EDO var. sep. $y' = a(x)b(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)dx$ **EDO immediate** $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$

EDO lineari Per EDO del tipo: $y' + a(x)y = f(x) \Rightarrow$ Prendo $A(x) = \int a(x)dx \Rightarrow$ Moltiplico l'eq. per $e^{A(x)} \Rightarrow$ Ho $e^{A(x)}y' + a(x)e^{A(x)}y = e^{A(x)}f(x) \Rightarrow$
Dalla der. del prodotto ottengo: $\left(ye^{A(x)}\right)' = e^{A(x)}f(x) \Rightarrow$ Procedo a integrare: $y(x)e^{A(x)} = \int e^{A(x)}f(x)dx$

Soluz. generale EDO II ord. Da un'eq. del tipo: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ con a,b e c numeri reali si risolve con il pol. caratt. $a\lambda^2 + b\lambda + c$

Avrò tre casi distinti: $\begin{bmatrix} & \text{BASE} & & \text{SOLUZIONE GENERALE} \\ \text{2 soluzioni reali distinte:}\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow & e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} & \Rightarrow & y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \\ \text{2 soluzioni reali coincidenti:}\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow & e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_2 x} & \Rightarrow & y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 xe^{\lambda_2 x} \\ \text{2 soluzioni complesse:}\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow & e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x) & \Rightarrow & y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{bmatrix}$ es $\times$ var. cost.:

Prendiamo l'eq. : $y'' - 2y + y = \frac{e^x}{x^4}$
omogenea ass. : $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x$
$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)\underbrace{e^x}_{[e^x]'} + c_2'(x)\underbrace{[e^x + xe^x]}_{[xe^x]'} = \frac{e^x}{x^4} \end{cases}$

EDO II° ord. var. costanti Da un'eq. del tipo: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ con a,b e c numeri reali si cerca la sol. omogenea $y_0(x)$ (col metodo prec.) e una sol. particolare $y_p(x)$ della forma $c_1(x)y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Si deve cercare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ per farlo si risolve il sistema: $\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\underline{y_1'(x)} + c_2'(x)\underline{y_2'(x)} = f(x) \end{cases}$ per $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ e si integrano per trovare $c_1(x)$ e $c_2(x)$ infine si calcola al soluz. $y(x) = y_o(x) + y_p(x)$

EDO II° ord. somiglianza
Si usa per eq. del tipo $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = P(x)e^{\Lambda x}\,[\sin(\mathcal{B}x)\ /\ \cos(\mathcal{B}x)]$
Partendo dall'omogenea associata y_0 con il metodo generale si guardano i casi in base alla corrispondenza tra i fattori che escono da questa soluzione e quelli presente nella forma nota generale (a dx dell'uguale dell'eq.) le casistiche sono eguagliate quì a dx.
Dove $\overline{P_1}(x)$ e $\overline{P_2}(x)$ sono dei polinomi generici dello stesso grado di $P(x)$ (che è il polinomio noto a destra dell'uguale dell'equazione) con coefficienti da determinare.
Per determinarli si calcolano $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$ e si sostituiscono nell'equazione differenziale di partenza.
Dopodichè si raccoglie a secondo i termini in $\cos(\mathcal{B}x)$ e $\sin(\mathcal{B}x)$ (se presenti) e si uguaglia i coefficienti a quelli di $f(x)e^{\Lambda x}P(x)$ per trovare i coefficienti dei polinomi.

