Analisi I

Tommaso Miliani

2024/2025

Indice

Prefazione

Premesse

Questo libro contiene tutti i sunti e gli appunti capitoli di Analisi I durante il primo anno di laurea in fisica ed astrofisica presso UNIFI realizzati seguendo il libro di Analisi Uno scritto da Paolo Marcellini e Carlo Sbordone. La struttura di questo libro è impostata secondo un preciso ordine che riflette quello del testo che ho seguito.

Capitolo 1

Numeri e funzioni reali

1.1 Premessa

Come postulato si assume l'esistenza di un *insieme di numeri reali* che si indica con $\Re$ su cui sia possible eseguire le quattro operazioni fondamentali (+, -, $\cdot$, /).

$$a + b = b + a \tag{1.1}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.2}$$

1.2 Assiomi dei numeri reali

Questi sono gli **assiomi relativi alle operazioni**.

Definizione 1.1. *Proprietà associativa.*

Definizione 1.2. *Proprietà commutativa.*

Definizione 1.3. *Proprietà distributiva.*

Definizione 1.4. *Esistenza degli elementi neutri: 0, 1* $\Rightarrow a + 0 = a$ *e* $a \cdot 1 = a$.

Definizione 1.5. *Esistenza degli opposti:* $\forall a \in \Re, \exists a_1 \in \Re$ *scritto come* $-a$ *tale che* $a + (-a) = 0$.

Definizione 1.6. *Esistenza degli inversi:* $\forall a \in \Re$*, con* $a \neq 0, \exists a_1 \in \Re$*, indicato come* a^{-1} *tale che* $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Di seguito sono elencati gli **assiomi relativi all'ordinamento**. E' definita la relazione tra *minore* o *uguale* tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

Definizione 1.7. *Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali* a, b *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$.

Definizione 1.8. *Proprietà asimmetrica: se valgono contemperaneamente le relazioni* $a \leq b$ $b \leq a$ *allora* $a = b$.

Definizione 1.9. *Se* $a \leq b$ *allora vale anche* $a + c \leq b + c$.

Definizione 1.10. *Se* $0 \leq a$ *e* $0 \leq b$ *allora valgono anche* $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$

Assioma di completezza
Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano $a \in A$ e $b \in B$. Allor esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.

1.3 Alcune consueguenze degli assiomi dei numeri reali

Elencate tutte le proprietà dei numeri reali, che vengono assunte come assiomi, tutte le altre proprietà dei numeri reali discendono da questi assiomi.

Teorema 1.1. *Vale la regola della semplificazione della somma: se* $a + b = a + c$*, allora* $b = c$*. Dimostrabile attraverso l'utilizzo degli assiomi dell'esistenza degli elementi neutri e degli opposti.*

Teorema 1.2. *Vale la semplificazione rispetto al prodotto: se* $a \cdot b = a \cdot c$ *e se* $a \neq 0$*, allora* $b = c$*.*

Teorema 1.3. *Il prodotto* $a \cdot b$ *è nullo se e soltanto se almeno uno dei due fattori è nullo. Per l'assioma degli elementi neutri lo zero è l'elemento neutro rispetto alla somma cioè* $a + 0 = 0\ \forall a \in \Re$*. Ricordando anche che* $a \cdot 1 = a$*, allora*

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0.$$

$$a + a \cdot 0 = a + 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Supponendo ora che $a \cdot b = 0$ *se* $a = 0$ *la tesi è raggiunta, altrimenti esiste un'inverso di* a *che chiamiamo* a^{-1}*.*

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Il (1.3) spiega perché non è possible la divisione per zero. Infatti, dal momento che a^{-1} *esiste solo se* $a \neq 0$*, se* $a = 0$ *allora* $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ *per ogni numero reale* b *e perciò non esiste un numero reale* 0^{-1} *tale per cui* $0 \cdot 0^{-1} = 1$

Teorema 1.4. *L'opposto di un numero reale è unico.*
In base all'assioma (1.5) $\forall a \in \Re \exists$ *l'opposto di* a *indicato come* a^{-1}*, tale che* $a + (-a) = 0$*. Se supponiamo che* $a + b = 0$ *allora per il teorema(1.1) si ha* $-a = b$*. Quindi l'opposto è unico.*

Teorema 1.5. *L'inverso di un numero reale non nullo è unico.*
Dimostrazione identica a quella del(1.4).

Teorema 1.6. $\forall a \in \Re$ *vale* $-(-a) = a$*.*
Il numero $-(-a)$ *è per def. l'opposto di* $-a$ *cioè* $a = -(-a)$ *per la (1.4).*

Teorema 1.7. $\forall a, b \in \Re$ *risulta che* $(-a) \cdot b = -a \cdot b$*.*
Per la proprietà distributiva si ha che:

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

Per cui $(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$*. Ossia* $(-a) \cdot b = -a \cdot b$*.*

Teorema 1.8. $\forall a, b \in \Re$ *risulta che* $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$*.*
La dimostrazione fa uso della consueguenza della 1.7 e dell'assioma 1.2, seguendo poi la 1.6.

Gli assiomi del paragrafo 2 si riferiscono alla $\leq$ ma è possibile estendere le loro definizioni al $\geq$. Infatti:

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a.$$

Infine minore e maggiore stretto sono definite come:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b, a \neq b;$$

$$a > b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b.$$

Teorema 1.9. *La relazione* $a \leq b$ *è equivalente a* $b - a \geq 0$*.*
Questo si dimostra con l'assioma 1.9: se $a \leq b$ *per l'assioma 1.9 si ha:*

$$a - b \leq b - b = 0.$$

Viceversa se $b - a \geq 0$ *sempre per l'assioma 1.9 e per l'associativa si ha:*

$$a = 0 + a \leq (b - a) + a = b + ((-a) + a) = b.$$

Teorema 1.10. *Proprietà transitiva dell'ordinamento: se* $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *allora* $a \leq c$*.*
Supponendo che $a \leq b$ *e* $b \leq c$ *per la precedente* $0 \leq b - a$*,* $0 \leq c - b$*. Dall'assioma 1.10 si ottiene che*

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = c - a.$$

che equivale per il teorema 1.9 ad $a \leq c$*.*

Teorema 1.11. *Risulta $a \geq 0$ se e soltanto se $-a \leq 0$.*
Per l'assioma 1.9 se $0 \leq a$ allora

$$0 + (-a) \leq a + (-a),$$

cioè se $-a \leq 0$. Viceversa se $-a \leq 0$ allora $a + (-a) \leq a$.

Teorema 1.12. *Se $a \leq b$ e $c \geq 0$ allora $a \cdot c \geq b \cdot c$.*
Se $a \leq b$ allora per il teorema 3.9 anche $0 \leq b - a$ da cui per l'assioma 1.10 e per la distributiva si ha:

$$0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c,$$

cioè $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Teorema 1.13. *Se $a \leq b$ e $c \leq c$ allora $a \cdot c \geq b \cdot c$.*
Stessa dimostrazione di quella sopra.

Riprendendo l'assioma di completezza 1.11, la formulazione più immediata è quella dell'*assioma di Dedekind.* Per cui: $\forall A, B \subset \Re \exists! c$ *tale che* $a \leq c \leq b, \forall a \in A$ *e* $\forall b \in B$. (Equivalente all'assioma 1.11).

1.4 Cenni alla teoria degli insiemi

Appartiene: $x \in S$.
Non appartiene: $x \notin S$.
Sottoinsieme: $A \subset S$.
Se A e B sono due sottoinsiemi di S, l'intersezione è gli elementi comuni ai due in S.

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}. \tag{1.3}$$

L'unione è l'insieme di elementi che appartengono almeno ad A o B in S.

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}. \tag{1.4}$$

A è contenuto in B se ogni elemento di A appartiene a B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B). \tag{1.5}$$

Il compelmento di B rispetto ad A $(A - B)$ è l'insieme di elementi di A che $\neq$ B.

$$A - B = \{x \in S : x \in A \wedge x \notin B\}. \tag{1.6}$$

Il complementare di B rispetto ad A (se A = S) si indica come B^c e si ha che

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c. \tag{1.7}$$

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di S si indica come P(S) e si chiama *insieme delle parti di S.*
Siano A e B due insiemi. Si chiama *prodotto cartesiano* di A e di B e si indica come $A \times B$ l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con la prima coordinata appartenente ad A e la seconda appartenente a B.

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a', b = b' \tag{1.8}$$

Nel caso in cui A = B, $A \times B$ è una relazione binaria. Una relazione binaria $\Re$ si chiama *relazione di equivalenza*, se ha le seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $\forall a \in A$ si ha $(a, a) \in \Re$,
2. *simmetrica*: $(a, b) \in \Re \Rightarrow (b, a) \in \Re$,
3. *transitiva*: $(a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re \Rightarrow (a, c) \in \Re$.

Se $(a, b) \in \Re$ si scrive $a \sim b$ e si dice che a e b sono equivalenti o in relazione.
Indicando con [a] la *classe di equivalenza* di $a \in A$, cioè l'insieme degli elementi appartenenti equivalenti ad a, due classi possono coincidere o essere prive di elementi comuni. L'insieme delle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* e si indica come $A/\Re$ ossia:

$$A/\Re = \{[a] : a \in A\}. \tag{1.9}$$

Una relazione binaria in $\Re$ su A si chiama *relazione d'ordine* se gode delle seguenti proprietà:

1. *riflessiva*
2. *transitiva*
3. *asimmetrica*: se $(a,b) \in \Re \wedge (b,a) \in \Re \Rightarrow a = b$.

1.5 Accenno agli insiemi numerici

Qui di seguito sono elencati gli insiemi numerici senza alcun tipo di proprietà, le quali verranno esaminate nel prossimo capitolo.

- *Numeri naturali*: **N**,
- *Numeri interi*: **Z**,
- *Numeri razionali*: **Q**,
- *Numeri reali*: **R**,
- *Numeri complessi*: **C**.

