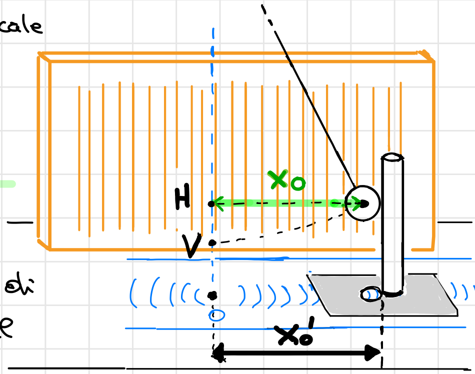
⇒ OPERATIVAMENTE: come effettuiamo le misure che ci occorrono in LABORATORIO.

1) Scegliamo l'ampiezza angolare ϕ_0^{in} come un VALORE INTERMEDIO fra quelli per i quali abbiamo misurato $T_{mis} = T_{mis}(\phi_0^{in})$
⇒ questo valore ϕ_0^{in} sarà definito dal corrispondente valore di $x_0 = x_0^{in}$ [e dunque di $x_0' = (x_0')^{in}$]

2) Rilasciamo il pendolo col centro di massa della sferetta a distanza x_0^{in} dalla verticale locale passante per il punto di sospensione, cioè con la sferetta a contatto con la superficie del cilindretto di supporto in $(x_0')^{in} = x_0^{in} + R$ (R = raggio della sferetta).



Al rilascio è $n=0$.
Contando dal rilascio il numero n di oscillazioni complete (ora da valutare al ritorno verso la posizione di rilascio), ogni 5 oscillazioni valuto la posizione $x_0(n)$ raggiunta dal centro di massa alla massima elongazione in chiusura dell'ultima delle 5 oscillazioni ⇒ nella pratica, valuteremo la corrispondente distanza $x_0'(n)$ raggiunta, alla chiusura della n-sima oscillazione, dal bordo della sferetta più distante dalla verticale per il punto di sospensione e lo faremo traguardando il bordo della sfera contro una scala centimetrica posta su uno "schermo" posizionato dietro il piano verticale delle oscillazioni [vedere figura] e segnandoci di quanto ogni 5 oscillazioni è diminuito x_0' dal valore iniziale $(x_0')^{in}$.

⇒ definiamo $\delta x_0'(n)$ la diminuzione della distanza del bordo esterno della sferetta (alla massima elongazione raggiunta alla chiusura della n-esima oscillazione) rispetto alla distanza $x_0'(n=0)$ dello stesso bordo esterno al momento ($t=0$) del rilascio del pendolo.

⟹ possiamo misurare $\delta x_0'(n)$ $\forall n = 5, 10, 15, 20, 25$ e ottenere indirettamente la corrispondente distanza $x_0'(n)$ raggiunta alla n-esima massima elongazione: $x_0'(n) = x_0'(n=0) - \delta x_0'(n)$

⟹ la misura di $\delta x_0'(n)$ può essere ripetuta più volte (5-6 volte....), rilasciando altrettante volte il pendolo e seguendo l'evoluzione della massima elongazione alla chiusura di ogni oscillazione fino a $n=25$

{n>0!!}

⟹ avremo così, per ogni valore di n di nostro interesse un numero di misure di $\delta x_0'(n)$ pari al numero di rilasci che abbiamo seguito: $\{\delta x_0'(n)_j \,,\ \text{con } j = 1 \ldots 5,6\}$ $\forall n = 5, 10, 15, 20, 25$.

misura diretta!!

Potremo così valutare la nostra migliore stima di $\delta x_0'(n)$ come la media delle 5-6 misure effettuate per ogni dato n; per determinare l'incertezza da associare alla media, $\Delta(\delta x_0'(n))$, valuteremo lo scarto massimo delle misure $\delta x_0'(n)_j$ rispetto alla media e lo confronteremo con 0.5 cm, valore considerabile come la minima variazione di $x_0'(n)$ ragionevolmente apprezzabile sullo schermo nelle nostre condizioni di misura

⟹
- ✱ se "scarto max." > 0.5 cm ⟹ $\Delta(\delta x_0'(n))$ = scarto max. rispetto media
- ✱ se "scarto max." < 0.5 cm ⟹ $\Delta(\delta x_0'(n)) = 0.5\,\text{cm}$

