



# Indice

<b>I Ottica geometrica</b>	<b>4</b>
<b>1 Le onde elettromagnetiche</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione alle onde elettromagnetiche . . . . .	5
1.2 La soluzione semplice: le onde piane . . . . .	6
1.2.1 Materiali dielettrici . . . . .	7
1.2.2 I metalli . . . . .	8
1.2.3 Incidenza di onde piane ad un certo angolo e legge di Snell . . . . .	8
1.2.4 Riflessione totale interna e prisma . . . . .	9
1.2.5 Uscita da un mezzo dielettrico . . . . .	9
<b>2 Le lenti</b>	<b>10</b>
2.1 Introduzione alle lenti sferiche . . . . .	10
2.2 Le lenti sottili . . . . .	11
2.2.1 La lente convergente . . . . .	11
2.2.2 La lente divergente . . . . .	12
2.3 Il problema della formazione delle immagini . . . . .	12
2.3.1 Sbagliare il piano d'immagine . . . . .	13
2.4 La legge del costruttore di lenti e i vari tipi di lenti . . . . .	13
2.4.1 Lente piano convessa . . . . .	13
2.4.2 Lente biconvessa . . . . .	13
2.4.3 La lente piano concava . . . . .	14
2.5 Funzionamento dell'occhio umano . . . . .	14
2.6 Lente di ingrandimento . . . . .	14
2.7 Sistema di lenti . . . . .	15
2.8 Princípio di funzionamento del telescopio . . . . .	16
2.9 Il principio di funzionamento del microscopio . . . . .	16
<b>II Polarizzazione della luce</b>	<b>18</b>
<b>3 Analisi e manipolazione della polarizzazione delle onde elettromagnetiche</b>	<b>19</b>
3.1 Definizione di polarizzazione . . . . .	19
3.1.1 Polarizzazione lineare . . . . .	19
3.1.2 Polarizzazione circolare . . . . .	19
3.2 Polarizzazione su di uno specchio metallico . . . . .	20
3.3 L'energia dell'onda elettromagnetica . . . . .	20
3.4 Il fenomeno della trasmissione di un mezzo dielettrico . . . . .	21
3.5 Polarizzatori e lame di ritardo . . . . .	22
3.5.1 Funzionamento di un cubo polarizzatore . . . . .	22
3.5.2 Polarizzatore a fili metallici . . . . .	22
3.6 Lame di ritardo . . . . .	23
3.6.1 La lamina $\frac{\lambda}{2}$ . . . . .	23
3.6.2 La lamina $\frac{\lambda}{4}$ . . . . .	24
3.6.3 Polarizzazione nei due casi . . . . .	24
3.6.4 Cosa succede se si utilizza una lamina progettata per una data lunghezza d'onda con un'altra lunghezza d'onda . . . . .	24

<b>4 Aberrazioni e interferenze</b>	<b>25</b>
4.1 Aberrazioni delle lamine in condizioni non ideali . . . . .	25
4.2 Interferenza . . . . .	26
4.2.1 Interferenza semplice . . . . .	26
4.2.2 Oscillazione con polarizzazioni diverse . . . . .	26
4.3 L'onda stazionaria . . . . .	27
4.4 Interferometro di Michelson . . . . .	28
4.4.1 Lo specchio con la camera a vuoto . . . . .	30
4.5 La realizzazione di uno spettrografo . . . . .	30
4.5.1 Due lunghezze d'onda . . . . .	30
4.6 Sommare due lunghezze d'onda diverse . . . . .	31
4.6.1 Lo spettro continuo . . . . .	31
<b>III Esperienze</b>	<b>33</b>
<b>5 Ottica Geometrica</b>	<b>34</b>
5.1 Introduzione: obiettivi e finalità . . . . .	34
5.2 L'apparato sperimentale . . . . .	34
5.3 La soluzione di Gauss . . . . .	35
5.4 Applicazione della soluzione di Gauss all'esperienza geometrica . . . . .	35
5.4.1 Le lenti dell'esperienza . . . . .	37
5.5 Presa delle misure . . . . .	37
<b>6 Esperienza Polarizzazione</b>	<b>39</b>
6.0.1 Lamina $\frac{\lambda}{2}$ . . . . .	39
6.0.2 Lamina $\frac{\lambda}{4}$ . . . . .	40
6.1 Scopi e finalità . . . . .	41
6.1.1 Il fit sinusoidale . . . . .	41
6.1.2 Le lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ nell'esperienza . . . . .	41
6.2 Apparato sperimentale . . . . .	42
6.3 Funzioni del fit . . . . .	42
6.3.1 Calibrazione dei laser . . . . .	42
6.3.2 Lamina $\frac{\lambda}{2}$ . . . . .	42
6.3.3 La lamina $\frac{\lambda}{4}$ . . . . .	43

# Introduzione al corso

Il corso di ottica si propone di studiare i quattro fenomeni principali dell'ottica:

1. Ottica geometrica: approssimazione della luce come un insieme di raggi luminosi e come essi si propagano nel vuoto (lenti e formazioni di immagini);
2. Polarizzazione: Dato che la luce è una onda elettromagnetica, e dato che il campo è un campo di vettori, il campo elettrico e luminoso è un vettore che oscilla nel tempo e questa oscillazione è proprio la polarizzazione;
3. Diffrazione: il fenomeno per il quale la luce si diffonde;
4. Interferenza: il fenomeno più complicato e bello della luce: due sorgenti luminose con campi opposti l'uno rispetto all'altro possono interferire distruttivamente e quindi non creare alcuna luce, ovviamente esiste anche l'interferenza costruttiva.

Il peso di ogni relazione è un decimo sul totale del voto. Il restante sessanta percento del voto è legato ad un compito in classe (molto simili l'uno all'altro). La media pesata di questi voti dà il voto finale (senza orale). Non si potrà essere super rigorosi in questo corso, ma si daranno le basi dell'ottica attraverso un approccio più pragmatico e semplice in quanto sarebbe necessario studiare prima fisica due e fisica quantistica.

# Parte I

## Ottica geometrica

# Capitolo 1

## Le onde elettromagnetiche

### 1.1 Introduzione alle onde elettromagnetiche

Prendiamo per esempio due elettroni, noi sappiamo che si respingono poiché tra di loro agisce la forza di Coulomb, che ha modulo:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$



Figura 1.1:

Questa forza dipende dalla carica delle due particelle e dalla direzione  $r$  congiungente. Se io spostassi la carica 1 di un certo  $\Delta S$ , la carica due non si accorgerebbe di questo spostamento in modo immediato e quindi la relazione precedente non sarebbe più valida: in generale la relazione vale solamente nella statica, ossia se le due particelle sono immobili. Avendo allora un ritardo nel cambiamento dell'interazione rispetto all'istante in cui è avvenuto lo spostamento, siamo allora costretti ad introdurre due campi vettoriali che si propagano con una velocità finita. Questi campi sono il campo magnetico ed il campo elettrico ( $\vec{B}$  e  $\vec{E}$ ) secondo delle leggi definite da Maxwell.

La forza che agisce sulle due cariche è un vettore e dunque per esprimere come cambia un vettore, ho bisogno di un vettore per descrivere questa variazione: posso esprimere allora con la legge di Lorentz come una carica risente della presenza di un campo elettrico e di un campo magnetico attraverso la seguente:

$$\vec{F}_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.1)$$

Dalle equazioni di Maxwell nel vuoto (ossia in assenza di cariche e correnti di cariche), introduciamo quindi l'operatore **Laplaciano quadro**, ossia un operatore differenziale che si applica al campo elettrico e anche a quello magnetico secondo le seguenti:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

L'operatore Laplaciano agisce su ogni componente del vettore campo elettrico o campo magnetico. Possiamo vedere cosa succede per  $\vec{E}_x$ :

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

Questa equazione mi esprime il contributo rispetto ad un singolo asse e va sotto il nome di **equazione delle onde** ed è analoga all'equazione delle onde per tutte le onde che si studiano (sonore, luminose, radio ...):

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

In questo caso  $v$  rappresenta la velocità di propagazione dell'onda rispetto ad un sistema di riferimento inerziale (per ora in quanto non si considera la relatività). Si può trovare una soluzione generale a questa equazione come

$$\psi(x, t) = f(x - vt)$$

Ossia prendo una funzione  $f$  a caso in modo tale che abbia la stessa forma di  $\psi$  e dunque se calcolata in  $x - vt$  sarà soluzione della mia equazione attraverso la doppia derivata rispetto alle  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= f'(x - vt) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''(x - vt) \\ \frac{\partial f}{\partial t} &f'(x - vt) \cdot (-v) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= f''(x - vt) \cdot (-v) \cdot (-v)\end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione con  $\psi$  posso allora dire che

$$f''(x - vt) = \frac{1}{v^2} v^2 f''(x - vt)$$

E quindi ho dimostrato che è soluzione generica dell'equazione. Al tempo  $t = 0$  io calcolo la funzione  $f(x - vt)$  e dunque mi chiedo dopo un tempo  $t$  in quale punto dello spazio la funzione  $f$  assumerà lo stesso valore  $f(\alpha)$ ? Ossia nel punto in cui  $x - vt = \alpha$  e allora l' $x$  cercato è  $\alpha + vt$ . In qualche modo mi sono spostato di una certa quantità  $vt$  e dunque in quel punto il campo assumerà nuovamente il valore che aveva nel punto  $\alpha$ . E' per questo che si parla di equazione delle onde che si muovono di velocità  $v$  poiché queste onde si propagano nello spazio secondo  $vt$ .

Le costanti che ho utilizzato fino ad ora sono la costante dielettrica nel vuoto

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{m^2 N} \quad (1.5)$$

E la permeabilità magnetica nel vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} \quad (1.6)$$

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto è proprio

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792458 \frac{m}{s} \quad (1.7)$$

## 1.2 La soluzione semplice: le onde piane

La soluzione più semplice all'equazione delle onde è l'onda piana: questa equazione ha come ipotesi che  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  siano uniformi in un piano perpendicolare alla direzione di propagazione. Se considerassimo l'asse  $x$  come l'asse di propagazione e consideriamo che nel piano  $yz$  entrambi i campi siano uniformi, e quindi che le derivate rispetto agli assi  $y$  e  $z$  siano zero, si ha nell'ipotesi di onda piana

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \\ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}\end{aligned}$$

Possiamo ora assumere che dalle equazioni di Maxwell il vettore campo elettrico non può essere diretto lungo la direzione della propagazione dell'onda e quindi le uniche componenti che rimangono sono quelle perpendicolari all'asse di propagazione e dunque  $E_x = 0$ . Si tratteranno d'ora in poi onde sinusoidali, ossia le onde che hanno la seguente espressione:

$$E_{y,z} = A \cos(k(x - vt) + \phi) \quad (1.8)$$

Figura 1.2: Il grafico della funzione generica  $f(x)$

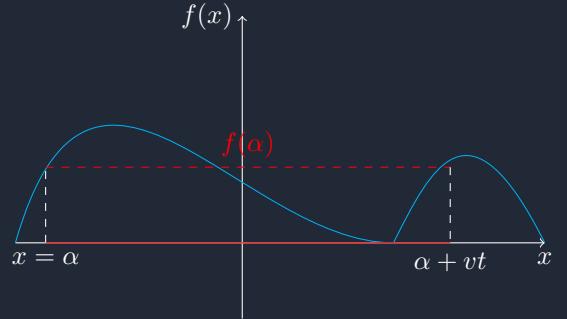
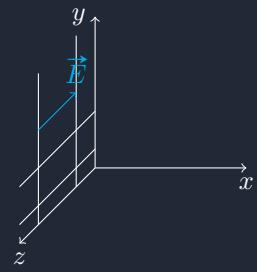