Risulta in particolare che:

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq \Re \subseteq C. \tag{1.10}$$

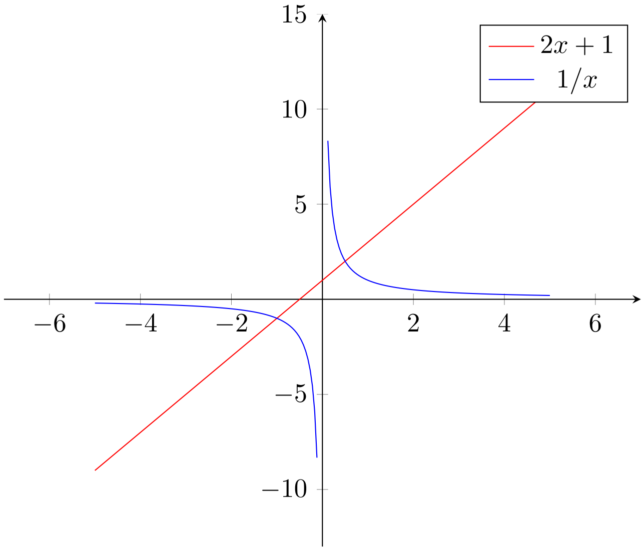
1.6 Funzioni e rappresentazione cartesiana

Siano A e B due insiemi numerici reali. Una *funzione* di A in B è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.
Il *dominio* o *insieme di definizione* di f è A, mentre *l'immagine* è B; ecco alcuni esempi:

$$f(x) = 2x + 1, \tag{1.11}$$

$$f(x) = 1/x. \tag{1.12}$$

Le coppie di punti individuate da $(x, f(x))$ costituiscono il grafico della funzione. Ecco un esempio



delle funzioni sopra:

1.7 Funzioni invertibili e monotòne

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se elementi distinti hanno immagini distinte ossia:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{1.13}$$

Una funzione è poi *suriettiva* se $\forall y \in B \exists x \in A$ tale che $y = f(x)$. Una funzione che è sia iniettiva che suriettiva si dice *biunivoca*.
In quel caso la funzione si dice invertibile.

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A;$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B.$$

La funzione inversa di

$$2x + 1 \tag{1.14}$$

è:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}. \tag{1.15}$$

Una funzione è invece *monotòna* in un insieme A se verifica:

1. f *strettamente crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
2. f *crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) <= f(x_2)$,
3. f *strettamente decrescente*: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
4. f *decrescente*: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) >= f(x_2)$.

Sia f: A $\rightarrow$ B una funziona da A verso B. Se X è un sottoinsieme di A, l'immagine di X mediante f, indicata come f(X), è il sottoinsieme di B definito da:

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X : y = f(x)\} \tag{1.16}$$

L'immagine di A mediante f è il codominio di f. quindi

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}. \tag{1.17}$$

Una funzione può anche essere *composta* mediante due funzioni.
Prendendo tre insiemi X, Y, Z e g : X $\rightarrow$ Y e f: Y $\rightarrow$ Z, in modo che il codominio di g sia il dominio di f, si può definire la funzione h : X $\rightarrow$ Z , definita come $h(x) = f(g(x))$ per $x \in X$.

$$h = f \circ g = f(g(x)). \tag{1.18}$$

1.8 Funzioni lineari e valore assoluto

Una *funzione lineare* è una funzione del tipo:

$$y = mx + q \tag{1.19}$$

Le funzioni lineari hanno le seguenti caratteristiche:

1. m e q sono numeri reali fissati,
2. sono strettamente monotòne su $\Re$,
3. se m = 0, la funzione f(x) = q, non è biunivoca poiché è una retta orizzontale.

Il *valore assoluto* (0 *modulo*) di x è definito come:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

e gode delle seguenti proprietà:

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \Re$;
2. $|x| = 0, \Leftrightarrow x = 0$;
3. $|-x| = |x|, \forall x \in \Re$;

4. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \forall x \in \Re$;
5. $|x_1/x_2| = |x_1|/|x_2|, \forall x \in \Re$.

Inoltre, $\forall r \geq 0 \in \Re$, valgono:

1. $|x| \leq r \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r$;
2. $|x| < r \Leftrightarrow \quad -r < x < r$.

Sono entrambi dimostrabili partendo dalla definizione di valore assoluto.
La proprietà seguente, chiamata *disuguaglianza triangolare*, se x_1 e x_2 sono concordi allora la relazione è uguale, mentre se sono discordi è sicuramente minore:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|. \tag{1.21}$$

$\forall x \in \Re$ la relazione $|x| \leq |x|$ è ovvia, se utilizziamo x = r al secondo membro, e ponendo $x_1 = x = x_2$, otteniamo:

$$-|x_1| \leq x_1 \leq x_1, \quad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|,$$

sommando membro a membro si ottiene:

$$-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq (|x_1| + |x_2|).$$

per cui con $r = |x_1| + |x_2|$ è dimostrata.

1.9 Funzioni potenza, esponenziali e logaritmi

La funzione potenza è definita come:

$$f(x) = x^n, \quad n \in N, \wedge \forall x \in \Re. \tag{1.22}$$

La funzione inversa è la *radice n-sima* e si indica con:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad (x \geq 0). \tag{1.23}$$

Si può anche definire l'elevazione dad esponente razionale: $(m, n \in N, x \in \Re, x > 0)$:

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}. \tag{1.24}$$

Tramite l'assioma di completezza è possibile definire l'elevazione ad un numero irrazionale. Proprietà delle potenze:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}; \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$;
2. $a^b > 0$;
3. $a < b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad a^c < b^c$;
4. $a < b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad a^c > b^c$;
5. $a > 1, b < c \quad \Rightarrow \quad a^b < a^c$;
6. $a < 1, b < c \quad \Rightarrow \quad a^b > a^c$.

La *funzione esponenziale* è definita come $f(x) = a^x$ con $a, x \in \Re$. La funzione inversa della funzione esponenziale è chiamta funzione logaritmo e si scrive come $f(x) = \log_a x$.

$$y = log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x. \tag{1.25}$$

Un aproprietà importante degli esponenziali e dei logaritmi è la seguente:

$$a^{log_a x} = x. \tag{1.26}$$

Alcune proprietà dei logaritmi:

1. $log_a x_1 \cdot x_2 = log_a x_1 + log_a x_2$;
2. $log_a x_1/x_2 = log_a x_1 - log_a x_2$;
3. $log_a x^b = b \cdot log_a x$;
4. $log_b x = log_a x + log_a b$.

1.10 Funzioni trigonometriche

Posto che si conosca già le funzioni trigonometriche, questa sezione è scritta partendo dal presupposto di fare un ripasso veloce. Equazione fondamentale:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in \Re. \tag{1.27}$$

Addizione:

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_2 \cdot \cos x_1. \tag{1.28}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_1 \cdot \sin x_2. \tag{1.29}$$

Ponendo $x_1 = x_2 0x$ si ottiene le formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x. \tag{1.30}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{1.31}$$

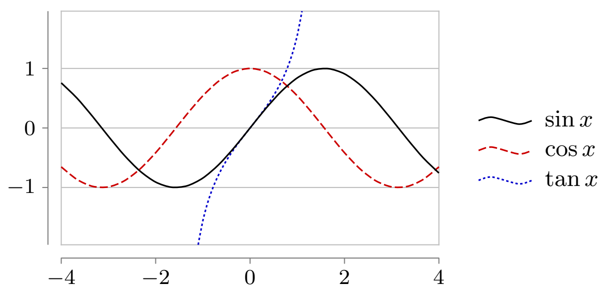
La tangente è definita come:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{1.32}$$

Di seguito una tabella riassuntiva dei valori seno, coseno e tangente più comuni:

x *radianti*	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x *gradi*	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

Una rappresentazione grafica delle funzioni trigonometriche:



1.11 Principio di induzione

Si può dimostrare attraverso il principio di induzione che:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n, \quad \forall n \in N.$$

Supponendo che valga solo per n = 1, che è vera, si ottiene che:

$$x_1^{n+1} = x_1 \cdot x_1^n \leq x_2 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_2^n = x_2^{n+1}.$$

Dal momento che la relazione vale per n = 1, e vediamo che vale anche per n +1, allora questa vale sempre poicheé prendendo n = 2 (per cui abbiamo dimostrato che vale), questa varrà anche per n = 3 e così via.

Proposizione 1.13.1. *PRINCIPIO DI INDUZIONE: Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice $n \in N$ sia ver aper $n = 1$ e che inoltre, supposta vera per n, sia vera anche per il succesivo $n + 1$. Allora la proposzione è vera $\forall n \in N$.*

E' dimostrabile per induzione pure la formula dei numeri naturali:

$$1 + 2 + 3 + +(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prendendo n = 1, questa dà l'identità 1 = 1. Quindi prendendo n + 1, otteniamo un'altra identità. E' possible dimostrare pure la diseguaglianza di bernoulli con il principio di induzione.

Proposizione 1.13.2. *DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI:* $\forall r \in \Re x \geq 1$ *e* $\forall n \in N$*:*

$$(1+x)^n \geq \ +nx.$$

Per n = 1 la proposizione è vera, moltiplicando ora entrambi i membri per 1 + x:

$$\begin{gathered}(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)\cdot(1+x) = \\ = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)\cdot x.\end{gathered}$$

Ottenuta ora la proposizione con n + 1, per il principio di induzione, la 1.13.2 è verificata.

Capitolo 2

Complementi ai numeri reali

2.1 Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A, se esiste, è un numero M dell'insieme di A che è maggiore o uguale ad ogni elemento di A.

$$M = max(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ M \in A. \end{cases}$$

Analogamente il *minimo* di A è un numero m minore o uguale di tutti gli elementi di A:

$$m = min(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \leq a, \forall a \in A; \\ m \in A. \end{cases}$$

Non tutti gli insiemi hanno tuttavia un massimo ed un minimo. (Se A è l'iniseme di tutti i numeri reali positivi, non ha un minimo poiché 0 non è compreso e non ha un massimo).
Un numero reale L si dice *maggiorante* se $L \leq a, \forall a \in A$.
Analogamente un numero reale l è un *minorante* se $l \leq a, \forall a \in A$
I maggioranti ed i minoranti non sempre esistono per un insieme. In generale esistono se A è limitato.

$$A\ limitato \Longleftrightarrow \exists\ l, L \in \Re : l \leq a \leq L, \forall a \in A. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1. *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo M tale che;*

$$|a| \leq M \qquad \forall a \in A.$$

Per la proprietà del valore assoluto si ottiene:

$$-M \leq a \leq M, \qquad \forall a \in A.$$

In conclusione la 2.1 vale se $l = -M$ e $L = M$.
Viceversa se vale la 2.1, allora valgono anche queste qui sopra con $M = max\,\{|l|,\,|L|\}$:

$$-M \leq -|l| \leq l \leq a \leq L \leq |L| \leq M. \quad \forall a \in A.$$

TEOREMA DELL'ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE:

Teorema 2.2. *Sia A un insieme di numeri reali nno vuoto e limitato superiormente. Diciamo che $M in \Re$ è l'estremo superiore di A se M il minimo dei maggioranti di A. Dimostrazione:*
Supponiamo che A sia un insieme non buoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.
Indicando con B l'insieme dei maggioranti di A, applicando l'assioma di completezza, si ottiene che esiste un numero M tale che:

$$a \leq M \leq b, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

M è quindi un maggiorante e l'elemento minimo di B e l'ipotesi è dimostrata.