⟹ avendo ottenuto, per ciascun valore di n, $\delta x_0'(n) \pm \Delta(\delta x_0'(n))$, possiamo valutare quindi $x_0'(n) \pm \Delta x_0'(n)$ come

$$\begin{cases} \boxed{x_0'(n) = x_0'(n=0) - \delta x_0'(n)} \\ \boxed{\Delta x_0'(n) = \Delta(x_0'(n=0)) + \Delta(\delta x_0'(n)) = 0.5\,\text{cm} + \Delta(\delta x_0'(n))} \end{cases}$$

⟹ per la relazione che intercorre fra x_0' e x_0 ($x_0 = x_0' - R$, con R = raggio sferetta) (indipendentemente dal valore di n!!), i $\delta x_0'(n)$ misurati rappresentano direttamente anche di quanto, al chiudersi della n-esima oscillazione, è diminuita la massima elongazione del CENTRO (= centro di massa) della sferetta omogenea, ovvero ...

ovvero di quanto è diminuita la distanza, x_0, del centro C della sferetta (il nostro "punto materiale"), dalla verticale locale passante per il punto di sospensione

$\Rightarrow$ dunque è $\delta x'_0(n) \equiv \delta x_0(n)$

$\Rightarrow$ infatti:
$$x_0(n) = x'_0(n) - R = [x'_0(n=0) - \delta x'_0(n)] - R =$$
$$= [x'_0(n=0) - R] - \delta x'_0(n) =$$
$$= \boxed{x_0(n=0) - \delta x'_0(n) = x_0(n)}$$

$\Rightarrow$ di conseguenza, per l'incertezza $\Delta x_0(n)$ da associare a $x_0(n)$ [con $n>0$], avremo

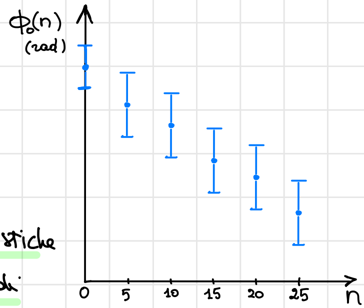
$$\boxed{\Delta x_0(n) = \Delta x_0(n=0) + \Delta(\delta x'_0(n)) = 0.5\,\text{cm} + \Delta(\delta x'_0(n))}$$

3) dai valori di $x_0(n) \pm \Delta x_0(n)$, ricaviamo $\phi_0(n) \pm \Delta\phi_0(n)$ (in rad) e riportiamo in grafico questi valori in funzione dell'n corrispondente.

Ci aspettiamo che i punti in grafico mostrino un andamento ben descrivibile da una relazione lineare del tipo

$\phi_0(n) = A + Bn$, dove $A = \phi_0^{in}$

e B è negativo.



Conoscendo la relazione funzionale che descrive $\phi_0(n)$, nella schematizzazione che descrive il moto REALE del pendolo e che abbiamo studiato, potremo valutare le caratteristiche dello smorzamento e, sulla base delle linee di ragionamento che abbiamo appena discusso (pagine 11-15 di queste note) potremo trarre le conclusioni sulla validità della nostra scelta di descrivere, per l'interpretazione delle misure di tempo, il moto del pendolo (SEMPLICE) nella nostra esperienza come MOTO IDEALE, anche se la presenza di forze d'attrito agenti sul sistema si palesa in forma osservabile sulla ampiezza angolare dell'oscillazione, che mostra una lenta ma progressiva diminuzione.

⇒ tramite la nostra analisi sperimentale dello smorzamento delle oscillazioni, potremo di fatto verificare e mostrare che gli effetti dissipativi delle forze d'attrito sono sufficientemente piccoli, rispetto all'energia totale del moto, da consentire di misurare il periodo nel LIMITE delle PICCOLE OSCILLAZIONI basandosi sulla descrizione del moto come IDEALE (T_0), dato che la presenza delle forze d'attrito risulta influenzare il periodo nel LIMITE delle P.O. in misura molto minore di quanto non avvenga per l'ampiezza angolare dell'oscillazione e, NELLA NOSTRA SPECIFICA CONFIGURAZIONE SPERIMENTALE, la differenza sul periodo nel LIMITE P.O. considerato nel caso di moto REALE e IDEALE ($T_0' - T_0$) risulta assolutamente NON RILEVABILE (e quindi NON SIGNIFICATIVA) in relazione alle incertezze di misura sul periodo T_0 ....

