# Analisi II - Funzione implicita

Marco Delton*

A.A. 2025/26

## 1 Funzione implicita

1. Verificare che l'equazione
$$x^2 + 2x + e^y - 2z^3 = 0$$
definisce in un intorno di $Q = (-1, 0, 0)$ una superficie di equazione $y = (x, z)$.
Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie in $Q$

2. Verificare che l'equazione
$$\arctan(z) + xy^2 + xz - y^3 - 1 = 0$$
definisce implicitamente un'unica funzione $z = f(x, y)$ in un intorno del punto $(0, 1)$ tale che $f(0, 1) = 0$.
Di tale funzione calcolare il differenziale primo

3. Verificare che l'equazione
$$\sinh(z - 1) - e^x + e^y + xz - y = 0$$
definisce in un intorno di $(0, 0, 1)$ un'unica funzione $z = z(x, y)$.
Di tale funzione scrivere la formula di Taylor al 2° ordine (con resto di Peano)

4. Verificare che l'equazione
$$e^{x-y} + x^2 - y^2 - e(x + 1) + 1 = 0$$
definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$, con $y(0) = -1$.
Provare che $x = 0$ è un punto di minimo locale per $y(x)$

*esercizi dei prof. *Gabriele Bianchi*, *Chiara Bianchini* e *Luca Bisconti*

5. Sia
$$g(x) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } g(0) = 0, g'(0) = g''(0) = 2$$
Verificare che l'equazione $y^3 + y + \lambda g(x) = 0$ definisce un'unica funzione $y = f(x)$ in un intorno di $(0,0)$, $\forall \lambda \neq 0$.
Scrivere il polinomio di Taylor al 2° ordine di $f(x)$

6. Verificare che l'equazione
$$\sin(xy) + x^2 + y^2 - \cos z = 0$$
definisce in un intorno del punto $P(1,0,0)$ una superficie di equazione $y = g(x,z)$.
Scrivere l'equazione del pianto tangente alla superficie in $P$

7. Provare che le linee di livello della funzione
$$f(x,y) = (x+3)(y-2)$$
definiscono localmente una funzione $y(x)$, soluzione di:
$$\begin{cases} y' = -\frac{y-2}{x+3} \\ y(x_0) \text{ t.c. } (x_0+3)(y_0-2) = c \end{cases}$$

8. Sia $y = f(x)$ l'unica funzione definita da
$$x + \ln(x) - y - \ln(y) - 1 - \ln(2) = 0$$
localmente in un intorno di $P(2,1)$.
Calcolare:
   - $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2}$
   - $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - 1 - \frac{3}{4}(x-2)}{(x-2)^2}$

9. Per $a \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + ax}{x^2}$$
dove $y = f(x)$ è l'unica funzione t.c. $f(0) = 0$ ed è definina localmente da
$$xy^2 + y + \sin(xy) + a(e^x - 1) = 0$$

10. Determinare quante funzioni sono implicitamente definite in un intorno di $x = 0$ dall'equazione

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 - \left(2x^2 + \sqrt{3}y^2\right)^2 + x^2 - 4y^2 = 0$$

Sia $y(x)$ la funzione tra queste t.c. $y(0) = 2$. Calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) - 2\cos x}{x^2}$$

11. Data l'equazione

$$y + \ln(x) - \ln(y) = 0 \tag{1}$$

determinare le coppie $(x_0, y_0)$ che la verificano, e per cui $\exists I$ intorno di $x_0$ e una soluzione $y = \varphi(x)$ di (1), definita su $I$ e di classe $C^1$ t.c. $\varphi(x_0) = y_0$. Verificare che tali soluzioni sono soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x(1-y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

12. Detta $y(x)$ la funzione definita in un intorno di $x = 0$ dall'equazione:

$$e^x \cdot \ln(e + xy) = e^y \cdot \ln(e - xy)$$

calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{y(x) - \sin(y(x))}{x^3 + x^5}$$

13. Determinare i punti di massimo e di minimo relativo delle funzioni $y = y(x)$ definite implicitamente dall'equazione:

$$x^3 - x^2y + y^3 - 8 = 0$$