Quindi possiamo dire che ogni numero più piccolo di M non è un maggiorante:

$$M \;=\; sup\ A \quad \Longleftrightarrow quad \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : M - \epsilon < a. \end{cases} \tag{2.2}$$

Analogamente è dimostrabile che se A è limitato inferiormente, allora esiste un massimo dei minoranti di A:

$$m \;=\; inf\ A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \geq a, \forall a \in A; \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : m + \epsilon < a. \end{cases} \tag{2.3}$$

Se un'insieme non è limitato sia inferiormente che superiormente allora si esprime come:

$$sup\ A = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall L, \exists a, \in A : a > L.$$
$$inf\ A = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall l, \exists a, \in A : a < l.$$
$$A = (-\infty; +\infty). \tag{2.4}$$

2.2 Numeri periodici e intervalli

I numeri periodici hanno una loro *frazione generatrice*: che ha per numeratore il numero così come è meno la parte non periodica e al denominatore tanti nove quante le cifre periodiche e tanti zeri quanti numeri decimali non periodici.

$$2,2\bar{3} = \frac{223 - 22}{90} = \frac{201}{90} = \frac{67}{30}.$$

La notazione ad intervalli è utile per espremere insiemi:

$$(a, b) = \{x \in \Re : a < x < b\}; \quad Intervallo\ aperto;$$
$$[a, b] = \{x \in \Re : a \leq x \leq b\} \quad Intervallo\ chiuso.$$

Se x_0 appartiene ad un intervallo aperto diremo che quell'intervallo è un intorno di x_0.

2.3 Calcolo combinatorio

Sia A un insieme costituito da n elementi:

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

Sia $k \in N : k \leq n$. Una disposizione di k elementi tra gli n dati è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi; consideriamo distinte due disposizioni se differiscono per gli elementi o per solo l'ordine di tali elementi.

Teorema 2.3. *Il numero delle disposizioni di k elementi tra gli elementi dati è:*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \;=\; n!; \tag{2.5}$$

cioè il prodotto di k numeri interi decrescenti a partire da n. E' possibile infatti scegliere il primo elemento n, mentre il secondo deve essere scelto tra gli n-1 rimasti. Se k = 2, il numero delle disposizioni è n(n - 1) e così via.

Questo genere di disposizioni tra gli n dati si chiama *permutazioni* degli n elementi. Il numero di disposizioni tra k elementi tra n dati si può anche scrivere come:

$$n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Una *combinazione* di k elementi tra n dati è un sottoinsieme di k elementi non ordinato; consideriamo uguali due combinazioni che hanno gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine.

Teorema 2.4. *Il numero delle combinazioni di k elementi tra n dati è:*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{2.6}$$

Dalla 2.6 segue l'identità:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}, \quad \forall n \in N, \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}. \tag{2.7}$$

2.4 Binomio di Newton

Un'importante applicaizone delle disposizioni e delle combinazioni è LA FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON:

Teorema 2.5. *$\forall a, b \in \Re$ vale:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \quad (2.8)$$

Proposizione 2.5.1. *$\forall n, k \in N$ vale:*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \quad (2.9)$$

Dimostrabile dalla definizione.

Dimostrazione della 2.5:
Supponendo vera l'equazione per un determinato n, procediamo a dimostrarla per induzione: Prendendo ora n + 1, ossia moltiplicando entrambi i membri per (a + b), tutti gli esponenti saranno aumentati di uno, quindi i coefficienti dei numeri a e b diventano del tipo:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Che, per la proposizione 2.5.1 diventano

$$\binom{n+1}{k}.$$

Dimostrando così la 2.5.

2.5 Numeri complessi

Consideriamo una generica equazione di secondo grado nell'incognita z:

$$az^2 + bz + c = 0. \quad (2.10)$$

che ha soluzioni reali se $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$\left.\begin{array}{c} z_2 \\ \\ z_1 \end{array}\right\} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2.11)$$

I coefficienti a, b, c sono legati alle soluzioni z_1, z_2. Nel caso dell'equazione:

$$z^2 + 1 = 0. \quad (2.12)$$

otteniamo:

$$z_1 + z_2 = 0 \qquad z_1 \cdot z_2 = 1. \quad (2.13)$$

Nell'ambito dei numeri reali, queste due equazioni non hanno senso.
E' necessario quindi estendere $\Re$ introducendo il campo C dei complessi. Le soluzioni della 2.12 sono:

$$z = \pm\sqrt{-1}. \quad (2.14)$$

Si definisce dunque il numero complesso $i = \sqrt{-1}$. Per definizione risulta che

$$i^2 = -1.$$

L'insieme dei numeri complessi è definito come:

$$C = \{z = x + iy : \quad x, y \in \Re\}. \quad (2.15)$$

Il complesso $\bar{z} = x - iy$ si chiama *complesso coniugato* di $\bar{z} = x + iy$ e risulta:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Un numero complesso si può anche rappresentare sul piano cartesiano ed è individuato dalla sua distanza ρ dal centro O e dall'angolo θ che il segmento OP forma con l'asse delle ascisse. Dal teorema di pitagora si ha che:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{2.16}$$

mentre θ è legato alle formule:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}; \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho}. \tag{2.17}$$

Un complesso in *forma trigonometrica* diventa:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{2.18}$$

La potenza di un numero complesso in forma trigonometrica con $n \in N$ sarà:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Un complesso z' è la n-esima radice di z se risulta $(z')^n = z$.

$$\rho' = \sqrt[n]{\rho}; \qquad \theta' = (\theta + 2kn)/n, k \in Z. \tag{2.19}$$

Un numero complesso è esprimibile anche atteaverso la notazione esponenziale: posto che

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},$$

un complesso in forma trigonometrica si esprime come:

$$z = \rho e^{i\theta}. \tag{2.20}$$

2.6 Proprietà degli insiemi numerici

Nell'insieme $\Re$ dei numeri reali, dall'elemento 1 è possibile determinare gli elementi distanti 1. Questi elementi costituiscono l'insieme $N = 1, 2, \ldots$ dei numeri naturali e gode delle seguenti proprietà:

1. $1 < 2 < 3 < \ldots;$
2. Ogni parte non vuota di N + dotata di un minimo;
3. Ogni parte non vuota di N, superiormente limitata è dotata di un massimo;

Teorema 2.6. *PROPRIETA' DI ARCHIMEDE – $\forall x \in \Re\ \exists\ n \in N : n > x$.*

Dimostrazione:
Se la proprietà di Archimede fosse falsa, allora $\Re$ sarebbe un'insieme limitato superiormente e per l'assioma di completezza sarebbe dotato di un estremo superiore. Quindi $\forall n \in \Re \Rightarrow n \leq M$. Poiché per definizione anche $n+1$ è un numero naturale, risulterebbe che $n \leq M - 1\ \forall n \in N$; il che sarebbe assurdo in quanto M è un maggiorante di N e quindi dovrebbe essere maggiore di qualsiasi n. Di conseguenza, per induzione, si dimostra che la proprietà di Archimede è verificata e che N non è limitato superiormente.
Si ricava dunque che Q, ossia l'insieme dei razionali, è *denso in* $\Re$.

Teorema 2.7. *DENSITA' DEI NUMERI RAZIONALI – L'insieme Q dei numeri razionali è denso in $\Re$.*

Dimostrazione:
Si deve provare che $\forall a, b \in \Re \mid a < b,\ \exists\ x \in Q : a < x < b$. Preso $a > 0$, sia $n \in N : n > 1/(b-a) \Rightarrow nb - na > 1$. Detto m il più piccolo naturale tale che $na < m \Rightarrow m - 1 \leq na < m\ \wedge\ na < m = (m-1) + 1 \leq na + 1 < na + (nb - na) = nb$. Da $na < m < nb$ il teorema è dimostrato. Basterà ripetere la dimostrazione con $a < 0$ (con $a < 0 < b$ è ovvio) e $b \leq 0$.

Teorema 2.8. *PRINCIPIO DI INDUZIONE – Supponendo che una proposzione P_n dipendente da un indice $n \in N$ sia vera per $n = 1$ e che, inoltre, supposta vera per $n = k$ sia vera anche per $n = k + 1$. Allora P_n è vera $\forall n \in N$.*

Dimstrazione:
Considerato l'insieme

$$X = \{n \in N : P_n \ falsa\}.$$

Se X fosse non vuoto, esso avrebbe un minimo m = min X maggiore di 1, perché $1 \notin X$. Poichè $m - 1 \notin X, P_{m-1}$ è vera. Allora per le ipotesi del principio di induzione, anche P_m è vera, il che è assurdo perché $m \in X$.

2.7 Insiemi infiniti

Due insiemi di numeri reali A e B si dicono *equipotenti* se esiste una corrisponenza biunivoca tra di loro. Un insimeme $A \subset \Re$ si dice finito se $\exists n \in N : A$ è equipotente all'insieme $\{1, \ldots, n\}$. Un'insieme è inoltre numerabile se è equipotente ad N, ossia se esiste una successione di numeri reali a due a due distinti il cui codominio coincide con A.

Teorema 2.9. *CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI FINITI – Un'insieme A è infinito se e solo se è equipotente ad una sua parte propria.*

Dimostrazione:
poiché un'insieme finito non può essere equipotente ad una sua parte impropria, per dimostrare il teorema basta dimostrare come un insieme infinito sia equipotente ad una sua parte propria. Sia A infinito e sia la successione: $a_n : N \to A$ una successione di elementi di A a due a due distinti, ossia una funzione iniettiva da N verso A, il cui codominio è indicato con B.
Posto C = A - B, si ha che $A = \cup B \cup C$ e $B \cap C = \emptyset$. Sia ora un insime $A' | A' = (B - \{a_1\}) \cup C$. La funzione $f : A \to A'$ sarà:

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1} & se\ x = a_n \\ x & se\ x \in C \end{cases} \tag{2.21}$$

è una corrisponenza biunivoca tra A e la sua parte propria A'.
Proviamo ora il seguente:

Teorema 2.10. *Il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B numerabili è numerabile.*

Dimostrazione:
Siano (a_n e b_n) corrisponenze biunivoche tra N e A e tra N e B. Seguendo un procedimento di tipo diagonale, ossia costruendo la successione che a 1 associa (a_1, b_1), a 2 associa (a_1, b_2), a tre associa (a_2, b_1) e così via, si giunge ad una corrisponenza biunivoca tra N e $A \times B$.
Segue quindi che l'insieme Q dei razionali è numerabile poiché ogni numero razionale positivo è individuato da una coppia (m, n) di numeri naturali primi fra loro e l'unione di due insiemi numerabili è numerabile.