APPENDICE 1 alle note:

RISOLUZIONE dell'equazione $\boxed{\ddot{\phi} + \frac{b}{m}\dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0}$ (A1)

* per questo tipo di equazione differenziale (del II ordine, lineare omogenea e a coefficienti costanti) si ricerca la SOLUZIONE GENERALE partendo da una soluzione del tipo

Text

$\phi(t) = B e^{kt}$ con B e k COSTANTI $\Rightarrow$

$$\frac{d\, e^{f(t)}}{dt} = e^{f(t)} \cdot \frac{df}{dt}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t) = k B e^{kt} = k\phi(t) \\ \ddot{\phi}(t) = k^2 B e^{kt} = k^2 \phi(t) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sostituendo nella eq. (A1) otteniamo:

$$k^2\phi(t) + \frac{b}{m} k\phi(t) + \omega_0^2 \phi(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\phi(t)\left\{k^2 + \frac{b}{m}k + \omega_0^2\right\} = 0 \qquad \forall t}$$

$\Rightarrow$ se la relazione sopra è vera $\forall t$ e noi vogliamo una soluzione che non sia identicamente nulla, non può essere $\phi(t) = 0$ e dunque sarà $\boxed{k^2 + \frac{b}{2m}k + \omega_0^2 = 0 \quad \text{(A2)}}$ $\Rightarrow$ "equazione caratteristica"

$\Rightarrow$ le soluzioni per k saranno allora 2:

$$K_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ dipendentemente dal segno e valore di $\Delta = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2$ si presentano casi diversi (corrispondenti in termini fisici a moti di natura diversa) $\Rightarrow$ a noi interessa il CASO che corrisponde a un MOTO OSCILLATORIO SMORZATO e da qui in poi analizzeremo solo quello $\Rightarrow$

Consideriamo quindi il caso in cui vale

$\boxed{\frac{b}{m} < 2\omega_0}$ $\Rightarrow$ $\Delta = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0$ ("SMORZAMENTO DEBOLE")

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\omega_0^2} = \sqrt{(-1)\cdot\left(4\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}\right)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}} =$$
$$= i \cdot \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}}$$

$\Rightarrow$ le soluzioni per k sono COMPLESSE $\Rightarrow k \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad k_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{1}{2} \cdot i\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{b^2}{m^2}} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$= -\frac{b}{2m} \pm i\omega_0' \quad , \text{ dove } \quad \boxed{\omega_0' = \left(\omega_0^2 - \frac{b}{2m}\right)^{\frac{1}{2}} = \omega_0\left[1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(A3)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{k_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm i\omega_0'} \quad \text{(A4)}$$

⇒ la soluzione generale PER QUESTO CASO sarà quindi una combinazione lineare delle 2 soluzioni corrispondenti alle due distinte radici (complesse) k_1 e k_2 :

$$\boxed{\phi(t) = B_1 e^{-\frac{b}{2m}t + i\omega_0' t} + B_2 e^{-\frac{b}{2m}t - i\omega_0' t}} \quad \text{(A5)} \quad \text{con } B_1, B_2 \text{ costanti } \in \mathbb{C}$$

⇒ per il nostro problema, dovendo $\phi(t)$ rappresentare la posizione angolare per un sistema fisico (dunque una funzione con significato fisico), la soluzione (A5) deve potersi ridurre ad una FUNZIONE REALE (parte immaginaria NULLA) ⇒ un modo per ottenere questo risultato è richiedere che le costanti B_1 e B_2 siano complesse coniugate l'una dell'altra : $B_2 = B_1^*$

⇒ esprimendo B_1 in termini di esponenziali complessi avremo

$$\begin{cases} B_1 = Ae^{-i\gamma} \quad (\text{con } A, \gamma \in \mathbb{R}) \quad \text{e quindi} \\ B_2 = B_1^* = Ae^{+i\gamma} \end{cases}$$

⇒ la soluzione generale (A5) diviene così :

$$\phi(t) = Ae^{-i\gamma} e^{-\frac{b}{2m}t + i\omega_0' t} + Ae^{+i\gamma} e^{-\frac{b}{2m}t - i\omega_0' t} = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\left\{e^{i(\omega_0' t - \gamma)} + e^{-i(\omega_0' t - \gamma)}\right\}$$

$$\Downarrow \quad \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} = \cos\alpha\right)$$

$$\phi(t) = 2Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega_0' t - \gamma) = \boxed{Ce^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_0' t - \gamma) = \phi(t)} \quad \text{(A6)}$$

... e questa è la FUNZIONE REALE che volevamo....