$$f(x)e^{\Lambda x}P(x) \rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} \neq \Lambda \wedge \beta = 0 \rightarrow y_p(x) = \overline{P}(x)\ e^{\Lambda x} \\ \text{(soluz. distinte) } \lambda_1 = \Lambda \vee \lambda_2 = \Lambda \wedge \beta = 0 \rightarrow y_p(x) = x\ \overline{P}(x)\ e^{\Lambda x} \\ \text{(soluz. coincidenti) } \lambda_1 = \lambda_2 = \Lambda \wedge \beta = 0 \rightarrow y_p(x) = x^2\ \overline{P}(x)\ e^{\Lambda x} \\ \alpha \neq \Lambda \vee \beta \neq \mathcal{B} \rightarrow y_p(x) = e^{\Lambda x}\left[\overline{P_1}(x)\cos(\mathcal{B}x) + \overline{P_2}(x)\sin(\mathcal{B}x)\right] \\ \alpha = \Lambda \wedge \beta = \mathcal{B} \rightarrow y_p(x) = x\ e^{\Lambda x}\left[\overline{P_1}(x)\cos(\mathcal{B}x) + \overline{P_2}(x)\sin(\mathcal{B}x)\right] \end{cases}$$

Equazioni di Eulero: $a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_2 x^2 y'' + a_1 xy' + a_0 y = 0 \Rightarrow u(t) = y\left(e^t\right) \Rightarrow$ Ottengo $-\frac{1}{x^2}u(\ln x) + \frac{1}{x^2}u(\ln x) \Rightarrow$ Si ottiene $a_2 x^2\left(-\frac{1}{x^2}u' - \frac{1}{x^2}u''\right) + a_1 x\left(\frac{1}{x}u'\right) + a_0 u = 0$
(che è EDO di ordine 2)

Spazi metrici (x, d) è spazio metrico $\Leftrightarrow d$ è metrica d è metrica $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} d(x,y) \geq 0 (= 0 \leftrightarrow x = y) \\ d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{bmatrix}$ **Spazi normati** $(V, \|\cdot\|)$ è sp. normato $\Leftrightarrow \|\cdot\|$ è norma $\|\cdot\|$ è norma $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \|v\| \geq 0 (= 0 \leftrightarrow v = 0) \\ \|\lambda \cdot v\| = |\lambda|\ \|v\| \\ \|v + u\| \leq \|u\| + \|v\| \end{bmatrix}$

Limiti in due var. Se si trovano due parametrizz. (es $y = 0$ o $x = y$) che dano risultati diversi $\Rightarrow$ il limite $\nexists$
Per risolverlo si cerca prima una parametrizzazione per cercare un candidato limite ℓ, di solito $y = mx$ (può anche bastare $x = 0$ o $y = 0$)   Si usa poi il teorema del confronto $0 \leq |f(x,y) - \ell| \leq 0$

Si parametrizza con $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ a questo punto si puo procedere con varie tecniche: $\begin{bmatrix} \text{-maggiorare funzioni} \\ \text{-limiti notevoli} \\ \text{-taylor} \\ \text{-disug. triangolare}|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta| \end{bmatrix}$

Derivate direz. Si definisce der. direz. nella direzione $\underline{v} = (v_1, v_2)$ nel punto P_0: $\lim h \rightarrow 0 \frac{f(\underline{v}h - P_0) - f(P_0)}{h}$

Differenziabilità Una funzione è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se $\lim_{(h,k)\rightarrow(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_o + k) - f(x_0, y_0) - < \nabla f(x_0, y_0); (h,k) >}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$

Formula di Taylor $f(x,y) = f(x_0, y_0) + < \nabla f(x_0, y_0); \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} > + \frac{1}{2} < \nabla^2 f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} > + o\left(\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}^2\right)$

Massimi e minimi Data $f(x,y)$ Cercare i punti critici ponendo: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ Ricordarsi delle simmetrie: $\begin{bmatrix} f(x,y) = f(y,x) & f(x,y) = f(x,-y) \\ f(x,y) = f(-x,y) & f(x,y) = f(-x,-y) \end{bmatrix}$ Dopodichè calcolarsi le derivate II per scrivere l'hessiana: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ Guardare il determinante dell'hessiana calcolando le derivate nei punti critici per classificarli: $\begin{cases} D > 0 \wedge tr > 0 \rightarrow \text{minimo locale} \\ D > 0 \wedge tr < 0 \rightarrow \text{massimo locale} \\ D < 0 \rightarrow \text{punto di sella} \end{cases}$ dove $tr = f_{xx} + f_{yy}$ se $det = 0$ si deve provare con delle restrizioni a studiare la funzione localmente

