Appunti Analisi

Tommaso Miliani

30-09-25

1 Spazi Metrici

Sul Marcellini Sbordone è buona, mentre sul Pagani Salsa è trattato brevemente.
Considerato un insieme X, se su questo insieme è definita una applicazione $d : XX \to d$ si dice che è metrica di X se

$$\forall x, y \in X \qquad d(x,y) \geq 0 \iff x = y$$
$$\forall x, y \in X \qquad d(x,y) = d(y,x)$$
$$\forall x, y, z \in X \qquad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Uno spazio metrico è una coppia di valori che mi definiscono una distanza all'interno di un insieme. NOn è necessario che ci sia una struttura algebrica definita per poter valere questa definizione (ossia non deve necessariamente esserci una operazione di somma o prodotto per scalari definita).

Esempio 1.1.
Su $\mathbb{R}$ si può considerare la distanza euclidea:

$$d(x,y) = |x - y|$$

Un altro esempio

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Se l'insieme considerato è uno spazio vettoriale allora è possibile definire una operazione di norma:

$$\forall v \in V ||v|| \geq \iff v = 0$$
$$||\lambda v|| = |\lambda| ||v||, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$$
$$\forall u, v \in V \qquad ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$$

Definizione 1.1.
Si definisce $(V, || \cdot ||)$ come spazio normato.

Esempio 1.2.
Prendendo come spazio vettoriale $\mathbb{R}^N$, posso considerare la norma euclidea:

$$||v|| = \sqrt{\sum v_i^2}$$

Proposizione 1.1.
UNo spazio normato induce una metrica su V.

$$d(u,v) = ||u - v|| \qquad \forall u, v \in V$$

Definizione 1.2.
$(\mathbb{X}, \alpha)$, $(\mathbb{X}, \beta)$ sono due spazi metrici diversi con metrica equivalente: se $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tale che

$$k_1 d_\beta(x,y) \leq d_\alpha(x,y) \leq k_2 d_\beta(x,y)$$

Definizione 1.3.
Uno spazio vettoriale può ammettere più metriche: la norma perα e la norma per β sono norme equivalenti se esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che sono spazi normati

$$v \in V \qquad c_1 ||v||_\beta \leq ||v||_\alpha \leq c_2 ||v||_\beta$$

Esempio 1.3.
Le norme sullo spazio $\mathbb{R}^N$ *con* $x \in \mathbb{R}^N$ *posso definire la norma* p *esima, ossia una estensione della norma euclidea prendendo le potenze* p *esime della norma euclidea e facendone la radice* p *esima:*

$$||x||_p = \sqrt{\sum |x_i|^p}$$

Con i diversi casi

$$||x||_1 = \sum |x_1|$$

Definizione 1.4 (Palle)**.**
Da rivedere, copiare disegno.

$$B_p = \{x \in V : ||x||_p \leq 1\}$$

Nel caso della norma euclidea la palla unitaria è la sfera centrata nell'origine. Nel disegno, quando $0 < p \leq 1$ *le sfere disegnate stanno dentro al cerchio mentre quelle per cui* $p > 1$ *stanno fuori dal cerchio e il quadrato è il caso limite di* $p \to \infty$*.*

Teorema 1.1.
Tutte le norme su $\mathbb{R}^N$ *sono equivalenti. (ossia se la norma è fatta su di uno spazio finito).*

2 Gli spazi metrici infiniti

Esempio 2.1.
Dato l'insieme $X = C^K([a, b])$*.*

$$X = C^K([a, b]) \qquad ||f||_{C^0} = ||f||_\infty = \max |f(x)| \qquad f \in C^0([a, b]) : f[a, b] \to \mathbb{R}$$

In questo caso la definizione che si ottiene da Weirestrass è una buona definizione e dunque la norma che induce

$$d_{C^0}(f, g) = d_\infty(f, g) = ||f - g||_\infty$$
$$d_{L^1}(f, g) = \int_a^b |f - g| \, dx$$

Sono due metriche non equivalenti sullo stesso spazio. La distanza L_1 è la norma dell'integrale del valore assoluto. Sono entrambe indotte da una norma ma non sono equivalenti. Si possono infatti trovare delle successioni che mi permettano di dire che non sono equivalenti. Manca un teorema.

