \vec{M}_{TOT,\Omega'}^{EXT} + (\Omega' - \Omega) \times \vec{F}_i^{EXT} \end{aligned}$$

Se cambio quindi il polo il momento cambia, se però la risultante delle forze esterne è uguale a zero, allora il momento risultante delle forze esterne è indipendente dal polo. Se  $\Omega' = C_M$  allora il momento angolare rispetto ad un polo generico è il momento angolare rispetto al centro di massa + un contributo:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}_C + (C - \Omega) \times M \vec{v}_C \quad (5.11)$$

Il contributo  $(C - \Omega) \times M \vec{v}_C$ , è il momento angolare che si deve aggiungere al centro di massa quando il corpo ruota intorno ad un asse che non passa per il centro di massa. L'espressione dunque del momento angolare rispetto ad un polo  $\Omega$  qualsiasi prende il nome di **terzo teorema del centro di massa**. Si vede che il momento angolare è sempre riferito ad un certo asse: dato che il momento delle forze esterne non dipende dal punto di applicazione su di un asse, allora anche il momento angolare non dipende dal punto di applicazione su di un asse. Se invece si avesse  $\Omega = C_M$  e  $\vec{v}_\Omega = 0$ ? si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \vec{F}^{TOT} = \vec{Q} \implies \vec{F}^{EXT} = 0 \implies \vec{Q} \text{ const} \\ \vec{M}_\Omega^{EXT} = \vec{L}_\Omega \implies \vec{M}_\Omega^{EXT} = 0 \implies \vec{L}_\Omega \text{ const} \end{cases} \quad (5.12)$$

Che è proprio la **terza cardinale**: questo sistema di due equazioni equivale ad un sistema di sei equazioni scalari e mi consente di determinare il comportamento di sistemi che hanno al massimo 6 gradi di libertà: questo è il motivo per il quale il problema dei tre corpi in astrofisica non si può risolvere attraverso la dinamica.

### 5.5.2 Esempio per un sistema di due punti

Per un sistema di due punti:

$$\begin{aligned}\vec{Q} &= \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \text{const} \\ \dot{\vec{Q}} &= 0 = \dot{\vec{q}}_1 + \dot{\vec{q}}_2 \\ \vec{F}_{1,2} &= -\vec{F}_{2,1}\end{aligned}$$

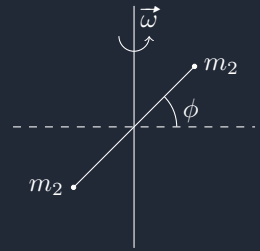
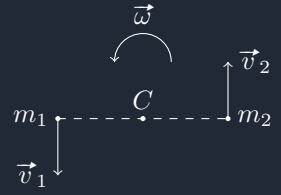
Ottenendo metà del secondo principio della dinamica. Posso esprimere il momento angolare come:

$$\begin{aligned}\vec{L}_C &= (P_1 - C) \times m_1 \vec{v}_1 + (P_2 - C) \times m_2 \vec{v}_2 \\ m_1 &= m_2 = m \\ |P_1 - C| &= |P_2 - C| = d \\ |\vec{v}_1| &= \omega d, |\vec{v}_2| = \omega d\end{aligned}$$

Si può ora esprimere tutto in coordinate polari attraverso l'utilizzo di un angolo  $\phi$  e quindi:

$$\begin{cases} (P_1 - C) = d\hat{u}_r \Rightarrow \vec{v}_1 = d\dot{\hat{u}}_r = d\dot{\phi}\hat{u}_\phi \\ (P_2 - C) = d\hat{u}_r \Rightarrow \vec{v}_2 = d\dot{\hat{u}}_r = d\dot{\phi}\hat{u}_\phi \end{cases}$$

In un moto di sola rotazione (non c'è traslazione del sistema che sta ruotando) e quindi la scelta del polo non è obbligatoria. In generale il momento angolare aiuta quando si hanno fenomeni di rotazione.



## 5.6 Le forze parallele

### 5.6.1 Il centro delle forze parallele

Il momento angolare non è sempre parallelo alla velocità angolare, infatti date le equazioni cardinali si possono ottenere:

$$\begin{cases} \vec{F}^{(EXT)} = \dot{\vec{Q}}_{TOT} \\ \vec{M}_\Omega = \dot{\vec{L}}_\Omega + (\vec{r} \times \vec{Q}_{TOT}) \end{cases}$$

Se tutte le forze applicate su di un corpo sono parallele, allora posso dimostrare che questo sistema di forze è equivalente al semplice sistema costituito solo dalla forza:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \left( \sum_{i=1}^n F_i \right) \hat{u}$$

applicata nel punto individuato dal vettore posizione

$$\vec{r}_F = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$$

Ossia la media pesata delle forze totali. Questi due sistemi di forza hanno la medesima risultante, dunque bisogna dimostrare che abbiano lo stesso momento rispetto ad un polo qualsiasi (per esempio l'origine):

$$\vec{M} = \sum_i (\vec{r}_i \times F_i \hat{u}) = \left( \sum_i F_i \vec{r}_i \right) \times \hat{u} = \vec{r}_F \times \vec{F}$$

A questo punto, un sistema di forze parallele contribuisce al momento del sistema come se si considerasse una sola forza risultante posta alla distanza  $\vec{r}_F$  (che è esattamente la media delle distanze) il cui punto nello spazio di applicazione prende il nome di **centro delle forze parallele**.

### 5.6.2 Il caso della forza peso

Nel caso della forza peso, considerata la forza peso come:

$$\vec{g} = -g\hat{k}$$

posso definire la singola forza peso agente sul singolo punto di massa  $m_i$  del sistema come

$$\vec{F}_i = -m_i g \hat{k}$$

dalle relazioni precedenti possiamo definire un punto  $G$  che prende il nome di **baricentro**: ossia il punto nel quale si può applicare la risultante delle tante forze peso (dato che sono parallele); per corpi non troppo estesi coincide con il centro di massa:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \vec{r}_C \quad (5.13)$$

Questo punto prende anche il nome di **centro di gravità**. E' utile ricondursi a sistemi di forze parallele in situazioni complesse come nel caso di reazioni vincolari esercitate da piani lisci su di un corpo esteso oppure nel caso in cui si voglia considerare le forze di trascinamento in un un SdR non inerziale:

$$\vec{F}_{\tau,i} = -m_i \vec{a}_{O'}$$

## 5.7 Lavoro ed energia nei sistemi. Teoremi di Konig

Per un sistema di punti è ragionevole pensare che l'energia cinetica sia la somma dell'energia cinetica di tutti i punti. Dato quindi un sistema di riferimento  $S$  esterno al sistema ed un sistema di riferimento  $S'$  interno al sistema (con terna di assi sempre parallele a quella del sistema fisso  $S$ ) posso definire il vettore  $\vec{r} = (O' - O)$  e le distanze dei punti rispetto al sistema di riferimento  $S$  come:

$$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_C$$

Dove  $C$  è il centro del sistema di riferimento  $S'$ ,  $O$  è il centro del sistema di riferimento  $S$  e  $\vec{r}_i$  il vettore posizione di ogni punto rispetto al sistema di riferimento  $S'$ . Data allora la definizione del baricentro come media pesata delle forze, si può ottenere:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}'_i + \vec{r}_C)}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

e quindi per definizione di centro di massa

$$\sum m_i \vec{r}'_i = 0$$

Derivando allora rispetto al tempo si ha la quantità di moto che si conserva:

$$\sum m_i \vec{v}'_i = \vec{Q}' = 0$$

Questo dimostra che in un sistema di riferimento con origine nel centro di massa, la quantità di moto del sistema materiale è sempre nulla. Derivando rispetto al tempo nuovamente si ha che la sommatoria delle forze è zero, ossia la prima cardinale. Se il sistema  $S'$  è in traslazione rispetto al sistema  $S$ , allora la sua velocità di trascinamento sarà data da

$$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_C \implies \vec{v}_\tau = \vec{v}_C$$

Le relazioni che intercorrono tra un sistema fisso  $S$  ed il sistema di corpi  $S'$  in moto relativo di pura traslazione prendono il nome di **Teoremi di Konig**.

### 5.7.1 Teorema di Konig per l'energia cinetica

Possiamo studiare e dimostrare il teorema di Konig per l'energia cinetica, questo ci dice che: l'energia cinetica di un sistema di punti è esattamente la somma delle energie cinetiche di tutti i punti del sistema sommato al contributo dell'energia cinetica del centro di massa:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_C) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{v}_C) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_C^2 \end{aligned}$$

I singoli termini allora indicano grandezze diverse: il primo termine è proprio l'energia cinetica rispetto al centro di massa, il secondo termine è sempre zero mentre la terza grandezza è l'energia cinetica del centro di massa. Il teorema di Konig per l'energia cinetica ci dice proprio che l'energia cinetica di un sistema è sempre esprimibile come la somma dell'energia cinetica del centro di massa come se avesse la massa in un punto e velocità del centro di massa, sommato ad un termine che è l'energia cinetica rispetto al centro di massa per ogni punto.

Per quanto riguarda il lavoro delle forze interne posso definire, con la generalizzazione del teorema delle forze vive, che

$$\delta L_i = dK_i$$

Quindi posso sommare successivamente tutte le particelle del sistema come

$$\sum_{i=1}^n \delta L_i = \sum_{i=1}^n dK_i = dK$$

Quindi il lavoro complessivo sia delle forze interne che esterne equivale proprio alla differenza di energia cinetica tra due configurazioni possibili  $A$  e  $B$ . Il lavoro delle forze interne, come si vedrà per il corpo rigido, è sempre uguale a zero, dunque il teorema di Konig e delle forze vive ci consentono di esprimere il lavoro delle forze totali come solo il lavoro delle forze esterne.

### 5.7.2 Teorema di Konig per il momento angolare

Possiamo definire il momento angolare rispetto al polo  $\Omega$  di un sistema di corpi come:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i$$

Allora, siccome il momento angolare è uguale anche cambiando polo, posso decidere di utilizzare un "polo intermedio":

$$\sum_{i=1}^n ((P_i - C) + (C - \Omega)) \times m_i (\vec{v}_i + \vec{v}_C)$$

Spezzando tutto allora:

$$\sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n (C - \Omega) \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}_C + \sum_{i=1}^n (C - \Omega) \times m_i \vec{v}_C$$

Se scegliessi il polo  $\Omega$  come il centro del sistema di riferimento (non cambia nulla per definizione), allora il secondo ed il terzo termine sono zero poiché uno è esattamente la distanza dal centro meno la distanza dal centro; l'altro con  $P_i - C$  è esattamente (quando sommo tutte le masse) la distanza dal centro di massa dal centro di massa. Gli altri due pezzi sono combinati ottenendo:

$$\vec{L}_\Omega = \vec{L}'_C + (C - \Omega) \times M \vec{v}_C \implies \vec{L}_\Omega = \vec{L}'_C + \vec{r}_C \times \vec{Q}$$

Il primo termine è proprio il momento angolare rispetto al centro di massa:

$$\vec{L}'_C = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i \vec{v}_i$$

mentre il secondo termine è il momento angolare del centro di massa rispetto ad un dato asse di rotazione che non passa per il centro di massa.

$$(C - \Omega) \times M \vec{v}_C$$

Questa relazione è l'analogia che si è trovata per il momento angolare quando si ha cambiamento di polo. In meccanica quantistica il primo termine è proprio lo spin di una particella che è intrinseco della particella. Per il corpo rigido sarà molto utile per definire il momento angolare.

### 5.7.3 Il momento angolare del moto circolare uniforme

Anche nel moto circolare uniforme è presente una accelerazione: l'accelerazione centripeta infatti fa sì che, per un osservatore inerziale, il moto risulti accelerato. Imponendo il suo momento angolare dalla definizione:

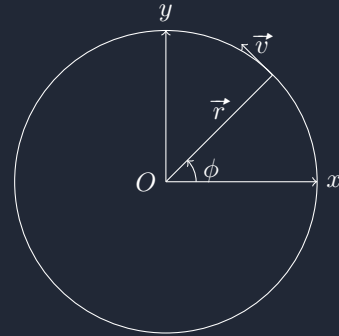
$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \vec{v} = (mr^2) \dot{\phi} \hat{k}$$

Con le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} v &= \omega r = \dot{\phi} r \\ \omega &= \dot{\phi} \end{aligned}$$

Il teorema delle forze vive mi dice che è costante l'energia cinetica e la forza centripeta non compie lavoro sulla traiettoria poiché cambia solo la direzione della velocità, non compiendo lavoro sul corpo. Ne segue che l'energia cinetica è conservata.

Figura 5.3: Mom. angolare cerchi



# Capitolo 6

## Il corpo rigido

### 6.1 Introduzione al concetto di corpo rigido

Si definisce **corpo rigido** un sistema di almeno tre punti assolutamente indeformabile e nel quale le distanze tra ogni coppia di punti è inalterata rispetto al tempo indipendentemente dalle forze esterne che gli vengono applicate. Questo è dimostrabile scegliendo tre punti non allineati all'interno del corpo rigido: ciò consente di associare ad ogni sistema rigido una terna cartesiana ortogonale che lo segue fedelmente scegliendo l'origine in uno dei suoi punti materiali. Essendo fissa la posizione di ogni punto rispetto al sistema di riferimento considerato, la posizione del corpo rigido è conosciuta se e solo se sono noti le coordinate dell'origine ed i 9 coseni direttori di ognuno delle coordinate (che si riducono a tre in quanto devono soddisfare le condizioni di ortonormalità) e dunque il corpo rigido nello spazio ha 6 gradi di libertà. Se i punti fossero in moto l'uno con l'altro allora si avrebbero  $N \cdot 3$  gradi di libertà se il corpo non ruotasse.

