Fisica

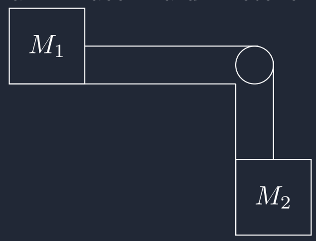
Tommaso Miliani

03-04-25

1 Estensione della macchina di Fletcher con la carrucola reale

Nella macchina di Fletcher con la carrucola reale (posto che non ci siano attriti) allora ho tre corpi con massa collegati con una fune inestensibile e priva di massa ed il sistema ha 1 grado di libertà per ogni oggetto ma non sono indipendenti: la rotazione della carrucola ed il movimento delle masse dipendono l'uno dall'altro. SI suppone inoltre che la carrucola non oscilli.
PReso allora un sistema di riferimento nell'origine della prima massa, posso allora applicare il primo principio per cui per il primo oggetto:

Figura 1: Macchina di Fletcher reale



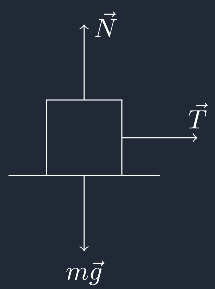
$$\vec{T} = T\hat{\imath}$$
$$m_1\ddot{x}_1 = T$$

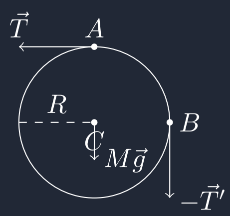
Mentre per il secondo oggetto (dato che la carrucola non è ideale la tensione non è la stessa e dunque la tensione che risente il secondo oggetto è diversa rispetto a quella della massa 1):

$$\vec{T}' = T'\hat{\jmath}$$
$$m_2\vec{g} = -m_2 g\hat{\jmath}$$
$$m_2\ddot{y}_2 = T' - m_2 g$$

Scegliendo ora un polo di riduzione per la carrucola, su di essa agiscono le seguenti forze (la fune sollecita la carrucola e dunque se è inestensibile): le due tensioni.

LA schematizzazione delle masse e della carrucola è data da:





Applicando ora la seconda cardinale alla carrucola e conosciute le distanze tra i punti di contatto della corda ed il centro:

$$(A - C) = R\hat{\jmath}$$
$$(B - C) = R\hat{\imath}$$

E allora

$$((A - C) \times \vec{T} + (B - C) \times (-\vec{T}')) \cdot \vec{R} ? I_C\dot{\omega}$$

Allora dato che $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$:

$$TR - T'R = I_C\dot{\omega} \tag{1}$$

Non ci resta che determinare allora chi è la derivata di ω:

$$\omega = \dot{\phi}, \dot{\omega} = \ddot{\phi}$$

ALlora

$$R\dot{\phi} = -\dot{x}_1$$

Non ci resta ora che sostituire nelle relazioni:

$$m_1\ddot{x}_1 = T$$
$$-m_2\ddot{x}_1 = T' - m_2 g$$
$$TR - T'R = -I_c\frac{\ddot{x}_1}{R}$$

Inoltre, sapendo che il momento di inerzia di un disco è $\frac{1}{2}MR^2$, sostituendo tutto nella terza relazione si ottiene:

$$(m_1 + m_2 + \frac{M}{2})\ddot{x}_1 = m_2 g$$

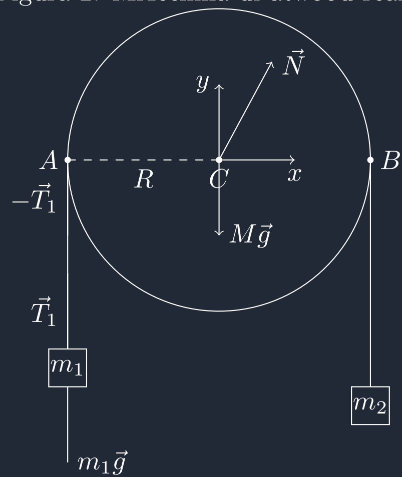
Si ricavano ora le tensioni:

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \tag{2}$$
$$T' = \frac{m_1 m_2 + \frac{m_2 M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \tag{3}$$

2 La macchina di atwood reale attaccata al soffitto

Per la prima massa posso applicare la prima cardinale e dunque scrivere (considerata la carrucola imperfetta, il filo inestensibile e le tensioni diverse):