3 Spazio delle funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$

Un intorno di un punto su di uno spazio è diverso dall'intorno di un punto di $\mathbb{R}$ se io considerassi lo spazio di funzioni allora sarebbe ancora più complicato. Dobbiamo allora fare alcuni cenni sulla topologia partendo da uno spazio metrico generico (X, d) e andiamo a definire cosa è uno intorno generico di un punto in uno spazio metrico generico.

Definizione 3.1.
Per $x_0 \in \mathbb{X}, R > 0$ *un intorno aperto di centro* x_0 *di raggio* R *è*

$$B_R = \{x \in X : d(x_0, x) < R\} = U(x_0, R)$$

Si definisce invece un intorno chiuso come

$$B_R = \{x \in X : d(x_0, x) \leq R\}$$

Definizione 3.2.
$\mathbb{A} \leq \mathbb{X}$ *è definito come insieme aperto se* $\forall a \in \mathbb{A}$ *esiste un* R *tale per cui*

$$U(x_0, R) \leq A$$

Definizione 3.3.
$\mathbb{D} \leq \mathbb{X}$ è un insieme chiuso se $X \backslash D$ è aperto.

Teorema 3.1.
SI hanno i seguenti casi a seguito della definizione:

- *L'unione di insieme aperti(anche numerabili) è aperta;*
- *L'intersezione finita di insiemi aperti (anc che numerabili) è aperta;*
- *L'unione finita di insiemi chiusi (anche numerabili) è chiusa;*
- *L'intersezione di insiemi chiusi (anche numerabili) è chiusi*

Definizione 3.4.
$x_0 \in \mathbb{X}$ è un punto interno se $\exists R$ tale che

$$U(x_0, R) \leq \mathbb{X}$$

Teorema 3.2 (Teorema di Heine-Borel)**.**
Se $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^N$ è un insieme compatto allora è anche chiuso e limitato.

4 Le successioni su spazi metrici generali

Definizione 4.1.
Consideriamo una successione $\{x_k\} \leq \mathbb{X}$ è una stringa di numeri che è definita all'interno di uno spazio metrico. La successione converge ad un valore x se il punto limite appartiene a $\mathbb{X}$ e se

$$\lim_{k \to \infty} d(x_k, x) = 0$$

E' una distanza che ha valore in $\mathbb{R}$ e questo limite lo so fare.

Proposizione 4.1.
Se $\exists$ il limite allora è unico.

Proposizione 4.2.
d_α, d_β sono metriche equivalenti su $\mathbb{X}$

$$\{x_k\} \leq \mathbb{X}$$

Allora x_k converge in x rispetto alla metrica d_α così come alla metrica d_β. Questo perché per il teorema visto sulle metriche, posso mettere a panino le metriche di beta e alfa per cui se quella fuori va a zero allora anche quella nel panino va a zero (così come nel teorema dei carabinieri). Per questo su $\mathbb{R}^N$ si considera solo la metrica euclidea.

Definizione 4.2.
Sia $\{x_k\} \leq \mathbb{X}$ una successione di Cauchy in $(\mathbb{X}, d)$ se $\forall \epsilon > 0$ allora esisterà un N tale per cui

$$d(x_k, x_m) < \epsilon \qquad \forall k, m > N$$

Osservazione 4.1.
Sia x_k una successione di Cauchy, allora x_k converge sullo spazio metrico $(\mathbb{X}, d)$ su cui è definita. Non è vero che se x_k converge allora sia necessariamente di Cauchy.

Esempio 4.1.
Preso l'insieme $\mathbb{X} = C^1([a, b])$ con la distanza d la distanza massima

$$x_k = \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}} x \in [0, 1]$$

Preso questo spazio di funzioni definito in questo modo, dobbiamo allora provare che la successione è di Cauchy. Fissato un ϵ cerco un R per determinare una distanza massima:

$$d(x_k, x_m) = \max |x_k - x_m|$$

Ossia

$$\max\left|\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}-\sqrt{x^2+\frac{1}{m}}\right|$$

Allora posso dire che se prendessi k e m grandi allora, fissato ϵ si ha la soluzione:

$$\frac{x^2+\frac{1}{k}-x^2-\frac{1}{m}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{k}}+\sqrt{x^2+\frac{1}{m}}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{m}}<\epsilon$$