Appunti di ottica

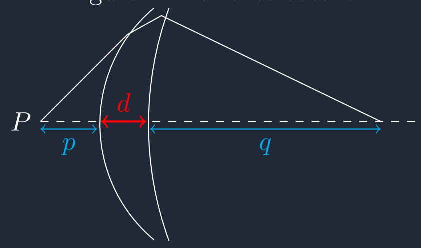
Tommaso Miliani

22-09-25

1 Le lenti sottili

Possiamo ora andare ad analizzare il comportamento di una lente sottile e non di una sfera di vetro come si era trattato prima. Data sempre una sorgente posta in P e come p la distanza tra la sorgente e la prima interfaccia; posso chiamare d come lo spessore della lente e q come la distanza tra il punto di arrivo sull'orizzontale del fascio di luce e la seconda interfaccia. R_1 e R_2 sono > 0 se il centro delle curvature si trova a destra della superficie sferica. Si ottiene da questo modello la seguente relazione

Figura 1: La lente sottile



$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{n_2 d}{p(p-d)}$$

Data l'ipotesi di lente sottile d è molto piccolo: in questo modo posso semplificare la formula in questione con la seguente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{f} \tag{1}$$

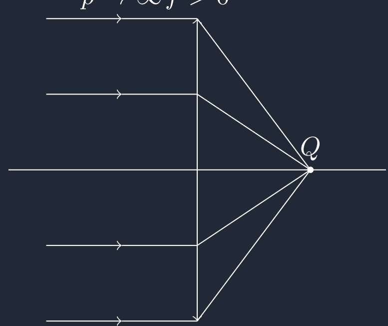
Dove f è chiamata **lunghezza focale** e questa relazione si chiama **formula del costruttore di lenti** poiché per realizzare una lente con una certa focale devo sapere i raggi di curvatura delle interfacce e il loro coefficiente di rifrazione. Si ottiene anche la legge delle lenti sottili che dovremmo verificare in laboratorio ossia il primo membro uguale al terzo.

1.1 La lente convergente

Nel caso di $f > 0$ si parla di **lente convergente**. Possiamo allora studiare i casi limite per capire il significato fisico di f. Una lente convergente è una lente sottile e possiamo distinguere diversi casi.

Figura 2: Caso A

$p \to \infty\, f > 0$



- Il primo caso è il caso in cui la distanza rispetto alla lente è infinita e ha la caratteristica in cui tutti i raggi convergono nel medesimo punto Q.
- Il secondo caso si ha quando p sia molto piccoli (siamo sempre nell'ipotesi parassiale) allora il termine q nella formula si annulla e la lente mi fa convergere i fasci luminosi all'infinito.
- Il terzo caso è quello della configurazione $2f - 2f$, ossia la configurazione in cui $p = 2f$

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{2f}$$

E quindi anche $q = 2f$, in questo modo i raggi che partono da P convergono tutti sul punto simmetrico rispetto alla lente Q. Per una lente **convergente** i punti a distanza f dalla lente (supponendo sempre che la sorgente sia a sinistra rispetto alla lente) per cui il punto a destra della lente si chiamerà **fuoco primario** della lente convergente, mentre il fuoco a sinistra della lente è chiamato **fuoco secondario**.

- Posso considerare infine un ultima configurazione: se $p < f$ posso ottenere intanto l'espressione per q:

$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{fp} \implies \frac{fp}{p-f} = q$$

La lente non riesce a far convergere i fasci di luce nel fuoco ma riesce solo a defletterli. Per cui la direzione dei raggi deflessi mi individua un punto in cui convergono le loro direzioni Q e la distanza q è allora negativa.

