Appunti di Metodi

Tommaso Miliani

27-02-26

1 Esempi

Teorema 1.1 (Calcolo del raggio di convergenza).
Il raggio di convergenza è dato da

$$R_a = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|a_n|}} \tag{1}$$

Esempio 1.1 (Serie geometrica).

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad z \in \mathbb{C}$$

Si è visto che il raggio di convergenza è esattamente 1. La somma di questa serie si può calcolare attraverso le somme parziali:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$$

Se $|z| < 1$ nel limite con $n \to \infty$, si ottiene esattamente

$$\frac{1}{1-z}$$

Se invece si fosse sul bordo del cerchio di convergenza, i termini non sono infinitesimi in nessun punto della circonferenza: anche se è limitata, non converge perché i termini non sono limitati.

Esempio 1.2 (Serie logaritmica).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \qquad z$$

Che si ottiene sviluppando il logaritmo. Si può far vedere che il raggio di convergenza non può essere maggiore di 1. Se il modulo è minore di 1, allora si maggiora con la serie geometrica. Altrimenti, se $|z| > 1$,

$$\frac{|z|^n}{n} \to \infty$$

Dunque il raggio di convergenza è ancora 1. Nel caso in cui ci si trovasse sulla circonferenza, nel caso di $z = -1$ diverge, altrimenti, se $z = 1$, converge. La convergenza si ha in tutti i punti della circonferenza tranne per -1.

Esempio 1.3 (Serie dilogaritmica).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$$

COn gli stessi ragionamenti il raggio di convergenza è uno. Converge per raggio minore di 1 poiché è maggiorata da altre serie (come le altre due). Nel caso in cui ci si trovi sul bordo, si può utilizzare il teorema del confronto

$$\frac{1}{n^2}|z|^n = \frac{1}{n^2}$$

Questo perché la serie $\frac{1}{n^2}$ converge a $\frac{\pi}{6}$.

Esempio 1.4 (Serie esponenziale).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Questa serie definisce l'esponenziale di z, questa serie è ∞ poiché il fattoriale cresce sempre più velocemente di z^n, per qualunque valore. Il fattoriale compensa qualsiasi potenza che avrà z e dunque tende rapidamente a zero per qualunque valore di z ed è convergente su tutto il piano complesso (si utilizza per definire l'esponenziale complesso).

Esempio 1.5 (Serie che non congerge mai, tranne che a zero).

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

Converge solo per $z = 0$ per le considerazioni fatte prima. Il suo raggio di convergenza è zero.

2 Serie di potenza come funzione di z

Fino ad ora si è visto il comportamento delle serie di potenze per un certo valore di z. Adesso si vuole vedere le serie delle potenze dal punto di vista funzionale. Una serie di potenze è una funzione di z definita sul cerchio di convergenza e dunque è possibile vederla come una serie di funzioni. Ci si vuole chiedere che tipo di convergenza si ha nello spazio di funzioni. Fino ad ora si è analizzata la convergenza puntuale delle serie, mentre ora si vuole vedere come convergono se sono interpretate come funzioni.

Definizione 2.1 (Norma infinito o sup-norma).
*SI definisce la **norma infinito** come*

$$\|f\|_\infty \equiv \sup\{|f(z)| : z \in X\} \tag{2}$$

Dove X è il dominio di f. Se si limita il modulo, questo sup ha un valore ben definito (altrimenti infinito). Se si considera l'insieme di tutte le funzioni su un determinato dominio, essa non è mai definita, poiché esistono sempre funzioni che divergono anche quando il dominio è ben definito (sulla frontiera). IN generale, se non si restringe il dominio delle funzioni che si considerano, allora essa non è una buona definizione di norma poiché diventerà infinita.

Adesso è possibile introdurre il seguente criterio.

Teorema 2.1 (Criterio della convergenza uniforme).
Essenzialmente questa è la convergenza in norma-infinito. Dato un insieme di funzioni

$$\{f_\infty\}_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C} \tag{3}$$

*Questa successione converge **uniformemente** a f finita se*

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon : \|f - f_\infty\|_\infty \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_\epsilon$$

Ossia

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_\infty\|_\infty > 0$$

n_ϵ non dipende da z, dunque per tutti i punti del dominio si ha convergenza nella stessa maniera. Graficamente, tutte le funzioni stanno in una sorta di "intorno" della funzione f. L'ampiezza di questo intervallo non dipende da z, garantendo la convergenza uniforme. Mentre per la convergenza puntuale non è detto: per alcuni valori di z posso andarci più velocemente o più lentamente di altri valori di z. Esistono dunque funzioni che convergono puntualmente ma non uniformemente.

Corollario 2.1.1.
convergenza uniforme $\implies$ convergenza puntuale. Non è vero il contrario.

