

# Fisica statistica

Tommaso Miliani

06-11-25

## Introduzione alla fisica statistica

### 1 Teoria della probabilità

Nel 1933 Kolmoporov risolve dal punto di vista matematico il dibattito fra i soggettivisti, che dicevano che gli eventi erano in nessun modo determinabili attraverso le probabilità e gli oggettivistici che invece pensavano che la probabilità di un evento era misurabile. Prima di tutto nella probabilità si considerano le **variabili aleatorie**, della quale, in linea di principio, non è possibile conoscerne il valore (non è essenziale la natura dell'oggetto purché le operazioni che si definiscano siano valide).

$$x \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

A ciascuno di questi valori si associa un valore di probabilità  $p_i \in [0, 1]$ . L'insieme di tutti questi valori prende il nome di distribuzione probabilistica:

$$\{p_i\} = \{p_1, \dots, p_n\}$$

Si definisce allora la **condizione di normalizzazione**, per cui la sommatoria di tutte le probabilità deve necessariamente fare 1

$$\sum p_i = 1$$

Una distribuzione è dunque normalizzata (o unitaria) se si verifica questo. Si definisce **valore atteso**, o **valore medio** il valore che si ottiene dalla media pesata di tutte le probabilità:

$$\mathbb{E}(x) = \sum p_i x_i = \langle x \rangle$$

Se ogni possibile risultato ha la stessa probabilità allora, per la condizione di normalizzazione,

$$p_i = \frac{1}{M} \quad \mathbb{E}(x) = \frac{1}{M} \sum x_i = \langle x \rangle$$

Ottenendo dunque la media dei pesi. Si definisce anche la **varianza**

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Chiaramente non si può associare ad ogni valore una probabilità, ma la si associa ad un piccolo intervallo per ogni valore: infatti la probabilità di ottenere un dato risultato è esattamente zero:

$$dp(x_0) = f(x_0) dx$$

Dato che tutte le probabilità devono necessariamente sommarsi ad 1, si ottiene la **funzione di distribuzione di probabilità o densità di probabilità**:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) dx = 1$$

Quindi il valore atteso prende la forma di

$$\mathbb{E}(x) = \langle x \rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} x f(x) dx$$

La probabilità di ottenere un certo valore in un certo range di valori è data da

$$p(a, b) = p(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Per cui, nel caso discreto,

$$p(x_i, x_j) = p(x_i < x < x_j) = \sum_{k=i}^j p_k$$

Se si hanno più variabili che si possono considerare e sono indipendenti tra di loro, è possibile ottenere la funzione di probabilità come la produttoria delle singole probabilità:

$$\prod p_i \implies f(x, y) = f(x)f(y)$$

In generale calcolare la funzione di distribuzione non è semplice, ma c'è un risultato importante dal punto di vista pratico:

$$\langle g(x) \rangle = \int_{x_{min}}^{x_{max}} g(x)f(x) dx \implies \langle g \rangle = \sum g_i p_i \quad g_i = g(x_i)$$

Che prende il nome di **LOTUS**: "Law of the unconscious statistician". Se si considerasse la funzione  $g(x) = y$  in funzione della variabile aleatoria  $x$ , si può ottenere la probabilità come

$$f(y) = \sum f(x) = \int_{y_{min}}^{y_{max}} dx f(x)\delta(g(x) - y)$$

Per cui

$$p_{y_i} = \sum \delta_{g(x), y_i} p_i$$

Dove  $\delta$  è il **Delta di Dirak**, ossia una gaussiana con varianza zero che ha valore 1 se  $\exists x : g(x) - y = 0$ .

## 1.1 La legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

**Enunciato 1.1** (Legge dei grandi numeri).

Supponendo di avere  $n$  variabili  $x_i$  e che siano indipendenti tra di loro e che siano anche identicamente distribuite, ossia la distribuzione di tutte le variabili è la stessa. Si definisce la **media empirica** come la media tutti i valori:

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum x_i$$

La legge ci permette di dire che

$$N \rightarrow \infty \implies \bar{x}_N \rightarrow \langle x \rangle \implies p\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{x}_N = \langle x \rangle\right) = 1$$

Il teorema del limite centrale è più "forte" della legge dei grandi numeri in quanto ci permette di tenere conto della varianza finita delle singole misure (ma non importa che siano distribuite normalmente)

**Enunciato 1.2** (Teorema del limite centrale).

La distribuzione della media empirica  $p(\bar{x}_n)$  è tale che è normale a gaussiana (suppone dunque che la varianza delle singole variabili siano finite) tale per cui

$$x_0 = \langle x \rangle \quad \text{var} = \frac{\sigma^2}{N}$$

Per cui all'aumentare di  $N$ , l'errore che si commette nell'approssimare  $\bar{x}_N$  con  $\langle x \rangle$  diminuisce sempre di più.

La differenza è che la legge dei grandi numeri ha validità generale e non tiene conto della varianza delle singole misure (che può essere anche infinita), mentre il teorema del limite centrale vale solamente se la varianza è un numero finito e il numero di misure è molto grande.

