



# Indice

<b>1 Le grandezze fisiche</b>	<b>4</b>
1.1 Introduzione alle grandezze fisiche . . . . .	4
1.2 Le tre grandezze fondamentali . . . . .	4
1.2.1 Lunghezza . . . . .	4
1.2.2 Tempo . . . . .	4
1.2.3 Massa . . . . .	4
1.3 Le grandezze derivate . . . . .	4
1.4.1 Superficie . . . . .	5
1.4.2 Volume . . . . .	5
1.4.3 Angolo . . . . .	5
1.4.4 Angolo solido . . . . .	5
1.4.5 Densità media assoluta . . . . .	6
1.4.6 Velocità scalare media . . . . .	6
1.4.7 Accelerazione scalare media . . . . .	6
1.4.8 Frequenza . . . . .	6
1.4.9 Forza . . . . .	6
1.4.10 Pressione . . . . .	6
1.4.11 Lavoro . . . . .	6
1.4.12 Potenza media . . . . .	6
1.5 Unità di misura . . . . .	7
1.5.1 Sistema MKS . . . . .	7
1.5.2 IL sistema internazionale . . . . .	7
1.5.3 Sistema CGS . . . . .	7
1.5.4 Sistema pratico . . . . .	7
<b>2 L'analisi dell'errore in generale</b>	<b>8</b>
2.1 Errori o incertezze . . . . .	8
2.2 Inevitabilità dell'incertezza . . . . .	8
2.3 Stima delle incertezze nella lettura su una scala graduata . . . . .	8
2.4 Stime delle incertezze nelle misure ripetibili . . . . .	8
<b>3 Rappresentare le incertezze</b>	<b>9</b>
3.1 Migliore stima $\pm$ incertezza . . . . .	9
3.2 Cifre significative . . . . .	9
3.3 Discrepanza . . . . .	9
3.4 Confronto di valori misurati e accettati . . . . .	10
3.5 Confronto di due misure . . . . .	10
3.6 Grafici di relazioni tra grandezze . . . . .	10
3.7 Incertezze relative . . . . .	10
3.8 Cifre significative e incertezze relative . . . . .	10
3.9 Prodotto tra due valori misurati . . . . .	11
3.10 Approssimazione delle funzioni . . . . .	11
<b>4 Strumenti e misure</b>	<b>12</b>
4.1 Metodi per misure delle grandezze fisiche . . . . .	12
4.2 Gli strumenti del laboratorio e le loro caratteristiche . . . . .	12
4.2.1 Caratteristiche generali . . . . .	12
4.2.2 La sensibilità . . . . .	12

4.3	Gli strumenti . . . . .	13
4.3.1	Il nonio . . . . .	13
4.3.2	Calibro . . . . .	13
4.3.3	Palmer . . . . .	13
4.3.4	Lo sferometro . . . . .	14
4.4	Gli errori degli strumenti . . . . .	14
4.4.1	Sistematici . . . . .	14
4.4.2	Accidentali . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Propagazione delle incertezze</b>	<b>15</b>
5.1	La valutazione dell'errore . . . . .	15
5.2	Stima a priori degli errori in una misura diretta . . . . .	15
5.2.1	Errori sistematici . . . . .	15
5.2.2	Errori accidentali . . . . .	15
5.3	Stima a priori degli errori di una misura indiretta e propagazione degli errori semplici . . . . .	15
5.3.1	Proporzionalità diretta $g = f(x) = kx$ . . . . .	16
5.3.2	Proporzionalità quadratica $g = f(x) = x^2$ . . . . .	16
5.3.3	Proporzionalità $g = f(x) = x^3$ . . . . .	16
5.3.4	Proporzionalità inversa $g = f(x) = \frac{1}{x}$ . . . . .	16
5.3.5	$g = f(x) = \sin x$ e $g = f(x) = \cos x$ . . . . .	17
5.3.6	$g = f(x) = \ln x$ . . . . .	17
5.4	Il caso generale della propagazione dell'errore per una funzione che ci da una misura indiretta . . . . .	17
5.5	Caso di una funzione a più variabili . . . . .	18
5.5.1	Somma di due variabili o più variabili . . . . .	18
5.5.2	Prodotto di due o più variabili . . . . .	18
5.6	Formula di propagazione dell'errore . . . . .	18
5.7	La risoluzione con i logaritmi . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Introduzione all'analisi statistica delle incertezze casuali</b>	<b>20</b>
6.1	Valutazioni a posteriori degli errori: deviazione standard e media . . . . .	20
6.2	Valori anomali e confronti tra misure . . . . .	21
6.3	La deviazione standard nella media . . . . .	21
6.4	Errori sistematici . . . . .	21
<b>7</b>	<b>La distribuzione normale per studiare la distribuzione delle misure di una certa grandezza</b>	<b>22</b>
7.1	Media pesata, frequenza ed istogramma . . . . .	22
7.1.1	L'istogramma . . . . .	22
7.1.2	Iistogramma a intervalli o classi . . . . .	22
7.2	Distribuzione limite . . . . .	23
7.3	La distribuzione normale . . . . .	23
7.4	La deviazione standard come limite di confidenza del 68% . . . . .	25
7.5	Giustificazione della media come migliore stima di $X$ e di $\sigma$ come migliore stima per l'incertezza . . . . .	25
7.6	Giustificazione della somma in quadratura . . . . .	26
7.7	Deviazione standard della media . . . . .	28
<b>8</b>	<b>Rigetto di dati</b>	<b>30</b>
8.1	Il problema del rigetto di dati . . . . .	30
8.2	Criterio di Chauvenet . . . . .	30
<b>9</b>	<b>Covarianza e livello di confidenza</b>	<b>31</b>
9.1	La covarianza nella propagazione degli errori . . . . .	31
9.2	Dimostrazione della conservatività della somma delle incertezze assolute . . . . .	32
9.3	Livello di confidenza . . . . .	32
9.4	Confronto tra due misure . . . . .	33
<b>10</b>	<b>Medie pesate</b>	<b>34</b>
10.1	La media pesata . . . . .	34
10.2	L'incertezza associata alla media pesata . . . . .	35
10.3	Applicazioni della media pesata . . . . .	35

<b>11 Relazioni tra grandezze fisiche</b>	<b>36</b>
11.1 Il metodo grafico . . . . .	36
11.2 Determinazione di $A$ e $B$ . . . . .	36
11.3 Relazione non lineare . . . . .	37
11.4 Metodo dei minimi quadrati . . . . .	37
11.5 Incertezze tra $A$ e $B$ . . . . .	38
11.6 Linearità e coefficiente di correlazione lineare . . . . .	39
11.7 Metodo dei minimi quadrati pesati . . . . .	40
11.8 Varianza efficace e relazioni non lineari . . . . .	40
<b>12 Distribuzione binomiale</b>	<b>42</b>
12.1 Approssimazione della binomiale con la gaussiana . . . . .	42
12.2 Distribuzione di Gauss per gli errori casuali . . . . .	42
<b>13 Distribuzione di Poisson</b>	<b>44</b>
13.1 $\mu$ come conteggio medio atteso . . . . .	44
13.2 Deviazione standard . . . . .	44
13.3 Approssimazione di Poisson con la Gaussiana . . . . .	45
13.4 Rimuovere il rumore di fondo . . . . .	45
<b>14 Il test del chi-quadrato per una distribuzione</b>	<b>46</b>
14.1 Cosa è il Chi-quadrato . . . . .	46
14.2 I gradi di libertà . . . . .	46

# Capitolo 1

## Le grandezze fisiche

### 1.1 Introduzione alle grandezze fisiche

In fisica alle grandezze con cui si deve operare si da una **definizione operativa**, ovvero si specifica se due grandezze descrivono la stessa quantità. Le grandezze per cui si da questa definizione operativa prendono il nome di **fondamentali** mentre quelle che derivano da queste grandezze e per le quali non diamo alcuna definizione operativa prendono il nome di **derivate**.

Una volta stabilita una definizione operativa per le grandezze fondamentali si procede con lo scegliere un **valore campione** e usarlo per misurare tutti gli oggetti. La meccanica ci permette di descrivere tutte le grandezze a partire da tre grandezze fondamentali: Lunghezza, tempo e massa ( $L, T, M$ ).

### 1.2 Le tre grandezze fondamentali

#### 1.2.1 Lunghezza

Costruendo un piano di prova che sia geometricamente astratto (ossia che non presenti alcuna imperfezione) ed una retta fisica astratta, ossia una retta che ottengo levigando tra di loro tre blocchi di ferro in modo tale che si levighino tra di loro ed incidendo su quello che è stato levigato con gli altri due blocchi. Incrociando due rette fisiche astratte si ottiene un punto fisico astratto. Attraverso una riga, che suppongo perfetta, posso determinare la relazione tra i due segmenti (che si creano collegando due punti fisici astratti).

Questo tuttavia mi darà informazioni solo se un segmento è più lungo dell'altro ma non mi dice se è più lungo di altri segmenti; posso allora suddividere la riga con dei segmenti piccoli in modo tale da poter ottenere una **riga graduata** che mi permette di confrontare un segmento con l'unità della mia riga.

### 1.3 Tempo

IL concetto di intervallo di tempo fa uso del moto periodico e quindi due eventi hanno la stessa durata se passano lo stesso numero di oscillazioni.

#### 1.3.1 Massa

Definiamo la **bilancia delle masse** il carrello che quando lasciato inizia ad oscillare in modo periodico e quindi la massa è quella quantità che modifica il periodo di oscillazione del carrellino (sto definendo la massa inerziale) per cui aumentando la massa aumenterà il periodo di oscillazione del carrello.

Posso inserire un oggetto di volume maggiore e se aumenta il periodo allora deve essere aumentata anche la massa: si osserva allora che in qualche modo massa e volume sono collegati. Due corpi hanno la stessa massa se e solo se nel sistema del carrello hanno lo stesso periodo di oscillazione.

#### 1.3.2 Forza

La forza è una grandezza vettoriale che descrive la fatica che faccio per spostare qualcosa, l'effetto dell'applicazione di una forza è quello di cambiare lo stato di moto.

Se le forze applicate sono più di uno non è sempre detto che mutino lo stato di moto: potrebbero provocare delle deformazioni come nel caso delle molle, la cui forza applicata è ricavata proprio a partire dalle deformazioni.

Posso misurare quindi quanta forza è applicata ad un oggetto attraverso un dinamometro, ossia una molla attaccata al soffitto con una scala graduata di lato per misurare l'estensione della molla.

## 1.4 Le grandezze derivate

### 1.4.1 Superficie

Se, avendo una superficie piana, volessi misurarne l'estensione posso misurare la lunghezza del lato e posso allora definire un quadratino di lato  $1u$  e definisco l'unità fondamentale della superficie come

$$S = l^2$$

Per altre figure ho

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2, \text{ cerchio} & S &= bh, \text{ Rettangolo} & S &= 2\pi rh, \text{ cilindro} \\ S &= \frac{1}{2}bh, \text{ triangolo}, & S &= 4\pi r^2, \text{ sfera}, & S &= l^2, \text{ quadrato} \end{aligned}$$

Qualsiasi superficie è dunque il prodotto di due lunghezze per un fattore numerico variabile a seconda della superficie da calcolare (che si ricava mediante l'integrazione), le dimensioni fisiche, espresse mediante le equazioni dimensionali allora è proprio

$$[S] = [L^2 M^0 T^0]$$

### 1.4.2 Volume

Applico lo stesso ragionamento fatto per la superficie, il volume del piccolo cubetto di lato  $u$  è dato proprio da  $V = l^3$ .

$$V = abc, \text{ cubo} \quad V = \pi r^2 h, \text{ cilindro} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ sfera}$$

Allora le dimensioni del volume sono proprio

$$[V] = [L^3 M^0 T^0]$$

### 1.4.3 Angolo

Prendendo un cerchio e due semirette che si incrociano in un punto  $O$  di origine del cerchio, posso prendere arbitrariamente due punti sulla circonferenza intercettati dalle due semirette e definisco allora l'angolo come

$$\alpha = \frac{\overline{AB}}{r}$$

Da notare come l'angolo, dato che è un rapporto tra due dimensioni di lunghezza è adimensionale. Esiste anche la definizione di angolo sessagesimale: prese le due semirette, le faccio girare fino a che non coincidono e le posso poi dividere ulteriormente per cui si ottiene la seguente conversione tra radianti e angoli sessagesimali:

$$\pi RAD = 180$$

### 1.4.4 Angolo solido

Posso passare ad una dimensione superiore rispetto all'angolo piano e quindi posso, a partire da  $O$  costruire un insieme di semirette che coincidono con una superficie nello spazio. In base alla superficie nello spazio. In base alla superficie scelta possiamo ottenere piramidi o coni. Posso definire allora l'ampiezza dell'angolo solido, prendendo una sfera con centro in  $O$ .

Facendo il rapporto tra l'area della superficie intersecata ed il raggio al quadrato della sfera ottengo allora l'ampiezza dell'angolo solido.

$$\Omega = \frac{S}{r^2}$$

Definito come steradiante; se prendessi una superficie coincidenti con quella di una sfera, avrei una sola retta e quindi

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2}$$

Ovviamente adimensionale.

### 1.4.5 Densità media assoluta

Si ottiene facendo il rapporto tra le masse del corpo ed il suo volume

$$\delta = \frac{m}{V}, \quad [\delta] = [L^{-3} M T^0]$$

### 1.4.6 Velocità scalare media

Si può definire come il rapporto tra la traiettoria percorsa da un punto e il tempo impiegato a percorrerla

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

E quindi dimensionalmente

$$[\langle v \rangle] = [L M^0 T^{-1}]$$

### 1.4.7 Accelerazione scalare media

L'accelerazione scalare media è definita come

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad [\langle a \rangle] = [L M^0 T^{-2}]$$

### 1.4.8 Frequenza

Se c'è un fenomeno che si ripete possiamo usare la frequenza ovvero l'inversa del periodo dell'evento.

$$f = \frac{1}{T}, \quad [f] = [L^0 M^0 T^{-1}]$$

### 1.4.9 Forza

Facciamo riferimento al secondo principio della dinamica: una forza applicata ad una massa modifica lo stato di moto

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad [F] = [L M T^{-2}]$$

### 1.4.10 Pressione

LA posso definire nel caso particolare di una forza agente su di una superficie. Chiamo allora pressione il rapporto tra queste due grandezze e dunque secondo l'analisi dimensionale posso andare a definire come

$$P = \frac{F}{S}, \quad [P] = [L^{-1} M T^{-2}]$$

### 1.4.11 Lavoro

Si parla di lavoro quando il punto di applicazione della forza si muove nello spazio. Posso definire il lavoro come

$$L = F\Delta S \cos \theta$$

Facendo allora l'analisi dimensionale si ottiene

$$[L] = [L^2 M T^{-2}]$$

### 1.4.12 Potenza media

$$\langle W \rangle = \frac{L}{\Delta t}, [W] = [M L^2 T^{-2}]$$

## 1.5 Unità di misura

### 1.5.1 Sistema MKS

La definizione ufficiale è l'acronimo di metro, kilogrammo e secondo. Le unità di misura associate alle 3 grandezze fondamentali lunghezza, massa e tempo.

