

Appunti di Fluidodinamica

Tommaso Miliani

05-12-25

1 Riassuntino altra volta

La **pressione ram** è l'espressione della portanza degli arei: il flusso con una certa velocità \vec{u} che sbatte contro un ostacolo è deviato e cambia la sua quantità di moto, quando viene spinto verso il basso, l'ostacolo subisce una forza verso l'alto. Un applicazione semplice del problema può essere la seguente: supponendo di avere una conduttura che ha sezione uguale Σ da entrambe le parti ed un flusso entrante ed uscente, chiaramente, se il gomito della conduttura non è inchiodato, il fluido esercita sul gomito una certa spinta che si determina attraverso il teorema di Bernoulli. Per il principio di Leonardo si ha che la quantità di massa che passa istantaneamente è:

$$Q_m = \rho u_k \Sigma$$

La quantità di moto è possibile calcolarlo prendendo una sezione parallela al flusso:

$$\vec{F}_1 = \rho \vec{u}_1 \cdot u_1 \Sigma$$

Allora

$$\int_V \frac{\partial \vec{p}_u}{\partial t} dV + \int_V \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \cdot u) = - \int_V \vec{\nabla} p dV + \int_V \rho \vec{g} dV$$

Si ottiene dunque la seguente uguaglianza

$$\frac{dQ}{dt} + \int_{\Sigma(V)} (\rho \vec{u} \cdot \vec{u}) \cdot \hat{u} d\sigma = - \int_{\Sigma} \rho \hat{u} d\sigma = - \vec{\nabla} p + \rho \vec{u}$$

Invece nel punto 2:

$$\vec{F}_2 = \rho \vec{u}_2 \cdot u_2 \Sigma$$

$u_1 = u_2$ e $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$ dato che deve valere il principio di Leonardo, si ha che la variazione della quantità di moto è esattamente legata alla forza che applica il fluido sulla conduttura

$$\vec{F}_T = -q_{1,2} \vec{u}_1 - q_{1,2} \vec{u}_2 = -2q_{1,2} \vec{u}_1$$

Dunque il fluido ha un flusso negativo di quantità di moto: perde quantità di moto entrando nella conduttura e dunque

$$F = 2q \vec{u}$$

2 Pala eolica

Nelle pale eoliche le pale girano poiché sono messe in moto dal fluido che colpisce la pala eolica: supponendo di conoscere la superficie della pala, la velocità del vento e la potenza erogata dalla pala. A questo punto si può determinare il rendimento della pala, la velocità del vento dopo la pala e la spinta che il fluido esercita sulla pala.

$$Q_M = \rho u_1 \Sigma$$

Mi posso calcolare il flusso di energia cinetica che entra nella pala, ossia la potenza che agisce sulla pala.

$$P = Q_M \frac{u_1^2}{2}$$

Il rendimento è dunque la differenza tra la potenza iniziale meno quella assorbita:

$$\eta = \frac{P_E}{P_1}$$

Dove P_E è la potenza assorbita dalla pala (ossia l'energia per unità di tempo sottratta al vento) e P_1 è la potenza in entrata. Dato che tutto si deve conservare, allora si ha che la potenza in uscita è data

$$P_2 = P_1 - P_E$$

Dato che il flusso di massa si conserva:

$$Q_M \frac{u_2^2}{2} = Q_M \frac{u_1^2}{2} (1 - \eta)$$

A questo punto posso ottenere la velocità del vento dopo la pala in funzione del rendimento della pala

$$u_2 = u_1 \sqrt{1 - \eta}$$

Dato che la variazione di quantità di moto è data da

$$-\rho u_1 \Sigma_1 \vec{u}_1 - \rho u_2 \Sigma_2 \vec{u}_2$$

Allora la forza esercitata sulla pala è proprio

$$\vec{F} = -Q_M \vec{u}_1 \cdot (1 - \sqrt{1 - \eta})$$

3 Ricavare la prima legge della dinamica per Fluidodinamica

Date le leggi della Fluidodinamica

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) &= 0 \\ \vec{u}(\rho \dots) \end{aligned}$$

si può ricavare la prima legge della dinamica per la Fluidodinamica lavorando per un fluido incompressibile

$$-\vec{\nabla}p \cdot \vec{u} - \rho \vec{\nabla}p \phi_G \cdot \vec{u}$$

Dato che

$$\vec{\nabla}(a \cdot \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla}a + a \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