Figura 1.3: L'ipotesi graficamente



Il periodo spaziale dopo il quale la mia onda torna ad assumere lo stesso valore (ossia dopo  $2\pi$ ) posso ottenerlo imponendo che

$$k \cdot \lambda = 2\pi \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

E quindi chiamerò d'ora in poi  $\lambda$  come **lunghezza d'onda** e  $k$  il **vettore d'onda**, le quali sono intrinsecamente legate l'una all'altra. L'altra quantità che si usa per descrivere le onde elettromagnetiche è la frequenza e la pulsazione. Concentrandosi su di un certo valore di  $x$  e lasciando che il tempo trascorra, il campo elettrico nel punto  $x$  prefissato inizierà ad oscillare e dunque questo avviene in un certo tempo

$$kvT = 2\pi \implies T = \frac{2\pi}{c \cdot k} \implies T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Chiamo allora  $\omega = c \cdot k$  la **pulsazione**. Sostituendo con l'espressione della lunghezza d'onda ottengo

$$T = \frac{\lambda}{c} \implies \omega = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

La direzione del campo elettrico è detta **polarizzazione** e nel caso più semplice di onda piana si ha che la direzione del campo e del modulo è costante: posso dunque dire che il vettore

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

In questo caso l'onda piana con la direzione del campo elettrico non cambia nel tempo ed è sempre costante nel piano  $yz$ , per cui vale la precedente. Se volessi esprimere nella direzione generica, si avrebbe la seguente espressione per il vettore posizione e per il vettore campo elettrico:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z \\ \vec{E} &= \vec{E}_0 \cos(\hat{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \end{aligned}$$

In questo caso il vettore  $\hat{k}$  mi indica la direzione di propagazione della mia onda e dunque posso risolvere il prodotto scalare con il vettore direzione  $\vec{r}$  e ottenere che la direzione di propagazione ed il suo verso sono proprio quelli di  $\hat{k}$ . Posso rappresentare le onde utilizzando solo il fronte d'onda (ossia il picco dell'onda) con larghezza  $\lambda$ . Maxwell considera che il campo magnetico oscilla in fase rispetto al campo elettrico e quindi tutte le volte che si ha un onda che si propaga nello spazio, oltre che al campo elettrico che oscilla insieme all'onda, si ha anche il campo magnetico che oscilla insieme all'onda in fase (ossia traslato rispetto al campo elettrico), inoltre il campo magnetico oscilla perpendicolarmente rispetto al campo magnetico.

Sempre secondo Maxwell il modulo del campo magnetico si rapporta al modulo del campo elettrico secondo la relazione

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

Dato che la forza su di una carica è esprimibile come

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

E quindi posso esprimere la forza sulla particella come come  $q|\vec{E}|$  poiché nell'espressione del prodotto vettoriale si ottiene che il prodotto dei moduli sullo stesso asse diventa

$$q|\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta = q \frac{|\vec{v}|}{c} |\vec{E}| \sin \theta$$

Data l'espressione del modulo del campo magnetico posso trascurare il termine  $\frac{|\vec{v}|}{c}$  solo se la velocità dell'onda è molto piccola (in generale solo nei solidi).

Figura 1.4: L'onda elettromagnetica

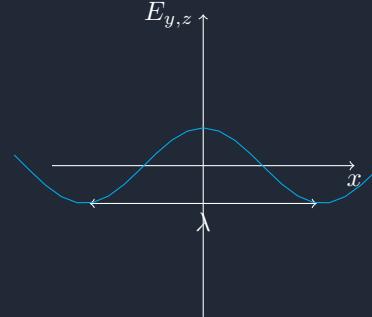
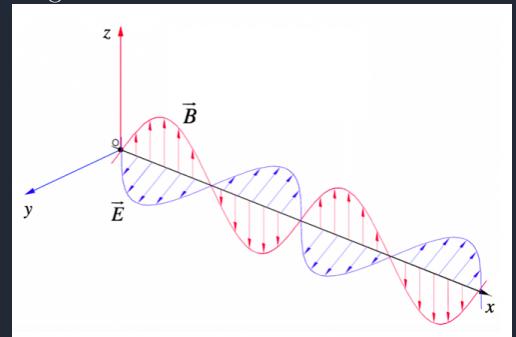


Figura 1.5:



Figura 1.6: Relazione tra campo elettrico e magnetico



### 1.2.1 Materiali dielettrici

Il mezzo dielettrico è un mezzo nel quale gli elettroni sono liberi di muoversi in modo molto limitato e quindi, avendo una ridotta mobilità, la componente del campo magnetico è molto piccola rispetto al campo elettrico. Un campo elettrico applicato alle cariche tende a far allontanare gli elettroni dai nuclei e quindi si distribuiscono diversamente nello spazio rispetto allo stato di quiete in quanto la forza elettrica riesce ad influenzare la distribuzione di carica senza farle muovere liberamente (nei metalli le cariche si muovono liberamente ma nei materiali dielettrici come il vetro, non lo fanno).

Quando un onda entra in un materiale dielettrico essenzialmente modifica la sua lunghezza d'onda e quindi la pulsazione e dunque la lunghezza d'onda nel vuoto si relaziona a quella nel materiale dielettrico secondo la relazione

$$\lambda' = \frac{\lambda_v}{n} \quad (1.9)$$

Dove  $\lambda_v$  è la lunghezza d'onda nel vuoto e  $n$  la **costante dielettrica** del materiale in questione. Se l'indice di rifrazione fosse minore di 1, allora la luce andrebbe più veloce della luce stessa ma la sua intensità si attenua molto in quanto questi materiali hanno un forte assorbimento di pacchetti di luce. Quando l'angolo di inclinazione è perfettamente perpendicolare, allora il fronte d'onda esterno al dielettrico è lo stesso che si ha all'interno del dielettrico.

### 1.2.2 I metalli

All'interno dei metalli gli elettroni si muovono liberamente e, mentre oscillano sotto un certo campo elettrico esterno, essi iniziano ad oscillare e generano un campo elettrico in **controfase** al campo elettrico incidente annullando il campo elettrico in arrivo e incontrando resistenza nel loro movimento; l'effetto è la liberazione di energia sottoforma di calore nel metallo. L'effetto complessivo è che certe lunghezze d'onda sono assorbite mentre altre sono riflesse.

### 1.2.3 Incidenza di onde piane ad un certo angolo e legge di Snell

Preso un sistema di riferimento piano, da una parte abbiamo l'aria (con indice di rifrazione molto simile al vuoto) e dall'altra del vetro (o qualsiasi altro materiale con  $n_2 \neq n_1$ ). Possiamo allora vedere cosa succede ai fronti d'onda che attraversano l'interfaccia tra i due materiali con un angolo di incidenza diverso da zero. Si può vedere che l'onda nel dielettrico è un'onda piana anch'essa in quanto lavoriamo sempre nella stessa ipotesi di onda piana. So inoltre che i fronti d'onda nel dielettrico sono gli stessi che al di fuori del dielettrico ma con lunghezza d'onda minore. Per far sì che i fronti d'onda coincidono, fisicamente succede che l'onda si inclina rispetto all'angolo di incidenza  $\theta_i$  di un certo angolo  $\theta_f$  chiamato di **rifrazione**. L'ipotenusa identificata con  $D$  al centro del disegno è in relazione alle lunghezze d'onda e agli angoli di incidenza e di rifrazione secondo la seguente formulazione

$$\begin{aligned} D \sin \theta_i &= \lambda \\ D \sin \theta_f &= \lambda' \end{aligned}$$

Se combiniamo le due equazioni si ottiene l'utile relazione (considerando che l'indice di rifrazione dell'aria è  $n_1$  e quello del vetro è  $n_2$ )

$$\frac{\lambda}{n_2 \sin \theta_f} = \frac{\lambda}{n_1 \sin \theta_i} \implies \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_f}{\sin \theta_i}$$

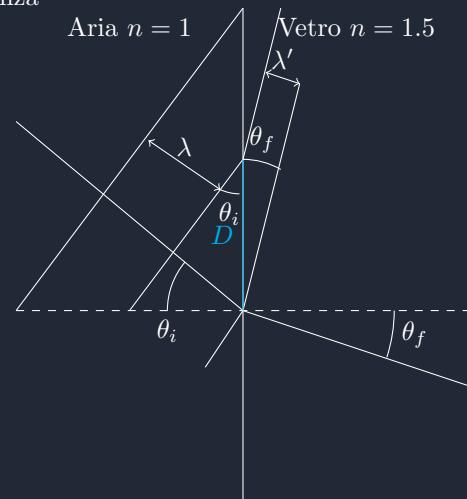
Ossia la **Legge di Snell**:

$$n_2 \sin \theta_f = n_1 \sin \theta_i \quad (1.10)$$

Figura 1.7: Materiali dielettrici



Figura 1.8: Relazione tra fronti d'onda e angolo di incidenza



Le onde che sono riflesse, vengono riflesse con un angolo di riflessione  $\theta_r = \theta_i$  in quanto si riflettono all'interno dello stesso dielettrico e dunque per la legge di Snell si riflettono con lo stesso angolo con cui incidono.

### 1.2.4 Riflessione totale interna e prisma

Supponendo di avere sempre la stessa interfaccia, ma stavolta le onde arrivano da dentro il dielettrico con indice di rifrazione maggiore, quindi quando arrivano all'interfaccia si rifrangono con un angolo molto grande. Il raggio di luce dunque, sopra un certo angolo, tenderà a rifrangersi con un angolo sempre più grande: in questo caso si arriva a dire che non si rifrangerà nessun raggio di luce all'esterno del dielettrico; si parla allora di **riflessione totale interna**. Questo si ha quando  $\theta_i > \theta_c$  ossia l'angolo critico oltre al quale non si rifrangerà più alcun raggio di luce. L'angolo critico si ricava dalla legge di Snell:

$$\begin{aligned} n_2 \sin \theta_i &= n_1 \sin \theta_f \\ n_2 \sin \theta_c &= n_1 \sin \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Allora l'angolo critico sarà

$$\sin \theta_c = \frac{n_1}{n_2} \quad (1.11)$$

Dove  $n_2 > n_1$ . Nel caso del prisma, quando entra il laser dalla parte perpendicolare al fascio di luce, la luce subisce un accorciamento della sua lunghezza d'onda mentre quando dall'interno colpisce le pareti inclinate del prisma (a 45 gradi e quindi maggiore dell'angolo critico), e quindi riflette solo all'interno rimbalzando fino a che non esce dalla parte nuovamente perpendicolare al fascio iniziale. Ruotando il prisma posso ottenere una parziale rifrazione della luce in modo da inclinare il fascio uscente.

### 1.2.5 Uscita da un mezzo dielettrico

Quando un fascio di luce entra in un mezzo e poi ne esce, questo esce con lo stesso angolo in entrata ma con un discostamento rispetto alla direzione iniziale di entrata nel mezzo. Questo è dato dal fatto che la legge di Snell mi modifica l'angolo in entrata e dunque l'angolo in uscita si ottiene applicando nuovamente la legge al contrario.

All'interno di un prisma è possibile invece far cambiare la direzione della luce completamente in quanto si utilizza la rifrazione per creare raggi con angoli diversi a seconda della lunghezza d'onda in entrata: il fascio di luce bianca che entra dentro un prisma è scomposto in tanti fasci luminosi di lunghezza d'onda diversa tutti distinti ed osservabili.