1. Intervallo di tempo: per definirlo abbiamo visto che serve un fenomeno periodico Si potrebbe usare i moti periodici celesti come rotazione, rivoluzione... Per indicare il tempo si definisce il secondo solare medio che è esattamente

$$1s = \frac{d}{86400}$$

Ossia il giorno solare medio. Successivamente si è sostituito questa definizione con una più precisa che utilizza la propagazione delle onde elettromagnetiche da parte degli atomi. Si usò l'orologio atomico sfruttando la frequenza di oscillazione delle energie degli elettroni negli atomi e dunque si è arrivati a descrivere il secondo come l'intervallo di tempo entro il quale avvengono  $9'192'632'770$  oscillazioni

2. Lunghezza: Si utilizza la radiazione elettromagnetica del Kripton per definire il metro come un particolare multiplo della sua onda elettromagnetica, poi si è deciso di definire il metro come

$$1m = \frac{c}{299'792'458} s$$

3. Massa: Si può definire come una certa frazione della costante di Plank:

$$1kg = \frac{h}{6.63607015 \cdot 10^{-34}} \cdot \frac{s}{m^2}$$

### 1.5.2 IL sistema internazionale

Il sistema internazionale è nato specificamente per poter utilizzare delle unità di misura ricavate con metodi più precisi dei metodi antichi:

1. Temperatura: Si può misurare in gradi Kelvin o anche in gradi Celsius:

$$T(C)e = T(K) - 273.15$$

2. Mole: E' un modo per rappresentare un numero di oggetti utilizzando il numero di avogadro, molto utilizzato se si parla di particelle.
3. Quantità di carica: si misura in ampere.
4. Intensità luminosa: Rappresenta una certa intensità luminosa definita ad una certa distanza da una certa sorgente;

Da queste grandezze (ci sono anche lunghezza, massa e tempo come detto prima) si definiscono poi le grandezze derivate in modo tale da non dover dare un'altra definizione da zero.

### 1.5.3 Sistema CGS

E' un sistema che utilizza centimetri, grammi e secondi.

### 1.5.4 Sistema pratico

Si scelgono come grandezze fondamentali lunghezza, tempo e forza.

SI definisce allora la lunghezza ed il tempo come nei precedenti sistemi.

La definizione della forza è presa sfruttando la definizione di massa e quella di forza peso arrivando a definirla come kilogrammo forza peso. Il peso di un oggetto può variare al variare dell'altezza e quindi per definire il kilogrammo forza peso devo necessariamente affidarmi ad una definizione di  $g$  accetta come media. e quindi la massa diventa una grandezza derivata con unità di misura  $kgf \frac{s^2}{m}$ .

## Capitolo 2

# L'analisi dell'errore in generale

### 2.1 Errori o incertezze

Sebbene i termini "errore" e "incertezza" indichino concetti diversi, spesso per i fisici la distinzione è irrilevante. L'**errore** sulla misura di una grandezza è la differenza tra il valore della misura ed il valore vero (spesso non si riesce ad ottenerlo poiché non si ottiene il valore reale) mentre l'**incertezza** di una misura è invece l'ipotesi sulla stima dell'errore.

### 2.2 Inevitabilità dell'incertezza

Nessuna grandezza può essere misurata con assoluta precisione: si può comunque operare con cura per limitare tutti i possibili errori ed incertezze durante le misure anche se eliminarle del tutto è virtualmente impossibile.

### 2.3 Stima delle incertezze nella lettura su una scala graduata

Supponiamo di avere un righello e di misurare una matita e risulta che essa si possa trovare più vicina a  $36mm$ . In questo caso possiamo affermare:

$$\begin{aligned} &\text{migliore stima della lunghezza} = 36mm \\ &\text{intervallo probabile : da } 35,5mm \text{ a } 36,5mm. \end{aligned}$$

La valutazione della posizione tra le incisioni su di una scala numerata è chiamata *interpolazione*.

### 2.4 Stime delle incertezze nelle misure ripetibili

E' possibile fare stime ragionevoli dell'incertezza in una serie di misure quando queste misure hanno lo stesso numero di cifre significative: inoltre è sempre ragionevole dire che il valore tra cui è compresa la misurazione è il minimo misurato ed il massimo misurato durante questa serie di misure.

Tuttavia non sempre questo metodo di ottenere incertezze è completamente attendibile: se ottengo due forze diverse di rottura per due fili che, per ipotesi, sono identici ma ottengo valori diversi, allora è probabile che vi sia un errore di misura dovuto allo strumento per misurare la forza di rottura o al fatto che magari i due cavi non sono completamente identici.

Questo tipo di errori prende il nome di **errori sistematici** e possono essere difficili da rilevare, inoltre affliggono tutte le misure.

# Capitolo 3

## Rappresentare le incertezze

### 3.1 Migliore stima $\pm$ incertezza

Generalmente una serie di misure può essere rappresentata nel seguente modo:

$$l = l_m + \delta l \quad (3.1)$$

Dove  $l_m$  è la migliore stima di una misura e  $\delta l$  l'**incertezza** o **margine di errore** nella misura di  $l$ .

### 3.2 Cifre significative

Per indicare le incertezze esistono delle regole fondamentali.

1. **Regola per scrivere le incertezze:** le incertezze sperimentali dovrebbero di regola essere arrotondate ad una cifra significativa. Incertezze come  $\pm 0,02385$  non hanno senso e si arrotondano a  $0,02$ . Una velocità misurata come:  $6051,78 \pm 30m/s$  è ridicola ed è meglio esprimere come  $6050 \pm 30m/s$  in quanto le cifre 1, 7 ed 8 sono totalmente irrilevanti rispetto all'incertezza.
2. **Regola per scrivere i risultati:** l'ultima cifra significativa in qualunque risultato dovrebbe essere dello stesso ordine di grandezza dell'incertezza:  $92,81 \pm 0,3$  dovrebbe essere arrotondata a  $92,8 \pm 0,3$ .
3. **Regola dell'1:** se la prima cifra significativa è un uno, allora si conserva almeno un'altra cifra:  $112 \pm 10$  diventa  $110 \pm 10$  e non  $100 \pm 10$ , mentre  $0.002 \pm 0.0001167$  diventa  $0.002 \pm 0.00012$  e non  $0.0001$  poiché c'è un uno davanti.
4. **Regola dell'arrotondamento:** quando si arrotonda un numero , se si ha un 5 si può arrotondare per eccesso se e solo se il numero prima è dispari:

$$\begin{array}{lll} 12.346 \rightarrow 12.3 & 12.350 \rightarrow 12.4 & 12.250 \rightarrow 12.2 \\ 12.251 \rightarrow 12.3 & 12.351 \rightarrow 12.4 & 12.349 \rightarrow 12.3 \end{array}$$

Per ridurre le inaccuratezze dovute all'arrotondamento, *tutti i numeri usati in calcoli successivi dovrebbero tenere almeno una cifra significativa in più di quanto richiesto nel risultato finale. Alla fine del calcolo, il risultato finale dovrebbe essere arrotondato per rimuovere queste cifre extra, non significative.* Se inoltre si richiede l'uso della notazione scientifica, è bene esprimere valore e incertezza con la stessa forma:

$$(1,61 \pm 0,05) \cdot 10^{-19}$$

### 3.3 Discrepanza

Prima di affrontare la questione di come utilizzare le incertezze, bisogna capire cosa è la **discrepanza**, ossia la differenza tra due valori misurati della stessa grandezza. La discrepanza può essere sia *significativa* o *non significativa*. Una discrepanza significativa sta a dire che i margini di incertezza delle due misure non si sovrappongono, altrimenti è non significativa. Spesso la discrepanza rispetto ad una misura già determinata con un'alta accuratezza è anche chiamato *errore vero*.

### 3.4 Confronto di valori misurati e accettati

Determinare un singolo valore misurato è completamente privo di interesse, infatti cercare di misurare l'incertezza si ottiene solo dal confronto di almeno due valori. Il tipo più semplice di esperimento è la misura di una grandezza di valore accettato noto. Per esempio ottenere un valore misurato di  $329 \pm 5m/s$  rispetto ad un valore noto accettato di  $331m/s$  è coerente, così come è coerente un valore misurato  $325 \pm 5m/s$  in quanto questo valore ci dice che probabilmente il valore cade tra  $330$  e  $320m/s$ , e che è possibile che possa cadere anche poco al di fuori.

### 3.5 Confronto di due misure

Molti esperimenti consistono nella misura di due valori, e spesso il loro confronto è cruciale per poter determinare l'accuratezza delle misure: presi due valori come  $p = p_m \pm \delta p$  e  $q = q_m \pm \delta q$ . Se volessimo confrontarli, potremmo dire che l'incertezza in una differenza è data da:

$$\delta x = \delta p + \delta q. \quad (3.2)$$

Sarà poi definita diversamente.

### 3.6 Grafici di relazioni tra grandezze

Generalmente una serie di misure si può rappresentare graficamente come una funzione continua basata su dati distanziati tra loro in modo discreto. Ogni punto di cui è stata ottenuta una misura ha anche una **barra di errore** associata, ossia una barra che rappresenta l'incertezza e l'intervallo in cui probabilmente si trova quella misura. La funzione continua deve però passare per le barre di errore di ogni dato. Attraverso l'interpolazione è possibile ottenere una funzione che possa meglio rappresentare le misure sul grafico.

### 3.7 Incertezze relative

La bontà di una misura dipende non solo dall'incertezza, ma anche dal suo rapporto con ciò che è stato misurato questo rapporto è l'**incertezza relativa**:

$$\text{incertezza relativa} = \frac{\delta x}{|x_m|} \quad (3.3)$$

questo rapporto, anche chiamato *precisione*, moltiplicando per cento si ottiene l'*incertezza percentuale*. E' importante sottolineare che l'incertezza relativa è adimensionale ed è diversa dall'incertezza assoluta.

### 3.8 Cifre significative e incertezze relative

Il numero di cifre significative è strettamente collegato alla nozione di incertezza relativa ed indica approssimativamente l'incertezza relativa di una misura. Per uno scienziato sperimentale dire che  $x = 21$  vuol dire che  $x$  può essere sia  $21 \pm 0,5$  (come per i matematici) oppure  $21 \pm 1$  ma anche  $21 \pm 5$ . Dire quindi che una misura ha solo due cifre significative è solo un'indicazione grossolana della sua precisione. Generalmente se una misura ha  $N$ -cifre significative, allora la sua incertezza è circa 1 sulla  $N$ -esima cifra:

$$x = 21 \quad y = 0,21$$

Le loro incertezze sono quindi:

$$x = 21 \pm 1 \quad t = 0,21 \pm 0,01$$

La loro incertezza relativa è del 5%:

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta y}{y} = \frac{1}{21} = \frac{0,01}{0,21} = 5\%$$

Tuttavia questa relazione non è universale: in casi come:  $t = 99$ , l'incertezza è dell'1%, mentre per  $s = 10$  è del 10%. Questo ci porta a dire che questa correlazione incertezza-cifre significative è molto approssimativa.

### 3.9 Prodotto tra due valori misurati

L'aspetto più importante degli errori relativi emerge quando si iniziano a moltiplicare tra loro valori numerici di misure, prendendo come esempio la quantità di moto:

$$(m \text{ misurato}) = m_m \left( 1 \pm \frac{\delta m}{m_m} \right)$$

$$(v \text{ misurato}) = v_m \left( 1 \pm \frac{\delta v}{v_m} \right)$$

La migliore stima della quantità di moto è:

$$(\text{migliore stima per } p) = p_m = m_m v_m.$$

E' quindi logico pensare che il massimo valore di  $p_m$  è dato dal segno più delle incertezze delle singole misure ed il valore minimo è dato da dal segno meno.

$$p = m_m v_m \left( 1 \pm \frac{\delta m}{m_m} \right) \left( 1 \pm \frac{\delta v}{v_m} \right)$$

Si noti che svolgendo i conti comparirà un prodotto del tipo:  $\frac{\delta m}{m_m} \frac{\delta v}{v}$ , questo prodotto, essendo molto piccolo, è quasi irrilevante ai fini della precisione di  $p$ , per cui può essere eliminato. Il valore di  $p$  sarà quindi:

$$p = m_m v_m \left( 1 \pm \left( \frac{\delta m}{m_m} + \frac{\delta v}{v_m} \right) \right)$$

L'incertezza di  $p$  sarà quindi la somma delle incertezze di  $m$  e di  $v$ . Anche questa regola è provvisoria e sarà sostituita con una più completa.

### 3.10 Approssimazione delle funzioni

Data una funzione possiamo calcolarne una approssimazione attraverso il suo sviluppo di Taylor e per cui l'errore che si commette nell'approssimazione di questa funzione è proprio i termini che non ho considerato:

$$\epsilon = \left| \frac{R_N(x, x_0)}{f(x)} \right| \quad (3.4)$$

# Capitolo 4

## Strumenti e misure

### 4.1 Metodi per misure delle grandezze fisiche

1. Misura diretta: confrontare direttamente una grandezza fisica con un campione ed uno omogeneo preso come unità di misura.
2. misura indiretta: viene effettuata quando la grandezza da misurare è una funzione di altre grandezze fisiche a essa non omogenee, ossia  $\psi = f(x, y, z, \dots)$  misurando separatamente le grandezze tramite la relazione funzionale.
3. misura con apparecchi tarati che viene effettuata con uno strumento apposito che fornisce facilmente tramite un indicatore il valore della misura in questione senza bisogno di campioni.

### 4.2 Gli strumenti del laboratorio e le loro caratteristiche

#### 4.2.1 Caratteristiche generali

1. Prontezza: rapidità con cui lo strumento si mette in equilibrio . Viene misurata dal tempo caratteristico dello strumento che rappresenta il tempo necessario affinché lo strumento si porti in una nuova situazione di equilibrio dopo che la grandezza  $\psi$  abbia subito una variazione  $\Delta\psi$  in un intervallo di tempo  $<< T_c$ . Uno strumento è tanto pronto quanto  $T_c$  è piccolo. Per misurare correttamente variazioni successive che aumento in  $\Delta T_i$  occorre uno strumento  $T_c << \Delta T_i$ .
2. Portata: E' la massima quantità di grandezza che può essere misurata con quello strumento.
3. Soglia: la minima quantità di grandezza che può essere rivelata dallo strumento
4. Intervallo di funzionamento: intervallo soglia-portata

#### 4.2.2 La sensibilità

Uno strumento di misura fornisce una risposta  $R$  quando viene sollecitato dal valore della grandezza fisica che va a misurare.  $R(\psi)$  è la curva della sensibilità dello strumento che si ricava misurando le varie  $R_i$  quando lo strumento è sollecitato dai valori noti  $\psi_i$  .