Possiamo mettere in relazione la velocità di un punto materiale  $P$  rispetto a due sistemi di riferimento con la seguente

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_C)$$

Dove  $\vec{r}$  indica la distanza di un punto qualsiasi  $P$  dall'origine del sistema di riferimento  $S$  e  $\vec{r}_C$  indica la distanza dall'origine del sistema di riferimento  $S'$  centrato nel centro di massa del corpo rigido. Se il corpo traslasse senza ruotare, si avrebbe che

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C$$

### 6.2 Statica e dinamica del corpo rigido

#### 6.2.1 Moto rotatorio di un corpo rigido

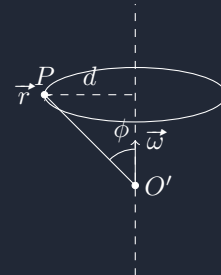
Se prendessimo un sistema di riferimento  $S$  con origine  $O$  e una terna cartesiana di versori  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  corrispondenti agli assi  $x, y, z$  ed un sistema  $S'$  con le medesime caratteristiche, e solidale con il corpo rigido, il quale è in rotazione rispetto ad un asse che coincide con l'asse di rotazione  $\vec{\omega}$ . Dato che rispetto al centro  $O'$  il punto  $P$  non trasla, allora la velocità del punto è

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

Da questa si evince che tutti i punti il cui prodotto vettoriale è pari a zero hanno velocità nulla; chiamo questi punti che hanno velocità nulla in un corpo rigido che sta ruotando come **asse di rotazione**, ossia l'asse intorno al quale sta ruotando l'oggetto stesso. La velocità tra due punti  $P_1$  e  $P_2$  del corpo rigido sarà la sottrazione vettoriale delle velocità:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{\omega} \times \vec{P_2P_1}$$

Figura 6.1: La rotazione di un punto del corpo rigido rispetto ad un asse passante per il centro di massa



I punti fuori dall'asse di rotazione si muovono di moto rotatorio semplice su di una circonferenza con distanza  $d = |\vec{r}| \cdot \sin \phi$ . Possiamo quindi stimare lo spostamento infinitesimo del punto  $P$  come

$$ds = r d\phi \implies \frac{ds}{dt} = r \frac{d\phi}{dt} \implies \dot{\phi} = \dot{s} / r$$

Quindi il modulo della velocità sarà dato dalla seguente

$$|\vec{v}_P| = \omega r \sin \phi = \omega d$$

Adesso se l'asse non è fisso, possiamo sempre utilizzare le relazioni precedenti e semplicemente la velocità varierà in base alla variazione dell'asse di rotazione in funzione del tempo.

## 6.2.2 Moto di rotolamento puro

E' il moto di rotazione di un corpo su di un altro i quali hanno istante per istante la stessa velocità nel punto di contatto come nel caso di una ruota su di una strada. Un corpo rigido che compie rototraslazione su di un'altro corpo rigido rimanendoci in contatto prende il nome di **moto di rotolamento generico** o **rotolamento puro** senza strisciamento. Quando si ha solo moto di rotazione senza velocità traslazionale allora la ruota rimane a contatto col pavimento e si ha rotolamento puro.

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_M = 0$$

$Q$  costante alla ruota

$M$  costante alla strada

Il moto di rotazione per un punto generico in un corpo rigido è dato dalla:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{CP}$$

Dove  $P$  è un punto generico nella ruota. Possiamo esprimere la velocità del punto in relazione alla velocità di rotazione della ruota come:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{j} = \dot{\phi} \hat{j} \implies \vec{v}_P = \dot{x}_C \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (P - C)$$

Dato che il corpo è libero di muoversi lungo i tre assi ma può solamente ruotare lungo l'asse  $x$ , allora posso dire che il corpo ha 4 gradi di libertà anche se, in realtà, essendo  $C$  vincolato, il corpo ruota e trasla insieme e dunque i veri gradi di libertà si riducono a solo uno: la ruota può solo rototraslare nella direzione positiva dell'asse  $x$ . Questo si può dimostrare con le seguenti

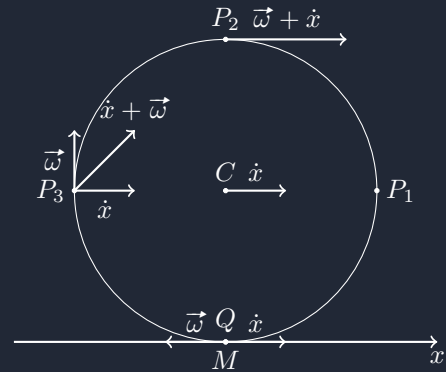
$$\vec{v}_Q = \dot{x}_C \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (Q - C) \implies \vec{v}_Q = \dot{x}_C \hat{i} + \dot{\phi} \hat{j} \times (-R \hat{k})$$

Dato che  $Q - C$  è il raggio  $R$  e che, la velocità nel punto  $Q$  deve essere nulla, si ha

$$\vec{v}_Q = \dot{x}_C \hat{i} + (-R \dot{\phi} \hat{i}) = 0 \implies \dot{x}_C = R \dot{\phi}$$

Quindi esiste solo un grado di libertà. La parte a contatto della ruota col terreno è immobile ed ha un asse che cambia nel tempo ma rimane sempre parallelo a sé stesso ed ad omega.

Figura 6.2: Il moto di rotolamento puro



### 6.2.3 Il moto dei punti interni alla circonferenza: la cicloide

Il moto di tutti i punti interni alla ruota eseguono un moto che prende il nome di **cicloide allungata**, la quale, ha la seguente espressione (si può poi integrare per  $t$  tenendo conto delle condizioni iniziali  $t = 0 \Rightarrow x(0) = 0$  e  $t = 0 \Rightarrow z(0) = R\mu + R$ ):

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\phi}(R + \mu R \cos \phi) \\ \dot{y} = -\dot{\phi}\mu R \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = R\phi + \mu R \sin \phi \\ y_P = R + \mu R \cos \phi \end{cases}$$

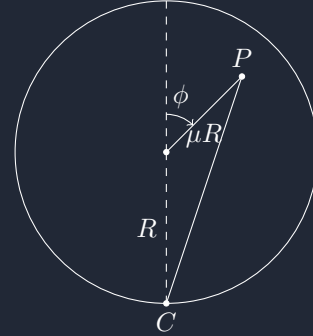
Mentre il punto sulla sommità della ruota esegue un moto che prende il nome di **cicloide ordinaria** che ha la stessa espressione ma con  $\mu = 1$ :

$$\begin{cases} x_p = R\phi + R \sin \phi \\ z_p = R + R \cos \phi \end{cases}$$

La formula generale di una cicloide è data dalla seguente:

$$(x - \phi R)^2 + (z - R)^2 = R^2 \quad (6.1)$$

Figura 6.3: Individuazione di un punto sulla circonferenza del moto rotatorio



### 6.2.4 Esempio di statica del corpo rigido

Il corpo rigido rimane in equilibrio quando non cambia la quantità di moto del sistema, dalle equazioni cardinali della dinamica si ha necessariamente che

$$\begin{aligned} \vec{F}^{(EXT)} &= 0 \\ \vec{M}^{(EXT)} &= 0 \end{aligned}$$

Immaginando di avere un piano di appoggio e un parallelepipedo storto: questo oggetto è in equilibrio oppure no? Devo vedere con le cardinali se esiste un momento torcente per il quale il corpo cade. Se le dimensioni del corpo sono piccole rispetto alle dimensioni della Terra allora posso dire, con buona approssimazione, che l'accelerazione locale di gravità è costante e parallela per tutti i corpi. Posso allora considerare la forza peso come concentrata nel centro di massa (baricentro) e applicare la prima cardinale:

$$M\vec{g} + \vec{N} = 0 \Rightarrow N = Mg$$

Applicare ora la seconda cardinale posso prendere un polo opportuno, e chiamate  $x$  la distanza di applicazione della normale e  $x'$  la distanza dell'applicazione della forza peso rispetto al SdR  $S$  con centro  $O$ :

$$M_z^{(EXT)} = Nx - Mgx'$$

Per far sì che  $Nx = Mgx'$  deve necessariamente risultare che  $x = x'$ . La risultante deve essere sempre applicata sulla base di appoggio: ne segue che il centro di massa deve trovarsi lungo la verticale passante per la base di appoggio poiché, altrimenti, non c'è stabilità ed il corpo si ribalta.

### 6.2.5 La carrucola fissa

Nel caso ideale la carrucola segue la fune, ma nel caso reale il movimento della fune non sempre è seguito da quello della carrucola a meno che l'attrito non sia molto debole. Perché siano in equilibrio (trascurando la massa della fune) la risultante delle forze si dovrebbe eguagliare:

$$\vec{N} + M\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Scomponendo lungo i due assi:

$$\begin{aligned} Nx - F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta &= 0 \\ Ny + Mg - F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta &= 0 \end{aligned}$$

Figura 6.4: parallelepipedo

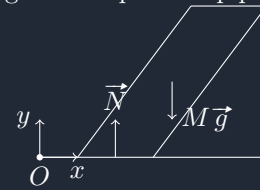
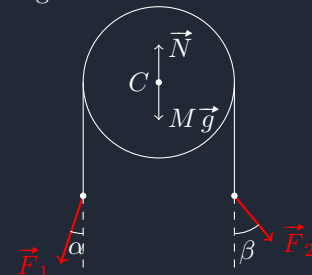


Figura 6.5: Carrucola fissa



Dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli angoli rispetto alla verticale delle due forze. Se scegliessi il polo di applicazione del momento nel centro della carrucola, avrei che i momenti sono rappresentati dalle forze e, poiché la fune non ha massa e la carrucola è fissa, non ho bisogno di conoscere i moduli delle forze né il loro braccio. Questo deriva dal fatto che anche se le forze avessero angoli diversi, nel momento in cui io tiro la fune, essa cambierebbe il suo avvolgimento sulla carrucola. Allora per far sì che si abbia un momento risultante nullo (e che quindi il sistema sia in equilibrio), avrò solamente una condizione:

$$F_1 = F_2$$

### 6.2.6 Il problema della scala

Il problema della scala è un problema della statica dei corpi rigidi con la forza di attrito che è data dalla seguente formulazione:

$$|\vec{F}_a| \leq \mu_s |\vec{N}_2|$$

Per poter essere in equilibrio deve risultare che

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + M\vec{g} + \vec{F}_a &= 0 \\ N_1 - F_a &= 0 \implies N_1 = F_a \\ N_2 - Mg &= 0 \implies N_2 = Mg\end{aligned}$$

Con la prima cardinale non sono in grado di determinare se la scala rimane in equilibrio oppure no, devo scegliere allora un polo di riduzione per calcolare il momento e quindi dirmi a che angolo  $\alpha$  è in equilibrio. Scegliendo il polo nel punto in cui la scala si appoggia per terra, e date le distanze come:

$$\begin{aligned}(C - B) &= \frac{L}{2}(-\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}) \\ (A - B) &= 2(C - B)\end{aligned}$$

Posso esprimere ora il momento delle forze esterne nel polo  $B$  con la seguente:

$$\begin{aligned}\vec{M}_B^{EXT} &= (C - B) \times M\vec{g} + (A - B) \times \vec{N}_1 \\ &= \frac{L}{2}(-\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}) \times (-Mg\hat{j}) + L(-\sin \alpha \hat{i} + \cos \alpha \hat{j}) \times N_1 \hat{i} \\ &= +\frac{L}{2} \sin \alpha Mg \hat{k} - L \cos \alpha N_1 \hat{k} = 0\end{aligned}$$

Da questa si ottiene l'espressione della reazione vincolare alla parete come:

$$N_1 = \frac{1}{2} \tan \alpha Mg$$

Ricordando l'espressione della forza di attrito si ha l'angolo di equilibrio in funzione del coefficiente di attrito:

$$N_1 = F_a \leq \mu_s N_2 \implies \tan \alpha \leq 2\mu_s$$

### 6.2.7 Momenti angolari per casi particolari

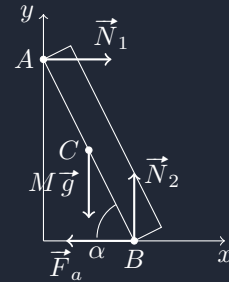
Ricordando l'espressione per la velocità di un certo punto  $P$  nel corpo rigido con sistema di riferimento  $S'$  rispetto ad un sistema di riferimento  $S$  fisso:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \omega \times (O - O')$$

Nel caso di moti puramente traslatori, il momento angolare è dato da

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_{O'} = (C - \Omega) \times M \vec{v}_{O'}$$

Figura 6.6: Il problema della scala



Nel caso del moto rototraslatorio il momento angolare è dato da:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^n (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - \Omega) \times \vec{v}_{O'} + \sum_{i=1}^n m_i (P_i - \Omega) \times (\vec{\omega} \times (P_i - O'))$$

Nel caso in cui il momento angolare sia applicato sull'origine del sistema di riferimento e che questo coincida esattamente con il centro del corpo rigido

$$\vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - O') \times (\vec{\omega} \times (P_i - O'))$$

Nel caso in cui  $\vec{\omega}$  sia costante, allora essendo il suo versore costante, il momento si semplifica ulteriormente.