(dove C, γ sono costanti REALI, da determinare con le condizioni iniziali....)

$\Rightarrow$ Come ultima considerazione,
possiamo anche giustificare meglio la scelta di considerare le costanti B_1 e B_2 come complessi coniugati ovvero

$$B_2 = B_1^*$$

$\Rightarrow$ Infatti, se vogliamo ottenere una soluzione $\phi(t)$ REALE (ovvero $\phi(t) \in \mathbb{R}$) partendo dalla soluzione generale COMPLESSA (eq. (A5)), potremo procedere considerando per tale soluzione complessa le condizioni iniziali come anch'esse COMPLESSE in generale, imponendo però che la parte immaginaria (sia di $\phi(t=0)$ che di $\dot{\phi}(t=0)$) SIA NULLA, come deve essere perchè siano effettivamente condizioni iniziali rappresentative per il nostro problema, cioè per la descrizione di un moto fisico.

Così, le nostre condizioni iniziali (intrinsecamente REALI) saranno esprimibili in campo complesso come

$$\begin{cases} \phi(0) = \phi_R(0) + i\phi_I(0) = \phi_0^{in} + i\phi_I(0) & \text{con } \phi_I(0) = 0 \\ \dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_R(0) + i\dot{\phi}_I(0) = 0 + i\dot{\phi}_I(0) & \text{con } \dot{\phi}_I(0) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ PARTE IMMAGINARIA NULLA

Le condizioni iniziali per la parte immaginaria di $\phi(t)$ (data dalla eq. (A5)) e per la sua derivata prima rispetto al tempo, cioè la velocità angolare $\dot{\phi}(t)$, si imporranno proprio richiedendo che sia la parte immaginaria di $\phi(t)$ che quella di $\dot{\phi}(t)$ risultino NULLE per $t=0$.

- Per imporre $\phi_I(t=0) = 0$, valutiamo anzitutto la soluzione generale data dall'eq. (A5), identifichiamone la parte immaginaria e, infine, uguagliamola a zero:

$$\Rightarrow \phi(t=0) = B_1 + B_2 = B_{1R} + iB_{1I} + B_{2R} + iB_{2I} =$$
$$= \underbrace{(B_{1R} + B_{2R})}_{\phi_R(0)} + i\underbrace{(B_{1I} + B_{2I})}_{\phi_I(0)}$$

per $t=0$ i termini esponenziali hanno tutti argomento NULLO e, dunque, sono uguali all'UNITÀ REALE!

$\Rightarrow$ dunque, $\phi_I(0) = B_{1I} + B_{2I} = 0 \Rightarrow \boxed{B_{2I} = -B_{1I}}$

condizione sui valori delle parti immaginarie delle costanti B_1 e B_2 $(\in \mathbb{C})$.

- Per imporre $\dot\phi_I(t=0)=0$, dobbiamo ricavarci $\dot\phi(t)$ derivando rispetto al tempo la soluzione generale complessa $\phi(t)$ (eq.(A5)), poi dobbiamo esprimere $\dot\phi(t=0)$ e ricavarne la parte immaginaria, $\dot\phi_I(0)$, che dovremo richiedere essere di valore nullo ($\dot\phi_I(0)=0$).

$\Rightarrow$ deriviamo $\phi(t)$ rispetto al tempo:

$$\dot\phi(t) = -\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t}\left[B_1 e^{i\omega_0' t} + B_2 e^{-i\omega_0' t}\right] + e^{-\frac{b}{2m}t}\left[i\omega_0' B_1 e^{i\omega_0' t} - i\omega_0' B_2 e^{-i\omega_0' t}\right] =$$

$$\Downarrow$$

$$\dot\phi(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}\left[\left(-\frac{b}{2m}+i\omega_0'\right)B_1 e^{i\omega_0' t} + \left(-\frac{b}{2m}-i\omega_0'\right)B_2 e^{-i\omega_0' t}\right]$$

$$\Rightarrow \dot\phi(t=0) = \left(-\frac{b}{2m}+i\omega_0'\right)B_1 + \left(-\frac{b}{2m}-i\omega_0'\right)B_2 =$$