Figura 1.9: Riflessione totale interna

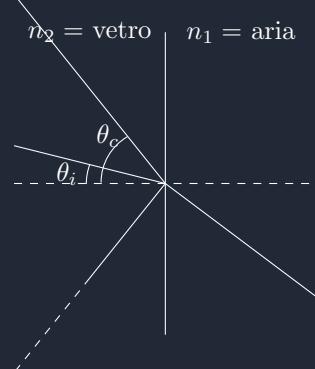
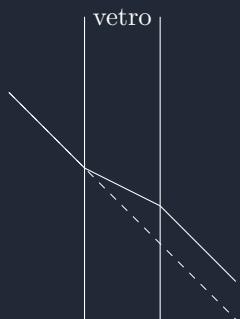


Figura 1.10: Deviazione della luce



# Capitolo 2

## Le lenti

### 2.1 Introduzione alle lenti sferiche

Supponendo di avere una sfera di vetro curvilinea e all'esterno aria; voglio vedere che succede se le onde piane della luce lo colpiscono con un certo angolo rispetto alla direzione del raggio della sfera. Chiamo  $\theta$  l'angolo di inclinazione rispetto alla congiungente sorgente-centro della circonferenza della lente e  $p$  la lunghezza dalla sorgente alla congiungente della verticale dal punto di contatto all'orizzontale. Si può supporre che se l'angolo  $\theta \ll 1$ , allora posso approssimare la lunghezza  $p$  come la distanza da  $P$  alla superficie di contatto della lente (ipotesi **parassiale**). Chiamo allora  $\theta_i$  l'angolo

di incidenza sulla lente e  $\theta_r$  l'angolo di rifrazione dovuto alla lente rispetto alla congiungente punto di contatto  $C$  al centro  $O$  della circonferenza. Ottengo degli altri angoli:  $\phi$ , ossia l'angolo tra l'orizzontale e la congiungente  $OC$  e  $\alpha$ , ossia l'angolo che forma la congiungente  $PQ$  rispetto all'orizzontale.

Posso chiamare  $q$  come  $PQ - p$  e  $Q$  il punto di contatto tra il fascio e l'orizzontale e l'angolo  $\alpha$  di incidenza del fascio rifranto sull'orizzontale. Si ottiene allora la seguente relazione vicino al punto di contatto  $C$ :

$$\theta_i + \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \pi \implies \theta_i = \theta + \phi \quad (1)$$

Inoltre si ottiene un'altra relazione

$$\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + \theta_r = \frac{\pi}{2} - \alpha \implies \alpha = \phi - \theta_r \quad (2)$$

Inoltre si ha che

$$h = q \tan \alpha = p \tan \theta = R \sin \phi$$

Data l'ipotesi parassiale le relazioni per  $h$  sono tutte uguali l'una dall'altra e posso togliere le varie tangenti e seni in quanto per  $\theta \ll 1$  si ha che  $\sin \theta, \tan \theta \approx \theta$ :

$$h = q\alpha = p\theta = R\phi \quad (3, 4, 5)$$

Rifacendosi alla legge di Snell e ricordando l'ipotesi parassiale, si ottiene che

$$n_{aria} \sin \theta_i = n_{vetro} \sin \theta_r \implies n_{aria} \theta_i = n_{vetro} \theta_r$$

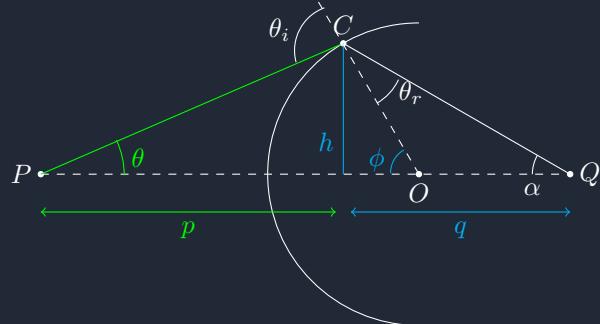
Posso far sparire glia angoli utilizzando le varie relazioni: posso utilizzare intanto la (1), poi la (2) e ottenere:

$$n_{aria}(\theta + \phi) = n_{vetro}(\phi - \alpha)$$

Posso allora utilizzare le relazioni dell'altezza per eliminare definitivamente gli angoli:

$$n_{aria} \left( \frac{h}{p} + \frac{h}{R} \right) = n_{vetro} \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{q} \right)$$

Figura 2.1: Le lenti



Adesso posso semplificare  $h$  dappertutto:

$$n_{aria} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right) = n_{vetro} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right) \quad (2.1)$$

Con questa equazione io vedo che tutti i raggi che emetto dalla mia sorgente  $P$  giungono tutti nel medesimo punto  $Q$  con angoli sufficientemente piccoli (ossia nel limite parassiale). Se si ripetesse il conto con un'altra interfaccia sferica vetrosa di raggio  $R_2 < R$ , allora scoprirei che il punto di convergenza di tutti i raggi numerosi è dato da

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R_2} \right) \frac{n_{vetro} - n_{aria}}{n_{aria}} + \frac{n_{vetro}d}{p(p-d)}$$

## 2.2 Le lenti sottili

Possiamo ora andare ad analizzare il comportamento di una lente sottile e non di una sfera di vetro come si era trattato prima. Data sempre una sorgente posta in  $P$  e come  $p$  la distanza tra la sorgente e la prima interfaccia; posso chiamare  $d$  come lo spessore della lente e  $q$  come la distanza tra il punto di arrivo sull'orizzontale del fascio di luce e la seconda interfaccia.  $R_1$  e  $R_2$  sono  $> 0$  se il centro delle curvature si trova a destra della superficie sferica. Si ottiene da questo modello la seguente relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + \frac{n_2 d}{p(p-d)}$$

Data l'ipotesi di lente sottile  $d$  è molto piccolo: in questo modo posso semplificare la formula in questione con la seguente:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} \quad (2.2)$$

Dove  $f$  è chiamata **lunghezza focale** e questa relazione si chiama **formula del costruttore di lenti** poiché per realizzare una lente con una certa focale devo sapere i raggi di curvatura delle interfacce e il loro coefficiente di rifrazione. Si ottiene anche la legge delle lenti sottili che dovremmo verificare in laboratorio ossia il primo membro uguale al terzo.

### 2.2.1 La lente convergente

Nel caso di  $f > 0$  si parla di **lente convergente**. Possiamo allora studiare i casi limite per capire il significato fisico di  $f$ . Una lente convergente è una lente sottile e possiamo distinguere diversi casi.

- Il primo caso è il caso in cui la distanza rispetto alla lente è infinita e ha la caratteristica in cui tutti i raggi convergono nel medesimo punto  $Q$ .
- Il secondo caso si ha quando  $p$  sia molto piccoli (siamo sempre nell'ipotesi parassiale) allora il termine  $q$  nella formula si annulla e la lente mi fa convergere i fasci luminosi all'infinito.
- Il terzo caso è quello della configurazione  $2f - 2f$ , ossia la configurazione in cui  $p = 2f$

$$\frac{1}{2f} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f} \implies \frac{1}{q} = \frac{1}{2f}$$

E quindi anche  $q = 2f$ , in questo modo i raggi che partono da  $P$  convergono tutti sul punto simmetrico rispetto alla lente  $Q$ . Per una lente **convergente** i punti a distanza  $f$  dalla lente (supponendo sempre che la sorgente sia a sinistra rispetto alla lente) per cui il punto a destra della lente si chiamerà **fuoco primario** della lente convergente, mentre il fuoco a sinistra della lente è chiamato **fuoco secondario**.

Figura 2.2: La lente sottile

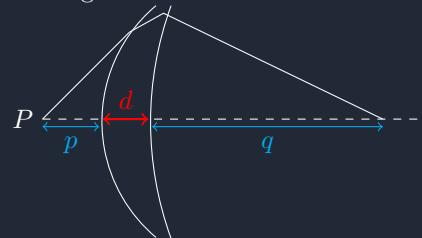
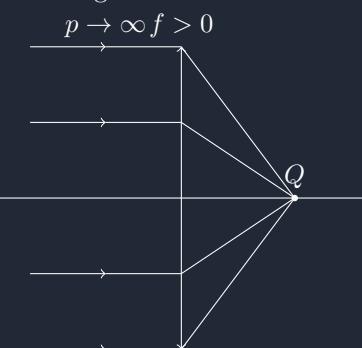


Figura 2.3: Caso A



- Posso considerare infine un ultima configurazione: se  $p < f$  posso ottenere intanto l'espressione per  $q$ :

$$\frac{1}{q} = \frac{p-f}{fp} \implies \frac{fp}{p-f} = q$$

La lente non riesce a far convergere i fasci di luce nel fuoco ma riesce solo a defletterli. Per cui la direzione dei raggi deflessi mi individua un punto in cui convergono le loro direzioni  $Q$  e la distanza  $q$  è allora negativa.

Se il punto focale della sorgente è sinistra della lente si dice che si ha una **immagine reale della sorgente**, altrimenti se il punto focale è a sinistra della lente si parla di **immagine virtuale della sorgente**. L'immagine è definita come il luogo dei punti dove si intersecano fisicamente i raggi provenienti da fuori della lente; nel caso dell'immagine virtuale sono i prolungamenti.

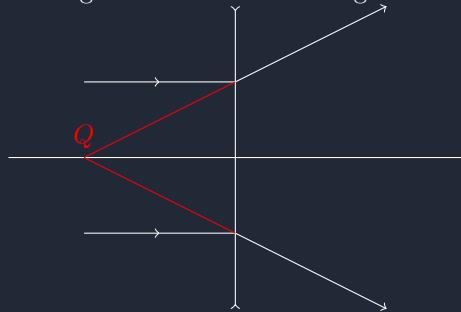
### 2.2.2 La lente divergente

Le lenti con  $f < 0$  si chiamano **divergenti**. La legge delle lenti sottili è sempre valida e studiamo solo un caso per la lente divergente con sorgente all'infinito. La legge delle lenti sottili mi mette in relazione

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{f} & f < 0 \\ \implies q &= f \end{aligned}$$

Allora la mia lente produrrà delle immagini virtuali sulla sinistra della lente sul fuoco secondario: allora i fuochi si invertono e il fuoco secondario diventerà il fuoco primario e viceversa. Non esistono invece delle immagini reali create da questa lente in quanto i raggi che giungono dall'infinito vengono sempre deflessi (ossia toccano la lente e vengono rifratti a differenza della lente convergente che invece fa convergere i fasci luminosi in un medesimo punto  $Q$ ).