Lagrangiana per 1 vincolo Data $f(x,y)$ funzione e $g(x,y)$ vincolo $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) \Rightarrow$ Cerco $\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$ e trovo i punti critici (solo) sul vincolo (bordo), per classificarli basta calcolarli i più grandi saranno massimi i più piccoli saranno minimi e quelli nel mezzo saranno di sella. Per più vincoli si aggiunge un parametro che moltiplica ogni vincolo alla funzione $\mathcal{L}(x, y, z, \lambda, \ldots)$

Dini caso 2 variabili
Sia $P(x_0, y_0)$ un punto t.c. $F(x_0, y_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, $\exists$ un intorno in cui posso esprimere un'unica $y = f(x)$, e vale: $f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$
Stesso ragionamento speculare vale per x.   Vale inoltre: (sottintesi gli argomenti, che sono tutti (x_0, y_0)) $f''(x_0) = -\frac{(F_{xx} + F_{xy}f')F_y - F_x(F_{xy} + F_{yy}f')}{F_y^2}$

Dini caso 3 variabili
Sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto t.c. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, $\exists$ un intorno in cui posso esprimere un'unica $z = f(x,y)$, e vale: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \end{cases}$
Stesso ragionamento speculare vale per x e y.

CurveUna curva è regolare se è semplice (è implicita), e il vettore velocità(derivato) non si annulla mai. Una curva può anche essere regolare a tratti. Vale lo stesso per le superfici parametriche.

LunghezaSia $\vec{\gamma}$ una curva regolare a tratti. La sua lunghezza $\mathcal{L}$ è: $\mathcal{L}(\vec{\gamma}) = \int_a^b ||\dot{\gamma(\vec{t})}||dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt$

Integrali 1a specie Data $f(x,y)$ funzione e $\gamma(\vec{t})$ curva parametrica, l'area sottesa dal sottografico è: $_\gamma \int f ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt$

Massa di in filo con densità $\rho(x,y,z)$**:** $M_\gamma = \int_\gamma \rho ds = \int_a^b \rho(x(t), y(t), z(t))\,\|\underline{\dot{x}}(t)\|\,dt$ **Centro di massa su un filo materiale:** $\begin{matrix} x_G = \frac{1}{m_\gamma}\int_\gamma \rho x ds = \frac{1}{m_\gamma}\int_a^b \rho(\underline{\varphi}(t))x(t)\left\|\underline{\dot{\varphi}}(t)\right\|dt \\ y_G = \frac{1}{m_\gamma}\int_\gamma \rho y ds = \frac{1}{m_\gamma}\int_a^b \rho(\underline{\varphi}(t))y(t)\left\|\underline{\dot{\varphi}}(t)\right\|dt \\ z_G = \frac{1}{m_\gamma}\int_\gamma \rho z ds = \frac{1}{m_\gamma}\int_a^b \rho(\underline{\varphi}(t))z(t)\left\|\underline{\dot{\varphi}}(t)\right\|dt \end{matrix}$ con centro di massa: $G = (x_G, y_G, z_G)$

Forme differenziali   Sono oggetti del tipo $\omega(x,y) = A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy \Rightarrow$ Se parametrizzo una curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}_{t\in[a,b]}$ posso calcolare $\int_\gamma \omega = \int_a^b A(\varphi_1, \varphi_2)\ \dot{\varphi_1} + B(\varphi_1, \varphi_2)\ \dot{\varphi_2}\ dt$
Se esiste una funzione f differenziabile t.c. $\omega = \nabla f$, allora la forma si dice "esatta" (e f si dice primitiva) $\rightarrow$ In questo caso $\oint_\gamma \omega = 0$ per qualunque curva chiusa.
Se si ha che $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$, allora la forma si dice "chiusa" $\Rightarrow$ Se ω è C^1 ed è chiusa su un dominio sempl. connesso, allora è esatta. Inoltre se ω è C^1 e esatta allora è chiusa.

