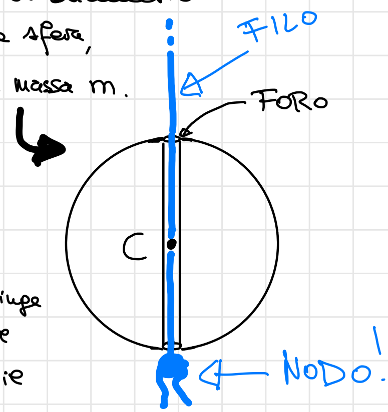
APPARATO SPERIMENTALE DELL'ESPERIENZA DEL PENDOLO

- come è realizzato il pendolo in laboratorio ....

  * sferetta di piombo con un foro praticato lungo un diametro per il passaggio del filo che si aggancia sotto la sfera, all'uscita dal foro, con un nodo. SFERA OMOGENEA con raggio R e massa m.

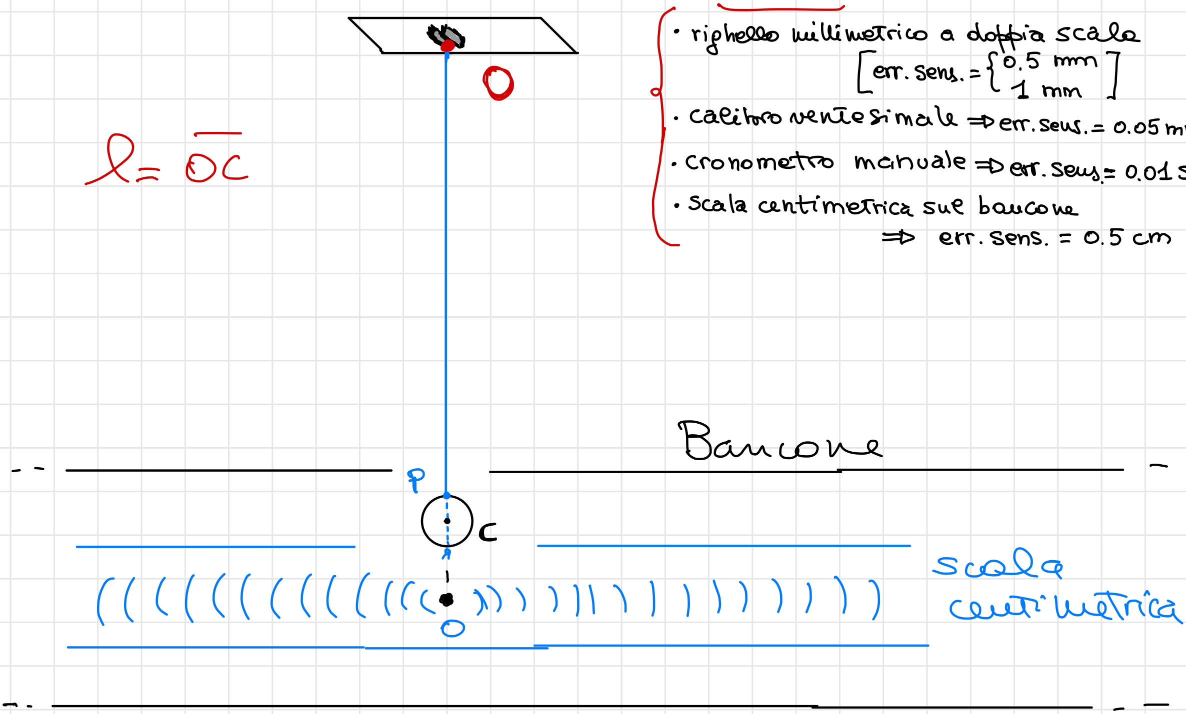


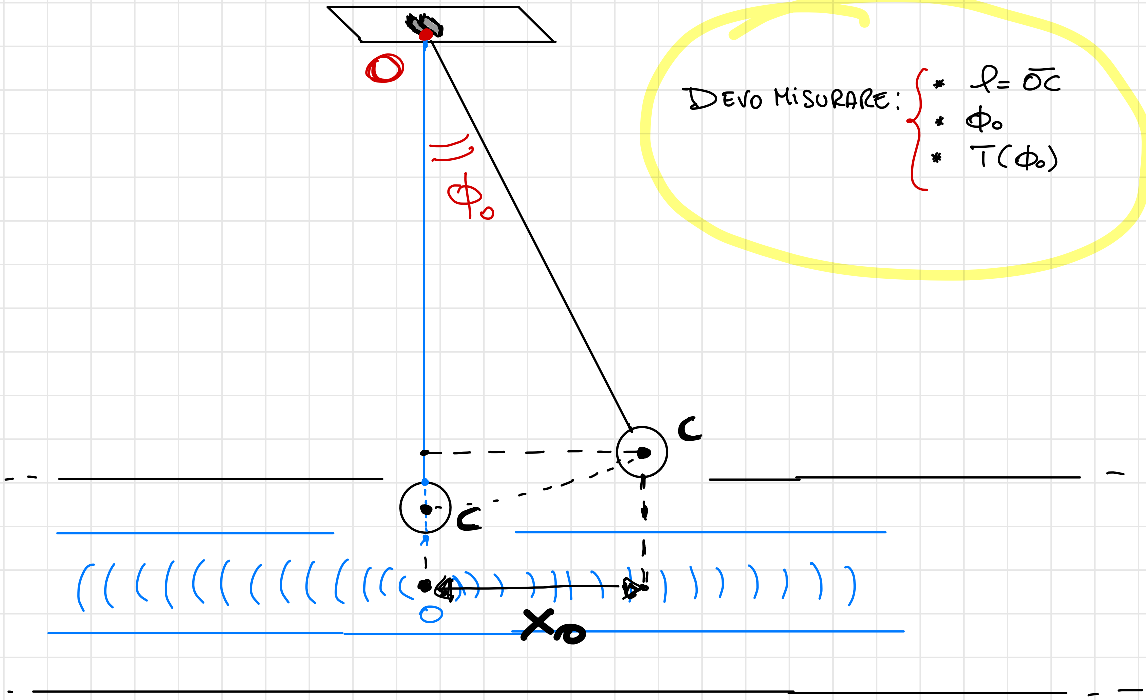
* REALIZZAZIONE DEL PUNTO DI SOSPENSIONE

⇒ il morsetto serrato stringe il filo e lo blocca ⇒ il punto di sospensione O è il punto in cui il filo esce dal morsetto serrato

* STRUMENTI:

- righello millimetrico a doppia scala [err. sens. = $\begin{cases} 0.5 \text{ mm} \\ 1 \text{ mm} \end{cases}$]
- calibro ventesimale ⇒ err. sens. = 0.05 mm
- cronometro manuale ⇒ err. sens. = 0.01 s
- scala centimetrica sul bancone ⇒ err. sens. = 0.5 cm

