Analisi I

Tommaso Miliani

2024/2025

Indice

Capitolo 1

Numeri e funzioni reali

1.1 Premessa

Come postulato si assume l'esistenza di un *insieme di numeri reali* che si indica con R su cui sia possible eseguire le quattro operazioni fondamentali (+, -, ·, /).

$$a + b = b + a \tag{1.1}$$
$$a \cdot b = b \cdot a \tag{1.2}$$

1.2 Assiomi dei numeri reali

Questi sono gli **assiomi relativi alle operazioni**.

Definizione 1.1. *Proprietà associativa.*

Definizione 1.2. *Proprietà commutativa.*

Definizione 1.3. *Proprietà distributiva.*

Definizione 1.4. *Esistenza degli elementi neutri: 0, 1* $\Rightarrow a + 0 = a$ *e* $a \cdot 1 = a$.

Definizione 1.5. *Esistenza degli opposti:* $\forall a \in R, \exists a_1 \in R$ *scritto come* $-a$ *tale che* $a + (-a) = 0$.

Definizione 1.6. *Esistenza degli inversi:* $\forall a \in R$, *con* $a \neq 0, \exists a_1 \in R$, *indicato come* a^{-1} *tale che* $a \cdot (a^{-1}) = 1$.

Di seguito sono elencati gli **assiomi relativi all'ordinamento**. E' definita la relazione tra *minore* o *uguale* tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

Definizione 1.7. *Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali* a, b *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$.

Definizione 1.8. *Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni* $a \leq b$ $b \leq a$ *allora* $a = b$.

Definizione 1.9. *Se* $a \leq b$ *allora vale anche* $a + c \leq b + c$.

Definizione 1.10. *Se* $0 \leq a$ *e* $0 \leq b$ *allora valgono anche* $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$

Assioma di completezza
Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano $a \in A$ e $b \in B$. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.

1.3 Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali

Elencate tutte le proprietà dei numeri reali, che vengono assunte come assiomi, tutte le altre proprietà dei numeri reali discendono da questi assiomi.

Teorema 1.1. *Vale la regola della semplificazione della somma: se $a + b = a + c$, allora $b = c$. Dimostrabile attraverso l'utilizzo degli assiomi dell'esistenza degli elementi neutri e degli opposti.*

Teorema 1.2. *Vale la semplificazione rispetto al prodotto: se $a \cdot b = a \cdot c$ e se $a \neq 0$, allora $b = c$.*

Teorema 1.3. *Il prodotto $a \cdot b$ è nullo se e soltanto se almeno uno dei due fattori è nullo. Per l'assioma degli elementi neutri lo zero è l'elemento neutro rispetto alla somma cioè $a + 0 = 0$ $\forall a \in R$. Ricordando anche che $a \cdot 1 = a$, allora*

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0.$$

$$a + a \cdot 0 = a + 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Supponendo ora che $a \cdot b = 0$ se $a = 0$ la tesi è raggiunta, altrimenti esiste un'inverso di a che chiamiamo a^{-1}.

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot a^{-1}) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

Il (1.3) spiega perché non è possible la divisione per zero. Infatti, dal momento che a^{-1} esiste solo se $a \neq 0$, se $a = 0$ allora $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$ per ogni numero reale b e perciò non esiste un numero reale 0^{-1} tale per cui $0 \cdot 0^{-1} = 1$

Teorema 1.4. *L'opposto di un numero reale è unico.*
In base all'assioma (1.5) $\forall a \in R \exists$ l'opposto di a indicato come $-a$, tale che $a + (-a) = 0$. Se supponiamo che $a + b = 0$ allora per il teorema(1.1) si ha $-a = b$. Quindi l'opposto è unico.

Teorema 1.5. *L'inverso di un numero reale non nullo è unico.*
Dimostrazione identica a quella del(1.4).

Teorema 1.6. *$\forall a \in R$ vale $-(-a) = a$.*
Il numero $-(-a)$ è per def. l'opposto di $-a$ cioè $a = -(-a)$ per la (1.4).

Teorema 1.7. *$\forall a, b \in R$ risulta che $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.*
Per la proprietà distributiva si ha che:

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

Per cui $(-a) \cdot b + a \cdot b = 0$. Ossia $(-a) \cdot b = -a \cdot b$.

Teorema 1.8. *$\forall a, b \in R$ risulta che $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.*
La dimostrazione fa uso della conseguenza della 1.7 e dell'assioma 1.2, seguendo poi la 1.6.

Gli assiomi del paragrafo 2 si riferiscono alla $\leq$ ma è possibile estendere le loro definizioni al $\geq$. Infatti:

$$a \geq b \Leftrightarrow b \leq a.$$

Infine minore e maggiore stretto sono definite come:

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b, a \neq b;$$

$$a > b \Leftrightarrow a \geq b, a \neq b.$$

Teorema 1.9. *La relazione $a \leq b$ è equivalente a $b - a \geq 0$.*
Questo si dimostra con l'assioma 1.9: se $a \leq b$ per l'assioma 1.9 si ha:

$$a - b \leq b - b = 0.$$

Viceversa se $b - a \geq 0$ sempre per l'assioma 1.9 e per l'associativa si ha:

$$a = 0 + a \leq (b - a) + a = b + ((-a) + a) = b.$$

Teorema 1.10. *Proprietà transitiva dell'ordinamento: se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$.*
Supponendo che $a \leq b$ e $b \leq c$ per la precedente $0 \leq b - a$, $0 \leq c - b$. Dall'assioma 1.10 si ottiene che

$$0 \leq (b - a) + (c - b) = c - a.$$

che equivale per il teorema 1.9 ad $a \leq c$.

Teorema 1.11. *Risulta* $a \geq 0$ *se e soltanto se* $-a \leq 0$.
Per l'assioma 1.9 se $0 \leq a$ *allora*

$$0 + (-a) \leq a + (-a),$$

cioè se $-a \leq 0$. *Viceversa se* $-a \leq 0$ *allora* $a + (-a) \leq a$.

Teorema 1.12. *Se* $a \leq b$ *e* $c \geq 0$ *allora* $a \cdot c \geq b \cdot c$.
Se $a \leq b$ *allora per il teorema 3.9 anche* $0 \leq b - a$ *da cui per l'assioma 1.10 e per la distributiva si ha:*

$$0 \leq (b - a) \cdot c = b \cdot c - a \cdot c,$$

cioè $a \cdot c \geq b \cdot c$.

Teorema 1.13. *Se* $a \leq b$ *e* $c \leq c$ *allora* $a \cdot c \geq b \cdot c$.
Stessa dimostrazione di quella sopra.

Riprendendo l'assioma di completezza 1.11, la formulazione più immediata è quella dell'*assioma di Dedekind*. Per cui: $\forall A, B \subset R \exists! c$ *tale che* $a \leq c \leq b, \forall a \in A$ *e* $\forall b \in B$. (Equivalente all'assioma 1.11).

1.4 Cenni alla teoria degli insiemi

Appartiene: $x \in S$.
Non appartiene: $x \notin S$.
Sottoinsieme: $A \subset S$.
Se A e B sono due sottoinsiemi di S, l'intersezione è gli elementi comuni ai due in S.

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}. \tag{1.3}$$

L'unione è l'insieme di elementi che appartengono almeno ad A o B in S.

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}. \tag{1.4}$$

A è contenuto in B se ogni elemento di A appartiene a B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B). \tag{1.5}$$

Il complemento di B rispetto ad A $(A - B)$ è l'insieme di elementi di A che $\neq$ B.

$$A - B = \{x \in S : x \in A \wedge x \notin B\}. \tag{1.6}$$

Il complementare di B rispetto ad A (se A = S) si indica come B^c e si ha che

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c. \tag{1.7}$$

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di S si indica come P(S) e si chiama *insieme delle parti di S*.
Siano A e B due insiemi. Si chiama *prodotto cartesiano* di A e di B e si indica come $A \times B$ l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con la prima coordinata appartenente ad A e la seconda appartenente a B.

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a', b = b' \tag{1.8}$$

Nel caso in cui A = B, $A \times B$ è una relazione binaria. Una relazione binaria $\Re$ si chiama *relazione di equivalenza*, se ha le seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $\forall a \in A$ si ha $(a, a) \in \Re$,
2. *simmetrica*: $(a, b) \in \Re \Rightarrow (b, a) \in \Re$,
3. *transitiva*: $(a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re \Rightarrow (a, c) \in \Re$.

Se $(a, b) \in \Re$ si scrive $a \sim b$ e si dice che a e b sono equivalenti o in relazione.
Indicando con [a] la *classe di equivalenza* di $a \in A$, cioè l'insieme degli elementi appartenenti equivalenti ad a, due classi possono coincidere o essere prive di elementi comuni. L'insieme delle classi di equivalenza si chiama *insieme quoziente* e si indica come $A/\Re$ ossia:

$$A/\Re = \{[a] : a \in A\}. \tag{1.9}$$

Una relazione binaria in $\Re$ su A si chiama *relazione d'ordine* se gode delle seguenti proprietà:

1. *riflessiva*
2. *transitiva*
3. *asimmetrica*: se $(a, b) \in \Re \wedge (b, a) \in \Re \Rightarrow a = b$.

1.5 Accenno agli insiemi numerici

Qui di seguito sono elencati gli insiemi numerici senza alcun tipo di proprietà, le quali verranno esaminate nel prossimo capitolo.

- *Numeri naturali*: **N**,
- *Numeri interi*: **Z**,
- *Numeri razionali*: **Q**,
- *Numeri reali*: **R**,
- *Numeri complessi*: **C**.

Risulta in particolare che:

$$N \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C. \tag{1.10}$$

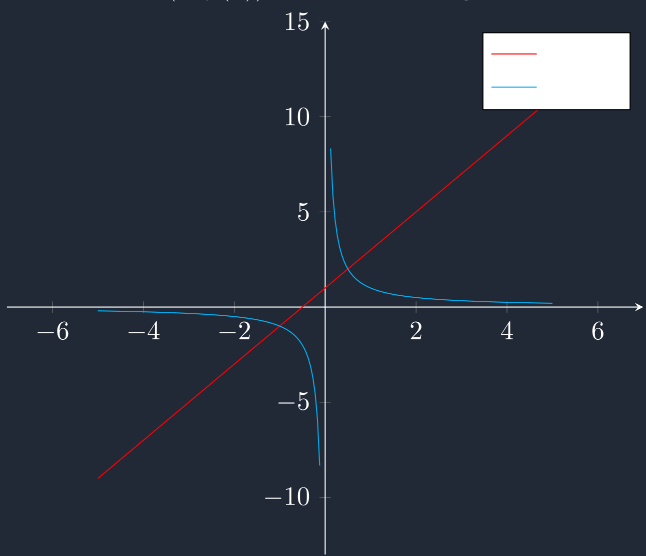
1.6 Funzioni e rappresentazione cartesiana

Siano A e B due insiemi numerici reali. Una *funzione* di A in B è una legge che fa corrispondere ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.
Il *dominio* o *insieme di definizione* di f è A, mentre *l'immagine* è B; ecco alcuni esempi:

$$f(x) = 2x + 1, \tag{1.11}$$

$$f(x) = 1/x. \tag{1.12}$$

Le coppie di punti individuate da $(x, f(x))$ costituiscono il grafico della funzione. Ecco un esempio



delle funzioni sopra:

1.7 Funzioni invertibili e monotòne

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se elementi distinti hanno immagini distinte ossia:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2. \tag{1.13}$$

Una funzione è poi *suriettiva* se $\forall y \in B \exists x \in A$ tale che $y = f(x)$. Una funzione che è sia iniettiva che suriettiva si dice *biunivoca.*
In quel caso la funzione si dice invertibile.

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A;$$
$$f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B.$$

La funzione inversa di

$$2x + 1 \tag{1.14}$$

è:

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}. \tag{1.15}$$

Una funzione è invece *monotòna* in un insieme A se verifica:

1. f *strettamente crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
2. f *crescente*: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) <= f(x_2)$,
3. f *strettamente decrescente*: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
4. f *decrescente*: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) >= f(x_2)$.

Sia f: A $\rightarrow$ B una funziona da A verso B. Se X è un sottoinsieme di A, l'immagine di X mediante f, indicata come f(X), è il sottoinsieme di B definito da:

$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X : y = f(x)\} \tag{1.16}$$

L'immagine di A mediante f è il codominio di f. quindi

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}. \tag{1.17}$$

Una funzione può anche essere *composta* mediante due funzioni.
Prendendo tre insiemi X, Y, Z e g : X $\rightarrow$ Y e f: Y $\rightarrow$ Z, in modo che il codominio di g sia il dominio di f, si può definire la funzione h : X $\rightarrow$ Z , definita come $h(x) = f(g(x))$ per $x \in X$.

$$h = f \circ g = f(g(x)). \tag{1.18}$$

1.8 Funzioni lineari e valore assoluto

Una *funzione lineare* è una funzione del tipo:

$$y = mx + q \tag{1.19}$$

Le funzioni lineari hanno le seguenti caratteristiche:

1. m e q sono numeri reali fissati,
2. sono strettamente monotòne su R,
3. se m = 0, la funzione f(x) = q, non è biunivoca poiché è una retta orizzontale.

Il *valore assoluto* (0 *modulo*) di x è definito come:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

e gode delle seguenti proprietà:

1. $|x| \geq 0, \forall x \in R;$
2. $|x| = 0, \Leftrightarrow x = 0;$
3. $|-x| = |x|, \forall x \in R;$

4. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \forall x \in R$;
5. $|x_1/x_2| = |x_1|/|x_2|, \forall x \in R$.

Inoltre, $\forall r \geq 0 \in R$, valgono:

1. $|x| \leq r \Leftrightarrow \quad -r \leq x \leq r$;
2. $|x| < r \Leftrightarrow \quad -r < x < r$.

Sono entrambi dimostrabili partendo dalla definizione di valore assoluto.
La proprietà seguente, chiamata *disuguaglianza triangolare*, se x_1 e x_2 sono concordi allora la relazione è uguale, mentre se sono discordi è sicuramente minore:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|. \tag{1.21}$$

$\forall x \in R$ la relazione $|x| \leq |x|$ è ovvia, se utilizziamo x = r al secondo membro, e ponendo $x_1 = x = x_2$, otteniamo:

$$-|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|, \quad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|,$$

sommando membro a membro si ottiene:

$$-(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq (|x_1| + |x_2|).$$

per cui con $r = |x_1| + |x_2|$ è dimostrata.

1.9 Funzioni potenza, esponenziali e logaritmi

La funzione potenza è definita come:

$$f(x) = x^n, \quad n \in N, \wedge \forall x \in R. \tag{1.22}$$

La funzione inversa è la *radice n-sima* e si indica con:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad (x \geq 0). \tag{1.23}$$

Si può anche definire l'elevazione ad esponente razionale: $(m, n \in N, x \in R, x > 0)$:

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}. \tag{1.24}$$

Tramite l'assioma di completezza è possibile definire l'elevazione ad un numero irrazionale. Proprietà delle potenze:

1. $a^b \cdot a^c = a^{b+c}; \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c}$;
2. $a^b > 0$;
3. $a < b, c > 0 \quad \Rightarrow \quad a^c < b^c$;
4. $a < b, c < 0 \quad \Rightarrow \quad a^c > b^c$;
5. $a > 1, b < c \quad \Rightarrow \quad a^b < a^c$;
6. $a < 1, b < c \quad \Rightarrow \quad a^b > a^c$.

La *funzione esponenziale* è definita come $f(x) = a^x$ con $a, x \in R$. La funzione inversa della funzione esponenziale è chiamata funzione logaritmo e si scrive come $f(x) = \log_a x$.

$$y = log_a x \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x. \tag{1.25}$$

Una proprietà importante degli esponenziali e dei logaritmi è la seguente:

$$a^{log_a x} = x. \tag{1.26}$$

Alcune proprietà dei logaritmi:

1. $log_a x_1 \cdot x_2 = log_a x_1 + log_a x_2$;
2. $log_a x_1/x_2 = log_a x_1 - log_a x_2$;
3. $log_a x^b = b \cdot log_a x$;
4. $log_b x = log_a x + log_a b$.

1.10 Funzioni trigonometriche

Posto che si conosca già le funzioni trigonometriche, questa sezione è scritta partendo dal presupposto di fare un ripasso veloce. Equazione fondamentale:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall x \in R. \tag{1.27}$$

Addizione:

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_2 \cdot \cos x_1. \tag{1.28}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 \pm \sin x_1 \cdot \sin x_2. \tag{1.29}$$

Ponendo $x_1 = x_2 0x$ si ottiene le formule di duplicazione:

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x. \tag{1.30}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x. \tag{1.31}$$

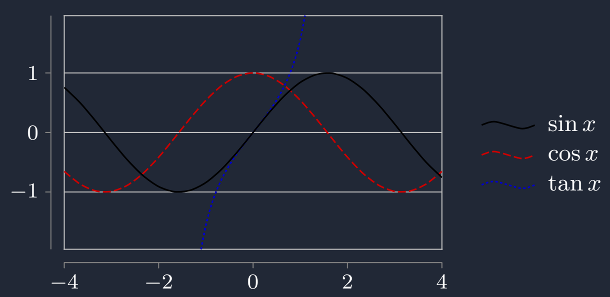
La tangente è definita come:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{1.32}$$

Di seguito una tabella riassuntiva dei valori seno, coseno e tangente più comuni:

x *radianti*	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x *gradi*	0	30	45	60	90	180	270	360
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0

Una rappresentazione grafica delle funzioni trigonometriche:



1.11 Principio di induzione

Si può dimostrare attraverso il principio di induzione che:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n, \quad \forall n \in N.$$

Supponendo che valga solo per n = 1, che è vera, si ottiene che:

$$x_1^{n+1} = x_1 \cdot x_1^n \leq x_2 \cdot x_1^n < x_2 \cdot x_2^n = x_2^{n+1}.$$

Dal momento che la relazione vale per n = 1, e vediamo che vale anche per n +1, allora questa vale sempre poiché prendendo n = 2 (per cui abbiamo dimostrato che vale), questa varrà anche per n = 3 e così via.

Proposizione 1.13.1. *PRINCIPIO DI INDUZIONE: Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice $n \in N$ sia ver aper $n = 1$ e che inoltre, supposta vera per n, sia vera anche per il successivo n + 1. Allora la proposizione è vera $\forall n \in N$.*

E' dimostrabile per induzione pure la formula dei numeri naturali:

$$1 + 2 + 3 + +(n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prendendo n = 1, questa dà l'identità 1 = 1. Quindi prendendo n + 1, otteniamo un'altra identità. E' possible dimostrare pure la diseguaglianza di bernoulli con il principio di induzione.