Campi vettoriali Sono oggetti del tipo $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \\ F_3(x,y,z) \end{pmatrix}$
•Se $\exists f \in C^1$ funzione t.c. $\vec{F} = \nabla f$ il campo si dice "conservativo", e il suo lavoro dal punto B al punto A è esprimibile come: $L = f(B) - f(A)$
dato un campo vett. $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ il suo rotore è $rotF = \nabla \times F = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$ (se $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ allora $F_3 = 0$) e se F è C^1 e conservativo $\overset{\text{allora}}{\Rightarrow}$ $rot(\vec{F}) = 0$ (F è irrotazionale)
•Se $\vec{F}$ è C^1 ed è irrotazionale su un dominio semplicemente connesso, allora è conservativo. Inoltre se F è C^1 ed è conservativo allora è irrotazionale.
Data una curva γ con param. $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \varphi_3(t) \end{pmatrix}_{t\in[a,b]}$ ed un campo $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ Il lavoro di F su γ è $\int_a^b \langle F, \tau \rangle\, ds = \int_a^b F_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cdot \dot{\varphi_1} + F_2(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cdot \dot{\varphi_2} + F_3(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \cdot \dot{\varphi_3}\ dt$

Angoli e valori

°	**rad**	sin	cos	tan
0/360	$0/2\pi$	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	-
120	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180	π	0	-1	0
210	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
225	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
240	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	-
300	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
330	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Identità fondamentali
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$
$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
Posto $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$ $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$
$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

Somma e differenza
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Prostaferesi
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Wener
$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

sinh e cosh
$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Duplicazione, bisezione
$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \sin(\arccos(x))$
$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan(x)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$
$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$
$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$
$\sin(x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
$\cos(x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

prop. potenze$a^\alpha\ a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ $a^\alpha\ b^\alpha = (ab)^\alpha$ **prop. log** $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ **r. pass. per 2 punti**: $y - y_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$

Eq. cerchio/ellisse $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ x_0 e y_0 spostano a destra o su(se positivi), o a sinistra o giù(se negativi) a e b sono i semiassi dell'ellise ripettivamente lungo l'asse x e y
se $a > b$ l'ellisse è "allungata" lungo l'asse x, altrimenti lungo l'asse y se $a = b$ si ha l'eq. di un cerchio.

Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + o(x^n)$ $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$ $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + +o(x^{2n+2})$; $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + o(x^n)$ $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + +o(x^{2n+2})$ $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + o(x^{2n+2})$ $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + +o(x^{2n+2})$ $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + o(x^{2n+1})$ $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$ $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + o(x^n)$ $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^4)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \cdots + o(x^n)$ $\text{arctanh}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Integrale ricorsivo sin e cos

$\int \sin^n(x)dx = -\frac{\cos(x)\sin^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx$

$\int \cos^n(x)dx = -\frac{\sin(x)\cos^{n-1}(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$

limiti notevoli

$\lim_{x\to 0} \frac{\log_\alpha(1+f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\log(\alpha)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+f(x))}{f(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha^{f(x)}-1}{f(x)} = \log(\alpha)$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \left(1 \pm \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$ oppure con il meno $\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(f(x))}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$

scomposizioni e prod. notevoli

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Integrali vari

$\int [f(x)]^s f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{s+1}}{s+1} + c \qquad s \neq -1$

$\int \frac{1}{cos(x)}\ dx = \int \sec(x)\ dx = \ln\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})-\sin(\frac{x}{2})}\right) + c$

moltiplicando per $\tan(x) + \sec(x)$

$\int \sqrt{1+x^2}\ dx = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x)$ sost $x = \sinh(t)$

$\int \frac{1}{(\alpha^2+x^2)}\ dx = \frac{1}{\alpha}\arctan(\frac{x}{\alpha}) + c$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\ dx = -\cot(x) + c$

Derivate varie

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcsinh(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(arccosh(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

es. fratti semplici

$\int \frac{5x+2}{(x+2)^2(x+3)}dx \to \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+3}$

$\int \frac{3x}{x^3-1}\ dx = \int \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} \Rightarrow \frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{C}{(x-1)}$

Integrali doppi

●Ricondurre il dominio ad una forma x-semplice o y-semplice.