Teorema 2.11. *L'intervallo $[0, 1]$ è un insieme infinito non numerabile.*

Dimostrazione:
Sia, per assurdo, (x_n) una successione iniettiva e suriettiva da N verso l'intervallo $[0, 1]$. Sia $[a, b]$, con $a < b$, un intervallo $\in [0, 1] | x \notin [a, b]$. Sia $[a_1, b_1] \subset [a, b] : a_1 < b_1 | x_1 \notin [a_1, b_1]$ e così via. L'intersezionedi tutti questi intervalli, non contenendo alcun elemento della successione x_n, il cui insieme di elementi per ipotesi coincide con $[0, 1]$, è necessariamente vuota. Ma ciò è assurdo perché posto: $M = sup_n a_n$ si ha $a_n \leq M \leq b_n \forall n \in N$.
Si può infine dimostrare che ogni intervallo aperto di $\Re$ e $\Re$ stesso sono equipotenti all'intervallo di partenza. Questi inisemi hanno la "potenza del continuo".

2.8 Funzionme esponenziale su R

La funzione esponenziale su Q è definita come segue:

$$f \ : \ x \in Q \to a^x \in \Re^+ \tag{2.22}$$

Per definirla in questo modo, bisogna dimostrare il seguente:

Teorema 2.12. *LEMMA DI DENSITA – il codominio $f(Q)$ della funzione f è denso in $\Re^+$.*

Dimostrazione:
Verifichiamo che $\forall \alpha, \beta : \alpha < \beta,\ \exists\ y \in Q | \alpha < a^y < \beta$. Nel caso $a > 1, 1 \leq \alpha < \beta$, in quanto gli altri si trattano analogamente. Sia $n \in N | (\beta/\alpha)^n > a$ e sia m il massimo intero tale che $a^m \leq \alpha^n$. Si ha quindi:

$$\alpha^n < a^{m+1} < \beta^n,$$

in quanto risulta che $\beta^n > a \cdot \alpha^n \geq a \cdot a^m$. Si ricava:

$$a^x = sup_{y<x}\ a^y \qquad a > 1$$
$$a^x = sup_{y>x}\ a^y \quad 0 < a < 1$$

Quindi si può definire l'esponenziale $\forall x \in \Re$ nel modo seguente:

$$a^x = sup\{a^y : y \in Q, y < x\} \quad a > 1$$
$$a^x = sup\{a^y : y \in Q, y > x\} \quad 0 < a < 1$$

Quindi sussite il seguente:

Teorema 2.13. *Per $a > 1$ l'esponenziale è strettamente crescente mentre per $0 < a < 1$ è strettamente decresente di $\Re$ su $\Re^+$.*

Dimostrazione:
Proviamo che $a > 1$, la funzione esponenziale di base a è crecente. Siano $x_1 < x_2$ e siano $y_1, y_2 \in Q | x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ per cui segue:

$$a^{x_1} \leq a^{y_1} < a^{y_2} \leq a^{x_2}$$

Per provare la suriettività, fissato z ¿ 0,

$$A = \{y \in Q : a^y < z\}$$

$$a^{supA} = z.$$

Essendo per definizione:

$$a^{supA} = supa^y : y \in Q, y < supA$$

si ha che $a^{supA} \leq z$. Se fosse $a^{supA} < z$ detto y un numero razionale, per il teorema di densità si ha:

$$a^{supA} < a^y < z,$$

avremmo $y \in Y$ ossia un numero y che appartiene ad un insieme che si frappone tra un numero e sé stesso. Il che ovviamente è impossibile.

2.9 Le classi di resto

Nella teoria dei gruppi, è possibile organizzare i numeri secondo delle classi di resto di modulo m ($m \in N$). Per esempio se la somma delle cifre di un numero è tre, allora quel numero è divisibile per tre. $n = km$.
Tutti i possibili resti derivanti dalla divisione n/m sono identificati dall'insieme: $\{0, 1, \ldots, (m - 1)\} \mid m \neq \pm 1$. Se il resto è zero, allora il numero k è un multiplo di m. Le classi di resto si possono indicare con la seguente scrittura: [0], [1].... Una proprietà importante è che qualunque numero n si prenda che abbia una certa classe di resto, se sommato a un'altro numero l con una classe di resto differente, il numero risultante apparterrà alla classe di resto che corrisponde alla somma delle classi di resto. Se qeusto numero è $\geq m$, allora si ricomincia a partire da 0.
Presi due numeri $x, x' \in Z$, se appartengono alla stessa classe di resto, allora x e x' differiscono per un multiplo di m. cioè:

$$x' = x + km.$$

Analogamente, se $y, y' \in Z$, appartengono alla stessa classe,

$$y' = y + hm.$$

Quindi:

$$x' + y' = x + km + y + hm = x + y + (k + h)m.$$

L'intero $x' + y'$ differiscono da $x + y$ di un certo multiplo k + h, per cui appartiene per costruzione alla stessa classe di $x + y$, definendo la somma tra classi come:

$$[x] + [y] = [x + y]. \tag{2.23}$$

Il ragionamento analogo può essere fatto per il prodotto, quindi:

$$xy + (xh + yk + khm)m;$$

cioè si definisce il prodotto tra classi come:

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]. \tag{2.24}$$

Come detto prima, se la classe risultante dovesse essere $\geq m$, in questo caso, dividiamo la classe per m, e la classe di resto risultante sarà la classe indentificata dal resto di questa divisione.

Capitolo 3

Limiti di successioni

3.1 Successioni e proprietà

Una *successione* è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n. Ricordando la definizone di funzione, una successione è dunque una funzione da N in R.

Definizione 3.1. *Un numero reale a è il limite della successione a_n (la successione converge ad a) e si scrive:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad oppure \quad a_n \to a, \tag{3.1}$$

qualunque sia $\epsilon > 0$ $\exists v \mid |a_n - a| < \epsilon$ $\forall n > v$.

Teorema 3.1 (TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE)**.** *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione:
Supponendo per assurdo che esistano due limiti distinti $a_n \to a, a_n \to b|a \neq b$, si pone $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ (> 0). Si ha:

$$\exists\ v_1 \mid |a_n - a| < \epsilon,\ \forall n > v_1; \quad \exists\ v_2 \mid |a_n - b| < \epsilon,\ \forall n > v_2.$$

Ponendo $v = max\{v_1, v_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha:

$$\begin{aligned} |a-b| = |(a-a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = \\ = |a_n - a| + |a_n - b| < 2\epsilon = \\ = \end{aligned}$$

Definizione 3.2. *Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ (diverge a $+\infty$) e si scrive:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad oppure \quad a_n \to +\infty. \tag{3.2}$$

se qualunque sia $\forall\ M > 0$ $\exists v \in R|a_n > M\ \forall\ n > v$. Nel caso in cui il limite diverga a meno infinito invece, si usa $\forall\ M > 0$ $\exists v \in R|a_n < -M\ \forall\ n > v$.

Una successione che invece converge a zero si chiama infinitesima, mentre una che non ammette alcun limite si chiama non regolare.

3.2 Successioni limitate

Una successione è regolare se ammette limite finito o infinito, tuttavia una successione si può anche chiamare limitata nel caso in cui:

$$\exists M||a_n| \leq M\ \forall\ n \in N\ \ \wedge -M \leq a_n \leq M,\ \forall\ n \in N. \tag{3.3}$$

Esistono anche successioni limitate non regolari come:

$$a_n = (-1)^n.$$

Teorema 3.2. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione:
supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\epsilon = 1$. In questo caso $\exists v : |a_n - a| < 1 \ \forall \ n > v$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$
$$\forall n \in N \Rightarrow |a_n| \leq M = max\{|a_1|, \ldots, |a_v|, 1 + |a|\}.$$

3.3 Operazioni coi limiti

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b : a, b \in R$, si ha:

1. $$\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b. \tag{3.4}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = ab. \tag{3.5}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \quad se\ b_n, b \neq 0. \tag{3.6}$$

Dimostrazioni:

1. Per ipotesi: $\forall \epsilon > 0$,
$$\exists v_1 : |a_n - a| < \epsilon, \ \forall \ n > v_1; \quad \exists v_2 : |b_n - b| < \epsilon, \ \forall \ n > v_2;$$
Ponendo $v = max\{v_1, v_2\} \ \forall \ n > v$ si ha:
$$\begin{aligned}|(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon\end{aligned}$$

2. Dal momento che a_n è limitata ed utilizzando l'ipotesi vista alla precedente dimostrazione, si può dire che $\forall \ n > v = max\{v_1, v_2\}$:
$$\begin{aligned}|a_nb_n - ab| &= |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| = \\ |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \\ &< M\epsilon + |b|\epsilon = (M + |b|)\epsilon.\end{aligned}$$

3. Considerando a_n e b_n convergenti per ipotesi a a e b rispettivamente, e, per ipotesi $b \neq 0$, prendiamo $b > 0$, allora con $\epsilon = b/2$:
$$\exists \ v_1 \mid b - \epsilon < b_n < b + \epsilon, \quad \forall n > v_1.$$
ossia:
$$b_nb - \epsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}, \qquad \forall n > v_1.$$
Per ipotesi $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ v_2, v_3$:
$$|a_n - a| < \epsilon, \ \forall n > v_2; \quad |b_n - b| < \epsilon, \ \forall n > v_3,$$
Posto ora $v = max\{v_1, v_2, v_3\} \ \forall n > v$:
$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{a_nb - ab_n}{b_nb}\right| = \frac{1}{|b_nb|}|(a_n - a)b + a(b - b_n)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\frac{b}{2}b}(|a_n - a|b + |a| \cdot |b_n - b|) < \epsilon\frac{2(b + |a|)}{b^2}.\end{aligned}$$

3.4 Forme indeterminate

Alucune delle operazioni coi limiti:

$$\begin{aligned}
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty \\
a_n \to \pm\infty, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty \\
a_n \to a \neq 0, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad |a_n + b_n| \to +\infty \\
a_n \to \pm\infty, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad |a_n + b_n| \to +\infty \\
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to 0 \\
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \to +\infty \\
a_n \to a \neq 0, \quad b_n \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty
\end{aligned}$$

Risultano alcuni casi chiamte forme indeterminate:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}. \tag{3.7}$$

Un limite che si presenta come una forma indetrminata non vuol dire che non esista, vuol dire semplicemente che il limite necissità di essere manipolato per poter essere risolto.

3.5 Teoremi di confronto

Teorema 3.3. *TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO –*
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0 \ \exists\ v \mid a_n > 0\ \forall n > v$.

Dimostrazione:
Dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\epsilon = a/2$, $\exists\ v \mid |a_n - a| < a/2\ \forall n > v \Rightarrow -a/2 < a_n - a < a/2$:

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \qquad \forall n > v.$$

Proposizione 3.3.1. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a, a_n \geq 0\ \forall n \Rightarrow a \geq 0$.

Dimostrazione:
Se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno comporterebbe, applicato ad $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

Proposizione 3.3.2. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} b_n = b, a_n \geq b_n\ \forall n \Rightarrow a \geq b$.