Generalmente la taratura dello strumento è fornita ma è buona pratica rieseguirla spesso per assicurarsi che i valori sulla curva non siano cambiati.

La sensibilità di uno strumento è data dal valore della pendenza della curva di taratura nell'intorno del valore medio  $R(\psi)$  della grandezza. Sensibilità media

$$\langle \sigma \rangle = \frac{|R_2 - R_1|}{|\psi_2 - \psi_1|}$$

dove  $R_2$  e  $R_1$  sono le risposte dello strumento considerato quando misura rispettivamente i valori  $\psi_2$  e  $\psi_1$ . La quantità  $\langle \sigma \rangle$  è definita nella ipotesi che la sensibilità dello strumento rimanga costante nell'intervallo  $|\psi_2 - \psi_1|$ . Se la relazione  $R(\psi)$  non è lineare allora  $\sigma$  non sarà costante ma varierà da punto a punto della curva di taratura. Esiste allora un valore minimo  $\Delta R_m$  che ogni strumento ha la capacità di indicare con un

valore della sua risposta diverso dai valori contigui. Generalmente  $\Delta R_m$  è uguale all'errore di lettura, ossia il minimo valore della variazione della risposta.

$$\Delta\psi_M = \frac{\Delta R_m}{\sigma(\psi)}$$

rappresenta l'intorno dei valori di  $\psi$  nel quale lo strumento fornisce sempre una risposta e per tutti i valori compresi nell'intervallo lo strumento indica la stessa risposta  $R(\psi)$ .

$\Delta\psi_m$  prende il nome di errore di sensibilità. In alcuni strumenti  $R(\psi)$  è di tipo continuo mentre in altri di tipo discreto (digitale). Per gli strumenti digitali si ha solo per dare l'errore di sensibilità. In alcuni strumenti esistono poi effetti che provocano una variazione continua di  $R(\psi)$ .

Il risultato di tutte queste cose di natura aleatoria è che in corrispondenza di un valore costante  $\psi$  alterniamo per gli  $n$  valori di  $R_i(\psi)$  una distribuzione attorno ad un valore medio  $\langle R \rangle$  con una larghezza  $\delta R$  definibile tramite lo scarto quadratico medio:

$$\delta R = \sqrt{\frac{\sum(R_i - \langle R \rangle)^2}{n-1}}$$

a tale fluttuazione nella risposta corrisponderà un'incertezza sulla misura di  $\psi$  detta errore di riproducibilità ossia  $\delta\psi = \delta R/\sigma(\psi)$ . Si chiama precisione

$$\frac{1}{\delta\psi}$$

E precisione relativa

$$\frac{\delta\psi}{\langle \psi \rangle}$$

In uno strumento ben progettato il reciproco della precisione e l'errore di sensibilità dovrebbero essere confrontabili l'uno con l'altro. Se l'errore di sensibilità è  $\delta\psi$  occorrerà ripetere varie volte la valutazione del valore della risposta  $R$  in modo da ottenere una stima del suo valore medio.

Se l'errore di sensibilità  $\delta\psi$  non vengono usate le prestazioni possibili dello strumento e risulta che l'errore di sensibilità è la maggior causa nell'incertezza della determinazione di  $R(\psi)$  le varie caratteristiche di uno strumento non sono fra di loro indipendenti.

L'errore di sensibilità di una misura è data dalla minima variazione della quantità da misurare che può essere rivelata della misura scelta. L'errore di sensibilità di una misura sarà inferiore alla somma degli errori di sensibilità dei singoli strumenti usati.

## 4.3 Gli strumenti

### 4.3.1 Il nonio

Un metodo per vedere l'errore di sensibilità di una scala, consiste nel tracciare una graduazione ausiliaria concorde con la principale sulla parte scorrevole. L'indice fa da zero per il nonio e la lunghezza pari a  $n$  tratti della scala principale divide in  $n+1$  parti uguali. Una misura si legge vedendo quale tacchetta coincide meglio fra nonio e scala principale il valore  $x = l/(n+1)$ , dove  $l$  è la tacca che corrisponde. Ogni divisione del nonio vale

$$a' = a \frac{n}{n+1} \Rightarrow l \cdot a = x + l \cdot a' = x + l \cdot a \frac{n}{n+1}$$

### 4.3.2 Calibro

Il calibro ha errore di sensibilità di anche  $0.01mm$ . Per misurare spazi interni ed esterni e la vite micrometrica, costituita da una vite, ha un passo breve di  $0.5mm$ , l'esterno è fissato ad un tamburo graduato che ha un diametro maggiore così da mettere in evidenza un piccolo spostamento lungo l'asse. La vite ha sempre un po' di gioco per questo è consigliato ripetere sempre la misura da effettuare in modo tale che l'errore raggiungibile di sensibilità raggiunge il  $1\mu m$ .

### 4.3.3 Palmer

Tamburo solidale con vite micrometrica simile allo però alla madrevite sono connessi 3 piedi i cui estremi individuano i vertici di un triangolo equilatero sui piedi vi è una scala verticale laminata dell'orlo affilato del disco connesso alla vite micrometrica. La scala verticale ha una graduazione uguale al passo della vite (di solito  $0.5mm$ ). Sul disco c'è una scala che permette di determinare le frazioni di giro della vite prendendo come riferimento il filo della scala.

### 4.3.4 Lo sferometro

Lo sferometro è uno strumento che si pone su di un piano e si determina la lettura del disco quando la parte della vite micrometrica è in contatto con il piano (usando la frizione) . LA stessa operazione va fatta sul corpo di cui si vuole misurare lo spessore il cui valore si ottiene per la loro differenza. COn lo sferometro si può misurare il raggio di curvatura di una calotta sferica.

Appoggiando lo strumento alla calotta si delimita una nuova calotta più piccola ma con lo stesso raggio di curvatura  $R$  e  $h$ .

$$R = \sqrt{r^2 + (R - h)^2}, \quad R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

## 4.4 Gli errori degli strumenti

Quando si misura una grandezza otteniamo un valore della misura che è sempre afflitto da degli errori. Gli errori possono essere di due categorie principali **sistematici** e **accidentali**.

### 4.4.1 Sistematici

Errori attesi che si ripercuotono nella misura sempre nello stesso modo alterando il risultato stesso. Questi errori sono sempre presenti ma si dividono in diversi tipi:

1. schematizzazione: dovuti a cause o fenomeni che vengono trascurati;
2. Strumentali: legati allo strumento;
3. Personal: sottostime o sovrastima, etc...

Possono essere eliminati con l'esperienza

### 4.4.2 Accidentali

Si presentano in modo aleatorio per cose varie ed indipendenti e non si possono eliminare.

# Capitolo 5

## Propagazione delle incertezze

La maggior parte delle grandezze fisiche non si ottengono con misure dirette: la velocità o l'accelerazione richiedono più misure e quindi bisogna non solo combinare la stima di queste misure ma anche i loro errori.

### 5.1 La valutazione dell'errore

Avviene in due fasi distinte

1. Stima a priori dell'errore
2. Valutazione a posteriori dell'errore

Quando si eseguono delle valutazioni allora dobbiamo tenere conto che a priori si valutano le misure dirette ed i loro errori sistematici, mentre a posteriori le misure indirette ed i loro errori accidentali.

### 5.2 Stima a priori degli errori in una misura diretta

Essa è importante quando vogliamo organizzare una esperienza in laboratorio. E' importante infatti preselezionare una strumentazione che permetta di mantenere l'errore prestabilito di una data misura, ed è importante valutare le fasi ell'esperimento più critiche in modo tale da dedicarvi più tempo.

#### 5.2.1 Errori sistematici

Sappiamo che essi manterranno permanentemente le nostre informazioni per eccesso o per difetto e dovremmo allora esaminare preliminarmente gli strumenti. Gli errori sistematici di norma si manifestano sottoforma di **offset** e/o **parallasse**. L'offset è la misura che si ottiene da uno strumento in condizioni di riposo (ad esempio una bilancia tarata male) oppure da uno strumento come il compasso di Palmer che, data la natura dello strumento, da sempre una lettura anche a riposo. L'errore sulla parallasse invece si ha quando si legge una misura su di una scala graduata ad un angolo rispetto a stare perfettamente davanti allo strumento (come nel caso di un termometro). Per potersi accorgere di questi errori si confrontano con strumenti più performanti oppure diversi.

#### 5.2.2 Errori accidentali

La stima di questo tipo di errore dovrà essere sempre ricavata da un analisi delle modalità con cui viene eseguita una misura. La maggior parte delle volte si può ricorrere all'errore di sensibilità, ma nel caso di un cronometro questo non è vero in quanto l'essere umano introduce un errore relativo al suo tempo di reazione.

### 5.3 Stima a priori degli errori di una misura indiretta e propagazione degli errori semplici

Data una misura indiretta  $g$  ottenuta da una qualche relazione funzionale  $g = f(x, y, z, \dots)$  come si può determinare l'errore su questa misura? Si deve utilizzare la **formula di propagazione dell'errore**.

### 5.3.1 Proporzionalità diretta $g = f(x) = kx$

In questo caso la misura  $g$  dipende dalla misura diretta della misura  $x$  e da quante volte è stata presa questa misura.

L'errore su  $x_m$  è esattamente il suo intorno e dunque posso ricavare l'incertezza su  $g$  come

$$g_m + \Delta g = f(x_m + \Delta x) \Rightarrow \Delta g = f(x_m + \Delta x) - f(x_m)$$

Posso allora generalizzare l'errore sulla misura come

$$\Delta g = |k| \Delta x \quad (5.1)$$

E quindi posso determinare l'**errore relativo**, che non è altro che la percentuale dell'errore sulla misura.

$$\frac{\Delta g}{|g_m|} = \frac{\Delta x}{x_m} \quad (5.2)$$

### 5.3.2 Proporzionalità quadratica $g = f(x) = x^2$

Devo distinguere gli intervalli  $\Delta g_-$  e  $\Delta g_+$  e non sono distribuiti simmetricamente rispetto alla misura e quindi

$$\Delta g_+ = f(x_m + \Delta x) - f(x_m) = 2x_m \Delta x + \Delta x^2 = 2x_m \Delta x$$

L'altra

$$\Delta g_- = f(x_m - \Delta x) - f(x_m) = 2x_m \Delta x + \Delta x^2 = 2x_m \Delta x$$

Allora posso dire che l'incertezza sarà

$$\Delta g = |2x_m| \Delta x \quad (5.3)$$

E l'errore relativo

$$\frac{\Delta g}{|g_m|} = 2 \frac{\Delta x}{x_m}$$

### 5.3.3 Proporzionalità $g = f(x) = x^3$

Analoga alla quadratica:

$$\Delta g = |3x_m^2| \Delta x \quad (5.4)$$

$$\frac{\Delta g}{|g_m|} = 3 \frac{\Delta x}{|x_m|} \quad (5.5)$$

### 5.3.4 Proporzionalità inversa $g = f(x) = \frac{1}{x}$

Procediamo come per le altre (usando Taylor)

$$\Delta g_+ = \frac{1}{x_m + \Delta x} - \frac{1}{x_m} \approx \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{\Delta x}{x_m} \right) - \frac{1}{x_m} \approx -\frac{\Delta x}{x^2}$$

Lo stesso vale per l'altra

$$\Delta g_- = \dots = \frac{\Delta}{x^2}$$

$$\Delta g = \frac{\Delta x}{|x_m|^2} \quad (5.6)$$

$$\frac{\Delta g}{|g_m|} = \frac{\Delta x}{|x_m|} \quad (5.7)$$

### 5.3.5 $g = f(x) = \sin x$ e $g = f(x) = \cos x$

$$\Delta g_+ = \sin(x_m + \Delta x) - \sin(x_m)$$

Usando allora Taylor e svolgendo la somma

$$\sin \Delta x \approx \Delta x$$

$$\cos \Delta x \approx 1$$

E allora diventa

$$\cos x_m \cdot \Delta x$$

$$g = f(x) = \sin x \Rightarrow \Delta g \approx |\cos x_m| \Delta x \quad (5.8)$$

$$g = f(x) = \cos x \Rightarrow \Delta g \approx |\sin x_m| \Delta x \quad (5.9)$$

### 5.3.6 $g = f(x) = \ln x$

Usando allora Taylor si ottiene

$$\Delta g_+ = \ln \left( x_m \left( 1 + \frac{\Delta x}{x_m} \right) \right) - \ln x_m = \frac{\Delta x}{x_m} = \Delta g_-$$

$$\Delta g = \frac{\Delta x}{|x_m|} \quad (5.10)$$

Dato che l'incertezza assoluta è uguale a quella relativa si può introdurre la seguente formulazione che risulterà essere fondamentale per il caso generale della propagazione degli errori.

$$\Delta \ln x = \frac{\Delta x}{x_m} \quad (5.11)$$

## 5.4 Il caso generale della propagazione dell'errore per una funzione che ci da una misura indiretta

In generale, presa una qualunque funzione  $q(x)$ , il suo valore più accurato sarà rappresentato da  $q_m = q(x_m)$ . L'incertezza calcolabile diventa quindi:

$$\delta q = q(x_m + \delta x) - q(x_m).$$

Un'approssimazione asserisce che, per qualunque funzione, e qualunque incremento piccolo  $u$ , si ottiene:

$$q(x + u) - q(x) \approx \frac{dq}{dx} u$$

Se  $\delta x$  è molto piccola, si può dire che (preceduta dal segno meno se  $q(x)$  è decrescente):

$$\delta q = \frac{dq}{dx} \delta x$$

Per una qualunque funzione diventa quindi:

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x \quad (5.12)$$

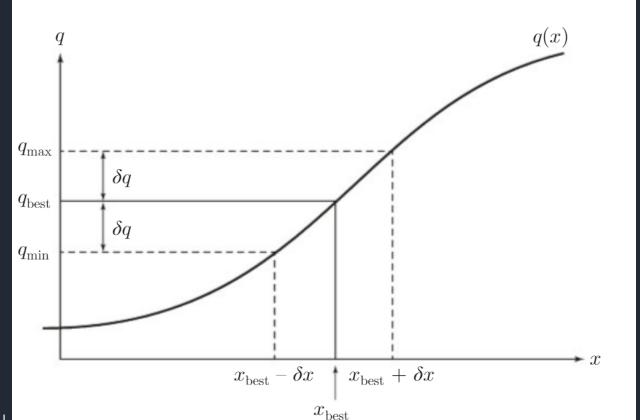
L'incertezza per una potenza diventa quindi ( $q(x) = x^n$ ):

$$\delta q = \left| \frac{dq}{dx} \right| \delta x = |nx^{n-1}| \delta x$$

dividendo per  $|q| = |x^n|$  si ottiene:

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|}$$

Figura 5.1: Rappresentazione grafica di un valore dato da una certa funzione  $q(x)$



## 5.5 Caso di una funzione a più variabili

La relazione funzionale con più di una variabile diventa più complesso del caso ad una variabile sola: si deve infatti considerare il contributo all'errore di tutte le variabili. Procediamo per casi prima di arrivare alla formulazione generale

### 5.5.1 Somma di due variabili o più variabili

$$g = x + y$$

$$x_m \pm \Delta x, y_m \pm \Delta y$$

L'incertezza della misura sarà allora

$$\begin{aligned}\Delta g_+ &= \Delta x + \Delta y \\ \Delta g_- &= -\Delta x - \Delta y\end{aligned}$$

Allora

$$\Delta g = \Delta x + \Delta y \quad (5.13)$$

Scegliendo queste incertezze mi sto mettendo nel caso peggiore e sto assumendo di aver sbagliato sia  $x$  che  $y$  di tutta la loro incertezza. C'è anche la possibilità di ridurre però l'errore con la formulazione generale.

