

Appunti di Fisica statistica

Tommaso Miliani

18-11-25

1 Distribuzione della probabilità di urto

Oltre a sapere il numero tipico di urti in un sistema chiuso, ci si può anche chiedere quale sia la distribuzione di probabilità degli urti in un sistema. Ci si aspetta dunque che il valore atteso degli urti sia dato proprio da

$$\langle n \rangle = \frac{t}{\tau} \quad (1)$$

Questa probabilità discreta, posso indicare quale è la probabilità che in questo tempo t ci siano delle collisioni. Si prende l'intervallo di tempo e lo si divide in tanti intervalli piccoli. Se li prendessi sufficientemente piccoli posso dire che in ogni intervallo avvenga un solo urto; in ognuno di essi posso definire la probabilità di collisione come $\frac{t}{N\tau}$ e la probabilità che non avvenga dunque $1 - \frac{t}{N\tau}$. Tuttavia, devo considerare anche che negli altri intervalli non avvenga alcun urto:

$$\left(\frac{t}{\tau N}\right)^n \left(1 - \frac{t}{N\tau}\right)^{N-n} \quad (2)$$

Otengo allora il numero medio di urti come

$$\binom{n}{N} = \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad (3)$$

Facendo tendere $N \rightarrow +\infty$, posso ottenere la probabilità di urto di un singolo intervallo p_n si ottiene secondo la distribuzione binomiale:

$$p_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \left(\frac{t}{\tau N}\right)^n \left(1 - \frac{t}{\tau N}\right)^{N-n} \quad (4)$$

I cui limiti:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{n!(N-n)!} \approx \frac{N^n}{n!}$$
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{\tau N}\right)^{N-n} \approx \left(1 - \frac{t}{\tau N}\right)^N$$

Allora

$$p_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^n}{n!} \left(\frac{t}{\tau N}\right)^n \left(1 - \frac{t}{\tau N}\right)^N = \frac{1}{n!} \langle n! \rangle^n e^{-\langle n \rangle}$$

Ossia una distribuzione di Poisson. Questa distribuzione governa tutti i processi discreti in fisica nei quali non ci si aspetta alcun tipo di correlazione tra i singoli eventi stocastici. Allora posso ottenere la probabilità totale come

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{\tau}\right)^n = e^{-\frac{t}{\tau}} e^{\frac{t}{\tau}} = 1$$

Da questa posso anche stimare il tempo medio tra gli urti: infatti tutti gli urti non avvengono nello stesso istante di tempo.

$$f(t) dt = e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{dt}{\tau} \implies f(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5)$$

Espressa come la probabilità che non ci siano urti fino a t moltiplicata per la probabilità che ci siano urti da t fino a $t + dt$. Ci si aspetta che il tempo medio di urto deve essere

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty dt \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = \tau \quad (6)$$

$$\langle t^2 \rangle = \int_0^\infty dt \frac{t^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau \int_0^\infty x e^{-x} dx = 2\tau^2 \quad (7)$$

$$(8)$$

Si può calcolare adesso la varianza del tempo di urti coem:

$$\sigma_t^2 = \langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2 = 2\tau^2 - \tau^2 = \tau^2 = \langle t \rangle^2 \quad (9)$$

Si dà per buono che anche la distribuzione delle distanze degli urti sarà la solita distribuzione esponenziale che prende il nome di

$$g(\lambda) = \frac{1}{l} e^{-\frac{\lambda}{l}} \quad (10)$$

Più è lungo l'intervallo di urto e minore è la probabilità di ottenere un urto, dove λ è la distanza dell'urto e l è la distanza media degli urti. Si verifica (così come per τ) con

$$\langle \lambda \rangle = \int_0^\infty g(\lambda) \lambda d\lambda = l \quad (11)$$

$$\langle \lambda^2 \rangle = \int_0^\infty g(\lambda) \lambda^2 d\lambda = 2l^2 \quad (12)$$

Si ottiene anche la varianza come

$$\sigma_\lambda^2 = \langle \lambda^2 \rangle - \langle \lambda \rangle^2 = l^2 \quad (13)$$

2 Dinamica caotica

Con queste considerazioni si può definire il **cammino aleatorio** o **random walk**, ossia quando la direzione di una particella ha una direzione qualsiasi sia dopo che prima dell'urto, abbia una distribuzione uniforme per gli angoli pre e post urto (la velocità dopo l'urto non è dunque correlata né con la velocità prima dell'urto né con la velocità della particella con cui impatta). Sto dunque assumendo una ipotesi molto sbagliata che però mi semplifica notevolmente il modello stocastico. Non solo non è corretto dire che l'urto "scorrela" le velocità, ma è proprio affermare il contrario in quanto nella meccanica classica l'urto correla la velocità delle particelle. Si può dimostrare che in realtà questa ipotesi sia corretta: prese due sfere omogenee di massa uguale che si urtano in maniera perfettamente elastica, la loro velocità finale dopo l'impatto sia legato al coefficiente di impatto e l'angolo della velocità finale dipende dall'angolo iniziale di impatto (ossia l'angolo tra le velocità dei dischi). Il parametro di impatto è dato da

$$b = 2R \sin \frac{\theta}{2} \implies \frac{b}{2} = R \sin \frac{\theta}{2}$$

Dato che si può conoscere l'incertezza Δb_1 , posso determinare l'incertezza sull'angolo θ applicando la propagazione degli errori:

$$\frac{b_1 + \Delta b_1}{2} = R \sin \left(\frac{\theta_1 + \Delta \theta_1}{2} \right)$$