●Eventualmente, fare un cambio di variabili, riscrivendo il dominio (adattando le condizioni):

$\begin{cases} x = g(u,v) \\ y = h(u,v) \end{cases} \Longrightarrow \iint_\Omega f(x,y)\ dx\ dy = \iint_{\Omega'} f[g(u,v), h(u,v)]\ \left|\det(J_T)\right|\ du\ dv$ dove: $J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{pmatrix}$

●Eventualmente, passare in coordinate polari centrate in (x_0, y_0) (utile per cerchi e ellissi):

Data un'espressione in forma $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ $\begin{cases} x - x_0 = a\ \rho\cos(\theta) \\ y - y_0 = b\ \rho\sin(\theta) \end{cases} \Longrightarrow dx\ dy = ab\ \rho\ d\rho\ d\theta$

Integrali tripli

●Ricondurre il dominio ad una forma x-semplice, y-semplice o z-semplice.

●Eventualmente, fare un cambio di variabili, riscrivendo il dominio (adattando le condizioni). Vale la formula per gli integrali doppi, con: $J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial s} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial s} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial t}{\partial s} \end{pmatrix}$

●Eventualmente, passare in coordinate cilindriche (rispetto all'asse z o ad una sua parallela). Oppure, passare in coordinate sferiche centrate in (x_0, y_0, z_0):

$\begin{cases} x - x_0 = \rho\ \cos(\theta) \\ y - y_0 = \rho\ \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow dx\ dy\ dz = \rho\ d\rho\ d\theta\ dz$ $\begin{cases} x - x_0 = \rho\ \sin(\varphi)\ \cos(\theta) \\ y - y_0 = \rho\ \sin(\varphi)\ \sin(\theta) \\ z - z_0 = \rho\ \cos(\varphi) \end{cases}$ con $\begin{matrix} \varphi \in [0,\pi] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix} \Longrightarrow dx\ dy\ dz = \rho^2\ \sin(\varphi)\ d\rho\ d\theta\ d\varphi$

●Eventualmente, integrare per fili (ottenendo un integrale doppio) $\to$ Sia $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Oppure, integrare per fette (ottenendo un integrale doppio) $\to$ Sia $P = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$: int. per fili: $\iiint_P f\ dx\ dy\ dz = \iint_{[a,b]\times[c,d]} \left(\int_e^f f\ dz\right)\ dx\ dy$ int. per fette: $\iiint_P f\ dx\ dy\ dz = \int_e^f \left(\iint_{P(z)} f\ dx\ dy\right)\ dz$

Superfici

Data una superficie $\vec{\varphi}(u,v)$, scrivo le sue derivate parziali $\varphi_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $\varphi_v = (x_v, y_v, z_v)$.

●Il vettore normale è $\varphi_u \wedge \varphi_v$

●La sua norma è $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$

●Il versore normale è $\vec{N} = \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$

●Per ottenere il piano tangente impongo $\det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 0$

Applicazioni fisiche

Valgono per integrali di linea, doppi, tripli e di superficie.