Dimostrazione:
Si procede applicando la dimostrazione del corollario precendete a $a_n - b_n$.

Teorema 3.4. *TEOREMA DEI CARABINIERI. — Siano a_n, b_n, c_n tre successioni tali che:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad \forall n \in N.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, *allora anche la successione c_n è convergente ad a.*

Dimostrazione:
Per ipotesi, $\forall \epsilon > 0$:

$$\exists\ v_1 \ :\ |a_n - a| < \epsilon,\ \forall n > v_1; \quad \exists\ v_2\ :\ |b_n - a| < \epsilon,\ \forall n > v_2.$$

Se $n > v = max\{v_1, v_2\}$, risulta che:

$$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon.$$

Quindi $|c_n - a|\epsilon$. Valgono anche:

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in N, \quad a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad b_n \to +\infty. \tag{3.8}$$

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in N, \quad b_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to -\infty. \tag{3.9}$$

Dimostrazione per la prima (la seconda è analoga):
Per ipotesi $a_n \to +\infty$ ossia:

$$\forall M > 0,\ \exists\ v \mid a_n > M, \qquad \forall n > v.$$

Dato che $b_n \geq a_n$ $\forall n \in N$ si ha la tesi:

$$b_n \geq a_n > M, \qquad \forall n > v.$$

3.6 Altre proprietà dei limiti di successioni

Proposizione 3.4.1. *a_n converge a zero se e soltanto se $|a_n|$ converge a zero.*

Dimostrazione:
Posto $b = |a_n|$, b_n converge a zero se e solo se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ v \mid |b_n| < \epsilon, \qquad \forall n > v.$$

Dato che:

$$|b_n| = ||a_n|| = |a_n|, \qquad \forall n > v$$

Teorema 3.5. *TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA — Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.*

Dimostrazione (primo metodo):
Per ipotesi si ha:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| = -M \cdot |b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M \cdot |b_n|.$$

Dato che per ipotesi $b_n \to 0$ anche $|b_n|$ converge a zero. Grazie al teorema dei carabinieri si deduce che anche $a_n \cdot b_n \to 0$. Dimostrazione (secondo metodo):

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\ v \mid |b_n| < \epsilon, \tag{3.10}$$

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M\epsilon \tag{3.11}$$

3.7 Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & se \quad a > 1, \\ 1, & se \quad a = 1, \\ 0, & se \quad -1 < a < 1, \\ non\ esiste, & se \quad a \leq -1, \end{cases} \tag{3.12}$$

Dimostrazione:
Se $a > 1$, si usa la disuguaglianza di Bernoulli:

$$a^n \geq 1 + n(a-1).$$

Il secondo membro $\to +\infty$ se $n \to +\infty$ e per il teorema del confronto anche $a^n \to +\infty$, mentre i casi a = 1 e a = 0 sono ovvi. Se invece a è compreso tra -1 ed 1 ($0 < |a| < 1$) allora si ottiene:

$$\lim_{n \to +\infty} |a^n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} = 0$$

Se a = -1 non esiste, se $a < -1$ invece si ottiene la successione $|a| > 1$, quindi il limite esiste ed è $+\infty$.

$$lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{3.13}$$

Dimostrazione:
Se $a > 1$ allora il limite è ≥ 1. Se poniamo come nuova successione $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$ si ha che $b_n \geq 0$ e per Bernoulli:

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

quindi:

$$0 \leq b_n \leq (a-1)/n$$

Per il teorema dei carabinieri segue che $b_n \to 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1.Se\ 0 < a < 1\ allora\ 1/a > 1$ e quindi.

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$$

Dimostraimo ora che se $b \in R$ risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1. \tag{3.14}$$

Esaminando $b = 1/2$, si ottiene con la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \geq 0 \\ \sqrt{n} &= (1+b_n)^n \geq 1 + nb_n \\ 0 \leq b_n \leq \frac{\sqrt{n}-1}{n} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0. \\ b_n \to 0,\ cioe' \quad \sqrt[n]{n^{1/2}} &= n^{1/(2n)} \to 1. \end{aligned}$$

Considerando ora $b \in Z$:

In tal caso $\sqrt[n]{n^b} = (\sqrt[n]{n^{1/2}})^{2b} \to 1^{2b} = 1$. Introducendo la funzione *parte intera di x*:

$$[x] = \ il\ piu'\ grande\ intero \leq x. \tag{3.15}$$

Se $b \in R$ abbiamo $[b] \leq b < [b]+1$ quindi:

$$\sqrt[n]{n^{[b]}} \leq \sqrt[n]{n^b} \leq \sqrt[n]{n^{[b]+1}}$$

Per il teorema dei carabinieri si ottiene quindi la tesi.
Ora analizziamo de limiti delle funzioni trigonometriche:

$$a_n \to\Rightarrow sin(a_n) \to 0; \tag{3.16}$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow cos(a_n) \to 1. \tag{3.17}$$

Ad esempio $sin(1/n) \to 0$ e $cos(1/n) \to 1$.
Dimostrazione:
Poiché a_n converge a zero allora per definizione esiste un indice v per cui $|a_n| < \pi/2\ \forall n > v$ per cui:

$$0 \leq |sin(a_n)| \leq |a_n|$$

Per il teorema dei carabinieri si sa dunque che $|sin(a_n)| \to 0$. La dimostrazione per il limite del coseno invece deriva da:

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - sin^2(x)}$$

Con l'indice v risulta che $-\pi/2 \leq a_n \leq \pi/2\ \forall n > v$ per cui:

$$cos(a_n) = \pm\sqrt{1 - sin^2(a_n)}$$

Ossia la tesi. poiché se $a_n \to 0$, allora la radice vale 1.

$$a_n \to 0, a_n \neq 0,\ \forall n \Rightarrow \frac{sin(a_n)}{a_n} \to 1. \tag{3.18}$$

Dimostrazione:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cosx < \frac{sinx}{x} < 1$$

Se x è positivo:

$$sinx < x < tanx = \frac{sinx}{cosx}$$

da cui dividendo per sinx che positivo e invertendo:

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Se x è negativo invece:

$$cosx = cos(-x) < \frac{sin(-x)}{-x} = \frac{sinx}{x} < 1.$$

Dato che $a_n \to 0$, per definizione di limite esiste un $v||a_n| < \pi/2 \ \forall n > v$. così:

$$cos(a_n) < \frac{sin(a_n)}{a_n} < 1$$

3.8 Successioni monotòne

Così come per le funzioni anche le successioni possono essere crescenti, decrescenti, (anche strettamente) e monotone quando non invertono mai la loro tendenza

Teorema 3.6. *TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE. – Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona limitata è convergente.*

Dimostrazione:
Considerato il caso di una successione a_n crescente e limitata si ottiene posto $l = sup_n a_n$, e fissato $\epsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore si ottiene che:

$$l - \epsilon < a_v.$$

Per $n > v$ risulta che $a \leq a_n$ dunque:

$$l - \epsilon < a_v \leq a_n \leq l < l + \epsilon,$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ Considerando il caso di una successione crescente e non limitata. Fissato $M > 0$ esiste allora $v \in N|a_v > M$ Dato che a_n è crescente allora $\forall n > v$ si ottiene:

$$a_n \geq a_v > M.$$

da cui si ottiene che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Analogamente si ottengono gli altri casi.

3.9 Il numero e

Il teorema delle successione monotone è utile per definire il numero di Eulero (o Nepero):

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \qquad con \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.19}$$

Dimostrazione per $+\infty$:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

Per i carabinieri diventa:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right) \to e \cdot 1 = e.$$

Dimostrazione per $-\infty$ poniamo $b_n = -a_n - 1$:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^a_n &= \left(1 - \frac{1}{b_n + 1}\right)^{-(b_n+1)} = \\ = \left(\frac{b_n}{b_n + 1}\right)^{-(b_n+1)} &= \left(\frac{b_n + 1}{b_n}\right)^{b_n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \cdot \left(1 + \frac{1}{b_n}\right).\end{aligned}$$

A causa di questo limite si aggiungono le forme indeterminate:

$$1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$$

La definizione del numero di Eulero ci permette di definire anche due proprietà:

Proposizione 3.6.1. *la successione a_n è monotòna crescente*

Proposizione 3.6.2. *la successione a_n è limitata*

Dimostrazione 3.6.1:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\geq} a_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right);$$

ossia:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

isolando 1:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

Ponendo nella disuguaglianza di Bernoulli $a = -1/n^2$ si ottiene la tesi.
Dimostrazione 3.6.2:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$\forall n \in N$:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Poiché a_n è strettamente crescente ne consegue che:

$$a_1 \leq a_n < b_n < b_1 \qquad \forall n \geq 2$$

e quindi essendo $a_1 = 2$ e $b_1 = 4$:

$$2 \leq a_n < 4 \qquad \forall n \in N$$

e quindi a_n è limitata. Si verifica ora che b_n sia strettamente decrescente come per la dimostrazione della 3.6.1. Per la stima fatta nella scorsa dimostrazione si può ottenere una stima più precisa di e ponendo:

$$a_n < b_m$$

e posto k = $max\{n, m\}$ risulta:

$$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m.$$

Per m = 1 si ottiene la limitazione vista prima, ma per m = 5 si ottiene:

$$a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.98\ldots \qquad \forall n \in N.$$

ossia $2 \leq a_n < 3$ e quindi anche e verifica le limitazioni di a_n.

3.10 Successioni definite per ricorrenza

In alcune applicazioni si definiscono le successioni per ricorrenza:

$$a_1 \textit{ assegnato}, \quad a_{n+1} = f(a_n), \qquad \forall n \in N.$$

Sopponendo che $f(x)$ sia continua su R e che il limite esista e valga: se $a_n \to a$, allora $a_{n+1} \to a$. Le successioni seguenti sono definite per ricorrenza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}. \tag{3.20}$$
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}. \tag{3.21}$$
$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n}. \tag{3.22}$$
$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}. \tag{3.23}$$
$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1. \tag{3.24}$$
$$\tag{3.25}$$

3.11 Infiniti di ordine crescente

Teorema 3.7. *CRITERIO DEL RAPPORTO (PER LE SUCCESSIONI) — Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = a_{n+1}/a_n$. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a zero.*

Dimostrazione:
Per la permanenza del segno (applicato a $1 - b_n$) $\exists v | b_n < 1 \ \forall n > v$. Quindi $a_{n+1}/a_n < 1$ ossia $a_{n+1} < a_n \ \forall n > v$. Se per assurdo passassimo come valore $a \neq 0$ al limite, si otterrebbe che $b = 1$, per cui l'unico valore di a per soddisfare la relazione è $a = 0$.
Applicando questo criterio alle successioni:

$$logn; \quad n^b; \quad a^n; \quad n!; \quad n^n.$$

con $b > 0, a > 1$ si può dimostrare che i limiti seguenti sono equivalenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{logn}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Il primo limite è ovvio poiché si può esprimere $logn$ come $(1/b)log(n^b)$, dunque sicuramente è zero. Il secondo limite diventa invece:

$$a_n = \frac{n^b}{a^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1.$$

Per il terzo limite:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0.$$

Infine per il quarto limite:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

3.12 Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La succesione a_n definita da:

$$k \in N \to a_{nk}$$

prende il nome di successione estratta da a_n, di indici n_k.

