Appunti di Fluidodinamica (Landi)

Tommaso Miliani

09-12-25

1 Vorticità

La vorticità ($\vec{\omega}$), è definita come il rotore del campo di velocità:

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

Dove il rotore del vettore velocità è dato da

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = (\partial_y a_z - \partial_z a_z)\hat{x} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\hat{y} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\hat{z}$$

Dove $\vec{a}$ è il vettore velocità generico e ∂_i indica la derivata parziale rispetto alla componente i specificata. Se un fluido è in rotazione, allora la vorticità è diversa da zero: indica dunque se c'è rotazione in un fluido. Supponendo di avere un fluido che sta ruotando (rigidamente) intorno ad un asse, posso dunque definire la velocità del fluido come

$$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \Omega\hat{z} \times (x\hat{x} + y\hat{y}) = \Omega x\hat{y} - \Omega y\hat{x}$$

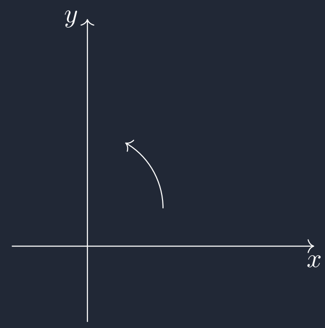
Dove il vettore posizione è dato da

$$\vec{r} = x\hat{x} - y\hat{y}$$

Posso dunque ricavare il rotore del vettore velocità per definire la vorticità: (ricordando che non c'è velocità lungo $\hat{z}$):

$$\vec{\omega} = (\partial_x u_y - \partial_y a_x)\hat{z} = (\Omega + \Omega)\hat{z} = 2\Omega\hat{z}$$

Figura 1:



Se si ha una situazione in cui si ha un campo che è funzione solo della distanza, si può dimostrare che il rotore della velocità è identicamente nullo. Analogamente, un flusso lungo una certa direzione x, e che è funzione di x, sta accelerando o decelerando ha rotore nullo poiché il rotore compie sempre derivate incrociate. Nella presenza di una struttura a getto, la vorticità è non nulla: questo perché la componente lungo x dipende da quella lungo y: il suo termine di vorticità non nullo è sempre diretto lungo z.

1.1 Evoluzione dinamica della vorticità

Tramite l'equazione di Eulero:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\phi_G$$

Dove l'ultimo termine è un campo potenziale qualsiasi. Posso dunque riscriverla come

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}w - \vec{\nabla}\phi_G$$

Dove $dw = \frac{dp}{\rho}$ è l'entalpia specifica per unità di massa. Da questa posso utilizzare delle applicazioni di rotori e divergenze per ottenere una forma che mi permetta di descrivere dinamicamente l'evoluzione della vorticità. Posso utilizzare la seguente identità:

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} \times \vec{u} = -\vec{\nabla}\frac{u^2}{2} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$$

Sulla componente x posso ottenere

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u}\Big|_x = (\vec{\nabla} \times u)_y u_z - (\vec{\nabla} \times \vec{u})_z u_y = (\partial_z u_x - \partial_x u_z)u_z - (\partial_x u_y - \partial_y u_x)u_y$$

Posso ora aggiungere e togliere $u_x \partial_x u_x$ e si ottiene dunque l'espressione rispetto al gradiente:

$$u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x + u_z \partial_z u_x - u_x \partial_x u_x - u_y \partial_x u_y - u_z \partial_x u_z$$

Che diventa, dato che è il gradiente e la divergenza rispetto a x:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_x - \frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2}{2} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u_x - \vec{\nabla}\frac{u^2}{2}_x$$

Da questa relazione posso ottenere la seguente:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + w + \phi_G\right)$$

Supponendo di essere ora in condizioni stazionarie, si fa il prodotto scalare con $\vec{u}$. Dunque posso espreimere

$$\vec{u} \cdot \Big((\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u}\Big) = -\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + w + \phi_G\right)$$

Dunque, essendo prodotto triplo di vettori paralleli tra di loro, si ha la seguente