### 5.5.2 Prodotto di due o più variabili

$$g = xy$$

Il ragionamento è lo stesso della somma e posso allora scrivere

$$\begin{aligned}x_m \pm \Delta x &= x_m \left( 1 \pm \frac{\Delta x}{x_m} \right) \\ y_m \pm \Delta y &= y_m \left( 1 + \frac{\Delta y}{y_m} \right)\end{aligned}$$

Con ovviamente l'ipotesi che  $\Delta x, \Delta y \ll x_m, y_m$  E quindi

$$\Delta g_+ = x_m \left( 1 \pm \frac{\Delta x}{x_m} \right) y_m \left( 1 + \frac{\Delta y}{y_m} \right) = x_m y_m \left( \frac{\Delta x}{x_m} + \frac{\Delta y}{y_m} \right)$$

L'errore relativo diventerà allora

$$\frac{\Delta g}{|g_m|} = \frac{\Delta x}{|x_m|} + \frac{\Delta y}{|y_m|} \quad (5.14)$$

Che è lo stesso per il quoziente di funzioni

## 5.6 Formula di propagazione dell'errore

Avendo una grandezza  $g$  ottenuta dalla relazione funzionale  $f$  di più grandezze  $x, y, \dots$ , per una grandezza di questo tipo posso dire che la derivata di questa funzione non è altro che la somma delle derivate parziali rispetto a tutte le variabili e si può allora dimostrare che (sostituendo i differenziali con le grandezze)

$$\Delta g \approx \left| \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x=x_m, y=y_m, \dots} \Delta x + \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{x=x_m, y=y_m, \dots} \Delta y + \dots = \sum \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x_i=x_{im}} \Delta x_I \quad (5.15)$$

Anche in questo caso la formula generale ci da una stima molto conservativa dell'errore e si può dimostrare che è valida la relazione

$$\Delta g = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_{im} \right)^2} \quad (5.16)$$

La formula di propagazione dell'errore è facile se ci sono solo prodotti, nei casi più complessi ci si deve rifare alla risoluzione con le derivate logaritmiche

## 5.7 La risoluzione con i logaritmi

Ricordando che

$$d \ln g = \frac{dg}{g}$$

Possiamo allora utilizzare il differenziale per ricavare l'errore relativo attraverso il logaritmo da entrambi i lati dell'uguaglianza:

$$\ln g = \ln(\dots)$$

con le proprietà dei logaritmi si possono cercare di isolare le variabili e poi si deriva da entrambi i lati per ottenere l'errore relativo. Una cosa importante è ricordare che il passaggio a valori finiti va fatto mettendo i valori assoluti ai coefficienti dei differenziali delle grandezze.

# Capitolo 6

## Introduzione all'analisi statistica delle incertezze casuali

### 6.1 Valutazioni a posteriori degli errori: deviazione standard e media

Il modo in cui si compiono le valutazioni a posteriori dipende da come sono state effettuate le misurazioni in laboratorio. Nel caso di una sola misura di grandezze si valuta l'incertezza con la stima a priori, ma questo è un caso limite in quanto solitamente si possono ripetere le misure. Supponendo di voler misurare una grandezza  $x$  e di aver identificato tutte le fonti di errore sistematico e di averle ridotte a livello trascurabile, poiché tutte le altre fonti di errore sono casuali, dovremmo riuscire ad identificarle facilmente. Supponendo di fare  $N$  misure di una grandezza  $x$ , la migliore stima per la misura di  $x$  è data da:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \quad (6.1)$$

La **deviazione standard** o **scarto quadratico medio** invece consente di ottenere una stima dell'incertezza delle  $N$  misure ottenute e si ottiene nella seguente maniera. Per ogni  $x_i$  calcoliamo lo **scarto** di  $x_i$  rispetto a  $\bar{x}$ :  $x_i - \bar{x} = d_i$  che ci dice quanto ogni misura differisce dalla media. Se lo scarto è alto, allora la misura è stata poco precisa, altrimenti molto precisa.

Elevando ora al quadrato ogni scarto si ottiene la *deviazione standard* e mediando queste misure ottenute non si otterrà più zero (come si otterrebbe invece facendo la media degli scarti):

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (6.2)$$

La deviazione standard è quindi lo *scarto quadratico medio* delle misure. La quantità  $\sigma^2$  è chiamata invece **varianza**.

Si può ottenere una correzione della deviazione standard attraverso la sostituzione di  $N$  con  $N - 1$ : infatti, nel caso assurdo in cui si abbia solo una misura, con  $N$  avremmo che la deviazione standard sia zero mentre con  $N - 1$  si arriva ad una forma indeterminata di  $0/0$  che è totalmente in linea con la nostra ignoranza nel non conoscere se vi è incertezza (poiché si ha solo una misura). Questa sostituzione inoltre riduce la tendenza a sottostimare l'errore. La **deviazione standard** diventa quindi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (6.3)$$

In ogni caso, la prima definizione prende il nome di *deviazione standard della popolazione* e la seconda *deviazione standard del campione*.

Generalmente si può ottenere l'errore in modo semplice semplicemente considerando lo **scarto massimo** su un campione di poche misure (meno di dieci) anche se esistono alcune eccezioni: il caso di misure tutte uguali o il caso in cui lo scarto massimo è minore dell'errore di sensibilità: in questi casi si sceglie l'errore di sensibilità come errore per la grandezza. Nel caso di più di dieci misure invece si utilizzerà la deviazione standard come migliore stima dell'incertezza su di una misura.

## 6.2 Valori anomali e confronti tra misure

Durante i calcoli può capitare di incontrare dei valori che si potrebbero definire **anomali** in quanto molto diversi da altri valori. In queste situazioni è consigliabile ripetere la misura se si è ancora in laboratorio piuttosto che scartarla (una nuova scoperta è sempre dietro l'angolo!). Si può anche aumentare il numero di misure di un campione in modo tale che risulti un evento particolarmente sfortunato.

E' possibile confrontare le proprie misure con altre per vedere se sono in accordo attraverso due metodi:

1. **Confronto con valore di riferimento:** Compiuta una certa misura e ottenuto come risultato un certo  $\bar{x}_1 \pm \Delta x_1$ , se dobbiamo confrontarla con un valore di riferimento  $\hat{x}$  dobbiamo allora verificare che si trovi almeno entro l'intervallo dell'errore oppure vedere se graficamente risultano compatibili tra di loro. Generalmente anche se una misura sembra cadere poco al di fuori della banda di errore di riferimento non è un segno che sia una misura anomala. In seguito si vedrà che esiste una sorta di limite di confidenza entro al quale questo può accadere.
2. **Confronto tra più valori diversi:** Posso utilizzare questo approccio anche per relazionare valori diversi tra di loro. Nel caso in cui le misure siano compatibili tra di loro si può utilizzare la media pesata per trovare la misura matematica corretta. Quando ciò non è possibile allora si può semplicemente scegliere il valore più preciso tra quelli analizzati.

## 6.3 La deviazione standard nella media

Se  $x_1, \dots, x_n$  sono i risultati di  $N$  misure della grandezza  $x$ , allora come abbiamo visto, si dice che la migliore stima di questa grandezza sia proprio  $\bar{x}$ . La Dev. Standard invece misura le incertezze sulle singole misure, la deviazione standard della media invece si chiama **SDOM** e si indica con  $\sigma_{\bar{x}}$ :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \quad (6.4)$$

Così il risultato finale diventa:

$$x = x_{best} \pm \sigma_{\bar{x}}$$

Questo ci garantisce che l'incertezza possa diminuire sensibilmente (anche solo di un fattore  $\sqrt{N}$  rispetto alle  $N$  misure extra) all'aumentare delle misure compiute anche se questo non ci garantisce l'eliminazione degli errori sistematici, che rimangono all'interno delle misure anche all'aumentare di  $N$ .

## 6.4 Errori sistematici

Se non è chiaro l'errore sistematico che hanno gli strumenti, si possono fare le seguenti assunzioni per la somma degli errori: se sappiamo che l'errore non è oltre l'1% con buona confidenza, allora si può ottenere la somma diretta, altrimenti se è migliore di questo valore ed il 68% delle bilance mostra questo valore migliore allora si può utilizzare con una confidenza del 68% la somma in quadratura:

$$\delta x_{tot} = \sqrt{(\delta x_{cas})^2 + (\delta x_{sis})^2} \quad (6.5)$$

# Capitolo 7

## La distribuzione normale per studiare la distribuzione delle misure di una certa grandezza

### 7.1 Media pesata, frequenza ed istogramma

#### 7.1.1 L'istogramma

Per stimare il valore di una certa grandezza si può utilizzare la media aritmetica, tuttavia esiste anche un metodo più veloce di fare la media ossia la **media pesata**:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_k n_k}{N} \quad (7.1)$$

Dove il "peso"  $n_k$  non è altro che il numero di occorrenze di una certa misura nel nostro set di dati. Possiamo allora considerare la **frequenza** con cui appare una certa misura nel nostro set di dati e la posso definire come

$$F_k = \frac{n_k}{N} \quad (7.2)$$

Così si può scrivere il valore vero di  $x$  come:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k x_k F_k \quad (7.3)$$

Implicando che:

$$\sum_{i=1}^k F_k = 1 \quad (7.4)$$

Poiché tutte le frazioni  $F_k$  ottenute si ottiene 1. Qualunque insieme di numeri la cui somma è 1 è chiamato **normalizzato** e la precedente prende il nome di **condizione di normalizzazione**. Un'**istogramma a barre** è un istogramma con delle barre che rappresentano la distribuzione dei valori è attraverso dalle altezze delle stesse. Tuttavia questo istogramma ha un problema in quanto spesso le grandezze non sono numeri interi ma variano in maniera continua all'interno di un intervallo. Queste considerazioni implicano che diversi grafici possono avere la stessa media, allora dobbiamo introdurre qualche parametro che ci permetta di differenziare due grafici diversi anche se hanno la stessa media: un parametro importante è la precisione delle misure. Si potrebbe allora calcolare l'errore attraverso la deviazione standard, la quale, purtroppo, è computazionalmente scomoda.

#### 7.1.2 Iстограмма a intervalli o classi

Dato che gli istogrammi a barre non sono ancora soddisfacenti in quanto ogni misura potrebbe avere molte cifre decimali per cui ci sarebbero molte barre da un solo elemento. Possiamo allora costruire degli intervalli in modo tale che siano proporzionali al numero di misure contenute: un'**istogramma ad intervalli** è un istogramma a barre che racchiude (rappresenta la frazione dentro ogni barra) un certo intervallo di misure:

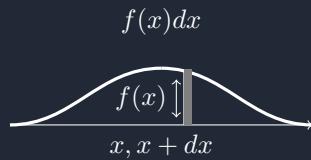
l'area di ciascuna barra di misure contenute in ciascun intervallo di misure. La larghezza dell'intervallo  $k$ -esimo si chiama **bin**, e possiamo chiamare  $f_k$  come la **densità di frequenza** e utilizzare questa per rappresentare l'istogramma

$$f_k = \frac{F_k}{\Delta BIN} \quad (7.5)$$

L'analisi dimensionale allora ci porta a dir che  $f_k$  ha la dimensione inversa della misura per cui lo stiamo calcolando. Con questa formulazione, la frequenza di una certa misura  $F_k$  rappresenta l'area di una certa barra mentre  $\Delta BIN$  rappresenta la classe o intervallo del nostro grafico. I bin tuttavia devono essere scelti con un certo giudizio: infatti bin troppo grandi possono raggruppare troppe misure in un unico intervallo "falsando" la frequenza dei valori mentre bin troppo piccoli tendono ad avere l'effetto opposto spaziando troppo le misure e risultando in istogrammi spezzati che rendono inutile l'applicazione del metodo.

## 7.2 Distribuzione limite

Nella maggior parte degli esperimenti al crescere dei dati  $N$  il grafico a barre inizia ad assumere una forma ben precisa: quando  $N \rightarrow \infty$  il grafico prende il nome di **distribuzione limite o asintotica** proprio perché non può essere raggiunta. Utilizzando le derivate si ottiene che la frazione di dati in un piccolo intervallo è data da:



di conseguenza sotto una distribuzione limite, l'area della funzione si calcola proprio utilizzando l'integrale da un punto a ad un punto b della funzione per ottenere la frazione di misure che cadono tra a e b:

$$F_k = \lim_{\Delta bin \rightarrow 0} f_k \Delta bin = \int_a^b f(x) dx \quad (7.6)$$

La funzione  $f(x)$  diventa quindi la **funzione densità di probabilità**. Di conseguenza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad (7.7)$$

Posso allora definire se

$$\bar{x} = \sum x_k F_k = \sum x_k f_k \Delta bin$$

Allora posso dire che

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Per la deviazione standard posso applicare lo stesso ragionamento ed ottenere allora

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

Questa non è altro che la stessa deviazione standard ma con i pesi associati e dunque, si ottiene che

$$\sigma_x^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 F_k \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 f_k \Delta bin \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

## 7.3 La distribuzione normale

La distribuzione qui in Figura 7.3 è una curva a campana o distribuzione limite dei valori trovati di  $x$ . Al centro c'è il valore probabile di  $x$  (anche chiamato valore vero), tuttavia diverse misure possono avere delle campane più o meno ripide a seconda della deviazione standard: più cresce  $\sigma$  più la campana risulta schiacciata. Tuttavia un errore sistematico può spingere la mia campana verso una direzione definita e così il centro della distribuzione sarà spostato rispetto al valore vero atteso.

Cosa è dunque il *valore vero*? Si può supporre che il valore vero di una misura sia il valore attorno al quale si concentra la distribuzione del grafico a campana dopo un grande numero di misure. La funzione che descrive questa tendenza è anche chiamata **funzione di Gauss** o **Distribuzione normale** ed il suo prototipo è dato da:

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (7.8)$$

Dove  $\sigma$  è il parametro di larghezza (ossia la deviazione standard). La funzione di Gauss è una curva a campana centrata su zero ma può essere centrata attorno al valore vero  $X$  (anche chiamato  $X$  vero o migliore stima) semplicemente sostituendo  $x - X$  al posto di  $x$ . Possiamo normalizzare la funzione in modo tale che il suo integrale mi dia 1 nella seguente maniera:

$$\begin{aligned} f(x) &= Ne^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ne^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx \end{aligned}$$

Per calcolare questo integrale si può sostituire  $x - X = y$  e quindi  $dx = dy$  e si ottiene:

$$N \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

E quindi porre  $y/\sigma = z$  e quindi  $dy = \sigma dz$  ed ottenere:

$$N\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Abbiamo allora ottenuto l'integrale di Gauss, il cui risultato è proprio  $\sqrt{2\pi}$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = N\sigma\sqrt{2\pi} = 1$$

Infine dal momento che deve essere uguale ad uno, il fattore di normalizzazione sarà:

$$N = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

La distribuzione di Gauss sarà quindi nella sua forma finale:

$$G_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.9)$$

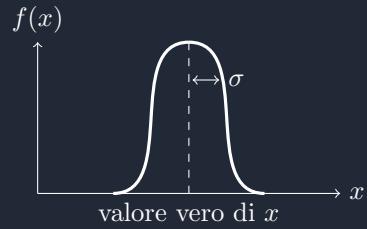
Come abbiamo visto, il valore medio si ottiene attraverso l'integrale  $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ , per cui per la distribuzione di Gauss si ha che:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xG_{X,\sigma}(x)dx \quad (7.10)$$

Se le misure di una certa grandezza  $x$  sono distribuite normalmente allora si ha che la migliore stima della grandezza  $X$  è proprio la media aritmetica delle misure. Si può dimostrare come segue:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xG_{X,\sigma}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Figura 7.1: Istogramma



Cambiando variabile  $y = x - X$  allora  $dx = dy$  e  $x = y + X$  l'integrale diventa:

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy + X \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right)$$

Il primo integrale è zero poiché il contributo di ogni punto  $y$  è cancellato da quello del punto  $-y$ . Il secondo è l'integrale di normalizzazione e quindi si semplifica con la costante prima della parentesi dando come risultato:

$$\bar{x} = X.$$

Questo risultato è vero però se e solo se si eseguono moltissime prove e se le misure che ho ottenuto sono distribuite normalmente; date queste condizioni il valore vero attorno al quale è centrata la Gaussiana si avvicinerà sempre di più a  $X$ . Interessante è trovare la deviazione standard ( $\sigma$ ) della Gaussiana che si trova come segue:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx$$

Sostituendo  $\bar{x} = X$  e ponendo  $x - X = y$  ed integrando per parti si ottiene il risultato:

$$\sigma_x^2 = \sigma^2$$

Ovviamente ha senso che sia la corretta deviazione standard solo dopo un numero infinito di prove.

## 7.4 La deviazione standard come limite di confidenza del 68%

Eseguendo lo studio di funzione sulla Gaussiana si ottiene che la sua derivata prima si azzera proprio nel valore vero di  $x$ , la sua derivata seconda inoltre, si azzera nei punti  $x \pm \sigma$ . Se si volesse conoscere invece in corrispondenza di quali valori si trovano i punti  $\frac{1}{2}p(x)$ , questi si trovano esattamente nei punti  $x \pm 2\sigma\sqrt{2\ln 2}$ . Possiamo quindi calcolare la probabilità che un certo dato si trovi entro  $t$  deviazioni standard rispetto alla migliore stima del valore  $x$ .

$$P(x - t\sigma, x + t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x-t\sigma}^{x+t\sigma} \exp\left(-\frac{(x-X)^2}{2\sigma^2}\right) dx = erf(t)$$

Si ottiene la funzione errore di  $t$  e che assume valori a seconda del valore di  $t$ . Secondo le tabelle già calcolate di probabilità si ha che il 68% delle misure ricade entro una deviazione standard dal valore vero e ben il 95.45% entro due deviazioni standard; tuttavia scegliere valori molto alti per  $t$  non ha senso in quanto già  $3\sigma$  esprimono una probabilità del 99.73%. Dati questi risultati possiamo allora prendere  $\sigma$  come limite di confidenza della nostra Gaussiana in quanto entro un  $\sigma$  dal centro della curva si ha il 68% dell'area della curva, ossia i due terzi dei dati sperimentali. Posso anche dire che, preso un certo elemento  $x_i$  delle mie misure, esso ha il 68% di possibilità di rientrare entro una deviazione standard rispetto al valore vero della curva.

## 7.5 Giustificazione della media come migliore stima di $X$ e di $\sigma$ come migliore stima per l'incertezza

Partendo dai dati e ricavandoci i parametri della gaussiana, e supponendo che  $X$  e  $\sigma$  non sono noti, tutta questa equazione dipende proprio dal loro valore, per cui dalle letture  $x_1, \dots, x_N$  le cui probabilità di essere ottenute sono date proprio da:

$$P(x_1) dx \Rightarrow P(x_1, x_1 + dx) = p(x_1)dx$$

Si può facilmente trovare con la formula della gaussiana che la probabilità di trovare un valore tra  $x_i$  e  $x_i + dx$  non è altro che trovare la probabilità tra  $x_i, x_i$  (dato la continuità della funzione) che tuttavia non posso calcolare in quanto non conosco né  $X$  né  $\sigma$ . Si può dimostrare intanto che  $P_{TOT} = P_1 \cdot \dots \cdot P_n$  ossia

$$P_{TOT} = \left(\frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \prod \exp\left(-\frac{(x_i - X)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (7.11)$$

Mi chiedo infatti quali siano i valori più plausibili per  $X$  e  $\sigma$  che giustifichino la forma della Gaussiana. Per fare ciò mi devo ricondurre al principio di Massima verosimiglianza. Dati gli  $N$  valori misurati, le migliori

stime per  $\sigma$  e  $X$  sono quei valori per i quali le misure assumano la massima probabilità: possiamo ragionare sui teoremi delle funzioni continue e pensare ai valori e calcolare quando si azzera la derivata

$$\frac{\partial P_{TOT}}{\partial X} = \left( \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n \frac{\partial}{\partial X} \exp \left( -\frac{\sum x_i - X}{2\sigma^2} \right)$$

Risolvendo la derivata, per far sì che si azzera bisogna che

$$\sum(x_i - X) = 0 \Rightarrow X = \frac{\sum x_i}{N}$$

Potrei anche vedere se dopo  $X$  la funzione decresca (si) e che prima cresca (si) allora ho trovato il valore giusto per  $X$ .

Consideriamo la stessa procedura per  $\sigma$

$$\frac{\partial P_{TOT}}{\partial \sigma} = \left( \frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right)^n e^{0} \frac{1}{\sigma^{N+1}} \left( -N + \frac{\sum(x_i - X)^2}{\sigma^2} \right) = 0$$

Si ottiene allora il seguente caso: dato che  $\bar{x}$  è un valore che io costruisco e che, per definizione, risiede molto vicino al valore vero  $X$ , io so che

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 \leq \sum(x_i - X)^2$$

Perché, non avendo infinite misure, io so che la distanza tra i valori  $x_i$  e  $\bar{x}$  è una sottostima rispetto agli scarti quadratici rispetto al valore vero  $X$  anche se la media  $\bar{x}$  risiede molto vicino al valore vero. Posso allora trovare la deviazione standard utilizzando la migliore stima per  $X$ , ossia la media:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N}}$$

In questo modo sto sottostimando il valore vero e otterrò un valore sempre minore di quello effettivo: per aggiustarlo basta sottostimare anche il denominatore con la cosiddetta **correzione di Bessel**, la quale è valida perché più è grande il numero di misure e più la differenza tra le due è minore formulazioni è minore. In questo modo introduco un grado di libertà al denominatore per cui ho bisogno di almeno due misure per poter determinare l'incertezza su  $\bar{x}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (7.12)$$

## 7.6 Giustificazione della somma in quadratura

Se consideriamo una misura del tipo  $g = f(x, y, z, \dots)$  possiamo calcolare come

$$\Delta g = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Ma se l'errore fosse di natura accidentale la migliore stima di questo valore diventa la somma in quadratura e dunque

$$\Delta g \approx \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i}$$

La dimostrazione di questa si articola in quattro punti:

I) Prendiamo un caso in cui  $g = x + A$  dove  $x$  presenta una certa incertezza e  $A$  è invece un numero puro allora anche  $g$  si può scrivere come una gaussiana traslata e con lo stesso  $\sigma$ . Possiamo anche verificare che  $\sigma_x = \sigma_g$ .

$$P(x, x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left( -\frac{(x - X)^2}{2\sigma_x^2} \right)$$

$$P(g) = P(g, g + dg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left( -\frac{(g - (x + A))^2}{2\sigma_x^2} \right) dg$$

Mi aspetto che  $G = X + A$ , il che è vero, ed è dunque verificata.

II) Se invece prendessimo  $g = Bx$  allora per lo stesso procedimento mi aspetto di ottenere

$$P(g) = P(g, g + dg) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{\left(\frac{g}{B} - X\right)^2}{2\sigma_x^2}\right) \frac{dg}{B} = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x B} \exp\left(-\frac{(g - Bx)^2}{2\sigma_x^2 B^2}\right) dg$$

Si vede subito che  $G = Bx$  traslata e il parametro di larghezza è deformato:  $\sigma_g = \sigma_x B$  e quindi fare misure indirette ha ripercussioni anche sull'incertezza.

III) Prendiamo il caso in cui la relazione sia  $z = x + y$ , le misure  $x$  e  $y$  saranno normalmente distribuite intorno al loro valore vero  $X$  e  $Y$  e avranno allora larghezza  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ . Le probabilità di ottenere un particolare valore di  $x_i$  e  $y_i$  è

$$P_x(x_i) = P(x, x + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x_i - X)^2}{2\sigma_x^2}\right) dx \\ P_y(y_i) = P(y, y + dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left(-\frac{(y_i - Y)^2}{2\sigma_y^2}\right) dy$$

La probabilità di ottenere una certa coppia di valori  $x_i$  e  $y_i$  da misurare  $x$  e  $y$  indipendenti è data da

$$P_{x+y}(x_i, y_i) = P_x(x_i)P_y(y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x_i - X)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_i - Y)^2}{2\sigma_y^2}\right) dx dy$$

Vogliamo ora dimostrare che  $P(z)$  sia una gaussiana utilizzando la seguente identità:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \frac{(x + y)^2}{A + B} + \frac{(Bx + Ay)^2}{AB(A + B)}$$

Ottenendo all'interno dell'esponente:

$$\frac{(x_i - X)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y_i - Y)^2}{\sigma_y^2} = \frac{(x_i - X + y_i - Y)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} + \frac{(\sigma_y^2(x_i - X) - \sigma_y^2(y_i - Y))^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}$$

Posso allora chiamare il secondo termine del secondo membro come

$$\alpha = \frac{\sigma_y^2(x_i - X) - \sigma_y^2(y_i - Y)}{\sigma_x\sigma_y\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}$$

Ottenendo

$$P_{x+y}(x_i, y_i) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{1}{2} \left( \frac{(z_i - X - Y)^2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) dx dy = P(x_i + y_i, \alpha)$$

Essa è l'espressione che corrisponde alla probabilità di trovare il valore  $z_i$  con una particolare coppia di valori  $x_i$  e  $y_i$ . Se vogliamo la probabilità  $P_z(z_i)$  di ottenere un valore  $z_i$  indipendentemente dalla particolare coppia scelta: dovremmo sommare i contributi di tutte le coppie di valori tali che  $z_i = x_j + y_j$  ossia i contributi  $P_{x+y}(x_i, y_i)$  in cui il primo termine esponenziale è sempre lo stesso mentre il secondo differisce a seconda della coppia scelta e quindi l'integrazione di questi termini è un risultato del tipo

$$P(x + y) = P_z(z_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x + y, \alpha) d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}} \exp\left(-\frac{(z_i - x - y)^2}{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)}\right)$$

Il che ci porta alla seguente osservazione

$$Z = X + Y \\ \sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

Il fatto che si possa sommare in quadratura e ridurre l'errore rispetto alla somma lineare è dovuto al fatto che è estremamente improbabile una fluttuazione statistica concorde ad entrambe le grandezze misurate direttamente.

## IV) Il caso generale

Prendiamo il caso generale di una certa  $g = f(x_1, \dots, x_n)$  arriveremo a dimostrare che

$$\sigma_g = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Per dimostrarla prendiamo il caso più semplice di  $g = f(x, y)$  e prendendo come ipotesi  $\frac{\sigma_x}{|x|} \ll 1$  e  $\frac{\sigma_y}{|y|} \ll 1$  in tali condizioni possiamo sviluppare con Taylor ed ottenere

$$g_i = f(x_i, y_i) = f(X, Y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=X, y=Y} (x - X) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=X, y=Y} (y - Y)$$

Tale relazione esprime il valore della grandezza  $g$  misurata indirettamente con tre termini

1. E' la costante  $f(x, y)$  dello stesso tipo della costante  $A$  del caso 1;
2. E' costituita dal fattore costante  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=X, y=Y}$  moltiplicato per la variabile  $x - X$  che, come si nota dal caso uno è distribuita attorno al valore vero 0 con parametro di larghezza  $\sigma_x$ . Secondo il caso 2 questo termine sarà distribuito attorno al valore vero 0 e parametro di larghezza  $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=X, y=Y} \sigma_x$ .
3. E' analoga alla precedente distribuita attorno a 0 con distanza  $\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=X, y=Y} \sigma_y$ .

