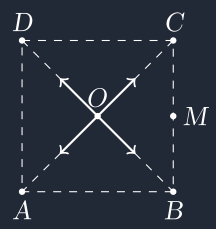
Esercizi di fisica II

Tommaso Miliani

24-02-26

1 Esercizi elettrostatica

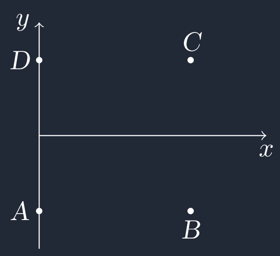
Esempio 1.1 (Esercizio 1 del compito dell'8/01/2007).
Quattro cariche che formano un quadrato di lato $L = 0.12$ m, le cui cariche sono $Q = 10^{-9}$ Coulomb. Calcolare il campo elettrico elettrico nel punto O e nel punto M.



Il campo elettrico nel punto O è ovviamente zero in quanto c'è una simmetria intrinseca del sistema, infatti i campi

$$E_A = -E_C \qquad E_B = -E_D \qquad E_A = E_B = E_C = E_D \implies E(O) = 0$$

Adesso, nel punto M il campo può essere schematizzato secondo il seguente sistema di riferimento:



Così si ottengono i seguenti vettori posizione

$$\overrightarrow{r_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{L}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r_B} = \begin{pmatrix} L \\ -\frac{L}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r_C} = \begin{pmatrix} L \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{r_M} = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque il vettore posizione in M è solo lungo l'asse x per costruzione. Utilizzando il principio di sovrapposizione, si può determinare il campo elettrico nel punto M:

$$\overrightarrow{E}(r_M) = E_A(r_A) + E_B(r_B) + E_C(r_C) + E_D(r_D)$$

Si trova

$$\overrightarrow{E_A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_M}|^2} \frac{\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_A}}{|\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_A}|} \qquad \overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_A} = L\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}$$

Ottenendo

$$\overrightarrow{E_A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(L\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3} \left(L\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}\right)$$

Si calcola ora il campo $\overrightarrow{E_B}$:

$$\overrightarrow{E_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_M}|^2} \frac{\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_B}}{|\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_B}|} \qquad \overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_B} = \frac{L}{2}\hat{y}$$

Dunque

$$\overrightarrow{E_B} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}$$

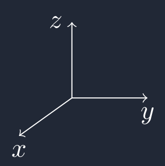
Manca solamente i due campi elettrici in D e C, data la simmetria del problema, le componenti lungo l'asse y saranno uguali in modulo ma con il segno contrario:

$$\overrightarrow{E_C} = -\overrightarrow{E_B} \qquad \overrightarrow{E_D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(L\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3}\left(L\hat{x} - \frac{L}{2}\hat{y}\right)$$

Dunque il campo totale nel punto M sarà data dalla seguente espressione

$$\overrightarrow{E_M} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left(L\sqrt{\frac{5}{4}}\right)^3}(L\hat{x})$$

Prendendo un volume qualsiasi, è possibile applicare il principio di sovrapposizione su una distribuzione di carica continua:

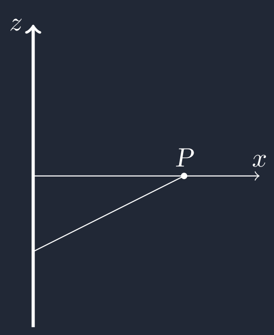


Dunque, per una qualsiasi carica $dq = \rho(r')dx$, dove ρ è la densità di carica del volume. In generale il campo elettrico sarà uguale a

$$\vec{E} = \int_{r'} \frac{dq(r')}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3}(\vec{r} - \vec{r'})\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Dove $\vec{r}$ è un generico punto nello spazio nel quale si vuole determinare il campo elettrico, mentre $\vec{r'}$ è il vettore posizione dell'infinitesimo di carica dq rispetto al sistema di riferimento considerato

Esempio 1.2.
Dato un filo infinito con distribuzione di carica lineare (e uniforme) ρ_l, si vuole determinare il campo elettrico in un punto generico dello spazio.



Per motivi di simmetria, il campo elettrico in ogni punto z è sempre uguale, inoltre, il problema è anche dotato di simmetria cilindrica secondo la quale non si perde la generalità del problema anche quando si ruota il filo. Si considera ora la generica carica alla posizione z nello spazio che genera un campo elettrico rispetto al punto di riferimento P giacente sull'asse x.

$$dq = \rho_l \; dz$$

Data R la distanza del punto P dal filo, si ottiene l'ipotenusa nel disegno come

$$|r| = \frac{R}{\cos\phi} \qquad \phi : \quad z = R\tan\phi$$

Si può ora determinare il campo elettrico

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_z \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E_x &= |E| \cos\phi \\ E_z &= |E| \sin\phi \end{aligned}$$

Dove

$$|E| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \; dz}{\left(\frac{R}{\cos\phi}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \cos^2\phi \; dz}{R^2}$$

Dunque se si volesse determinare il campo lungo z si dovrebbe integrare lungo tutto il filo:

$$E_z^{TOT} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^2\phi(z)}{R^2} \sin\phi(z) \; dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R} \sin\phi \; d\phi = 0$$

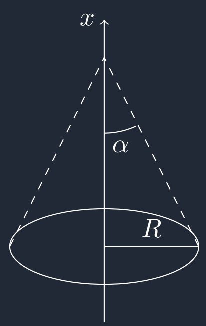
Per trovare la soluzione si esegue un cambio di variabile secondo la definizione di z:

$$z = R \tan\phi \implies dz = \frac{R}{\cos^2\phi} \; d\phi$$

Dunque il campo elettrico totale sul punto P generico sarà solamente lungo l'asse x:

$$E_x^{TOT} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos^3\phi}{R^2} \frac{R}{r\cos^2\phi} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Esempio 1.3 (Campo elettrico generata da una spira circolare)**.**
Si determina il campo elettrico generato da una spira di raggio R



Dato che la spira ha una distribuzione lineare di carica ρ_l, si può osservare che il campo elettrico sarà distribuito solamente lungo l'asse x. A questo punto si può determinare il campo elettrico lungo x:

$$dE_x = \frac{\rho_l dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 + R^2} \cos\alpha$$

Dunque il campo elettrico totale lungo l'asse x sarà dato da

$$E_x^{TOT} = \int_{SPIRA} dE_x = \frac{\rho_l \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0(x^2 + R^2)} \int_{SPIRA} dl = \frac{\rho_l \cos\alpha}{2\epsilon_0} \frac{R}{x^2 + R^2}$$

Per come è costruita la spira, il coseno dell'angolo

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

Con questa sostituzione, ad una generica distanza x dal centro della spira, il campo elettrico è dato dalla seguente espressione:

$$E_x = \frac{\rho_l}{2\epsilon_0} \frac{xR}{(x^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se $x >> R$ va come x^2, avendo un massimo a $\frac{R}{\sqrt{2}}$ ed un minimo a $\frac{-R}{\sqrt{2}}$, con dipendenza lineare tra questi due punti. Inoltre, in zero, come ci si sarebbe aspettati, è zero.