Proposizione 3.7.1. *$\forall n_k > 0$ in N si ha:*

$$n_l \geq k$$

Dimostrazione:
Per k $= 1$ si ha che $n_1 \geq 1$, si prova (posta valida) per induzione che $n_{k+1} \geq k + 1$, per ipotesi è quindi $n_{k+1} > n_k \geq k$, ossia $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \geq k + 1$.

Proposizione 3.7.2. *Se a_n coverge verso a, allora ogni estratta di a_n converge verso a.*

Dimostrazione:
Fissato $\epsilon > 0$ $\exists k_0 : |a_n - a| < \epsilon$ $\forall n > k_0$. Se $k > k_0$ essendo $n_k \geq k$ per il teorema precedente, allora $n_k > k_0$ e quindi si ha $|a_{n_k} - a < \epsilon|$.
Ne deriva dunque il seguente:

Teorema 3.8 (TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS)**.** *Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Dimostrazione:
per ipotesi la successione a_n è limitata: pertanto esistono $A, B \in R$ tali che:

$$A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in N.$$

Suddividiamo l'intervallo $[A, B]$ con un punto in mezzo $C = (A + B)/2$, poiché N è infinto, allora risulta infinito almeno uno ra i due sottoinsiemi di N:

$$\{n \in N : \quad a_n \in [A, C]\}, \qquad \{n \in N : \quad a_n \in [C, B]\}.$$

Indicando con $[A_1, B_1]$ l'intervallo in cui sono presenti i termini della successione per infiniti indici:

$$A \leq A_1, \quad B_1 \leq B, \quad B_1 - A - 1 = \frac{B - A}{2}.$$

Suddividiamo l'intervallo ottenuto $[A_1, B_1]$ tramite un punto di mezzo C_1 come prima e per questo risulta che esistano al suo interno due punti A_2 e B_2 come definiti prima. Iterando ancora il procedimento si generano due successioni $A_k, B_k(k \in N)$ tali che:

$$A \leq A_k \leq A_{k+1} < B_{k+1} \leq B_k \leq B, \quad \forall k \in N, \tag{3.26}$$

$$B_k - A_k = \frac{B - A}{2^k}, \quad \forall k \in N. \tag{3.27}$$

e l'intervallo $[A_k, B_k]$ contiene termini della successione per infiniti indici. In particolare si ha che l'intervallo $[A_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n; quindi esiste il primo intero n_1 tale che $a_n \in [A_1, B_1]$. Per lo stesso motivo si itera nell'intervallo determinando una successione strettamente crescente di numeri naturali per cui:

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k = A_k + \frac{B - A}{2^k} \quad \forall k \in N.$$

La successione A_k e anche B_k sono monotone e limitate ed ammettono un limite dal valore di $l \in R$. Poiché $(B-A)/2^k \to 0$ per $k \to +\infty$, entrambi i membri di quella sopra convergono ad l per $k \to +\infty$. Per il teorema dei carabinieri infine si ottiene:

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l. \tag{3.28}$$

3.13 Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una *successione di Cauchy* se $\forall \epsilon > 0$ $\exists v | h, k > v$ si ha:

$$|a_k - a_h| < \epsilon \tag{3.29}$$

Proposizione 3.8.1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione:
Se a_n converge verso a allora $\forall \epsilon > 0$ $\exists v|$:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n > v.$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ottiene che per $h, k > v$:

$$|a_k - a_h| \leq |a_k - a| + |a - a_h| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposizione 3.8.2. *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione:
Sia $\epsilon = 1$, per ipotesi allora $\exists v \in N$ tale che:

$$|a_k - a_h| < 1 \qquad \forall h, k > v.$$

Fissando un indice $h_0 > v$ per le proprietà del valore assoluto segue che:

$$a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1 \qquad \forall k > v.$$

Posto:

$$A = min\{a_1, \ldots, a_v, a_{h_0} - 1\}, \qquad B = max\{a_1, \ldots, a_v, a_{h_0} + 1\},$$

Risulterà ovviamente che (e quindi è limitata):

$$A \leq a_k \leq B \qquad \forall k \in N.$$

Proposizione 3.8.3. *Se una successione di Cauchy a_n contiene un'estratta a_{n_k} convergente verso l, allora anche a_n converge verso l.*

Dimostrazione:
Fissato $\epsilon > 0 \ \wedge \ v \in N|$:

$$|a_k - a_h| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall h, k > v.$$

Sia inoltre $k_0 > v$ tale che:

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Poiché si ha: $n_{k_0} \geq k_0 > v$ $\forall n > v$:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Combinando queste due proposizioni si ottiene il seguente teorema:

Teorema 3.9. *CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY. – Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dall'inizio del paragrafo tutte le proposizioni portano a dimostrare la validità di questo teorema.

3.14 Algoritmo di Erone

Definendo per ricorrenza una successione a_n e preso un numero reale x, si può giustificare come l'algoritmo di Erone sia un buon metodo per l'approssimazione delle radici quadrate:

$$\begin{cases} a_1 \ assegnato \ (> \sqrt{x}) \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \ \forall n \in N \end{cases}$$

Proposizione 3.9.1. *La successione a_n definita converge per $n \to +\infty$ verso $\sqrt{x}$.*

Dimostrazione:
Primo metodo: provando che $a_n > \sqrt{x}$ $\forall n \in N$, per a_1 è verificata e risulta poi:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) > \sqrt{x}$$

ma se e solo se

$$a_n^2 + x > 2a_n\sqrt{x}$$

quindi:

$$a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x = (a_n - \sqrt{x})^2 > 0$$

che è verificata e risulta anche che $a_n \neq \sqrt{x}$. Risulta anche che:

$$a_n > a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

ossia:

$$2a_n^2 > a_n^2 + x \qquad cioe' \qquad a_n^2 > x.$$

Poiché anche a_1 converge ad a, allora per ricorrenza otteniamo:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$$

e risolvendo per a è risolta.
Secondo metodo: Presa la stima dell'errore dell'algoritmo data dalla seguente:

$$a_{n+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2^n}(a_1 - \sqrt{x}), \qquad \forall n \in N$$

TODO: 119

3.15 Successione di Fibonacci

3.16 Valori di aderenza di una successione

3.17 Limite inferiore e limite superiore di una successione

Capitolo 4

Limiti di funzioni e funzioni continue

4.1 Premessa e definizione

4.1.1 Premessa

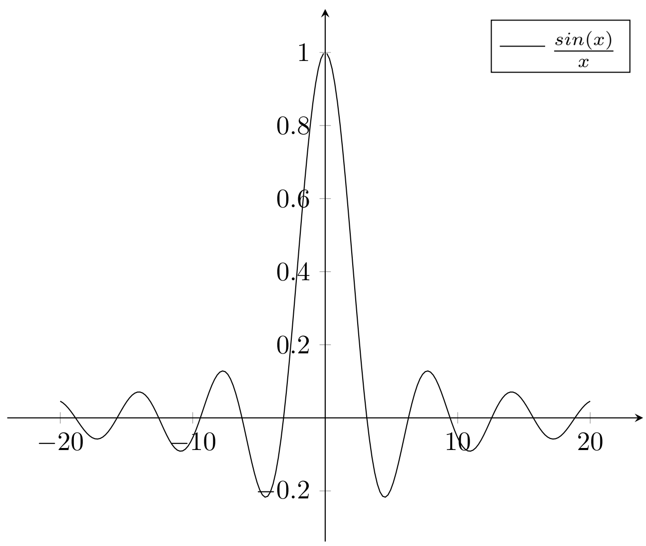
Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

Dal momento che sinx è limitata, allora sappiamo che:

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0.$$

Tuttavia come si comporta questa funzione per valori prossimi allo zero? Prendendo un valore sempre più vicino a zero (come 0,1 oppure 0,01) si osserva che il valore di questa funzione si avvicina ad 1. Sarebbe ragionevole dunque dire che questa funzione *sia* 1 quando x sia vicino a zero, tuttavia non si conosce il comportamento di $f(x)$ per valori ancora più prossimi allo zero.
Considerata una generica successione x_n e la corrispondente successione y_n tale per cui $y_n = f(x_n)$, se y_n converge ad un numero l e se l non cambia qualunque sia il valore di x_n che converge ad x_0 allora si dice che la funzione ammette limite uguale ad l per $x \to x_0$.



4.1.2 Definizione

Si definisce quindi limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0 \in R$ nel caso in cui x_0 risulti punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$. Se a, b sono due numeri reali $a < b$, per indicare un *intervallo* di estremi a,b si usa:

$$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}; \tag{4.1}$$
$$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\}; \tag{4.2}$$
$$[a,b) = \{x \in R : a \leq x < b\}; \tag{4.3}$$
$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}. \tag{4.4}$$

Un'intervallo si dice chiuso (a destra o a sinistra se solo una) se entrambe le parentesi sono quadre, altrimenti è aperto. Inoltre se a e b sono numeri si dice limitato, altrimenti se è presente ∞ è illimitato. Un'*intorno* di un punto x_0 è un intervallo aperto contenente x_0.

Definizione 4.1. *Si dice che $f(x)$ ha limite uguale a l (tende o converge ad l) per x che trende a x_0 se, qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$ risulta $f(x_n) \to l$.*

Teorema 4.1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \\ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty &\iff \forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \\ &\iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M, \\ &\qquad \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta. \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) = l &\iff \forall x_n \to +\infty, x_n \in A,\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to l; \\ &\iff \forall \epsilon > 0, \exists k : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x \in A : x > k. \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty &\iff \ \forall x_n \to +\infty, x_n \in A\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \\ &\iff \ \forall M > 0,\ \exists k : f(x) > M,\ \forall x \in A : x > k. \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.2 Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Teorema 4.2. *Le seguenti relazioni sono equivalenti tra loro:*

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\}\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to l; \tag{4.9}$$
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon. \tag{4.10}$$

Dimostrazione:
$\forall \epsilon > 0, \delta > 0$ la seconda implica la prima, consideriamo quindi una successione x_n di punti di A, convergente ad x_0 con $x_n \neq x_0$ $\forall n \in N$. Esiste dunque un indice $v : |x_n - x_0| < \delta$ $\forall n > v$, inoltre essendo $x_n \neq x_0$ si ha che:

$$x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > v.$$

Per la 4.10 dunque:

$$|f(x_n) - l| < \epsilon,$$

che in base alla definizione di limite di successione significa che $f(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$. Provando ora per assurdo che la seconda implichi la prima, allora per contraddire la seconda dobbiamo affermare che:

$$|f(x_n) - l| \geq \epsilon.$$

Ponendo quindi nella relazione $\delta = 1/n$ e indicando con $x = x_n$ il valore di X risulterà che:

$$x_n \neq x_0 \qquad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in N.$$

perciò diventa che $x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in N$ e $x_n \to x_0$ per il teorema dei carabinieri: però $f(x_n)$ non converge poiché la disuguaglianza imposta per assurdo contrasta con la definizione di limite.