### 6.3 Il momento assiale e il momento di inerzia

Dall'espressione del momento angolare in funzione del polo  $O'$  e della velocità angolare  $\vec{\omega}$  posso ottenere una quantità scalare che prende il nome di **momento assiale**, ossia il momento di inerzia riferito ad un certo asse (ossia la direzione sulla quale giace il versore  $\hat{u}_\omega$ ):

$$L_{\omega, O'} = \vec{L}_{O'} \cdot \hat{u}_\omega = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \hat{u}_\omega (P_i - O') \times (\hat{u}_\omega \times (P_i - O')) \omega$$

Posso ottenere, con le regole del prodotto misto, una sua espressione diversa:

$$L_{\omega, O'} = \left( \sum_{i=1}^n m_i |\hat{u}_\omega \times (P_i - O')|^2 \right) \omega$$

Se chiamassi ora la distanza dall'asse di rotazione di ogni punto  $P_i$  del corpo rigido come

$$|\hat{u}_\omega \times (P_i - O')| = d_i$$

Si otterrebbe un'altra analoga per il momento assiale:

$$L_{\omega, O'} = \omega \sum m_i d_i^2$$

La sommatoria è una grandezza scalare che prende il nome di **momento di inerzia** che dipende dall'asse di rotazione scelto e ha (da qui il nome) lo stesso ruolo della **massa inerziale** e si esprime come:

$$I = \sum m_i d_i^2 = \int d^2 dm \quad (6.2)$$

Allora posso esprimere il momento assiale con la semplice formulazione:

$$L_{\vec{\omega}} = I\omega$$

Posso ottenere dunque dalla prima cardinale il **momento assiale delle forze**, ossia una quantità scalare che si ottiene proiettando sull'asse di rotazione il momento angolare delle forze esterne rispetto ad un polo qualunque scelto sull'asse di rotazione:

$$\vec{M}_\Omega \cdot \hat{u}_\omega = I_{\hat{\omega}} \dot{\omega} \implies M_\Omega = I \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (6.3)$$

## 6.4 Il teorema di Huygens-Steiner e calcolo di vari momenti di inerzia

Il teorema di Huygens-Steiner stabilisce che il momento di inerzia rispetto ad un asse qualsiasi può essere definito come la somma di due termini:

1. Il momento di inerzia calcolato rispetto all'asse passante per il centro di massa del sistema;
2. Il prodotto della massa totale del sistema con il quadrato della distanza tra i due assi.

Si ottiene dunque la seguente relazione:

$$I = I_C + md^2 \quad (6.4)$$

Il teorema può essere dimostrato secondo i seguenti procedimenti. Considerato un corpo rigido con un dato centro di massa e scelto un asse lungo tale centro di massa, posso allora esprimere il momento di inerzia di qualsiasi punto  $P_i$  a distanza  $d_i$  dall'asse  $z$  che passa per il centro di massa come

$$I_C = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2$$

Con la seguente notazione posso esprimere un asse che passa lungo il centro di massa come  $\hat{C}$ . Scelto ora il polo  $A$  che si trova a distanza  $D$  dall'asse passante per  $C$  voglio allora calcolarmi il momento di inerzia e ottengo che per un punto qualsiasi rispetto all'asse è proprio:

$$I_{\hat{C}} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Proprio perché il punto  $P_i$  giace su un piano perpendicolare all'asse  $\hat{C}$ ; posso dire che il momento di inerzia rispetto al polo  $A$  sull'asse  $\hat{A}$  parallelo all'asse  $\hat{C}$  è dato da:

$$I_{\hat{A}} = \sum m_i ((x_i - D)^2 + y_i^2) = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum m_i D^2 - 2 \sum m_i x_i D$$

Il primo termine è proprio il momento di inerzia rispetto al centro di massa, mentre il secondo è il momento di inerzia totale della massa ed il terzo è il momento di inerzia uguale a zero. Allora il momento di inerzia tra due assi paralleli è proprio il momento di inerzia del primo asse più la distanza per la massa del corpo:

$$I_{\hat{A}} = I_{\hat{C}} + MD^2$$

Con questo teorema si è anche dimostrato che il momento di inerzia minimo si ha rispetto ad un asse che passa per il centro di massa.

### 6.4.1 Il momento di inerzia di una sbarra omogenea sottile

Per calcolare il momento di inerzia di una sbarretta posso suddividerla in tanti piccoli rettangoli in modo tale da ottenere l'integrale del momento di inerzia come:

$$I = \int dm d^2$$

La massa infinitesima è data dalla densità lineare delle singole fette per la loro lunghezza infinitesima:

$$dm = dx \lambda$$

Sostituendo nell'integrale, posso integrare rispetto a tutta la lunghezza della sbarretta:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \lambda x^2$$

Figura 6.7: Momento di inerzia rispetto ad assi paralleli

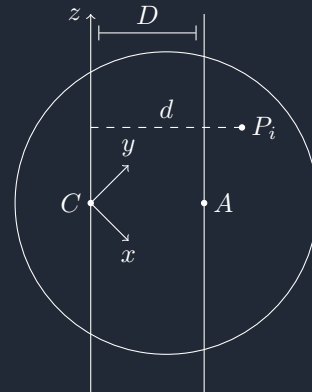
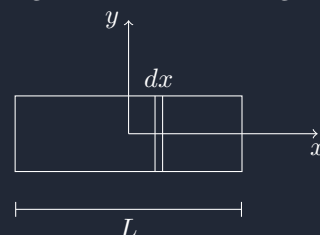


Figura 6.8: Sbarra omogenea



Sapendo che la massa è  $M = \lambda L$  e che il centro di massa è localizzato nell'origine del sistema di riferimento  $S$ , posso ottenere il momento di inerzia rispetto al centro di massa come

$$I_{\hat{C}} = \frac{1}{12}ML^2 \quad (6.5)$$

Rispetto ad un asse passante per il bordo a distanza  $\pm \frac{L}{2}$  il momento di inerzia diventa, secondo Huygens-Steiner è dato da:

$$I_{\hat{A}} = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2 \quad (6.6)$$

### 6.4.2 Il rettangolo omogeneo

Posso ricavare il momento di inerzia di un rettangolo omogeneo: questo momento di inerzia è analogo al caso della sbarretta infinitesima con lunghezza  $a$  e massa totale  $M$  per quanto riguarda l'asse  $x$ . Adesso devo anche calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse  $Y$ : allora posso dire che considero piccole sbarrette (analogamente al caso della sbarretta) di lunghezza  $a$  e con massa nuovamente  $M$ . Dato che il momento di inerzia è additivo, e che entrambi i momenti di inerzia sono calcolati rispetto a degli assi che passano per il centro, posso esprimere il momento di inerzia totale del rettangolo omogeneo come:

$$I_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \quad (6.7)$$

Ossia esattamente la somma dei momenti di inerzia che ha come asse l'asse perpendicolare al rettangolo stesso.

### 6.4.3 Il parallelepipedo omogeneo

Dato che il parallelepipedo è omogeneo, posso calcolare il momento di inerzia come se fosse tutto schiacciato e dunque ricondurmi nel caso del rettangolo omogeneo: il suo momento di inerzia rispetto all'asse  $x$  è dunque:

$$I_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \quad (6.8)$$

Posso ottenere il momento di inerzia anche rispetto agli altri due assi  $x$  e  $y$  utilizzando come lati i lati paralleli all'asse considerato.

### 6.4.4 Il cerchio omogeneo

Per trovare il momento di inerzia di un cerchio posso ricondurmi allo studio del momento di inerzia per una corona corona spessa  $dr$ . Posso ottenere la superficie della corona come  $dS = 2\pi r dr$ , allora la massa infinitesima della corona è data da

$$dm = \sigma dS \implies dm = \sigma 2\pi r dr$$

Dato che la corona ha un certo spessore  $dr$ , allora posso calcolare il momento di inerzia per una corona e fare l'integrale unidimensionale per considerare tutte le corone e ricavare il momento totale rispetto all'asse  $z$ , dato che la distanza rispetto all'asse  $z$  di quella corona è  $r$ , allora

$$I_z = \int_0^R \sigma 2\pi r^3 dr = \sigma 2\pi \frac{R^4}{4}$$

E dato che la massa totale è proprio  $M = \pi R^2 \sigma$ , allora il momento di inerzia del cerchio omogeneo sarà:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \quad (6.9)$$

Figura 6.9:

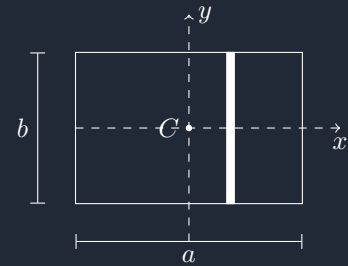
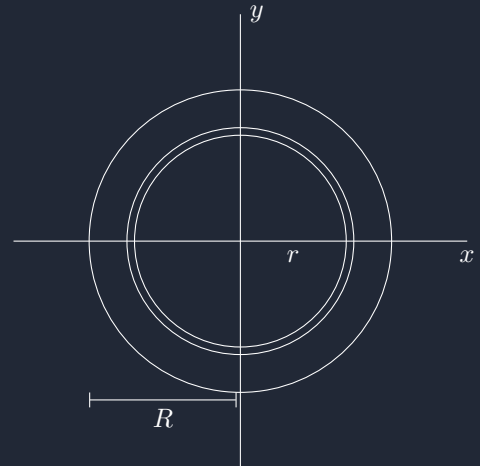


Figura 6.10: Il momento del cerchio



Allora dato che il momento di inerzia è la somma dei momenti di inerzia rispetto agli altri assi, posso dire che il momento rispetto all'asse  $z$  è esattamente la somma dei momenti di inerzia rispetto agli assi  $x$  ed  $y$ . Data la simmetria del cerchio allora i momenti rispetto ai due assi devono necessariamente essere uguali:

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}MR^2$$

### 6.4.5 Il momento rispetto al cilindro

Per determinare il momento di inerzia di un cilindro posso considerare il momento del cilindro come l'integrale da  $-\frac{L}{2}$  a  $\frac{L}{2}$  del momento di inerzia di un cerchio di raggio  $R$ . Rispetto allora all'asse  $x$  il momento di inerzia:

$$I_x = \frac{1}{2}MR^2$$

Rispetto all'asse  $z$  invece la cosa si complica: il momento di inerzia rispetto a quell'asse assi è dato da quello del cerchio più il termine di Huygens-Steiner:

$$dI = \frac{1}{4}dmR^2 + dm x^2$$

Con  $x$  la distanza rispetto all'origine del cilindro infinitesimo considerato; dato che la massa infinitesima del cilindretto è data da:

$$dm = \rho dV = \rho \pi R^2 dx$$

E allora il momento di inerzia è esprimibile come integrale unidimensionale

$$I_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \rho \pi R^2 dx \left( \frac{R^2}{4} + x^2 \right) \right)$$

Dato che il cilindro è simmetrico rispetto all'al piano  $zy$  e rispetto ai piani  $xy$  e  $xz$  si ha che

$$I_z = I_y = M \left( \frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \quad (6.10)$$

### 6.4.6 La sfera omogenea

Per calcolare il momento di inerzia di una sfera (omogenea), posso utilizzare  $r$  come il raggio dell'anello infinitesimo di spessore  $dr$  e distanza  $x$  dall'origine. Posso ottenere il raggio  $r$  attraverso il teorema di Pitagora:

$$r^2 = R^2 - x^2$$

Dato che la sfera è omogenea posso esprimere la massa infinitesima dell'anello come

$$dm = \rho dV$$

Posso esprimere la superficie infinitesima e dunque il volume infinitesimo come:

$$dS = \pi r^2 = \pi(R^2 - x^2) \implies dV = dx dS = \pi(R^2 - x^2)dx$$

Allora la massa infinitesima è

$$dm = \rho \pi (R^2 - x^2) dx$$

Il momento di inerzia rispetto ad un dato asse è allora dato dall'integrale:

$$I_x = \int \frac{1}{2} dm r^2 \implies I_x = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - x^2)^2 dx$$

Per cui si ottiene il momento di inerzia rispetto a tutti gli assi della sfera come

$$I = \frac{2}{5}MR^2 \quad (6.11)$$

Figura 6.11: Il cilindro

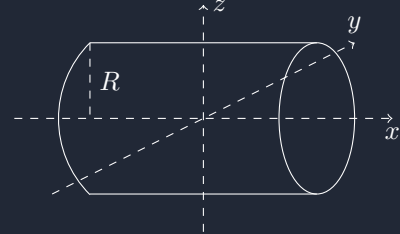
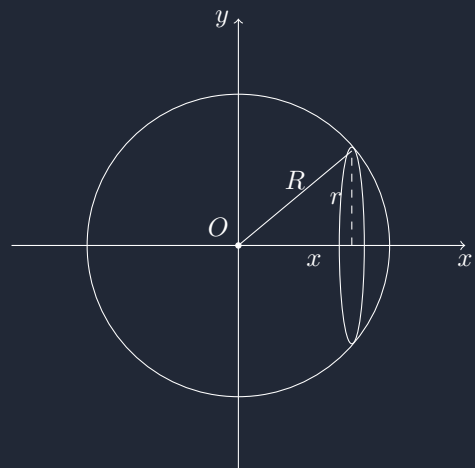


