Appunti Anal

Tommaso Miliani

23-10-25

1 Curve parametriche

Definizione 1.1.
Si considera la curva

$$\underline{r}(k) : I \to \mathbb{R}^3 \qquad I = [a, b]$$

E dunque

$$\underline{r}(k) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad x, y, z : I \to \mathbb{R}$$

Dove γ *è il sostegno di* $\underline{r}$ *per cui* $\gamma = \underline{r}(I)$.

Definizione 1.2 (Oreientazione)**.**
L'orientazione è il verso di percorrenza del sostegno.

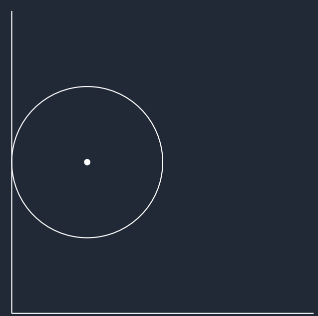
Definizione 1.3 (Iniettività)**.**
Una curva $\underline{r}(t)$ *semplice se non ha autointersezioni (ossia non si interseca con sé stessa)* $\underline{r}(t)$ *è iniettiva.*

Definizione 1.4 (Semplice e chiusa)**.**
Una curva $\underline{r}$ *è semplice e chiusa se* $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$.

Esempio 1.1.
La circonferenza piana

$$\underline{x}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta + x_0 \\ R\sin\theta + y_0 \end{pmatrix}$$

Dato il centro della circonferenza $C = (x_0, y_0)$ *e* $R > 0$:



Dato che la curva è semplice ed è chiusa (agli estremi si chiude).

Definizione 1.5 (Regolarità)**.**
Si dice che una curva è regolare se è semplice e le sue componenti sono derivabili e

$$|\dot{\underline{r}}(t)| \neq 0 \quad \forall t \in \mathring{I} \tag{1}$$

Dunque posso dire che

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b) \tag{2}$$

Definizione 1.6.
Una curva si dice regolare a tratti se

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} r_1(t) & t \in [a, t_1] \\ \vdots \\ r_k(t) & t \in [t_k, b] \end{cases}$$

Con $\underline{r}_i$ curve regolari

Definizione 1.7 (Retta di sostengo)**.**

Definizione 1.8 (Versore tangente)**.**

Definizione 1.9 (Derivate della curva)**.**
- *$\underline{r}(t)$: è la traiettoria;*
- *$\dot{\underline{r}}(t)$: è la velocità;*
- *$\ddot{\underline{r}}(t)$: è l'accelerazione.*

Definizione 1.10.
Due parametri

$$\underline{\phi}[a, b] \to \mathbb{R}^2 \quad \underline{\psi}[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$$

Sono equivalenti se e solo se

$$\exists g : I \to J \quad g \in C^1 : g'(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathring{I} : \underline{\phi}(t) = \underline{\psi}(g(t)) \quad \forall t \in I \tag{3}$$

Osservazione 1.1.
Se $\underline{\psi}$ e $\underline{\phi}$ sono equivalenti allora

Definizione 1.11 (Lunghezza di una curva)**.**