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + w + \phi_G\right) = 0$$

Il gradiente di questa espressione è dunque perpendicolare ad $\vec{u}$, ossia $\vec{u}$ è parallelo all'isolivello della funzione f descritta da quello dentro le parentesi. Dunque lungo la linea di isolivello, questa quantità è costante in condizioni stazionarie. Si può trascrivere ora la derivata rispetto al tempo del vettore velocità in modo tale da fare apparire la vorticità:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} = -\vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + w + \phi_G\right)$$

Applicando l'operatore rotore a tutti e due i membri (questa operazione è legale) , è possibile invertire la derivata rispetto al tempo con l'operatore rotore (cioè scambiare l'ordine degli operatori, che ,in questo caso, non cambia il risultato).

$$\frac{\partial}{\partial f}\vec{\omega} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\left(\frac{u^2}{2} + w + \phi_G\right)$$

Il secondo membro può essere espresso come il rotore del gradiente di una funzione scalare, ossia zero (si può dimostrare):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \det\begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x f & \partial_y f & \partial_z f \end{pmatrix} = (\partial_y \partial_z f + \partial_z \partial_y f)\hat{x} + (\partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f)\hat{y} + (\partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f)\hat{z} = 0$$

Dato che ci si pone nelle condizioni nel quale le derivate sono interscambiabili, allora il primo termine è nullo, così come il secondo e dunque anche il terzo. Questo vale sempre per funzioni regolari. Dunque si ottiene il seguente risultato:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) = 0$$

Nelle condizioni in cui non c'è vorticità in tutto il fluido per un certo tempo, allora non si può generare vorticità: se il fluido non ha vorticità, allora non se ne può generare poiché la derivata rispetto al tempo del vettore nullo è esattamente nulla. Si ha inoltre un'altra identità vettoriale

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

Senza dimostrazione. Utilizzando questa identità nella relazione precedente si ottiene:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \times \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega}) = 0$$

I primi due termini sono la derivata sostanziale, dunque, dato che la divergenza del vettore $\vec{\omega}$, ossia la divergenza di un rotore di un campo vettoriale $\vec{A}$ qualsiasi è zero (questo vuol dire che il vettore $\vec{\omega}$ non ha sorgente e le linee di campo sono dunque sempre chiuse) allora si ottiene che

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega}\vec{\nabla})\vec{u} + \omega(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

2 Teorema di Kelvin

Sulla curva C si calcola Φ, ossia il flusso della vorticità:

$$\Phi = \int_{\Sigma(C)} \vec{\omega} \cdot \hat{n} \; d\sigma$$

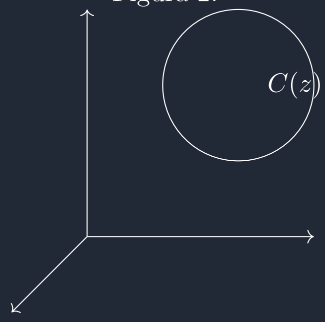


Figura 2:

Dato che la divergenza di $\vec{\omega}$ è uguale a zero, allora non cambia il tipo di superficie che si utilizza per quella determinata curva C scelta. Supponendo di avere una carica positiva con campo uscente, supponendo di prendere una curva qualsiasi e di calcolare il flusso attraverso quella curva su di una superficie, in questo caso cambia il flusso poiché il campo in questione ha una sorgente ben definita. Si può ora far evolvere il sistema con le equazioni di eulero e con le equazioni di identità, gli elementi fluidi si sono mossi In generale, mi ricostruiranno una seconda curva C al tempo $t + \Delta t$. Dunque il flusso

$$\Phi(t + \Delta t) = \int_{\Sigma(C(t+\Delta t))} \vec{\omega} \cdot \hat{n} \; d\sigma$$

Si può dimostrare dunque, a partire da quell'equazione, il **Teorema di Kelvin**: ossia si può dimostrare che il flusso $\Phi(t+\Delta t) = \Phi(t)$. Ossia il flusso della curva comovente con gli elementi fluidi è uguale a quello della curva iniziale $C(t)$ iniziale.

$$\Phi(t) = \int_{\Sigma(C)} \vec{\omega} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma(C)} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})\vec{n} \; d\sigma$$