Dato un corpo che occupa una regione di spazio Ω, densità ρ e distanza δ da un asse scelto:

●L'area è $\int_\Omega 1\ dx\ dy\ dz$

●La massa è $m = \int_\Omega \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$

●Il centro di massa (B_x, B_y, B_z) è: $\begin{cases} B_x = \frac{1}{m}\int_\Omega x \cdot \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\ B_y = \frac{1}{m}\int_\Omega y \cdot \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \\ B_z = \frac{1}{m}\int_\Omega z \cdot \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz \end{cases}$

●Il momento di inerzia rispetto ad un generico asse τ è $M_\tau = \int_\Omega \delta_\tau^2(x,y,z)\ \rho(x,y,z)\ dx\ dy\ dz$ e δ_τ è la distanza da τ

Integrali di superficie Data una superficie $\Sigma(x,y) = \begin{pmatrix} S_1(x,y) \\ S_2(x,y) \\ S_3(x,y) \end{pmatrix}$ definita su un dominio piano $\mathbb{D}$, avente vettore normale $\vec{N}(x,y,z)$, e una funzione $f(x,y,z)$ definita su Σ, definisco l'int. superficiale come: $\int_\Sigma f(x,y,z)\ ds = \iint_{\mathbb{D}} f(\ S_1(x,y), S_2(x,y), S_3(x,y)\ )\ \|\vec{N}\|\ dx\ dy$

●Definisco il flusso del campo $\vec{F}$ attraverso la superficie Σ: $\int_\Sigma \langle \vec{F}; \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\rangle\ ds = \iint_{\mathbb{D}} \left\langle \vec{F}; \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right\rangle \left\|\vec{N}\right\| dx\ dy$

●Definisco la circuitazione del campo $\vec{F}$ lungo la curva chiusa $\vec{\gamma}$ come il lavoro compiuto da $\vec{F}$ su quella curva

●Per calcolare il vettore normale $\vec{N}$ ad una superficie $\vec{\varphi}(u,v)$ calcolo le der. parziali rispetto a u e v e ne calcolo il prodotto vettoriale $\vec{\varphi_u} \times \vec{\varphi_v}$:

Data $\vec{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u,v) \\ \varphi_2(u,v) \\ \varphi_3(u,v) \end{pmatrix}$ calcolo $\vec{\varphi_u}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_{1u}(u,v) \\ \varphi_{2u}(u,v) \\ \varphi_{3u}(u,v) \end{pmatrix}$ e $\vec{\varphi_v}(u,v) = \begin{pmatrix} \varphi_{1v}(u,v) \\ \varphi_{2v}(u,v) \\ \varphi_{3v}(u,v) \end{pmatrix}$ e poi $\vec{N} = \det\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \varphi_{1u} & \varphi_{2u} & \varphi_{3u} \\ \varphi_{1v} & \varphi_{2v} & \varphi_{3v} \end{pmatrix}$

●Se la superficie è parametrizzata in forma $z = f(x,y)$, con z definita su $A \subseteq \mathbb{R}^2$ la scrivo come $\vec{\varphi}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}_{(x,y)\in A}$, e in questo caso vale $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\|\ \vec{N}\ \| = \sqrt{1 + \|\ \nabla f\ \|^2}$

Sup. di rotazione Data una funzione $y = f(x)$ scrivibile come una curva "piana" $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}_{t\in[a,b]}$ dove una di solito una scorre su un valore e l'altra scrivibile come funzione di questo valore, la superficie di rotazione ottenuta ruotando γ (ad esempio) attorno all'asse x è: $S(u,\theta) = \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u)\cos(\theta) \\ y(u)\sin(\theta) \end{pmatrix}_{\substack{u\,\in\,[a,b] \\ \theta\,\in\,[0,2\pi]}}$. Dove $x(u)$ e $y(u)$ rimangono uguali a $x(t)$ e $y(t)$

Formula di Gauss-Green Dato un campo piano $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$, e sia $\mathbb{D}$ un insieme piano t.c. $\vec{F} \in C^1(\mathbb{D})$, e sia $\vec{T}$ un vettore tangente a $\partial^+\mathbb{D}$ allora $\iint_{\mathbb{D}} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\ dx\ dy = \int_{\partial^+\mathbb{D}} P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = \int_{\partial^+\mathbb{D}} \left\langle \vec{F}; \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}\right\rangle\ dS$