Combinando questi 3 termini e ricordando la terza dimostrazione si conclude che i valori  $g_i$  sono distribuiti normalmente intorno al valore vero  $f(X, Y)$  con parametro di larghezza dato da

$$\sigma_g = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=X, y=Y} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=X, y=Y} \right)^2 \sigma_y^2} \quad (7.13)$$

## 7.7 Deviazione standard della media

Ricorda che la stima di  $\sigma$  abbiamo dimostrato essere

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Dato  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$  come migliore stima di  $X$ , dimostriamo che  $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$  facendo una serie di  $N$  misure avrò una certa media  $\bar{x}$ ; rifacendo l'esperimento  $N$  volte, troverò che  $\bar{x}_2 \neq \bar{x}_1$  e così per le altre medie che ripeto. Posso allora definire le misure associate a ciascuna media nella seguente maniera.

$$\begin{aligned} m &= 1, & x_{1,1}, x_{1,2}, \dots &\rightarrow \overline{x_1} \\ && \vdots \\ m &= & x_{m,1}, x_{m,2}, \dots &\rightarrow \overline{x_m} \end{aligned}$$

Dove  $m$  indica l'indice univoco di ciascuna media Potrò allora definire la **distribuzione di media**  $P(\bar{x})$  e osservare come si distribuiscono le misure e ricordando che ciascuna media è calcolata come

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N}$$

Posso affermare che nei casi  $g = x + A$ ,  $g = Bx$ ,  $g = x_1 + x_2$ , queste medie si distribuiscono secondo una gaussiana e anche che  $\bar{x}$  è il valore centrato di una gaussiana, della quale posso ricavare la sua ampiezza attraverso la propagazione dell'errore:

$$g = \frac{\sum x_i}{N} \implies \sigma_g = \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Con la somma in quadratura si può ricavare allora che

$$\sigma_g = \sqrt{\sum \left( \frac{1}{N} \sigma_x \right)^2} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Anche questa Gaussiana sarà centrata attorno al valore vero  $X$  e avrà una larghezza minore di

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

La Gaussiana dei singoli valori invece risulterà più larga e più bassa

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

e possiamo stimare anche l'incertezza sul valore di  $\sigma_x$  come

$$\sigma_x \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{2(N - 1)}}$$

L'incertezza relativa rispetto a  $\sigma$  diminuisce notevolmente al crescere del campione di misure. Se volessimo migliorare la precisione di un fattore 10 dovremmo aumentare  $N$  di un fattore 100.

Questi strumenti non tengono conto di opportune componenti sistematiche e si possono usare se gli errori sistematici sono trascurabili ma se  $N \rightarrow +\infty$  arriverò comunque ad un certo punto in cui l'errore accidentale sarà comunque minore dell'errore sistematico e di conseguenza le ipotesi per l'utilizzo di questi strumenti verrebbero meno.

# Capitolo 8

## Rigetto di dati

### 8.1 Il problema del rigetto di dati

A volte può capitare che dei dati possano sembrare *sbagliati* anche se in realtà, dato un numero di misurazioni molto alto, è perfettamente normale trovarli anche se molto improbabili. In questo caso la conoscenza della distribuzione di Gauss si rivela molto utile in quanto ci permette di *scartare* dei dati che potremmo definire *scomodi*. Decidere quali dati scartare il più delle volte è soggettivo in quanto si potrebbe star scartando un dato magari misurato male (strumento tarato male o lettura errata) ma, potenzialmente, si potrebbe star scartando la parte più interessante del nostro set.

### 8.2 Criterio di Chauvenet

Si introduce allora un criterio che ci permette di scartare misure improbabili dal nostro set di dati: utilizzando la probabilità della Gaussiana posso determinare se un dato è da scartare perché poco probabile oppure è da tenere. Si inizia calcolando innanzitutto  $\bar{x}$  e  $\sigma_x$  e prendendo il valore  $x_s$  di cui vogliamo valutare la probabilità di ottenerlo. Ipotizzando una Gaussiana ideale posso ricavare la probabilità di ottenere un certo risultato semplicemente utilizzando il numero di deviazioni standard dal centro della campana:

$$t_s = \frac{|x_s - \bar{x}|}{\sigma_x}$$

Si può allora calcolare la relativa probabilità di ottenere quel valore come

$$P(|x - \bar{x}| \geq t_s \sigma_x) = 1 - erf(t_s) \quad (8.1)$$

Che prende il nome di probabilità a due code della Gaussiana; nel caso in cui questa misura sia molto distante dal valore attorno al quale è centrata la distribuzione allora è possibile eliminarla giustificando che la probabilità di ottenere questo dato rispetto al nostro set di dati è molto bassa. Per farlo è possibile definire il **numero di misure atteso**:

$$N_{att} = P \cdot N$$

Il **Criterio di Chauvenet** ci dice che se questo numero di misure attese è  $> 0.5$  allora la misura non è da scartare, altrimenti è da scartare. Questo criterio rappresenta una convenzione e per questa ragione è da considerare come tale e non come una regola univocamente accettata. Inoltre, ogni volta che si scarta una misura bisogna fare attenzione e ricalcolare i valori della gaussiana e per questo è consigliabile eliminare al più un valore con questo criterio. E' possibile anche scartare un gruppo di misure: in questo caso dobbiamo moltiplicare il valore convenzionale di misure atteso 0.5 per il numero di misure che si vuole scartare. Se questo gruppo di misure è abbastanza numeroso rispetto al totale questo potrebbe essere sintomo di un **errore sistematico**.

# Capitolo 9

## Covarianza e livello di confidenza

### 9.1 La covarianza nella propagazione degli errori

Supponiamo di avere delle misure ricavate dalla relazioni funzionali  $g = f(x_1, \dots, x_n)$ , sappiamo che l'errore conosciuto sia

$$\sigma_g \approx \sqrt{\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2}$$

Possiamo allora ricavare una formula più generale e partendo dal caso particolare due misure del tipo  $g = f(x, y)$ , esse sono sempre misurate a coppia ed in un certo senso sono associate. Per esempio potremmo misurare il valore  $g$  attraverso un pendolo semplice e ricavare i diversi valori e ottenere la media come la sommatoria dei valori  $g_i$  oppure ottenere

$$g = f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} (y - \bar{y})$$

E questo vale ovviamente se l'errore relativo rispetto ad entrambe  $x$  e  $y$  è molto minore di uno. Si ottiene che la media di questa misura  $g$  è data dallo sviluppo al primo grado della funzione media ottenendo

$$\bar{g} \approx \frac{1}{N} \sum \left( f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big| (x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big| (y - \bar{y}) \right) \quad (9.1)$$

E dato che la sommatoria degli scarti è zero, allora

$$\bar{g} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

Possiamo allora calcolare la **varianza** per la misura  $g$  (sviluppando al primo grado con Taylor )

$$\begin{aligned} \sigma_g^2 &= \frac{\sum(g_i - \bar{g})^2}{N-1} \approx \frac{1}{N-1} \sum \left( f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_i - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(y_i - \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y}) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{N-1} \sum \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 (x_i - \bar{x})^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 (y_i - \bar{y})^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \right) \end{aligned}$$

Posso allora scomporre la parentesi in tre sommatorie ed osservare che

$$\sigma_g^2 \approx \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_{x,y} \quad (9.2)$$

Dove l'ultimo termine prende il nome di **covarianza**, ossia dà informazione sulla dipendenza l'una dall'altra delle due variabili  $x, y$ . Le due variabili sono indipendenti tra di loro se e solo se  $\sigma_{x,y} \rightarrow 0$ . dobbiamo tenere conto della covarianza quando le variabili sono correlate tra di loro

- **correlate positivamente:**  $\sigma_{x,y} > 0$ ;
- **correlate negativamente o anticorrelate:**  $\sigma_{x,y} < 0$ ;
- **non correlate:**  $\sigma_{x,y} = 0$ .

Nel caso di covarianza nulla allora avrà per ogni sovrastima di  $x$  una sottostima di  $y$  e quindi in una relazione del tipo  $g = f(x, y)$  se le misure sono indipendenti tra di loro allora la covarianza sarà sempre zero poiché i contributi saranno mediamente ugualmente positivi e negativi. Anche se le misure non sono correlate allora non è detto che siano indipendenti, mentre, è vero che, per  $N$  molto grande, grandezze dipendenti siano correlate. E' vero però che indipendenti  $\Rightarrow$  non correlate.

## 9.2 Dimostrazione della conservatività della somma delle incertezze assolute

Sappiamo che se  $g = x + y$ , allora  $\Delta g = \Delta x + \Delta y$ . Voglio allora dimostrare che questa è una stima conservativa utilizzando la **disuguaglianza di Cauchy-Schwartz** la cui tesi è che

$$|\sigma_{x,y}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

Sappiamo allora che

$$\sigma_x \sigma_y \geq |\sigma_{x,y}| \geq \sigma_{x,y}$$

Il che ci porta a giustificare che la somma lineare delle due incertezze assolute è una stima conservativa dell'errore infatti possiamo esprimere

$$\begin{aligned} \sigma_g^2 &\approx \left( \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y \right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_{x,y} \leq \\ &\quad \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_y^2 + 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\sigma_{x,y}| \leq \\ &\quad \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_y^2 + 2 \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \sigma_x \sigma_y \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y \right)^2 \end{aligned}$$

Allora si ottiene la tesi

$$\sigma_g \leq \frac{\partial f}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial f}{\partial y} \sigma_y \quad (9.3)$$

Si vede allora che il massimo valore per la deviazione standard sulla misura di  $g$  è quello che si ottiene è quello che si ottiene allora sommando linearmente i valori assoluti delle incertezze misurate direttamente.

Dimostriamo ora la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Considero innanzitutto una funzione ausiliaria come

$$A(t) = \frac{1}{N-1} \sum ((x_i - \bar{x}) + t(y_i - \bar{y}))^2$$

Che è sempre maggiore di zero e quindi il suo minimo è anch'esso maggiore di zero. Ora posso derivare questa funzione e trovare questo minimo:

$$\frac{1}{N-1} \sum (2((x_i - \bar{x}) + t(y_i - \bar{y}))(y_i - \bar{y})) = 0$$

Per avere il minimo posso portare dentro le sommatorie e quindi spezzarle nel seguente modo:

$$2 \left( \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + t \sum \frac{(y_i - \bar{y})^2}{N-1} \right) = 0$$

E quindi

$$2(\sigma_{x,y} + t\sigma_y^2) = 0$$

Avremmo allora che per trovare il minimo

$$t_{min} = -\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_y^2}$$

E quindi si ottiene la tesi che cercavamo nella dimostrazione precedente.

## 9.3 Livello di confidenza

Può accadere spesso di verificare la compatibilità di due o più misure in modo statistico: chiamiamo  $x_m$  la misura effettuata di una grandezza  $x$  che soddisfa due ipotesi principali:

- Errori non sistematici;
- Un alto numero di misure.

Stimerò la misura allora come  $x_m \pm \sigma$  e ci chiediamo se questo valore sia o meno compatibile con un certo  $x_e$ : prima di tutto si era detto che un valore (non statisticamente) è compatibile con un altro se il suo valore vero si trova all'interno della barra d'errore dell'altro valore.

Con un approccio un pochino più statistico supponiamo che all'interno di quell'intervallo si possa trovare  $x_e$  con una probabilità del 68%. Nel caso in cui  $x_e$  caschi fuori dall'intervallo allora possiamo utilizzare lo stesso approccio utilizzato per il criterio di Chauvenet: allora chiamo  $t$  la distanza in deviazioni standard in modo da relazionare la discrepanza delle due misure con la deviazione standard. Ovviamente mi aspetterei  $t = 0$  anche se è statisticamente impossibile che due misure siano perfettamente uguali tra di loro.

$$t = \frac{|x_m - x_e|}{\sigma}$$

Posso allora ricavarmi la probabilità di ottenere un certo valore  $x$  generico che disti dal valore ottenuto più di  $t\sigma$ .

$$P(|x - x_e| \geq t\sigma) = 1 - \int_{x_e - t\sigma}^{x_e + t\sigma} p(x) dx = 1 - \operatorname{erf}(t)$$

Dobbiamo allora decidere quando una probabilità è tale che da ritenere ragionevole la distanza trovata e definire la compatibilità. Convenzionalmente si considera accettabile un valore di probabilità di almeno il 5%. Si dice il **livello di confidenza** la probabilità opposta del 95% e possiamo allora dire che una probabilità del 5% corrisponde a  $t = 1.96$ .

Se allora  $x_e$  dista più di questo valore in deviazioni standard allora è ragionevole pensare che tale distanza non sia dovuta a fluttuazioni statistiche a che invece ci siano stati degli errori nelle misure. Possiamo allora indicare il livello di confidenza quando si svolgono delle misure proprio secondo questo criterio. Se una misura anomala è in genere oltre i  $5\sigma$  di solito è una misura da attribuire ad una nuova scoperta come negli esperimenti del CERN.

## 9.4 Confronto tra due misure

Se volessimo confrontare due misure tipo

$$x_1 \pm \sigma_1 \quad x_2 \pm \sigma_2$$

Possiamo fare un ragionamento un base alla **discrepanza** tra le due misure:

$$\tau_m = |x_1 - x_2|$$

Il valore ideale per la discrepanza tra due misure è ovviamente zero, l'idea di utilizzare questa proprietà è analoga a quella del caso del confronto con un valore dato. Propago allora l'errore per ricavarmi l'errore sulla discrepanza come errore in quadratura  $\sigma_\tau = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$  e posso allora calcolarmi la **discrepanza normalizzata** in termini di  $\tau$  e quindi

$$t = \frac{|\tau_m - \tau_e|}{\sigma_\tau} = \frac{\tau_m}{\sigma_\tau} = \frac{|x_1 - x_2|}{\sigma_\tau}$$

E quindi la probabilità di ottenere un valore al di fuori di questo intervallo è allora

$$P(|\tau - \tau_e| \geq t\sigma_\tau) = 1 - \operatorname{erf}(t)$$

Se si ragionasse con un livello di confidenza analogo dovremmo trovare ad una distanza di circa  $2\sigma$ .

# Capitolo 10

## Medie pesate

### 10.1 La media pesata

Avendo fatto varie misure di una certa grandezza la **media pesata** ci permette di combinarle in modo da ottenere un unico valore. L'unico prerequisito della media pesata è, ovviamente, la compatibilità tra le misure. Supponendo di aver fatto determinate misure si può, dato che queste sono compatibili, combinarle assegnando un certo peso ad ognuna di esse in modo che alcune risultino più "importanti" di altre; si pesano inoltre anche le incertezze delle singole misure in modo che alcune incertezze siano più significative di altre. Possiamo allora scrivere la probabilità di ottenere un certo valore arbitrariamente vicino a tre valori misurati e ricavarne la probabilità massima: posso pensare questa probabilità come una funzione del valore vero e trovare quel valore vero che rende la probabilità maggiore possibile

$$P(x_1, x_1 + dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - x)^2}{2\sigma_1^2}\right) = P_1$$

La probabilità complessiva sarà proporzionale a

$$P_{tot} = P(x_1)P(x_2)P(x_3) \propto \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sigma_3} \exp\left(-\sum\left(\frac{(x_i - x)^2}{\sigma_i^2}\right)\right)$$

Avrò allora che le probabilità delle altre due misure posso indicarle con  $P_2$  e  $P_3$  e allora la probabilità complessiva di ottenere una misura tra  $x_1 + dx$  e le altre due misure considerate, (se sono ovviamente indipendenti e quindi non correlate) sarà data dalla minimizzazione dei quadrati:

$$\begin{aligned} P_{tot} &= \prod P_i = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) (dx)^3 \\ \chi^2 &= \frac{(x_1 - x)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - x)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(x_3 - x)^2}{\sigma_3^2} = \sum\left(\frac{(x_i - x)^2}{\sigma_i^2}\right) \end{aligned}$$

Allora derivando rispetto al valore vero  $x$  ottengo l'espressione della minimizzazione del *chi* quadrato:

$$x = \frac{\frac{x_1}{\sigma_1^2} + \frac{x_2}{\sigma_2^2} + \frac{x_3}{\sigma_3^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{\sigma_3^2}}$$

In termini generali posso affermare che

$$x_{MP} = \frac{\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad (10.1)$$

Possiamo chiamare i pesi  $\omega_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$  e ottenere una formulazione più generale attraverso i pesi

$$x_{MP} = \frac{\sum x_i \omega_i}{\sum w_j} \quad (10.2)$$

L'incertezza da associare a questo valore si può ottenere allora dalla propagazione dell'errore.

