

# FUNZIONI IN 2 VARIABILI

Noi le tratteremo nel caso di 2 variabili, ma queste nozioni valgono anche per funzioni a più di 2 variabili.

Diamo ora una serie di definizioni topologiche utili:

## Aperto

$A \subseteq \mathbb{R}^2$  è aperto se  $\forall (x_0, y_0) \in A \exists R > 0$  t.c.

$$B_R(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_e < R\} \subseteq A.$$

Noi useremo sempre le palle Euclidee.

## Chiuso

$E \subseteq \mathbb{R}^2$   $\bar{E}$  è il più piccolo chiuso  $\supseteq E$  (chiusura di  $E$ )

$\overset{\circ}{E}$  è il più grande aperto  $\subseteq E$  (interno)

## Dominio

$D$  è un dominio se  $D = \bar{A}$  con  $A$  aperto:

$$D = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$$

## Grafico

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Il grafico di  $f$  è  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\}$

## Linee di livello

$$U_t = \{(x, y) \in D \text{ t.c. } f(x, y) = t\}$$

È esattamente l'equivalente delle curve di livello delle carte geografiche:

## Osservazione

$$\bigcup U_t = D \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

## Osservazione

$$\max \{t: U_t \neq \emptyset\} = \max_{(x,y) \in D} f(x,y)$$

$$\min \{t: U_t \neq \emptyset\} = \min_{(x,y) \in D} f(x,y)$$

## Domino naturale

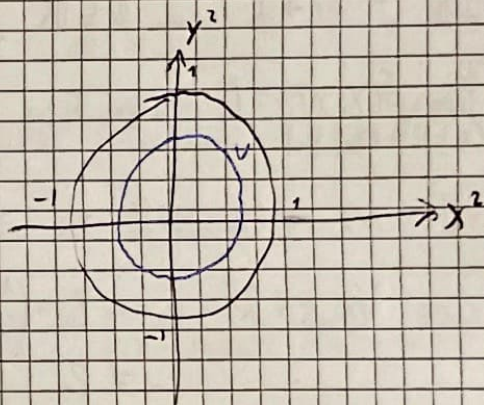
È il maggiore insieme possibile dove ha senso scrivere una funzione:

## Esempio

$$f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$$

- Determinare il dominio naturale.
- Descrivere le linee di livello.
- Trovare min/max in  $A$  con  $A = \{ |x| \leq \frac{1}{2}; |y| \leq \frac{1}{2} \}$

$$A) D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; 1-x^2-y^2 > 0 \} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; \underbrace{x^2+y^2 < 1}_{\text{cerchio}} \}$$



$$B) f(x,y) = t \Leftrightarrow (x,y) \in D$$

$$\ln(1-x^2-y^2) = t \rightarrow e^t = 1-x^2-y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x,y \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2 = 1-e^t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Oss - Se  $t > 0$   $U_t = \emptyset$

- Se  $t = 0$ ;  $U_t = (0,0)$

- Se  $t < 0$   $U_t$  sono circonferenze di centro  $(0,0)$  e raggio  $R = \sqrt{1-e^t}$

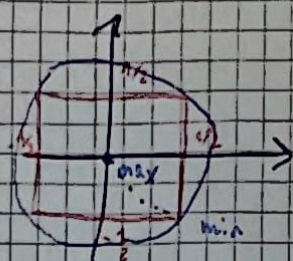
Studio il loro andamento asintotico:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U_t = \mathbb{R}^2$$

c) Per definizione, devo trovare  $\max_{(x,y) \in \mathbb{Q}} f(x,y) = \max \{t: U_t \neq \emptyset\}$

Il nostro nuovo dominio è  $\mathbb{Q}$ .

$\max_{(x,y) \in \mathbb{Q}} f(x,y) = 0$  perché lì ha una linea di livello che forma il mio quadrato, se no.



With  $f(x,y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^t}$   $R_t = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $(x,y) \in \mathbb{Q}$

Ho  $R_t = \sqrt{1 - e^t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 1 - e^t = \frac{1}{2} \quad e^t = \frac{1}{2} \quad t = -\ln(2)$

$\min_{(x,y) \in \mathbb{Q}} f(x,y)$  è assunto in  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \vee (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \vee (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \vee (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

## Limiti di funzioni in due variabili

Sia  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in D$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = L$  significa che

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x,y) - L| \rightarrow 0$$

cioè  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c. se  $(x,y) \in B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$

$$v_n \neq p_0$$

$$f(v_n) = f((v_n)_1, (v_n)_2)$$

$$v_n = ((v_n)_1, (v_n)_2)$$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c. se  $(x,y) \in B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$

## Funzione continua

$(x_0, y_0) \in D$ ,  $f$  continua in  $p_0 = (x_0, y_0)$  se

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c. se  $(x,y) \in B_\delta(x_0, y_0) \setminus \{(x_0, y_0)\} \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

$$\|(x,y) - (x_0, y_0)\| \rightarrow 0 \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| \rightarrow 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

## Teoremi che continuano a valere

- Teorema di Weierstrass.
- Teorema di Cantor.
- Teorema dei valori intermedi.

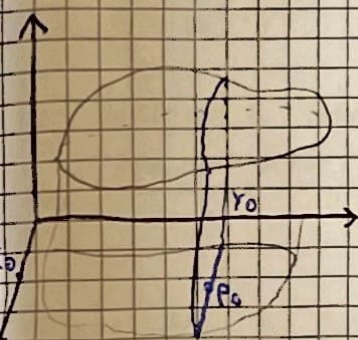
LEZ. 07/10/2025  
PROF. SSA BIANCHINI

## Derivata

Anche il concetto di derivazione si può estendere allo studio delle funzioni a più variabili  $\rightarrow$  È un caso più complicato, perché il punto non è vincolato a muoversi su una traiettoria curvilinea.