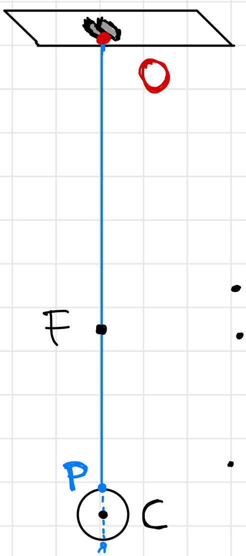




DEVO MISURARE: $\begin{cases} * \ \ell = \overline{OC} \\ * \ \phi_0 \\ * \ T(\phi_0) \end{cases}$

• MISURA DI ℓ = LUNGHEZZA DEL PENDOLO $\equiv \overline{OC}$

$\Rightarrow \ell \pm \Delta\ell$



• ℓ = distanza fra punto di sospensione O e punto materiale C (coincidente per noi col centro geometrico della sferetta)

$\Rightarrow \ell = \overline{OP} + \overline{PC} = \overline{OP} + R$

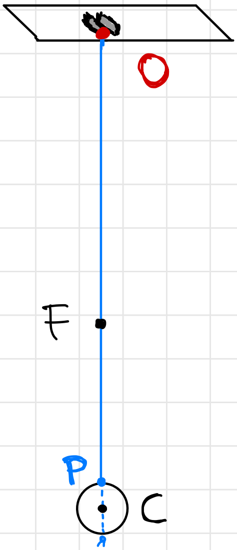
dove $\begin{cases} \overline{OP} = \text{lunghezza del tratto di filo libero} \\ R = \text{raggio della sferetta} \end{cases}$

• in laboratorio, COME ORDINE DI GRANDEZZA, $\ell \simeq 200$ cm

• la lunghezza del tratto $\overline{OF}$ (F = punto segnato sul filo di laboratorio in modo ben distinguibile!) è già misurata e vi viene fornita in laboratorio $\Rightarrow \overline{OF} = H_0 \pm \Delta H_0$