Figura 6.12:



## 6.5 Utilizzo dei principi del corpo rigido a situazioni fisiche

### 6.5.1 Estensione della macchina di Fletcher con la carrucola reale

Nella macchina di Fletcher con la carrucola reale (posto che non ci siano attriti) ho tre corpi con massa collegati con una fune inestensibile e priva di massa. Il sistema è vincolato in modo tale da avere un solo grado di libertà per ogni oggetto ma non sono indipendenti: la rotazione della carrucola ed il movimento delle masse dipendono l'uno dall'altro e dunque i corpi si possono muovere solamente lungo una direzione. Si suppone inoltre che la carrucola non oscilli (per ridurre i gradi di libertà). Preso allora un sistema di riferimento nell'origine della prima massa, posso allora applicare il primo principio per cui per il primo oggetto:

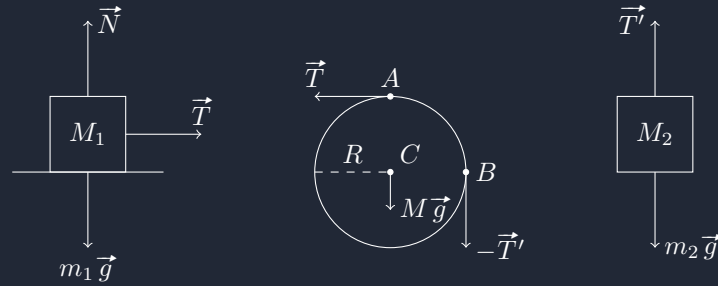
$$\vec{T} = T\hat{i} \implies m_1\ddot{x}_1 = T$$

Mentre per il secondo oggetto, dato che la carrucola non è ideale, avrà una tensione diversa rispetto alla massa 1:

$$\vec{T}' = T'\hat{j} \implies m_2\ddot{y}_2 = T' - m_2g$$

Scegliendo ora un polo di riduzione per la carrucola, su di essa agiscono le tensioni e la forza di gravità che è controbilanciata dalla reazione vincolare a cui è fissata la carrucola stessa.

Si possono schematizzare le masse e la carrucola come:



Applicando ora la seconda cardinale alla carrucola, e conosciute le distanze tra i punti di contatto della corda ed il centro, posso dire che i punti di contatto delle corde e del centro sono date da

$$(A - C) = R\hat{j} \quad (B - C) = R\hat{i}$$

E allora il momento torcente delle forze è dato dalla seguente relazione:

$$((A - C) \times \vec{T} + (B - C) \times (-\vec{T}')) \cdot \vec{R} = I_C \dot{\omega}$$

Allora dato che  $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ :

$$TR - T'R = I_C \dot{\omega} \quad (6.12)$$

Definito  $\phi$  come l'angolo di rotazione della carrucola si ha la seguente relazione

$$\omega = \dot{\phi} \quad \dot{\omega} = \ddot{\phi} \implies R\ddot{\phi} = -\ddot{x}_1$$

Non ci resta ora che sostituire nelle relazioni:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= T \\ -m_2\ddot{x}_1 &= T' - m_2g \\ TR - T'R &= -I_c \frac{\ddot{x}_1}{R} \end{aligned}$$

Inoltre, sapendo che il momento di inerzia di un disco è  $\frac{1}{2}MR^2$ , si può mettere tutto nella terza relazione:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = m_2g \implies \ddot{x}_1 = g \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

Figura 6.13: Macchina di Fletcher reale

Si ricavano ora le tensioni:

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \quad (6.13)$$

$$T' = \frac{m_1 m_2 + \frac{m_2 I}{R^2}}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}} \quad (6.14)$$

### 6.5.2 La macchina di atwood reale attaccata al soffitto

Un'altra situazione di corpo rigido è considerare due masse attaccate ad una carrucola fissata al soffitto: se la carrucola è fissa, allora il sistema ha solamente un grado di libertà (se la fune è anche inestensibile). Posso allora applicare per le due masse la prima cardinale:

$$m_1 \ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g$$

A questo punto la prima cardinale non mi basta per poter determinare il moto delle masse: se si considera che  $m_1 > m_2$ , allora la carrucola gira in senso antiorario (e dunque nel verso giusto rispetto a  $\phi$ ), allora il contributo al momento delle forze può essere espresso come:

$$T_1 R - T_2 R = I_C \ddot{\phi}$$

E, data la definizione di  $\phi$ , posso imporre  $R\ddot{\phi} = -\ddot{y}_2$ , e dunque si può sostituire nell'equazione (come per la macchina di Atwood):

$$T_1 = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \quad (6.15)$$

$$T_2 = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \quad (6.16)$$

### 6.5.3 Il pendolo fisico (o composto)

Il pendolo fisico (o composto) è un corpo rigido che compie il moto di un pendolo; in questo caso il perno di rotazione non coincide con il centro di massa. Mettendoci nel caso di piccole oscillazioni, posso dire che questo moto è essenzialmente un moto armonico nel pendolo semplice con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Dato che non so dove è diretta la forza vincolare e dunque la metto dove voglio; adesso dato che ho solo un grado di libertà (che ho parametrizzato con  $\phi$ ), posso utilizzare solo un'equazione per risolvere il problema però io non conosco né in modulo né in direzione la forza vincolare. Posso dunque prendere il perno come polo di riduzione. Allora posso esprimere il momento di inerzia come e la prima cardinale come:

$$I_0 = I_C + Mh^2 \implies -Mgh \sin \phi = I_0 \ddot{\phi}$$

Per cui l'equazione di moto per un pendolo assume la seguente forma:

$$\ddot{\phi} + \frac{Mgh}{I_0} \sin \phi = 0 \quad (6.17)$$

Figura 6.14: Macchina di atwood reale

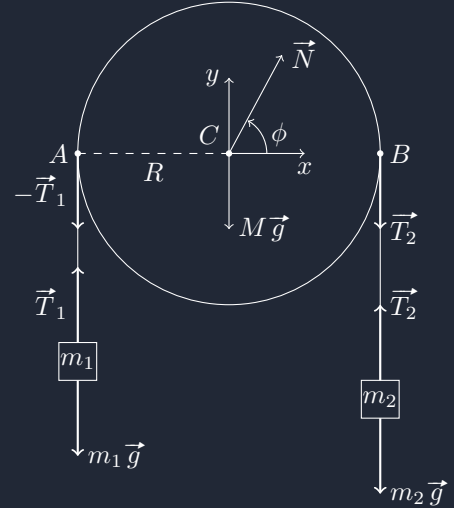
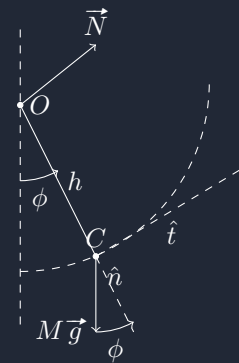


Figura 6.15: Il pendolo composto



Per cui il suo periodo diventa:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgh}} \quad (6.18)$$

Possiamo esprimere la normale come

$$\vec{N} + N_t \hat{t} + N_n \hat{n}$$

Dove  $\hat{t}$  è il versore della tangente mentre  $\hat{n}$  è il versore normale rispetto alla congiungente. Possiamo allora esprimere la prima cardinale per le due come

$$\begin{aligned} N_t - Mg \sin \phi &= Mh \ddot{\phi} \\ N_n - Mg \cos \phi &= Mh \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Posso ottenere allora la derivata secondo di  $\phi$  e quindi posso determinarmi la componente tangenziale e ottenere:

$$\ddot{\phi} = -\frac{Mgh}{I_0} \sin \phi$$

Per la componente tangenziale:

$$N_t = Mg \sin \phi - Mh \frac{Mgh}{I_0} \sin \phi = Mg \sin \phi \left(1 - \frac{Mh^2}{I_0}\right) \quad (6.19)$$

Nel caso del pendolo semplice la tangenziale è zero. Moltiplicando per entrambe le parti di  $\ddot{\phi}$  per integrare e rimuovere  $dt$  si ottiene per le condizioni iniziali in  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  e  $\dot{\phi} = \Omega$ :

$$\dot{\phi}^2 = \Omega_0^2 - \frac{2Mgh}{I_0} (1 - \cos \phi)$$

sostituendo nell'espressione per la normale:

$$N_n = Mg \cos \phi + Mh \left( \Omega_0^2 - \frac{2Mgh}{I_0} (1 - \cos \phi) \right) \quad (6.20)$$

Nel caso in cui l'angolo iniziale fosse noto per esempio  $\phi = \phi_0$ :

$$N_n = Mg \cos \phi + Mh \frac{2Mgh}{I_0} (\cos \phi - \cos \phi_0) = Mg \cos \phi \left(1 + \frac{2Mh^2}{I_0}\right) - \frac{2M^2 h^2 g}{I_0} \cos \phi_0 \quad (6.21)$$

## 6.6 Il moto di rotolamento

Il moto di rotolamento è il moto di rotazione di un corpo rigido che possa rotolare (come una sfera etc.), scelto un sistema di riferimento in modo tale che l'asse  $x$  sia parallela al piano inclinato e l'asse  $z$  perpendicolare al piano. Per avere ora moto di rotolamento puro, io devo avere un corpo con un attrito "specifico" che posso ricavarli in funzione dell'angolo:

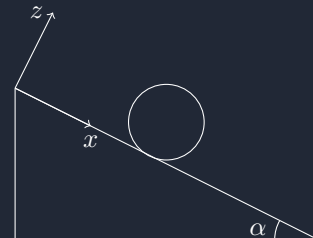
$$\vec{N} + \vec{F}_a + m\vec{g} = m\vec{a}_C$$

Scomponendo posso dire

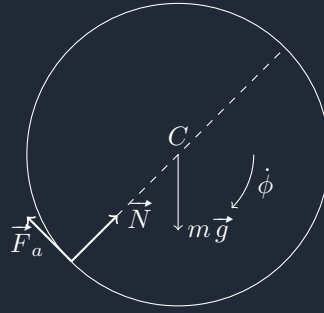
$$\begin{aligned} x) \quad & mg \sin \alpha - F_a = ma \\ z) \quad & N - mg \cos \alpha = 0 \end{aligned}$$

Posso utilizzare la seconda cardinale nella forma semplice (considerando allora la proiezione lungo la velocità angolare dei momenti). La velocità angolare lungo  $y$  non cambia e mi trovo nelle condizioni nelle quali posso utilizzare la forma assiale della seconda cardinale lungo l'asse  $y$ . Posso scegliere un polo di riduzione in modo da utilizzare le formule semplici: per farlo il polo deve essere fisso o coincidere con il centro di massa. C'è

Figura 6.16: Il moto di rotolamento



anche la possibilità di scegliere un polo la cui velocità è parallela a quella del centro di massa. Scelto come polo di riduzione  $\Omega = C$ , allora posso schematizzare il corpo rigido come:



Nelle condizioni di rotolamento puro c'è una relazione semplice tra  $\ddot{x}$  e  $\ddot{\phi}$ ; dato che  $\dot{\phi}$  diventa positiva, anche la sua derivata diventa positiva, allora anche  $\ddot{x}$  aumenta nello stesso senso, posso esprimere allora la prima cardinale come:

$$\dot{\phi} = \frac{\ddot{x}}{R} \implies F_a R = I_C \ddot{\phi}$$

Posso riscrivere le equazioni sugli assi come:

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - F_a = m \ddot{x} \\ F_a = \frac{I_C}{R^2} \ddot{x} \end{cases}$$

L'accelerazione del centro di massa è data da:

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{mR^2}}$$

Che è minore di quella che ha se scivolasse senza attrito; posso esprimere il momento di inerzia per alcuni corpi rigidi come:

disco omogeneo :	$I_C = \frac{1}{2} m R^2 \implies \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$
sfera omogenea :	$I_C = \frac{2}{5} m R^2 \implies \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$
cerchione :	$I_C = m R^2 \implies \ddot{x} = \frac{1}{2} g \sin \alpha$

Se volessimo considerare il caso del disco si otterrebbe:

$$F_a = \frac{1}{3} m g \sin \alpha$$

Il caso limite dell'attrito è dunque

$$F_a \leq \mu_s N \implies \tan \alpha \leq 3 \mu_s$$

## 6.7 Carrucole mobili

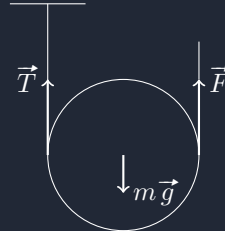
La carrucola mobile è una carrucola che non è fissata in alcun modo: in questo modo non c'è alcuna forza vincolare da bilanciare. Se si passasse una fune fissata da una parte che si avvolge sulla carrucola e che viene tirata dall'altra parte, allora la carrucola compie effettivamente un moto di rotolamento puro:

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{F} + M \vec{g} &= M \vec{a}_C \\ T + F - Mg &= M \ddot{z} \end{aligned}$$

Preso come centro di riduzione il centro di massa, allora posso decidere come prendere l'angolo (in senso orario) e quindi

$$\ddot{\phi} = -\frac{\ddot{z}}{R} \implies (T - F)R = I_C \ddot{\phi}$$

Figura 6.17: Carrucola mobile



E allora, ricavandomi le espressioni di  $F$  e  $T$ , posso dire che l'equazione prende la forma di

$$2F - Mg = \left( M + \frac{I_C}{R^2} \right) \ddot{z}$$

La condizione di equilibrio è proprio quella per cui

$$F = \frac{1}{2}Mg$$

e dunque posso ricavare la tensione come

$$T = F - \frac{I_C}{R^2} \frac{2F - Mg}{M + \frac{I_C}{R^2}}$$

Vedo che la carrucola mobile può dimezzare la forza necessaria per poter tirare oggetti.