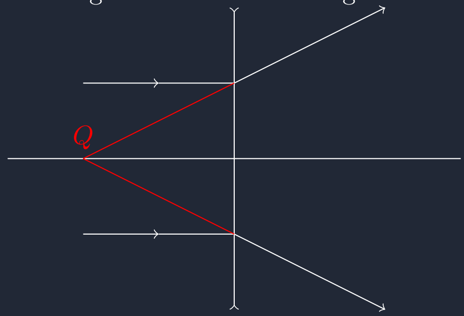
Se il punto focale della sorgente è sinistra della lente si dice che si ha una **immagine reale della sorgente**, altrimenti se il punto focale è a sinistra della lente si parla di **immagine virtuale della sorgente**. L'immagine è definita come il luogo dei punti dove si intersecano fisicamente i raggi provenienti da fuori della lente; nel caso dell'immagine virtuale sono i prolungamenti.

1.2 La lente divergente

Le lenti con $f < 0$ si chiamano **divergenti**. La legge delle lenti sottili è sempre valida e studiamo solo un caso per la lente divergente con sorgente all'infinito. La legge delle lenti sottili mi mette in relazione

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad f < 0$$
$$\implies q = f$$

Figura 3: La lente divergente

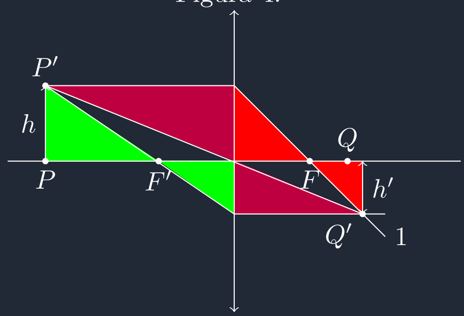


Allora la mia lente produrrà delle immagini virtuali sulla sinistra della lente sul fuoco secondario: allora i fuochi si invertono e il fuoco secondario diventerà il fuoco primario e viceversa. Non esistono invece delle immagini reali create da questa lente in quanto i raggi che giungono dall'infinito vengono sempre deflessi (ossia toccano la lente e vengono rifratti a differenza della lente convergente che invece fa convergere i fasci luminosi in un medesimo punto Q).

2 Il problema della formazione delle immagini

Studiamo ora una sorgente P' posta fuori dalla'asse ottico per studiare il problema della formazione delle immagini da parte di una lente. Il punto P' sta quindi ad una certa distanza rispetto all'asse ottico. Sappiamo che tutti i raggi che vengono dall'infinito convergono sul fuoco: il raggio 1 deve passare per il fuoco primario. Il raggio 2 che invece è sparato da P' passando per il fuoco F' deve necessariamente diventare perpendicolare alla lente. Il punto Q dipende dalla distanza della sorgente rispetto alla lente (il punto Q coincide solo con F quando i raggi vengono dall'infinito). Posso considerare quindi q come la distanza dal punto Q e q' come la distanza da Q'. Posso considerare i due triangoli simili rossi e vedere che vale la seguente

Figura 4:



$$\frac{q'-f}{f} = \frac{h'}{h}$$

Per i triangoli verdi invece si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{p-f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Se le pongo uguali le espressioni per il rapporto di h e h' allora si ha

$$\frac{q'-f}{f} = \frac{f}{p-f} \implies q'-f = \frac{f^2}{p-f} \implies q' = \frac{fp}{p-f}$$

Si può allora arrangiare l'equazione come

$$\frac{1}{q'} = \frac{p-f}{fp'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

Allora ho dimostrato che $q = q'$ e dunque i punti Q e Q' giacciono sullo stesso piano perpendicolare all'asse ottico: anche per immagini estese questa relazione vale ed è proprio come vede l'occhio umano. I triangoli simili viola si ottengono perché il fascio di luce che viene da P' e passa per il centro della lente giunge in Q' in quanto non c'è alcuna deflessione nel caso di una lente sottile.

$$\frac{p-f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Se si moltiplica per $\frac{p}{p}$ allora si ottiene la formula dell'**ingrandimento**:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \tag{2}$$