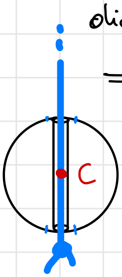
• utilizzando il righello millimetrico, ($\Delta H_0 \simeq 2$ mm) dopo avere scelto una delle due scale di lettura, dovrete misurare IL RESTANTE TRATTO DI FILO LIBERO:

$\overline{FP} = H \pm \Delta H$ $\Longrightarrow$



⇒ $\overline{FP} = H \pm \Delta H$ ⟸ valore medio di una serie di 6-7 misure, con incertezza definita dallo scarto max rispetto alla media, se maggiore dell'err. di sensibilità della scala scelta, altrimenti dall'err. di sensibilità ....

* poiché $\ell = H_0 + H + R$, dovremo misurare anche il raggio R della sfera ⇒ misura INDIRETTA perché col CALIBRO potremo misurare DIRETTAMENTE il diametro d ⇒ $R = \frac{d}{2}$



⇒ misura di d: la sferetta non è perfettamente lavorata ⇒ a noi interessa il diametro lungo la direzione del filo (cioè del foro) ⇒ 6-7 misure del diametro "attorno" alla regione del foro, da cui ricaveremo la media e l'incertezza Δd come scarto massimo rispetto alla media, se maggiore dell'errore di sensibilità del calibro .....

⇒ ricaviamo R ⇒ $R = \frac{d}{2} \pm \frac{\Delta d}{2}$

- le sferette in uso in lab. hanno $d \simeq 4-5\,cm$ ⇒ $\frac{R}{\ell} \sim \frac{2\,\cancel{cm}}{200\,\cancel{cm}} \simeq 10^{-2} \ll 1$ ok!

$$\Rightarrow \ell = \left(H_0 + H + \frac{d}{2}\right) \pm \underbrace{\left(\Delta H_0 + \Delta H + \Delta\frac{d}{2}\right)}_{\Delta\ell}$$

- Se dovessimo dare una stima "a priori" [MA NON VI VIENE RICHIESTA PER QUESTA ESPERIENZA (TABULATO da redigere, come elaborato)] dovremmo usare gli errori di sensibilità degli strumenti usati ⇒

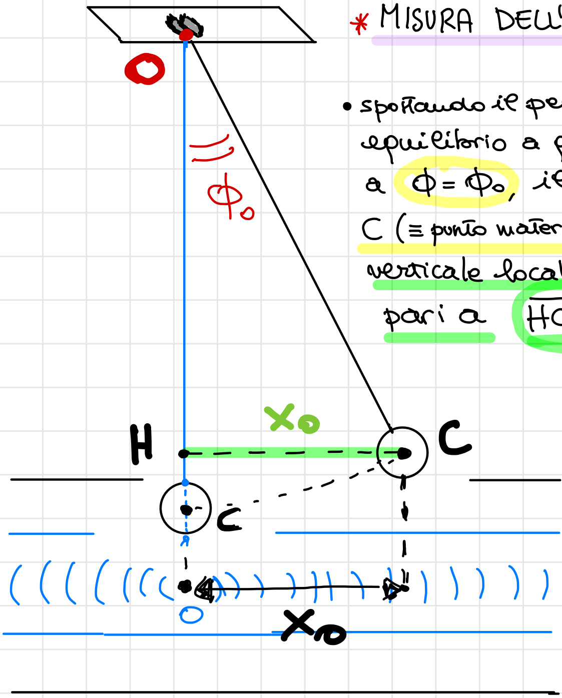
$$(\Delta\ell)_{a\,priori} = \left(\Delta H_0 + \Delta H + \Delta\frac{d}{2}\right)_{a\,priori} = (1\,mm + 1\,mm + 0.03\,mm) \simeq 2\,mm \Rightarrow \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_{a\,priori} \simeq \frac{2\,\cancel{mm}}{2\times10^3\,\cancel{mm}} \simeq 10^{-3}$$

- Volendo dare una stima INDICATIVA e PURAMENTE ESEMPLIFICATIVA dell'ERRORE SPERIMENTALE ("A POSTERIORI") che possiamo aspettarci su ℓ......
  - * $\Delta H_0 \simeq 2\,mm$ (fornito dai docenti....)
  - * $\Delta H \simeq 1\,mm$
  - * $\Delta d \simeq 0.1-0.2\,mm$

  ⇒ VALORI PURAMENTE ESEMPLIFICATIVI! ⇒ dipendono in realtà dalle VOSTRE MISURE !!)