## 6.8 L'espressione del tensore di inerzia

Dato che ruota con velocità  $\omega$  allora posso scegliere un polo ossia il centro di massa

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n (P_i - C) \times m_i (\vec{v}_i + \vec{\omega} \times (P_i - C))$$

Dato che la velocità del centro di massa è zero, allora posso dire che  $\vec{v}_i$  sono tutte zero e quindi, con le proprietà del prodotto vettoriale, posso semplificare

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^n m_i (P_i - C)(P_i - C) \vec{\omega} - \sum_{i=1}^n m_i (P_i - C) \vec{\omega} (P_i - C)$$

Dato che ora  $P_i - C$  è il sistema di riferimento per ogni punto del corpo rigido, posso allora dire che

$$(P_i - C) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}, \quad \vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

Quindi il momento angolare diventa semplificando e risolvendo

$$\vec{L}_C = \sum_{i=1}^n m_i \begin{Bmatrix} (y_i^2 \omega_x + z_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z) \hat{i} \\ (x_i^2 \omega_y + z_i^2 \omega_y - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z) \hat{j} \\ (x_i^2 \omega_z + y_i^2 \omega_z - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y) \hat{k} \end{Bmatrix}$$

Posso allora esprimere il momento angolare in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Posso esprimere questa matrice come un **tensore di inerzia** ossia come

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Se la matrice è diagonalizzabile allora posso trovare degli autovalori per cui posso rendere la matrice diagonale attraverso gli **assi di principali di inerzia** ossia gli assi  $x', y', z'$ :

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{x'x'} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y'y'} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'z'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix}$$

Se  $\vec{\omega}$  è parallelo ad un asse principale di inerzia allora posso trovare che si annullano le altre due componenti e quindi il momento sarà presente solo rispetto a quell'asse.

## 6.9 Momento del corpo rigido rispetto ad un asse

Dato un asse fisso ed un sistema di coordinate cilindriche posso dire che la distanza di un qualsiasi punto dal centro del corpo rigido è data da:

$$(P_i - O) = z_C \hat{k} + \vec{\rho}_i$$

Dato che il sistema di riferimento è solidale con il corpo rigido in rotazione, posso dire che sono valide le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \rho_i \hat{u}_\rho \\ |\rho_i| &= CONST \\ \vec{v} &= \vec{\omega}(P - O) \\ \vec{v}_O &= 0\end{aligned}$$

Posso esprimere il momento angolare come

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times m_i \vec{v}_i$$

Allora posso dire, con tutte le sostituzioni

$$\sum (z_C \hat{k} + \vec{\rho}_i) \times m_i (\omega \hat{k} \times (z_C \hat{k} + \vec{\rho}_i))$$

E quindi, svolgendo i prodotti vettoriali, e dato che è una terna destrorsa locale (che cambia dunque da punto a punto), posso sapere già che

$$\begin{aligned}\vec{u}_\rho, \vec{u}_{T_i}, \hat{k} \\ \hat{k} \times \hat{u}_\rho = \hat{u}_{T_i}\end{aligned}$$

Posso allora esprimere il momento angolare come

$$L_O = \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum m_i z_i \vec{\rho}_i$$

Il primo termine è il momento angolare parallelo alla velocità angolare mentre il secondo è il momento angolare ortogonale alla velocità angolare. Chi sono questi due contributi? Il primo è proprio il momento di inerzia dell'i-esimo punto rispetto all'asse di rotazione considerato. Se il mio asse di rotazione è parallelo ad un asse di simmetria, allora il secondo termine potrà essere eliminato

$$\vec{L}_O = \vec{L}_\parallel + \vec{L}_\perp$$

E quindi loro sono proprio:

$$\begin{aligned}\vec{L}_\parallel &= I_O \vec{\omega} \\ \vec{L}_\perp &= -\omega \sum m_i z_i \vec{\rho}_i\end{aligned}$$

Derivando l'espressione del momento angolare posso vedere che si ottiene

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum m_i \rho_i^2 \dot{\vec{\omega}} - \dot{\omega} \sum m_i z_i \vec{\rho}_i - \omega \sum m_i z_i \dot{\vec{\rho}}_i$$

Dato che  $\rho_i$  ha modulo costante e ho una velocità angolare, allora la sua derivata è proprio (dalle formule di Poisson)

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

Quindi si ottiene

$$\dot{\vec{L}}_O = I_O \dot{\vec{\omega}} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} \omega \sum m_i z_i \vec{\rho}_i - \omega \sum m_i z_i \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

E allora si ottiene proprio

$$\dot{\vec{L}}_O = I_O \dot{\vec{\omega}} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \vec{L}_\perp + \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$$

Il primo termine è parallelo rispetto al  $\vec{L}_O$  e quindi al versore  $\hat{k}$ , il secondo termine è ortogonale a  $k$  mentre il terzo è un prodotto vettoriale e quindi è ortogonale a tutti e due i termini del prodotto vettoriale. Si può ora riscrivere la seconda cardinale come

$$\vec{M}_O^{(ext)} = \vec{L}_{\parallel} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \vec{L}_{\perp} + \vec{\omega} \times \vec{L}_{\perp} \quad (6.23)$$

La seconda cardinale allora è espressa per il corpo rigido che ruota rispetto ad un asse fisso; si vede allora che nella direzione di  $\omega$  allora rimane solo il primo termine come

$$\vec{M}_O^{ext} \hat{k} = I_O \dot{\omega}$$

Se io metto in rotazione un oggetto, allora essendo che deve per forza ruotare lungo l'asse considerato, esso continua a girare e quindi il momento angolare sta cambiando e quindi il terzo termine sta cambiando e non trascurabile, da dove viene allora? E' una forza vincolare che viene scaturita dalla rotazione impressa alle condizioni iniziali.

## 6.10 Conservazione dell'energia e lavoro nei corpi rigidi

Si può definire il lavoro e l'energia nei corpi rigidi attraverso un semplice sistema di due punti: rispetto ad un sistema di riferimento  $S$  posso allora chiedermi quale sia il lavoro compiuto infinitesimalmente che, per ogni punto, è dato da:

$$\delta L_1 + \delta L_2 = \vec{F}_{1,2} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{2,1} \cdot d\vec{r}_2$$

Dove  $\vec{r}_1$  indica il vettore posizione del punto  $P_1$  rispetto all'origine di  $S$  e  $\vec{r}_2$  indica il vettore posizione del vettore, mentre il vettore  $d\vec{r}_1$  ed il vettore  $d\vec{r}_2$  indicano lo spostamento infinitesimo dei due punti. Dato che il corpo è rigido allora la distanza tra i due punti è costante e quindi

$$(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0$$

Dato che la forza è parallela alla distanza tra il primo ed il secondo punto allora posso dire che il lavoro è nullo; dunque il lavoro delle forze di rigidità è nullo (che ha senso dato che il corpo è rigido). Il lavoro totale infinitesimo sulle forze interne del corpo rigido è dato dalla somma di ciascun effetto reciproco:

$$\delta L = \sum \delta L_i = \sum \vec{F}_i$$

Preso un punto a caso  $A$  nel corpo rigido la velocità di un dato punto rispetto a quel punto sarà

$$\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (P_i - A) \implies \delta L = \sum \vec{F}_i (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times (P_i - A)) dt$$

Posso allora dire che il lavoro infinitesimo sarà dato dalla seguente formulazione:

$$\delta L = \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r}_A + \omega dt \sum (P_i - A) \times \vec{F}_i$$

Il primo termine non è altro che la risultante delle forze esterne mentre il secondo termine è proprio il risultato dei momenti delle singole forze esterne moltiplicate per  $\vec{\omega}$  e quindi dato che

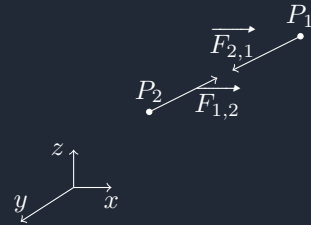
$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{u}_{\phi} \implies \dot{\phi} dt = d\phi$$

Dunque

$$\delta L = \vec{F}^{ext} \cdot d\vec{r}_A + \vec{M}_A^{ext} \cdot \hat{u}_{\phi} d\phi$$

Il lavoro allora dipende dalle risultanti delle forze esterne e dallo spostamento infinitesimo angolare; se si avesse un solo moto di rotazione, potrei scegliere  $A$  sull'asse ed il lavoro sarebbe solo dato dal momento assiale delle forze esterne per l'angolo. Se si considerassero le tre componenti del momento angolare conterebbe solo il momento assiale lungo la velocità angolare. Allora se ruota in modo caotico il vincolo che gli viene applicato può essere liscio e può non compiere alcun lavoro. Dato che posso esprimere l'energia cinetica come

$$K = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$



Come conseguenza del teorema di Konig

$$\vec{v}'_i = \vec{\omega} \times (P_i - C)$$

Allora la componente rotazionale dell'energia cinetica del corpo rigido è data (considerata  $d_i$  come la distanza di ogni punto dall'asse di rotazione considerato)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \omega^2$$

Allora l'energia cinetica del corpo rigido diventa proprio la somma tra l'energia cinetica della velocità del centro di massa più la componente rotazionale data dalla precedente. L'energia cinetica totale si esprimerebbe come

$$K = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \quad (6.24)$$

Dove  $I_C$  non è altro che il momento di inerzia del corpo rigido.

### 6.10.1 Pendolo fisico

Nel pendolo composto con vincolo ideale, si può applicare la conservazione dell'energia scegliendo quindi l'energia

$$E = \frac{1}{2} I_O \omega^2 - Mgh \cos \phi$$

Dato che la velocità angolare è la derivata dell'angolo, posso esprimere la derivata dell'energia

$$\dot{E} = 0 = I_O \dot{\phi} \ddot{\phi} + Mgh \sin \phi \dot{\phi}$$

Il periodo del pendolo è allora dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_O}{Mgh}}$$

### 6.10.2 Moto di rotolamento

L'energia per il moto di rotolamento è data dalla seguente:

$$E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 - Mgx_C \sin \alpha$$

La velocità è esprimibile come la derivata della posizione e dunque dato che  $\omega = \frac{\dot{x}}{R}$ :

$$E = \frac{1}{2} (MR^2 + I_C) \dot{\phi}^2 - Mgr \sin \alpha$$

Derivando rispetto a  $\dot{\phi}$  e ponendo uguale a zero si ha la conservazione dell'energia con la seguente espressione:

$$(MR^2 + I_C) \ddot{\phi} - Mgr \sin \alpha$$

Potrò esprimere l'accelerazione come

$$\ddot{x} = \frac{Mgr \sin \alpha}{(MR^2 + I_C) \frac{1}{R}} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_C}{MR^2}}$$

# Capitolo 7

## Gli urti

### 7.1 L'impulso e gli urti

Possiamo considerare l'impulso come

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt \quad (7.1)$$

Ossia l'impulso è l'integrale della forza rispetto al tempo. Fisicamente si può definire come l'**impatto** che ha una forza su un dato corpo: più una forza riesce ad accrescere il momento di una forza in breve termine e più impatto ha. Si definiscono due tipi di forze:

- **Forze impulsive:** sono forze che imprimono una grande variazione della quantità di moto in un  $\delta t$  molto piccolo.
- **Forze non impulsive:** sono forze che imprimono piccola variazione della quantità di moto in un  $\Delta t$  molto grande.

Si definisce allora il **Teorema dell'impulso** come:

$$\vec{I} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{Q} \quad (7.2)$$

Ossia l'impulso corrisponde alla variazione della quantità di moto.

#### 7.1.1 Definizione di urto e forze in gioco

Nel caso generale degli urti le forze che prendono parte agli urti sono delle grandi forze che agiscono in poco tempo. Se due palline si urtano, allora si sviluppano delle forze molto intense in tempi molto brevi che cambiano drasticamente la quantità di moto del sistema. Considerando l'intervallo di tempo durante l'urto posso trascurare l'impulso delle forze non impulsive in quanto in quel lasso di tempo le forze impulsive sono molto maggiori in modulo delle forze non impulsive e quindi nell'integrale dell'impulso posso solo considerare il contributo delle forze impulsive.

Se si considera l'insieme formato dai due corpi, le forze impulsive sono delle forze interne in quanto l'urto di un corpo all'altro è esattamente la forza che imprime uno dei due oggetti dall'altro. Per quanto riguarda quindi la variazione della quantità di moto si può dire che il sistema è isolato in quanto anche se c'è la forza peso, etc .., le forze d'urto sono le uniche che considero e allora la quantità di moto del sistema si conserva in quanto considero solo l'effetto delle forze interne. Possiamo allora considerare il sistema **isolato** e dunque possiamo utilizzare la conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia meccanica del sistema.