Proposizione 1.13.2. *DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI:* $\forall r \in Rx \geq 1$ *e* $\forall n \in N$*:*

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Per n = 1 la proposizione è vera, moltiplicando ora entrambi i membri per 1 + x:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)\cdot(1+x) =$$
$$= 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)\cdot x.$$

Ottenuta ora la proposizione con n + 1, per il principio di induzione, la 1.13.2 è verificata.

Capitolo 2

Complementi ai numeri reali

2.1 Massimo, minimo, estremo superiore ed estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A, se esiste, è un numero M dell'insieme di A che è maggiore o uguale ad ogni elemento di A.

$$M = max(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ M \in A. \end{cases}$$

Analogamente il *minimo* di A è un numero m minore o uguale di tutti gli elementi di A:

$$m = min(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m \leq a, \forall a \in A; \\ m \in A. \end{cases}$$

Non tutti gli insiemi hanno tuttavia un massimo ed un minimo. (Se A è l'insieme di tutti i numeri reali positivi, non ha un minimo poiché 0 non è compreso e non ha un massimo).
Un numero reale L si dice *maggiorante* se $L \geq a, \forall a \in A$.
Analogamente un numero reale l è un *minorante* se $l \leq a, \forall a \in A$
I maggioranti ed i minoranti non sempre esistono per un insieme. In generale esistono se A è limitato.

$$A\ limitato \Longleftrightarrow \exists\ l, L \in R : l \leq a \leq L, \forall a \in A. \tag{2.1}$$

Teorema 2.1. *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo M tale che;*

$$|a| \leq M \qquad \forall a \in A.$$

Per la proprietà del valore assoluto si ottiene:

$$-M \leq a \leq M, \qquad \forall a \in A.$$

In conclusione la 2.1 vale se $l = -M$ e $L = M$.
Viceversa se vale la 2.1, allora valgono anche queste qui sopra con $M = max\,\{|l|,\,|L|\}$:

$$-M \leq -|l| \leq l \leq a \leq L \leq |L| \leq M. \quad \forall a \in A.$$

TEOREMA DELL'ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE:

Teorema 2.2. *Sia A un insieme di numeri reali nno vuoto e limitato superiormente. Diciamo che $MinR$ è l'estremo superiore di A se M il minimo dei maggioranti di A. Dimostrazione:*
Supponiamo che A sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.
Indicando con B l'insieme dei maggioranti di A, applicando l'assioma di completezza, si ottiene che esiste un numero M tale che:

$$a \leq M \leq b, \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

M è quindi un maggiorante e l'elemento minimo di B e l'ipotesi è dimostrata.

Quindi possiamo dire che ogni numero più piccolo di M non è un maggiorante:

$$M \;=\; sup\ A \quad \Longleftrightarrow \quad quad \begin{cases} M \geq a, \forall a \in A; \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : M - \epsilon < a. \end{cases} \tag{2.2}$$

Analogamente è dimostrabile che se A è limitato inferiormente, allora esiste un massimo dei minoranti di A:

$$m \;=\; inf\ A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \geq a, \forall a \in A; \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : m + \epsilon < a. \end{cases} \tag{2.3}$$

Se un'insieme non è limitato sia inferiormente che superiormente allora si esprime come:

$$sup\ A = +\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall L, \exists a, \in A : a > L.$$
$$inf\ A = -\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall l, \exists a, \in A : a < l.$$
$$A = (-\infty; +\infty). \tag{2.4}$$

2.2 Numeri periodici e intervalli

I numeri periodici hanno una loro *frazione generatrice*: che ha per numeratore il numero così come è meno la parte non periodica e al denominatore tanti nove quante le cifre periodiche e tanti zeri quanti numeri decimali non periodici.

$$2,2\bar{3} = \frac{223 - 22}{90} = \frac{201}{90} = \frac{67}{30}.$$

La notazione ad intervalli è utile per esprimere insiemi:

$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}; \quad Intervallo\ aperto;$$
$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\} \quad Intervallo\ chiuso.$$

Se x_0 appartiene ad un intervallo aperto diremo che quell'intervallo è un intorno di x_0.

2.3 Calcolo combinatorio

Sia A un insieme costituito da n elementi:

$$a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Sia $k \in N : k \leq n$. Una disposizione di k elementi tra gli n dati è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi; consideriamo distinte due disposizioni se differiscono per gli elementi o per solo l'ordine di tali elementi.

Teorema 2.3. *Il numero delle disposizioni di k elementi tra gli elementi dati è:*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \;=\; n!; \tag{2.5}$$

cioè il prodotto di k numeri interi decrescenti a partire da n. E' possibile infatti scegliere il primo elemento n, mentre il secondo deve essere scelto tra gli n-1 rimasti. Se k = 2, il numero delle disposizioni è n(n - 1) e così via.

Questo genere di disposizioni tra gli n dati si chiama *permutazioni* degli n elementi. Il numero di disposizioni tra k elementi tra n dati si può anche scrivere come:

$$n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Una *combinazione* di k elementi tra n dati è un sottoinsieme di k elementi non ordinato; consideriamo uguali due combinazioni che hanno gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine.

Teorema 2.4. *Il numero delle combinazioni di k elementi tra n dati è:*

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{2.6}$$

Dalla 2.6 segue l'identità:

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}, \quad \forall n \in N, \forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}. \tag{2.7}$$

2.4 Nessun quadrato di un numero razionale da $\sqrt{2}$

Teorema 2.5 (Non esistono numeri il cui quadrato è esattamente $\sqrt{2}$)**.**

Dimostrazione. Supponendo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, allora per definizione:

$$\exists a, b \in Z : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

con m ed n primi tra di loro, allora:

$$m = n\sqrt{2} \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

Da qui m^2 è pari e anche m lo è in quanto il quadrato di un numero pari è sempre un numero pari e poiché qualsiasi numero moltiplicato per 2 è pari, allora anche n è pari perché qualsiasi numero diviso per due è sicuramente pari: posto quindi $n = 2k$

$$m^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2$$

Quindi anche n è pari e questa è una contraddizione in quanto m ed n sono primi tra di loro □

2.5 Binomio di Newton

Col seguente lemma si dimostra il binomio di Newton:

Proposizione 2.5.1. *$\forall n, k \in N$ vale:*

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}. \tag{2.8}$$

Dimostrabile dalla definizione.

Un'importante applicazione delle disposizioni e delle combinazioni è LA FORMULA DEL BINOMIO DI NEWTON:

Teorema 2.6. *$\forall a, b \in R$ vale:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Per induzione la proprietà del binomio di Newton vale per n = 0. Per induzione dunque si ottiene:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} =$$

$$a\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n+1-k}$$

A questo punto si trasla l'indice della prima sommatoria: si porta fuori l'ultimo termine della sommatoria, così si fa lo stesso per la seconda sommatoria ma con il primo termine ottenendo:

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k}$$

A questo punto si raccoglie tutto in un unica sommatoria applicando le proprietà:

$$a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Allora si ottiene che:

$$\binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} =$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

2.6 Numeri complessi

Consideriamo una generica equazione di secondo grado nell'incognita z:

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{2.10}$$

che ha soluzioni reali se $b^2 - 4ac \geq 0$:

$$\left.\begin{matrix} z_2 \\ \\ z_1 \end{matrix}\right\} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{2.11}$$

I coefficienti a, b, c sono legati alle soluzioni z_1, z_2. Nel caso dell'equazione:

$$z^2 + 1 = 0. \tag{2.12}$$

otteniamo:

$$z_1 + z_2 = 0 \qquad z_1 \cdot z_2 = 1. \tag{2.13}$$

Nell'ambito dei numeri reali, queste due equazioni non hanno senso.
E' necessario quindi estendere R introducendo il campo C dei complessi. Le soluzioni della 2.12 sono:

$$z = \pm\sqrt{-1}. \tag{2.14}$$

Si definisce dunque il numero complesso $i = \sqrt{-1}$. Per definizione risulta che

$$i^2 = -1.$$

L'insieme dei numeri complessi è definito come:

$$C = \{z = x + iy : \quad x, y \in R\}. \tag{2.15}$$

Il complesso $\bar{z} = x - iy$ si chiama *complesso coniugato* di $\bar{z} = x + iy$ e risulta:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Un numero complesso si può anche rappresentare sul piano cartesiano ed è individuato dalla sua distanza ρ dal centro O e dall'angolo θ che il segmento OP forma con l'asse delle ascisse. Dal teorema di pitagora si ha che:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{2.16}$$

mentre θ è legato alle formule:

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}; \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho}. \tag{2.17}$$

Un complesso in *forma trigonometrica* diventa:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{2.18}$$

La potenza di un numero complesso in forma trigonometrica con $n \in N$ sarà:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Un complesso z' è la n-esima radice di z se risulta $(z')^n = z$.

$$\rho' = \sqrt[n]{\rho}; \qquad \theta' = (\theta + 2kn)/n, k \in Z. \tag{2.19}$$

Un numero complesso è esprimibile anche attraverso la notazione esponenziale: posto che

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta},$$

un complesso in forma trigonometrica si esprime come:

$$z = \rho e^{i\theta}. \tag{2.20}$$

2.7 Proprietà degli insiemi numerici

Nell'insieme R dei numeri reali, dall'elemento 1 è possibile determinare gli elementi distanti 1. Questi elementi costituiscono l'insieme $N = 1, 2, \ldots$ dei numeri naturali e gode delle seguenti proprietà:

1. $1 < 2 < 3 < \ldots$;
2. Ogni parte non vuota di N + dotata di un minimo;
3. Ogni parte non vuota di N, superiormente limitata è dotata di un massimo;

Teorema 2.7. *PROPRIETA' DI ARCHIMEDE – $\forall x \in R \; \exists \; n \in N : n > x$.*

Dimostrazione:
Se la proprietà di Archimede fosse falsa, allora R sarebbe un'insieme limitato superiormente e per l'assioma di completezza sarebbe dotato di un estremo superiore. Quindi $\forall n \in R \Rightarrow n \leq M$. Poiché per definizione anche $n+1$ è un numero naturale, risulterebbe che $n \leq M - 1 \; \forall n \in N$; il che sarebbe assurdo in quanto M è un maggiorante di N e quindi dovrebbe essere maggiore di qualsiasi n. Di conseguenza, per induzione, si dimostra che la proprietà di Archimede è verificata e che N non è limitato superiormente.
Si ricava dunque che Q, ossia l'insieme dei razionali, è *denso in R*.

Teorema 2.8. *DENSITA' DEI NUMERI RAZIONALI – L'insieme Q dei numeri razionali è denso in R.*

Dimostrazione:
Si deve provare che $\forall a, b \in R \mid a < b, \; \exists \; x \in Q : a < x < b$. Preso $a > 0$, sia $n \in N : n > 1/(b-a) \Rightarrow nb - na > 1$. Detto m il più piccolo naturale tale che $na < m \Rightarrow m - 1 \leq na < m \;\; \wedge \;\; na < m = (m-1) + 1 \leq na + 1 < na + (nb - na) = nb$. Da $na < m < nb$ il teorema è dimostrato. Basterà ripetere la dimostrazione con $a < 0$ (con $a < 0 < b$ è ovvio) e $b \leq 0$.

Teorema 2.9. *PRINCIPIO DI INDUZIONE – Supponendo che una proposizione P_n dipendente da un indice $n \in N$ sia vera per $n = 1$ e che, inoltre, supposta vera per $n = k$ sia vera anche per $n = k + 1$. Allora P_n è vera $\forall n \in N$.*

Dimostrazione:
Considerato l'insieme

$$X = \{n \in N : P_n \; falsa\}.$$

Se X fosse non vuoto, esso avrebbe un minimo m = min X maggiore di 1, perché $1 \notin X$. Poiché $m - 1 \notin X, P_{m-1}$ è vera. Allora per le ipotesi del principio di induzione, anche P_m è vera, il che è assurdo perché $m \in X$.

2.8 Insiemi infiniti

Due insiemi di numeri reali A e B si dicono *equipotenti* se esiste una corrispondenza biunivoca tra di loro. Un insieme $A \subset R$ si dice finito se $\exists n \in N : A$ è equipotente all'insieme $\{1, \ldots, n\}$. Un'insieme è inoltre numerabile se è equipotente ad N, ossia se esiste una successione di numeri reali a due a due distinti il cui codominio coincide con A.

Teorema 2.10. *CARATTERIZZAZIONE DEGLI INSIEMI FINITI – Un'insieme A è infinito se e solo se è equipotente ad una sua parte propria.*

Dimostrazione:
poiché un'insieme finito non può essere equipotente ad una sua parte impropria, per dimostrare il teorema basta dimostrare come un insieme infinito sia equipotente ad una sua parte propria. Sia A infinito e sia la successione: $a_n : N \to A$ una successione di elementi di A a due a due distinti, ossia una funzione iniettiva da N verso A, il cui codominio è indicato con B.
Posto C = A - B, si ha che $A = \cup B \cup C \; e \; B \cap C = \emptyset$. Sia ora un insieme $A' | A' = (B - \{a_1\}) \cup C$.
La funzione $f : A \to A'$ sarà:

$$f(x) = \begin{cases} a_{n+1} & se \; x = a_n \\ x & se \; x \in C \end{cases} \tag{2.21}$$

è una corrispondenza biunivoca tra A e la sua parte propria A'.
Proviamo ora il seguente:

Teorema 2.11. *Il prodotto cartesiano $A \times B$ di due insiemi A e B numerabili è numerabile.*

Dimostrazione:
Siano (a_n e b_n) corrispondenze biunivoche tra N e A e tra N e B. Seguendo un procedimento di tipo diagonale, ossia costruendo la successione che a 1 associa (a_1, b_1), a 2 associa (a_1, b_2), a tre associa (a_2, b_1) e così via, si giunge ad una corrispondenza biunivoca tra N e $A \times B$.
Segue quindi che l'insieme Q dei razionali è numerabile poiché ogni numero razionale positivo è individuato da una coppia (m, n) di numeri naturali primi fra loro e l'unione di due insiemi numerabili è numerabile.

Teorema 2.12. *L'intervallo* $[0, 1]$ *è un insieme infinito non numerabile.*

Dimostrazione:
Sia, per assurdo, (x_n) una successione iniettiva e suriettiva da N verso l'intervallo $[0, 1]$. Sia $[a, b]$, con $a < b$, un intervallo $\in [0, 1]|x \notin [a, b]$. Sia $[a_1, b_1] \subset [a, b] : a_1 < b_1|x_1 \notin [a_1, b_1]$ e così via. L'intersezione di tutti questi intervalli, non contenendo alcun elemento della successione x_n, il cui insieme di elementi per ipotesi coincide con $[0, 1]$, è necessariamente vuota. Ma ciò è assurdo perché posto: $M = sup_n a_n$ si ha $a_n \leq M \leq b_n \forall n \in N$.
Si può infine dimostrare che ogni intervallo aperto di R e R stesso sono equipotenti all'intervallo di partenza. Questi insiemi hanno la "potenza del continuo".

2.9 Funzione esponenziale su R

La funzione esponenziale su Q è definita come segue:

$$f \ : \ x \in Q \to a^x \in R^+ \tag{2.22}$$

Per definirla in questo modo, bisogna dimostrare il seguente:

Teorema 2.13. *LEMMA DI DENSITA – il codominio $f(Q)$ della funzione f è denso in R^+.*

Dimostrazione:
Verifichiamo che $\forall \alpha, \beta : \alpha < \beta, \ \exists \ y \in Q|\alpha < a^y < \beta$. Nel caso $a > 1, 1 \leq \alpha < \beta$, in quanto gli altri si trattano analogamente. Sia $n \in N|(\beta/\alpha)^n > a$ e sia m il massimo intero tale che $a^m \leq \alpha^n$. Si ha quindi:

$$\alpha^n < a^{m+1} < \beta^n,$$

in quanto risulta che $\beta^n > a \cdot \alpha^n \geq a \cdot a^m$. Si ricava:

$$a^x = sup_{y<x} \ a^y \qquad a > 1$$
$$a^x = sup_{y>x} \ a^y \quad 0 < a < 1$$

Quindi si può definire l'esponenziale $\forall x \in R$ nel modo seguente:

$$a^x = sup\{a^y : y \in Q, y < x\} \quad a > 1$$
$$a^x = sup\{a^y : y \in Q, y > x\} \quad 0 < a < 1$$

Quindi sussiste il seguente:

Teorema 2.14. *Per $a > 1$ l'esponenziale è strettamente crescente mentre per $0 < a < 1$ è strettamente decrescente di R su R^+.*

Dimostrazione:
Proviamo che $a > 1$, la funzione esponenziale di base a è crescente. Siano $x_1 < x_2$ e siano $y_1, y_2 \in Q|x_1 < y_1 < x_2 < y_2$ per cui segue:

$$a^{x_1} \leq a^{y_1} < a^{y_2} \leq a^{x_2}$$

Per provare la suriettività, fissato z ¿ 0,

$$A = \{y \in Q : a^y < z\}$$

$$a^{supA} = z.$$

Essendo per definizione:

$$a^{supA} = supa^y : y \in Q, y < supA$$

si ha che $a^{supA} \leq z$. Se fosse $a^{supA} < z$ detto y un numero razionale, per il teorema di densità si ha:

$$a^{supA} < a^y < z,$$

avremmo $y \in Y$ ossia un numero y che appartiene ad un insieme che si frappone tra un numero e sé stesso. Il che ovviamente è impossibile.

2.10 Le classi di resto

Nella teoria dei gruppi, è possibile organizzare i numeri secondo delle classi di resto di modulo m ($m \in N$). Per esempio se la somma delle cifre di un numero è tre, allora quel numero è divisibile per tre. $n = km$.
Tutti i possibili resti derivanti dalla divisione n/m sono identificati dall'insieme: $\{0, 1, \ldots, (m - 1)\} \mid m \neq \pm 1$. Se il resto è zero, allora il numero k è un multiplo di m. Le classi di resto si possono indicare con la seguente scrittura: [0], [1].... Una proprietà importante è che qualunque numero n si prenda che abbia una certa classe di resto, se sommato a un'altro numero l con una classe di resto differente, il numero risultante apparterrà alla classe di resto che corrisponde alla somma delle classi di resto. Se questo numero è $\geq m$, allora si ricomincia a partire da 0.
Presi due numeri $x, x' \in Z$, se appartengono alla stessa classe di resto, allora x e x' differiscono per un multiplo di m. cioè:

$$x' = x + km.$$

Analogamente, se $y, y' \in Z$, appartengono alla stessa classe,

$$y' = y + hm.$$

Quindi:

$$x' + y' = x + km + y + hm = x + y + (k + h)m.$$

L'intero $x' + y'$ differiscono da $x + y$ di un certo multiplo k + h, per cui appartiene per costruzione alla stessa classe di $x + y$, definendo la somma tra classi come:

$$[x] + [y] = [x + y]. \tag{2.23}$$

Il ragionamento analogo può essere fatto per il prodotto, quindi:

$$xy + (xh + yk + khm)m;$$

cioè si definisce il prodotto tra classi come:

$$[x] \cdot [y] = [x \cdot y]. \tag{2.24}$$

Come detto prima, se la classe risultante dovesse essere $\geq m$, in questo caso, dividiamo la classe per m, e la classe di resto risultante sarà la classe identificata dal resto di questa divisione.

Capitolo 3

Limiti di successioni

3.1 Successioni e proprietà

Una *successione* è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n. Ricordando la definizione di funzione, una successione è dunque una funzione da N in R.

Definizione 3.1. *Un numero reale a è il limite della successione a_n (la successione converge ad a) e si scrive:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a \quad \textit{oppure} \quad a_n \to a, \tag{3.1}$$

qualunque sia $\epsilon > 0$ $\exists v \mid |a_n - a| < \epsilon$ $\forall n > v$.

Teorema 3.1 (TEOREMA DELL'UNICITA' DEL LIMITE)**.** *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione:
Supponendo per assurdo che esistano due limiti distinti $a_n \to a, a_n \to b | a \neq b$, si pone $\epsilon = \frac{|a-b|}{2}$ (> 0). Si ha:

$$\exists\ v_1 \mid |a_n - a| < \epsilon,\ \forall n > v_1; \quad \exists\ v_2 \mid |a_n - b| < \epsilon,\ \forall n > v_2.$$

Ponendo $v = max\{v_1, v_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha:

$$\begin{aligned} |a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| = \\ = |a_n - a| + |a_n - b| < 2\epsilon = |a - b \end{aligned}$$

Definizione 3.2. *Una successione a_n ha limite uguale a $+\infty$ (diverge a $+\infty$) e si scrive:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \textit{oppure} \quad a_n \to +\infty. \tag{3.2}$$

se qualunque sia $\forall\ M > 0\ \exists v \in R | a_n > M\ \forall\ n > v$. Nel caso in cui il limite diverga a meno infinito invece, si usa $\forall\ M > 0\ \exists v \in R | a_n < -M\ \forall\ n > v$.

Una successione che invece converge a zero si chiama infinitesima, mentre una che non ammette alcun limite si chiama non regolare.

3.2 Successioni limitate

Una successione è regolare se ammette limite finito o infinito, tuttavia una successione si può anche chiamare limitata nel caso in cui:

$$\exists M | |a_n| \leq M\ \forall\ n \in N\ \ \wedge -M \leq a_n \leq M,\ \forall\ n \in N. \tag{3.3}$$

Esistono anche successioni limitate non regolari come:

$$a_n = (-1)^n.$$

Teorema 3.2. *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione:
supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\epsilon = 1$. In questo caso $\exists v : |a_n - a| < 1 \ \forall \ n > v$:

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$
$$\forall n \in N \Rightarrow |a_n| \leq M = max\{|a_1|, \ldots, |a_v|, 1 + |a|\}.$$

3.3 Operazioni coi limiti

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} b_n = b : a, b \in R$, si ha:

1. $$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b. \tag{3.4}$$

2. $$\lim_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n) = ab. \tag{3.5}$$

3. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}. \quad se\ b_n, b \neq 0. \tag{3.6}$$

Dimostrazioni:

1. Per ipotesi: $\forall \epsilon > 0$,

   $$\exists v_1 : |a_n - a| < \epsilon, \ \forall \ n > v_1; \quad \exists v_2 : |b_n - b| < \epsilon, \ \forall \ n > v_2;$$

   Ponendo $v = max\{v_1, v_2\} \ \forall \ n > v$ si ha:

   $$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$
   $$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon$$

2. Dal momento che a_n è limitata ed utilizzando l'ipotesi vista alla precedente dimostrazione, si può dire che $\forall \ n > v = max\{v_1, v_2\}$:

   $$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| =$$
   $$|a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| <$$
   $$< M\epsilon + |b|\epsilon = (M + |b|)\epsilon.$$

3. Considerando a_n e b_n convergenti per ipotesi a a e b rispettivamente, e, per ipotesi $b \neq 0$, prendiamo $b > 0$, allora con $\epsilon = b/2$:

   $$\exists \ v_1 \mid b - \epsilon < b_n < b + \epsilon, \quad \forall n > v_1.$$

   ossia:

   $$b_n b - \epsilon = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2}, \qquad \forall n > v_1.$$

   Per ipotesi $\forall \epsilon > 0 \ \exists \ v_2, v_3$:

   $$|a_n - a| < \epsilon, \ \forall n > v_2; \quad |b_n - b| < \epsilon, \ \forall n > v_3,$$

   Posto ora $v = max\{v_1, v_2, v_3\} \ \forall n > v$:

   $$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}\right| = \frac{1}{|b_n b|}|(a_n - a)b + a(b - b_n)| \leq$$
   $$\leq \frac{1}{\frac{b}{2}b}(|a_n - a|b + |a| \cdot |b_n - b|) < \epsilon\frac{2(b + |a|)}{b^2}.$$

3.4 Forme indeterminate

Alcune delle operazioni coi limiti:

$$\begin{aligned}
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty \\
a_n \to \pm\infty, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty \\
a_n \to a \neq 0, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad |a_n + b_n| \to +\infty \\
a_n \to \pm\infty, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad |a_n + b_n| \to +\infty \\
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to 0 \\
a_n \to a, \quad b_n \to \pm\infty \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{b_n}{a_n}\right| \to +\infty \\
a_n \to a \neq 0, \quad b_n \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to +\infty
\end{aligned}$$

Risultano alcuni casi chiamate forme indeterminate:

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad \frac{0}{0}. \tag{3.7}$$

Un limite che si presenta come una forma indeterminata non vuol dire che non esista, vuol dire semplicemente che il limite necessità di essere manipolato per poter essere risolto.

3.5 Teoremi di confronto

Teorema 3.3 (TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO). *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0 \; \exists \; v \mid a_n > 0 \; \forall n > v$.

Dimostrazione:
Dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\epsilon = a/2$, $\exists \; v \mid |a_n - a| < a/2 \; \forall n > v \Rightarrow -a/2 < a_n - a < a/2$:

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \qquad \forall n > v.$$

Proposizione 3.3.1. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a, a_n \geq 0 \; \forall n \Rightarrow a \geq 0$.

Dimostrazione:
Se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno comporterebbe, applicato ad $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

Proposizione 3.3.2. *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \lim_{n\to+\infty} b_n = b, a_n \geq b_n \; \forall n \Rightarrow a \geq b$.

Dimostrazione:
Si procede applicando la dimostrazione del corollario precedente a $a_n - b_n$.

Teorema 3.4 (TEOREMA DEI CARABINIERI). *Siano* a_n, b_n, c_n *tre successioni tali che:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \qquad \forall n \in N.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, *allora anche la successione* c_n *è convergente ad* a.

Dimostrazione:
Per ipotesi, $\forall \epsilon > 0$:

$$\exists \; v_1 \; : \; |a_n - a| < \epsilon, \; \forall n > v_1; \quad \exists \; v_2 \; : \; |b_n - a| < \epsilon, \; \forall n > v_2.$$

Se $n > v = max\{v_1, v_2\}$, risulta che:

$$a - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \epsilon.$$

Quindi $|c_n - a|\epsilon$. Valgono anche:

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in N, \quad a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad b_n \to +\infty. \tag{3.8}$$

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \in N, \quad b_n \to -\infty \quad \Rightarrow \quad a_n \to -\infty. \tag{3.9}$$

Dimostrazione per la prima (la seconda è analoga):
Per ipotesi $a_n \to +\infty$ ossia:

$$\forall M > 0,\ \exists\ v \mid a_n > M, \qquad \forall n > v.$$

Dato che $b_n \geq a_n\ \forall n \in N$ si ha la tesi:

$$b_n \geq a_n > M, \qquad \forall n > v.$$

3.6 Altre proprietà dei limiti di successioni

Proposizione 3.4.1. *a_n converge a zero se e soltanto se $|a_n|$ converge a zero.*

Dimostrazione:
Posto $b = |a_n|$, b_n converge a zero se e solo se:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ v \mid |b_n| < \epsilon, \qquad \forall n > v.$$

Dato che:

$$|b_n| = ||a_n|| = |a_n|, \qquad \forall n > v$$

Teorema 3.5. *TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA — Se a_n è una successione limitata e b_n è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.*

Dimostrazione (primo metodo):
Per ipotesi si ha:

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| = -M \cdot |b_n| \leq a_n \cdot b_n \leq M \cdot |b_n|.$$

Dato che per ipotesi $b_n \to 0$ anche $|b_n|$ converge a zero. Grazie al teorema dei carabinieri si deduce che anche $a_n \cdot b_n \to 0$. Dimostrazione (secondo metodo):

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists\ v \mid |b_n| < \epsilon, \tag{3.10}$$

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| < M\epsilon \tag{3.11}$$

3.7 Alcuni limiti notevoli

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, \qquad se \quad a > 1, \\ 1, \qquad se \quad a = 1, \\ 0, \qquad se \quad -1 < a < 1, \\ non\ esiste, \qquad se \quad a = -1, \\ +\infty, \qquad a < -1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Dimostrazione:
Se $a > 1$, si usa la disuguaglianza di Bernoulli:

$$a^n \geq 1 + n(a-1).$$

Il secondo membro $\to +\infty$ se $n \to +\infty$ e per il teorema del confronto anche $a^n \to +\infty$, mentre i casi a $= 1$ e a $= 0$ sono ovvi. Se invece a è compreso tra -1 ed 1 ($0 < |a| < 1$) allora si ottiene:

$$\lim_{n \to +\infty} |a^n| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} = 0$$

Se a = -1 non esiste, se $a < -1$ invece si ottiene la successione $|a| > 1$, quindi il limite esiste ed è $+\infty$.

$$lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1. \tag{3.13}$$

Dimostrazione:
Se $a > 1$ allora il limite è ≥ 1. Se poniamo come nuova successione $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$ si ha che $b_n \geq 0$ e per Bernoulli:

$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n.$$

quindi:

$$0 \leq b_n \leq (a - 1)/n$$

Per il teorema dei carabinieri segue che $b_n \to 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1. Se\ 0 < a < 1\ allora\ 1/a > 1$ e quindi.

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} \to 1$$

Dimostriamo ora che se $b \in R$ risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1. \tag{3.14}$$

Esaminando $b = 1/2$, si ottiene con la disuguaglianza di Bernoulli:

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \geq 0 \\ \sqrt{n} &= (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n \\ 0 \leq b_n &\leq \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0. \\ b_n \to 0,\ cioe' \quad &\sqrt[n]{n^{1/2}} = n^{1/(2n)} \to 1. \end{aligned}$$

Considerando ora $b \in Z$:
In tal caso $\sqrt[n]{n^b} = (\sqrt[n]{n^{1/2}})^{2b} \to 1^{2b} = 1$. Introducendo la funzione *parte intera di* x:

$$[x] = \ il\ piu'\ grande\ intero \leq x. \tag{3.15}$$

Se $b \in R$ abbiamo $[b] \leq b < [b] + 1$ quindi:

$$\sqrt[n]{n^{[b]}} \leq \sqrt[n]{n^b} \leq \sqrt[n]{n^{[b]+1}}$$

Per il teorema dei carabinieri si ottiene quindi la tesi.
Ora analizziamo de limiti delle funzioni trigonometriche:

$$a_n \to\Rightarrow sin(a_n) \to 0; \tag{3.16}$$

$$a_n \to 0 \Rightarrow cos(a_n) \to 1. \tag{3.17}$$

Ad esempio $sin(1/n) \to 0$ e $cos(1/n) \to 1$.
Dimostrazione:
Poiché a_n converge a zero allora per definizione esiste un indice v per cui $|a_n| < \pi/2\ \forall n > v$ per cui:

$$0 \leq |sin(a_n)| \leq |a_n|$$

Per il teorema dei carabinieri si sa dunque che $|sin(a_n)| \to 0$. La dimostrazione per il limite del coseno invece deriva da:

$$cos(x) = \pm\sqrt{1 - sin^2(x)}$$

Con l'indice v risulta che $-\pi/2 \leq a_n \leq \pi/2\ \forall n > v$ per cui:

$$cos(a_n) = \pm\sqrt{1 - sin^2(a_n)}$$

Ossia la tesi. poiché se $a_n \to 0$, allora la radice vale 1.

$$a_n \to 0, a_n \neq 0,\ \forall n \Rightarrow \frac{sin(a_n)}{a_n} \to 1. \tag{3.18}$$

Dimostrazione:

$$0 < |x| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow cosx < \frac{sinx}{x} < 1$$

Se x è positivo:

$$sinx < x < tanx = \frac{sinx}{cosx}$$

da cui dividendo per sinx che positivo e invertendo:

$$cosx < \frac{sinx}{x} < 1.$$

Se x è negativo invece:

$$cosx = cos(-x) < \frac{sin(-x)}{-x} = \frac{sinx}{x} < 1.$$

Dato che $a_n \to 0$, per definizione di limite esiste un $v||a_n| < \pi/2 \ \forall n > v$. così:

$$cos(a_n) < \frac{sin(a_n)}{a_n} < 1$$

3.8 Successioni monotòne

Così come per le funzioni anche le successioni possono essere crescenti, decrescenti, (anche strettamente) e monotone quando non invertono mai la loro tendenza

Teorema 3.6. *TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTONE. – Ogni successione monotona ammette limite. In particolare, ogni successione monotona limitata è convergente.*

Dimostrazione:
Considerato il caso di una successione a_n crescente e limitata si ottiene posto $l = sup_n a_n$, e fissato $\epsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore si ottiene che:

$$l - \epsilon < a_v.$$

Per $n > v$ risulta che $a \leq a_n$ dunque:

$$l - \epsilon < a_v \leq a_n \leq l < l + \epsilon,$$

da cui $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ Considerando il caso di una successione crescente e non limitata. Fissato $M > 0$ esiste allora $v \in N|a_v > M$ Dato che a_n è crescente allora $\forall n > v$ si ottiene:

$$a_n \geq a_v > M.$$

da cui si ottiene che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Analogamente si ottengono gli altri casi.

3.9 Il numero e

Il teorema delle successione monotone è utile per definire il numero di Eulero (o Nepero):

$$e = \lim_{n\to+\infty} a_n \qquad con \qquad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.19}$$

Dimostrazione per $+\infty$:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]+1}\right)^{[a_n]} < \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} < \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}$$

Per i carabinieri diventa:

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1} = \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right) \to e \cdot 1 = e.$$

Dimostrazione per $-\infty$ poniamo $b_n = -a_n - 1$:

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)_n^a = \left(1-\frac{1}{b_n+1}\right)^{-(b_n+1)} =$$
$$= \left(\frac{b_n}{b_n+1}\right)^{-(b_n+1)} = \left(\frac{b_n+1}{b_n}\right)^{b_n+1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \cdot \left(1+\frac{1}{b_n}\right).$$

A causa di questo limite si aggiungono le forme indeterminate:

$$1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}, \quad (+\infty)^0, \quad 0^0$$

La definizione del numero di Eulero ci permette di definire anche due proprietà:

Proposizione 3.6.1. *la successione a_n è monotòna crescente*

Proposizione 3.6.2. *la successione a_n è limitata*

Dimostrazione 3.6.1:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq a_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right);$$

ossia:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}$$

isolando 1:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}$$

Ponendo nella disuguaglianza di Bernoulli $a = -1/n^2$ si ottiene la tesi.
Dimostrazione 3.6.2:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$\forall n \in N$:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Poiché a_n è strettamente crescente ne consegue che:

$$a_1 \leq a_n < b_n < b_1 \qquad \forall n \geq 2$$

e quindi essendo $a_1 = 2$ *e* $b_1 = 4$:

$$2 \leq a_n < 4 \qquad \forall n \in N$$

e quindi a_n è limitata. Si verifica ora che b_n sia strettamente decrescente come per la dimostrazione della 3.6.1. Per la stima fatta nella scorsa dimostrazione si può ottenere una stima più precisa di e ponendo:

$$a_n < b_m$$

e posto k = $max\{n, m\}$ risulta:

$$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m.$$

Per m = 1 si ottiene la limitazione vista prima, ma per m = 5 si ottiene:

$$a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.98\ldots \qquad \forall n \in N.$$

ossia $2 \leq a_n < 3$ e quindi anche e verifica le limitazioni di a_n.

3.10 Successioni definite per ricorrenza

In alcune applicazioni si definiscono le successioni per ricorrenza:

$$a_1 \; assegnato, \quad a_{n+1} = f(a_n), \qquad \forall n \in N.$$

Supponendo che $f(x)$ sia continua su R e che il limite esista e valga: se $a_n \to a$, allora $a_{n+1} \to a$. Le successioni seguenti sono definite per ricorrenza:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{3a_n}. \tag{3.20}$$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}. \tag{3.21}$$

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n}. \tag{3.22}$$

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n}. \tag{3.23}$$

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1. \tag{3.24}$$

$$\tag{3.25}$$

3.11 Infiniti di ordine crescente

Teorema 3.7 (CRITERIO DEL RAPPORTO (PER LE SUCCESSIONI))**.** *Sia a_n una successione a termini positivi. Definiamo $b_n = a_{n+1}/a_n$. Se la successione b_n converge ad un limite $b < 1$, allora la successione a_n tende a zero.*

Dimostrazione:
Per la permanenza del segno (applicato a $1 - b_n$) $\exists v | b_n < 1 \; \forall n > v$. Quindi $a_{n+1}/a_n < 1$ ossia $a_{n+1} < a_n \; \forall n > v$. Se per assurdo passassimo come valore $a \neq 0$ al limite, si otterrebbe che $b = 1$, per cui l'unico valore di a per soddisfare la relazione è $a = 0$.
Applicando questo criterio alle successioni:

$$\log n; \quad n^b; \quad a^n; \quad n!; \quad n^n.$$

con $b > 0, a > 1$ si può dimostrare che i limiti seguenti sono equivalenti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{logn}{n^b} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Il primo limite è ovvio poiché si può esprimere $logn$ come $(1/b)log(n^b)$, dunque sicuramente è zero. Il secondo limite diventa invece:

$$a_n = \frac{n^b}{a^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1.$$

Per il terzo limite:

$$a_n = \frac{a^n}{n!}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{n+1} \to 0.$$

Infine per il quarto limite:

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1.$$

3.12 Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_n definita da:

$$k \in N \to a_{nk}$$

prende il nome di successione estratta da a_n, di indici n_k.