Figura 2.4: La lente divergente



### 2.3 Il problema della formazione delle immagini

Studiamo ora una sorgente  $P'$  posta fuori dalla'asse ottico per studiare il problema della formazione delle immagini da parte di una lente. Il punto  $P'$  sta quindi ad una certa distanza rispetto all'asse ottico. Sappiamo che tutti i raggi che vengono dall'infinito convergono sul fuoco: il raggio 1 deve passare per il fuoco primario. Il raggio 2 che invece è sparato da  $P'$  passando per il fuoco  $F'$  deve necessariamente diventare perpendicolare alla lente. Il punto  $Q$  dipende dalla distanza della sorgente rispetto alla lente (il punto  $Q$  coincide solo con  $F$  quando i raggi vengono dall'infinito). Posso considerare quindi  $q$  come la distanza dal punto  $Q$  e  $q'$  come la distanza da  $Q'$ . Posso considerare i due triangoli simili rossi e vedere che vale la seguente

$$\frac{q'-f}{f} = \frac{h'}{h}$$

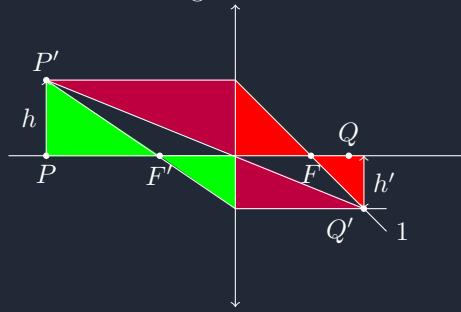
Per i triangoli verdi invece si ottiene la seguente relazione:

$$\frac{p-f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Se le pongo uguali le espressioni per il rapporto di  $h$  e  $h'$  allora si ha

$$\frac{q'-f}{f} = \frac{f}{p-f} \implies q'-f = \frac{f^2}{p-f} \implies q' = \frac{fp}{p-f}$$

Figura 2.5:



Si può allora arrangiare l'equazione come

$$\frac{1}{q'} = \frac{p-f}{fp'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

Allora ho dimostrato che  $q = q'$  e dunque i punti  $Q$  e  $Q'$  giacciono sullo stesso piano perpendicolare all'asse ottico: anche per immagini estese questa relazione vale ed è proprio come vede l'occhio umano. I triangoli simili si ottengono perché il fascio di luce che viene da  $P'$  e passa per il centro della lente giunge in  $Q'$  in quanto non c'è alcuna deflessione nel caso di una lente sottile.

$$\frac{p-f}{f} = \frac{h}{h'}$$

Se si moltiplica per  $\frac{p}{p}$  allora si ottiene la formula dell'**ingrandimento**:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \quad (2.3)$$

Il segno meno mi ricorda che l'immagine si ribalta rispetto alla sorgente nel caso in cui sia  $p$  che  $q$  siano positivi.

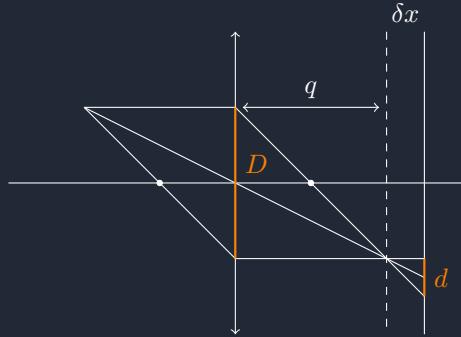
### 2.3.1 Sbagliare il piano d'immagine

Quando si fa una foto non riesco a mettere a fuoco tutti gli oggetti di una scena ma devo concentrarmi su oggetti che hanno una certa distanza dal piano immagine per poter essere rappresentati sul questo piano. Se sbagliassi il piano dell'immagine, potrei chiamare la distanza del punto di formazione dell'immagine dalla lente e  $D$  come la dimensione della lente; analogamente posso chiamare  $d$  la dimensione dell'immagine attraverso la lente. Posso anche avere un piano su cui giace  $d$  (ossia il piano sbagliato dell'immagine perché magari ho sbagliato a mettere a fuoco l'immagine). L'unico modo che ho per mettere a fuoco l'immagine ora è ridurre la dimensione della lente

$$\frac{d}{D} = \frac{\delta x}{q} \implies d = \frac{\delta x}{q} D$$

Dove  $\delta x$  è la distanza tra il piano dell'immagine "giusto" e quello sbagliato su cui c'è  $d$ : in questo modo posso ridurre lo spread dei raggi luminosi ed ottenere una immagine nitida. E' simile a quando si strizza l'occhio anche se in quel caso si modifica anche il cristallino. Come è possibile che in alcune immagini sia sempre tutto a fuoco? Si può spingere al limite il concetto di messa a fuoco attraverso una **camera stenopeica**: ossia una camera che mi permette di avere tutto a fuoco e tutto sullo stesso piano immagine attraverso una dimensione della lente  $D$  molto piccola. Il prezzo da pagare è che passa pochissima luce all'interno della camera perdendo così tanta luminosità dell'immagine.

Figura 2.6:



## 2.4 La legge del costruttore di lenti e i vari tipi di lenti

La legge del costruttore di lenti ci dice che

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \left( \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$$

Si possono ricavare tre tipi fondamentali di lenti da questa formula

### 2.4.1 Lente piano convessa

Questa lente ha una interfaccia con raggio di curvatura normale e un raggio di curvatura assimilabile a infinito; si ottiene allora la formulazione per la lunghezza focale dalla legge del costruttore di lenti

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$

Più la lente è piccola e più la lunghezza focale è piccola e la lente ha allora la capacità di far convergere molto i fasci luminosi.



### 2.4.2 Lente biconvessa

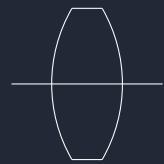
La lente biconvessa è una lente che non ha più una superficie piana ma ha due superficie sferiche con  $R_1 > 0$  e  $R_2 < 0$ . Nel caso in cui  $|R_1| = |R_2| = |R|$  si ha la seguente relazione:

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \left( \frac{R(-R)}{-2R} \right)$$

Complessivamente la mia focale sarà data da

$$f = \frac{n_1}{n_2 - n_1} \frac{R}{2}$$

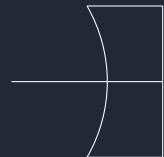
Il potere convergente è ora maggiore in quanto riesce a convergere più vicino alla lente (dato che la focale è la metà dell'altra lente).



### 2.4.3 La lente piano concava

Con questo tipo di lente si ha che la focale è negativa e dunque ho realizzato una lente convessa che avrà in modulo la stessa lunghezza focale della lente piano convessa ma con segno opposto

$$f = -\frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$



## 2.5 Funzionamento dell'occhio umano

L'occhio ha una forma sferica con un indice di rifrazione di circa  $n = 1.4$ . Sulla parte posteriore abbiamo la retina, ossia il rilevatore dell'occhio in grado di raccogliere la luce in entrata dal cristallino e poi trasferita al nostro cervello tramite il nervo ottico. Sulla retina si forma l'immagine che noi vediamo e dunque la retina è il piano immagine. Poiché non si riesce a cambiare la distanza  $q$  tra il cristallino e la retina, io posso mettere a fuoco piani sorgenti diversi utilizzando dei muscoli che contraggono il cristallino o lo rilassano e contribuisce per solo un terzo del potere convergente dell'occhio. Gli altri due terzi del potere convergente dell'occhio derivano dalla cornea posta davanti al cristallino ed immersa nell'humor acqueo mentre l'occhio è immerso nell'humor vitreo (ognuno con i suoi indici di rifrazione). La distanza  $q = 0.02m$ . E' l'analogo del sistema ottico in figura.

La distanza minima di messa a fuoco aumenta con l'età in quanto diminuisce la capacità di strizzare il cristallino da parte dei muscoli del cristallino: la distanza minima è  $p_{min} \approx 0.3m$ . Un occhio sano riesce inoltre a mettere a fuoco fino ad una distanza  $p_{max} = +\infty$ . La distanza  $q$  dell'occhio è  $0.02m$ . La distanza focale dell'occhio è di  $0.02m$ , voglio vedere cosa succede alla focale dell'occhio quando si vuole osservare un oggetto alla distanza minima:

$$\frac{1}{f} = \frac{q + p}{pq} \implies f = \frac{pq}{p + q} \implies f \approx 19.2mm$$

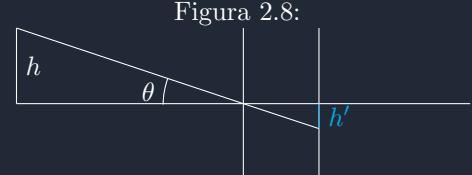
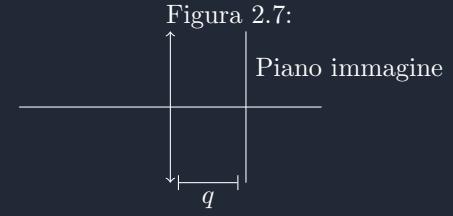
Posso allora ricavare l'ingrandimento dell'occhio: più gli oggetti sono vicini e più sono grandi all'interno del nostro occhio.

$$I = \frac{h'}{h} = -\frac{p}{q}$$

## 2.6 Lente di ingrandimento

Per poter allora ingrandire gli oggetti, si utilizzano delle lenti in grado di avere un potere di ingrandimento tale per cui si possa vedere meglio oggetti molto piccoli. Ponendo un oggetto prima della focale della lente, si osserva che i raggi luminosi dell'oggetto non si incontrano; l'oggetto apparirà quindi più grande quando arriva all'occhio umano ad una certa distanza  $d$ . Data la legge delle lenti sottili, con  $p < f$  allora sappiamo che

$$\frac{1}{q} = \frac{p - f}{fp} < 0$$



I raggi luminosi per l'occhio, appaiono come se si formino prima dell'oggetto stesso: l'occhio umano osserva allora la sorgente virtuale dell'immagine. Posso allora studiare l'angolo con cui l'immagine virtuale  $h'$  si intersechi con l'occhio umano anche se in realtà il raggio verde è generato dall'oggetto  $h$ . La distanza dove si forma l'immagine virtuale adesso è proprio  $q$ ; voglio ora trovare l'angolo verde  $\theta'$ ; sappiamo che, in assenza della lente, l'oggetto con altezza  $h$  formerebbe un angolo

$$\tan \theta = \frac{h}{p+d}$$

Invece, l'angolo  $\theta'$  che si forma sarà dato da:

$$\tan \theta' = \frac{h'}{q+d} \quad q < 0 \quad (2.4)$$

Possiamo ora determinare quale sarà l'angolo più grande. Dall'espressione dell'ingrandimento possiamo ricavare  $h'$  in funzione della lente e di  $h$ :

$$\frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} = -\frac{pf}{p-f} \frac{1}{p} \implies h' = \frac{f}{f-p} h$$

Allora posso combinare le due espressioni della tangente per vedere quale è l'angolo più grande

$$\tan \theta' = \frac{f}{f-p} \frac{h}{q+d}$$

Posso allora riscrivere  $q$  attraverso le relazioni con  $f$  e  $p$  (ho invertito  $p-f$  con  $f-p$  a causa del segno di  $q$ ):

$$q = \frac{pf}{f-p} \implies \tan \theta' = \frac{f}{f-p} \frac{h}{\frac{pf+df-dp}{f-p}}$$

Allora posso confrontare le due espressioni direttamente:

$$\tan \theta = \frac{h}{p+d} \implies \tan \theta' = \frac{h}{p+d - \left(\frac{dp}{f}\right)}$$

Si ottiene allora che  $\theta' > \theta$  proprio perché il denominatore è più piccolo e allora l'immagine si ingrandisce.

## 2.7 Sistema di lenti

Si vuole dimostrare il comportamento di due lenti convergente: l'ipotesi è che aumenti il potere convergente e che quindi il sistema di lenti si possa comportare come una unica lente con un potere convergente maggiore per cui la focale totale sarà la somma della focale. Tuttavia questa cosa è sbagliata in quanto il potere convergente è maggiore se la focale della lente è piccola: allora il potere convergente mi aspetto che sia direttamente proporzionale all'inverso della lente

$$\frac{1}{f} \approx \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

Questo è dimostrabile a partire dell'applicazione della legge delle lenti sottili a tutto il sistema di lenti (così come si era fatto per l'occhio) e quindi vale per qualsiasi distanza  $d_{1,2}$  tra le due lenti.

$$d_{1,2} = q + p'$$

Figura 2.9: Lente di ingrandimento

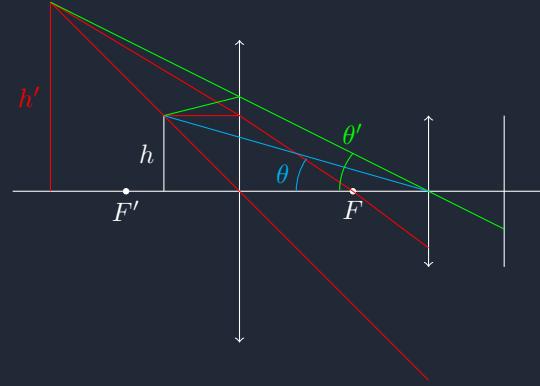
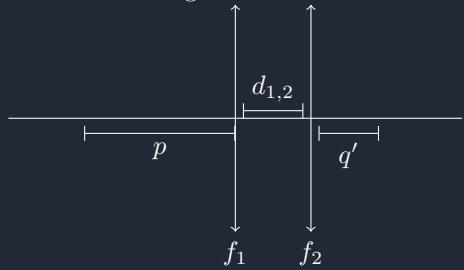


Figura 2.10:



E quindi si ottiene

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (2.5)$$

Eperimento a lezione con 4 lenti:

$$f_1 = 50\text{mm}$$

$$f_2 = -100\text{mm}$$

$$f_3 = 300\text{mm}$$

$$f_4 = -500\text{mm}$$

## 2.8 Principio di funzionamento del telescopio

Per poter osservare oggetti molto lontani da noi, si fa utilizzo di un apparato ottico che prende il nome di **telescopio**: il telescopio è composto da due lenti convergenti poste ad una certa distanza tra di loro in modo tale da ingrandire l'oggetto osservato. Consideriamo allora un asse ottico molto lungo alle cui estremità abbiamo l'oggetto da osservare e dall'altra l'occhio: possiamo tracciare quindi i fasci di luce che partono dall'oggetto e intersecano il centro del cristallino dell'occhio. Esiste allora un certo angolo  $\alpha$  tra i due fasci di luce: a seconda dell'angolo il corpo celeste avrà una certa dimensione sull'occhio. Se si avesse un sistema ottico (ossia il telescopio) tra l'occhio e l'oggetto, potremmo posizionare due lenti in modo tale che il fuoco primario della prima lente coincida con il fuoco secondario della seconda lente; le lenti sono scelte in modo tale che  $f_1 > f_2$ .

Così la distanza tra le due lenti è esattamente  $d = f_1 + f_2$ . Adesso si deve rappresentare i raggi che arrivano dal corpo celeste sulle due lenti convergenti. Analizzando ora il telescopio, i raggi molto vicini all'asse ottico appaiono paralleli tra di loro. Possiamo considerare il raggio blu che arriva con l'angolo  $\alpha$ : nel momento in cui pongo un sistema di lenti davanti all'occhio, allora i raggi vicini a quello blu arriveranno sulla lente primaria del telescopio venendo fatti convergere sotto l'asse ottico. Per studiare ora cosa accade ai raggi del corpo celeste alla destra del fuoco primario della prima lente, è sufficiente immaginare  $h$  (ossia l'immagine del corpo celeste dopo la prima lente) come sorgente posta prima della seconda lente del telescopio. Osservando dunque il disegno si vede che i raggi blu che venivano dall'estremità finale del corpo celeste arrivano sul nostro occhio con un nuovo angolo  $\beta$  più grande. Si ottengono le seguenti relazioni per i triangoli in figura:

$$\frac{h}{f_1} = \tan \alpha$$

$$\frac{h}{f_2} = \tan \beta$$

Si ha l'utile relazione come il rapporto tra le tangenti:

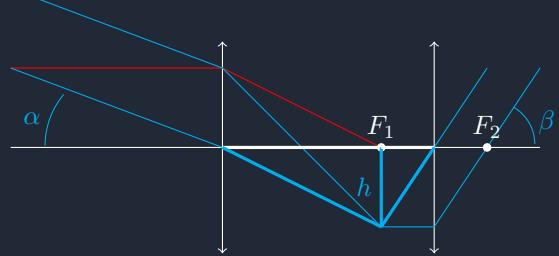
$$\frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{f_1}{f_2} \quad (2.6)$$

Se il rapporto tra le tangenti è maggiore di 1 allora

$$\beta > \alpha$$

Figura 2.11: Osservare un corpo celeste ad occhio nudo

Figura 2.12: Osservare un corpo celeste tramite un telescopio



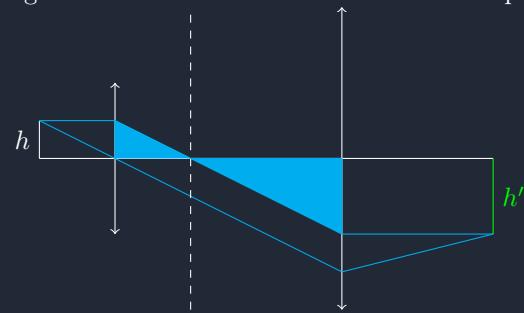
## 2.9 Il principio di funzionamento del microscopio

Quando si vuole osservare un oggetto molto piccolo, invece di usare una sola lente di ingrandimento, possiamo utilizzare un sistema di lenti con l'oggetto posto nel fuoco secondario della prima lente convergente in modo tale che  $p = f_1$ . Scelgo allora una seconda lente a focale lunga (l'inverso del telescopio) così che la distanza tra le due lenti sia  $d = f_1 + f_2$  e che quindi il fuoco primario della prima lente coincida con il fuoco secondario della seconda lente. Posso stimare geometricamente l'ingrandimento dell'immagine come

$$I = \frac{h'}{h} = \frac{f_2}{f_1}$$

Dato che  $f_2 > f_1$ , segue che  $I > 1$  e dunque l'immagine sarà ingrandita. Se volessi tenere conto del fatto che l'immagine sia ribaltata, allora dovrei mettere un meno davanti al rapporto per tenere conto del ribaltamento.

Figura 2.13: Schematizzazione del microscopio



## Parte II

# Polarizzazione della luce

# Capitolo 3

## Analisi e manipolazione della polarizzazione delle onde elettromagnetiche

### 3.1 Definizione di polarizzazione

Si definisce polarizzazione la direzione del campo elettrico dell'onda elettromagnetica, si ricorda che per una onda piana la polarizzazione giace in un piano che è perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda  $\hat{k}$ . Il campo elettrico dell'onda sarà dato in funzione sia della posizione che del tempo. Matematicamente il campo elettrico si propagherà solamente sul piano  $zy$  e dunque posso esprimere

$$\vec{E}(x, t) = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{z} + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y}$$

Dove  $\phi_z$  e  $\phi_y$  sono le fasi del campo rispetto ai due assi. In questo caso l'onda elettromagnetica si propaga lungo la direzione  $\hat{x} \equiv \hat{k}$ .

#### 3.1.1 Polarizzazione lineare

La polarizzazione lineare consiste nella polarizzazione tra due onde con la stessa fase  $\phi_y = \phi_z$ . Le due componenti  $z, y$  del campo elettrico oscillano in fase sia spazialmente che temporalmente e quindi la direzione del campo elettrico totale rimane costante. Posso esprimere allora la tangente dell'angolo in funzione del tempo come

$$\tan \alpha(t) = \frac{E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z)}{E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y)} = \frac{E_{0z}}{E_{0y}}$$

La seconda uguaglianza vale perché le fasi sono le stesse:

#### 3.1.2 Polarizzazione circolare

E' un altro caso particolare per cui  $E_{0y} = E_{0z}$  ma nel caso in cui le onde siano sfasate di  $\phi_y = \phi_z \pm \frac{\pi}{2}$ . Vado a vedere ancora la tangente di alfa in funzione del tempo:

$$\tan \alpha(t) = \frac{E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z)}{E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y)} = \frac{\cos(kx - \omega t + \phi_z)}{\cos(kx - \omega t + \phi_z \pm \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(kx - \omega t + \phi_z)}{\mp \sin(kx - \omega t + \phi_z)}$$

Per le proprietà trigonometriche del coseno, quando si introduce uno sfasamento di  $\frac{\pi}{2}$ , il coseno si trasforma nel seno dell'angolo  $\phi_z$  quindi vale la seconda uguaglianza. Se chiamassi l'argomento dentro al seno e al coseno  $\theta$ , otterrei che

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{\cos(\theta - \frac{\pi}{2})}{-\sin(\theta - \frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}$$

Figura 3.1:

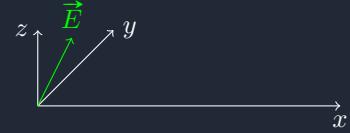
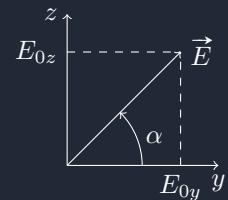


Figura 3.2: Campo elettrico sul piano  $zy$ , l'asse  $x$  è uscente dal piano



Allora con questi passaggi trigonometrici si ottiene

$$\tan \alpha(t) = \pm \tan \left( kx - \omega t + \phi_z + \frac{\pi}{2} \right)$$

Allora si ha che l'angolo  $\alpha$  varia nel tempo, con il simbolo  $\pm$  in base alla variazione di fase che sia positiva o negativa secondo la seguente legge

$$\alpha(t) = \pm \left( kx - \omega t + \phi_z + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.1)$$

Le due polarizzazioni si chiameranno **circolari**:

$$+ : \alpha(t) = \cos t - \omega t \\ - : \alpha(t) = \cos t + \omega t$$

Nel primo caso gira in senso orario e dunque prende il nome di polarizzazione circolare sinistra e nel caso meno, girando in senso antiorario, prenderà il nome di polarizzazione circolare destra.

## 3.2 Polarizzazione su di uno specchio metallico

Dato un campo elettrico che si propaga lungo l'asse  $x$ , il campo elettrico generico nel piano  $yz$  si può scrivere come

$$\vec{E} = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{u}_z + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{u}_y$$

Con i moduli  $E_{0z} = E_{0y}$  tale che i vettori sono in fase con  $\phi_y = \phi_z + \frac{\pi}{2}$ , scelgo che  $\phi_z = 0$  e dunque  $\phi_y = \frac{\pi}{2}$ , allora posso dire che il vettore campo elettrico si può esprimere come

$$\vec{E} = E_0 \cos \left( kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{u}_y + E_0 \cos(kx - \omega t) \hat{u}_z$$

La componente lungo  $y$  diventa leggermente positiva mentre la componente lungo  $z$  è leggermente ridotta dopo un certo tempo  $\epsilon$ , che scelgo molto piccolo. Allora risulta che il campo elettrico è ruotato rispetto alla direzione iniziale e sarà polarizzato verso sinistra.

Voglio vedere che succede se mando una onda piana con una certa polarizzazione  $\sigma$  su di uno specchio. L'interferenza distruttiva causata dal metallo non permette di avere campo elettrico dentro lo specchio ma solo fuori come riflesso. Gli elettroni che oscillano nel mezzo metallico, oltre che a generare il campo elettrico in controparte, generano un onda anche verso la direzione di provenienza del campo elettrico e dunque i due campi elettrici non si eliminano. Dobbiamo scrivere il campo elettrico che si propaga verso sinistra cambiando la fase del campo di una fase  $\pi$ :

$$\vec{E} = -E_0 \cos \left( -kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \hat{u}_y + E_0 \cos(-kx - \omega t) \hat{u}_z$$

L'effetto dello specchio metallico è dunque quello di invertire il valore del campo elettrico in virtù del fatto che il campo generato è in controparte. Quindi i due campi sono opposti in  $x = 0$  ed il nuovo campo si propaga verso sinistra e non verso destra; la polarizzazione quando la luce incide su di uno specchio viene invertita per cui se prima era a polarizzazione circolare sinistra, l'onda uscente avrà una polarizzazione circolare destra.

