Appunti di analisi

Tommaso Miliani

07-10-25

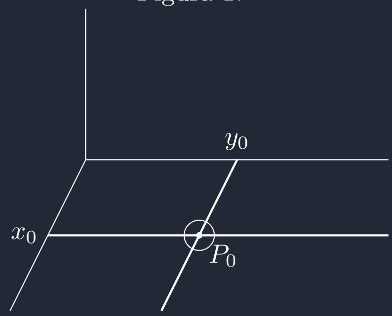
1 Studio di funzioni a due variabili

1.1 Le derivate parziali

Preso un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ e presa una funzione

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad (x_0, y_0) \in A$$

Figura 1:



Posso considerare delle sezioni trasversali con un $y = y_0$ fissato. Io posso considerare solo le sezioni con un y fissato e posso definire la funzione

$$z = f(x, y_0) = v(x)$$

Il suo grafico corrisponde alla sezione di quella superficie nel disegno. Posso ora definire le derivate parziali rispetto a x come il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \implies \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ossia sto valutando l'incremento su x_0 fissato y. Posso ottenere la stessa cosa fissando x_0: in questo caso si può ottenere il grafico della funzione come sezione della superficie lungo un x_0 fissato:

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(y_0+h) - u(y_0)}{h} \implies \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

SI possono allora indicare rispettivamente con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_X(x_0, y_0) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_Y(x_0, y_0) \tag{1}$$

Definizione 1.1.
Se esistono i due rapporti incrementali allora f è detta derivabile ed esiste

$$Df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_X(x_0, y_0) & f_Y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Osservazione 1.1.
Le funzioni elementari sono derivabili in un insieme aperto all'interno del loro dominio. Non si possono fare su un insieme chiuso in quanto devo potermi muovere con $\pm h$. Valgono inoltre le regole di derivazione dell'algebra sia rispetto ad x che y.

Esempio 1.1.
Prendiamo una funzione

$$f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$$

E vogliamo calcolare la derivata nel punto $(0, 0)$. Si può applicare la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{he^{h^2}}{h} = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

Questo vuol dire che f è derivabile in $(0,0)$ e $D(f(0,0)) = (1,0)$. Da notare come le derivate possono essere diverse. Se volessi derivarlo in altri punti (x,y) potrei utilizzare tutta la teoria delle derivate ad una variabile e osservare come questa funzione sia composizione di funzioni derivabili che è ancora derivabile.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2x^2 e^{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yxe^{x^2+y^2}$$

Se volessi esprimere il gradiente allora

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix}(1+2x^2)e^{x^2+y^2} & 2xye^{x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

Osservazione 1.2.
La composizione di funzioni derivabili in due variabili è anch'essa derivabile e si applicano le regole di derivazione.

Esempio 1.2.

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

Stabilire se esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il gradiente della funzione sia parallelo al vettore $(1,0)$. Posso ora applicare la derivata rispetto alle funzioni composte:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$$

ALlora posso esprimere il gradiente come il vettore riga

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix}y\cos(x,y) & x\cos(xy)\end{pmatrix}$$

Allora esiste il gradiente se e solo se $\exists k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ in modo tale che

$$Df(x,y) = k(1,0) \iff \begin{cases} y\cos(xy) = k \\ x\cos(xy) = 0 \end{cases}$$

Si osserva che $x = 0$ e dunque $y = k$ per cui tutti i punti dell'asse verticale soddisfano la condizione e dunque il gradiente della funzione è $(y,0), y \in \mathbb{R}$ che soddisfano le condizioni di parallelismo del gradiente.

Esempio 1.3.

$$f(x,y) = (x-y)\sqrt{|y-x^2|}$$

Questa funzione è definita $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$; voglio vedere se è derivabile nel punto $(1,1)$. La radice non sempre è derivabile: infatti è derivabile se e solo se l'argomento è diverso da zero, altrimenti non è derivabile. Nel punto $(1,1)$ l'argomento fa zero e dunque non ho informazioni sulla derivabilità della funzione. Non posso applicare allora la derivabilità delle funzioni elementari: devo allora procedere ad eseguire il limite del rapporto incrementale.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = 0$$

Rispetto ad x è allora derivabile e in quel punto fa esattamente zero. La derivata parziale rispetto ad y, se esiste, è:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,1+h) - f(1,1)}{h} = 0$$

Ho dimostrato allora che f è derivabile nel punto $(1,1)$ e che il gradiente in quel punto è il vettore nullo.

Esempio 1.4 (Il gradiente non esiste).

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Dato che la funzione della radice non è derivabile nel punto $(0,0)$*, allora devo vedere con il rapporto incrementale se esistono i limiti*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

Questo limite non esiste in quanto potrebbe essere ± 1*. Non è derivabile invece rispetto ad* y *in quanto questa funzione è pari. Allora il gradiente nel punto* $(0,0)$ *non esiste.*

Definizione 1.2.
Si definisce una funzione ***pari*** *una funzione a due variabili se*

$$f(x,y)=f(y,x) \tag{3}$$

Esempio 1.5 (La derivabilità non implica sempre la continuità).

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Non potendo utilizzare la derivazione delle funzioni semplici poiché non so se questa funzione è continua, devo andare a studiare la derivabilità della funzione attraverso il rapporto incrementale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

La funzione è allora derivabile. Si può verificare ora se è continua:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)-f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}-0$$

Se si passasse in coordinate polari si osserverebbe che questo limite non esisterebbe, allora non è continua poiché dipende dal percorso scelto.

Osservazione 1.3.
Se f *è una funzione a due variabili ed è derivabile in un punto* (x_0,y_0)*, non sempre* f *è continua in quel punto. Non esiste il piano tangente al grafico. Il concetto di differenziabilità e derivabilità sono due cose molto diverse: la differenziabilità ci dà le proprietà delle derivate nelle funzioni ad una variabile.*

1.2 Derivate di ordine successivo

Si può definire la derivata rispetto ad una delle due variabili di una funzione a due variabili come

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \tag{4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \tag{5}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \tag{6}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) \tag{7}$$

Le derivate miste sono quell per cui prima si deriva ad una variabile e poi con l'altra nella derivata seconda. Si indica il gradiente al quadrato è dato dato dalla matrice delle derivate parziali che prende il nome di **matrice Hessiana**

$$D^2 f(x,y)=\begin{pmatrix} f_{x,x}(x,y) & f_{xy}(x,y)\\ f_{y,x}(x,y) & f_{yy}(x,y)\end{pmatrix} \tag{8}$$

Definizione 1.3.
Si definisce la traccia del gradiente al quadrato come l'operatore **Laplaciano**

Esempio 1.6.

$$f(x,y) = \sin(x^3 + y^3)$$

Allora la derivata doppia è rispetto a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(3x^2\cos(x^3+y^3)\right) =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(3y^2\cos(x^3+y^3)\right) =$$

Teorema 1.1 (Teorema di Schwarz)**.**
Preso un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ con un punro qualsiasi $(x_0, y_0) \in A$ tale che la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ sia derivabile due volte, allora se le derivate miste f_{xy}, f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) allora le loro derivate sono uguali: si ottiene allora che la matrice Hessiana è simmetrica.

Dimostrazione. Si farà □

Osservazione 1.4.
L'ipotesi di continuità delle derivate miste non può essere rimossa.

Esempio 1.7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Posso allora cercare, se $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, posso dire, facendo le derivate parziali: