

Analisi II - Limiti di funzioni

Marco Delton*

A.A. 2025/26

1 Limiti di funzioni di 2 variabili

1. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin \left(\frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} \right)$$

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 x}{|x| + |y|}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1 + |xy|)}{x^2 + y^2}$$

4. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y \sqrt{|y^2 - x^2|}}{x^2 + y^2}$$

5. Sia $\beta \in \mathbb{R}$ un parametro.

Studiare le continuità della funzione $f = f(x, y)$ definita come segue al variare del parametro β :

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|^\beta \frac{\sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

6. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(\sqrt{|xy|}) \cdot \ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{|x| + y^2}$$

*esercizi del prof *Luca Bisconti*

7. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$$

8. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 + xy^2 + 4x^2y}{y^2 + 2x^4 + 3y^4}$$

Suggerimento: scrivere $f(x, y) = y^2 + 2x^4 + 3y^4$ come la somma di tre frazioni, e studiarle singolarmente

9. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{x^2 + y^4}$$

10. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan\left(\frac{1 - \cos x}{x^2y^2}\right) \cdot e^{-\frac{\ln(1+|xy|)}{x^2+y^2}}$$

11. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+1)e^{(x+1)y^2} - 1}{y^2}$$

12. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2(1 - \cos(xy))}{4x^2 + y^4}$$

13. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| \cdot \arctan(x^2 + y^2)}{\ln(1 + |y|)}$$

14. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 + 5y^2 + 7x^2}}{x^2 + y^2}$$

15. Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\ln(1 + 4(y-1)^4)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$