Appunti di ottica

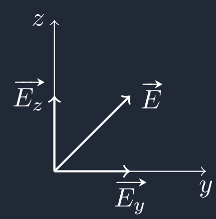
Tommaso Miliani

03-10-25

1 Funzionamento di un cubo polarizzatore

Alcuni materiali dielettrici sono detti **birifrangenti**: ossia hanno due indici di rifrazione per due polarizzazione lineari ortogonali della luce che li attraversa. Una applicazione è il **cubo polarizzatore**, il cui scopo è proprio quello di separare due polimerizzazioni ortogonali di un fascio incidente sul cubo con polarizzazione generica. Si può ora analizzare il funzionamento del cubo polarizzatore attraverso il secondo modello: tra le due facce del cubo è inserito un film sottile birifrangente per cui l'indice di rifrazione per gli assi ortogonali è diverso. Si avrà allora che gli indici di rifrazione $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$. Voglio ora che l'angolo di incidenza a 45 gradi sia l'angolo di rifrazione totale per $\overrightarrow{E_{\perp}}$.

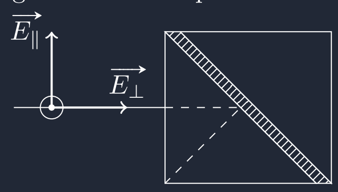
Figura 1: Schematizzazione del campo elettrico



Posso elencare le ipotesi:

- Scelgo $n_{\perp}$ in modo tale che $\frac{\pi}{4}$ sia l'angolo di riflessione totale interna per luce con polarizzazione $\overrightarrow{E_{\perp}}$.
- Scelgo $n_{\parallel}$ in modo tale che l'angolo $\frac{\pi}{4}$ sia l'angolo di Proust per luce con polarizzazione $\overrightarrow{E_{\parallel}}$.

Figura 2: Il cubo polarizzatore



L'angolo di rifrazione è dunque molto grande per questo coincide con l'interfaccia, allora si ha riflessione totale interna secondo la legge di snell:

$$n_{vetro} \sin \frac{\pi}{4} = n_{\perp} \sin \frac{\pi}{2}$$

L'indice di rifrazione $n_{\perp}$ deve allora soddisfare questa condizione per poter essere un angolo di riflessione interna totale per la luce con polarizzazione $\overrightarrow{E}_{\perp}$:

$$n_{\perp} = n_{vetro} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mentre $n_{\parallel}$ del film birifrangente è in relazione con l'indice di rifrazione del vetro secondo la seguente:

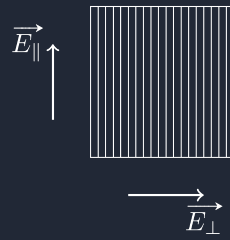
$$\tan \theta = \frac{n_{\parallel}}{n_{vetro}} \implies n_{\parallel} = n_{vetro}$$

Dato che l'angolo è per costruzione è $\frac{\pi}{4}$ allora la relazione a destra vale.

2 Polarizzatore a fili metallici

Un altro strumento per poter ottenere una sola polarizzazione da un fascio di luce lineare è detto polarizzatore a **fili metallici**. Il polarizzatore a fili metallici è una lastra di materiale sulla quale ci si può depositare dei fili metallici sottili lungo una direzione ben definita (in genere ognuno con un diametro di $10 \sim 100\ nm$). Supponendo di avere una luce incidente al filo metallico con componente sia parallela che perpendicolare al fascio di fili e di farla passare attraverso il polarizzatore.

Figura 3: Polarizzatore a fili metallici



La luce che passa dentro questo polarizzatore è quella con $\overrightarrow{E_\perp}$ poiché il campo parallelo mette in moto gli elettroni nei fili sottili e, dato che sono più alti che larghi, allora c'è più movimento degli elettroni che creano un campo elettrico con interferenza distruttiva per la componente parallela. Le onde perpendicolari, invece, passano in quanto il diametro dei microfili è molto piccolo e dunque non c'è abbastanza spazio per poter mettere in movimento gli elettroni per poter creare interferenza distruttiva.

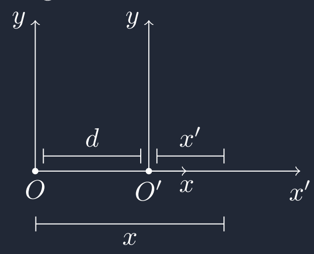
3 Lamine di ritardo

Le **lamine di ritardo** si basano su materiali birifrangenti e servono a modificare la polarizzazione della luce. Supponiamo di scrivere un campo elettrico lungo una sola direzione con

$$\overrightarrow{E_\parallel} = E_{0z}\cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

Potrei chiedermi come l'onda, rispetto all'origine O, cambia rispetto al tempo il campo elettrico? Quindi posso considerare un altro sistema di riferimento O' descritto con assi paralleli a quelli del sistema di riferimento O. Concentrandosi ora sul sistema di riferimento O', dopo un certo istante di tempo l'onda avrà camminato per una distanza x rispetto a O e per una distanza x' rispetto a O'. Posso quindi dire che il campo elettrico è

Figura 4: Ritardo di fase



$$\vec{E}(x', t) = E_{0z}\cos(k(d + x') - \omega t)\hat{z}$$

Per l'onda, dopo essersi propagata per una distanza d, posso considerare un sistema di riferimento O' attraverso un termine di fase kd che prende il nome di **ritardo di fase** che è dovuto alla propagazione lungo il tratto di lunghezza d che, nel caso si tratti di un mezzo dielettrico con indice di rifrazione n, questo termine diventa knd. Si considera ora una lamina di spessore d con materiale birifrangente ed un campo elettrico incidente generico dato dalla seguente:

$$\overrightarrow{E_{in}} = E_{0y}\cos(kx - \omega t)\hat{y} + E_{0z}\cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