## 2 Teoria cinetica dei gas

Si definisce, mediante la teoria dei gas perfetti e l'utilizzo della statistica il modello della teoria cinetica dei gas per un gas perfetto monoatomico a livello microscopico. Considerando una scatola di gas chiuso, le particelle possono interagire solamente con le pareti del contenitore mediante urto completamente elastico. L'ipotesi di particelle non interagenti è molto forte in quanto ci permette di considerare gas molto rarefatti e in modo tale da poter "rilevare" tutte le interazioni di ogni singola particella. L'inclusione degli urti tra le particelle non modificherà le conclusioni derivate da questa approssimazione (per gas molto diluiti) ma l'ipotesi del non urto tra particelle è FALSA ma necessaria. Dato che il sistema è meccanicamente isolato si sceglie sempre un SdR inerziale in quanto la scatola non si muove.

Ipotizzando dunque che l'energia di interazione tra le particelle sia  $U_{\text{inter}} \equiv 0$  che è funzione delle singole posizioni delle particelle

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) = 0$$

Dunque l'energia meccanica delle particelle è composta solamente dall'energia cinetica delle singole particelle

$$E = \frac{m}{2} \sum |\vec{v}_i|^2$$

Con  $\vec{v}_i = v_{x,i}\hat{i} + v_{y,i}\hat{j} + v_{z,i}\hat{k}$ . Possiamo adesso fare delle ipotesi a propri sullo stato del sistema:

1. La forza di gravità è assente
2. La velocità iniziale delle particelle è costante
3. Le pareti sono ortogonali rispetto agli assi (dunque rispetto ad ogni asse gli angoli sono sempre multipli di  $\frac{\pi}{2}$ ).
4. Le particelle hanno tutte velocità diverse

Adesso, rispetto ad ogni parete, l'urto sarà solamente di natura elastica e dunque la velocità dopo l'urto rispetto alla parete ortogonale all'asse  $x$  è definita come

$$\vec{v}'_i = -v_{x,i}\hat{i} + v_{y,i}\hat{j} + v_{z,i}\hat{k}$$

E dunque, essendo cambiata la velocità, sarà cambiata anche la quantità di moto delle singole particelle:

$$\Delta(m\vec{v}'_i) = m\vec{v}'_i - m\vec{v}_i = -2m|v_{x,i}|\hat{i}$$

Dunque, durante l'urto, sarà agita una forza che ha modificato la quantità di moto della particella. Tale forza sarà definita secondo il teorema dell'impulso per un tempo di impatto  $t < t^* < t'$ .

$$\int_t^{t'} \vec{F}_i dt = \Delta(m\vec{v}'_i) = -2m(v_{x,i})\hat{i}$$

E dunque la forza che imprime la particella alla parete sarà data dal terzo principio della dinamica. Dato che questa è una forza impulsiva, questa non è per niente costante e dunque non so esprimere la pressione del gas in funzione di questa forza, inoltre, le particelle non collidono nel medesimo istante. Una visione microscopica ci dice che è ragionevole considerare la pressione del gas come la forza che imprimono le singole particelle sulle pareti del gas anche se la sommatoria di queste cose non è possibile in quanto la forza di contatto dipende dal tempo. Per risolvere questo dilemma si ipotizza che esista un **tempo caratteristico** molto breve in modo tale che di questi urti ne avvengano talmente tanti che qualsiasi strumento macroscopico rileverà una media temporale.

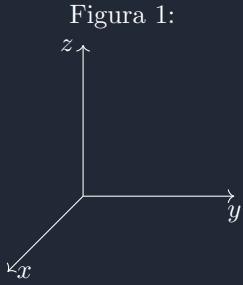


Figura 1:

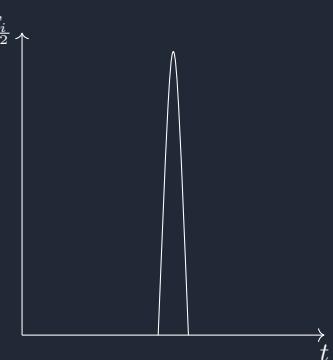


Figura 2: picco delle 500 sigarette

$$\tau \gg \tau_{\text{urto}}$$

Le singole particelle possiedono un moto libero, per cui tutte le componenti sono indipendenti dalle altre: allora si può definire il tempo di urto che intercorre tra gli urti delle singole particelle su una determinata parete:

$$t_u = \frac{L}{|v_{x,i}|}$$

Una particella compie dunque, con una data parete, un numero di urti dato da dal tempo di urto e dal tempo di rilevazione dello strumento:

$$n_u = \left\lfloor \frac{\tau}{2t_u} \right\rfloor \approx \frac{\tau}{t_u} = \frac{\tau}{2L} |v_{x,i}|$$

Allora, impostando nuovamente il teorema dell'impulso per  $n_u$  urti

$$\int_0^\tau F_i dt = 2n_u m |v_{x,i}| = \frac{m\tau}{L} (v_{x,i})^2$$

Posso ottenere la media temporale delle forze di pressione

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau F_i dt = \frac{1}{\tau} 2n_u m |v_{x,i}| = \frac{m}{L} (v_{x,i})^2$$

Posso dunque determinare la pressione dividendo anche per  $L^2$  per ogni particella: Posso allora considerare il contributo per tutte le particelle con la sommatoria

$$p_i = \frac{m}{L^3} (v_{x,i})^2 \implies \sum p_i = p$$

Che è proprio la pressione esercitata di un gas su tutta la scatola di volume  $L^3$ . Dato che non si conoscono le velocità di tutte le particelle (poiché sono molte), posso moltiplicare e dividere per  $N$  e, tramite la statistica (legge dei grandi numeri), si ottiene la media empirica della velocità

$$p = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle$$