Figura 7.1: Il grafico della forza

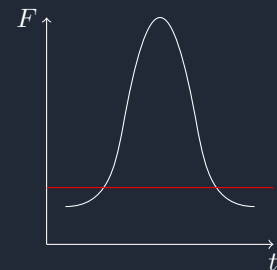
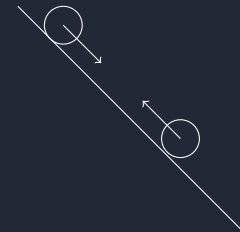


Figura 7.2: L'urto tra due palline



### 7.1.2 E' sempre possibile trascurare le forze non impulsive?

Nonostante quanto detto finora, non è possibile sempre trascurare le forze non impulsive in quanto nell'urto di una pallina dall'alto con un certo angolo rispetto all'orizzontale su di una pallina ferma, questa potrebbe voler sfondare il piano su cui è appoggiata ma questo non accade se si considera anche il contributo del vincolo. In generale bisogna sempre chiedersi se il vincolo ha una certa forza impulsiva che può scaturire a causa delle forze impulsive. La geometria del sistema di riferimento diventa dunque essenziale per determinare o meno l'impulsività delle forze vincolari.

### 7.1.3 Dimostrazioni

Si può dimostrare la conservazione della quantità di moto durante gli urti: se si considerano solamente le forze impulsive e due corpi che si scontrano, il teorema dell'impulso ci permette di calcolare la variazione della quantità di moto durante un breve intervallo di tempo (ossia durante un intervallo di tempo in cui è possibile considerare solamente le forze impulsive):

$$\vec{I} = \Delta \vec{q} = \Delta \vec{q}^{(i)} + \Delta \vec{q}^{(e)} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

Se si applica il teorema a due corpi in urto:

$$\vec{I}_1 = \Delta \vec{q}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1,2}^{(i)} dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2,1}^{(e)} dt \quad \vec{I}_2 = \Delta \vec{q}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2,1}^{(i)} dt + \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1,2}^{(e)} dt$$

Dunque se si hanno solamente forze impulsive:

$$\vec{I}_1 = \Delta \vec{q}_1 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1,2}^{(i)} dt \quad \vec{I}_2 = \Delta \vec{q}_2 = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2,1}^{(i)} dt$$

Per la terza equazione della dinamica si ha che

$$\begin{aligned} \vec{I}_1 &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1,2}^{(i)} dt = \Delta \vec{q}_1 = -\Delta \vec{q}_2 \\ \vec{I}_2 &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2,1}^{(i)} dt = \Delta \vec{q}_2 \end{aligned}$$

Se si considera la variazione della quantità di moto totale del sistema:

$$\Delta \vec{Q} = \Delta \vec{q}_1 + \Delta \vec{q}_2 \approx -\Delta \vec{q}_2 + \Delta \vec{q}_2 \approx 0$$

E dunque la quantità di moto si conserva. Con lo stesso procedimento si dimostra come è possibile dimostrare la conservazione del momento angolare.

Per determinare la conservazione dell'energia, si deve ricorrere alla definizione di sistema isolato: in termodinamica un sistema si dice **isolato** se non scambia energia con l'ambiente esterno. In altre parole il lavoro delle forze esterne si può non considerare e dunque l'energia propria del sistema è conservata.

$$E = U + K$$

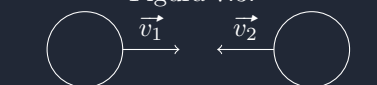
Ossia l'energia meccanica interna al sistema si conserva. Si considera inoltre che le forze interne siano nulle o non compiano alcun lavoro. Non è detto infatti che si possa conservare l'energia cinetica (anche se si conserva l'energia totale) poiché dipende dalla tipologia di urto.

## 7.2 Urto unidimensionale tra due corpi

Dato che si considerano solamente i contributi delle forze impulsive negli urti, allora posso utilizzare la quantità di moto nell'urto unidimensionale tra due corpi

$$m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

Figura 7.3:



Dato che ho sei incognite, posso ricondurmi al caso unidimensionale in modo tale da poter ridurre le incognite della mia equazione a due sole. Posso farlo con buona approssimazione se e solo se l'urto è centrato (ossia la traiettoria contiene entrambi i centri delle palline). Adesso ciò che succederà dipende dalla forza di interazione e si potrebbe allora dissipare energia (quello che succede all'energia cinetica dipende dai dettagli dell'urto). Possiamo definire allora due tipologie di urto:

- **Urto elastico**, ossia un urto in cui l'energia cinetica subito prima dell'urto e subito dopo l'urto è uguale.
- **Urto anelastico**: si definisce urto anelastico un urto in cui non si conserva l'energia cinetica e dove il lavoro delle forze interne è nullo.
- **Urto completamente anelastico**: si verifica quando dissipo tutta l'energia relativa al centro di massa e dunque i due corpi si attaccano.

Nel caso di urto elastico posso utilizzare anche la conservazione dell'energia cinetica per determinare la velocità finale:

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Posso allora risolvere

$$\begin{aligned} m_1(v_{1i} - v_{1f}) &= m_2(v_{2i} - v_{2f}) \\ m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) &= m_2(v_{2i}^2 - v_{2f}^2) \end{aligned}$$

Le velocità finali allora diventano

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (7.3)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (7.4)$$

### 7.2.1 Casi particolari dell'urto unidimensionale

1.  $m_1 = m_2$ :

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v_{2i} \\ v_{1i} &= v_{2f} \end{aligned}$$

Le particelle si scambiano le velocità. In particolare nelle centrali nucleari a fissione per rallentare i neutroni lenti bisogna usare come moderatore l'acqua pesante in quanto è ricca di neutroni.

2.  $v_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \\ v_{2f} &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \end{aligned}$$

Nell'urto elastico unidimensionale con una particella ferma, la seconda particella si mette in moto nella stessa direzione della particella in movimento se e solo se l'urto è centrale. La prima invece può andare o avanti o indietro (se la massa è superiore va avanti altrimenti indietro).

2.1  $m_1 = m_2$  e  $v_{2i} = 0$ :

$$\begin{cases} v_{1f} = 0 \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases}$$

2.b.  $m_2 \gg m_1$

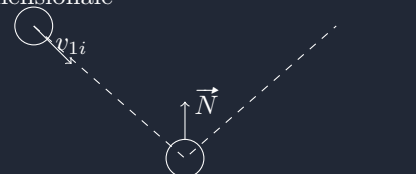
$$\begin{aligned} v_{1f} &= -v_{1i} \\ v_{2f} &= 0 \end{aligned}$$

## 7.3 Urto bidimensionale

Nel caso dell'urto bidimensionale abbiamo due gradi di libertà: di conseguenza non si può applicare la conservazione dell'energia ma bisogna considerare l'impulso delle forze e la quantità di moto per ridurre i gradi di libertà. In questo caso nell'urto tra due corpi, in modo tale che

$$v_{1i} \neq 0 \quad v_{2i} = 0$$

Figura 7.4: Schematizzazione dell'urto bidimensionale



Il corpo 1 colpirà la parete e finirà per compiere un moto di riflessione rispetto al vincolo e tenderà a rimbalzare con lo stesso angolo con cui ha urtato il vincolo (ovviamente se e solo se l'urto è elastico e lungo l'asse  $x$  non ho alcuna forza perché così riduco i gradi di libertà). Dal punto di vista sostanziale tutti gli urti coi raggi cosmici e nella fisica delle particelle seguono tutti questo modello anche se per corpi relativistici dovrò stare attento alle velocità.

Per risolvere questo tipo di urti possiamo utilizzare due sistemi di riferimento

- **SdR centro di massa:** il sistema di riferimento centro di massa è un sistema di riferimento in cui il centro di massa dell'intero sistema rimane fermo;
- **SdR laboratorio:** Ossia il sistema di riferimento nel quale uno dei due corpi rimane fermo e l'altro si muove rispetto a lei.

**Sistema di riferimento centro di massa** Nel sistema di riferimento centro di massa si ha che la quantità di moto è vincolata dal teorema di König: dunque si conserva. Dato che è possibile applicare al conservatività della quantità di moto e dato che l'urto che supponiamo è elastico, allora si dovrà avere:

$$\vec{Q} = 0 \quad \vec{q}_1 = -\vec{q}_2$$

Inoltre, l'energia cinetica dovrà essere, dato che le singole quantità di moto si possono esprimere in relazione al sistema di riferimento  $S$  come il contributo del teorema di König più il contributo rispetto al sistema di riferimento  $S'$ :

$$\begin{aligned}\vec{q}_1 &= \vec{q}_1 + m\vec{v}_C \\ \vec{q}_2 &= \vec{q}_2 + m\vec{v}_C\end{aligned}$$

L'energia cinetica si esprime allora come

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_1')^2 + \frac{1}{2}(v_2 + v_2')^2$$

Dato che deve risultare per il sistema di punti

$$\frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \vec{v}_C$$

$$K = \frac{1}{2}(v_1)$$

## Parte IV

# Gravitazione universale

## Capitolo 8

# La gravitazione universale

### 8.1 La gravitazione

Dai dati sperimentali e dallo studio dei fenomeni gravitazionali della totalità del mondo e dei corpi astronomici che lo circondano Keplero formulò delle leggi empiriche per lo studio dei fenomeni di attrazione gravitazionale portando anche alla nascita della teoria eliocentrica.

1. Orbite ellittiche: I corpi celesti compiono un'orbita assumibile ad un'ellisse.
2. I corpi spazzano aree uguali in tempi uguali: la velocità areolare lungo un'orbita di un determinato pianeta è costante e non è uguale per le orbite.
3.  $\frac{a^3}{T^2} = C$ . Ossia il rapporto tra il semiasse maggiore dell'ellisse e del periodo di rivoluzione è costante.

Le leggi impongono dell'ipotesi, non che il centro di massa del Sole con il suo centro geometrico e che le orbite siano piane.

#### 8.1.1 La prima di Keplero

Considerando il momento angolare e preso come polo calcolato rispetto al polo (il fuoco dell'ellisse dove sta il sole) allora si ottiene che questo è costante lungo tutta l'orbita.

Si ha allora un moto periodico con le masse della Terra e del Sole approssimabili a puntiformi date le enormi distanze. Inoltre il momento angolare è costante in direzione poiché l'orbita è regolare.

#### 8.1.2 Seconda di Keplero

In coordinate polari si ha la seconda legge di Keplero in modo tale che

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (P - S) = r \vec{v}_0 \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\hat{u}}_n = \dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\phi} \hat{u}_\phi \\ \vec{L}_O &= \vec{r} \times m_p \vec{v} (\dot{r} \hat{u}_r + r \dot{\phi} \hat{u}_\phi) = m_p r^2 \dot{\phi} \hat{k}\end{aligned}\quad (8.1)$$

Per uno spostamento infinitesimo  $dt$ : si può definire allora la **velocità areolare** ossia

$$\sigma = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi} \quad (8.2)$$

A livello vettoriale la velocità angolare ha la stessa direzione del vettore momento angolare ottenendo allora la relazione

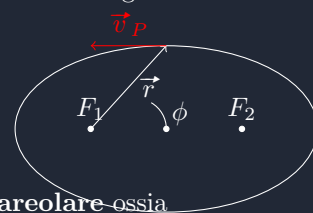
$$\vec{L} = 2m_P \vec{\sigma}$$

Mettendo allora in relazione le due leggi si ha che si conserva il momento angolare e dalla seconda legge cardinale si ottiene proprio che il momento risultante delle forze esterne è zero.

Possiamo allora definire l'accelerazione come la derivata della velocità angolare

$$\begin{aligned}\vec{a} = \dot{\vec{v}} &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \hat{u}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \hat{\phi}_\phi \\ \vec{\sigma} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\phi}\end{aligned}$$

Figura 8.1:



Allora si ottiene che

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{u}_r + \left(\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dt}\right)$$

E allora per la seconda legge si ottiene che la derivata della velocità areolare è zero e quindi  $\vec{a}/\vec{u}_r$ .

