MECCANICA ANALITICA

Appunti

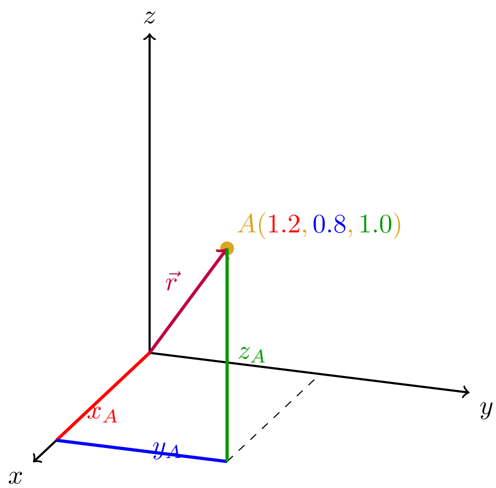
Tommaso Nardi
Prof. Omar Morandi
Università degli Studi di Firenze
2025–2026
Aggiornato al 26 febbraio 2026

Indice

1 Vettori in $\mathbb{R}^3$

Se vogliamo descrivere un punto nello spazio, è necessario definire cos'è lo spazio:

Prendiamo una terna destrorsa di assi cartesiani $\Rightarrow$ Descrivo $\mathbb{R}^3$.



Considero un vettore $\vec{r} = (O - A)$, esso non è altro che una terna di valori ordinati $\vec{r} = (x_A, y_A, z_A)$.

Definisco il **modulo**, o lunghezza, di un vettore come: $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Se $\alpha \in \mathbb{R}$, posso definire $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, e sarà un vettore che giace sulla stessa retta (ha la stessa direzione) di $\vec{v}$, verso come $sgn(\alpha)$ e modulo $|\vec{u}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$.

Farà anche comodo definire un **Versore**, cioè un vettore con modulo unitario, che indicherò con $\hat{u}$.

Esempio 1.1. Se volessi individuare $\hat{v} \parallel \vec{v}$ è sufficiente fare: $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Le operazioni elementari che si possono fare con i vettori sono:

1.1 Prodotto scalare

È una funzione che prende due vettori e restituisce uno scalare.

Presi due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, il prodotto scalare è definito come:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Esso è una mappa con le seguenti proprietà:

- **Simmetria**: $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

- **Linearità**: $\langle \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{v}\rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \beta\langle \vec{w}, \vec{v}\rangle$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

La definizione standard ci dice che:

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. (Non è importante quale dei due angoli si prenda, poiché il coseno è una funzione pari).

Se invece $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, allora:

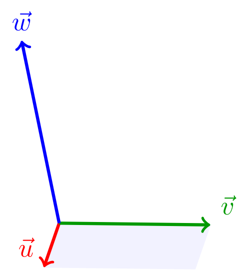
$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

1.2 Prodotto vettoriale

È sempre una mappa bilineare, ma restituisce un vettore invece di uno scalare.

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \mapsto \vec{w}$$



Possiamo ricavare le caratteristiche di $\vec{w}$:

- $|\vec{w}| = |\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori.
- $\vec{w}$ è diretto cme la direzione $\perp$ al piano generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano una terna destrorsa.

Le sue proprietà sono:

- **Anticommutatività**: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ con $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
- **Linearità**: $(\alpha\vec{u} + \beta\vec{w}) \wedge \vec{v} = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) + \beta(\vec{w} \wedge \vec{v})$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$

Geometricamente, il modulo di $\vec{w}$ rappresenta l'area del parallelogramma generato da $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

1.3 Terna euclidea

Per fissare una terna euclidea non conviene definire tre vettori qualsiasi, ma è più comodo definire **tre versori ortonormali**.

Li chiamo $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$, rispettivamente paralleli agli assi x, y e z.

N.B. Talvolta fa comodo fare distinzioni tra:

- **Vettore libero** – Fisso solo la direzione, ma non il punto di applicazione. Es. Velocità angolare.
- **Vettore Applicato** – Fisso un punto di applicazione, oltre alla direzione. Es. Forza peso.