4.3 Proprietà dei limiti di funzioni

4.3.1 Operazioni coi limiti

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente dei due limiti purchè non sia nella forma indeterminata $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, ∞/∞, $0/0$.

4.3.2 Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+f(x))}{f(x)}=1 \tag{4.11}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)}=\frac{1}{\log(a)} \tag{4.12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1 \tag{4.13}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^{f(x)}-1}{f(x)}=\log(a) \tag{4.14}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e \tag{4.15}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^c-1}{f(x)}=c \tag{4.16}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(f(x))}{f(x)}=0 \tag{4.17}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(f(x))}{f(x)^2}=\frac{1}{2} \tag{4.18}$$

4.4 Funzioni continue

Definizione 4.2. *Una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0); \tag{4.19}$$

una funzione è continua in un intervallo $[a;b]$ se è continua in ogni punto $x_0\in[a;b]$.

4.5 Discontinuità

Considerando la seguente funzione:

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} 1 & se\ x>0,\\ -1 & se\ x<0\end{cases} \tag{4.20}$$

Per $x=0$ essa presenta un salto, è possibile tuttavia estenderla nella seguente maniera:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & sex\neq 0\\ l & sex=0\end{cases}$$

La funzione è ora definita in $x=0$ anche se non è continua poiché adesso possiede due salti.
Consideriamo ora i vari tipi di discontinuità, posta $f(x)$ definita in A e $x_0\in A$:

1. La funzione presenta una *discontinuità eliminabile* se $\exists$ il limite di $f(x)$ per $x\to x_0$ e risulta:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0).$$

allora posto $l=\lim_{x\to x_0} f(x)$ la funzione è continua nel punto x_0 con la seguente estensione:

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & se & x\in A-\{x_0\}\\ l & se & x=x_0\end{cases}$$

2. La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una *discontinuità di prima specie* se $\exists$ finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

3. La funzioen $f(x)$ presenta una *discontinuità di seconda specie* se almeno uno dei due limiti:
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$
$!\exists$ oppure non è definito.

Dalla definizione sopra, si definisce come *prolungamento per continuità* di $f(x)$:
$$f(x) = \begin{cases} f(x) & se \quad x \in A - \{x_0\} \\ l & se \quad x = x_0 \end{cases}$$

4.6 Teoremi delle funzioni continue

Teorema 4.3 (TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO)**.** *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0. Se $f(x_0) > 0, \exists\delta > 0 : f(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.*

Dimostrazione. Dato che $f(x) > 0$, possiamo scegliere $\epsilon = f(x_0)/2, \exists\delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2\ \forall x \in |x - x_0| < \delta$ quindi:
$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$
□

Teorema 4.4 (TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a; b]$. Se $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)|f(x_0) = 0$.*

La dimostrazione si vedrà con il metodo di bisezione nella prossima sezione.

Teorema 4.5 ((PRIMO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI)**.** *Una funzione continua in $[a; b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Posto $f(a) \leq f(b)$, consideriamo ora:
$$g(x) = f(x) - y_0, \qquad \forall x \in [a; b];$$
essendo $f(a) < y_0 < (b)$ per ipotesi, allora
$$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \qquad\qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$
Per il 4.4 $\exists x_0 \in (a; b)|g(x_0) = 0, ossia f(x_0) = y_0$. □

Teorema 4.6 (TEOREMA DI WEIERSTRASS)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a, b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a, b]|$*
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Dimostrazione. Posto $M = sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di $[a, b]$ tali che:
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M.$$
Se $M = +\infty$, allora $\forall n \in N\ \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) > n \Rightarrow f(x_n) \to M = +\infty$. Se invece $M < +\infty\ \forall n \in N\ \exists x_n \in [a, b]$:
$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \qquad \Rightarrow \qquad f(x_n) \to M.$$
Per il teorema 3.8 $\exists$ estratta di x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a, b] : x_{n_k} \to x_0$. Poichè $f(x)$ è continua, allora segue che $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e quindi
$$M = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \lim_{k\to+\infty} f(xn_k) = f(x_0).$$
Questo implica dunque che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è un massimo. (La stessa vale per dimostrare un minimo). □

Teorema 4.7 ((SECONDO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI)**.** *Una funzione continua in un intervallo $[a, b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.*

Dimostrazione. I valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base a 4.6; rimane da provare che $\forall y_0 \in (m, M)\ \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$. Indichiamo con x_1, x_2 il minimo ed il massimo di $f(x)$ tali che $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e consideriamo:

$$g(x) = f(x) - y_0 \qquad \forall x \in [a, b].$$

Essendo ora $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$ risulta che:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0 \qquad\qquad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0;$$

Per il 4.4 $\exists x_0 : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$. □

Teorema 4.8 (CRITERIO DI INVERTIBILITA')**.** *Una funzione continua e strettamente monotòna in un intervallo $[a, b]$ è invertibile in tale intervallo.*

Dimostrazione. Posto che f sia strettamente crescente in $[a, b]$ risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (a, b)$$

$f(a)$ è il minimo dell'intervallo e $f(b)$ è il massimo, dato che è strettamente cresente, non può esistere $x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, per cui: $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile. □

TODO pagina 162

4.7 Metodo di bisezione per il calcolo delle readici

4.8 Continuità funzioni monotone e delle funzioni inverse

4.9 Punti di accumulazione

4.10 Insiemi compatti

Capitolo 5

Derivate

5.1 Tasso di accrescimento e significato della derivata

Consideriamo un semplice processo di crescita di un corpo e supponendo che il peso $p = p(t)$ in funzione del tempo,, all'istante $t + h$ il peso è aumentato per cui il rapporto:

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

è il tasso medio di accrescimento, il limite di $h \to 0$ è il tasso di accrescimento:

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Questo rapporto, chiamato *rapporto incrementale* è esattamente la derivata quando $h \to 0$.

5.2 Definizione di derivata

Sia f(x) definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia $x \in (a, b)$, la funzione è derivabile se in x esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le notazioni della derivata sono:

$$f'(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} \qquad Df(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad Dy$$

Si parla di $f(x)$ derivabile in (a, b) se è derivabile $\forall x \in (a, b)$, derivata destra e sinistra quando $h \to 0^+, h \to 0^-$. Se f è definita in $[a, b]$ si dice che f è *derivabile nell'intervallo* se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e se f ammette derivata destra in a e sinistra in b.
Una funzione f è continua in un punto x se:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

La *continuità* non implica infatti la *derivabilità*, ma è vero il contrario.

5.3 Operazioni con le derivate

Teorema 5.1 (OPERAZIONI CON LE DERIVATE). *Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente:*

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \tag{5.1}$$

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{5.2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad se\ g \neq 0. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni si ottengono utilizzando il limite incrementale: per la somma è immediata, per il prodotto si ottiene:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

Sommando ed sottraendo $f(x)g(x+h)$ si raccoglie e si ottiene la tesi:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Per dimostrare il quoziente, si utilizza la permanenza del segno per cui $\exists\delta>0:|h|<\delta\Rightarrow g(x+h)\neq 0$. Scrivendo ora il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

Per cui sommando e sottraendo $f(x)g(x)$ si ottiene la tesi:

$$\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

□

Un caso particolare è la moltiplicazione di una costante per la funzione, in tal caso si ottiene: $(cf)'=cf'$.

5.4 Derivate delle funzioni composte ed inverse

Teorema 5.2 (TEOREMA DELLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE). *Se g è una funzione derivabile in x, e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x:*

$$Df(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x). \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Posta, con $y=g(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{f(y+k)-f(y)}{k} & se \quad k\neq 0\\ f'(y) & se \quad k=0\end{cases}$$

Per la derivabilità, si ottiene che:

$$\lim_{k\to 0}F(k)=f'(y)=F(0).$$

$F(k)$ è continua quindi in $k=0$ e posto:

$$k=g(x+h)-g(x),$$

essendo $g(x)=y$, $g(x+h)=g(x)+k=y+k,\ \forall k\neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}&=\frac{f(g(x)+h)-f(g(x))}{k}\cdot\frac{k}{h}=\\ =\frac{f(y+k)-f(y)}{k}\cdot\frac{k}{h}&=F(k)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Preso ora il limite del primo e dell'ultimo membro ed uguagliati (i quali valgono)+ anche per $k=0$, si ottiene:

$$F(0)\cdot g'(x)=f'(x)\cdot g'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

□

Teorema 5.3 (TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua e monotòna in $[a, b]$. Se $f(x)$ è derivabile in $x \in [a, b], f'(x) \neq 0$, allor anche f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$:*

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale della funzione inversa diventa (posto $k = f(x+h) - f(x)$ e $y = f(x)$):

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}.$$

Col limite per $k \to 0$ si ottiene la tesi. □

5.5 Derivate delle funzioni elementari

$$D\ x^n = nx^{n-1}. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Si ottiene per induzione la tesi, sapendo che per $n = 1$ è vera, per $n + 1$ diventa:

$$\begin{aligned} &D\ x^{n+1} = D(x^n \cdot x) = D(x^n)x + x^n Dx = \\ &= nx^{n+1}x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n. \end{aligned}$$

□

$$D\ \log_a(x) = \frac{1}{x}\log_a(e),\ \forall x > 0, a > 0, a \neq 1. \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Si utilizzano le proprietà del logaritmo ed i limiti notevoli così il rapporto incrementale diventa:

$$\lim_{\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a(\frac{x+h}{x}) = \qquad \log_a(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}) \tag{5.8}$$

Ottenendo la tesi. □

Si ottiene dunque anche la seguente:

$$D\ \log_e(x) = \frac{1}{x},\ \forall x > 0. \tag{5.9}$$

Si ottiene anche quella per la potenza ad esponente reale:

$$D\ x^a = D\ e^{log(x^b)} = x^b \frac{b}{x} = bx^{b-1}. \tag{5.10}$$

Per le funzioni trigonometriche si ottiene invece:

$$D\ \sin(x) = \cos(x) \qquad\qquad D\ \cos(x) = -\sin(x). \tag{5.11}$$

Dimostrazione. Per le dimostrazioni si utilizzano le formule di addizione ed i limiti notevoli all'interno del rapporto incrementale. □