## 3.3 L'energia dell'onda elettromagnetica

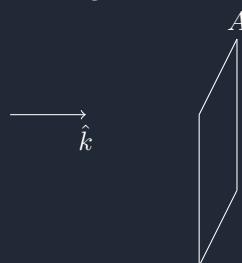
Perché ci si scalda al sole? Quando una onda elettromagnetica incide sui nostri elettroni li mette in accelerazione e dunque guadagnano energia cinetica e la rilasciano sottoforma di calore. Come si può determinare l'energia emessa da una data onda elettromagnetica? Posso determinare l'**intensità luminosa**, ossia l'energia che passa per una data superficie  $A$ :

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \cdot \frac{1}{A} = I = \epsilon_0 c \vec{E}(t)^2 \quad (3.2)$$

Ossia l'energia che attraversa una certa superficie in un certo intervallo di tempo:

$$\Delta E = IA\Delta t \quad (3.3)$$

Figura 3.3:



Dato che il campo elettrico oscilla sempre, ci sono degli istanti in cui il campo elettrico è nullo: l'intensità luminosa dunque oscilla anch'essa con un certo periodo e con una certa fase rispetto al campo elettrico. Dato che

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Dove  $\lambda$  non è altro che la lunghezza d'onda della radiazione considerata: se si considera la radiazione luminosa  $\sim 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ , si ha che il periodo di oscillazione è  $0.2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ . La nostra intensità luminosa è allora la media dell'intensità luminosa su un periodo di oscillazione del campo elettrico:

$$\langle I \rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T \vec{E}^2 dt \implies \langle I \rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt$$

Allora posso risolvere la media rispetto al coseno alla seconda e ottenere l'intensità luminosa media di una certa onda elettromagnetica come

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E^2 \quad (3.4)$$

Di conseguenza la media dell'intensità luminosa non è altro che la metà dell'intensità luminosa totale in valore assoluto. Se la polarizzazione del campo elettrico in modulo rimane sempre  $E_0$  allora l'intensità varia poiché si ha il doppio dell'intensità: questa onda polarizzata è la somma del contributo dell'onda piana iniziale e del contributo sfasato rispetto a questa onda.

### 3.4 Il fenomeno della trasmissione di un mezzo dielettrico

I fenomeni di trasmissione e di riflessione alle interfacce tra dielettrici dipendono dalla polarizzazione delle onde rispetto al piano di incidenza. Il **piano di incidenza** è il piano che contiene il **raggio incidente** definito dal vettore  $\hat{k}$  e la direzione normale alla superficie nel punto di incidenza: nel disegno il piano di incidenza coincide con il foglio. Il vettore campo elettrico è dunque scomponibile in due componenti: una parallela ed una perpendicolare al piano di incidenza (il cui verso, ossia se entrante o uscente, è arbitrario). Un fenomeno particolare che si incontra è quando una onda incide un dielettrico senza essere riflessa (ossia la luce se ha una polarizzazione con solo  $\vec{E}_{||}$ ) viene solo trasmessa.

Se avessi un dipolo elettrico oscillante con il campo orientato in una certa direzione, allora esso emetterà solamente campo elettrico con direzione perpendicolare alla direzione del dipolo elettrico oscillante; l'emissione lungo la direzione di oscillazione è nulla. Il risultato delle onde in trasmissione o riflessione sono date dalle cariche all'interno del dielettrico: si immagina di avere la condizione per cui si ha una interfaccia con un raggio di luce che incide ad un certo angolo sul dielettrico in modo tale che si crei un angolo di  $90^\circ$  tra i raggi riflessi e trasmessi: in questo caso si creano dipoli elettrici nel dielettrico che oscillano perpendicolarmente alla direzione dell'onda trasmessa. Questi dipoli possono creare solo delle onde nella direzione dell'onda riflessa e dunque l'onda riflessa non può esistere. Questo angolo particolare prende il nome di **angolo di Brewster** e questo vale solo quando  $\vec{E}$  giace sul piano di incidenza e dunque si può verificare solo per una polarizzazione lineare e vale dunque per  $\vec{E}_{||}$ . La relazione che ottengo tra gli angoli sotto mi permette di ricavare l'angolo di Brewster:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \pi \\ n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta_1) = n_2 \cos \theta_1 \end{cases}$$

Si ottiene allora l'angolo critico per il quale si ha questa condizione:

$$\tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad (3.5)$$

Figura 3.4: L'interfaccia tra dielettrici

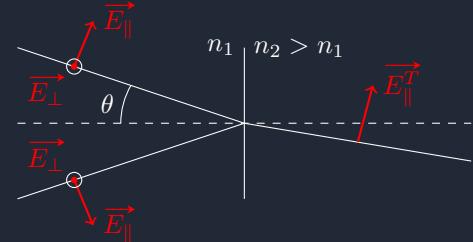
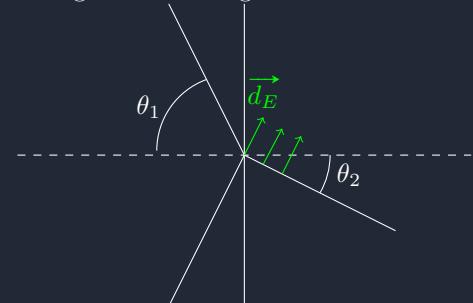


Figura 3.5: L'angolo di Brewster



L'angolo tra aria e vetro di Brewster è esattamente  $\theta = 56^\circ$ . Se della luce con polarizzazione ellittica (casuale) incide con l'angolo di Brewster su di una superficie dielettrica, la riflessione emerge con polarizzazione lineare e perpendicolare. L'interfaccia si comporta come se fosse un polarizzatore: solo la luce con una data polarizzazione può percorrere il cammino di riflessione. Una polarizzazione **ellittica** è una polarizzazione tale per cui

$$E_{0y} \neq E_{0z} \quad \text{se} \quad \phi_y \neq \phi_z$$

E dunque la punta del campo elettrico sul piano  $zy$  segue la traiettoria di una ellisse.

## 3.5 Polarizzatori e lamine di ritardo

### 3.5.1 Funzionamento di un cubo polarizzatore

Alcuni materiali dielettrici sono detti **birifrangenti**: ossia hanno due indici di rifrazione per due polarizzazioni lineari ortogonali della luce che li attraversa. Una applicazione è il **cubo polarizzatore**, il cui scopo è proprio quello di separare due polarizzazioni ortogonali di un fascio incidente sul cubo con polarizzazione generica. Si può ora analizzare il funzionamento del cubo polarizzatore attraverso il secondo modello: tra le due facce del cubo è inserito un film sottile birifrangente per cui l'indice di rifrazione per gli assi ortogonali è diverso. Si avrà allora che gli indici di rifrazione  $n_{\parallel} \neq n_{\perp}$ . Voglio ora che l'angolo di incidenza a 45 gradi sia l'angolo di rifrazione totale per  $\vec{E}_{\perp}$ .

Posso elencare le ipotesi:

- Scelgo  $n_{\perp}$  in modo tale che  $\frac{\pi}{4}$  sia l'angolo di rifrazione totale interna per luce con polarizzazione  $\vec{E}_{\perp}$ .
- Scelgo  $n_{\parallel}$  in modo tale che l'angolo  $\frac{\pi}{4}$  sia l'angolo di Proust per luce con polarizzazione  $\vec{E}_{\parallel}$ .

L'angolo di rifrazione è dunque molto grande per questo coincide con l'interfaccia, allora si ha riflessione totale interna secondo la legge di snell:

$$n_{vetro} \sin \frac{\pi}{4} = n_{\perp} \sin \frac{\pi}{2}$$

L'indice di rifrazione  $n_{\perp}$  deve allora soddisfare questa condizione per poter essere un angolo di rifrazione totale per la luce con polarizzazione  $\vec{E}_{\perp}$ :

$$n_{\perp} = n_{vetro} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mentre  $n_{\parallel}$  del film birifrangente è in relazione con l'indice di rifrazione del vetro secondo la seguente:

$$\tan \theta = \frac{n_{\parallel}}{n_{vetro}} \implies n_{\parallel} = n_{vetro}$$

Dato che l'angolo è per costruzione è  $\frac{\pi}{4}$  allora la relazione a destra vale.

### 3.5.2 Polarizzatore a fili metallici

Un altro strumento per poter ottenere una sola polarizzazione da un fascio di luce lineare è detto polarizzatore a **fili metallici**. Il polarizzatore a fili metallici è una lastra di materiale sulla quale ci si può depositare dei fili metallici sottili lungo una direzione ben definita (in genere ognuno con un diametro di  $10 \sim 100 \text{ nm}$ ). Supponendo di avere una luce incidente al filo metallico con componente sia parallela che perpendicolare al fascio di fili e di farla passare attraverso il polarizzatore.

Figura 3.6: Schematizzazione del campo elettrico

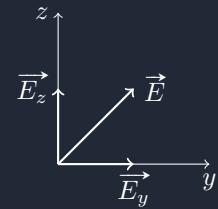


Figura 3.7: Il cubo polarizzatore

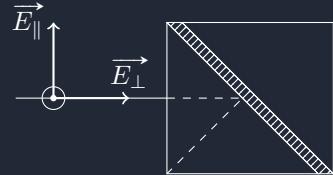
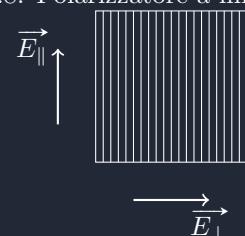


Figura 3.8: Polarizzatore a fili metallici



La luce che passa dentro questo polarizzatore è quella con  $\vec{E}_\perp$  poiché il campo parallelo mette in moto gli elettroni nei fili sottili e, dato che sono più alti che larghi, allora c'è più movimento degli elettroni che creano un campo elettrico con interferenza distruttiva per la componente parallela. Le onde perpendicolari, invece, passano in quanto il diametro dei microfili è molto piccolo e dunque non c'è abbastanza spazio per poter mettere in movimento gli elettroni per poter creare interferenza distruttiva.