Il termine **ORTONORMALE** significa che i versori sono tra loro ortogonali:

$$\left\langle \hat{\imath}, \hat{\jmath} \right\rangle = \left\langle \hat{\jmath}, \hat{k} \right\rangle = \left\langle \hat{k}, \hat{\imath} \right\rangle = 0$$

e sono normalizzati:

$$\left\langle \hat{\imath}, \hat{\imath} \right\rangle = \left\langle \hat{\jmath}, \hat{\jmath} \right\rangle = \left\langle \hat{k}, \hat{k} \right\rangle = 1$$

Su tali versori è utile studiare il prodotto vettoriale:

$$\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

$$\begin{tikzcd}
& \hat{\mathbf{i}} \arrow[dr] & \\
\hat{\mathbf{k}} \arrow[ur] & & \hat{\mathbf{j}} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Il vantaggio di definirie i versori è che ogni vettore $\vec{v}$ può essere scritto come combinazione lineare dei versori:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} + v_z \hat{k}$$

Data questa notazione, vediamo come posso ricavare le componenti di un vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_x \hat{\imath} + u_y \hat{\jmath} + u_z \hat{k}) \wedge (v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath} + v_z \hat{k}) \\
&= u_x v_x (\hat{\imath} \wedge \hat{\imath}) + u_x v_y (\hat{\imath} \wedge \hat{\jmath}) + u_x v_z (\hat{\imath} \wedge \hat{k}) + u_y v_x (\hat{\jmath} \wedge \hat{\imath}) + \\
&+ u_y v_y (\hat{\jmath} \wedge \hat{\jmath}) + u_y v_z (\hat{\jmath} \wedge \hat{k}) + u_z v_x (\hat{k} \wedge \hat{\imath}) + u_z v_y (\hat{k} \wedge \hat{\jmath}) + u_z v_z (\hat{k} \wedge \hat{k}) \\
&= (u_y v_z - u_z v_y) \hat{\imath} + (u_z v_x - u_x v_z) \hat{\jmath} + (u_x v_y - u_y v_x) \hat{k}
\end{aligned}$$

Un modo più compatto per ricordare questa formula è utilizzare il determinante (nonostante non sia un vero e proprio determinante, ma è solo una notazione mnemonica):

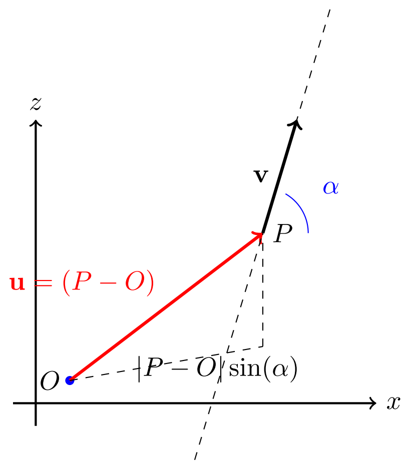
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

1.4 Momento di un vettore rispetto al polo

Dato un punto O detto "polo" e un vettore $\vec{v}$ applicato in un punto P, posso definire il momento di $\vec{v}$ rispetto ad O, come:

$$\vec{M}_O \doteq (P - O) \wedge \vec{v}$$

Dalla definizione di prodotto vettoriale, si deduce che $\vec{M}_O$ è un vetttore allineato con la normale al piano generato da $(P - O)$ e $\vec{v}$, e i tre vettori formano una terna destrorsa.



Il modulo di $\vec{M}_O$ rappresenta l'area del parallelogramma generato da $(P - O)$ e $\vec{v}$, ed è pari a:

$$|\vec{M}_O| = |P - O||\vec{v}| \sin(\alpha)$$

dove α è l'angolo compreso tra i due vettori.

La distanza $d = |P - O| \sin(\alpha)$ è la distanza tra il polo O e la retta su cui è applicato il vettore $\vec{v}$ ed è detta **braccio** del momento.

