Appunti di lab II

Tommaso Miliani

25-02-26

1 Legge di Ohm e calcolo della velocità di deriva

La legge di Gauss in forma locale prende la forma di

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{R}$$

Ossia vale punto per punto nel conduttore. Sia $\vec{J}$ che $\vec{E}$ sono Sia funzione dello spazio che del tempo. Il termine σ_d è chiamato **conducibilità elettrica**. Equivalentemente si può scrivere la legge di Ohm nella seguente maniera

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma_c}\vec{J} = \rho_r \vec{J} \tag{1}$$

dove ρ_r prende il nome di **resistività elettrica**.

Esempio 1.1 (Calcolo della velocità di deriva)**.**
Ponendo di avere una corrente di un ampere che passa attraverso un filo di raggio un millimetro. Dunque la sezione $S = \pi r^2 = \pi\ mm^2$. Dunque la corrente

$$I = 1\ A = nq \cdot v_d \cdot S \implies v_d = 2.5 \cdot 10^{-5}\frac{m}{s}$$

Tramite le relazioni descritte si vuole determinare le leggi di Kirchhoff e le leggi di Ohm. Per poter arrivare alla legge di Ohm si deve introdurre il concetto di potenziale.

1.1 Il potenziale elettrico

La carica in fisica si conserva sempre: sia S una superficie chiusa all'interno della quale vi è una carica $Q(t)$ che varia nel tempo di una quantità $-dQ$. Necessariamente questa deve essere uscita dalla superficie. Questa variazione è espressa dal flusso attraverso questa superficie che ha causato la variazione di carica

$$-dQ = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}\ dt$$

Posso dunque dividere per dt ottenendo la derivata totale

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS}$$

Non si sa come la densità di carica sia distribuita, ma è possibile ricavare

$$Q(t) = \int_V \rho(x, y, z, t)\ dx\ dy\ dz$$

Derivando ora sia a destra che a sinistra, si ottiene

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho(x, y, z, t)}{\partial t}\ dx\ dy\ dz$$

Utilizzando ora il teorema della divergenza, si può uguagliare le espressioni trovate ottenendo la seguente espressione

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\ dV = \int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\ dV$$

È possibile definire questa relazione per qualsiasi volume o superficie, dunque in questa situazione necessariamente gli integranda devono essere equivalenti:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

Ottenendo l'**equazione di continuità**:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

In condizioni stazionarie $\vec{J}$ è solenoidale e dunque la sua divergenza è nulla (poiché la derivata parziale rispetto al tempo è nulla nell'equazione), dunque vuol dire che (usando il teorema di divergenza al contrario):

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{dS} = 0$$

Su una qualsiasi superficie chiusa tanta corrente entra tanta ne deve uscire.

2 Leggi di Kirchhoff

2.1 Prima legge Kirchhoff

La prima legge di Kirchhoff afferma che la somma algebrica delle correnti uscenti da un nodo è nulla:

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{3}$$

Un **nodo** è un punto di incontro tra due o più conduttori nel quale fluiscono un certo numero di correnti. La normale in questione in ogni conduttore è sempre uscente per convenzione.

2.2 Seconda legge di Kirchhoff

In un circuito si definiscono i rami, le maglie e un insieme di maglie prende il nome di **rete**. Un **ramo** è il conduttore che unisce due particolari nodi. Una **maglia** è una successione chiusa di rami. Questa legge è legata alla conservatività del campo: ossia il fatto che e dunque l'integrale su di una linea chiusa del campo è nullo.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{4}$$

3 Il potenziale elettrostatico e la terza legge di Kirchhoff

Il **potenziale elettrostatico** si definisce nella seguente maniera. Il campo elettrico in un dato punto nello spazio è dato dalla seguente

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r}$$

Presa una carica di prova Q che compie un certo percorso lungo la linea γ. Il lavoro del campo elettrico lungo γ è dato dalla seguente

$$L_\gamma = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dl} \qquad \vec{dl} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta\hat{\phi}d\phi$$

Dunque sopravvive solo il primo termine:

$$\int q\vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{r}\ dr = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

Dunque il lavoro su γ è equivalente alla seguente:

$$L_\gamma = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Dunque si vede che c'è una dipendenza dal lavoro di $\frac{1}{r}$. Si definisce il potenziale del campo come

$$\lim_{q\to 0}\frac{U}{q} = \boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \text{const}}$$

Il potenziale è sempre definito a meno di una costante poiché non esiste un potenziale assoluto ma si definiscono le differenze di potenziale. Dunque la differenza di potenziale in questo caso sarà dato dalla seguente espressione

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl}$$

Dunque questo è l'effetto della presenza di un campo nello spazio circostante. Dunque ciò che si misura è sempre l'effetto dell'integrale. Il potenziale ha come unità di misura

$$[V] = \frac{[U]}{[q]} = \frac{J}{C} = V \text{ (Volt)}$$

Dunque su di una linea chiusa si ha che

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$$

Dunque

$$\sum_k \Delta V_k = 0$$

in condizioni stazionarie, ottenendo la **legge delle maglie**, ossia la terza legge di Kirchhoff.

4 La resistenza

Si è gi definita la resistività a livello locale:

$$\vec{E} = \rho_R \cdot \vec{J}$$

che ha dimensioni

$$[\rho_R] = \left[\frac{N}{C}\frac{m^2}{A}\right] = \left[\frac{Jm}{CA}\right] = \left[V\frac{m}{A}\right] = [\Omega\cdot m]$$

La resistività si misura dunque in $\Omega\cdot m$ "Ohm per metro" e cambia radicalmente tra materiale e materiale. Si riportano i valori di resistività di alcuni materiali:

Materiale	Ferro	Rame	Ceramica
Resistività	$10\cdot 10^{-8}$	$1.7\cdot 10^{-8}$	10^{16}

Nella corrente ad alta tensione si potrebbe pensare che la corrente passi solamente nei fli, tuttavia, dato che i fili sono sorretti in qualche modo, e la corrente sceglie sempre il percorso di minor resistenza, anche se il materiale che attacca al nodo è isolante è possibile che possa comunque passare corrente se si riesce a dare una differenza di potenziale grande vicino al traliccio.
I fulmini cadono poiché si è creata una zona di minore resistenza tra la nuvola e il terreno. Generalmente la differenza di potenziale dell'atmosfera è 200 Volt per metro, dunque se la corrente trova un percorso a minor resistenza allora essa passa indisturbata.
Si arriva dunque alla legge di Ohm prendendo un conduttore a sezione costante tra A e B, dunque posso valutare

$$\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{dl} = V_A - V_B = \int_A^B \rho_R\vec{J}\cdot\vec{dl} = \int_A^B \rho_R\frac{\vec{J}S}{S}\hat{n}\cdot dl$$

Si era definita la corrente che passa all'interno della sezione come

$$\vec{J}\cdot S\hat{n} = I$$

che è valida solo a livello locale poiché, così come per i fluidi, la corrente scorre più velocemente al centro della sezione, mentre ai bordi la velocità è nulla. Dunque si esprime la differenza di potenziale come segue:

$$V_A - V_B = I \int_A^B \frac{\rho_R}{S} \, dl$$

Il termine integrato si indica con R ed ha come dimensioni Ω, dunque si ottiene la seguente equazione

$$\Delta V = IR \tag{5}$$

Ottenendo dunque la legge di Ohm. Un oggetto che ha la proprietà di creare resistenza prende il nome di **resistore** e si indica così: