Appunti FIsica Cuccoli

Tommaso Miliani

24-02-25

1 Esercizio

Data una giostra con un oggetto sopra (senza attrito), per un osservatore inerziale (esterno) la forza risultante sarà:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Per l'osservatore S fermo sul terreno l'accelerazione è dunque nulla poiché ci sono solo forze verticali che si bilanciano perfettamente. All'istante $t = 0$ si ha per lui:

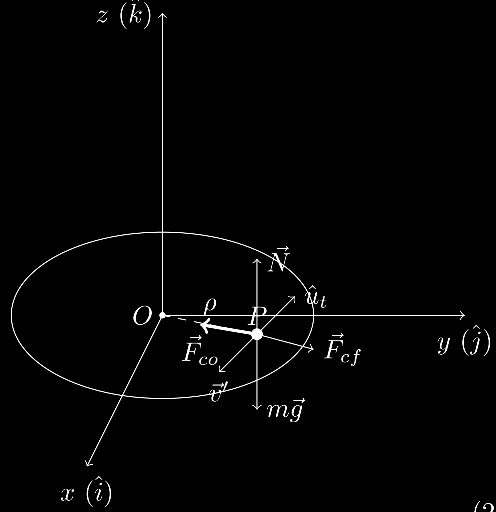
$$\left|\vec{OP}\right| = |\vec{d}| = \rho$$

$$\vec{v}(t = 0) = 0$$

Come ragiona l'osservatore S' la cui origine O' coincide con quella di O? L'osservatore è sulla giostra e quindi sugli oggetti agiscono anche altre forze che l'osservatore S definirebbe immaginarie. La prima di queste è la forza centrifuga:

$$\vec{F}_{cf} = m\omega^2 \rho \hat{u}_t \tag{1}$$

Figura 1: Giostra con oggetto sopra



Noi sappiamo che la velocità rispetto al SDR di S si esprime come (dato che all'istante $t = 0$ $\vec{v} = 0$):

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{2}$$

La componente $\vec{v}'$, che è propria del SDR di S' sarà quindi data (per definizione):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

A questo punto si esplicita :

$$\vec{v}'(t = 0) = -\omega\vec{d}\hat{u}_p$$

Dato che nel sistema di riferimento S' si osserva la forza di Coriolis; all'istante $t = 0$ esplicitando $\vec{v}'$ e ricordando che:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}'_{co} = m\vec{a}$$

Esplicitando $\vec{F}_{co}$ questa diventa (svolti tutti i passaggi):

$$-2m\left((\vec{\omega} \times \vec{r})\vec{\omega} - \omega'\vec{r}'\right)$$

Esplicitando generalmente attraverso i versori e le coordinate sull'asse z si ottiene la seguente relazione, che, una volta svolti tutti i passaggi, diventa:

$$\vec{F}_{co} = -2m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r\hat{u}_p) = -2m\omega^2\rho\hat{u}_p \tag{3}$$

La somma della forza centrifuga e di Coriolis ci permette di ottenere

$$\vec{F}_{co} + \vec{F}_{cf} = -m\omega^2\vec{d}\hat{u}_p \tag{4}$$

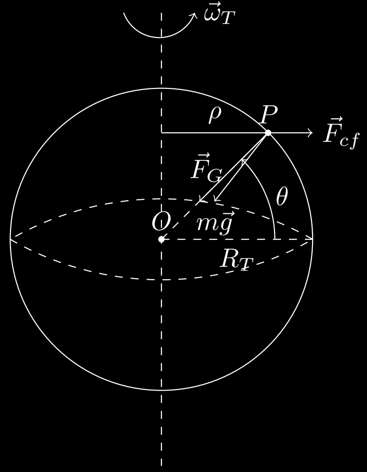
Proiettando sul piano si ottiene che questa somma è uguale proprio a $m\vec{a}'_{||}$. Si continua ad usare le notazioni vettoriali poiché nel piano i vettori hanno ancora due componenti e non posso dunque utilizzare la notazione scalare. Questa equazione nuova mi dice che

$$-\omega^2\vec{d}\hat{u}_p = \vec{a}'_{||} \tag{5}$$

Nell'istante $t = 0$ il mio corpo ha una sola accelerazione, ossia quella centripeta. Allora vuol dire che non c'è accelerazione tangenziale e quindi la velocità di rotazione è costante, essendo un moto circolare quell'accelerazione centripeta esiste facendo valere la relazione sopra nell'istante $t = 0$, ma questa vale anche per tutti gli altri istanti poiché si tratta di un moto C.U.