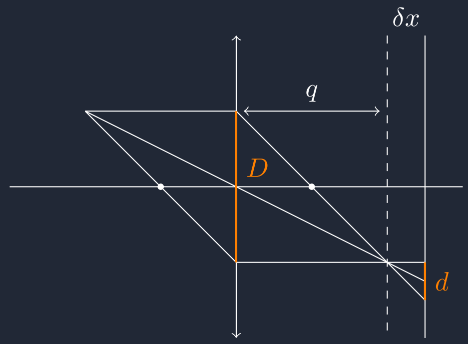
Il segno meno mi ricorda che l'immagine si ribalta rispetto alla sorgente nel caso in cui sia p che q siano positivi.

2.1 Sbagliare il piano d'immagine

Quando si fa una foto non riesco a mettere a fuoco tutti gli oggetti di una scena ma devo concentrarmi su oggetti che hanno una certa distanza dal piano immagine per poter essere rappresentati sul questo piano. Se sbagliassi il piano dell'immagine, potrei chiamare la distanza del punto di formazione dell'immagine dalla lente e D come la dimensione della lente; analogamente posso chiamare d la dimensione dell'immagine attraverso la lente. Posso anche avere un piano su cui giace d (ossia il piano sbagliato dell'immagine perché magari ho sbagliato a mettere a fuoco l'immagine). L'unico modo che ho per mettere a fuoco l'immagine ora è ridurre la dimensione della lente

$$\frac{d}{D} = \frac{\delta x}{q} \implies d = \frac{\delta x}{q} D$$

Figura 5:



Dove δx è la distanza tra il piano dell'immagine "giusto" e quello sbagliato su cui c'è d: in questo modo posso ridurre lo spread dei raggi luminosi ed ottenere una immagine nitida. E' simile a quando si strizza l'occhio anche se in quel caso si modifica anche il cristallino. Come è possibile che in alcune immagini sia sempre tutto a fuoco? Si può spingere al limite il concetto di messa a fuoco attraverso una **camera stenopeica**: ossia una camera che mi permette di avere tutto a fuoco e tutto sullo stesso piano immagine attraverso una dimensione della lente D molto piccola. Il prezzo da pagare è che passa pochissima luce all'interno della camera perdendo così tanta luminosità dell'immagine.

3 La legge del costruttore di lenti e i vari tipi di lenti

La legge del costruttore di lenti ci dice che

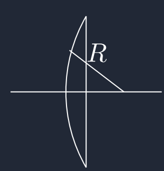
$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right)$$

Si possono ricavare tre tipi fondamentali di lenti da questa formula

3.1 Lente piano convessa

Questa lente ha una interfaccia con raggio di curvatura normale e un raggio di curvatura assimilabile a infinito; si ottiene allora la formulazione per la lunghezza focale dalla legge del costruttore di lenti

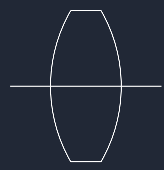
$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$



Più la lente è piccola e più la lunghezza focale è piccola e la lente ha allora la capacità di far convergere molto i fasci luminosi.

3.2 Lente biconvessa

La lente biconvessa è una lente che non ha più una superficie piana ma ha due superficie sferiche con $R_1 > 0$ e $R_2 < 0$. Nel caso in cui $|R_1| = |R_2| = |R|$ si ha la seguente relazione:



$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(\frac{R(-R)}{-2R}\right)$$

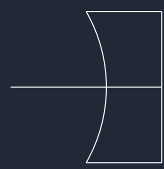
Complessivamente la mia focale sarà data da

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\frac{R}{2}$$

Il potere convergente è ora maggiore in quanto riesce a convergere più vicino alla lente (dato che la focale è la metà dell'altra lente).

3.3 La lente piano concava

Con questo tipo do lente si ha che la focale è negativa e dunque ho realizzato una lente convessa che avrà in modulo la stessa lunghezza focale della lente piano convessa ma con segno opposto



$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1}R$$