1.5 Geometria elementare

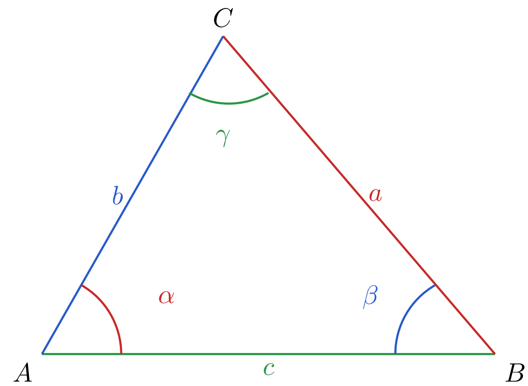


Figura 1: Triangolo generico con i lati a, b e c e gli angoli α, β e γ.

Con riferimento alla Figura (1), possiamo enunciare i seguenti teoremi:

Teorema 1.1 (Teorema di Carnot)**.** In un triangolo con lati a, b e c e angoli opposti α, β e γ, vale la seguente relazione:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Teorema 1.2 (Teorema dei seni)**.** In un triangolo con lati a, b e c e angoli opposti α, β e γ, vale la seguente relazione:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

È utile anche riportare alcuni teoremi della geometria del piano:

Teorema 1.3 (Lunghezza di un arco di circonferenza)**.** La lunghezza s di un arco di circonferenza di raggio r e angolo al centro θ (in radianti) è data da:

$$s = r\theta$$

Si riportano anche le formule di addizione per seno e coseno, che saranno utili in seguito:

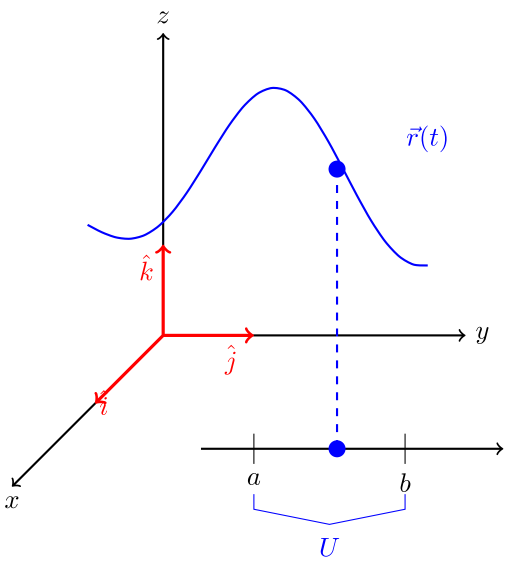
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

2 Curve in $\mathbb{R}^3$

Definizione 2.1 (Curva)**.** Una **curva** in $\mathbb{R}^3$ è definita come un'appliciazione continua da un intervallo aperto $U \subset \mathbb{R}$ nella sua immagine $\mathbb{R}^3$ ovvero, utilizzando le notazioni introdotte nella Sezione 1:

$$\vec{r}(t) : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

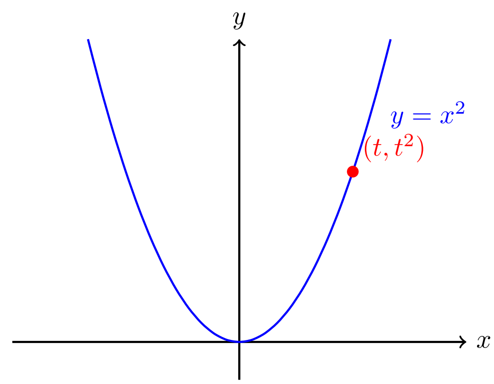


La coppia (t, U) dove t è la variabile $t \in U$ utilizzata per percorrere la curva, è detta **parametrizzazione** della curva. La variabile t è detta **ascissa curvilinea** o parametro d'arco, mentre U è detto **dominio** della curva. L'insieme $\vec{r}(U) \subset \mathbb{R}^3$ è detto **immagine** della curva.

Esempio 2.1 (Parabola)**.** La parabola è una curva che può essere rappresentata da una parametrizzazione del tipo:

$$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$$

con $t \in \mathbb{R}$. In questo caso, il dominio U è l'intero insieme dei numeri reali, e l'immagine della curva è l'insieme dei punti $(t, t^2, 0)$ che formano una parabola nel piano xy.


y
$y = x^2$
(t, t^2)
x