Proposizione 3.7.1. *$\forall n_k > 0$ in N si ha:*

$$n_k \geq k$$

Dimostrazione:
Per k = 1 si ha che $n_1 \geq 1$, si prova (posta valida) per induzione che $n_{k+1} \geq k+1$, per ipotesi è quindi $n_{k+1} > n_k \geq k$, ossia $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \geq k+1$.

Proposizione 3.7.2. *Se a_n converge verso a, allora ogni estratta di a_n converge verso a.*

Dimostrazione:
Fissato $\epsilon > 0$ $\exists k_0 : |a_n - a| < \epsilon$ $\forall n > k_0$. Se $k > k_0$ essendo $n_k \geq k$ per il teorema precedente, allora $n_k > k_0$ e quindi si ha $|a_{n_k} - a| < \epsilon$.
Ne deriva dunque il seguente:

Teorema 3.8 (TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS). *Sia a_n una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Dimostrazione:
per ipotesi la successione a_n è limitata: pertanto esistono $A, B \in R$ tali che:

$$A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in N.$$

Suddividiamo l'intervallo $[A, B]$ con un punto in mezzo $C = (A+B)/2$, poiché N è infinito, allora risulta infinito almeno uno ra i due sottoinsiemi di N:

$$\{n \in N : \quad a_n \in [A, C]\}, \qquad \{n \in N : \quad a_n \in [C, B]\}.$$

Indicando con $[A_1, B_1]$ l'intervallo in cui sono presenti i termini della successione per infiniti indici:

$$A \leq A_1, \quad B_1 \leq B, \quad B_1 - A - 1 = \frac{B-A}{2}.$$

Suddividiamo l'intervallo ottenuto $[A_1, B_1]$ tramite un punto di mezzo C_1 come prima e per questo risulta che esistano al suo interno due punti A_2 e B_2 come definiti prima. Iterando ancora il procedimento si generano due successioni $A_k, B_k (k \in N)$ tali che:

$$A \leq A_k \leq A_{k+1} < B_{k+1} \leq B_k \leq B, \quad \forall k \in N, \tag{3.26}$$

$$B_k - A_k = \frac{B-A}{2^k}, \quad \forall k \in N. \tag{3.27}$$

e l'intervallo $[A_k, B_k]$ contiene termini della successione per infiniti indici. In particolare si ha che l'intervallo $[A_1, B_1]$ contiene termini della successione a_n; quindi esiste il primo intero n_1 tale che $a_n \in [A_1, B_1]$. Per lo stesso motivo si itera nell'intervallo determinando una successione strettamente crescente di numeri naturali per cui:

$$A_k \leq a_{n_k} \leq B_k = A_k + \frac{B-A}{2^k} \quad \forall k \in N.$$

La successione A_k e anche B_k sono monotone e limitate ed ammettono un limite dal valore di $l \in R$. Poiché $(B-A)/2^k \to 0$ per $k \to +\infty$, entrambi i membri di quella sopra convergono ad l per $k \to +\infty$. Per il teorema dei carabinieri infine si ottiene:

$$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = l. \tag{3.28}$$

3.13 Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una *successione di Cauchy* se $\forall \epsilon > 0$ $\exists v | h, k > v$ si ha:

$$|a_k - a_h| < \epsilon \tag{3.29}$$

Proposizione 3.8.1. *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione:
Se a_n converge verso a allora $\forall\epsilon > 0\ \exists v$:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall n > v.$$

Dalla disuguaglianza triangolare si ottiene che per $h, k > v$:

$$|a_k - a_h| \leq |a_k - a| + |a - a_h| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Proposizione 3.8.2. *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione:
Sia $\epsilon = 1$, per ipotesi allora $\exists v \in N$ tale che:

$$|a_k - a_h| < 1 \qquad \forall h, k > v.$$

Fissando un indice $h_0 > v$ per le proprietà del valore assoluto segue che:

$$a_{h_0} - 1 < a_k < a_{h_0} + 1 \qquad \forall k > v.$$

Posto:

$$A = min\{a_1, \ldots, a_v, a_{h_0} - 1\}, \qquad B = max\{a_1, \ldots, a_v, a_{h_0} + 1\},$$

Risulterà ovviamente che (e quindi è limitata):

$$A \leq a_k \leq B \qquad \forall k \in N.$$

Proposizione 3.8.3. *Se una successione di Cauchy a_n contiene un'estratta a_{n_k} convergente verso l, allora anche a_n converge verso l.*

Dimostrazione:
Fissato $\epsilon > 0\ \wedge\ v \in N|$:

$$|a_k - a_h| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall h, k > v.$$

Sia inoltre $k_0 > v$ tale che:

$$|a_{n_k} - l| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \forall k \geq k_0.$$

Poiché si ha: $n_{k_0} \geq k_0 > v\ \forall n > v$:

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - l| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Combinando queste due proposizioni si ottiene il seguente teorema:

Teorema 3.9. *CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY. – Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dall'inizio del paragrafo tutte le proposizioni portano a dimostrare la validità di questo teorema.

3.14 La continuità delle funzioni logaritmo ed esponenziale

La funzione logaritmo è una funzione definita come

$$f(x) : R^+ \to R, f(x) = \log_b n \tag{3.30}$$

Mentre la funzione potenza (così come quella esponenziale), essendo sempre positiva, è definita come

$$f(x) : R \to R^+, f(x) = b^n \tag{3.31}$$

3.15 Algoritmo di Erone

Definendo per ricorrenza una successione a_n e preso un numero reale x, si può giustificare come l'algoritmo di Erone sia un buon metodo per l'approssimazione delle radici quadrate:

$$\begin{cases} a_1 \; assegnato \; (> \sqrt{x}) \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right), \; \forall n \in N \end{cases}$$

Proposizione 3.9.1. *La successione a_n definita converge per $n \to +\infty$ verso $\sqrt{x}$.*

Dimostrazione:
Primo metodo: provando che $a_n > \sqrt{x}$ $\forall n \in N$, per a_1 è verificata e risulta poi:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) > \sqrt{x}$$

ma se e solo se

$$a_n^2 + x > 2a_n\sqrt{x}$$

quindi:

$$a_n^2 - 2a_n\sqrt{x} + x = (a_n - \sqrt{x})^2 > 0$$

che è verificata e risulta anche che $a_n \neq \sqrt{x}$. Risulta anche che:

$$a_n > a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$$

ossia:

$$2a_n^2 > a_n^2 + x \qquad cioe' \qquad a_n^2 > x.$$

Poiché anche a_1 converge ad a, allora per ricorrenza otteniamo:

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{x}{a}\right)$$

e risolvendo per a è risolta.
Secondo metodo: Presa la stima dell'errore dell'algoritmo data dalla seguente:

$$a_{n+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2^n}(a_1 - \sqrt{x}), \qquad \forall n \in N$$

Capitolo 4

Limiti di funzioni e funzioni continue

4.1 Premessa e definizione

4.1.1 Premessa

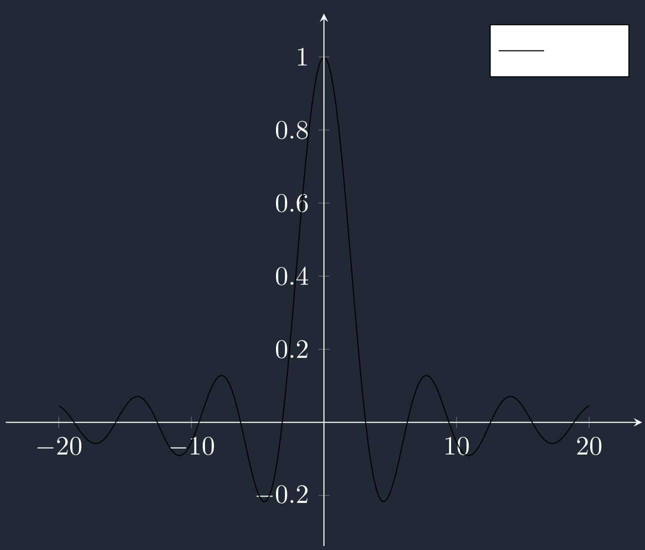
Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$$

Dal momento che sinx è limitata, allora sappiamo che:

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x} \qquad \forall x > 0.$$

Tuttavia come si comporta questa funzione per valori prossimi allo zero? Prendendo un valore sempre più vicino a zero (come 0,1 oppure 0,01) si osserva che il valore di questa funzione si avvicina ad 1. Sarebbe ragionevole dunque dire che questa funzione *sia* 1 quando x sia vicino a zero, tuttavia non si conosce il comportamento di $f(x)$ per valori ancora più prossimi allo zero.
Considerata una generica successione x_n e la corrispondente successione y_n tale per cui $y_n = f(x_n)$, se y_n converge ad un numero l e se l non cambia qualunque sia il valore di x_n che converge ad x_0 allora si dice che la funzione ammette limite uguale ad l per $x \to x_0$.



4.1.2 Definizione

Si definisce quindi limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0 \in R$ nel caso in cui x_0 risulti punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$. Se a, b sono due numeri reali $a < b$, per indicare un *intervallo* di estremi a,b si usa:

$$[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}; \tag{4.1}$$
$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}; \tag{4.2}$$
$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}; \tag{4.3}$$
$$(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}. \tag{4.4}$$

Un'intervallo si dice chiuso (a destra o a sinistra se solo una) se entrambe le parentesi sono quadre, altrimenti è aperto. Inoltre se a e b sono numeri si dice limitato, altrimenti se è presente ∞ è illimitato. Un'*intorno* di un punto x_0 è un intervallo aperto contenente x_0.

Definizione 4.1 (Intorno completo)**.**

$$I(x_0, \epsilon) = \{x \in R : |x - x_0| < \epsilon\} \tag{4.5}$$

è l'intorno completo di un pinto di raggio ϵ

Definizione 4.2 (Intorno sinistro)**.**

$$I^-(x_0, \epsilon) = \{x \in R : x_0 - \epsilon < x < x_0\} \tag{4.6}$$

Definizione 4.3 (Intorno destro)**.**

$$I^+(x_0, \epsilon) = \{x \in R : x_0 < x < x_0 + \epsilon\} \tag{4.7}$$

Definizione 4.4. *Si dice che $f(x)$ ha limite uguale a l (tende o converge ad l) per x che trende a x_0 se, qualunque sia la successione $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall n$ risulta $f(x_n) \to l$.*

Teorema 4.1.

$$\begin{gathered}\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \epsilon, \\ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta\end{gathered} \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \\ \iff \forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M, \\ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta.\end{gathered} \tag{4.9}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall x_n \to +\infty, x_n \in A,\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to l; \\ \iff \forall \epsilon > 0, \exists k : |f(x) - l| < \epsilon,\ \forall x \in A : x > k.\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \ \forall x_n \to +\infty, x_n \in A\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \\ \iff \ \forall M > 0,\ \exists k : f(x) > M,\ \forall x \in A : x > k.\end{gathered} \tag{4.11}$$

4.1.3 Operazioni con i limiti

Le operazioni con i limiti di funzioni sono analoghe a quelle dei limiti di successioni: col teorema del collegamento si possono ricondurre somma, prodotto, quoziente e combinazioni lineari di limiti di successioni ai limiti di funzioni.

4.2 Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

4.2.1 L'esistenza del limite per le funzioni

Supponendo che una funzione f sia definita come $f : R \to Re$ e sia continua su R e definita in un intorno $I(x_0, d)$, allora posso dire che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = sup\{f(x) : x \in (x_0 - d, x_0)\} \tag{4.12}$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = inf\{f(x) : x \in (x_0, x_0 + d)\} \tag{4.13}$$

4.2.2 Il teorema del collegamento

Teorema 4.2 (Teorema del collegamento)**.** *Le seguenti relazioni sono equivalenti tra loro:*

$$\forall x_n \to x_0, x_n \in A - \{x_0\} \ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to l; \tag{4.14}$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon. \tag{4.15}$$

Dimostrazione:
$\forall \epsilon > 0, \delta > 0$ la seconda implica la prima, consideriamo quindi una successione x_n di punti di A, convergente ad x_0 con $x_n \neq x_0$ $\forall n \in N$. Esiste dunque un indice $v : |x_n - x_0| < \delta$ $\forall n > v$, inoltre essendo $x_n \neq x_0$ si ha che:

$$x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > v.$$

Per la 4.10 dunque:

$$|f(x_n) - l| < \epsilon,$$

che in base alla definizione di limite di successione significa che $f(x_n) \to l$ per $n \to +\infty$. Provando ora per assurdo che la seconda implichi la prima, allora per contraddire la seconda dobbiamo affermare che:

$$|f(x_n) - l| \geq \epsilon.$$

Ponendo quindi nella relazione $\delta = 1/n$ e indicando con $x = x_n$ il valore di X risulterà che:

$$x_n \neq x_0 \qquad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in N.$$

perciò diventa che $x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in N$ e $x_n \to x_0$ per il teorema dei carabinieri: però $f(x_n)$ non converge poiché la disuguaglianza imposta per assurdo contrasta con la definizione di limite.

4.3 Proprietà dei limiti di funzioni

4.3.1 Operazioni coi limiti

Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente, di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente dei due limiti purché non sia nella forma indeterminata $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$.

4.3.2 Limiti notevoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + f(x))}{f(x)} = 1 \tag{4.16}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + f(x))}{f(x)} = \frac{1}{\log(a)} \tag{4.17}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1 \tag{4.18}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^{f(x)} - 1}{f(x)} = \log(a) \tag{4.19}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e \tag{4.20}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + f(x))^c - 1}{f(x)} = c \tag{4.21}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 0 \tag{4.22}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(f(x))}{f(x)^2} = \frac{1}{2} \tag{4.23}$$

Loro dimostrazioni:

4.4 Funzioni continue

Definizione 4.5. *Una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0); \tag{4.24}$$

una funzione è continua in un intervallo $[a; b]$ se è continua in ogni punto $x_0 \in [a; b]$.

4.5 Discontinuità

Considerando la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se\ x > 0, \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

Per $x = 0$ essa presenta un salto, è possibile tuttavia estenderla nella seguente maniera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & sex \neq 0 \\ l & sex = 0 \end{cases}$$

La funzione è ora definita in $x = 0$ anche se non è continua poiché adesso possiede due salti.
Consideriamo ora i vari tipi di discontinuità, posta $f(x)$ definita in A e $x_0 \in A$:

1. La funzione presenta una *discontinuità eliminabile* se $\exists$ il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e risulta:

   $$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

   allora posto $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ la funzione è continua nel punto x_0 con la seguente estensione:

   $$f(x) = \begin{cases} f(x) & se & x \in A - \{x_0\} \\ l & se & x = x_0 \end{cases}$$

2. La funzione $f(x)$ presenta in x_0 una *discontinuità di prima specie* se $\exists$ finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha:
   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

3. La funzione $f(x)$ presenta una *discontinuità di seconda specie* se almeno uno dei due limiti:

   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

   $!\exists$ oppure non è definito.

Dalla definizione sopra, si definisce come *prolungamento per continuità* di $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & se & x \in A - \{x_0\} \\ l & se & x = x_0 \end{cases}$$

4.6 Teoremi delle funzioni continue

Teorema 4.3 (TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO)**.** *Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di x_0 e sia continua in x_0. Se $f(x_0) > 0, \exists\delta > 0 : f(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.*

Dimostrazione. Dato che $f(x) > 0$, possiamo scegliere $\epsilon = f(x_0)/2, \exists\delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2\ \forall x \in |x - x_0| < \delta$ quindi:

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

□

Teorema 4.4 (TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI). *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a;b]$. Se $f(a) < 0, f(b) > 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) | f(x_0) = 0$.*

La dimostrazione si vedrà con il metodo di bisezione nella prossima sezione.

Teorema 4.5 ((PRIMO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI). *Una funzione continua in $[a;b]$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Dimostrazione. Posto $f(a) \leq f(b)$, consideriamo ora:

$$g(x) = f(x) - y_0, \qquad \forall x \in [a;b];$$

essendo $f(a) < y_0 < (b)$ per ipotesi, allora

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \qquad\qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il 4.4 $\exists x_0 \in (a;b) | g(x_0) = 0, ossia f(x_0) = y_0$. □

Teorema 4.6 (TEOREMA DI WEIERSTRASS). *Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$. Allora $f(x)$ assume massimo e minimo in $[a,b]$, cioè $\exists x_1, x_2 \in [a,b]|$*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dimostrazione. Posto $M = sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di $[a,b]$ tali che:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M.$$

Se $M = +\infty$, allora $\forall n \in N \ \exists x_n \in [a,b] : f(x_n) > n \Rightarrow f(x_n) \to M = +\infty$. Se invece $M < +\infty \ \forall n \in N \ \exists x_n \in [a,b] :$

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M \qquad \Rightarrow \qquad f(x_n) \to M.$$

Per il teorema 3.8 $\exists$ estratta di x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a,b] : x_{n_k} \to x_0$. Poiché $f(x)$ è continua, allora segue che $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$ e quindi

$$M = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \lim_{k \to +\infty} f(xn_k) = f(x_0).$$

Questo implica dunque che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è un massimo. (La stessa vale per dimostrare un minimo). □

Teorema 4.7 ((SECONDO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI). *Una funzione continua in un intervallo $[a,b]$ assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.*

Dimostrazione. I valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base a 4.6; rimane da provare che $\forall y_0 \in (m,M) \ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$. Indichiamo con x_1, x_2 il minimo ed il massimo di $f(x)$ tali che $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$ e consideriamo:

$$g(x) = f(x) - y_0 \qquad \forall x \in [a,b].$$

Essendo ora $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$ risulta che:

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0 \qquad\qquad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0;$$

Per il 4.4 $\exists x_0 : g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$. □

Teorema 4.8 (CRITERIO DI INVERTIBILITA'). *Una funzione continua e strettamente monotòna in un intervallo $[a,b]$ è invertibile in tale intervallo.*

Dimostrazione. Posto che f sia strettamente crescente in $[a,b]$ risulta:

$$f(a) < f(x) < f(b) \qquad \forall x \in (a,b)$$

$f(a)$ è il minimo dell'intervallo e $f(b)$ è il massimo, dato che è strettamente crescente, non può esistere $x_1, x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, per cui: $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile. □

4.7 Metodo di bisezione per il calcolo delle radici

Nel caso di equazioni del tipo:

$$f(x) = 0$$

e posto che la funzione sia continua all'interno di un intervallo $[a, b]$ allora risolvere l'equazione vuol dire trovare quell' x_0 che costituisce la soluzione (o le soluzione nel caso siano più di uno). RIcordando le ipotesi del teorema degli zeri di una funzione, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Preso un punto $c = \frac{b+a}{2}$ se $f(c) = 0$ allora si è trovata la radice, altrimenti bisogna ripetere il procedimento restringendo l'intervallo a seconda del segno di $f(c)$: bisogna vedere in quale intervallo (se in $[a, c]$ oppure $[c, b]$) la funzione assume segno discorde e restringerlo appositamente: se $f(c) > 0$ allora nell'intervallo $[a, c]$ la funzione assume segno discorde e quindi si restringe il campo ad $[a, c]$.
Ripetendo ora il procedimento si ottengono tre successioni a_n, b_n, c_n e se per qualche $f(c_n) = 0$ allora ci si ferma poiché si è trovata una radice. Per costruzione la successione a_n è crescente mentre la successione b_n è decrescente e sono entrambe limitate poiché contenute all'interno dell'intervallo di partenza. per cui si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = x_0 \tag{4.26}$$

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2} \tag{4.27}$$

Dalla continuità di $f(x)$ si ottiene che:

$$f(x_0) \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0; \qquad f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0$$

Perciò $f(x_0) = 0$ ed il teorema degli zeri è dimostrato.