### 3.6 Lamine di ritardo

Le **lamine di ritardo** si basano su materiali birifrangenti e servono a modificare la polarizzazione della luce. Supponiamo di scrivere un campo elettrico lungo una sola direzione con

$$\vec{E}_\parallel = E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

Potrei chiedermi come l'onda, rispetto all'origine  $O$ , cambia rispetto al tempo il campo elettrico? Quindi posso considerare un altro sistema di riferimento  $O'$  descritto con assi paralleli a quelli del sistema di riferimento  $O$ . Concentrandosi ora sul sistema di riferimento  $O'$ , dopo un certo istante di tempo l'onda avrà camminato per una distanza  $x$  rispetto a  $O$  e per una distanza  $x'$  rispetto a  $O'$ . Posso quindi dire che il campo elettrico è

$$\vec{E}(x', t) = E_{0z} \cos(k(d + x') - \omega t) \hat{z}$$

Per l'onda, dopo essersi propagata per una distanza  $d$ , posso considerare un sistema di riferimento  $O'$  attraverso un termine di fase  $kd$  che prende il nome di **ritardo di fase** che è dovuto alla propagazione lungo il tratto di lunghezza  $d$  che, nel caso si tratti di un mezzo dielettrico con indice di rifrazione  $n$ , questo termine diventa  $knd$ . Si considera ora una lamina di spessore  $d$  con materiale birifrangente ed un campo elettrico incidente generico dato dalla seguente:

$$\vec{E}_{in} = E_{0y} \cos(kx - \omega t) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

In questo caso le ampiezze possono essere anche diverse ma le fasi sono le stesse e dunque sono lineari. Adesso mi chiedo che cosa accade al campo elettrico dopo che ha attraversato la lamina in funzione di un sistema di riferimento  $O'$  posto dopo la lamina. Se il materiale è birifrangente, allora dovrà necessariamente cambiare  $n$  a seconda della direzione di oscillazione. Il campo elettrico di uscita dalla lamina allora sarà:

$$\vec{E}_{out}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t + kn_y d) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx' - \omega t + kn_z d) \hat{z}$$

La polarizzazione in uscita sarà quindi ellittica. La velocità nel mezzo dipende da  $\frac{\lambda}{T}$ , ma la lunghezza d'onda dipende da  $n$ : nel mezzo birifrangente esisterà un asse lungo il quale la velocità dell'onda va più lenta (e quindi si ha un indice di rifrazione maggiore) ed un asse lento con indice di rifrazione minore.

Cambiando l'origine dei tempi, posso aggiungere o togliere a piacere un termine di fase comune su due coseni. Se ponessi come termine di fase  $-kn_y d$ , allora il campo elettrico uscente sarà

$$\vec{E}_{out}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t) \hat{y} + E_{0z} \cos(kx' - \omega t + kd(n_z - n_y)) \hat{z}$$

E quindi la fase dipende dalla differenza tra gli indici di rifrazione.

#### 3.6.1 La lamina $\frac{\lambda}{2}$

La prima lamina di interessa è quella la cui fase è  $\pi$ :

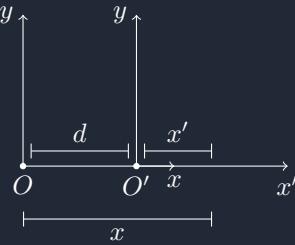
$$kd(n_z - n_y) = \pi$$

Se esplicitassi  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies d(n_z - n_y) = \frac{\lambda}{2}$$

La differenza tra i due indici di rifrazione che moltiplicano la distanza prende il nome di **cammino ottico**. La differenza tra i cammini ottici in questa lamina è pari alla metà della lunghezza d'onda in uscita: l'effetto

Figura 3.9: Ritardo di fase



di questa lamina è quello di introdurre un ritardo di fase uguale a  $\pi$  lungo l'asse lento. Inoltre, se la polarizzazione in ingresso è lineare, la luce trasmessa ha polarizzazione ancora lineare ma lungo l'asse riflesso rispetto all'asse veloce della lamina. Dato che la fase è  $\pi$ , allora

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t)\hat{z} \quad (3.6)$$

Nel caso di una polarizzazione circolare sinistra  $\sigma^+$ :

$$\overrightarrow{E_{out}} = E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z}$$

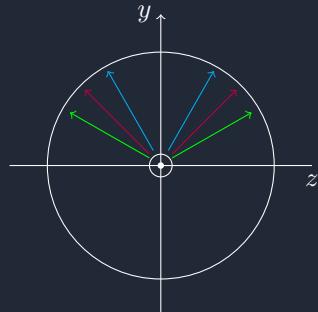
Aggiungendo ora il termine di fase anche per l'asse lento, allora si può scrivere

$$\overrightarrow{E_{out}} = E_0 \cos(kx - \omega t + \frac{\pi}{2})\hat{y} + E_0 \cos(kx - \omega t + \pi)\hat{z}$$

Sottraggo ora un termine  $-\pi$  rispetto ad entrambi i termini e quindi

$$\overrightarrow{E_{out}}(x', t) = E_{0y} \cos(kx' - \omega t - \frac{\pi}{2})\hat{y} - E_{0z} \cos(kx' - \omega t)\hat{z}$$

Figura 3.10:



### 3.6.2 La lamina $\frac{\lambda}{4}$

La lamina di ritardo  $\frac{\lambda}{4}$  è molto simile a quella di  $\frac{\lambda}{2}$  anche se causa un ritardo che è la metà, ossia produce un ritardo di fase

$$kd(n_z - n_y) = \frac{\pi}{2}$$

La differenza dei cammini ottici è allora  $\frac{\lambda}{4}$

### 3.6.3 Polarizzazione nei due casi

In generale la polarizzazione sarà ellittica, l'unico caso semplice però è quello in cui la polarizzazione lineare incidente ha le due componenti  $E_{0y} = E_{0z}$ . In questo caso semplice, la polarizzazione lineare incidente sarebbe lungo l'asse a  $\frac{\pi}{4}$  rispetto agli assi  $y, z$  solamente se il mio campo elettrico è allineato alla bisettrice del primo quadrante.

E' possibile verificare che, se ho una polarizzazione ellittica, scegliendo un angolo opportuno in una lamina  $\frac{\lambda}{4}$  posso ottenere una polarizzazione lineare e agire sulla spianatura dell'ellisse. Poi con una  $\frac{\lambda}{2}$  posso ottenere una polarizzazione lineare rispetto all'asse preferito.

### 3.6.4 Cosa succede se si utilizza una lamina progettata per una data lunghezza d'onda con un'altra lunghezza d'onda

La mia lamina è stata progettata in modo tale che

$$kd(n_z - n_y) = \pi + 2i\pi \quad i \in \mathbb{N}$$

Supponendo che vogliamo utilizzare luce con  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$  e supponendo che non ci sia tanta differenza tra i due indici di rifrazione, allora voglio determinare il ritardo di fase  $\phi'$ :

$$\phi' = k'd(n_z - n_y) = \frac{2\pi}{\lambda'} d(n_z - n_y) = \frac{2\pi}{\lambda + \Delta\lambda} d(n_z - n_y)$$

Se la variazione d'onda ora è molto piccola, posso dire che il termine al denominatore è sviluppabile con Taylor:

$$\phi' = \frac{2\pi}{\lambda} d(n_z - n_y) \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Allora posso riscrivere

$$(\pi + 2i\pi) \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)$$

Si possono allora considerare i seguenti casi

- Se  $i = 0$  prendono il nome di zero order: sono molto sensibili e costano molto ma si adattano a tutte le lunghezze d'onda;
- $i \gg 0$  prendono il nome di **multiple order** e sono economiche ma non funzionano con tutte le lunghezze d'onda ma solo per piccole variazioni

# Capitolo 4

## Aberrazioni e interferenze

### 4.1 Aberrazioni delle lamine in condizioni non ideali

Quando si opera con delle lamine  $\frac{\lambda}{4}$  e  $\frac{\lambda}{2}$  che non hanno ritardi di fase ideali, ossia quando la polarizzazione non è lineare oppure si è in condizioni di umidità e temperatura che differiscono da quelle specificate dal costruttore, si introducono inevitabilmente delle aberrazioni. Si è detto, fino ad ora, che esistono degli assi relativi ai cubi paralleli e degli assi ortogonali relativi alla lamina. Si potrebbe avere che la mia lamina di ritardo ha gli assi lenti e veloci inclinati di un certo angolo  $\theta$  rispetto agli assi paralleli al polarizzatore. Per poter analizzare questa situazione, si ricorda l'espressione dei complessi in forma esponenziale

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ricordando ora l'espressione del campo elettrico:

$$\vec{E} = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \hat{k} + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \hat{y}$$

Utilizzando i complessi posso esprimere il campo elettrico come una componente lungo l'asse reale e l'altra lungo l'asse degli immaginari. Mi ricordo però di prendere solamente la parte reale di questa espressione e dunque:

$$\vec{E} = \operatorname{Re} \left( E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \hat{z} + E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \hat{y} \right)$$

Posso pensare di avere una matrice  $2 \times 1$  ed esprimere il campo in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix}$$

Allora lungo gli assi  $a, b$ , che sono orientati di un certo  $\theta$  rispetto agli assi paralleli ed ortogonali, si esprime il campo elettrico come:

$$\vec{E}_{a,b} = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \phi_z) (\cos \theta \hat{a} - \sin \theta \hat{b}) + E_{0y} \cos(kx - \omega t + \phi_y) (\sin \theta \hat{a} + \cos \theta \hat{b})$$

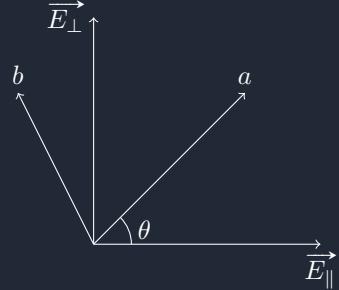
Questa espressione si può allora riscrivere come le coordinate del campo rispetto ai versori  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ . Posso dunque pensare a questa espressione come il prodotto tra una matrice due per due e il vettore del campo elettrico nelle sue componenti:

$$\operatorname{Re} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La matrice a sinistra prende il nome di matrice delle rotazioni in funzione dell'angolo  $\theta$ , questa matrice permette di ottenere l'espressione di un vettore rispetto a degli assi ruotati di un certo angolo  $\theta$ , e si indica con  $R(\theta)$ . La matrice che serve per tornare agli assi di partenza è la matrice inversa (ossia quella coi segni invertiti per il seno). Adesso, data l'espressione del campo elettrico generico rispetto alla base  $\hat{a}, \hat{b}$

$$\vec{E}_{a,b} E_{0a} \cos(kx - \omega t + \phi_a) \hat{a} + R_{0b} \cos(kx - \omega t + \phi_b) \hat{b}$$

Figura 4.1: Scomposizione del campo elettrico



Posso esprimere attraverso i numeri complessi nel vettore

$$Re \begin{pmatrix} E_{0a} e^{i(kx - \omega t + \phi_a)} \\ E_{0b} e^{i(kx - \omega t + \phi_b)} \end{pmatrix}$$

Posso introdurre sull'asse lento un ritardo di fase. Per cui il campo elettrico uscente è dato dal campo rispetto al versore  $\hat{b}$  e dal campo rispetto al versore  $\hat{a}$  con un ritardo di fase:

$$\overrightarrow{E_{a,b}^{OUT}} = E_{0a} \cos(kx - \omega t + \phi_a + \delta\phi) \hat{a} + E_{0b} \cos(kx - \omega t + \phi_b) \hat{b}$$

Partendo dal vettore di ingresso nella lamina, posso ottenere l'espressione del campo in uscita attraverso il prodotto tra matrici come

$$Re \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0a} e^{i(kx - \omega t + \phi_a)} \\ E_{0b} e^{i(kx - \omega t + \phi_b)} \end{pmatrix}$$

Analogamente a quanto detto prima, se si volesse ottenere il campo elettrico in entrata a partire dal campo elettrico in uscita, si può applicare la matrice inversa. Si riassume che l'espressione del campo elettrico in uscita da una lamina, che è entrato con un certo angolo, ha espressione

$$\overrightarrow{E_{a,b}^{OUT}} = Re \left( R(-\theta) \begin{pmatrix} e^{\delta\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R(\theta) \begin{pmatrix} E_{0z} e^{i(kx - \omega t + \phi_z)} \\ E_{0y} e^{i(kx - \omega t + \phi_y)} \end{pmatrix} \right) \quad (4.2)$$

## 4.2 Interferenza

L'Interferenza si verifica quando sono presenti due o più campi elettromagnetici con fasi differenti. Di fatto, quando si sommano i campi elettromagnetici si utilizzano le formule di prostaferesi per il coseno:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \quad (4.3)$$

Dato che ci sono molte variabili per cui i campi potrebbero differire, possiamo partire dall'analisi del caso semplice in cui solamente la fase differisce per i due campi elettrici.