La derivata della tangente si calcola col rapporto $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$D\ \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x). \tag{5.12}$$

5.6 Significato geometrico della derivata. Retta tangente

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0, proviamo a trovare l'equazione della retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ che passi dunque anche per $P_0(x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q & \textit{passaggio per } P_0 \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q & \textit{passaggio per } P \end{cases}$$

Combinando le equazioni e facendone il limite per $h \to 0$, si ottiene l'equazione della retta tangente in P_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.13}$$

TODO 193

5.7 Funzioni trigonometriche inverse

5.8 Funzioni iperboliche e loro inverse

Capitolo 6

Studio di funzione

6.1 Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat

Presa una funzione $f(x)$ definita in $[a, b]$, diciamo che $x_0 \in [a, b]$ è massimo (relativo) di f quando $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in [a, b]: \qquad |x - x_0| < \delta. \tag{6.1}$$

Non deve valere per tutti i punti dell'intervallo ma solo per gli x vicini. Il punto di massimo assoluto è invece un punto in cui $f(x)$ è maggiore di qualsiasi altro valore nell'intervallo di esistenza.
Analogamente si può dire che x_0 è un punto di minimo (relativo) per la funzione f, nell'intervallo $[a, b]$ se $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in [a, b]: \qquad |x - x_0| < \delta. \tag{6.2}$$

Teorema 6.1 (TEOREMA DI FERMAT)**.** *Sia f una funzione definita in $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno all'intervallo di definizione, se f è derivabile in x_0 allora risulter che $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo), allora sicuramente $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \qquad \forall h : |h| < \delta.$$

Svolgendo il valore assoluto otteniamo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & se \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & se \quad -\delta < h < 0 \end{cases}$$

Imponendo il limite si ottiene che questo deve essere:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

La tesi è quindi dimostrata. □

Ne segue inoltre un corollario:

Teorema 6.2. *Sia $f(x)$ definita in $[a, b]$ e derivabile in x_0, se x_0 è un punto di massimo relativo risulterà che:*

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq 0$$

altrimenti se è di minimo relativo risulterà:

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0.$$

6.2 Il teorema di Rolle

Teorema 6.3 (TEOREMA DI ROLLE). *Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a, b) : f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Indicando con x_1 e x_2 i punti di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo $[a, b]$, tali punti esistono per Weierstrass (4.6). Se tali punti corrispondono entrambi ad a e b, allora $\forall x \in [a, b]$ risulta che $f(x)$ è costante, se invece almeno uno dei due è interno, allora si annulla per Fermat (6.1). □

Teorema 6.4 (TEOREMA DI LAGRANGE). *Sia $f(x)$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). $\exists x_0 \in (a, b)$:*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{6.3}$$

ossia esiste un punto il cui coefficiente angolare è uguale a quello della retta che congiunge a e b.

Dimostrazione. Attraverso la funzione intermedia $g(x)$ ci si riconduce a Rolle.

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right).$$

Si vede che $g(a) = g(b) = 0$, e che essa è derivabile in (a, b) per cui:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \forall x \in (a, b).$$

Per Rolle $\exists x_0 \in (a, b) : g'(x_0) = 0$, ponendo questo nella precendente si ottiene la tesi. □

6.3 Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente teorema.

Teorema 6.5 (CRITERIO DI MONOTONIA). *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), allora:*

$$f'(x) \geq 0, \qquad \forall x \in (a, b) \ f \nearrow \in [a, b] \tag{6.4}$$

$$f'(x) \leq 0, \qquad \forall x \in (a, b) \ f \searrow \in [a, b] \tag{6.5}$$

Dimostrazione. Provando la prima (la seconda è analoga), si ottiene che supponendo $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$ la tesi di Lagrange sarà (posti x_1 e x_2 rispettivamente come $a \leq x_1 < x_2 \leq b$):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Risulta quindi che $f(x_2) \geq f(x_1)$. Viceversa se f è crescente allora $\forall x \in (a, b)$ e $h > 0 : x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geq f(x)$ e quindi:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

E risulta dimostrata per il limite $h \to 0^+$ (Vale anche per $h < 0$ e $h \to 0^-$). □

La conseguenza di questo teorema è il seguente:

Teorema 6.6 (CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO). *Una funzione è costante in un intervallo $[a, b]$ se e solo se è derivabile in $[a, b]$ e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione. Si prova che la derivata di una costante sia nulla su tutto l'intervallo, viceversa se $f(x)$ è derivabile in $[a, b]$ e $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$ per i criteri di monotonia è sia crescente che decrescente e quindi $\forall x$ risulta $f(x) \leq f(a)$ e $f(x) \geq f(a)$. □

Combinando i teoremi 6.5 e 6.6 si ottiene il seguente:

Teorema 6.7 (CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA). *Sia f una funzione continua in* $[a,b]$ *e derivabile in* (a,b). *Allora se* $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$; *e f' non si annulla in alcun intervallo interno, allora è* $\nearrow\nearrow$, *altrimenti se* $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$; *e f' non si annulla in alcun intervallo interno allora è* $\searrow\searrow$.

Dimostrazione. Proviamo l'implicazione $\Rightarrow$; essendo $f'(x) \geq 0$, per il criterio di monotonia si ha che $f(x)$ è crescente. Se non fosse $\nearrow\nearrow$, allora si avrebbe $x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, ma allor dato che: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, allora $f(x)$ sarebbe costante in $[x_1, x_2]$, e quindi andrebbe contro l'ipotesi.
L'implicazione $\Leftarrow$; dato che f è $\nearrow\nearrow$ in $[a,b]$, per il criterio di monotonia allora si ha che $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi in $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$, poiché altrimenti sarebbe costante. (La tesi è dimostrata e vale il ragionamento analogo per la streatta decrescenza). □

6.4 Funzioni convesse e concave

Una funzione si dice convessa in $[a,b]$ se $\forall x \in [a,b]$ il grafico nell'intervallo è al di sopra della retta tangente in x_0, altrimenti è concava.

Teorema 6.8 (CRITERIO DI CONVESSITA'). *Supponiamo che* $f(x)$ *sia derivabile in* $[a,b]$ *e che ammetta derivata seconda in* (a,b) *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

$$f(x) \text{ convessa} \in [a,b]; \tag{6.6}$$
$$f'(x) \text{ crescente} \in [a,b]; \tag{6.7}$$
$$f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b). \tag{6.8}$$

Dimostrazione. Allo scopo di provare che $f'(x)$ è crescente $\in [a,b], x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$ ponendo che $x_0 = x_1$ oppure $= x_2$ nella def. di convessità si dimostra come la prima sia equivalente alla seconda:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \qquad && \forall x \in [a,b]; \\ f(x) &\geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) && \forall x \in [a,b]. \end{aligned}$$

scegliendo $x = x_2$ e $x = x_1$ e sommando membro a membro si ottiene:

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

cioè

$$(f'(x_2) - f'(x_1)) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

quindi ne segue che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$ e quindi è dimostrato che la prima implica la seconda.
Fissati ora $x, x_0 \in [a,b], x \neq x_0$ per Lagrange $\exists x_1 \in [x_0, x]$ per cui:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Se $x > x_0$ si ha per la monotonia di $f(x)$ che $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ e quindi la conclusione:

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0), \qquad x_1 \in (x, x_0)$$

mentre se $x < x_0$ allora $x_1 \in (x_0, x)$ e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ e si ottiene nuovamente la conclusione. □

6.5 Teorema di Cauchy

Teorema 6.9 (TEROEMA DI CAUCHY). *Siano* $f(x), g(x)$ *due funzioni continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* (a,b). *Se* $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$*:*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Come per Lagrange, si ottiene una funzione ausiliaria:

$$h(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

Per Rolle $\exists x_0 \in (a,b) : h'(x_0) = 0$ che equivale alla tesi: □

6.6 Teorema dell'Hopital

Teorema 6.10 (TEOREMA DI L'HOPITAL). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che tendono a zero per $x \to x_0$ e derivabili in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0). Se in questo intorno risulta che $g'(x) \neq 0\ \forall x \neq x_0$ allora si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.10}$$

purché esista il secondo limite.

Il teorema è valido anche per le forme $\frac{\infty}{\infty}$ o anche solo quando $g \to \infty$ e vale anche per limiti destri e sinistri, o anche per $x \to \pm\infty$.

Dimostrazione particolare. Poste f, g come funzioni con derivabili in x_0, esse sono anche continue in x_0 e quindi per le ipotesi del teorema $f(x) = g(x) = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

E' possibile inoltre ricondurre i limiti $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$ riconducendoli all'ipotesi del teorema stesso. (anche le forme $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ma solo in casi particolari).

Dimostrazione completa. Dimostrazione per l'ipotesi che i limiti $f(x), g(x)$ siano $= 0$.
Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili im $[a, b] - \{x_0\} : f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se $g'(x_0) \neq 0\ \forall x \in [a, b] - \{x_0\}$ e se esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora $\exists$ il limite per $x \to x_0$ dal rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ e si eguagliano.
Usando le ipotesi, estendiamo per continuità $f(x), g(x)$ in x_0 con il valore di 0. Così risultano continue in $[a, x_0], [x_0, b], a \neq x_0 \neq b$ e derivabili in $(a, x_0), (x_0, b)$. Si osserva come $g(x)$ e $g'(x)$ non si annullano nell'intervallo in quanto se così fosse posto $x_1 : g(x_1) = 0$ allora per Rolle in $[x_0, x_1]$ esisterebbe anche x_2 tale per cui $g'(x_2) = 0$.
Presa ora una successione $x_n \to x_0$ e contenuta in $[a, b]$, per Cauchy:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} \frac{f'(x'_n)}{g'(x'_n)}.$$

Per cui si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n+\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

a primo membro il limite è indipendente dalla successione e quindi si ottiene la tesi nella forma:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La dimostrazione per i limiti destri e sinistri di x_0 è identica.
La dimostrazione nel caso $\frac{\infty}{\infty}$ invece □

6.7 Studio del grafico di una funzione

Seguendo il seguente schema è possibile studiare una funzione per ricavarne il grafico probabile:

1. *Dominio* di $f(x)$;

2. parità($f(-x) = f(x), \forall x$) o disparità($-f(-x) = f(x), \forall x$), oppure periodica;

3. intersezioni con gli assi cartesiani;
4. segno della funzione;
5. asintoti orizzonatali, verticali o obliqui;
6. intervalli di monotonia;
7. massimi e minimi relativi e relativi valori (quando ci sono massimi e minimi assoluti);
8. intervalli di concavità o convessità e punti di flesso con la derivata seconda;
9. classificazione delle discontinuità (se presenti).

TODO 236

6.8 Sulla continuità della funzione derivata

6.9 Funzioni convesse in un intervallo

6.10 Metodo di Newton per il calcolo delle radici