Da cui si può semplificare quella sopra come

$$-\vec{\nabla}(p \vec{u}) = \vec{u} \vec{\nabla}p + p \vec{\nabla} \vec{u}$$

Ossia

$$-\vec{u} \vec{\nabla}p + p \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla}(\rho \phi_G \vec{u}) + \phi_G \vec{\nabla}(p \vec{u})$$

Dato che si è in regime incompressibile, allora si deve avere che la divergenza del vettore \vec{u} è nulla, allora posso riscrivere come

$$-\vec{\nabla}(p \vec{u}) - \vec{\nabla}(\rho \phi_G \vec{u}) - \frac{\partial \rho \phi_G}{\partial t}$$

Si svolge il seguente

$$\rho \vec{u}((\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u}) \implies \sum_i \rho u_i \sum_k u_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

Si può provare ora a fare la divergenza di

$$\vec{\nabla} \left(\rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \right) \implies \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \rho \frac{u^2}{2} u_k = \frac{u^2}{2} \sum_k \frac{\partial \rho u_k}{\partial x_k} + \rho \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{u^2}{2}$$

Questa diventa proprio

$$\frac{u^2}{2} \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) + \rho \sum_k u_k \sum_i \frac{\partial u_i^2}{2 \partial x_k} = \frac{u^2}{2} \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) + \sum_k \rho u_k \sum_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Ottenendo

$$\frac{u^2}{2} \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) + \sum_i \rho u_i \sum_k u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

L'ultimo termine è proprio

$$\rho \vec{u}((\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u})$$

Dunque

$$\vec{\nabla} \left(\rho \frac{u^2}{2} \vec{u} \right) = \frac{u^2}{2} \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) + \rho \vec{u}((\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u})$$

Combinando nell'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} u^2 + \rho \phi_G \right) - \vec{\nabla} \left(\left(\frac{\rho}{2} u^2 + p + \rho \phi_g \right) \vec{u} \right) = 0$$

Si ottiene allora il principio di conservazione di energia della Fluidodinamica, per cui si ottiene l'energia interna e nella seconda espressione, rispettivamente, il flusso di energia cinetica del gas, il lavoro delle forze di pressione e di quella di gravità. In condizioni stazionarie l'espressione dell'energia diventa

$$\vec{\nabla} \left(\left(\frac{\rho}{2} u^2 + p + \rho \phi_G \right) \vec{u} \right) = 0$$

Dato che lungo una linea di flusso deve essere costante, allora devo necessariamente avere che

$$\vec{\nabla} \left(\rho \vec{u} \left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \phi_G \right) \right)$$

È il teorema di Bernoulli applicato alla linea di flusso: ossia una conduttura con superficie piccola che si approssima a linea di flusso.

4 Conservazione dell'energia meccanica in condizioni in cui esiste una legge barotropica

Dall'equazione di continuità e dall'equazione di moto, supponendo di avere una legge barotropica $p = p(\rho)$, è possibile definire una quantità differenziale dividendo per la densità $w = \frac{dp}{\rho}$, ossia

$$\vec{\nabla} \frac{p}{\rho} = \vec{\nabla} w$$

Allora l'equazione di moto

$$\left(-\rho \vec{\nabla} w + \phi_G \vec{\nabla} p \right) \vec{u} \implies \rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla} w = \vec{\nabla}(\rho w \vec{u}) - w \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = \vec{\nabla}(\rho w \vec{u}) + w \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ossia

$$\vec{\nabla}(\rho w \vec{u}) + \frac{\partial \rho w}{\partial t} - \rho \frac{\partial w}{\partial t}$$

Data ora la definizione di derivata rispetto al tempo di w , si ha che

$$\vec{\nabla}(\rho w \vec{u}) + \frac{\partial(\rho w - p)}{\partial t}$$

Adesso dentro l'equazione di moto si ottiene la seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} u^2 + \rho \phi_G - \rho w - p \right) + \vec{\nabla} \left(\left(\frac{\rho}{2} u^2 + p \phi_G + \rho w \right) \vec{u} \right) = 0$$