È possibile creare uno spazio di funzioni in cui la norma-infinito è una vera norma? Sì se si restringe lo spazio alle funzioni limitate (su di un certo dominio X). Lo spazio $B(x)$ delle funzioni limitate in modulo, è uno spazio normato, con norma la norma-infinito. È facile vedere che questa norma è lineare e si annulla se e solo se f è nulla. L'unica proprietà non banale è la disuguaglianza triangolare.

$$|f(z) + g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$$

Ponendo il sup a destra e a sinistra, si ottiene

$$\sup |f(z) + g(z)| \leq \sup (|f(z)| + |g(z)|) \leq \sup |f| + \sup |g|$$

DUnque

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$B(x)$ è completo rispetto alla norma infinito, anche se la dimostrazione completa non è richiesta, si può impostare la dimostrazione nel seguente modo:
Presa una $\{f_n\}$ di Cauchy, punto per punto si ottiene, se $\|f - f_\infty\|_\infty < \epsilon$, $n, m > N_\epsilon$. Dunque punto per punto converge ad uno z fissato

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \implies f_n(z) \to f(z)$$

Come si dimostra che converge anche uniformemente? Si Prende

$$\lim_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|_\infty \to \|f_n - f\|_\infty < \epsilon$$

Per il passaggio precedente f_m va a f, dato che questa è minore di per la parte di prima, allora converge anche uniformemente con $n > N_\epsilon$.

2.1 Il sottospazio

Questo sottospazio ha le stesse proprietà di $B(x)$, che contiene funzioni limitate e continue, ossia lo spazio $C_b(x)$. Esso è

- Spazio normato con la norma-infinito
- Completo: non è equivalente alla completezza di $B(x)$; infatti non dice solo che la successione di funzioni limitate e continue converge a funzioni limitate, ma anche che le funzioni verso cui convergono sono anch'esse continue se ottenute con il limite uniforme.

Il limite uniforme permette di scambiare l'ordine delle funzioni limitate e continue: prese un insieme di funzioni $\{f_n\} \in C_b(x)$, si può fare il limite che tende all'infinito o ad un certo z_0. Questi due limiti si possono scambiare

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) \to f(z)$$
$$\lim_{z\to z_0} f_n(z) =?$$

Se si suppone che esista il primo limite in modo uniforme, e che esistano i limiti

$$\lim_{z\to z_0} f_n(z) = l_n < \infty$$

Allora

$$l = \lim_{n\to\infty} l_n$$

Esiste limitato e, inoltre,

$$l = \lim_{z\to z_0} f(z)$$

In altre parole

$$\lim_{z\to z_0} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(z) \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{z\to z_0} f_n(z) \right)$$

Quando si fanno questi limiti ci interessa porsi nell'intorno di z_0.

Esempio 2.1.
La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, anche se non è limita, si può limitare il dominio ad un intervallo più piccolo in cui essa è limitata, in quanto non ci interessa il resto del dominino, dunque in un punto come $x = 1$ il limite esiste finito.

2.2 La convergenza totale

Definizione 2.2 (Convergenza totale)**.**
Le serie di potenze

$$\sum_n f_n$$

Con f_n limitate, convergono totalmente se

$$\sum_n \|f_n\|_\infty$$

Converge.

Teorema 2.2.
Se $\sum_n f_n$ converge totalmente, allora essa converge uniformemente

Dimostrazione. La dimostrazione non è richiesta all'esame. Si definisce la ridotta

$$S_N \equiv \sum_{n=0}^{N} f_n$$

Si introduce la ridotta della serie delle norme come

$$\sigma \equiv \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_\infty$$

DUnque

$$\|S_{N+p} - S_N\|_\infty = \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|f_n\|_\infty = |\sigma_{N+p} - \sigma_N| \to 0$$

Si applica la disuguaglianza triangolare per trovare le maggiorazioni. Ottenendo dunque la convergenza uniforme . □

Esempio 2.2 (Funzione gradino)**.**
UNa funzione gradino è una funzione del tipo

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n < x < n+1 \\ 0 & \end{cases}$$

CIoè, essendo discontinua, è a gradini.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f$$

Converge a f. Tuttavia, per verificare che converga uniformemente si esegue la differenza tra f_n e la ridotta fino a N: in questo modo rimane tutti gli scalini da N a ∞. Dunque il massimo del modulo della funzione sarà

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} f_n - f \right\|_\infty = \frac{1}{N+1}$$

Se si fa la differenza tra le somme parziali, e la f finale converge, allora converge uniformemente. Tuttavia diverge assolutamente:

$$\sum \|f_n\|_\infty = \sum \frac{1}{n} \to \infty$$

Teorema 2.3.
Presa una serie $\{f_A\} \in B(x)$. Se esiste una serie C_n di numeri reali positivi tali che

$$\sum C_n < \infty$$

E tale che $\|f_n\|_\infty \leq C_n$, allora $\sum f_n$ converge totalmente.

Teorema 2.4.
Una serie di potenze (quando vista come spazio di funzioni), all'interno del cerchio di convergenza ha convergenza totale in un raggio $r < R_a$.

Dimostrazione. Si dimostra con il criterio del confronto. Presa una serie

$$\sum_n a_n z^n$$

Con raggio di convergenza R_a. Si considera il disco $B(0, r]$ di raggio r. Si considera ogni

$$f_n(z) = a_n z^n$$

Che è definita come un monomio (ci si stringe al disco). Si sa che, se si prendesse $r = |z|$, la serie $\sum_n a_n r^n < \infty$ si ha convergenza puntuale (in particolar modo è anche assoluta con $|a_n|$): $\sum |a_n| r^n < \infty$. Si valuta ora

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{|z| \le r} |f_n(z)| = \sup_{|z| \le r} |a_n| |z|^n \le |a_n| |r|^n$$

Si è maggiorato ogni norma infinito con un termine che è assolutamente convergente. Dunque anche la serie di funzioni a norma infinito converge con convergenza totale. □