Sostituiamo
$$\begin{cases} B_1 = B_{1R} + iB_{1I} \\ B_2 = B_{2R} + iB_{2I} \end{cases}$$

$$= \left(-\frac{b}{2m}+i\omega_0'\right)(B_{1R}+iB_{1I}) + \left(-\frac{b}{2m}-i\omega_0'\right)(B_{2R}+iB_{2I})$$

$$= \left[-\frac{b}{2m}B_{1R} - \omega_0' B_{1I} - \frac{b}{2m}B_{2R} + \omega_0' B_{2I}\right] + i\left[-\frac{b}{2m}B_{1I} + \omega_0' B_{1R} - \frac{b}{2m}B_{2I} - \omega_0' B_{2R}\right] =$$

$$= \dot\phi_R(0) + i\,\dot\phi_I(0)$$

$$\Rightarrow \dot\phi_I(0) = \boxed{0 = \left[-\frac{b}{2m}B_{1I} + \omega_0' B_{1R} - \frac{b}{2m}B_{2I} - \omega_0' B_{2R}\right]}$$

$$\Downarrow$$

tenendo conto che $B_{2I} = -B_{1I}$

$$0 = -\frac{b}{2m}(\cancel{B_{1I}} - \cancel{B_{1I}}) + \omega_0'(B_{1R} - B_{2R}) = \omega_0'(B_{1R} - B_{2R})$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad B_{1R} - B_{2R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{1R} = B_{2R}}$

condizione sui valori delle parti reali delle costanti B_1 e B_2 $(\in \mathbb{C})$.

$\Rightarrow$ mettendo insieme le due condizioni ricavate per le costanti B_1 e B_2 (complesse), otteniamo proprio

$$B_2 = B_{2R} + i B_{2I} = B_{1R} - i B_{1I} = B_1^* = \text{complesso coniugato di } B_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B_2 = B_1^*}$$

$\Rightarrow$ IN DEFINITIVA, dovendo la nostra soluzione $\phi(t)$ descrivere un MOTO FISICO [quello del PENDOLO SEMPLICE NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI IN PRESENZA DI ATTRITO] occorre richiedere che sia

$$\boxed{\phi(t) \in \mathbb{R}, \ \dot{\phi}(t) \in \mathbb{R} \quad \forall t},$$

per cui deve essere anche
$$\boxed{\begin{cases} \phi(t=0) = \phi(0) \in \mathbb{R} \\ \dot{\phi}(t=0) = \dot{\phi}(0) \in \mathbb{R} \end{cases}}.$$

