GEometria

Tommaso Miliani

19-02-25

1 Il Determinante

Prima di definire il determinate, occorre introdurre alcune definizioni e proprietà:

Definizione 1.1. *Una funzione D qualunque tale che $D : M(n \times n, R) \to K$ si dice multilineare sulle righe se è lineare come funzione di ciascuna riga*

La parola multilineare vuol dire che la matrice deve essere lineare su tutte le righe, si dice anche, se una matrice è $n \times n$, che è lineare n volte. La matrice A la riga $A_j = A'_j$ e per la riga $A_i = \lambda A'_i = \mu A^{"}_i$. La nostra matrice A è costruita in modo tale che tutte sono uguali al di fuori della riga i però nella riga iesima essa è combinazione lineare delle righe delle altre due matrici (come scrtitto sopra) QUindi si ottiene:

$$D(A) = \lambda D(A') + \mu D(A").$$

Esempio: la funzione D delle matrici 2×2 definita nella seguente maniera:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

è multilineare. Le matrici definite come segue:

$$a_{1,1}a_{2,1} + a_{2,2}a_{1,2} = D_1$$
$$a_{1,1}a_{1,2} + a_{2,1}a_{2,2} = D_2$$

La prima matrice è lineare nella prima riga e quindi è anche multilineare. La seconda matrice non è lineare perché nella combinazione lineare se moltiplico la priam riga per λ allora si ottiene λ^2 che rende la combinazione non più lineare quindi non è lineare e nemmeno multilineare.
Questa è la prima proprietà del determinante.

Definizione 1.2. *Una matrice definita da una funzione $D : M(n \times n, R) \to K$ si dice alternante sulle righe se ha 2 righe uguali allora $D(A) = 0$.*

$$D(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} = 0$$

E' alternante sulle righe tranne che sulla riga i, anche se definisco la funzione come:

$$a_{1,1}a_{1,2} - a_{2,1}a_{2,2} = D_3$$

E' alternante, quando le due righe sono uguali allora si annulla. Esercizio: tutte le funzioni $D : M(2\times 2) \to K$ che sono multilineare sulle righe e alternanti sono un multiplo di $D = c(a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}) = 0, c \in K$ la costante più facile è $c = 0$ che soddifa le proprietà ma non è interessante. Esercizio: se una matrice ha una riga nulla allora $D(A) = 0$ e per la proprietà delle funzioni lineari, applicando la multilinearità alla riga nulla, si ottiene proprio $0 \to 0$ il che soddisfa l'alternanza.

Definizione 1.3. *Sia $D(Q_K) \to K$ (VEDERE Q_K sul libo) si dice multilineare sulle righe rispettivamente alternante se $\forall n > 0 \in N$ vale che se D è ristretto alle matrici $n \times n$ è multilineare sulle righe rispettivamente alternativamente.*

Unendo tutte le matrici $n \times n$ e chiamo la multilinearità per un n fissato allora sono anche alternanti sulle righe e viceversa.

Proposizione 1.0.1. *Sia $D : M(n \times n, R) \to K$ multilineare sulle righe e se D è alternante sulle righe e $\hat{A}$ si ottiene A scambiando due righe allora $D(A) = -D(\hat{A})$. Vale anche il viceversa supponendo sul campo che $1 + 1 \neq 0$ che spesso è falso in alcuni campi ma è vero nei campi dei razionali, reali e complessi.*

Dimostrazione. Considero la matrice $\hat{A}$ con le righe scambiate e considero una nuova matrice che alla riga i vale la somma delle due e alla riga j la stessa cosa. Questo vuol dire che la nuova matrice ha due righe che sono esattamente uguali, quindi :

$$0 = D(A') = \text{le combinazioni delle righe (sono 4)}$$

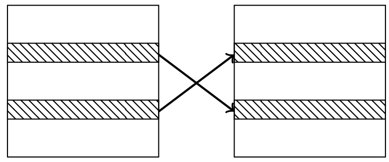
Ossia:

$$D(A) + D(\hat{A}) = 0$$
$$D(A) = -D(\hat{A})$$

□

Focalizzandosi sulla righe i, j della matrice A, allora la matrice $\hat{A}$ è ottenuta scambiando le righe i, j (l'operazione è proprio lo scambio combinatorio). Una qualunque permutazione delle righe si ottiene componendo molte delle righe e naturalmente per ogni permutazione si ottiene una matrice $\hat{A}$ diversa. Cambiando il verso delle righe vuol dire cambiare il verso del parallelogramma generato dalla matrice.