Sia  $A$  un aperto:

$$A \subseteq \mathbb{R}^2, f: A \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A, z = f(x, y)$$



Studio la "sezione trasversale" fissando  $y = y_0$ . Ho

$v(x) = f(x, y_0)$  funzione di 1 variabile.

Studio un'altra sezione trasversale fissando  $x = x_0$ . Ho

$w(y) = f(x_0, y)$  funzione di 1 variabile.

Ho 2 funzioni di 1 variabile  $\rightarrow$  Posso calcolare i loro rapporti incrementali:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(y_0 + h) - w(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f_y(x_0, y_0)$$

## Osservazione

Polinomi, esponenziali, logaritmi etc. (in pratica le funzioni elementari) sono derivabili nel loro dominio  $\rightarrow$  Valgono le regole di derivazione e l'algebra delle derivate.

Ricordiamo che lavoriamo negli aperti.

### Esempio

deriviamo  $f(x,y) = x e^{(x^2+y^2)}$  in  $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h e^{h^2} - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0$$

$f$  è derivabile in  $(0,0)$  e  $Df(0,0) = (1,0)$

Cosa succede in  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  generico?

Osservo che  $f$  è composizione e prodotto di funzioni derivabili in  $\mathbb{R}^2$ , quindi posso applicare le regole di derivazione.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \theta + g \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1 \cdot e^{x^2+y^2} + x \cdot 2(x) e^{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}) = e^{(x^2+y^2)} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x e^{(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \theta + g \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 + x \frac{\partial \theta}{\partial y}(e^{x^2+y^2}) = x(2y e^{x^2+y^2})$$

Posso scrivere il gradiente (le due componenti):

$$Df(x,y) = [(1+2x^2)e^{x^2+y^2}; 2xy e^{x^2+y^2}] \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2$$

### Esempio

$\sin(xy)$  → stabile se esistono punti del piano t.c.  $Df(x,y) \neq (1,0)$

Osservo che  $f$  è derivabile  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y \cos(xy) \\ f_y(x,y) = x \cos(xy) \end{cases} \Rightarrow Df(x,y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) \\ x \cos(xy) \end{pmatrix}$$

Cerco  $(x_0, y_0)$  t.c.  $Df \neq (1,0) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$  t.c.

$$Df(x,y) = k(1,0) \Rightarrow \begin{cases} y \cos(xy) = k \\ x \cos(xy) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \cos(xy) = k \\ x=0 \text{ o } \cos(xy)=0 \end{cases}$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, Df(0,y) \neq (1,0)$$

$\uparrow$   
 $\begin{matrix} \text{"} \\ (0,y) \end{matrix}$

### Esempio

$f(x,y) = (x-y)\sqrt{1-x^2}$  è derivabile in  $(1,1)$ ?

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$$

Perché  $\sqrt{1-t^2}$  non è derivabile in  $t=0$ , devo valutare "a mano" la derivabilità con i rapporti incrementali.

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{1-(1+h)^2}}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1,1+k) - f(1,1)}{k} = \frac{-k\sqrt{1+1-k}}{k} = 0$$

$\Rightarrow f$  è derivabile in  $(1,1)$  e  $D(1,1) = (0,0)$ .

### Esempio

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$  è derivabile in  $(0,0)$ ?

Lo faccio a mano:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} \nexists \Rightarrow \nexists Df(0,0)$$

Osservo che in questo caso ho  $f(y,x) = f(x,y)$

### Esempio

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \text{Ho } f(y,x) = f(x,y)$$

$\exists Df(0,0)$ ?

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} &= 0 \quad \text{per simmetria} \end{aligned} \right\} Df(0,0) = (0,0)$$

$f$  è continua in  $(0,0)$ ?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0 \Rightarrow \nexists \rightarrow \text{Non è continua}$$

Ho appena osservato una funzione non continua ma derivabile  $\rightarrow$  In più variabili c'è una differenza fra i concetti di derivabilità e differenziabilità. Infatti, è facilmente osservabile che per la nostra funzione non sarebbe possibile definire il piano tangente.

### Derivate di ordine superiore

Semplicemente, come accadeva nel caso di una variabile, devo derivare la derivata  $\rightarrow$  Poiché ho 2 derivate, devo derivare 2 volte:

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$$

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right)$$

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)$$

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)$$

### Matrice Hessiana

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

### Laplaciano

È la traccia della matrice Hessiana.

### Teorema di Schwarz

Sia  $A$  un aperto,  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0) \in A$ ,  $A \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  volte derivabile volte.

Se  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  sono continue in  $(x_0, y_0)$ , allora  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$ .

Quindi se  $f \in C^2(A)$ , allora  $D^2 f$  è simmetrica.

Osservazione La continuità non può essere omessa.

sempre

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_{yx}(x,y) = \begin{cases} -\frac{y^4x + 4y^2x^3 - x^5}{(x^2 + y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolo le derivate seconde

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4)(x^2 + y^2)^2 - (x^4y + 4x^2y^3 - y^5)2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-\frac{k^5}{k^4} - 0}{k} = -1$$

Ora calcolo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_{xy}(x,y) =$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{(x^2 + y^2) [(x^2 + y^2)(x^4 + 12x^2y^2 - 5y^4) - 4y(x^4y + 4x^2y^3 - y^5)]}{(x^2 + y^2)^4}$$

Ho dimostrato che la funzione non è continua:

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} (f_y(0,0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = +1$$

Le due derivate miste non coincidono in 0 (infatti la funzione non è continua). Il fatto che le derivate miste non sono coincidenti discende dal fatto che la derivata mista stessa non è continua.