4.8 Continuità delle funzioni composte

Teorema 4.9 (La composizione di funzioni continue è continua)**.** *Date due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$ definite come*

$$f : A \to B$$
$$g : B \to B$$

La funzione $h(x)$ definita come $f \circ g$ è continua e definita da $A \to R$.

Dimostrazione. Date due funzioni continue $f(x)$ e $g(x)$, allora posso dire che g è continua in $f(x_0)$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon : |g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

Se e solo se $y \in B, |y - f(x_0)| < \delta_\epsilon$.
f è continua in x_0 se $\exists r_{\delta_\epsilon} : |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$ e devo dire

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) \forall \epsilon > 0 \ \exists \nu_\epsilon : |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$$

se e solo se $x \in A$ e $|x - x_0| < r_\epsilon$. □

4.9 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 4.10 (L'immagine di una funzione su di un intervallo chiuso è continua)**.** *Se f è continua in $[a, b]$, allora*

$$f([a,b]) = \left[\begin{array}{ccc} min\ f & , & max\ f \\ .[a,b] & & .[a,b] \end{array} \right]$$

Dimostrazione. Data $f : D \to R$ dato che $f(x)$ per ipotesi è continua su tutto R, essa sarà anche continua su di un intervallo $[a, b]$. Allora dato $f : I \to h$, dove I è un intervallo e f è continua in I, allora applicando il teorema di Weierstrass, posso dire che per $x_m, x_M \in [a, b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \forall x \in [a, b]$ dove x_mè il minimo di f nell'intervallo e x_M il massimo .
Allora dato che

$$minf = supf$$
$$supf = maxf$$

Sapendo che

$$inff \in f([a, b]), supf \in f([a, b])$$

Allora si ha la tesi. □

Teorema 4.11 (Una funzione monotona è continua se e solo se la sua immagine è un intervallo)**.**

Dimostrazione. Data $f : I \to R$ crescente, allora

$$\forall x_0 \in I, \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Che sono rispettivamente $sup\ f, inf\ f$. Se f è allora continua supponendo che $f(I)$ è un intervallo viceversa possiamo supporre che f sia crescente in e quindi nell'intervallo $f(I)$ è continua.
Se per assurdo si suppone che non sia continua nell'intervallo allora

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} = L_-, \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L_+$$

Dato che è crescente e discontinua possiamo supporre che

$$L_- < L_+, f(x) \leq L_- \forall x < x_0, f(x) \geq L_+, \forall x > x_0$$

Scelto allora un $\bar{y}$ come $L_- < \bar{y} < L_+$ tale che $\bar{y} \neq f(x_0)$ e che non appartenga a I, allora $\bar{y}$ è un valore che non viene mai raggiunto da f. Tuttavia essendo I continuo, allora, scelti

$$x_1 < x_0 < x_2, \qquad f(x_1) < \bar{y} < f(x_2)$$

Non è possibile che $\bar{y}$ non appartenga a $f(I)$ è un intervallo continuo e allora $\bar{y} \in f(I)$ e quindi si ha la tesi. □

Teorema 4.12. *La funzione inversa di una funzione continua è anch'essa continua*

Dimostrazione. sia $f : I \to R$, con I un intervallo continuo e strettamente crescente in I, allora f è invertibile e la sua stretta monotonia implica l'iniettività di f ed è invertibile l'immagine di f^{-1} che è il dominio di f che è un intorno $\Rightarrow f^{-1}$ è continua . □

Capitolo 5

Derivate

5.1 Tasso di accrescimento e significato della derivata

Consideriamo un semplice processo di crescita di un corpo e supponendo che il peso $p = p(t)$ in funzione del tempo,, all'istante $t + h$ il peso è aumentato per cui il rapporto:

$$\frac{p(t+h) - p(t)}{h}$$

è il tasso medio di accrescimento, il limite di $h \to 0$ è il tasso di accrescimento:

$$\lim_{h \to 0} \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Questo rapporto, chiamato *rapporto incrementale* è esattamente la derivata quando $h \to 0$.

5.2 Definizione di derivata

Sia f(x) definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia $x \in (a, b)$, la funzione è derivabile se in x esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Le notazioni della derivata sono:

$$f'(x) \qquad \frac{df(x)}{dx} \qquad Df(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad Dy$$

Si parla di $f(x)$ derivabile in (a, b) se è derivabile $\forall x \in (a, b)$, derivata destra e sinistra quando $h \to 0^+, h \to 0^-$. Se f è definita in $[a, b]$ si dice che f è *derivabile nell'intervallo* se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e se f ammette derivata destra in a e sinistra in b.
Una funzione f è continua in un punto x se:

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

La *continuità* non implica infatti la *derivabilità*, ma è vero il contrario.

Teorema 5.1 (La derivabilità implica la contintà)**.** *Sia $y = f(x)$, e sia $x_0 \in Dom(f)$ supponendo che f sia derivabile in x_0, allora la funzione è continua in x_0.*

Dimostrazione. Vogliamo provare che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

in modo equivalente vogliamo dimostrare che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

COnsiderata la seguente uguaglianza per $0 \neq h \in R$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h$$

PAssando al limite:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0}\left(f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}h\right)$$

Essendo derivabile in x_0, allora il limite del rapporto incrementale esiste finito ed il suo valore è la derivata nel punto. Infine:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0$$

□

5.3 Operazioni con le derivate

Teorema 5.2 (OPERAZIONI CON LE DERIVATE). *Se f e g sono due funzioni derivabili in un punto x, allora sono derivabili in x anche la somma, la differenza, il prodotto ed il quoziente:*

$$(f\pm g)' = f' \pm g' \tag{5.1}$$
$$(fg)' = f'g + fg' \tag{5.2}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad se\ g \neq 0. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni si ottengono utilizzando il limite incrementale: per la somma è immediata, per il prodotto si ottiene:

$$\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

Sommando ed sottraendo $f(x)g(x+h)$ si raccoglie e si ottiene la tesi:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Per dimostrare il quoziente, si utilizza la permanenza del segno per cui $\exists\delta>0 : |h|<\delta \Rightarrow g(x+h)\neq 0$. Scrivendo ora il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

Per cui sommando e sottraendo $f(x)g(x)$ si ottiene la tesi:

$$\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x) - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x+h)g(x)}.$$

□

Un caso particolare è la moltiplicazione di una costante per la funzione, in tal caso si ottiene: $(cf)' = cf'$.

5.4 Derivate delle funzioni composte ed inverse

Teorema 5.3 (TEOREMA DELLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE). *Se g è una funzione derivabile in x, e se f è una funzione derivabile nel punto $g(x)$, allora la funzione composta $f(g(x))$ è derivabile in x:*

$$Df(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x). \tag{5.4}$$

Dimostrazione. Posta, con $y = g(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(y+k)-f(y)}{k} & se \quad k \neq 0 \\ f'(y) & se \quad k = 0 \end{cases}$$

Per la derivabilità, si ottiene che:

$$\lim_{k \to 0} F(k) = f'(y) = F(0).$$

$F(k)$ è continua quindi in $k = 0$ e posto:

$$k = g(x+h) - g(x),$$

essendo $g(x) = y$, $g(x+h) = g(x) + k = y + k$, $\forall k \neq 0$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x)+h) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{k}{h} =$$
$$= \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} = F(k) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Preso ora il limite del primo e dell'ultimo membro ed uguagliati (i quali valgono)+ anche per $k = 0$, si ottiene:

$$F(0) \cdot g'(x) = f'(x) \cdot g'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

□

Teorema 5.4 (TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua e monotòna in $[a, b]$. Se $f(x)$ è derivabile in $x \in [a, b], f'(x) \neq 0$, allora anche f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$:*

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \tag{5.5}$$

Dimostrazione. Il rapporto incrementale della funzione inversa diventa (posto $k = f(x+h) - f(x)$ e $y = f(x)$):

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}.$$

Col limite per $k \to 0$ si ottiene la tesi. □

5.5 Derivate delle funzioni elementari

$$D\ x^n = nx^{n-1}. \tag{5.6}$$

Dimostrazione. Si ottiene per induzione la tesi, sapendo che per $n = 1$ è vera, per $n + 1$ diventa:

$$D\ x^{n+1} = D(x^n \cdot x) = D(x^n)x + x^n Dx =$$
$$= nx^{n+1}x + x^n \cdot 1 = (n+1)x^n.$$

□

$$D\ \log_a(x) = \frac{1}{x} \log_a(e),\ \forall x > 0, a > 0, a \neq 1. \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Si utilizzano le proprietà del logaritmo ed i limiti notevoli così il rapporto incrementale diventa:

$$\lim_{\frac{\log_a(x+h) - \log_a(x)}{h}} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a(\frac{x+h}{x}) = \qquad \log_a(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}) \tag{5.8}$$

Ottenendo la tesi. □

Si ottiene dunque anche la seguente:

$$D\ \log_e(x) = \frac{1}{x},\ \forall x > 0. \tag{5.9}$$

Si ottiene anche quella per la potenza ad esponente reale:

$$D\ x^a = D\ e^{log(x^b)} = x^b \frac{b}{x} = bx^{b-1}. \tag{5.10}$$

Per le funzioni trigonometriche si ottiene invece:

$$D\ \sin(x) = \cos(x) \qquad\qquad D\ \cos(x) = -\sin(x). \tag{5.11}$$

Dimostrazione. Per le dimostrazioni si utilizzano le formule di addizione ed i limiti notevoli all'interno del rapporto incrementale. □

La derivata della tangente si calcola col rapporto $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$D\ \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x). \tag{5.12}$$

5.6 Significato geometrico della derivata. Retta tangente

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intorno di un punto x_0, proviamo a trovare l'equazione della retta tangente in $P(x_0, f(x_0))$ che passi dunque anche per $P_0(x_0 + h, f(x_0 + h))$:

$$\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + q & \textit{passaggio per } P_0 \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q & \textit{passaggio per } P \end{cases}$$

Combinando le equazioni e facendone il limite per $h \to 0$, si ottiene l'equazione della retta tangente in P_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.13}$$

Capitolo 6

Studio di funzione

6.1 Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat

Presa una funzione $f(x)$ definita in $[a,b]$, diciamo che $x_0 \in [a,b]$ è massimo (relativo) di f quando $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \geq f(x), \qquad \forall x \in [a,b] : \qquad |x - x_0| < \delta. \tag{6.1}$$

Non deve valere per tutti i punti dell'intervallo ma solo per gli x vicini. Il punto di massimo assoluto è invece un punto in cui $f(x)$ è maggiore di qualsiasi altro valore nell'intervallo di esistenza.
Analogamente si può dire che x_0 è un punto di minimo (relativo) per la funzione f, nell'intervallo $[a,b]$ se $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \leq f(x), \qquad \forall x \in [a,b] : \qquad |x - x_0| < \delta. \tag{6.2}$$

Teorema 6.1 (TEOREMA DI FERMAT)**.** *Sia f una funzione definita in $[a,b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo interno all'intervallo di definizione, se f è derivabile in x_0 allora risulterà che $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo), allora sicuramente $\exists \delta > 0$:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \qquad \forall h : |h| < \delta.$$

Svolgendo il valore assoluto otteniamo:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & se \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & se \quad -\delta < h < 0 \end{cases}$$

Imponendo il limite si ottiene che questo deve essere:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

La tesi è quindi dimostrata. □

Ne segue inoltre un corollario:

Teorema 6.2. *Sia $f(x)$ definita in $[a,b]$ e derivabile in x_0, se x_0 è un punto di massimo relativo risulterà che:*

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \leq 0$$

altrimenti se è di minimo relativo risulterà:

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0.$$

6.2 Il teorema di Rolle

Teorema 6.3 (TEOREMA DI ROLLE)**.** *Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Indicando con x_1 e x_2 i punti di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo $[a,b]$, tali punti esistono per Weierstrass (4.6). Se tali punti corrispondono entrambi ad a e b, allora $\forall x \in [a,b]$ risulta che $f(x)$ è costante, se invece almeno uno dei due è interno, allora si annulla per Fermat (6.1). □

Teorema 6.4 (TEOREMA DI LAGRANGE)**.** *Sia $f(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). $\exists x_0 \in (a,b)$:*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{6.3}$$

ossia esiste un punto il cui coefficiente angolare è uguale a quello della retta che congiunge a e b.

Dimostrazione. Attraverso la funzione intermedia $g(x)$ ci si riconduce a Rolle.

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)\right).$$

Si vede che $g(a) = g(b) = 0$, e che essa è derivabile in (a,b) per cui:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \qquad \forall x \in (a,b).$$

Per Rolle $\exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$, ponendo questo nella precedente si ottiene la tesi. □

6.3 Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente teorema.

Teorema 6.5 (CRITERIO DI MONOTONIA)**.** *Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b), allora:*

$$f'(x) \geq 0, \qquad \forall x \in (a,b)\ f \nearrow \in [a,b] \tag{6.4}$$

$$f'(x) \leq 0, \qquad \forall x \in (a,b)\ f \searrow \in [a,b] \tag{6.5}$$

Dimostrazione. Provando la prima (la seconda è analoga), si ottiene che supponendo $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a,b)$ la tesi di Lagrange sarà (posti x_1 e x_2 rispettivamente come $a \leq x_1 < x_2 \leq b$):

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1).$$

Risulta quindi che $f(x_2) \geq f(x_1)$. Viceversa se f è crescente allora $\forall x \in (a,b)$ e $h > 0 : x+h \in (a,b)$ risulta $f(x+h) \geq f(x)$ e quindi:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

E risulta dimostrata per il limite $h \to 0^+$ (Vale anche per $h < 0$ e $h \to 0^-$). □

La conseguenza di questo teorema è il seguente:

Teorema 6.6 (CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO)**.** *Una funzione è costante in un intervallo $[a,b]$ se e solo se è derivabile in $[a,b]$ e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione. Si prova che la derivata di una costante sia nulla su tutto l'intervallo, viceversa se $f(x)$ è derivabile in $[a,b]$ e $f'(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$ per i criteri di monotonia è sia crescente che decrescente e quindi $\forall x$ risulta $f(x) \leq f(a)$ e $f(x) \geq f(a)$. □

Combinando i teoremi 6.5 e 6.6 si ottiene il seguente:

Teorema 6.7 (CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA)**.** *Sia f una funzione continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b)*. Allora se* $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$*; e f' non si annulla in alcun intervallo interno, allora è* $\nearrow\nearrow$*, altrimenti se* $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$*; e f' non si annulla in alcun intervallo interno allora è* $\searrow\searrow$*.*

Dimostrazione. Proviamo l'implicazione $\Rightarrow$; essendo $f'(x) \geq 0$, per il criterio di monotonia si ha che $f(x)$ è crescente. Se non fosse $\nearrow\nearrow$, allora si avrebbe $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 : f(x_1) = f(x_2)$, ma allora dato che: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, allora $f(x)$ sarebbe costante in $[x_1, x_2]$, e quindi andrebbe contro l'ipotesi.
L'implicazione $\Leftarrow$; dato che f è $\nearrow\nearrow$ in $[a, b]$, per il criterio di monotonia allora si ha che $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$; inoltre $f'(x)$ non può annullarsi in $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$, poiché altrimenti sarebbe costante. (La tesi è dimostrata e vale il ragionamento analogo per la stretta decrescenza). □

6.4 Funzioni convesse e concave

Una funzione si dice convessa in $[a, b]$ se $\forall x \in [a, b]$ il grafico nell'intervallo è al di sopra della retta tangente in x_0, altrimenti è concava.

Teorema 6.8 (CRITERIO DI CONVESSITA')**.** *Supponiamo che* $f(x)$ *sia derivabile in* $[a, b]$ *e che ammetta derivata seconda in* (a, b) *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

$$f(x) \text{ convessa} \in [a, b]; \tag{6.6}$$

$$f'(x) \text{ crescente} \in [a, b]; \tag{6.7}$$

$$f''(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b). \tag{6.8}$$

Dimostrazione. Allo scopo di provare che $f'(x)$ è crescente $\in [a, b], x_1, x_2 \in [a, b], x_1 < x_2$ ponendo che $x_0 = x_1$ oppure $= x_2$ nella def. di convessità si dimostra come la prima sia equivalente alla seconda:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), & \forall x \in [a, b]; \\ f(x) &\geq f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) & \forall x \in [a, b]. \end{aligned}$$

scegliendo $x = x_2$ e $x = x_1$ e sommando membro a membro si ottiene:

$$0 \geq f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

cioè

$$(f'(x_2) - f'(x_1)) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

quindi ne segue che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$ e quindi è dimostrato che la prima implica la seconda.
Fissati ora $x, x_0 \in [a, b], x \neq x_0$ per Lagrange $\exists x_1 \in [x_0, x]$ per cui:

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0)$$

Se $x > x_0$ si ha per la monotonia di $f(x)$ che $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ e quindi la conclusione:

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0), \qquad x_1 \in (x, x_0)$$

mentre se $x < x_0$ allora $x_1 \in (x_0, x)$ e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$ e si ottiene nuovamente la conclusione. □

6.5 Teorema di Cauchy

Teorema 6.9 (TEROEMA DI CAUCHY)**.** *Siano* $f(x), g(x)$ *due funzioni continue in* $[a, b]$ *e derivabili in* (a, b)*. Se* $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$*:*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Come per Lagrange, si ottiene una funzione ausiliaria:

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \right).$$

Per Rolle $\exists x_0 \in (a, b) : h'(x_0) = 0$ che equivale alla tesi: □

6.6 Teorema dell' Hopital

Teorema 6.10 (TEOREMA DI L'HOPITAL). *Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni che tendono a zero per $x \to x_0$ e derivabili in un intorno di x_0 (con la eventuale eccezione di x_0). Se in questo intorno risulta che $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$ allora si ha:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.10}$$

purché esista il secondo limite.

Il teorema è valido anche per le forme $\frac{\infty}{\infty}$ o anche solo quando $g \to \infty$ e vale anche per limiti destri e sinistri, o anche per $x \to \pm\infty$.

Dimostrazione particolare. Poste f, g come funzioni con derivabili in x_0, esse sono anche continue in x_0 e quindi per le ipotesi del teorema $f(x) = g(x) = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

E' possibile inoltre ricondurre i limiti $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$ riconducendoli all'ipotesi del teorema stesso. (anche le forme $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ma solo in casi particolari).

Dimostrazione completa. Dimostrazione per l'ipotesi che i limiti $f(x), g(x)$ siano $= 0$.
Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili im $[a, b] - \{x_0\} : f(x_0) = g(x_0) = 0$. Se $g'(x_0) \neq 0$ $\forall x \in [a, b] - \{x_0\}$ e se esiste il limite:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora $\exists$ il limite per $x \to x_0$ dal rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ e si eguagliano.
Usando le ipotesi, estendiamo per continuità $f(x), g(x)$ in x_0 con il valore di 0. Così risultano continue in $[a, x_0], [x_0, b], a \neq x_0 \neq b$ e derivabili in $(a, x_0), (x_0, b)$. Si osserva come $g(x)$ e $g'(x)$ non si annullano nell'intervallo in quanto se così fosse posto $x_1 : g(x_1) = 0$ allora per Rolle in $[x_0, x_1]$ esisterebbe anche x_2 tale per cui $g'(x_2) = 0$.
Presa ora una successione $x_n \to x_0$ e contenuta in $[a, b]$, per Cauchy:

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} \frac{f'(x'_n)}{g'(x'_n)}.$$

Per cui si ottiene:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n+\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

a primo membro il limite è indipendente dalla successione e quindi si ottiene la tesi nella forma:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La dimostrazione per i limiti destri e sinistri di x_0 è identica.
La dimostrazione nel caso $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ (basta che il denominatore $\to \pm\infty$) procede prima dimostrando la tesi del limite sinistro e ottenendo la tesi per il valore completo $x \to x_0$.
Indicando con l il limite per $x \to x_0^-$ del rapporto esistente per ipotesi, si considera $l \in R$ (ma è analoga per infinito):

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

L'ipotesi $g'(x) \neq 0 \in [a, x_0)$ $(a \leq x_0 - \delta)$ ci permette di dire che:

$$f'(x) - (l + \epsilon)g'(x) < 0, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

Nell'intervallo sinistro $(x_0 - \delta, x_0)$ si definisce:

$$h_1(x) = f(x) - (l + \epsilon)g(x)$$
$$h_2(x) = f(x) - (l + 2\epsilon)g(x)$$

Che sono strettamente decrescenti, i cui limiti per $x \to x_0^-$ convergono a limiti finiti poiché $h_1(x) - h_2(x) = \epsilon g(x)$ diverge all'infinito. Supponendo che $x \to x_0^-$ $h_1(x)$ diverga, allora divergerà a $-\infty$. Esisteranno quindi $\delta_1 \leq \delta$ tale che: $h_1(x) < 0$ e allora:

$$f(x) - (l + \epsilon)g(x) < 0, \qquad \forall x \in (x_0 - \delta_1, x_0)$$

Allora $g(x)$ diverge positivamente per $x \to x_0^-$ ed esiste allora $\delta_2 > 0 : g(x) > 0, x \in (x_0 - \delta_2, x_0)$. Posto allora $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ segue che:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < l + \epsilon \qquad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0).$$

.
Dimostrazione dei limiti $x \to \pm\infty$:
Supponendo che $f(x), g(x)$ siano derivabili in $[a, +\infty]$ con $a > 0$, $g'(x) \neq 0, x \geq a$, si definiscono in $(0, 1/a]$:

$$f(\bar{t}) = f(1/t), \qquad g(\bar{t}) = g(1/t), \forall t \in (0, 1/a].$$

Risulta che i limiti in t siano uguali a quelli per $x \to +\infty$. Applicando Hopital a questo caso si ottiene dunque:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(\bar{t})}{g(\bar{t})} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\bar{t})}{g'(\bar{t})}$$

E quindi derivando si ottiene:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f'(\bar{1}/t)}{g'(1/t)}$$

Cambiando variabile nel limite si ottiene esattamente la tesi $(1/t = x)$. □

6.7 Studio del grafico di una funzione

Seguendo il seguente schema è possibile studiare una funzione per ricavarne il grafico probabile:

1. *Dominio* di $f(x)$;
2. parità$(f(-x) = f(x), \forall x)$ o disparità$(-f(-x) = f(x), \forall x)$, oppure periodica;
3. intersezioni con gli assi cartesiani;
4. segno della funzione;
5. asintoti orizzontali, verticali o obliqui;
6. intervalli di monotonia;
7. massimi e minimi relativi e relativi valori (quando ci sono massimi e minimi assoluti);
8. intervalli di concavità o convessità e punti di flesso con la derivata seconda;
9. classificazione delle discontinuità (se presenti).

TODO 236

6.8 Sulla continuità della funzione derivata

6.9 Funzioni convesse in un intervallo

6.10 Metodo di Newton per il calcolo delle radici

Capitolo 7

Integrazione secondo Reimann

7.1 Metodo di esaustione

Il metodo di esaustione è quel metodo che utilizzava Archimede per il calcolo dell'area del cerchio; si può utilizzare analogamente per calcolare le aree delle funzioni: suddividendo il sottografico di una funzione in piccoli rettangoli si ottiene l'area sottostante come:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Tuttavia questa somma è una sottostima di quella vera e va corretta attraverso un metodo di sovrastima considerando rettangoli con la stessa base ma con altezza maggiore quindi:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Per cui adesso l'area sarà:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \leq Area \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

(Il libro svolge un esempio) in generale però si osserva che integrando il risultato (le due sommatorie risultano uguali per tutte le funzioni quando si considera il $\lim_{n\to\infty}$) si ottiene proprio la funzione considerata

7.2 Partizione

Definizione 7.1. *Una* Partizione *è insieme ordinato all'interno di un intervallo* $[a, b] \in R$ *costituito da* $n + 1$ *punti distinti e per ogni partizione si ha:*

$$m_i = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Si definiscono le somme integrali inferiori e superiori:

Definizione 7.2.

$$s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

Vale quindi il seguente lemma:

Proposizione 7.0.1. *Sia $m \leq f(x) \leq M$ per $x \in [a,b]$ allora $\forall$ coppia di partizioni $P,Q \in [a,b]$:*

$$m(b-a) \leq s(P) \leq S(Q) \leq M(b-a) \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Ponendo $R = P \cup Q$ confrontiamo $s(P)$ e $s(R)$ allora prendendo solo un $\bar{x}$ in più per R rispetto a P si ha che:

$$\bar{m_1} = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, \bar{x}]\};$$
$$\bar{m_2} = inf\{f(x) : x \in [\bar{x}, x_i]\}$$

Si ha che:

$$s(R) - s(P) =$$
$$= (\bar{m_1}(\bar{x} - x_{i-1}) + \bar{m_2}(x_i - \bar{x})) - m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Essendo ora $\bar{m_1} \geq m_i, \bar{m_2} \geq m_i$ e quindi:

$$s(R) - s(P) \geq (\bar{x} - x_{i-1} + x_i - \bar{x} - x_i + x_{i-1}) = 0$$

Allora $s(P) \geq s(R)$ e analogamente si dimostra che $S(R) \geq S(Q)$. e quindi basta dimostrare che: $m(b-a) \leq s(R) \leq S(R) \leq M(b-a)$. Ossia preso un $A = \{s(P)\}$ e $B = \{S(P)\}$ ossia gli insiemi delle somme inferiori e superiori.
Da questo si ha che $a \leq b$ e che i due insiemi sono separati. Per l'assioma di completezza si ha che $\exists c$ che sta tra tutti gli elementi di A e di B. Quindi □

Definizione 7.3 (Integrale indefinito)**.** *Se vi è un unico elemento di separazione tra A e B allora si dice che $f(x)$ è integrabile in $[a,b]$ secondo Riemann e l'elemento si indica come:*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{7.2}$$

Posto dunque:

$$s(f) = inf\{s(P) : P \ Partizione \ di[a,b]\}$$
$$S(f) = sup\{S(P) : P \ Partizione \ di[a,b]\}$$

se risulta che $s(f) = S(f)$, allora $f(x)$ è integrabile secondo Reimann.

Teorema 7.1. *Una funzione f limitata in $[a,b]$ è ivi integrabile secondo Reimann se e solo se, $\forall \epsilon > 0, \exists \ P \ di \ [a,b] : S(P) - s(P) < \epsilon$.*

Dimostrazione. Se f è integrabile secondo Reimann allora $s(f) = S(f)$ dove $s(f)$ e $S(f)$ sono rispettivamente l'estremo superiore ed inferiore definiti e per $\forall \epsilon > 0$ esistono partizioni di P e Q dell'intervallo tali che:

$$s(f) - \frac{\epsilon}{2} < s(P)$$
$$S(f) + \frac{\epsilon}{2} > S(Q)$$

Posto dunque $R = P \cup Q$ allora si deduce che

$$S(R) - s(R) < S(f) + \frac{\epsilon}{2} - \left(s(f) - \frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon$$

Se invece vale questa allora essendo $s(P) \leq s(f), S(f) \leq S(P)$ si ottiene che $0 \leq S(f) - s(f) \leq S(P) - s(P) < \epsilon$. Questa vale $\forall \epsilon > 0$ ossia quando f è integrabile secondo Riemann. □

L'integrale definito ha un significato geometrico ben preciso: ossia se non è negativo rappresenta l'area di un plurirettangolo contenuto nell'insieme $S = \{(x,y) \in [a,b] \times R : 0 \leq y \leq f(x)\}$ mentre la somma $S(P)$ rappresenta l'area del plurirettangolo contenente S. L'insieme S prende il nome di rettangoloide di base $[a,b]$ relativo alla funzione $f(x)$.
Possiamo dunque affermare grazie al teorema precedente che se $f(x)$ è non negativa ed integrabile, l'area del rettangoloide di base $[a,b]$ è uguale all'integrale.

7.3 Proprietà degli integrali definiti

La prima proprietà ha un forte significato geometrico in quanto ci permette di definire la somma di integrali ed affermare che un'area p scomponibile come somme di infinite aree.

Teorema 7.2 (Teorema di addittività degli integrali)**.** *Se a, b, c sono tre punti di un intervallo dove la funzione $f(x)$ è integrabile allora:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{7.3}$$

Dimostrazione. Se due dei tre punti coincidono tra loro allora la tesi segue le definizioni di integrale, altrimenti si considera il caso in cui $c \in [a, b]$. Se P_1 e P_2 sono due partizioni degli intervalli $[a, c]e[c, b]$ allora si ha che: $P = P_1 \cup P_2$ e questa è una partizione dell'intervallo e quindi si ha $s(P) = s(P_1)+s(P_2)$ e $S(P) = S(P_1) + S(P_2)$ e da qui si ha la tesi. □

Teorema 7.3 (Linearità dell'integrale)**.** *Se f,g sono integrabili allora se c è reale anche $f + g$ e $c \cdot f$ sono integrabili e risulta che:*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx; \tag{7.4}$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{7.5}$$

Dimostrazione. Dato che f, g sono integrabili secondo Riemann in $[a, b]$ allora $\forall \epsilon > 0$ esistono le partizioni P e Q tali che:

$$S(P, f) - s(P, f) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad S(Q, g) - s(Q, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Indicando con R la partizione generata da P e Q si ottiene:

$$S(R, f) - s(R, f) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad S(R, g) - s(R, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

e quindi:

$$s(R, f) + s(R, g) \leq s(R, f + g) \leq S(R, f + g) \leq S(R, f) + S(R, g)$$

quindi per definizione di integrale si ottiene che

$$s(R, f) + s(R, g) \leq \int_a^b (f(x) + g(x))dx \leq S(R, f) + S(R, g)$$

segue quindi l'asserto per la natura di ϵ e quindi:

$$\left|\int_a^b (f(x) + g(x)) - \left(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\right)\right| < \epsilon$$

□

Si ha anche la seguente formula:

Teorema 7.4 (Teorema del confronto tra integrali)**.** *Se f, g sono integrabili in $[a, b]$ e se $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ allora:*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)d \tag{7.6}$$

Si deduce inoltre che:

$$f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0, (a < b)$$

Ed utilizzando le disuguaglianze $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ i loro integrali sono nello stesso ordine e allora si arriva al teorema del confronto in una forma alternativa:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \qquad a < b. \tag{7.7}$$

Proposizione 7.4.1 (Integrale di una fuzione costante)**.** *L'integrale di una funzione costante è proprio il differenziale per l'intervallo di integrazione*

$$\int_a^b y \; dx = y \cdot x(a-b) \tag{7.8}$$

Teorema 7.5 (Monotonia dell'integrale definito)**.**

7.4 Teorema di Cantor

Allo scopo di dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato risulta integrabile secondo Riemann si introduce il concetto di uniforme continuità.

Definizione 7.4. *Si dice che $f : I \to R$ è uniformemente continua nell'intervallo I di R se:*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \; \forall x, x' \in I \, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon \tag{7.9}$$

Teorema 7.6 (TEOREMA DI CANTOR)**.** *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Procedendo per assurdo si assume che $\delta = 1/n$ e si indicano i punti x, x' dove vale la precedente per cui:

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$$

Per il teorema di Bolzano Weierstrass esiste allora una successione estratta tale che

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}$$

Per il teorema dei carabinieri convergono quindi a x_0 per $k \to \infty$, quindi per l'ipotesi di continuità di f:

$$\lim_{k \to +\infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = 0$$

Il che contrasta col fatto che deve essere $\geq \epsilon$. □

7.5 Teorema di integrabilità delle funzioni continue

Teorema 7.7 (Teorema di integrabilità delle funzioni continue)**.** *Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann.*

Dimostrazione. Per il teorema di Cantor allora $f(x)$ è uniformemente continua e perciò fissato

$$\epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a}$$

Per ogni coppia di punti x, x'. Allora posta P come una partizione di $[a, b]$ allora $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con $x_0 = a, x_n = b$ allora posto:

$$m_k = inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\};$$
$$M_k = sup\{f(x) : x \in [X_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k - m_k = \frac{\epsilon}{b-a}$$
$$S(P) - s(P) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \epsilon;$$

Dal teorema dell'integrale definito segue l'asserto. □

7.6 Teoremi sulla media

Teorema 7.8 (Primo teorema della media)**.** *Sia f una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ allora*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq M(b-a) \tag{7.10}$$

Con

$$m = inf\{f(x) : x \in [a, b]\}, M = sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Dimostrazione. Dal momento che per definizione l'integrale definito è esattamente l'elemento di separazione tra le somme superiori e quelle inferiori allora posto $s(P) = m(b-a), S(P) = M(b-a)$ segue la tesi. □

Teorema 7.9 (Secondo teorema della media)**.** *Se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora $\exists x_0 \in [a, b]$:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)(b-a). \tag{7.11}$$

Dimostrazione. Per Weierstrass esistono minimo e massimo di f(x) per cui dividendo per $b - a$ i membri del primo teorema della media si ottiene che:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx \leq M$$

Per il secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi allora esiste un valore medio tale che sia compreso tra il minimo ed il massimo. E quindi è dimostrata. □

7.7 Integrabilità delle funzioni monotòne

Teorema 7.10 (Intgrabilità delle funzioni monotòne)**.** *Sia $f(x)$ una funzione monotòna in $[a, b]$. Allora $f(x)$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Dividendo l'intervallo $[a, b]$ in parti uguali di ampiezza $(b - a)/n$ si considera la partizione costituita dagli $n + 1$ punti equidistanti:

$$x_0 = a, x_1 = \frac{1}{n}(b-a), \dots,$$
$$x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \dots, x_n = b$$

Ora la diff tra le partizioni superiori e quelle inferiori è proprio:

$$\frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} M_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\right).$$

Per ipotesi la funzione $f(x)$ è monotòna in $[a, b]$.Supponendo che sia crescente allora sappiamo che il massimo lo assume in x_k ed il minimo in x_{k-1} allora si ottiene che dalla differenza delle sommatorie $f(b) - f(a)$ e quindi:

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{n};$$

Allora dato il destro converge a zero per il teorema dell'integrale definito segue l'asserto. □

7.8 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 7.11 (Il teorema fondamentale del calcolo integrale)**.** *sia f una funzione continua su di un intervallo $[a, b]$ allora la sua primitiva $F(x)$ è derivabile e la derivata vale esattamente $f(x)$.*

Dimostrazione. Calcolando il limite del rapporto incrementale si ottiene che:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right) =$$

$$\frac{1}{h}\left(\int_a^x f(t)\ dt + \int_x^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt\right) =$$

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt.$$

Grazie al secondo teorema della media si trasforma l'ultimo integrale e quindi esiste un punto tra x ed $x+h$ tale che :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(x(h)).$$

Per il limite, la tesi segue allora dalla continuità della funzione integranda:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x).$$

□

7.9 Formula fondamentale per il calcolo integrale

Definizione 7.5. *Una funzione $F(x)$, derivabile nell'intervallo $[a, b]$ è una primitiva di $f(x)$ se $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$*

Teorema 7.12 (cartatterizzazione delle primitive di una funzione in un intervallo)**.** *Se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive di una stessa funzione $f(x)$ allora in un intervallo $[a, b] \exists c : G(x) = F(x) + c$.*

Dimostrazione. Ponendo $H(x) = G(x) - F(X)$ allora risulta che:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Applicando il teorema di Lagrange allora si ottiene che con x fissato in $(a, b]$ $\exists x_0 \in (a, x)$:

$$H(x) - H(a) = H'(x_0)(x-a) = 0 \cdot (x-a) = 0;$$

Perciò $H(x) = H(a),\ \forall xin[a, b]$. Posto ora $c = H(a)$, $H(x)$ risulta allora costante $\forall x \in [a, b]$ e quindi $G(x) = F(x) + H(x) = F(x) + c\ \forall x \in [a, b]$ □

Teorema 7.13 (Formula fondamentale per il calcolo integrale)**.** *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ allora posta G la sua primitiva:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = (G(x))_a^b = G(b) - G(a). \tag{7.12}$$

Dimostrazione. Sia F che G sono primitive di $f(x)$ allora si ha che:

$$G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t)\ dt, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Per $x = a$ si ha che:

$$G(a) = c + \int_a^a f(t)\ dt = c$$

E quindi

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\ dt.$$

La tesi segue ponendo $b = x$. □

Capitolo 8

Integrali indefiniti

8.1 L'integrale indefinito

Definizione 8.1 (Definizione dell'integrale indefinito)**.** *Sia f una funzione continua in un intervallo $[a, b]$. L'insieme di tutte le primitive di $f \in [a, b]$ si chiama integrale indefinito di f e si indica con il simbolo:*

$$\int f(x)\ dx \tag{8.1}$$

In base alla caratterizzazione del paragrafo precedente si afferma quindi che

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c \tag{8.2}$$

Funzionano le proprietà della somma e del prodotto per costante degli integrali definiti.