In questo caso le ampiezze possono essere anche diverse ma le fasi sono le stesse e dunque sono lineari. Adesso mi chiedo che cosa accade al campo elettrico dopo che ha attraversato la lamina in funzione di un sistema di riferimento O' posto dopo la lamina. Se il materiale è birifrangente, allora dovrà necessariamente cambiare n a seconda della direzione di oscillazione. Il campo elettrico di uscita dalla lamina allora sarà:

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y}\cos(kx' - \omega t + kn_y d)\hat{y} + E_{0z}\cos(kx' - \omega t + kn_z d)\hat{z}$$

La polarizzazione in uscita sarà quindi ellittica. La velocità nel mezzo dipende da $\frac{\lambda}{T}$, ma la lunghezza d'onda dipende da n: nel mezzo birifrangente esisterà un asse lungo il quale la velocità dell'onda va più lenta (e quindi si ha un indice di rifrazione maggiore) ed un asse lento con indice di rifrazione minore.
Cambiando l'origine dei tempi, posso aggiungere o togliere a piacere un termine di fase comune su due coseni. Se ponessi come termine di fase $-kn_y d$, allora il campo elettrico uscente sarà

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y}\cos(kx' - \omega t)\hat{y} + E_{0z}\cos(kx' - \omega t + kd(n_z - n_y))\hat{z}$$

E quindi la fase dipende dalla differenza tra gli indici di rifrazione.

3.1 La lamina $\frac{\lambda}{2}$

La prima lamina di interessa è quella la cui fase è π:

$$kd(n_z - n_y) = \pi$$

Se esplicitassi k

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies d(n_z - n_y) = \frac{\lambda}{2}$$

La differenza tra i due indici di rifrazione che moltiplicano la distanza prende il nome di **cammino ottico**. La differenza tra i cammini ottici in questa lamina è pari alla metà della lunghezza d'onda in uscita: l'effetto di questa lamina è quello di introdurre un ritardo di fase uguale a π lungo l'asse lento. Inoltre, se la polarizzazione in ingresso è lineare, la luce trasmessa ha polarizzazione ancora lineare ma lungo l'asse riflesso rispetto all'asse veloce della lamina. Dato che la fase è π, allora

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t)\hat{z} \tag{1}$$

Nel caso di una polarizzazione circolare sinistra σ^+:

$$\overrightarrow{E_{out}} = E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

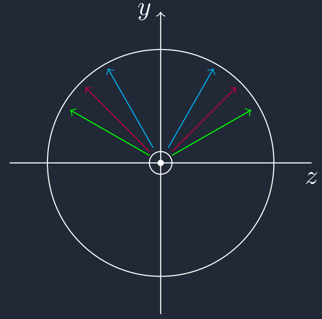
Aggiungendo ora il termine di fase anche per l'asse lento, allora si può scrivere

$$\overrightarrow{E_{out}} = E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t + \pi)\hat{z}$$

Sottraggo ora un termine $-\pi$ rispetto ad entrambi i termini e quindi

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t - \frac{\pi}{2})\hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t)\hat{z}$$

Figura 5:



3.2 La lamina $\frac{\lambda}{4}$

La lamina di ritardo $\frac{\lambda}{4}$ è molto simile a quella di $\frac{\lambda}{2}$ anche se causa un ritardo che è la metà, ossia produce un ritardo di fase

$$kd(n_z - n_y) = \frac{\pi}{2}$$

La differenza dei cammini ottici è allora $\frac{\lambda}{4}$

3.3 Polarizzazione nei due casi

In generale la polarizzazione sarà ellittica, l'unico caso semplice però è quello in cui la polarizzazione lineare incidente ha le due componenti $E_{0y} = E_{0z}$. In questo caso semplice, la polarizzazione lineare incidente sarebbe lungo l'asse a $\frac{\pi}{4}$ rispetto agli assi y, z solamente se il mio campo elettrico è allineato alla bisettrice del primo quadrante.
E' possibile verificare che, se ho una polarizzazione ellittica, scegliendo un angolo opportuno in una lamina $\frac{\lambda}{4}$ posso ottenere una polarizzazione lineare e agire sulla spanciatura dell'ellisse. Poi con una $\frac{\lambda}{2}$ posso ottenere una polarizzazione lineare rispetto all'asse preferito.

3.4 Cosa succede se si utilizza una lamina progettata per una data lunghezza d'onda con un altra lunghezza d'onda

La mia lamina è stata progettata in modo tale che

$$kd(n_z - n_y) = \pi + 2i\pi \qquad i \in \mathbb{N}$$

Supponendo che vogliamo utilizzare luce con $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ e supponendo che non ci sia tanta differenza tra i due indici di rifrazione, allora voglio determinare il ritardo di fase ϕ':

$$\phi' = k'd(n_z - n_y) = \frac{2\pi}{\lambda'}d(n_z - n_y) = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda}d(n_z - n_y)$$

Se la variazione d'onda ora è molto piccola, posso dire che il termine al denominatore è sviluppabile con Taylor:

$$\phi' = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_z - n_y)\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Allora posso riscrivere

$$(\pi + 2i\pi)\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Si possono allora considerare i seguenti casi

- Se $i = 0$ prendono il nome di zero order: sono molto sensibili e costano molto ma si adattano a tutte le lunghezze d'onda;
- $i >> 0$ prendono il nome di **multiple order** e sono economiche ma non funzionano con tutte le lunghezze d'onda ma solo per piccole variazioni