Figura 2: MAcchina di atwood reale



$$m_1\ddot{y}_1 = T_1 - m_1 g$$
$$m_2\ddot{y}_2 = T_2 - m_2 g$$

Dalla prima cardinale so solo le condizioni di equilibrio ma se voglio sapere il movimento della carrucola e trovare le tensioni non mi basta. La prima massa mi fa girare la carrucola nel verso giusto (lungo l'angolo ϕ in senso antiorario) e quindi il contributo al momento delle forze e al momento di inerzia è positivo mentre l'altra forza la fa girare in senso opposto.

$$T_1 R - T_2 R = I_C\ddot{\phi}$$
$$R\ddot{\phi} = -\ddot{y}_2$$

SI sostituisce come prima per la macchina di Atwood e si risolve il sistema.

$$T_1 = m_1 g\frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \tag{4}$$
$$T_2 = m_2 g\frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} \tag{5}$$

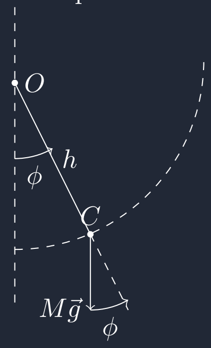
3 Il pendolo composto

Per piccole oscillazioni è un moto armonico nel pendolo semplice con periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Il pendolo composto (o fisico) è un oggetto fisico ed esteso di forma qualsiasi ed il suo centro di massa non può coincidere col perno di rotazione poiché altrimenti non sarebbe un pendolo. ANche qui come nelle carrucole prima, la forza vincolare non so dove è diretta e la metto un po' a caso.
Adesso dato che ho solo un grado di libertà (che ho parametrizzato con ϕ), posso allora utilizzare solo un'equazione per risolvere il problema però io non conosco né in modulo né in direzione la forza vincolare. Posso allora prendere allora il perno come polo di riduzione. Allora posso esprimere il momento di inerzia come

Figura 3: Il pendolo composto



$$-Mgh\sin\phi = I_0\ddot{\phi}$$
$$I_0 = I_C + Mh^2$$

Per cui l'equazione del moto:

$$p\ddot{h}i + \frac{Mgh}{I_0}\sin\phi = 0 \tag{6}$$

Per piccole oscillazioni diventa un moto armonico con periodo calcolabile. come

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgh}} \tag{7}$$

Possiamo esprimere la normale come

$$\vec{N} + N_t\hat{t} + N_n\hat{n}$$

Dove $\hat{t}$ è il versore della tangente mentre $\hat{n}$ è il versore normale rispetto alla congiungente. Possiamo allora esprimere la prima cardinale per le due:

$$N_t - Mg\sin\phi = Mh\ddot{\phi}$$
$$N_n - Mg\cos\phi = Mh\dot{\phi}^2$$

Posso ottenere allora la derivata secondo di ϕ e quindi posso determianremi la componente tangenziale e ottenere:

$$\ddot{\phi} = -\frac{Mgh}{I_0}\sin\phi$$

Per la componente tangenziale:

$$N_t = Mg\sin\phi - Mh\frac{Mgh}{I_0}\sin\phi = Mg\sin\phi\left(1 - \frac{Mh^2}{I_0}\right) \tag{8}$$

Nel caso del pendolo semplice la tangenziale è zero. Moltiplicando per entrambe le parti di $\ddot{\phi}$ per integrare e rimuovere dt si ottiene per le condizioni iniziali in $t = 0$, $\phi = 0$ e $\dot{\phi} = \Omega$:

$$\dot{\phi}^2 = \Omega_0^2 - \frac{2Mgh}{I_0}(1 - \cos\phi)$$

sostituendo nell'espressione per la normale:

$$N_n = Mg\cos\phi + Mh\left(\Omega_0^2 - \frac{2Mgh}{I_0}(1 - \cos\phi)\right) \tag{9}$$

Nel caso in cui l'angolo iniziale fosse noto per esempio $\phi = \phi_0$:

$$N_n = Mg\cos\phi + Mh\frac{2Mgh}{I_0}(\cos\phi - \cos\phi_0) = Mg\cos\phi\left(1 + \frac{2Mh^2}{I_0}\right) - \frac{2M^2h^2g}{I_0}\cos\phi_0 \tag{10}$$