Si può ora applicare il teorema di Stokes in modo tale da fare la somma di tutti i contributi lungo la curva e dunque si ottiene il flusso al tempo t come

$$\int_C \vec{u} \cdot \vec{dl}$$

Ossia la circuitazione di $\vec{u}$ intorno alla curva chiusa C. Supponendo di avere un fluido che, invece di avere solo una caduta libera da un rubinetto, ha anche un moto rotatorio: prendendo una sezione circolare ad una certa altezza ed una ad un punto più basso ,evidentemente il circuito comovente è più piccolo sulla superficie inferiore. Si può allora definire l'integrale come

$$\int_{C(t)} \vec{u} \cdot dl = \int_{C(t+\Delta t)} \vec{u} \cdot dl$$

Dunque, se si accorcia la rotazione , dato che si conserva il momento angolare, il fluido deve necessariamente accelerare la sua rotazione.

2.1 Fluido irrotazionale

In un fluido irrotazionale

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$$

Posso allora scrivere il vettore velocità come $\vec{u} = \nabla\psi$. Se trovo dunque una equazione per la funzione ψ, posso ottenere un fluido irrotazionale. In altre parole, se riesco a definire la funzione ψ che mi permette di costruire un campo $\vec{u}$ tale che il suo rotore sia nullo, allora avrò costruito un campo irrotazionale: ossia un fluido che non ruota. Una condizione che posso usare è che il fluido sia incomprimibile: ossia che la divergenza del vettore $\vec{u}$ sia nulla. Questa è una possibile soluzione:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi) = 0$$

Questo mi costruisce le linee di campo in modo che sia irrotazionale ed incomprimibile. Posso esprimere questo come il Laplaciano quadro di ψ:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\psi) = \partial_x(\partial_x\psi) + \partial_y(\partial_y\psi) + \partial_z(\partial_z\psi) = \partial_x^2\psi + \partial_y^2\psi + \partial_z^2\psi = \nabla^2\psi$$

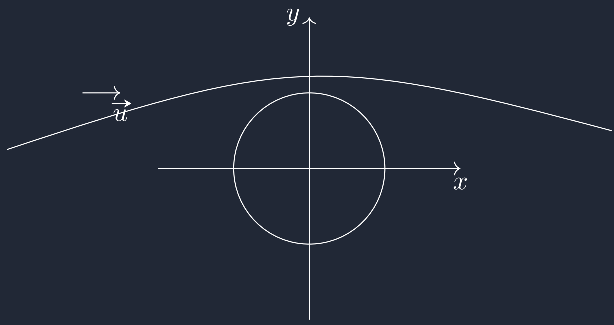
Se è incomprimibile, allora è uguale a zero. Dunque ho definito delle linee di campo incomprimibili e irrotazionali.

3 Fluido che incontra un ostacolo (stazionario, irrotazionale e incomprimibile)

Si hanno le seguenti condizioni per il fluido ideale considerato:

- Il fluido ha una velocità $\vec{u}$ per distanze $d >> r_0$.
- Si vuole che $\vec{u} \cdot \hat{r}|_{r=r_0} = 0$. Se cambiassi oggetto mi cambierebbe la condizione del bordo.

Figura 3:



La soluzione è

$$\psi = u_0 x \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

Dato che $u_x = \partial_x \psi$, allora

$$u_x = \partial_x \psi = u_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{2u_0 x^2 r_0^2}{r^4} = u_0 \left(1 + \frac{(y^2 - x^2) r_0^2}{r^2}\right)$$

Dove r è il modulo della distanza dall'origine del sistema di riferimento cartesiano. Se θ è l'angolo di impatto, si ha che

$$u_x = u_0 \left(1 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)\frac{r_0^2}{r^2}\right)$$
$$u_y = -\frac{2u_0 x y r_0^2}{r^4} = -2u_0 \sin\theta\cos\theta\frac{r_0^2}{r^4}$$

In quel punto $u_y = 0$ così come u_x quando $\theta = \pi$. Dunque quello prende il nome di **punto di stagnazione**: il fluido si ferma, così come nel caso di $\theta = 0$. Per $\theta = \frac{\pi}{2}$ invece, si ha che solo moto orizzontale ma la velocità è due volte quella di partenza del fluido: il fluido dunque accelera quando impatta con la sfera e decelera quando si allontana fino a tornare alla stessa velocità di quella di partenza. Quando si è lontani dall'ostacolo il fluido si accorge sempre meno dell'ostacolo