Teorema di Stokes Dato un campo $\vec{F}$ definito su una superficie Σ con bordo $\partial^+\Sigma$, e sia $\vec{T}$ un vettore tangente a $\partial^+\Sigma$, allora: $\int_\Sigma \left\langle \text{rot}(\vec{F}); \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right\rangle\ d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} \left\langle \vec{F}; \frac{\vec{T}}{\|\vec{T}\|}\right\rangle\ dS$

Teorema della divergenza

Dato un campo $\vec{F}(x,y,z)$ definito su un dominio $\mathbb{D}$ su $\mathbb{R}^3$, il cui bordo è la superficie $\partial^+\mathbb{D}$, e sia $\vec{N}$ un vettore normale uscente da Σ: $\iiint_{\mathbb{D}} \text{div}(\vec{F})\ dx\ dy\ dz = \int_{\partial^+\mathbb{D}} \left\langle \vec{F}; \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}\right\rangle\ d\sigma$

dove, dato un campo $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$ la sua divergenza è $\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

Serie di funzioni Definisco $S_n(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x) = f_0(x) + f_2(x) + \cdots + f_k(x)$ serie <u>finita</u>, e $S(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x)$ serie <u>infinita</u>. Per sapere se $f_n(x) \overset{\text{punt.}}{\to} f(x)$ si vede per quali x la serie $\sum f_n(x)$ converge a quale $f(x)$, quindi si fa: $\lim_{n\to+\infty} |S_n(x) - S(x)| = 0$ Per sapere se $f_n(x) \overset{ass.}{\to} f(x)$ si fa $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = f(x)$ Per sapere se $f_n(x) \overset{\text{unif.}}{\to} f(x)$ si fa: $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)|$ con I int. di convergenza Per sapere se $f_n(x) \overset{\text{tot.}}{\to} f(x)$ si cerca una maggiorazione con una succ. a_n: $|f_n(x)| \leq a_n \forall x \in I$ (int. di conv.) e $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge

Trucchi utili per serie Per studiare la conv uniforme è utile:

guardare la funzione a cui conv. la serie (se non va a 0 non conv. unif.)

usare il th (derivata): Se $f_n(x) \overset{\text{unif.}}{\to} f(x) \in E \subseteq \mathbb{R}$ e $f_n(x) \in C^k(E) \forall n$(definitivi) allora $f(x) \in C^k$

usare il th. (integrale): Se $f_n(x) \in C^0(I)$ e $f_n(x) \overset{unif.}{\to} f(x) \in I$ allora: $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$

Serie potenze

Sono serie nella forma $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ sia R il raggio di convergenza, con $R = \frac{1}{l}$

dove $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Criteri di convergenza per serie numeriche

Serie geometriche:
$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}, se\ |q| < 1$ (quindi converge)
Serie armoniche:
$\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ Converge se $p > 1$, diverge se $p \leq 1$.

Criterio del confronto:
Prese $0 \leq a_n \leq b_n$
Se $\sum_{n=1}^\infty b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty$
Se $\sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty b_n = +\infty$

Criterio della radice:
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \Rightarrow$
$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty$
$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty$

Criterio del rapporto:
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow$
$l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty$
$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty$

Criterio di Leibniz per serie alternate:
Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n$decresce$\Rightarrow$
$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n(a_n) = l$ converge

Criterio del confronto asintotico:
$a_n \geq 0, b_n > 0 \Rightarrow$
$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), L \neq 0. \Rightarrow$
$\sum_{n=1}^\infty a_n$ e $\sum_{n=1}^\infty b_n$ hanno lo stesso carattere

Criterio degli infinitesimi:
Se $\lim_{n\to+\infty} n^p a_n = l$
$l \neq +\infty, p > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n < +\infty$
$l \neq 0, p \leq 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n = +\infty$

Criterio degli integrali:
L'integrale improprio di una funzione continua e decrescente e la sua serie associata hanno lo stesso carattere.