Si riportano di seguito invece un insieme di integrali indefiniti immediati per il parziale:

$$\int x^b \, dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c; \tag{8.3}$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log(x) + c; \tag{8.4}$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c; \tag{8.5}$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c; \tag{8.6}$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c; \tag{8.7}$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c; \tag{8.8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \tan(x) + c; \tag{8.9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \, dx = -\cot(x) + c; \tag{8.10}$$

$$\int \cosh(x) \, dx = \sinh x + c; \tag{8.11}$$

$$\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + c; \tag{8.12}$$

$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)} \, dx = \tanh(x) + c; \tag{8.13}$$

$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)} \, dx = -\coth(x) + c; \tag{8.14}$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c; \tag{8.15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arcsin(x) + c; \tag{8.16}$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx = \arccos(x) + c; \tag{8.17}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2} \, dx = \arctan(x) + c; \tag{8.18}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \, dx = arcisnh(x) + c; \tag{8.19}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = arccosh(x) + c; \tag{8.20}$$

8.2 Integrazione per parti

Teorema 8.1 (Integrazione per parti)**.** *Se in un intervallo f,g sono due funzioni derivabili con derivata continua risulta allora che:*

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx. \tag{8.21}$$

$f(x)$ *è chiamato* fattore finito, *mentre* $g'(x)$ *è il* fattore differenziale.

Dimostrazione. Dalla derivazione del prodotto si ottiene che :

$$\int (f(x)g(x))' \, dx = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx.$$

La tesi viene dal fatto che la funzione $f \cdot g$ è una primitiva della sua derivata. □

La regola di derivazione per parti può essere estesa anche agli integrali definiti:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = (f(x)g(x))_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx. \tag{8.22}$$

8.3 Integrazione per trovare la derivata di composte

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{8.23}$$

$$\int F'(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(x)) + c \tag{8.24}$$

$$\tag{8.25}$$

Posto

$$f(x) = F(x)$$
$$F(x) = \int f(x)dx$$

Allora si ha la formula di integrazione per sostituzione:

$$\int f(g(t)) \cdot g'(t)dt = \int f(x)dx \tag{8.26}$$

$$con\ x = g(t) \tag{8.27}$$

Esempio:

$$\int \frac{\log t}{t} = \int xdx \Rightarrow x = \frac{\log t}{t} \Rightarrow \frac{\log^2 t}{2} + c$$

Formula dell'integrazione di potenze per sostituzione

$$\int g(t)^\alpha g'(t)dt = \frac{g(t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \tag{8.28}$$

$$\int \sin^3 t\ dt = \int \sin^2 t \cdot \sin t\ dt$$
$$= \int (1-\cos^2 t)\sin t\ dt$$
$$g(t) = -\cos t.$$
$$g'(t) = \sin t$$
$$f(x) = 1 - x^2$$
$$\int 1 - x^2\ dx = \frac{\cos^3 t}{3} + c$$

Si può anche cambiare variabile all'interno dell'integrale e quindi si ottiene che dentro l'integrale devo sostituire g al posto di x e $g'(t)dt$ al posto di dx.

$$\int \frac{\log t}{t}\ dt,\ pongo\ x = \log t \Rightarrow 1\ dx = \frac{1}{t}\ dt$$
$$\int x\ dx = \frac{x^2}{2} + c = \frac{\log^2 t}{2} + c$$

8.4 Integrazione di derivate composte in un intervallo definito

$$\int_a^b f'(g(t)) \cdot g'(t)dt = \Big|_{g(a)}^{g(b)} x = F(g(b)) - F(g(a)) = \tag{8.29}$$

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{8.30}$$

Esempio:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$
$$posto\ x = \sin t$$
$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t}$$

Integrata ora per $-1 < x < 1$ allora diventa:

$$dx = \cos t\ dt.$$
$$\int \frac{1}{\cos t} \cdot \cos t\ dt = t + c$$
$$Quindi\ essendo\ x = \sin t$$
$$\arcsin(x) + c$$

8.5 Area del cerchio

Data la formula della circonferenza: $x^2 + y^2 = R^2$ voglio calcolare:

$$4\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\ dx$$
$$Posto\ ora\ x = R\sin t$$
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2 t\ dt$$
$$Posto\ \cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2} \Rightarrow 4R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt$$
$$\Rightarrow \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{4} + \frac{\sin(2t)}{4}$$

8.6 Integrali di fratte

Posto inizialmente che il grado di $P(x) < Q(x)$, questi sono due polinomi; se il grado non è minore allora dobbiamo eseguire la divisione tra polinomi. Divisione tra polinomi:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \tag{8.31}$$

Esempio:

$$\frac{x^3 - 2x}{x^2+3}\ diventa$$
$$\begin{array}{cc|c} x^3 & -2x & x^2+3 \\ \hline -x^3 & \text{-3x} & \text{x} \\ & \text{-x} & \end{array} =$$
$$-x + \frac{x}{x^2+3}$$

Le cose importanti sono le seguenti:

1. Il grado di $P(x) < Q(x)$;
2. Il coefficiente della potenza più grande di Q sia 1.

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\, dx$$

$$Completamento\ del\ quadrato: \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = -\frac{\Delta}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2}+1\right)$$

Quindi l'integrale diventerà:

$$\frac{4}{-\Delta}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+1}\, dx$$

Ponendo ora

$$y = \frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2}$$

Diventa

$$\frac{4}{-\Delta}\int \frac{1}{y^2+1}\cdot\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\, dy = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c$$

Un'altro fratto semplice è:

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\, dx = \int \frac{1}{y^n}\, dy = \int y^{-n}\, dy = \frac{y^{-n+1}}{-n+1}+c \tag{8.32}$$

Un'altro metodo per sviluppare i razionali semplici è quello di scomporre il denominatore è spezzare la frazione: In questo caso si determina poi due numeri reali A, B e quindi si ottiene due frazioni che sommate insieme danno quella di partenza. Ecco un'esempio:

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

Facendo ora denominatore comune ed imponendo il sistema:

$$\frac{(A+B)x-2A+B}{x^2-x-2} \qquad \begin{cases} A+B=1 \\ -2A+B=7. \end{cases}$$

$$\frac{-2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

La funzione è dunque scomposta.

8.7 Integrali impropri

Supponendo che io abbia una funzione continua, il suo integrale è esattamente l'area del sottografico: il che è ragionevolmente calcolabile. SI potrebbe però pensare in linea teorica sottoinsiemi del piano illimitati: ossia che non riesco a racchiudere in zone limitate di piano

$$f:[1,+\infty]\to R, f(x)=\frac{1}{x}$$

Posso considerare il suo sottografico per cui $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. La domanda è questa: l'area è finita o infinita? Idealmente sto facendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$$

Però non posso definirlo con Riemann poiché non posso fare partizioni finite per un intervallo infinito poiché altrimenti dovrei fare una somma con almeno una partizione di lunghezza infinita e questo perde di significato.
Posso integrare fino ad un certo punto ed integrare fino a c con $c > 1$ e quindi so fare:

$$\int_1^c \frac{1}{x}\, dx$$

Posso fare ora il $\lim_{c\to\infty}$ quindi:

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x}\, dx.$$

Per cui diventa:

$$\int_1^c \frac{1}{x}\, dx = F(c) - F(1)$$
$$ossia \lim_{c\to\infty} \ln(c) - 0 = +\infty.$$

Con un'altro esempio si vede invece che l'integrale di una funzione che tende all'infinito non sempre ha un area infinita:

$$f : [1, \infty] \to R$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Il suo integrale associato diventa quindi:

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx.$$

La mia primitiva è dunque $-\frac{1}{x}$ (è solo una delle primitive), in ogni caso diventa:

$$\int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{c} + \frac{1}{1} = 1.$$

Definizione 8.2 (Integrale improprio)**.** *Sia $a \in R$ e sia $f : [a, +\infty] \to R$ e supponiamo che f sia tale che sia integrabile in $[a, c]$ $\forall c > a$. Se esiste finito o infinito il limiti per $c \to \infty$ dell'int:*

$$\int_a^c f(x)\, dx \tag{8.33}$$

Allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[a, c]$ e si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx \tag{8.34}$$

Inoltre se il limite è finito allora l'integrale è convergente altrimenti divergente. Se invece il limite non esiste allora l'integrale è indeterminato.

Gli esercizi sugli integrali impropri solitamente chiedono di il carattere dell'integrale improprio. Un esempio è:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln^2(x)}\, dx$$

8.8 Carattere degli integrali impropri di funzioni con segno costante

Proposizione 8.1.1 (Carattere degli integrali impropri di funzioni con segno costante)**.** *Se $f : [a, +\infty] \to R$ è integrabile in $[a, c]$ $\forall c > a$ e $f(x) \geq 0$ $\forall xgeqa$ allora l'integrale di f(x) è ben definito ed esiste e può essere finito o infinito.*

Dimostrazione. La funzione che associa $c \to \int_a^c f(x)\ dx$ è costante e allora $c_1, c_2 > 0$ con $c_2 < c_1$ faccio:

$$\int_a^{c_2} - \int_a^{c_1} f(x)\ dx = \int_a^{c_1} f(x)\ dx + \int_a^{c_2} f(x)\ dx - \int_a^{c_1} f(x)\ dx$$

Quindi si ha che:

$$\int_a^{c_2} f(x)\ dx \geq \int_a^{c_1} f(x)\ dx \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx \geq 0.$$

□

La proposizione vale anche se $f(x) \leq 0$ in $[a, +\infty]$ ed in questo caso l'integrale improprio può essere un numero oppure divergere a $-\infty$. La situazione del tutto speculare è quella per $[-\infty, a]$. GLi integrali da $.\infty a + \infty$ è un integrale non ben definito poiché si potrebbe trovare valori diversi dell'integrale se si fa crescere più velocemente un intervallo rispetto all'altro.

Teorema 8.2. *Siano f, g due funzioni integrabili e tali che: $0 \leq f(x) \leq g(x)$: allora:*

$$Se \int_a^{+\infty} g(x)\ dx\ converge \tag{8.35}$$

$$Allora \int_a^{+\infty} f(x)\ dx\ converge. \tag{8.36}$$

Analogamente se

$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx\ diverge \tag{8.37}$$

$$Allora \int_a^{+\infty} f(x)\ dx\ diverge. \tag{8.38}$$

Dimostrazione. Riprendendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln^2(x)}\ dx$$

Voglio dimostrare che questo integrale converge, allora prendo : $\frac{1}{x^2}$ come $g(x)$ e quindi, dal momento che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx = 1$$

Allora anche il primo integrale converge poiché io ho imposto che $0 \leq f(x) \leq g(x)$. □

Teorema 8.3 (Criterio di convergenza assoluta per gli integrali impropri)**.** *Sia $f : [a, +\infty) \to R$ una funzione integrabile secondo Riemann nell'intervallo chiuso e limitato $[a, t] t > a$, se:*

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx\ converge \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\ dx\ converge.$$

Dimostrazione. Il valore assoluto per definizione(sommando membro a membro $|f(x)|$) si ottiene:

$$0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|.$$

Poiché per ipotesi $\int_a^{+\infty} |f(x)|\ dx$ converge per il criterio del confronto per gli integrali impropri. Considerato dunque l'integrale:

$$\int_a^t f(x)\ dx,$$

sommando e sottraendo $|f(x)|$ si ottiene:

$$\int_a^t f(x) - |f(x)| + |f(x)|\ dx = \int_a^t f(x) - |f(x)|\ dx + \int_a^t |f(x)|\ d$$

passando al limite, i limiti sono finiti e quindi esiste anche il primo membro . □

8.9 Integrali impropri di funzioni non limitate in intervalli limitati

Dato l'integrale

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

Tale che la funzione $f(x) : [a, b] \to R$ presenti un asintoto verticale proprio in $x = a$, allora si considera il limite dell'integrale in modo da poterci ricondurre all'integrale improprio

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\ dx$$

Se l'integrale ora $\exists$ finito, allora possiamo dire che $f(x)$ sia integrabile in senso improprio, altrimenti se $= +\infty$, la funzione è integrabile in senso improprio ma è divergente.

8.10 Funzione integrale

Definizione 8.3. *Data una funzione definita $f : [a, b] \to R$, si definisce*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{8.39}$$

come la funzione integrale $\forall x \in [a, b]$.

Considerando $\alpha, \beta : (c, d) \to R$, posso dire che le funzioni $\alpha(x), \beta(x) \in [a, b] \forall x \in (c, d)$

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\ dt$$

Per cui la sua derivata è proprio (considerato un punto a tra i due estremi):

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^{\beta(x)} f(t)\ dt - \int_a^{\alpha(x) f(t)\ dt} \right)$$

E quindi vale:

$$F'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Per studiare allora il dominio di una funzione integrale considero i punti per cui $f(t)$ è integrabile in senso proprio e aggiungendo poi i punti di improprietà dove converge l'integrale improprio.

8.10.1 La funzione integrale della funzione identità

Data

$$G(x) = \int_0^x t\ dt$$

L'integrale del sottografico della funzione identità è il triangolo di base $x - 0$ e come altezza $t(x) - 0$ allora date $f(x) = x$:

$$\int_0^x t\ dt = \int_0^{f(x)} f(t)\ dt = \frac{x^2}{2} + c$$

Si ha allora che $G'(x) = f(x)$.

Capitolo 9

Formule di Taylor

9.1 Prime proprietà

Teorema 9.1 (FORMULA DI TAYLOR)**.** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile n volte in x_0. Risulta che:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione. Supponendo che la derivata $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0 allora trovato R_n si deve dimostrare che (applicato Hopital):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - (f'(x)) + \cdots + f^n(x_0)(x - x_0)^{n-1}/(n-1)!}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

Dopo aver applicato Hopital per n volte si ottiene il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{n!}$$

La tesi è dunque dimostrata. □

Teorema 9.2 (CRITERIO PER I PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO)**.** *Se esistono le derivate sottoindicate della funzione f(x) nel punto x_0 allora vale il seguente:*

$$f'(x) = 0 : \begin{cases} f^2(x_0) > 0 & \qquad\qquad Minimo\ relativo \\ f^2(x_0) < 0 & \qquad\qquad Massimo\ relativo \\ f^2(x_0) = 0 & \begin{cases} f^3(x_0) \neq 0 & ne'\ massimo\ ne'\ minimo\ in\ x_0 \\ f^3(x_0) = 0 : Si\ ripete\ lo\ schema \end{cases} \end{cases}$$

Dimostrazione. ovviamente la funzione f(x) deve essere derivabile almeno per $n \geq 2$ quindi risulta che

$$f'(x_0) = f^2(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \qquad f^n(x_0) \neq 0$$

Posto che $f^n(x_0) > 0$ allora per l'annullarsi delle derivate si ha che la formula di Taylor diviene:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^n(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right) = \frac{f^n(x_0)}{n!} > 0$$

Per la permanenza del segno allora $\exists \delta > 0 : \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n} > 0, \forall x : 0 \neq |x - x_0|\, \delta$. Se n è pari allora il denominatore è positivo e risulta che x_0 è un punto di minimo. Se invece è dispari allora risulta che non ha né minimo né massimo. □

9.2 Resto di Peano

Preso un polinomio p a coefficienti reali:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

Esso è infinitamente derivabile. Si può però scrivere il polinomio nella seguente forma:

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1}x + \frac{p^2(x)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^n(0)}{n!}x^n$$

Un polinomio di grado n è univocamente determinato una volta che sono noti i valori che esso e le sue prime derivate assumono in x_0. Cercando di determinare ora un polinomio di grado n di grado minore o uguale a n che verifichi $p_n(x_0) = f(x_0)$ esso è:

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f^2(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Questo polinomio è chiamato proprio polinomio di Taylor. Si definisce quindi la funzione di Resto (anche chiamato Resto di Peano) come:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Teorema 9.3 (Formula di Taylor con il resto di Peano)**.** *Se f è derivabile n volte in x_0 il resto $R_n(x)$ è un infinitesimo in x_0 di ordine superiore a $(x - x_0)^n$ quindi:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x_0)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare il seguente:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^n}$$

Sostituendo ed applicando n-1 volte Hopital si ottiene il seguente:

$$\frac{1}{n!}\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x - x_0} - f^n(x_0)\right)$$
$$\frac{1}{n!}\left(f^n(x_0) - f^n(x_0)\right) = 0.$$

□

Definizione 9.1. *Si definisce* o piccolo *un infinitesimo di ordine superiore ad un altro: siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni e calcoliamo $f(x) : x \to x_0$ che e quindi $f(x) = o((g(x)))$ se $g(x)$ è infinitesima per $x \to x_0$ e*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Il resto di Peano si rappresenta anche come:

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n) \qquad \textit{per } x \to x_0$$

La formula di taylor con il centro in $x_0 = 0$ si chiama anche formula di Mac Laurin ed e si hanno gli sviluppi delle seguenti funzioni:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n); \tag{9.1}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n); \tag{9.2}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) : \tag{9.3}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}); \tag{9.4}$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \tag{9.5}$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{9.6}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+2}) \tag{9.7}$$

$$\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \tag{9.8}$$

$$arctanh(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \tag{9.9}$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}); \tag{9.10}$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \tag{9.11}$$

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \tag{9.12}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{6} + \ldots \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n) \tag{9.13}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \tag{9.14}$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2). \tag{9.15}$$

9.3 utilizzo nel calcolo dei limiti

Al fine del calcolo dei limiti spesso è utile sostituire delle funzioni con i loro sviluppi applicando le formule di Taylor oppure le formule di Mac Laurin quando centrati in x = 0. Inoltre di seguito sono elencate le proprietà degli o piccoli.

