Appunti di Meccanica

Tommaso Miliani

26-02-26

1 Parametrizzazione e curve regolari

L'idea è sceglier un tempo t ed un istante successivo Δt per ottenere da una qualsiasi curva $\vec{r}(t)$ il vettore differenza tra i vettori posizioni $\vec{r}(t+\Delta t)$ e $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Dunque si può ottenere il rapporto incrementale tra le due posizioni:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

Quando questo limite esiste (se si da sufficiente regolarità alle funzioni basta che siano C^1). Si nota che

$$\lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\hat{i}\,(r_x(t+\Delta t) - r_x(t)) + \hat{j}\,(r_y(t+\Delta t) - r_y(t)) + \hat{k}\,(r_z(\Delta t + t) - r_z(t))}{\Delta t}$$

Se le funzioni sono regolari, allora si può ottenere

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{i}\frac{dx}{dt} + \hat{j}\frac{dy}{dt} + \hat{k}\frac{dz}{dt}$$

Per ricordare che è una derivata rispetto al tempo si usa $\dot{x}, \ldots$. L'altra grande protagonista della fisica è l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \hat{x}\ddot{x} + \hat{j}\ddot{y} + \hat{k}\ddot{z}$$

Si dice che una curva $\vec{r}(t)$ si dice **regolare** se è regolare come funzione matematica ossia se $\vec{r}(t) \in (C^1(\mathbb{R}))^3$. Inoltre si vuole anche che

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \neq 0$$

Esiste dunque una differenza tra regolarità geometrica e regolarità analitica. Ovviamente dire che il modulo si annulla vuol dire che tutte le componenti si annullano. Una proprietà che tornerà comoda è la seguente:

$$\hat{u}(t) \text{ versore}$$

Che può variare nel tempo e nella direzione, ha modulo costante, ma se t cambia si orienta in direzione diversa. Vale dunque la seguente semplice proprietà:

$$\left\langle \frac{d\hat{u}}{dt}, \hat{u} \right\rangle = 0$$

Inoltre

$$|\hat{u}|^2 = 1$$

Si ricorda poi il legame tra modulo e prodotto scalare

$$\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = |\hat{u}|^2 = 1$$

Se si deriva questa espressione:

$$0 = \frac{d}{dt}\langle \hat{u}, \hat{u} \rangle = \left\langle \frac{d\hat{u}}{dt}, \hat{u} \right\rangle + \left\langle \hat{u}, \frac{d\hat{u}}{t} \right\rangle = 2\left\langle \frac{d\hat{u}}{dt}, \hat{u} \right\rangle$$

poiché vale la regola di Leibniz,

Esempio 1.1 (Esempio veloce)**.**

Data una curva regolare

$$\vec{r}(t) = \hat{\imath}t^2 + t^3\hat{y}$$

La parabola viene definita a partire da questo parametro:

$$\begin{gathered} x(t) = t^2 \implies t = \pm\sqrt{x} \\ y(t) = t^3 = x^{\frac{3}{2}} = \pm x^{\frac{3}{2}} \end{gathered}$$

Per vedere se è regolare devo valutare la derivata:

$$\frac{dr}{dt} = 2t\hat{\imath} + 3t^2\hat{\jmath}$$

Devo vedere se il vettore che definisce la curva non si annulla:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = 4t^2 + 9t^4$$

Dunque costituisce una mappa lineare $y = x^2 + x^3$. Andando a creare una cuspide in $x = 0$.

Teorema 1.1.
La regolarità di una curva non dipende dalla parametrizzazione.

Dimostrazione. Presa una curva con parametrizzazione $r(t)$:

$$t(t_1) \to r_1(t_1) = r(t(t_1))$$

Applicando la derivazine della funzione composta:

$$\frac{d\vec{r_1}}{dt_1} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{dt_1}\right|$$

Se la parametrizzazione è regolare, allora

$$\left|\vec{t_1}\right| = \left|\vec{t}\right|$$

Dunque per definizione di regolarità mi permette di definire che la regolarità della curva non dipende dalla parametrizzazione ed è una proprietà intrinseca della curva perché la parametrizzazione è solo un modo per descrivere la curva. □

2 Lunghezza di una curva

Si può procedere adesso a definire la lunghezza di una curva (regolare). Il metodo intuitivo per costruire una curva è spezzettare la curva in piccoli pezzi dritti (poiché so determinarne la lunghezza con la norma euclidea). Dunque la lunghezza della spezzata è la somma dei pezzi:

$$l(r(t_A), r(t_B)) = \int_{t_A}^{t_B} \left|\frac{dr}{dt}\right| \, dt$$

Ossia integrando il modulo del versore tangente: dunque si ottiene la seguente espressione