⇒ $\Delta\ell \simeq (2+1+0.1)\,mm \simeq 3\,mm \Rightarrow \frac{\Delta\ell}{\ell} \simeq \frac{3\,\cancel{mm}}{2\times10^3\,\cancel{mm}} \simeq 1.5\times10^{-3} \simeq \left(\frac{\Delta\ell}{\ell}\right)_{sperim}$

* MISURA DELL'AMPIEZZA ANGOLARE DELL'OSCILLAZIONE Φ_0



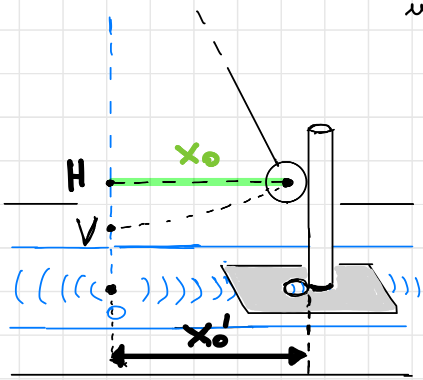
- spostando il pendolo dalla sua posizione di equilibrio a quella scelta per il rilascio, corrispondente a $\Phi = \Phi_0$, il centro di massa della sferetta (omogenea) C (≡ punto materiale....) si troverà ad una distanza dalla verticale locale passante per il punto di sospensione O pari a $\overline{HC} = x_0$ ⇒ $\sin\Phi_0 = \frac{\overline{HC}}{\overline{OC}} = \frac{x_0}{\ell}$

$$\Rightarrow \Phi_0 = \arcsin\left(\frac{x_0}{\ell}\right)$$

⇓

dalla misura di ℓ ed x_0 possiamo ricavare la misura di Φ_0

- COME MISURIAMO x_0 ?



- ci aiutiamo con un semplice dispositivo: un cilindretto montato su una base che presenta un foro, il quale consente di leggere sulla scala centimetrica la posizione del cilindro, montato in modo da essere normale alla base ⇒ sia x_0' questa lettura.

⇒ SE AL RILASCIO mettiamo la sferetta in tangenza al cilindro avremo

$$x_0 = x_0' - R$$

e potremo quindi misurare indirettamente x_0 dalla lettura di x_0' e usando la misura del raggio R della sferetta già effettuata. ⇒ misura DIRETTA!

- per x_0' avremo come incertezza l'errore di sensibilità della scala centimetrica ⇒ $\Delta x_0' = 0.5\,cm$

$$\Rightarrow \Delta x_0 = \Delta x_0' + \Delta R \simeq \Delta x_0' = 0.5\,cm \qquad \text{dato che } \Delta R \ll 0.5\,cm \;!!$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x_0 \simeq \Delta x_0' = 5\,mm}$$

* possiamo quindi determinare $\Phi_0 = \Phi_0(\ell, x_0)$, ma ci resta da definirne l'INCERTEZZA ASSOCIATA, $\Delta\Phi_0$... ⇒

* INCERTEZZA SULLA MISURA DELL'AMPIEZZA ANGOLARE ϕ_0

- abbiamo visto che $\phi_0 = \phi_0(\ell, x_0) = \arcsin\left(\frac{x_0}{\ell}\right)$

$\Rightarrow$ per ricavare l'incertezza $\Delta\phi_0$ dovremo PROPAGARE le incertezze sulle due grandezze da cui ϕ_0 dipende, ovvero $\Delta\ell$ e Δx_0

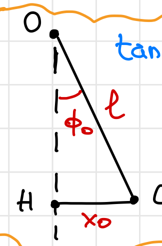
$\Rightarrow$ conviene procedere partendo dalla relazione $\boxed{\sin\phi_0 = \frac{x_0}{\ell}}$, utilizzando il metodo "delle derivate logaritmiche" $\Rightarrow$ differenziando il logaritmo naturale della relazione $\sin\phi_0 = \frac{x_0}{\ell}$, avremo