2 Un sistema di riferimento inerziale quasi perfetto: le stelle fisse

Figura 2:



Se facessimo degli esperimenti sulla Terra dovremmo riuscire a mettere in luce le forze apparenti di un SDR non inerziale. La Terra ruota intorno al proprio asse rispetto alle stelle fisse da Ovest verso Est e quindi mentre ruota su sé stessa con velocità angolare $|\vec{\omega}_T| = \frac{2\pi}{86'164}$ essa dovrebbe ritrovare il Sole nel medesimo punto ad ogni rivoluzione anche se questo non accade. Questo perché il giorno solare medio è più lungo del giorno sidereo, rispetto alle stelle fisse, infatti, la Terra ha compiuto un giro in più. Che conseguenza ha il fatto che la Terra non è un SDR inerziale?
Questo vuol dire che ci sono delle forze apparenti in tutti gli esperimenti e quindi rispetto alla Terra nei moti su larga scala intervengono queste forze apparenti. All'equatore per l'osservatore inerziale, un oggetto vicino alla Terra è soggetto alla forza di gravità dovuta all'interazione con la Terra (che si assume sferica), mentre per l'osservatore sulla Terra mi aspetto che ci sia una forza centrifuga. Usando un filo a piombo, la sua verticale non passerà per il centro della Terra ma sarà leggermente inclinata rispetto alla forza peso ideale a causa della forza centrifuga. Voglio calcolare allora il vero peso degli oggetti e misuro oltre che la direzione del pendolo anche la forza peso. Associo $\hat{u}_\rho$ il versore $\perp \hat{k}$ che giace nello stesso piano del versore $\hat{u}_r$ (il versore parallelo all'asse $\vec{OP}$) e che è il versore della centrifuga. Allora:

$$\hat{u}_r = \left(\cos\theta \vec{u}_\rho + \sin\theta \hat{k}\right) \tag{6}$$

La forza peso allora si esprimerà come:

$$m\vec{g} = \vec{F}_G + \vec{F}_{cf} = -mg_0\hat{u}_r + m\omega_T^2 + \rho\hat{u}_\rho \tag{7}$$

Dove g_0 è g senza la correzione della forza centrifuga, sostituendo allora quanto ottenuto prima si ottiene.

$$m\vec{g} = m\left(\cos\theta\left(-g_o + \omega_T^2 R_T\right)\hat{u}_\rho + g_0\sin\theta\hat{k}\right) \tag{8}$$

Volendo ora calcolarne il modulo, si ottiene la seguente:

$$|g| = \sqrt{\cos^2\theta\,(g_0^2 + \omega_T^4 R_T^2 - 2g_0\omega_T^2 R_T) + g_0^2\sin^2\theta} \tag{9}$$

Che sostituendo, raccogliendo e semplificando si ottiene:

$$|g| = \sqrt{g_0^2\left(1 - \frac{2\omega_T^2 R_T}{g_0}\cos^2\theta + \left(\frac{\omega_T^2 R_T}{g_0}\right)^2\cos^2\theta\right)} \tag{10}$$

Usando lo sviluppo di Taylor allora si può semplificare i coseni (in particolare il primo) poiché hanno un contributo molto piccolo e quindi:

$$|g| \approx g_0\left(1 - \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0}\cos^2\theta\right) \tag{11}$$

L'accelerazione al polo è $g_{polo} = 9.823 m/s^2$ e quella all'equatore $g_{eq} = 9.789 m/s^2$ poiché la Terra è un ellissoide di rotazione e la forza di Coriolis ha fatto schiacciare la Terra in modo tale che all'equatore il raggio terrestre sia più grande che ai poli. Preso un triangolo i cui lati sono la forza centripeta, uno la forza di gravità vera e una quella ideale, applicando la trigonometria si ottiene l'espressione dell'angolo tra le due forze (δ):

$$\frac{F_{cf}}{\sin\delta} = \frac{\sin g}{\sin\theta}$$

$$\sin\delta \approx \frac{\omega_T^2 R_T}{g_0}\cos\theta\sin\theta$$