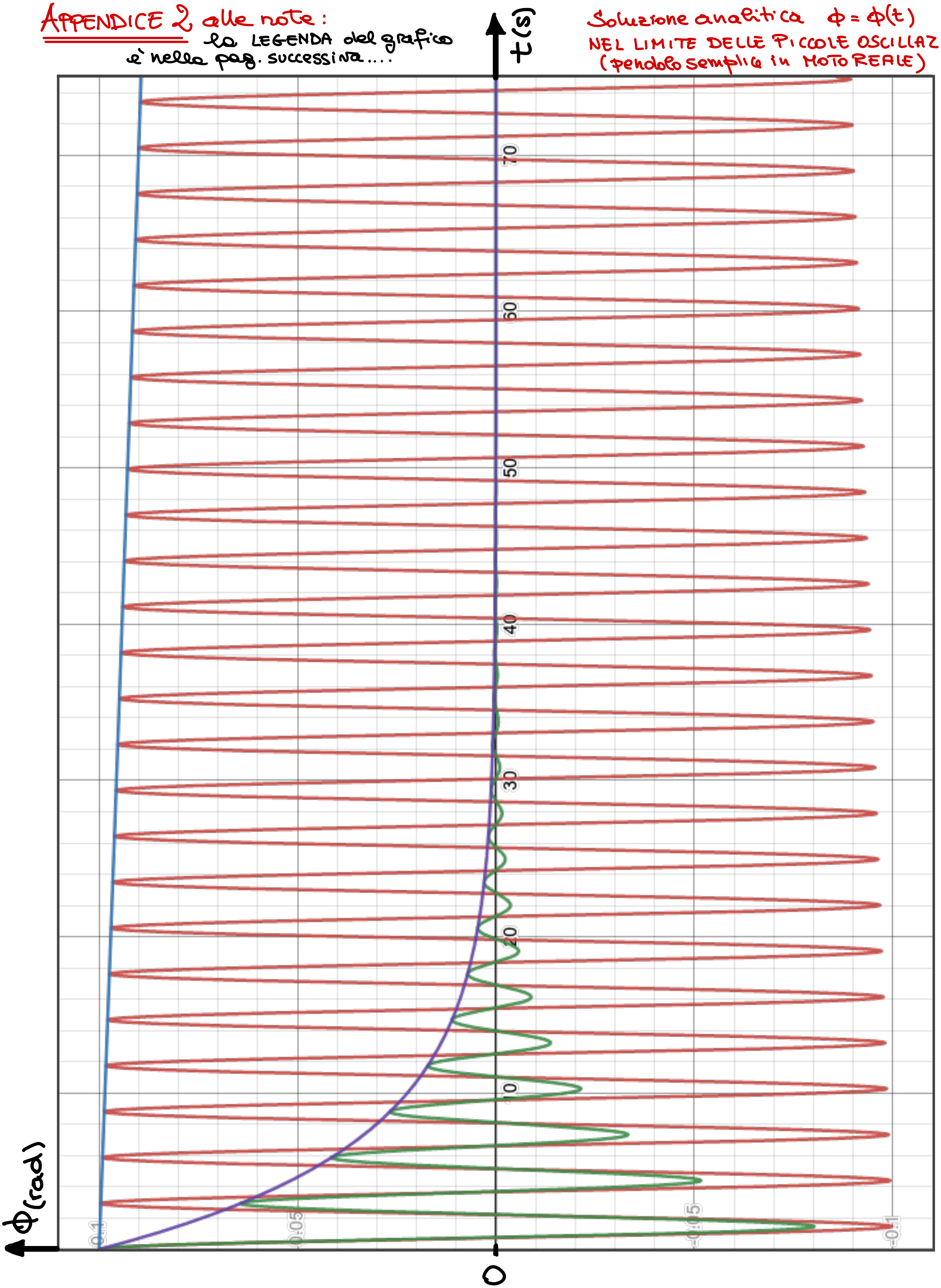
$\Rightarrow$ imponendo quindi che la parte immaginaria delle nostre condizioni iniziali sia NULLA, ovvero
$$\boxed{\begin{cases} \phi_I(0) = 0 \\ \dot{\phi}_I(0) = 0 \end{cases}},$$

si ottiene una condizione sulle costanti B_1 e B_2, che è proprio che una rappresenti il COMPLESSO CONIUGATO dell'altra $\Rightarrow \boxed{B_2 = B_1^*}$

$\Rightarrow$ come abbiamo visto, <u>SE</u> $B_2 = B_1^*$, la soluzione $\phi(t)$ che si ottiene risulta effettivamente una quantità REALE $[\phi(t) \in \mathbb{R} \ \forall t]$, come richiedevamo....

APPENDICE 2 alle note:
la LEGENDA del grafico è nella pag. successiva....

Soluzione analitica $\phi = \phi(t)$
NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI
(pendolo semplice in MOTO REALE)



LEGENDA: * il grafico mostra la soluzione analitica $\phi(t)$ nel LIMITE delle PICCOLE OSCILLAZIONI di un pendolo semplice in moto reale. La soluzione $\phi(t)$,

$$\phi(t) = \left[\phi_0^{in}\, e^{-\frac{b}{2m}t}\right]\left[\cos(\omega_0' t) + \sin(\omega_0' t)\tan\gamma\right], \qquad \left(\tan\gamma = \frac{b}{2m\omega_0'}\right)$$

è rappresentata dalle curve ROSSA e VERDE per 2 diverse scelte del parametro $\frac{b}{2m\omega_0}$ ($\sim 7\times10^{-4}$ per la curva rossa
$\sim 7\times10^{-2}$ per la curva verde)

* le curve azzurra e viola rappresentano la componente di smorzamento della funzione $\phi(t)$, ovvero la funzione $\left[\phi_0^{in}\, e^{-\frac{b}{2m}t}\right]$, rispettivamente per i 2 casi del parametro $\frac{b}{2m\omega_0}$ sopra menzionati.

* La curva di inviluppo azzurra (corrispondente alla soluzione in rosso per il LIMITE delle PICCOLE OSCILLAZIONI) è esemplificativa delle condizioni tipiche per i pendoli di laboratorio (smorzamento molto lento...).