$$d\ln(\sin\phi_0) = d\ln\left(\frac{x_0}{\ell}\right) \Rightarrow \frac{d\sin\phi_0}{\sin\phi_0} = d[\ln x_0 - \ln\ell] = d\ln x_0 - d\ln\ell$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\sin\phi_0}{\sin\phi_0} = \frac{dx_0}{x_0} - \frac{d\ell}{\ell} \Rightarrow \frac{\cos\phi_0\, d\phi_0}{\sin\phi_0} = \frac{dx_0}{x_0} - \frac{d\ell}{\ell} \Rightarrow d\phi_0 = \tan\phi_0\left(\frac{dx_0}{x_0} - \frac{d\ell}{\ell}\right)$$

$$\Rightarrow d\phi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}}\left(\frac{dx_0}{x_0} - \frac{d\ell}{\ell}\right) = \frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}}\frac{dx_0}{x_0} - \frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}}\frac{d\ell}{\ell}$$



$\Rightarrow$ passando ai valori finiti otterremo l'incertezza $\Delta\phi_0$ come:

$$\boxed{\Delta\phi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}} \cdot \left(\frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta\ell}{\ell}\right)}$$

* Proviamo a dare una valutazione PURAMENTE ESEMPLIFICATIVA dell'ordine di grandezza dell'incertezza $\Delta\phi_0$ che ci possiamo aspettare di ottenere in laboratorio ....
Utilizzeremo delle stime rappresentative, ma solo esemplificative, per le grandezze in gioco: OVVIAMENTE, in laboratorio voi dovrete UTILIZZARE LE VOSTRE SPECIFICHE MISURE E LE INCERTEZZE DA VOI RICAVATE !!

$\Longrightarrow$

* STIMA "ESEMPLIFICATIVA" DI $\Delta\phi_0$ ....

$$\Delta\phi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}} \cdot \left(\frac{\Delta x_0}{x_0} + \frac{\Delta \ell}{\ell}\right)$$

$$\left[\sin\phi_0 = \frac{x_0}{\ell}\right]$$

- prendiamo per il nostro ESEMPIO

$$\begin{cases} \ell \simeq 2\times10^3 \text{ mm} & \Delta\ell \simeq 3 \text{ mm} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\ell}{\ell} \simeq 1.5\times10^{-3}} \\ x_0 \simeq 40 \text{ cm} & \Delta x_0 = 0.5 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta x_0}{x_0} = \frac{5\times10^{-1}\cancel{\text{cm}}}{4\times10^{1}\cancel{\text{cm}}} = 1.25\times10^{-2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ RICORDANDO che ci interessa una STIMA DELL'ORDINE DI GRANDEZZA DI $\Delta\phi_0$, con questi valori risulta:

$$\boxed{\sin\phi_0 = \frac{x_0}{\ell} = \frac{4\times10^1\cancel{\text{cm}}}{2\times10^2\cancel{\text{cm}}} = 0.2}$$

$$\phi_0 = \arcsin\frac{x_0}{\ell} \simeq \frac{x_0}{\ell} + \frac{1}{6}\left(\frac{x_0}{\ell}\right)^3 + o\left(\left(\frac{x_0}{\ell}\right)^3\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\phi_0 \simeq 0.2 + \frac{1}{6}(2\times10^{-1})^3 \simeq 0.2 + \frac{8}{6}\times10^{-3} \simeq 0.201 \text{ rad} \simeq 11.5^\circ$$

· possiamo poi stimare

$$\frac{x_0}{\sqrt{\ell^2 - x_0^2}} = \tan\phi_0 \simeq \phi_0 + \frac{\phi_0^3}{3} + o(\phi_0^3) \simeq 0.201 + \frac{8}{3}\times10^{-3} = 0.201 + 2.\bar{6}\times10^{-3} \simeq \boxed{0.204 \simeq \tan\phi_0}$$

$$\Delta\phi_0 \simeq 0.204\,(\underbrace{1.25\times10^{-2}}_{\frac{\Delta x_0}{x_0}} + \underbrace{0.15\times10^{-2}}_{\frac{\Delta\ell}{\ell}})\text{ rad} = 0.204\cdot 1.4\times10^{-2}\text{ rad} \simeq 2.8\times10^{-3}\text{ rad}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\phi_0 \simeq 0.003 \text{ rad}}$$

$\Rightarrow$ $\Delta\phi_0$ cresce molto lentamente col crescere di ϕ_0 (e quindi di x_0) e nel nostro intervallo operativo di ampiezze angolari (indicativamente fra $\sim 10^\circ$ e $\sim 25^\circ$) tipicamente si mantiene approssimabile come $\Delta\phi_0 \simeq 0.003$ rad.