## 10.2 L'incertezza associata alla media pesata

Come posso allora ricavare l'incertezza sulla media pesata  $\sigma_{MP}$ ? Per fare questo posso riscrivere l'incertezza secondo la definizione e ottenere:

$$\begin{aligned}\sigma_{MP}^2 &= \sum \left( \frac{\partial x_{MP}}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2 \\ \frac{\partial x_{MP}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_1 \omega_1 + \dots + x_n \omega_n}{\sum \omega_j} = \\ \frac{1}{\sum \omega_s} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (x_1 \omega_1) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i \omega_i) + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_n \omega_n) \right) &= \frac{1}{\sum \omega_j} \omega_i \\ \implies \sigma_{MP}^2 &= \sum \left( \frac{\omega_i}{\sum \omega_j} \right)^2 \frac{1}{\omega_i} = \frac{1}{(\sum \omega_j)^2} \sum \omega_i = \frac{1}{\sum \omega_i}\end{aligned}$$

Si ottiene allora l'incertezza sulla media pesata come

$$\sigma_{MP} = \sqrt{\frac{1}{\sum \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (10.3)$$

## 10.3 Applicazioni della media pesata

Nel caso di misure ripetute della stessa grandezza e sapendo che tutti i pesi sono identici, viene meno l'utilizzo delle formule complesse della media pesata e favorendo dunque l'utilizzo delle formule semplici viste in precedenza. La media pesata infatti si può utilizzare se e solo se gli errori sono di natura accidentale e non di natura sistematica altrimenti si potrebbero assegnare pesi grandi a misure fatte con errori sistematici grandi.

# Capitolo 11

## Relazioni tra grandezze fisiche

### 11.1 Il metodo grafico

Ipotizziamo di aver acquisito delle grandezze  $x$  e  $y$ , vogliamo trovare la relazione che lega le due grandezze come  $y = f(x)$ . Iniziando dalla relazione  $y = A + Bx$ , si può utilizzare il metodo grafico, ossia possiamo utilizzare un grafico su carta millimetrata per poter studiare la distribuzione trovata e verificare che sia compatibile con una distribuzione lineare.

In generale i punti possiedono però anche delle barre di errore e quindi dopo aver rappresentato anche quelle è possibile determinare se un punto appartiene al modello lineare oppure se è troppo distante per potere essere ragionevolmente considerato. La statistica ci dice che si aspetta una compatibilità del 68% e ricordandoci che nel caso ci fossero punti molto distanti dagli altri essi possono essere scartati con opportune considerazioni.

### 11.2 Determinazione di $A$ e $B$

Per ricavare i coefficienti  $A$  e  $B$  nel modello di relazione lineare  $y = A + Bx$  possiamo ricorrere ai seguenti metodi: posso ricavare  $B$ , ovvero il **coefficiente angolare**, prendendo una coppia di punti e utilizzando la relazione

$$B = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

E' consigliabile prendere punti più distanti possibili in quanto la quadrettatura del foglio millimetrato ci darà una incertezza di  $1mm$ . In generale si prendono i punti in cui la retta interseca i bordi del foglio (ovviamente sempre che siano i più comodi).

Per ricavare  $A$  posso seguire la seguente procedura:

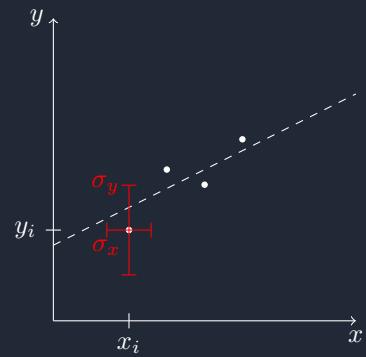
$$A = y_0 - Bx_0$$

Dove  $(x_0, y_0)$  è il punto maggiormente vicino al bordo di sinistra del grafico sempre per una questione di approssimazione e una volta determinati tali valori dovremmo ricavare le **incertezze** associate. In generale non ci sarà solo una retta a soddisfare la nostra relazione ma ne avremo molte di più.

Posso adattare **criteri soggettivi** per determinare la retta da considerare; normalmente si prende quella che passa più vicino possibile a più punti possibili. Dopodiché cerchiamo gli estremi ovvero la retta più pendente e quella meno pendente che soddisfano ancora i nostri prerequisiti e scrivere allora

$$\begin{aligned} A_{best} & B_{best} \rightarrow \text{retta probabile} \\ A_{min} & B_{min} \rightarrow \text{retta meno inclinata} \\ A_{max} & B_{max} \rightarrow \text{retta più inclinata} \end{aligned}$$

Figura 11.1: Misure rispetto al modello lineare



Possiamo ricavare allora l'errore sulla migliore stima di  $A$  e  $B$  come lo scarto massimo tra la migliore stima e il loro valore massimo e minimo

$$A_{best} \pm \Delta A \quad B_{best} \pm \Delta B$$

Ovviamente bisogna approssimare le cifre significative a causa della limitatezza dei quadretti.

### 11.3 Relazione non lineare

Nel caso di una relazione non lineare il metodo grafico diventa molto più complicato: prendiamo per esempio il caso  $y = A + Bx^2$ . Un metodo potrebbe essere prendere in relazione una grandezza e la funzione associata alla seconda grandezza e allora la relazione diventa lineare nella seguente maniera:

$$y = A + Bg(x) \quad g(x) = x^2$$

Un altro modo per ottenere una relazione lineare è quella di poter "sistemare" l'asse delle ascisse in modo tale che diventi lineare.

### 11.4 Metodo dei minimi quadrati

Con il metodo dei minimi quadrati posso ottenere un *fit grafico* molto più preciso che con il metodo grafico visto fino ad ora: questo metodo infatti si basa univocamente sul nostro set di dati e ci permette di determinare la retta migliore dal punto di vista statistico. Partiamo da una situazione di una coppia di misure e supponiamo che le incertezze su  $y$  abbiano tutte la stessa grandezza, altrimenti andrebbero separate. Possiamo allora studiare, grazie alla statistica, la probabilità

$$P(y_1, y_1 + dy), \dots, P(y_i, \dots, y_i + dy)$$

Per ipotesi possiamo considerare che ogni valore  $y_i$  sia legato ad un certo  $x_i$  e quindi possiamo dire che la probabilità di ottenere un certo valore  $y_i$  sia data da

$$P(y_i, y_i + dy) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(y_i - (A + Bx_i))^2}{2\sigma_i^2}\right) dy$$

Possiamo inoltre dire che le incertezze sulle singole  $y_i$  sono tutte uguali in quanto sono state ricavate attraverso il medesimo strumento e dunque è ragionevole pensare che  $\sigma_{y_1} = \dots = \sigma_{y_n}$ . Inoltre posso utilizzare il principio di Massima verosimiglianza e quindi esprimere la probabilità totale come

$$P_{tot} = \left(\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\prod \sigma_i} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_i^2}\right) = \left(\frac{dy}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\prod \sigma_i} \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)$$

dove  $\chi = \sum \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma^2}$

Il valore  $y_i - A - Bx_i$  è lo scarto lungo l'asse  $y$  del valore misurato e del punto in cui la retta interseca l'intervallo (idealmente sarebbe zero). Applicando ora il principio di massima verosimiglianza le migliori stime di  $A$  e  $B$  sono quei valori per i quali la loro probabilità è massima.

Il valore massimo si ha in corrispondenza del minimo esponente dell'esponenziale; questo si può osservare sempre con il principio di Massima verosimiglianza che facendo la derivata di questa funzione a due variabili e imponendo che sia uguale a zero, l'unico termine che devo porre uguale a zero è il termine all'interno dell'esponenziale e dunque posso dire che

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = \sum \left(-\frac{1}{\sigma^2} 2(y_i - A - Bx_i)\right) = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = \sum \left(-\frac{1}{\sigma^2} 2(y_i - A - Bx_i)x_i\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum A + B \sum x_i = \sum y_i \\ A \sum x_i + B \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Possiamo risolvere il sistema in forma matriciale ed ottenere

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{pmatrix}$$

E quindi trovare le costanti  $A$  e  $B$  coe

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{11.1}$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \tag{11.2}$$

## 11.5 Incertezze tra $A$ e $B$

Possiamo considerare le grandezze  $A$  e  $B$  come ottenute indirettamente e quindi posso propagare l'errore ed ottenere  $\sigma_A$  nell'ipotesi che gli errori siano stati tutti accidentali.

$$\sigma_A^2 = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2 + \sum \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \sigma_{y_i} \right)^2$$

Dato che si è specificato che l'incertezza sulle  $x$  sia molto più piccola di quella sulle  $y$ , allora posso ignorare il primo termine del secondo membro e scrivere semplicemente (ovviamente considerando che tutte le incertezze su tutti gli  $y_i$  siano uguali) che

$$\sigma_A^2 = \sum \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \sigma_{y_i} \right)^2$$

Ora, posso svolgere la parziale dentro le parentesi e ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y_i} &= \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial y_i} &= \frac{1}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \left( \sum x_i^2 - x_j \sum x_i \right) = \frac{1}{\Delta} \left( \sum x_i^2 - x_j \sum x_i \right) \\ \Delta &= n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \end{aligned}$$

E quindi posso risolvere la seguente:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \sum \left( \frac{1}{\Delta} \left( \sum x_i^2 - x_j \sum x_i \right) \right)^2 \sigma_y^2 = \\ &\sum \left( \frac{1}{\Delta^2} \left( \left( \sum x_i^2 \right)^2 + x_j^2 \left( \sum x_i \right)^2 - 2x_j \sum x_i \sum x_i^2 \right) \right) \sigma_y^2 = \\ &\frac{\sigma_y^2}{\Delta^2} \left( n \left( \sum x_i^2 \right)^2 + \sum x_j^2 \left( \sum x_i \right)^2 - 2 \sum x_i \sum x_i^2 \sum x_j \right) = \\ &\frac{\sigma_y^2}{\Delta^2} \left( n \left( \sum x_i^2 \right)^2 - \sum x_i^2 \left( \sum x_i \right)^2 \right) = \\ &\frac{\sigma_y^2}{\Delta^2} \left( \sum x_i^2 \right) \left( n \sum x_i^2 - \left( \sum x_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Si ottiene allora, dato che l'ultima parentesi è uguale a  $\Delta$

$$\sigma_A = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}} \quad (11.3)$$

Possiamo allora applicare lo stesso ragionamento per  $B$  e quindi ottenere

$$\sigma_B^2 = \sum \left( \frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 \sigma_y^2$$

E quindi dato

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial y_i} &= \frac{1}{\Delta} \left( nx_j - \sum x_i \right) \\ \Delta &= n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \end{aligned}$$

Posso risolvere la seguente:

$$\begin{aligned} \sigma_B^2 &= \sum \left( \frac{1}{\Delta} \left( nx_j - \sum x_i \right) \right)^2 \sigma_y^2 = \\ &\frac{1}{\Delta^2} \sum \left( n^2 x_j^2 + \left( \sum x_i \right)^2 - 2nx_j \sum x_i \right) = \\ &\frac{\sigma_y^2}{\Delta^2} \left( n^2 \sum x_i^2 + n \left( \sum x_i \right)^2 - 2n \sum x_i \sum x_j \right) = \\ &\frac{\sigma_y^2}{\Delta^2} \left( n^2 \sum x_i^2 - n \left( \sum x_i \right)^2 \right)^n \end{aligned}$$

Allora dato che nell'ultimo termine c'è nuovamente  $\Delta$  si ottiene

$$\sigma_B = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}} \quad (11.4)$$

## 11.6 Linearità e coefficiente di correlazione lineare

Osservando il grafico possiamo ricavare la distanza dei valori dalla retta e, con la minimizzazione dei quadrati, possiamo allora determinare la Linearità del campione di dati che abbiamo e verificare quindi che la distribuzione dei dati sia compatibile con l'errore accidentale e che sia effettivamente una distribuzione lineare di dati.

Se la relazione è davvero lineare allora mi aspetterò che

$$Y_i = A + BX_o \approx A + Bx_i$$

Dovremmo avere che  $y_i - A - Bx_i = 0$  sia il più piccolo possibile. Nonostante si conosca solo dati che non mi permettano di determinare questa distribuzione di scarti, si sa che tutti i valori  $y_i$  sono distribuiti normalmente intorno al valore vero  $A + Bx_i$  e le deviazioni  $y_i - A - Bx_i$  sono anch'esse distribuite normalmente attorno al valore zero 0 e con lo stesso parametro di larghezza  $\sigma_y$ .

$$\overline{\sigma_y} = \frac{\sqrt{\sum(y_i - A - Bx_i)^2}}{N - 2}$$

Questo mi dà il valore dello sparpagliamento dei valori rispetto alla retta vera (che tuttavia non ho), la quale è ottenuta secondo il metodo dei minimi quadrati: la quale ha due parametri, e quindi due gradi di libertà e da qui segue il fattore  $N - 2$  al denominatore.

Se graficamente trovo che

- $\overline{\sigma_y} \approx \sigma_y$ : La **fluttuazione media** dei valori  $y$  rispetto alla retta dei minimi quadrati è confrontabile con l'incertezza sperimentale;
- $\overline{\sigma_y} >> \sigma_y$ : La fluttuazione è molto maggiore di quanto ci si potrebbe aspettare dall'incertezza misurata e quindi non è molto normale, questo implica che abbiamo sottostimato l'incertezza oppure che i dati potrebbero non avere una distribuzione lineare;
- $\overline{\sigma_y} << \sigma_y$ : se le barre di errore fossero state valutate meglio, avremmo avuto una minoranza di punti che non contiene la retta: probabilmente gli errori sperimentali non sono stati sovrastimati e quindi, se fossero stati calcolati meglio, alcuni punti potrebbero non appartenere alla retta trovata.