Figura 1: La relazione tra le matrici A e $\hat{A}$



Proposizione 1.0.2. *Sia $D : M(n \times n, K) \to K$ multilineare sulle righe e alternante Se A' si ottiene da A con una operazione elementare di tipo 3 di Gauss sulle righe allora $D(A') = D(A)$. In altre parole questa funzione è invariante per operazioni elementari di tipo 3.*

Dimostrazione. La riga i diA' è la stessa di A ed è invariata e la riga j di A' è sommata a λ volte la riga i di A.

$$D(A') = D(A) + \lambda D(A^{'mod})$$

Il termine più a destra è proprio quella somma di righe per scalare. IN particolare se A' si ottiene da A allora si ha che moltiplicando λ la riga i-esima si ottiene che$D(A') = \lambda D(A)$ □

Definizione 1.4. *La $D : Q_K \to K$ si dice normalizzata se, quando è calcolata su di una matrice identità è uguale ad 1:*

$$D(I_n) = 1, \qquad \forall n > 0 \in N \tag{1}$$

Proposizione 1.0.3. *Sia $D : M(n \times n, K) \to K$ multilineare sulle righe i normalizzate, allora:*

$$D \begin{bmatrix} d_1 \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots d_n \end{bmatrix} = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots d_n \tag{2}$$

Dimostrazione. Si può portare fuori d_1 per la linearità, posso fare lo stesso con la seconda riga ed ottengo sempre:

$$d_1 d_2 \begin{bmatrix} 1 \ldots\ldots \\ \ldots 1 \ldots \\ \ldots\ldots d_n \end{bmatrix}$$

REiternado per n volte si ottiene che la matrice diventa la matrice identità di dimensione n, per cui il processo di nomralizzazione è completo ed è dimsotrato. □

Teorema 1.1 (Unicità del determinante). *Esiste al massimo una funzione $D : M(n \times n, K) \to K$ che sia multilineare sulle righe, alternante sulle righe e normalizzata.*

Dimostrazione. VOglio dimostrare che se D_1 e D_2 soddisfano tutte le proprietà allora $D_1 = D_2$. L'idea è usare gauss e ricondursi ad una forma diagonale:
Presa $A \in M(n \times n, K)$ devo provare che $D_1 = D_2$ e tutte e due soddisfano le proprietà. Si riduce a scalini A con operazioni elementari di tipo I, III con scambi e somma di multipli. SIa A' questa nuova matrice a scalini ottenuta con k scambi e ogni volta che faccio uno scambio D_1 e D_2 cambiano di segno k e ciò che è vero è che:

$$D_1(A) = (-1)^k D_1(A')$$
$$D_2(A) = (-1)^k D_2(A')$$

Una matrice a scalini quadrata è di due tipi: è triangolare superiore con elementi diagonali $\neq 0$ oppure con l'ultima riga nulla (La dimostraszione si divide in due). Se A' ha l'ultima riga nulla allora:

$$0 = D_1(A') = D_2(A')$$
$$0 = D_1(A) = D_2(A)$$

Altrimenti devo applicare Gauss all'indietro con operazioni di terzo tipo ottenendo una forma diagonalizzata e quindi:

$$D_1(A') = D_1(A)$$
$$D_2(A') = D_2(A)$$

□

Teorema 1.2. $\exists!$ *funzione* : $D : Q_K \to K$ *con le stesse proprietà del determinante*

Dimostrazione. Ci si riconduce ad una complessità sempre minore per il determinante, per le matrici $n \times n$ ci si riconduce alle matrici $n-1 \times n-1$ ed il caso di partenza è proprio la matrice 1×1, che è lineare e multilineare, normalizzata e l'laternanza non ha senso.
Scelta una riga qualunque il determinante non cambia ed è sempre quello: scegliendo la riga i e posso fare lo sviluppo del determinante su questa riga:

$$a_{i,1} \dots a_{i,n}$$

Posso creare una matrice con segni alternati a modo di scacchiare, lo sviluppo di LAPLACE consiste nel prendere il coefficiente di ogni riga in modo da togliere la riga e la colonna corrispondente di quel determinato $a_{i,j}$. Si prende il coefficiente col segno e si moltiplica con il determinante $n-1 \times n-1$ corrispondente: Il Determinante di A è:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$$

Funziona qualunque sia la riga i. poiché permette di calcolare ricorsivamente il determinate di ogni matrice continuando ad applicare all'indietro per matrici sempre più semplici (LA DIM NON E' DA FARE) □

Esempio: CAlcolare il determinate di una matrice 2 per 2:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} \ a_{1,2} \\ a_{2,1} \ a_{2,2} \end{bmatrix} \quad quindi \quad \begin{bmatrix} + \text{ -} \\ \text{- } + \end{bmatrix}$$

Con lo sviluppo di LAPLACE si ottiene il determinante di una matrice 1×1 per cui la matrice è normalizzata, lineare e multilineare e quindi esiste un unico determinante calcolabile che è esattamente l'unico elemento della matrice.

Teorema 1.3. *SI può applicare laplace anche alle colonne e non solo alle righe (la dimostrazione è simili a quella per le righe)*

Teorema 1.4.

$$\det(A) = det({}^tA) \tag{3}$$

Calcolare:

$$\begin{bmatrix} 2 \ 0 \text{ -1} \\ 2025 \ 7 \ \pi \\ 3 \ 0 \ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Conviene usare LAPLACE sulla seconda colonna ottenendo:

$$7 \begin{vmatrix} 2 \text{ -1} \\ 3 \ \sqrt{2} \end{vmatrix} = 7(2\sqrt{2} + 3)$$