### 8.1.3 La terza di Keplero

Nell'ipotesi di orbita circolare si assume per la maggior parte dei pianeti si ha che

$$r = \alpha, \quad \sigma = \frac{1}{2}r^2\dot{\phi}, \ddot{\phi} \text{ const}$$

Allora possiamo definire il coefficiente di eccentricità come

$$\epsilon = \frac{r_A - r_P}{r_a + r_P}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1 \quad (8.3)$$

Se l'orbita è ragionevolmente circolare allora possiamo utilizzare le seguenti approssimazioni:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2}r^2\dot{\phi} \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{4\pi^2}{T^2} \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{4\pi^2 C}{r^3} \end{aligned}$$

E quindi possiamo definire la forza come

$$\vec{F} = -m_P r \dot{\phi}^2 \hat{u}_r = -m_P 4\pi^2 C \frac{1}{r^2} \hat{u}_R$$

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti la cui distanza dei punti su di essa rispetto ai due fuochi è uguale. e allora si ha che

$$r_1 + r_2 = 2\alpha$$

## 8.2 In coordinate polari

Dal teorema di Carnot del coseno si ha che

$$\begin{aligned} PF &= \sqrt{r^2 + 4d^2 - 4rd \cos \phi} \\ r + PF &= 2\alpha \end{aligned}$$

E allora si ottiene che

$$r = \frac{\alpha^2 - d^2}{\alpha - d \cos \phi} = \frac{b^2}{\alpha - d \cos \phi}$$

Possiamo allora, definito

$$\phi = \frac{d}{b}, \quad \rho = \frac{b^2}{\alpha} \Rightarrow r = \frac{\rho}{1 - \epsilon \cos \phi}$$

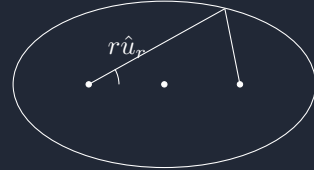
Dal caso particolare dell'approssimazione "circolare" mi posso portare al caso generale attraverso l'accelerazione

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{u}_r$$

utilizzando l'approssimazione di  $\dot{\phi} \neq \text{const}$  posso ottenere l'equazione del raggio come

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} - \frac{\epsilon}{\rho} \cos \phi$$

Figura 8.2: L'orbita come luogo geometrico



E allora posso dire che che

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\frac{2\sigma\epsilon}{\rho} \sin \phi \\ \ddot{r} &= -\frac{2\sigma\epsilon}{\rho} \cos \phi \dot{\phi} = -\frac{4\sigma^2\epsilon}{\rho r^2} \cos \phi\end{aligned}$$

Posso allora esprimere l'accelerazione come

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{4\sigma^2}{r^2} \left( \frac{\epsilon}{\rho} \cos \phi + \frac{1}{r} \right) \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{4\sigma^2}{\rho r^2}$$

Allora la forza diventa

$$\vec{F}_P = m_P \vec{a} = -m_P \frac{4\sigma^2}{\rho r^2} \hat{u}_r$$

### 8.3 Momento angolare e l'inerzia delle forze

La forza gravitazionale che agisce tra due corpi è data dalla legge di gravitazione

$$f = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (8.4)$$

la quale esprime il modulo della forza attrattiva esercitata tra due masse e vale per i corpi schematizzabili come puntiformi e anche per corpi sferici. Se i corpi non fossero schematizzabili a livello puntiforme allora l'attrazione gravitazionale è calcolata come

$$f = - \int_{m_1} \int_{m_2} G \frac{dm_1 dm_2}{r^3} \vec{r} \quad (8.5)$$

Figura 8.3: IL momento angolare

$m_1$

### 8.4 La forza di gravità di un guscio sferico

Per trovare la forza di gravità agente su di un punto esterno od interno rispetto ad un guscio sferico di spessore infinitesimo si ottiene considerando la densità superficiale  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{M}{4\pi r^2}$$

Data solo la legge di gravitazione universale dobbiamo allora ridurre il problema e cercare di ridurre il problema ad una situazione in cui è facile integrare e quindi scelgo un punto sulla superficie che per definizione avrà distanza  $r$  dal centro e quindi data l'energia potenziale del punto  $m$ ,

$$V = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{1,2}}$$

Tutti i punti che hanno la stessa distanza dal punto  $P$  contribuiranno allo stesso modo all'energia potenziale: quindi danno un contributo all'energia potenziale pari a:

$$dV = -\frac{Gm \, dM}{\rho}, \quad dM = \sigma \, dS, \quad dS = 2\pi r \sin \theta \cdot r \, d\theta$$

Posso approssimare lo spessore come un cilindretto e quindi posso calcolare la superficie. Introducendo l'angolo  $\theta$  posso allora definire il differenziale della massa come

$$dM = 2\sigma r^2 \sin \theta \, d\theta \Rightarrow dM = \frac{M}{2} \cdot \sin \theta \, d\theta$$

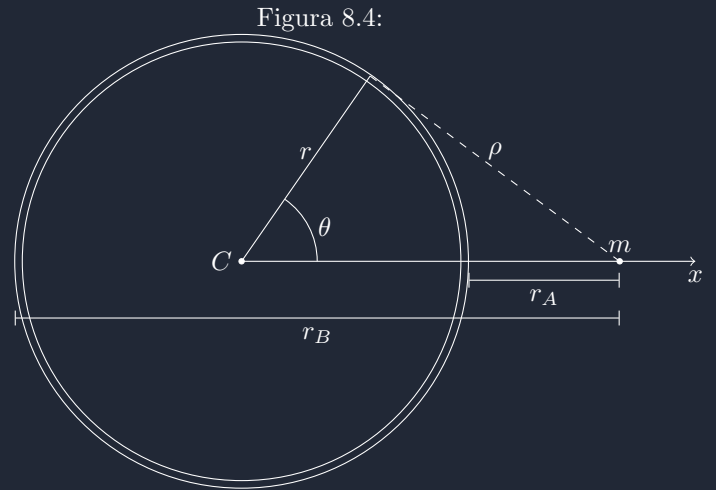


Figura 8.4:

In pratica il  $d\theta$  è esattamente lo spostamento infinitesimo del punto sulla superficie e quindi ottengo il volume del cilindretto con altezza  $r d\theta$ . Posso allora dire che l'energia potenziale di ogni punto sulla stessa circonferenza sarà:

$$dV = -Gm \frac{M}{2} \frac{\sin \theta d\theta}{\rho}, \quad \rho^2 = r^2 + x^2 - 2rx \cos \theta$$

Dato che  $x$  è fissato, allora se differenziamo l'espressione di  $\rho$  viene che

$$2\rho d\rho = 2rx \sin \theta d\theta$$

Si ottiene allora che

$$\frac{d\rho}{rx} = \frac{\sin \theta d\theta}{\rho}$$

Se ora facessi l'integrale dell'energia potenziale posso allora ottenere che:

$$V = -\frac{GmM}{2rx} \int d\rho = -\frac{GmM}{2rx} (r_B - r_A)$$

Si possono distinguere i due casi in cui il punto materiale è esterno rispetto alla superficie ma anche quando  $P'$  è interno: si danno allora due casi: un caso in cui  $P$  sia esterno alla superficie:

$$\begin{aligned} \text{Esterno : } & \begin{cases} r_A = x - r \\ r_B = x + r \end{cases} \\ \text{Interno : } & \begin{cases} r_A = r - x \\ r_B = x + r \end{cases} \end{aligned}$$

Per un punto esterno alla superficie allora si può dire che

$$V = -\frac{GmM}{2rx} 2r = -\frac{GmM}{x}$$

E questa è esattamente l'energia potenziale che risente un oggetto di massa  $m$  da un oggetto di massa  $M$  che si trova esattamente sul punto  $C$ . Se quindi è esterno alla superficie allora questa superficie posso considerarla come se fosse concentrata nel suo centro. Per un punto interno:

$$V = -\frac{GmM}{2rx} 2x = -\frac{GmM}{r}$$

In questo caso è posta alla distanza  $r$ , ossia come se il punto fosse sulla superficie e non al suo interno. La forza gravitazionale che risente dunque al suo interno è nulla.

## 8.5 La gravità di una sfera piena

Divido allora in tante bucce ma ora tutte le bucce si comportano in modo diverso tra di loro: quelle vicine alla massa non contribuiscono mentre quelle più interne contribuiscono alla forza gravitazionale. La forza è dovuta solo alla massa che si trova allora all'interno.

All'interno non agisce tutta la sfera ma solo la parte della massa interna:

$$\vec{F}_g = -\frac{GmM_i}{r^2} \hat{u}_r, \quad M_i = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

E quindi il rapporto tra la massa interna e quella della Terra è

$$\frac{M_i}{M} = \frac{r^3}{R^3}$$

Posso allora dire che essendo un punto materiale in una guida:

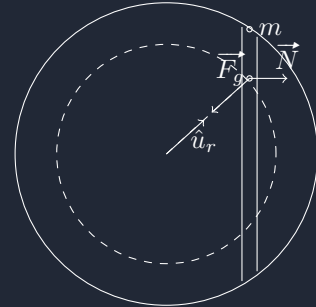
$$\begin{cases} \vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{R^3} (x\hat{i} + y\hat{j}) \\ \vec{N} = N\hat{i} \end{cases} \quad \begin{cases} x)N - \frac{GmM_T}{R^3} x = 0 \\ y) - \frac{GmM_T}{R^3} y = m\ddot{y} \end{cases}$$

Allora l'equazione che abbiamo per il corpo è proprio un moto armonico:

$$\ddot{y} + \frac{g}{R} y = 0$$

Questo si chiama pozzo di Gauss e si vede che la massa esterna non conta.

Figura 8.5:



## 8.6 Il moto dei razzi

Con gli strumenti sviluppati fino ad ora si è in grado di descrivere il moto di un razzo: In un dato istante di tempo il razzo espelle una certa quantità di massa che genera una spinta.

$$Q(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$\vec{Q}(t + dt) = M(t + dt) \vec{v}(t + dt) + dm(\vec{u} + \vec{v}(t + dt))$$

Dove  $\vec{u}$  è il vettore della velocità di espulsione del gas rispetto al razzo. Esplicitandola di nuovo posso allora dire che rispetto al missile.

$$\Delta \vec{Q} = \vec{Q}(t + dt) - \vec{Q}(t) = \vec{F}^{ext} dt$$

E quindi risolvendo si ottiene dato che  $dM = -dm$ :

$$\vec{F}^{ext} dt = M d\vec{v} + dm \vec{u}$$

Dividendo ora tutto per  $dt$ :

$$M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{u} \frac{dM}{dt} + \vec{F}^{ext}$$

Nel caso in cui il missile sia nello spazio e quindi che le forze esterne siano nulle la nostra espressione ci dice che

$$M dv = u dM \Rightarrow \int_{t_i}^{t_f} dv = u \int_{t_i}^{t_f} \frac{dM}{M}$$

Allora

$$v(t_f) = v(t_i) - u \ln \frac{M(t_i)}{M(t_f)}$$

$$v_f = v_i + |u| \ln \left( \frac{M_{mis} + M_{carb}(t_i)}{M_{mis} + M_{carb}(t_f)} \right)$$

Nel secondo caso si ha la partenza da Terra verso l'alto:

$$\vec{F}^{ext} = M \vec{g}$$

Possiamo usare sempre gli stessi principi:

$$M dv = u dM - Mg dt$$

$$dv = u \frac{dM}{M} - g dt$$

$$\int_{t_i}^{t_f} dv = v(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \left( u \frac{dM}{M} - g dt \right)$$

Allora si ottiene che

$$v(t_f) = |u| \ln \frac{M_i}{M_f} - g(t_f - t_i)$$

Più carburante brucio e meno importante diventa l'ultimo termine in modo tale da poter approssimare alla forma vista nel primo caso. Per avere più spinta ci conviene avere più velocità di espulsione possibile.

Figura 8.6:



# Appendice A

## Esercizi

### A.1 Esercizio su moodle (DPM)

Presi due punti materiali e con l'approssimazione che il filo è teso e che i due oggetti appesi sono due punti materiali, si assume anche che B sia in quiete e che A parta da fermo quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Posto il sistema di riferimento, allora posso misurare l'accelerazione con un sistema di riferimento ideale e il filo inizialmente uguale e potrebbe scorrere (si assume quindi un solo grado di libertà dicendo che B è in quiete e che il filo non scorra). Studiando B si ottiene la relazione:

$$\vec{T}_B + \vec{N} + m_B \vec{g} = 0$$

Studiano invece A, il quale si muove all'istante zero e quindi posso dire:

$$m_A \vec{a}_A = m_A \vec{g} + \vec{T}_A$$

Ora dato che A si muove, la sua traiettoria sarà una parabola e quindi posso dire dall'equazione vettoriale devo capire quando si alza: con la schematizzazione del problema posso dire che B si alza quando A inizia a muoversi, definiti allora i versori di A, posso dire che la proiezione lungo  $\hat{n}$  è dato da:

$$-m_A l \dot{\theta}^2 = m_A g \cos \theta - T_A$$

Allora posso dire che:

$$T_A = m_A g \cos \theta + m_A l \dot{\theta}^2$$

E quindi

$$N = m_B g - T_B \geq 0$$

E allora posso riscrivere, dato che la velocità di A posso esprimerla come  $l\dot{\theta}$ ,

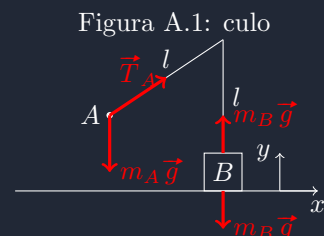
$$m_A \left( g \cos \theta + \frac{v_A^2}{l} \right) \leq m_B g$$

Dato che tutte le forze sono conservative, allora posso utilizzare la conservazione dell'energia meccanica anche perché c'è solo un vincolo:

$$E = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + m_A g y_A$$

Allora essendo che tutta questa per definizione è una costante, allora devo eguagliarla all'energia al tempo zero:

$$E_i = E(v_A = 0, y_A = l) \Rightarrow m_A g l$$



Imponendo le due uguaglianze ottengo:

$$v_A^2 = 2g(l - y_A)$$

Sostituendo la velocità nella formula trovata prima posso ottenere, posto

$$\Delta y = l - y_A = l \cos \theta \geq 0$$

Da qui trovo il coseno di teta e quindi Sostituendo tutto nell'espressione sopra

$$m_A \left( \frac{\Delta y}{l} + 2 \frac{\Delta y}{l} \right) \leq m_B$$

Allora ottengo l'espressione per il delta y come:

$$\Delta y_{max} = \frac{m_B l}{3m_A}$$

Ossia il valore massimo oltre il quale la massa B inizia ad alzarsi e quindi fa scorrere il filo.