Possiamo anche ragionare con grandezze non fisiche con il metodo dei minimi quadrati e trovare quindi una sequenza di valori (se è possibile ovviamente) rappresentarla come relazione lineare utilizzando il coefficiente di correlazione lineare

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} \quad \left( = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} \right) \quad (11.5)$$

Data la tesi del teorema di Cauchy-Schwartz, posso dire che  $-1 \leq r \leq 1$ . Se il modello fosse lineare, allora  $r$  assumerebbe o  $-1$  oppure  $1$ . Possiamo allora ottenere da queste ipotesi che

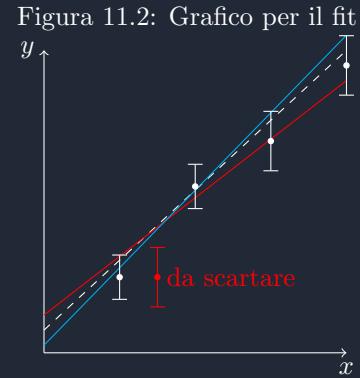
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{N} = A + \frac{B \sum x_i}{N} = A + B\bar{x}$$

E quindi sostituendo si ottiene che

$$y_i - \bar{y} = B(x_i - \bar{x})$$

E allora

$$r = \frac{B}{|B|} = \pm 1$$



Avendo un certo set di misure possiamo ricavare la retta coi minimi quadrati e quindi con  $A$  e  $B$  possiamo interpolare e scoprire i valori  $y'$  ai quali corrisponderebbero determinati valori di  $x'$ . In questo modo posso anche ricavarmi la covarianza nel modello lineare ottenendo allora:

$$\sigma_y^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial A} \right)^2 \sigma_A^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial B} \right)^2 \sigma_B^2 2 \frac{\partial y}{\partial A} \frac{\partial y}{\partial B} \sigma_{A,B}$$

$$\sigma_{A,B} = -\sigma_y^2 \frac{\sum x_i}{\Delta}$$

## 11.7 Metodo dei minimi quadrati pesati

Studiamo il caso in cui le incertezze dei valori non siano simili tra di loro e assumendo come sempre errori puramente accidentali ci fermiamo a definire intanto

$$\chi^2 = \frac{\sum (y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_y^2} = \sum \omega_i (y_i - A - Bx_i)^2$$

E quindi posso risolvere il sistema per trovare il punto di minimo

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = -2 \sum \omega_i (y_i - A - Bx_i) \\ 0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = -2 \sum \omega_i (y_i - A - Bx_i) \end{cases}$$

Ottenendo allora

$$A = \frac{\sum \omega_i x_i^2 \sum \omega_i y_i - \sum \omega_i x_i - \sum \omega_i x_i y_i}{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i^2 - (\sum \omega_i x_i)^2} \quad (11.6)$$

$$B = \frac{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i y_i - \sum \omega_i x_i \sum \omega_i y_i}{\sum \omega_i \sum \omega_i x_i^2 - (\sum \omega_i x_i)^2} \quad (11.7)$$

Con il metodo dei quadrati pesati si tende a dare più importanza ai valori con la minore incertezza, altrimenti adattando il metodo standard avremo un risultato diverso. Propagando l'errore in maniera analoga si ottiene allora

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum \omega_i x_i^2}{\Delta \omega}} \quad (11.8)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum \omega_i}{\Delta \omega}} \quad (11.9)$$

E anche in questo caso posso definire  $\bar{\sigma}$  che mi permette di verificare se i miei valori abbiano senso oppure no. Infatti se  $y_i - A - Bx_i \approx \sigma_{y_i}$  allora mi aspetto che

$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - A - Bx_i)^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

Dati i due gradi di libertà di questo calcolo, allora ottengo che

$$\frac{\chi^2}{2} \sim 1.$$

## 11.8 Varianza efficace e relazioni non lineari

Possiamo anche studiare il caso in cui le incertezze su  $x$  non siano approssimabili e quindi data la relazione tra i due errori, la banda di errore su  $x$  è legata alla banda di errore su  $y$  secondo la seguente relazione

$$\sigma_{y_i} = \tan \alpha \sigma_{x_i} = \frac{dy}{dx} \sigma_{x_i}$$

Posso allora definire la **varianza efficace** l'errore totale e quindi, utilizzando la somma in quadratura e ricordando che la derivata rispetto ad  $x$  di  $y$  è proprio  $B^2$  e che se la relazione fosse lineare avrei  $\tan^2 \alpha = B^2$ , allora posso definire

$$\sigma_{y_i} = \sqrt{\sigma_{y_i}^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \sigma_{x_i}^2} = \sqrt{\sigma_{y_i}^2 + B^2 \sigma_{x_i}^2}$$

Un qualunque polinomio del tipo  $y = A + Bx + \dots$  sono relazioni non lineari per  $x$  e  $y$  ma lineari per  $A$  e  $B$  se provassimo a rifare i calcoli otterrei

$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - A - Bx\dots)^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

Procedendo a fare la derivata prima rispetto ad ogni variabile  $A, B, \dots$  allora è possibile risolverlo . Se le funzioni non fossero lineari nemmeno nei parametri allora dovrei provare a linearizzare tutta la funzione attraverso il metodo grafico riscrivendo parti della funzione in funzione di  $Y$  e  $X$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha e^{\beta x} \\ \ln y &= \ln \alpha + \beta x \\ Y &= \ln y, A = \ln \alpha, B = \beta, X = x \\ Y &= A + BX. \end{aligned}$$

Se le incertezze sono uguali allora si utilizza il metodo dei minimi quadrati:

$$\sigma_{y_i} = \left| \frac{d \ln y_i}{dy_i} \right| \sigma_{y_i} = \frac{1}{y_i} \sigma_{y_i}$$

## Capitolo 12

# Distribuzione binomiale

La distribuzione binomiale spesso è associata con la probabilità di trovare l'asso in un dado, ossia avere un certo numero di misure ripetute. La distribuzione di Poisson è quella che viene fuori da eventi casuali con tempo caratteristico ben definito (per esempio l'emissione spontanea di fotoni da parte di atomi). Nel caso di un dado a sei facce si elencano alcuni casi:

1. La probabilità di trovare una faccia specifica è proprio  $\frac{1}{6}$  e che non esca quella faccia è la complementare  $p' = \frac{5}{6}$ .
2. La probabilità di trovare tre facce uguali in tre lanci ripetuti e consecutivi è proprio  $\frac{1}{6^3}$ .
3. La probabilità di trovare 2 facce uguali in tre lanci è  $pp' + pp'p + p'pp = 3p^2p'$ . Poiché ho tre disposizioni possibili di risultati.

Nel caso generale io chiamo  $n$  il numero complessivo di prove ed il numero di successi come  $\nu$  e quindi:

$$P(\nu \text{ successi in } n \text{ prove}) =$$

$$b_{n,p}(\nu) = \frac{n!}{\nu!(n-\nu)!} \cdot p^\nu q^{n-\nu} \quad (12.1)$$

Ho una distribuzione binomiale in funzione di  $\nu$  con  $n$  e  $p$  fissati. (dove  $q = 1 - p$ ). Questa funzione non è molto diversa da una gaussiana, ma è una funzione discreta perché è definita nei naturali. Il disaccordo tra la binomiale e la gaussiana si riduce al crescere di  $n$  e quando  $n \rightarrow \infty$  è proprio una gaussiana. Verifco:

$$\bar{\nu} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n \nu_i = np \quad (12.2)$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\sum_{i=0}^n \frac{(\nu_i - \bar{\nu})^2}{N-1}} = \sqrt{np(1-p)} \quad (12.3)$$

### 12.1 Approssimazione della binomiale con la gaussiana

La distribuzione gaussiana ci permette di approssimare la funzione binomiale. A livello teorico sono la stessa curva ma la binomiale tratta valori discreti mentre la Gaussiana tratta valori continui. La distribuzione binomiale  $B_{n,p}(\nu)$  è ben approssimata per valori di  $n$  molto grande dalla Gaussiana con la stessa media e la stessa deviazione standard:

$$B_{n,p}(\nu) \approx G_{X,\sigma}(\nu) \quad (12.4)$$

$$X = np \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \quad (12.5)$$

### 12.2 Distribuzione di Gauss per gli errori casuali

Supponendo di avere solo errori causali (i sistematici sono trascurabili) della stessa entità  $\epsilon$ , allora il nostro valore fluttuerà tra:  $x = X - n\epsilon$  e  $x = X + n\epsilon$ . Se capita che  $\nu$  sorgenti diano errori positivi e  $(n - \nu)$  errori negativi allora il risultato sarà:

$$\begin{aligned} x &= X + \nu\epsilon - (n - \nu)\epsilon \\ &= X + (2\nu - n)\epsilon \end{aligned}$$

La probabilità di questo risultato ora è proprio la binomiale:

$$P(\nu \text{ errori positivi}) = B_{n,1/2}(\nu)$$

Se il numero di sorgenti  $n$  è grande e  $\epsilon$  è sufficientemente piccola, allora le nostre misure sono distribuite normalmente e quindi per essere più precisi  $\sigma_\nu = \sqrt{np(-1p)} = \sqrt{\frac{n}{4}}$ . La deviazione standard è quindi  $\sigma_x = 2\epsilon\sigma_\nu$ . Se ora  $n \rightarrow \infty$  e  $\epsilon \rightarrow \infty$  allora la binomiale diventa la gaussiana.

# Capitolo 13

## Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson è una distribuzione che si utilizza molto per i decadimenti radioattivi in quanto si basa su eventi casuali con un certo intervallo di tempo ben determinato. Ci permette di determinare come fluttuano i successi in un dato bin quando ripeto le stesse misure. Quando si esegue un plot di dati con  $n$  molto grande e  $p$  molto piccola, allora una distribuzione binomiale è approssimabile ad una funzione più semplice chiamata distribuzione di Poisson, la quale è definita come:

$$P_\mu(\nu) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^\nu}{\nu!} \quad (13.1)$$

Per cui si ottiene:

$$\bar{\nu} = \mu, \quad \sigma_\nu = \sqrt{\mu} = \sqrt{\bar{\nu}}$$

$\bar{\nu}$  è proprio il valore della Gaussiana teorica che io costruisco seguendo proprio la distribuzione di Poisson che ottengo misurandolo dai dati. L'errore sul valore di  $\bar{\nu}$  è  $\sqrt{\bar{\nu}}$ .

### 13.1 $\mu$ come conteggio medio atteso

Perché  $\mu = \bar{\nu}$ ? Questo perché

$$\bar{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu P_\mu(\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu e^{-\mu} \frac{\mu^\nu}{\nu!}$$

Che diventa:

$$\bar{\nu} = \mu e^{-\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$$

Si nota che nella serie vi è proprio lo sviluppo di taylor di  $e^\mu$  per cui:

$$\bar{\nu} = \mu \quad (13.2)$$

Il parametro  $\mu$  è proprio il numero medio di conteggi atteso. Talvolta si può ottenere il tasso medio R con cui si verificano gli eventi:

$$\mu = \text{tasso} \times \text{tempo} = RT$$

### 13.2 Deviazione standard

La distribuzione di Poisson fornisce la probabilità di ottenere un risultato  $\nu$  in un esperimento in cui si conteggiano eventi che avvengono casualmente ma ad un tasso medio definito. La deviazione standard di qualunque distribuzione è proprio la radice quadrata della media degli scarti:

$$\sigma_\nu^2 = \bar{\nu}^2 - \bar{\nu}^2 \quad (13.3)$$

Quindi si ottiene che:

$$\sigma_\nu = \sqrt{\mu} \quad (13.4)$$

### 13.3 Approssimazione di Poisson con la Gaussiana

Così come la binomiale, la distribuzione di Poisson dà risultati per valori discreti ed è definita con un solo parametro, non è simmetrica rispetto ad un valore e non ha una forma a campana. Per valori di  $\mu \rightarrow \infty$  la distribuzione di Poisson tende ad assumere la forma di una Gaussiana così come la binomiale per grandi valori dei parametri.

### 13.4 Rimuovere il rumore di fondo

Nel caso del conteggio delle radiazioni da un certo campione, spesso il rumore di fondo (in questo caso la radiazione di altri campioni vicini o dei raggi cosmici), potrebbe alterare i risultati del nostro esperimento. Supponendo di contare  $\nu_{tot}$  di eventi in un tempo  $T_{tot}$  e poi  $\nu_{fondo}$  eventi di sottofondo in un tempo  $T_{fondo}$ . Ovviamente non si sottrae direttamente ma dobbiamo prima calcolare i tassi:

$$R_{tot} = \frac{\nu_{tot}}{T_{tot}} \quad R_{fondo} = \frac{\nu_{fondo}}{T_{fondo}}$$

e poi calcolare il tasso come differenza:

$$R_{sorg} = R_{tot} - R_{fondo}$$

Le incertezze nei tassi di errori vanno calcolate con la propagazione degli errori e non con il metodo della radice quadrata: assumendo  $\nu_{tot} = \mu \pm \sqrt{\mu}$  allora l'errore sui tassi è:

$$R_{tot} = \frac{\nu_{tot}}{T_{tot}} \pm \frac{\sqrt{\mu}}{T_{tot}}$$

$$R_{fondo} = \frac{\nu_{fondo}}{T_{fondo}} \pm \frac{\sqrt{\mu}}{T_{fondo}}$$

Nella sottrazione si combinano in quadratura in quanto certamente casuali ed indipendenti.

## Capitolo 14

# Il test del chi-quadrato per una distribuzione

### 14.1 Cosa è il Chi-quadrato

Come determino se la distribuzione risultante è consistente con quella teorica attesa? Utilizzo il chi-quadrato che mi permette di determinare la consistenza dei risultati attesi. Se facessi  $n$  misure per le quali conosco  $\sigma$  posso calcolare i valori attesi e la deviazione standard e quindi definisco:

$$\chi^2 = \sum \left( \frac{\text{valore osservato} - \text{valore atteso}}{\text{deviazione}} \right)^2 \quad (14.1)$$

Se la distribuzione di  $x$  è  $\chi^2 + n$ , se conosco allora  $\chi^2$  dovrebbe allora essere dell'ordine di  $n$ . Se  $\chi^2 \gg n$  allora è molto probabilmente sbagliata. Il procedimento per la scelta degli intervalli intermedi viene calcolato dipende dal fatto che la grandezza sia continua o lineare.

Misure continue: se la funzione è continua allora la probabilità che un valore cada nella curva è esattamente l'integrale tra un certo valore  $a$  e  $b$ . IN generale l'area totale dell'integrale non sarai mai superiore ad 1. Misure di una variabile continua: si può verificare l'accordo tra una distribuzione reale ed una attesa attraverso l'utilizzo del  $\chi^2$ .

### 14.2 I gradi di libertà

In generale il numero di gradi di libertà ci permette di definire il numero di dati "Non impiegati" nei calcoli e si calcola come il numero di dati osservato meno quello dei dati calcolati dai dati per determinare i numeri attesi.