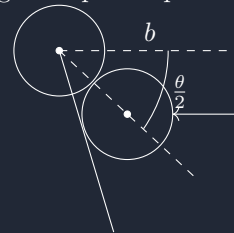
Approssimando l'argomento del seno (poiché si presuppone che sia molto piccolo), si può utilizzare lo sviluppo di Taylor e dunque ottenere:

$$\Delta \theta_1 \approx \frac{\Delta b_1}{R \cos \left(\frac{\theta_1}{2} \right)} = \frac{\Delta b_1}{R}$$

Il successivo urto sarà distante di una certa lunghezza, dunque se avessi una certa incertezza sull'angolo di uscita, per il secondo urto si potrebbe dire che

$$\Delta b_2 \approx l \Delta \theta_1 \implies \Delta \theta_2 \approx \frac{\Delta b_2}{R} = \frac{l}{R} \Delta \theta_1$$

Figura 1: Relazione tra coefficiente di impatto e angolo dopo l'impatto



Allora per il terzo urto

$$\Delta\theta_3 \approx \frac{l}{R} \Delta\theta_2 = \left(\frac{l}{R}\right)^2 \Delta\theta_1$$

Dunque quello che accade è che per n collisioni, l'incertezza sull'angolo dopo l'impatto è

$$\Delta\theta_n = \left(\frac{l}{R}\right)^{n-1} \Delta\theta_1$$

Questa incertezza cresce in maniera esponenziale in base al numero di urti; si può ottenere anche il numero di collisioni che servono far sì che questa incertezza abbia ordine π (ossia che non si sappia più la direzione della particella).

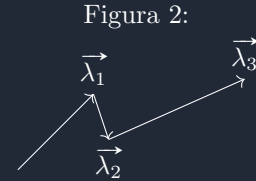
$$\pi = \left(\frac{l}{R}\right)^{n-1} 10^{-20} \quad \left\{ \begin{array}{l} l \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ m} \\ R \approx 10^{-10} \text{ m} \end{array} \right. \implies n \approx 9$$

Se si conoscesse con precisione infinita il parametro iniziale, allora sarà possibile determinare in maniera infinita il comportamento del sistema, se invece non si conoscesse con precisione infinita il parametro iniziale, allora dopo un tempo molto piccolo questa incertezza è tale che non si conosce più il comportamento del suddetto sistema. Questa tipologia di studio di sistemi prende il nome di **dinamica caotica**.

3 Random Walk

E' possibile determinare quanta strada compie una singola particella che si muove in modo caotico all'interno di un gas? L'ipotesi che sia un cammino aleatorio e che la direzione della velocità dopo l'urto sia uniforme determinata, dunque il vettore posizione della particella è dato da

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^n \vec{\lambda}_i$$



Allora il vettore posizione

$$\begin{aligned} \vec{r} = |\vec{r}| &= \vec{r} \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^n \vec{\lambda}_i \cdot \sum_{j=1}^n \vec{\lambda}_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \cos \theta_{i,j} = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i^2 + \lambda_i \sum_{j \neq i}^n \lambda_j \cos \theta_{i,j} \right) \end{aligned}$$

Dato che

$$\sum_{j \neq i}^n \lambda_j \cos \theta_{i,j} = N \frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^n \lambda_j \cos \theta_{i,j}$$

Allora essendo

$$\frac{1}{N} \sum_{j \neq i}^n \lambda_j \cos \theta_{i,j} = \langle \lambda \cos \theta \rangle = l \cos \theta$$

Si ottiene il valore atteso della distribuzione del random walk dove l è il cammino medio, si può ottenere

$$\langle \cos \theta \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta = 0$$

Il primo pezzo della sommatoria è invece

$$r^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \implies N \langle \lambda^2 \rangle$$

Quando $N \gg 1$. Allora si trova che, per un certo istante t , quando sono avvenuti N urti, si ottiene che

$$r^2(t) = N \langle \lambda^2 \rangle = 2Nl^2$$

Allora si ha che

$$Nl = \langle v \rangle t \implies r^2(t) = 2lvt$$

Se la mia particella si muove ogni volta girando a caso, alla fine la direzione non la posso conoscere: infatti sommando tutti i vettori posizione possibili devono essere zero in quanto può andare in tutte le direzioni allo stesso modo. Tuttavia, in modulo, posso vedere di quanto si è allontanata dall'urto:

$$r(t) = \sqrt{r^2(t)} \propto t^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

Questo è l'esempio di un processo microscopico che macroscopicamente si osserva con l'equazione di diffusione dei gas. Per esplorare una regione di circa un metro, per una particella dell'aria, ci vorrebbe circa 5 ore!! Questo vuol dire che la distribuzione di calore (o di odori) non avviene per conduzione ma attraverso moti convettivi. Nelle ipotesi di equilibrio i valori di pressione e temperatura dipendono dal valore atteso della velocità al quadrato $\langle v^2 \rangle$. Quello che conta è legare la temperatura al valore atteso della temperatura, ossia l'energia cinetica del sistema totale diviso il numero di particelle. Gli urti non cambiano questo risultato in quanto gli urti sono elastici e dunque non dissipano nessuna energia cinetica. All'equilibrio dunque metterci o meno gli urti non cambia i risultati ottenuti e la distribuzione della velocità è invariante dagli urti.

4 Moto Browniano

Prendendo delle particelle in sospensione all'interno di un liquido, queste particelle si muovono all'interno del liquido secondo il random walk. Il primo ad accorgersene è stato Robert Brown nel 1828 che osservava al microscopio le particelle di polline nell'acqua ma solo Einstein è riuscito a dare una spiegazione a questo fenomeno: la sua spiegazione è stata che il polline e l'acqua sono all'equilibrio termodinamico tra di loro (chiamando con lettere maiuscole le particelle del moto browniano):

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2}M \langle V^2 \rangle = \frac{3}{2}R_B T$$