### A.1.1 Esercizio di esame febbraio 2021

Dato il testo (che si spera l'utente abbia letto) si fanno le seguenti assunzioni: essendo la guida fissa, essa è descritta dall'equazione  $y = kx^2$ , avendo a che fare con un punto materiale non essendoci attrito, ho anche a che fare con un vincolo bilatero, e ho un SDR inerziale poiché la guida non si sposta ed è fissa. Quello che posso fare è scrivere le forze in gioco e la reazione vincolare della guida. Per ipotesi di mancanza di attrito so anche che  $N$  è ortogonale alla traiettoria. Tutte le forze sono conservative e quindi l'energia meccanica si conserva ed il vincolo è bilatero

Figura A.2: IMMAGINE IDS DS  
MDOODLE DE D

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - mgy = \text{const} = 0.$$

Allora posso ricavare la velocità:

$$v = \sqrt{2gy}$$

Essendo  $y = kx^2$ , la  $y$  finale, ossia quella prima che tocchi terra è quella della  $x$  massima e quindi la  $x_{MAX}$  è semplicemente  $L$  e allora

$$v_F = \sqrt{2gkL^2}$$

PUNTO B:

Mentre  $\vec{N}_x$  è concorde con l'asse di riferimento, allora il segno di  $\vec{N}_y$  non lo è e per come abbiamo scelto il sistema di riferimento non è possibile che sia concorde. Dato che la guida può solo spingere ma non tirare, allora

$$\vec{N}_x, \vec{N}_y \geq 0$$

Ora

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Che posso proiettare lungo la direzione  $x$  ed  $y$  ed ottengo che

$$\begin{aligned} N_x &= m\dot{x} \\ mg - m\dot{y} &= N_y \end{aligned}$$

Dato che si hanno due gradi di libertà, dobbiamo utilizzare delle approssimazioni: fin tanto che il corpo è attaccato alla guida allora questo soddisfa le equazioni della guida:

$$\vec{r} = P - O = x\hat{i} + kx^2\hat{j}$$

Derivando, si ottiene l'equazione della velocità:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + 2kx\dot{x}\hat{j}$$

Derivando ancora:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + 2k(\dot{x}^2 + x\ddot{x})\hat{j}$$

Il secondo metodo è utilizzare l'energia meccanica:

$$v^2 = 2gy$$

Sostituendo la relazione ottenuta preimac di v:

$$v^2 = \dot{x}^2(1 + 4k^2x^2) = 2gkx^2$$

Allora:

$$\dot{x}^2 = \frac{2gkx^2}{1 + 4k^2x^2}$$

METODO ALTERNATIVO:

Considerato che  $\vec{N}_y$  e  $\vec{N}_x$  non sono più generici e io so che  $N$  deve essere ortogonale alla traiettoria: allora se vado a disegnare la traiettoria, avrò un versore tangente ed un versore invece ortogonale ad  $\hat{u}_t$ :

$$\vec{N} \cdot \hat{u}_C = 0$$

$$\vec{N} \cdot \vec{v} = 0$$

Sostituendo quelle equazioni della velocità allora posso ottenere:

$$N_x\dot{x} - N_y2kx\dot{x} = \dot{x}(N_x - 2kxN_y)$$

Ci sono allora due soluzioni per questa equazione:

$$N_x = 2kxN_y \quad e \quad x = 0$$

Da l'equazione:

$$\begin{cases} N_x = m\ddot{x} \\ N_y = m(g - \ddot{y}) \end{cases}$$

$$\ddot{x} = \frac{N_x}{m} = \frac{2kxN_y}{m}$$

Sostituendo all'interno della equazione per  $N_y$  allora:

$$mg - N_y = m2k\left(\dot{x} + \frac{2kxN_y}{m}\right)$$

SO anche che:

$$\dot{x}^2 = \frac{2gkx^2}{1 + 4k^2x^2}$$

Allora sostituendo e raccogliendo  $N_y$ :

$$N_y(1 + 4k^2x^2) = mg\left(1 - \frac{4k^2x^2}{1 + 4k^2x^2}\right)$$

E allora:

$$N_y = \frac{mg}{(1 + 4k^2x^2)^2}$$

E allora non si stacca mai dalla guida.

## A.2 Esercizio esame novembre 24

Sul filo agiscono diverse forze ma non essendoci la gravità, la forza che la rimpiazza è quella centrifuga e tende a spostarlo verso una direzione (è radiale). Le ipotesi sono:

1. La piattaforma ruota con velocità  $\omega_0$  costante (c'è un motore esterno che tiene in rotazione il disco).
2. Il filo del pendolo è ideale;
3. Si lavora con la schematizzazione del punto materiale;
4. Sistema non inerziale  $O_{xy}$ .

Punto a:

Per calcolare la distanza si può scrivere per le coordinate:

$$\begin{cases} x_P = l \sin \phi \\ y_P = a + l \cos \phi \end{cases}$$

Adesso per calcolare la distanza dal centro  $O$  basterà calcolare la distanza dal filo come:

$$|P - O|^2 = x_P^2 + y_P^2 = l^2 \sin^2 \phi + a^2 + l^2 \cos^2 \phi + 2al \cos \phi$$

E quindi

$$|P - O| = \sqrt{l^2 + a^2 + 2al \cos \phi}$$

PUNTO B:

Sul punto  $P$  ci sono diverse forze: prima di tutto la forza di trascinamento verso l'esterno, la forza di Coriolis (che non so dove agisce) e la forza centrifuga. Di queste forze quella che compie lavoro è quella di trascinamento mentre quelle che non compiono lavoro sono la forza di Coriolis e la tensione (poiché è sempre ortogonale alla direzione tangente).

Il lavoro della forza di trascinamento è data da:

$$V = -\frac{1}{2}m\omega_0^2|P - O|^2 = -\frac{1}{2}m\omega_0^2(l^2 + a^2 + 2al \cos \phi)$$

I termini sono quasi tutti costanti, possiamo allora considerare solo il coseno e riassumere quindi l'energia potenziale come una costante meno il pezzo non costante:

$$V = cost - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Derivando si ottiene proprio l'espressione:

$$V' = -m\omega_0^2 al(-\sin \phi) = 0$$

Le cui soluzioni per ottenere l'equilibrio sono proprio  $0, \pi$ . Verifichiamo allora la stabilità di questo equilibrio, per cui la derivata seconda sarà proprio:

$$V'' = m\omega_0^2 al \cos \phi \Rightarrow \begin{cases} > 0, & \phi = 0 \text{ stabile} \\ < 0, & \phi = \pi \text{ instabile} \end{cases}$$

PUNTO C:

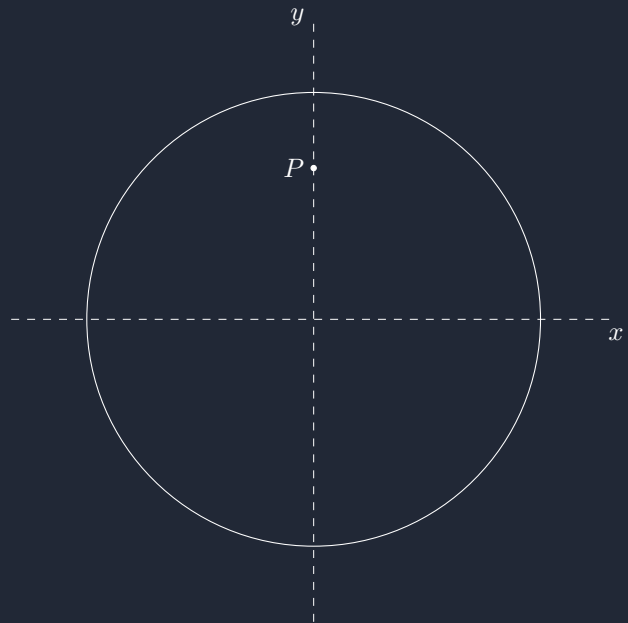
L'energia non è conservata in un sistema di riferimento esterno a causa del motore del disco che lo tiene in rotazione mentre si conserva nel sistema di riferimento ruotante  $O_{x,y}$ . Il ruolo del motore allora è descritto con la forza di trascinamento. Possiamo allora scrivere l'energia nel sistema di riferimento ruotante con un termine cinetico e uno potenziale:

$$\begin{cases} \dot{x}_P = l \cos \phi \cdot \dot{\phi} \\ \dot{y}_P = -l \sin \phi \cdot \dot{\phi} \end{cases}$$

Da qui allora si ha che

$$\dot{V}_P^2 = \dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2 = l^2 \dot{\phi}^2$$

Figura A.4: Schematizzazione del problema



Troviamo allora il classico risultato del moto circolare e l'energia allora è ora:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Con la costante dell'energia potenziale che posso liberamente mettere uguale a zero poiché l'energia meccanica è definita a meno di una costante. Con il metodo dell'energia allora posso derivare l'energia ottenendo:

$$\dot{E} = 0 = \frac{1}{2}ml^2 2\ddot{\phi}\dot{\phi} - m\omega_0^2 al(-\sin \phi)\dot{\phi} = 0$$

Semplificando si ottiene la seguente equazione di moto:

$$l\ddot{\phi} + \omega_0^2 a \sin \phi = 0$$

Diventa allora l'equazione del pendolo senza la forza peso ma con la forza centrifuga. Nel limite allora delle piccole oscillazioni sappiamo allora che  $\phi$  è vicino a quella di equilibrio.

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \phi = 0, \quad \Omega^2 = \frac{\omega_0^2 a}{l}$$

Allora il periodo delle oscillazioni si ha che è:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}, \Omega = \sqrt{\frac{l}{a}}$$

PUNTO D:

Senza le approssimazioni delle piccole oscillazioni dobbiamo prima studiare il moto e trovare la tensione del filo. Si sa da Newton che:

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{co} + \vec{F}_T$$

Allora queste si esprimono come:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{co} &= -2m\omega_0 \times \vec{v} \\ &= -2m\omega_0 l \dot{\phi} \hat{u}_n \end{aligned}$$

Dato che la tensione è opposta a  $\hat{u}_n$  si ha:

$$\vec{T} = -T\hat{u}_n$$

E la trascinamento:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2(P - O)$$

Proietto allora lungo la direzione N tutte le forze ottenendo che: posso scrivere intanto la tensione:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= m\vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T \\ \vec{T} &= -\hat{u}_n \vec{T} = -(m\vec{a} - \vec{F}_{co} - \vec{F}_T)\hat{u}_n \end{aligned}$$

Allora scriviamo i vettori che compaiono come proiezioni sulla direzione n:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \hat{u}_n &= -l\dot{\phi}^2 \text{ centripeta} \\ \vec{F}_T \cdot \hat{u}_n &= m\omega_0^2(P - O) \cdot \hat{u}_n \end{aligned}$$

Possiamo esprimere il versore lungo n come:

$$\hat{u}_n = \sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}$$

E si ottiene allora la forza di trascinamento come:

$$\vec{F}_T = m\omega_0^2(x_P \sin \phi + y_P \cos \phi)$$

Allora date le sostituzioni delle coordinate di P, possiamo allora dire che:

$$m\omega_0^2(l + a \cos \phi)$$

Adesso la proiezione della forza di coriolis è proprio:

$$\vec{F}_{co} = 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Sostituendo tutte le espressioni trovate ora nell'espressione per la tensione si ottiene allora:

$$T = ml\dot{\phi}^2 - 2m\omega_0 l \dot{\phi} - 2m\omega_0 l \dot{\phi}$$

Dobbiamo allora trovare  $\dot{\phi}$  per poter trovare l'espressione per la tensione. L'energia la abbiamo scritta prima come:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - m\omega_0^2 al \cos \phi$$

Parte da fermo ( $\dot{\phi} = 0$ ) e quindi:

$$E_0 = -m\omega_0^2 al \cos \phi_0$$

E quindi portando dall'altra parte possiamo ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 &= -m\omega_0^2 al(\cos \phi - \cos \phi_0) \\ \dot{\phi}^2 &= \frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) \geq 0 \end{aligned}$$

Dato che l'espressione ha senso se e solo se è positiva, allora devo (dato  $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$ ) che

$$-\phi_0 \leq \phi \leq \phi_0$$

Anche senza le piccole oscillazioni allora so che il pendolo può oscillare (in questa situazione) solo tra quei due valori. Allora  $\dot{\phi}$  diventa:

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)}$$

Il segno meno è dovuto poiché nel primo periodo  $\phi$  diminuisce e quindi la tensione diventa:

$$T = ml \left( \frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0) - 2\omega_0 \cdot \left( -\sqrt{\frac{2\omega_0^2 a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right) + \frac{\omega_0^2}{l}(l + a \cos \phi) \right)$$

Raccogliendo allora:

$$T = ml\omega_0^2 \left( \frac{3a}{l} \cos \phi - \frac{2a}{l} \cos \phi_0 + 1 + 2\sqrt{\frac{2a}{l}(\cos \phi - \cos \phi_0)} \right)$$