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n) \tag{9.16}$$

$$c \cdot o(x^n) = o(cx^n) = o(x^n) \tag{9.17}$$

$$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n) \tag{9.18}$$

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \tag{9.19}$$

$$o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \tag{9.20}$$

$$o(o(x^n)) = o(x^n) \tag{9.21}$$

$$o(x^n + o(x^n)) = o(x^n) \tag{9.22}$$

Dimostrazione. Dimostrazioni delle proprietà: □

9.4 Resto integrale

Teorema 9.4 (Formula di Taylor con il resto integrale). *Se f è derivabile almeno $n+1$ b+volte all'interno di $[a,b]$ con derivata f^{n+1} continua, il resto $R_n(x)$ si rappresenta come:*

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt., \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{9.23}$$

Dimostrazione. PEr le definizioni del resto di Peano, si ha che:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Per induzione si ha che per n = 0, è dimostrata per la formula fondamentale del calcolo integrale.

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0)R_0(x)$$

Posto che f(x) ammette derivata di ordine superiore a due, continua si assume per induzione che:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)dt.$$

Integrando per parti si ottiene la tesi con n + 1. e quindi è dimostrata:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\left(\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{n+1}(t)\right)_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{n+2}(t)dt\right) =$$
$$\frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+2}(t)dt.$$

□

9.5 Resto di Lagrange

Teorema 9.5 (Formula di Taylor con il resto di Lagrange). *Se f è derivabile n +1 volte, con derivata continua allora esiste un numero $x_0 \leq x_1 \leq x$ tale che:*

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(x_1)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} - \tag{9.24}$$

Dimostrazione. Dimostrazione 1: Supponendo $x > x_0$, indichiamo con m, M il minimo ed il massimo di $f^{n+1}(t)$ all'interno di $[x_0, x]$ si deduce quindi:

$$m \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} dt \leq R_n(x) \leq M \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$
$$m \leq R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}} \leq M.$$

Per l'esistenza dei valori intermedi allora $\exists x_1 \in [x_0, x]$:

$$f^{n+1}(x_1) = R_n(x) \cdot \frac{(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$$

□

9.6 Tabulazione di funzioni

La formula di Taylor è utile oltre che al calcolo dei limiti anche per la tabulazione delle funzioni elementari: si approssima un valore di una funzione f(x) con un polinomio di Taylor di grado n e scegliendo x_0 attraverso una stima del resto:

Teorema 9.6 (Stima del resto)**.** *Sia f(x) una funzione derivabile n + 1 volte in un intervallo* $[a, b]$ *contenente* x_0 *con derivata continua. Posto quindi:*

$$M_{n+1} = \max\{\left|f^{n+1}(x)\right| : x \in [a, b]\}, \tag{9.25}$$

Il resto $R_n(x)$ *della formula di Taylor verifica la disuguaglianza:*

$$|R_n(x)| \leq M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{9.26}$$

Dimostrazione. E' diretta conseguenza della rappresentazione del resto secondo la formula di Lagrange; infatti fissati $x, x_0 \in [a, b]$, se indichiamo con x_1 si ottiene:

$$|R_n(x)| = |f^{n+1}(x_1)| \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$
$$M_{n+1} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Per poter estimare il valore di una funzione usando gli sviluppi di Taylor ed il resto fissando la precisione, la quale è stimata con la formula della stima: per il seno se vogliamo trovare una precisione di 10^{-7} si ha:

$$|R_4(x)| \leq \frac{1}{5!10^5} < 10^{-7}$$

Capitolo 10

Serie

Le serie sono un'estensione dell'operazione di sommatoria a infiniti addendi numerabili e ciascuno dei quali ha un indice. GLi insiemi infiniti sono molto diversi tra loro come N, Z, Q, R e sono tutti infiniti ma solo N, Z, Q sono numerabili poiché hanno corrispondenza biunivoca.

$$\sum_{i=1}^{n} a_n = ?$$

Posto $a_n = 1$ ossia la successione costante di 1 che $\to +\infty$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Questa somma fa $+\infty$ anche se sono tutti termini minori di uno e potrebbe far pensare che tutte le volte che si sommano quantità piccole il risultato sia indefinito, tuttavia:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = 1, \bar{1}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Poiché si ha un'analogia con il suo integrale improprio.

Definizione 10.1. *Data una successione a_n di numeri reali si indica con*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{10.1}$$

La serie numerica generata da a_n.

Teorema 10.1 (CONDIZIONE NECESSARIA PER LA CONVERGENZA DI UNA SERIE)**.** *Se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è convergente allora la sua successione a_n tende a zero per $n \to \infty$.*

Dimostrazione. Indicando con s_n la successione delle somme parziali e con $s \in R$ la somma della serie, allora essendo:

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \; \forall n \in N.$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

□

Inoltre si ricava il criterio di convergenza di Cauchy per le successioni di numeri reali.

Teorema 10.2. *Condizione necessaria e sufficiente perché la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sia convergente è che* $\forall \epsilon > 0 \; \exists v > 0:$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| = |a_{n+1} + \ldots, a_{n+p}| < \epsilon \; \forall n > v, \wedge \forall n \in N. \tag{10.2}$$

Dimostrazione. Indicando con s_n la successione delle somme parziali e ricordiamo che s_n converge se e solo se $\forall \epsilon > 0, \exists v > 0 : m > v, n > v :$

$$|s_m - s_n| < \epsilon$$

Dato che $m > n, m = n + p, p \in N$, allora si ha

$$s_m - s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$$

□

Definizione 10.2. *Fissato un numero naturale grande definisco:*

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} a_n. \tag{10.3}$$

come somma parziale o ridotta ennesima della serie.

Se esiste finito

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = l, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \pm\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty$$

$$\nexists \lim_{N \to +\infty} S_N \Rightarrow \; la \; serie \; e' \; indefinita.$$

Esempi di serie convergenti e divergenti: Divergenti:

$$a_n = 1 \; \forall n \Rightarrow \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} 1 = +\infty$$

$$a_n = n \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n$$

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty.$$

Indeterminate (devo scegliere una successione che cambi segno, altrimenti o converge o diverge):

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, \; con \; n \; pari \\ -1, \; con \; n \; dispari \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = indeterminata$$

Se ne sommo un numero pari ottengo 0, se sommo un numero dispari di numeri allora si ha -1, e quindi $\nexists \lim_{N \to +\infty} S_N$. Convergente:

$$a_n = 0 \; \forall n \in N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$S_0 = S_1 = \cdots = 0$$

$$S_N = 0 \; \forall N.$$

Un'altro esempio convergente non banale (che parte da zero poiché è definita pure in zero):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

10.1 Serie geometriche

Queste sono delle serie della forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n, \qquad q \in R \tag{10.4}$$

Il termine q è anche chiamato *ragione* della serie: sto sommando un numero reale che io ho scelto all'inizio e lo sommo infinite volte: Fissato un numero $N \in N$ molto grande, allora considero:

$$(1 + q + \cdots + q^N)(1 - q)$$
$$\Rightarrow 1 - q^{N+1}$$

Allora si ha che:

$$1 + q + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Ha quindi come somme parziali:

$$S_N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \qquad \forall N \in N, q \neq 1.$$

Adesso passando al limite per $N \to \infty$ si ottiene:

$$\lim_{N \to +\infty} q^{N+1}$$

Adesso bisogna discutere il limite al variare del parametro q:

$$lim_{N \to +\infty} q^{N+1} = \begin{cases} +\infty, seq > 1 \\ 1 \ se \ q = 1 \\ 0 \ se \ q < |1| \\ \nexists \ se \ q \leq -1 \end{cases}$$

Adesso tornando alle somme parziali si ottiene il seguente risultato:

$$\lim_{N \to +\infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \begin{cases} +\infty, \ se \ q > 1 \\ \frac{1}{1-q} \ se \ q < |1| \\ \nexists \ se \ q \leq -1 \end{cases}$$

Allora tornando alla serie di partenza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} diverge, \ se \ q > 1 \\ diverge \ se \ q = 1 \\ converge \ a \ \frac{1}{1-q} \ se \ q < |1| \\ \nexists \ se \ q \leq -1 \end{cases}$$

Altra osservazione: noi sappiamo che $1, \bar{1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ posto allora $q = 1/10$ si ha proprio la sommatoria geometrica generata prima che ci permette di ottenere la frazione generatrice di tutti i numeri periodici:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{10}{9}$$

10.2 Serie armoniche

Una serie armonica è una serie che somma infiniti numeri molto piccoli che però divergono.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \; diverge \tag{10.5}$$

Dimostrazione. Posta la somma parziale:

$$S_N = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Osservo che questa cresce al crescere di N ed il motivo è che sto sommando termini positivi e quindi si ha che $S_{N+1} \geq S_N$. Supponiamo ora per assurdo che $\lim_{N\to+\infty} S_N = S \in R$ e che quindi converga: allora prendo una somma che ha come indice il doppio di un numero naturale: S_{2N} allora ho $2N$ addendi e se guardo alla somma" dei primi N addendi si ha esattamente S_N allora $S_{2N} = S_N + \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N}$. Voglio dimostrare ora che questa differenza è costante: allora la disuguaglianza sopra è dimostrata e quindi $S_{2N} \geq S_N + \frac{1}{2}, \forall N$, allora siccome ho assunto che S_N tenda ad S, passando al limite ottengo $S \geq S + \frac{1}{2}$ allora si ha un assurdo. La serie è dunque divergente. □

10.3 I criteri delle serie

Teorema 10.3 (Criterio del confronto). *Nelle serie generate da due successioni tali che:* $0 \leq a_n \leq b_n$ *Se diverge* a_n *allora anche la serie di* b_n *diverge. Se invece converge la serie grande (*b_n*) allora converge anche la piccola (*a_n*).*

Teorema 10.4 (CRITERIO DEGLI INFINITESIMI). *Sia* a_n *una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista il seguente limite fissato* $p \in R$*:*

$$l = \lim_{n\to\infty} n^p a_n. \tag{10.6}$$

Allora si ha che:

$$l \neq +\infty, p > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \tag{10.7}$$

$$l \neq 0, p \leq 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \tag{10.8}$$

Dimostrazione. Nella condizione che esita il limite finito allora per definizione di limite di successione si ha che $\exists v : n^p a_n < l + 1$ e per tali n si ha che:

$$0 \leq a_n < \frac{l+1}{n^p}$$

Per il criterio del confronto allora la serie armonica relativa a b_n è convergente: e anche la serie relativa ad a_n lo deve essere. Nella condizione che $l \neq 0$ si ha la tesi nella medesima maniera. □

Teorema 10.5 (Criterio del confronto asintotico). *Siano* $a_n, b_n \geq 0$, $b_n > 0$ *allora*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty), L \neq 0. \tag{10.9}$$

E quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

hanno lo stesso carattere.

Esempio: determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \log(1+\frac{1}{2^n})$$

$$a_n = \log(1+\frac{1}{2^n}), b_n = \frac{1}{2^n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Allora hanno lo stesso carattere ed esiste finito il limite della serie di partenza.

Teorema 10.6 (Criterio della radice)**.** *Posta la serie a_n con $n \in N$ allora se:*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{10.10}$$

Se $L > 1$ la serie diverge, altrimenti converge.

Dimostrazione. Nell'ipotesi che $l < 1$, sia $\epsilon > 0$ tale che $l+\epsilon < 1$. Per definizione di limite allora posso dire che $\exists v \in N$ tale che $\sqrt[n]{a_n} < l+\epsilon$ per $n \geq v$ ovvero tale che $a_n < (l+\epsilon)^n$. Allora per il criterio del confronto dato che la serie geometrica a destra converge, convergerà anche quella a sinistra. Se $l > 1$, sia $v \in N$ tale che $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ossia $a_n > 1, \forall n > v$. Poiché a_n non è infinitesima, allora diverge. □

Teorema 10.7 (Criterio del rapporto)**.** *Se*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{10.11}$$

Se $L > 1$ la serie diverge, altrimenti converge.

Esempio:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Scelta allora la successione

$$a_n = \frac{1}{n!} > 0$$

Applicando il criterio del rapporto si ottiene che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0, L < 1.$$

La serie quindi converge (Potevo utilizzare la serie armonica $\frac{1}{n^2}$ e grazie al criterio del confronto si otteneva la convergenza)

Teorema 10.8 (Criterio dell'integrale)**.** *Sia una funzione definita in $f[1,+\infty]$ continua e decrescente. Ponendo $a_n = f(x)$ $\forall n \in N$. Quindi:*

$$\int_1^{+\infty} f(x)$$

E la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(x)\right)$$

Hanno lo stesso carattere.

10.4 Serie alternate

Le serie alternate sono delle serie che cambiano segno ogni elemento del tipo:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots \tag{10.12}$$

Teorema 10.9 (CRITERIO DI CONVERGENZA PER LE SERIE ALTERNATE). *Sia $a_n \geq 0$ una successione decrescente ed infinitesima. Allora la serie alternata è convergente. Inoltre detta s la somma s_n si ha che:*

$$|s_n - s| \leq a_{n+1}, \ \forall n \in N. \tag{10.13}$$

Dimostrazione. Essendo per k = 1, 2, 3...:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2}) \geq s_{2k}$$
$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) \leq s_{2k-1}$$

La successione con i termini pari è crescente mentre quella coi dispari è decrescente, il che ci porta a dire che: (dal momento che $s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1}$ e $a_{2k+1} \geq 0$):

$$s_{2k+1} \geq s_{2k} \geq s_2$$

Si vede dunque che la successione coi termini dispari è decrescente e limitata ed è anche convergente grazie al teorema sulle successioni limitate. Analogamente la successione coi termini pari converge e ricordando che il limite di a_{2k+1} è zero, allora si ha che:

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} = s.$$

E quindi si ottiene la tesi. □

Teorema 10.10 (Teorema di Leibniz). *Sia*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

una serie con segno variabile e con $a_n > 0$, allora $\forall n \in N$:

1. *LA serie a_n è infinitesima: $\lim_{n\to+\infty}(a_n) = 0$.*
2. *a_n è sicuramente una successione non crescente ossia esiste un indice $n_0 : \forall n \geq n_0$ si ha che: $a_{n+1} \leq a_n$.*

Allora la serie è convergente

Dimostrazione. Posta la somma parziale di indice pari $n = 2m$ della serie:

$$s_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 .... \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_{2m} = (a_1 - a_2) + ...(a_{2m-1} - a_{2m})$$

Essendo per ipotesi a_n decrescente, allora i termini di ogni parentesi sono sempre positivi quindi si deduce che $s_{2m} > 0$. Riscrivendo si può anche vedere che:

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3)...$$

In questo caso i termini di ciascuna parentesi sono positivi e quindi si conclude che $s_{2m} < a_1$ e quindi ammette limite:

$$0 < \lim_{m\to+\infty} s_{2m} = s < a_1$$

Passando alle somme con termini dispari, allora tenendo conto delle ipotesi e del limite scritto sopra si ottiene che:

$$\lim_{m\to+\infty} s_{2m+1} = \lim_{m\to+\infty} (s_{2m} + a_{2m-1}) =$$
$$\lim_{m\to+\infty} s_{2m} + \lim_{m\to+\infty} a_{2m+1} = s + 0 = s$$

Si è dimostrato ora che anche le somme dispari convergono e quindi si ha che:

$$0 < s < a_1$$

Facendo lo stesso procedimento si osserva che anche le somme dispari sono decrescenti e quindi $s_{2m} < s < s_{2m+1}$ □

10.5 Convergenza assoluta

Definizione 10.3. *Una serie*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots \tag{10.14}$$

Si dice assolutamente convergente *se risulta che la serie dei valori assoluti*

$$|a_1| + \cdots + |a_n| + \ldots \tag{10.15}$$

Teorema 10.11. *Una successione assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + |a_k|)$$

è convergente per il criterio del confronto essendo:

$$0 \leq a_k + |a_k| \leq 2|a_k|$$
$$\forall n \in N : \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

Ed il limite per $n \to \infty$ del primo membro esiste finito perché esiste finito il limite dei singoli addendi del secondo membro. □

10.6 Proprietà commutativa della serie

Riordinando i membri di una serie qualsiasi allora esiste un 'applicazione $i : N \to N$ tale che:

$$b_n = a_{i(n)} \ \forall n \in N \tag{10.16}$$

Teorema 10.12. *Se la serie è a termini non negativi ed è convergente allora anche la serie riordinata è convergente verso la stessa somma.*

Dimostrazione. □

Teorema 10.13. *Se la serie data è assolutamente convergente e la serie è ottenuta da essa riordinando i termini allora la serie riordinata è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa somma.*

Dimostrazione. Si ha che:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{i(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(|a_{i(n)}| - a_{i(n)})$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}$$

□

10.7 Serie di Taylor

Consideriamo la funzione $f(x)$ definita in un intorno di un punto x_0. Supponiamo che in x_0 $f(x)$ ammetta infinite derivate e considerato Taylor si ottiene la seguente serie:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots.$$

La funzione f(x) è sviluppabile con Taylor se $\forall x \in$ intorno di x_0 la serie è convergente e se $\exists \delta > 0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \qquad \forall x : |x - x_0| < \delta \tag{10.17}$$

Si arriva quindi al seguente:

Teorema 10.14. *Sia f(x) una funzione che ammette infinite derivate nell'intervallo* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. *Supponendo che esista un numero* M *:*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \forall n \in N. \tag{10.18}$$

Allora f(x) è sviluppabile in serie di Taylor con centro x_0.

Dimostrazione. TODO 407 □