

# Analisi (Bianchini)

Tommaso Miliani

06-11-25

## 1 Equazioni differenziali associate alla famiglia di curve

Dove

$$F_c(x, y) = 0$$

Sono famiglie parametriche di curve con  $c \in \mathbb{R}$ . Se una curva parametrica è regolare questo vuol dire che deve essere  $C^1$  e il vettore derivato ha norma diversa da zero.

$$F_c \in C^1(A) \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

Curve regolari localmente sono grafici di funzioni. Se una curva è regolare l'unica cosa che può succedere è che

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$$

Quindi cerco  $y = y(x)$  tale che  $F_c(x, y) = 0$  che, per il teorema del Dini è un grafico di funzione. Dato che è costante, anche la sua derivata lo deve essere, dunque

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_c(x, y(x))) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{I}$$

Ossia

$$\frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + y'(x) \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} = 0$$

$\forall c \in \mathbb{R}$  vale questo. Dato che si hanno due equazioni in due incognite, è possibile risolvere il sistema per determinare  $x$  e  $c$

**Esempio 1.1.**

$$y = cx^2 \quad F_c(x, y) = y - cx^2$$

E dunque la derivata rispetto ad  $x$  della funzione parametrica

$$y' - 2cx = 0 \quad c = \frac{y}{x^2}$$

Dunque

$$y' - 2\frac{y}{x} = 0 \implies xy' - 2y = 0$$

Imponendo le condizioni  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$  per trovare una famiglia di parabole a doppia funzione con vertice coincidente in  $V = (0, 0)$ .

### 1.1 Ricerca di traiettorie ortogonali a $F_c(x, y) = 0$

**Definizione 1.1** (Traiettorie ortogonali).

Le traiettorie ortogonali sono curve che intersecano in un unico punto ogni curva della famiglia e in tale punto sono ortogonali con la curva stessa. Ossia i rispettivi vettori tangenti sono perpendicolari tra di loro

Ossia la curva di partenza e quella derivata sono

Figura 1:

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix}_{t \in J}$$

Dunque passano per lo stesso punto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} = \exists t \in J : \begin{pmatrix} t \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix}$$

E inoltre sono perpendicolari i loro vettori derivati (e quindi anche loro lo sono):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ u'(t) \end{pmatrix}_{t=x} \implies 1 + y'(x)u'(x) = 0 \implies u'(x) = -\frac{1}{y'(x)}$$

Posso allora trovare l'equazione differenziale omogenea per le traiettorie ortogonali come

$$f(x, u(x), -\frac{1}{u'(x)}) = 0$$

### Esempio 1.2.

Cerco le traiettorie ortogonali alla famiglia di parabole localmente ai grafici  $(x, u(x))$  che deve soddisfare  $f(x, u, -\frac{1}{u'}) = 0$ . Riprendendo l'esempio di prima deve risultare che

$$-\frac{1}{u'(x)} - 2\frac{u}{x} = 0 \implies 2uu' - x = 0$$

Per cui si ottiene, integrando che

$$u^2 = -\frac{x^2}{2} + k \quad k \in \mathbb{R}$$

Dunque

$$u^2 + \frac{x^2}{2} = k$$

### Esempio 1.3.

Trovare le curve regolari localmente grafico di  $y(x)$  tale che  $\forall (x, y) \in \gamma$ , la distanza di  $(x, y)$  da  $Q$  è  $d(Q, u(0))$  dove  $Q$  è la retta tangente a  $\gamma$  del punto  $(x, y)$  e l'asse  $y$ .

$$\gamma : \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Per il teorema del Dini è localmente grafico. Allora la retta tangente nel punto  $(x, y(x))$  è proprio

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix} \tau + \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \quad \tau \in \mathbb{R}$$

Allora

$$Y - y = y'(x)(X - x) \implies Q = \begin{pmatrix} 0 \\ y - xy'(x) \end{pmatrix}$$

Imponendo le distanze al quadrato si ottiene l'equazione differenziale

$$2xyy' = 1 + x^2 + y^2$$

Con  $2yy' = (y^2)'$  si ha che  $u(x) = y^2(x)$  e dunque:

$$xu' = 1 - x^2 + u \implies u' - \frac{u}{x} + \frac{x^2 - 1}{x} = 0$$