### 4.2.1 Interferenza semplice

Il caso semplice di Interferenza si ha quando i due campi elettromagnetici hanno la stessa direzione di propagazione e quindi stessa frequenza (o pulsazione); inoltre, per rimanere nel caso semplice, hanno anche stessa polarizzazione e stessa ampiezza. L'unica differenza è la fase differente.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E_1} &= E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_1) \hat{y} \\ \overrightarrow{E_2} &= E_0 \cos(kx - \omega t + \phi_2) \hat{y} \end{aligned}$$

Posso ottenere allora il campo elettrico totale come la somma tra i due contributi secondo la formula di prostaferesi:

$$\overrightarrow{E_{TOT}} = 2E_0 \cos \left( kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Il totale dell'intensità mediata nel tempo, si ottiene come

$$\langle I_{TOT} \rangle = c\epsilon_0 \left\langle \overrightarrow{E}_{TOT} \right\rangle = c\epsilon_0 \frac{1}{T} \int_0^T 4E_0^2 \cos^2 \left( kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cos^2 \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) dt \quad (4.4)$$

Ossia la media temporale dell'integrale del campo elettrico mi dà l'intensità totale media in un certo intervallo di tempo  $\Delta T = T$ . Questo mi permette allora di esprimere l'intensità delle due onde come l'intensità di una unica onda "somma".

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Quando  $\phi_1 = \phi_2$  allora c'è un istante in cui l'intensità è molto maggiore dell'intensità generata dalla semplice somma delle onde, mentre c'è un istante in cui si "distrugge" l'energia delle due onde, ossia quando  $\phi_1 = \pi + \phi_2$ . Si riassume con

- Se  $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n$ : le onde sono in **fase**, e si ha interferenza costruttiva;
- Se  $\phi_1 - \phi_2 = 2\pi n + \pi$ : le onde sono in **controfase** e si ha interferenza distruttiva.

### 4.2.2 Oscillazione con polarizzazioni diverse

In questo caso l'ampiezza e la direzione dei campi elettrici non sono mai gli stessi per le due onde. Supponiamo ancora che abbiano lo stesso  $\hat{k}$  ma i due hanno polarizzazioni lineari diverse.

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{01} \cos(kx - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_{02} \cos(kx - \omega t + \phi_2)\end{aligned}$$

Si può ora scrivere il campo elettrico totale e poi si va a farne il modulo al quadrato per determinarne l'intensità. Dato che i due campi adesso hanno stessa ampiezza e direzione ma con polarizzazioni diverse, posso determinare la somma totale del vettore campo elettrico come il modulo

$$|\vec{E}_{TOT}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

Questo deve essere equivalente alla seguente espressione, ossia il modulo del vettore campo elettrico totale:

$$|\vec{E}_{01}|^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_1) + |\vec{E}_{02}|^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_2) + 2\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos(kx - \omega t + \phi_1) \cdot \cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

Il terzo termine si può pensare come il prodotto scalare tra i due vettori che compongono il campo elettrico:

$$|\vec{E}_{01}| \cdot |\vec{E}_{02}| \cos \alpha$$

Dove  $\alpha$  è l'angolo compreso tra i due vettori del campo elettrico come nel disegno. Con le formule di prostaferesi inverse posso esprimere il coseno che moltiplica il terzo termine in funzione di angoli generici  $\beta$  e  $\gamma$  (gli argomenti dei due coseni):

$$\cos \beta \cdot \cos \gamma = \frac{1}{2} (\cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma))$$

Allora il terzo termine del modulo del campo totale è esprimibile come:

$$2 |\vec{E}_{01}| \cdot |\vec{E}_{02}| \cos \alpha + \frac{1}{2} (\cos(2kx - \omega t + \phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$$

Si può esprimere allora l'intensità totale del campo elettrico come la somma delle intensità delle due onde più l'intensità dovuta al terzo termine dell'espressione del modulo totale (Ossia l'espressione di prima).

$$\langle I_{TOT} \rangle = I_1 + I_2 + c\epsilon_0 \frac{2 |\vec{E}_{01}| |\vec{E}_{02}| \cos \alpha}{2} \cdot \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

L'intensità  $I_1$  ( $I_2$  è analoga) si esprime come:

$$I_1 = c\epsilon_0 \cdot \frac{|\vec{E}_{01}|^2}{2} \implies \sqrt{I_1} = \sqrt{c\epsilon_0} \frac{|\vec{E}_{01}|}{\sqrt{2}}$$

Che posso sostituire nell'espressione dell'intensità totale al terzo termine:

$$\langle I_{TOT} \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1} \sqrt{I_2} \cos \alpha \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

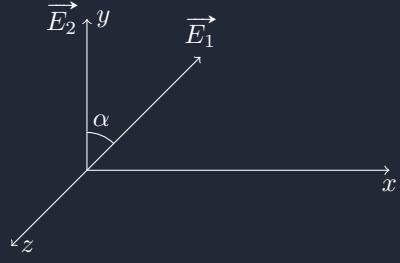
Il terzo termine dell'intensità totale è chiamato **termine di interferenza**. Questo termine determina se c'è interferenza oppure no.

- Se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ : non c'è alcuna Interferenza poiché le polarizzazioni sono perpendicolari tra di loro.
- Se  $I_1 = I_2$ , allora si ritrova il caso trattato nel paragrafo precedente:

$$I_{TOT} = 2I_0(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)) \implies 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

- Se  $\alpha = 0$ : si ha il caso con Interferenza trattato ora.

Figura 4.2: Campo elettrico lungo gli assi  $y$  e  $z$



### 4.3 L'onda stazionaria

L'onda stazionaria si ottiene nel caso in cui si ha interferenza di vettori d'onda delle due onde elettromagnetiche che interferiscono tali che  $\vec{k}_1$  e  $\vec{k}_2$  non sono più paralleli: si ottiene un'onda stazionaria.

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \hat{y} \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) \\ \vec{E}_2 &= E_0 \hat{y} \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2)\end{aligned}$$

Nel caso del modulo totale del campo elettrico:

$$|\vec{E}_{TOT}| = E_0^2 \left( \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_1) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_2) \right)^2$$

Applico nuovamente le formule di prostaferesi al contrario ottenendo

$$4E_0^2 \left( \cos^2 \left( \frac{(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) \cdot \cos^2 \left( \frac{(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}{2} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right)$$

C'è una parte del campo che ha dipendenza temporale ed un apart del campo che non ha dipendenza temporale. Quando calcolo l'intensità totale mediata nel tempo allora la parte che dipende dal tempo è mediata, l'altra è costante:

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4c\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2} \cos^2 \left( \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} \cdot \vec{r} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_2}{2} \cdot \vec{r} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Si trova allora che l'intensità dipende dalla posizione in cui si posiziona il rilevatore: l'intensità è diventata funzione della posizione e non dipende dal tempo (dunque è una onda stazionaria). Potrei esprimere questa espressione attraverso il vettore differenza  $\vec{\Delta k}$  tra i vettori d'onda delle due onde:

$$\langle I_{TOT} \rangle = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{|\vec{\Delta k}|}{2} \cdot x + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right)$$

Posso esprimere allora il prodotto del vettore d'onda come  $\delta x$ , ossia la periodicità spaziale dell'onda stazionaria. Se si considera  $\theta$  l'angolo tra i due vettori d'onda, allora il vettore dentro il coseno è esattamente:

$$|\vec{k}| \sin \frac{\theta}{2} \cdot \delta x = \pi$$

Allora, ricordando il modulo di  $\vec{k}$ , posso esprimere

$$\frac{2}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2} \delta x = 1$$

Dunque possiamo scegliere  $\delta x$  in modo arbitrario

$$\delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \quad \theta \ll 1 \implies \delta x = \frac{\lambda}{\theta}$$

Se l'angolo tra le due onde è molto piccolo, allora si può approssimare con l'argomento e dunque la lunghezza d'onda si amplifica. Dato che l'onda stazionaria ha una lunghezza d'onda

$$\delta x = \frac{\lambda}{2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right)}$$

A sinistra dell'interfaccia le interferenze dell'onda in ingresso e quella in uscita generano un onda complessiva che è ferma nello spazio ma oscilla nel tempo che prende proprio il nome di onda stazionaria. Questa onda ha sempre dei punti in cui il campo elettrico è totalmente nullo e dunque l'intensità media viene diversa da zero.

Figura 4.3: Onda stazionaria

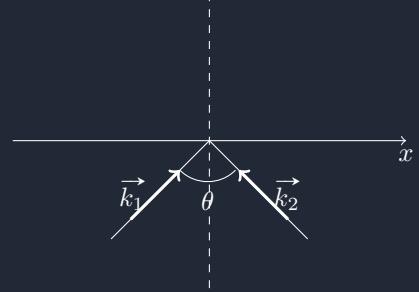
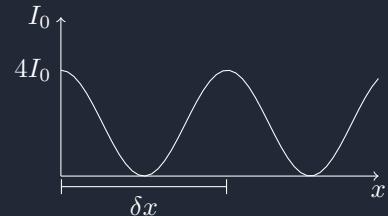


Figura 4.4: Grafico interferenza dell'altra volta



## 4.4 Interferometro di Machelson

L'**interferometro di Machelson** è l'interferometro che si utilizza durante l'esperienza dell'interferenza. Una prima onda piana è inviata su di un componente ottico, ossia il **separatore di fascio**, che è un componente che ha un substrato di materiale dielettrico su una delle sue superfici: il materiale dielettrico ha la caratteristica per cui la luce ha il 50% di probabilità di essere riflessa o trasmessa.

Il fascio riflesso compie un cammino  $L_1$  prima di incontrare uno specchio e venire riflesso e torna nuovamente sul separatore. Il fascio che inizialmente era stato trasmesso procede per un cammino  $L_2$  fino ad un nuovo specchio e poi torna indietro. Questo interferometro mi permette di ottenere da un solo fascio di luce ben 4 fasci di luce distinti.

Sotto all'interferometro è posto un rilevatore per determinare l'interferenza tra le due onde che giungono al rilevatore stesso.

Dato che il campo elettrico va come il quadrato mediato nel tempo, ogni volta che il fascio attraversa l'interferometro (da sinistra verso destra) il suo campo elettrico diventa  $E_r = -\frac{E_0}{\sqrt{2}}$  per il fascio riflesso (che accumula un ritardo di fase di  $\pi$ ) mentre per la parte trasmessa  $E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$  che non accumula ritardo di fase. Ogni interferometro è tarato per trasmettere o riflettere una certa percentuale del campo elettrico in entrata. Se invece propagassi il fascio di luce da destra verso sinistra si ha che sia la parte riflessa, che quella trasmessa, hanno il campo elettrico

$$E_r = E_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

La definizione di destra o sinistra dipende da dove è messo il materiale dielettrico prima del substrato di vetro. Questa tipologia di interferometro è utilizzato all'interno dei rilevatori di onde gravitazionali; è anche uno degli strumenti più sensibili mai costruiti dall'uomo. A partire dal campo elettrico posso determinare il primo contributo che va verso il rivelatore

$$E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

L'onda inizialmente riflessa avrà come espressione del campo elettrico

$$-\frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

Dato che alla fine si formano quattro fasci, il fascio che inizialmente è stato riflesso e poi trasmesso avrà come modulo del campo elettrico

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \pi + 2kL_1 + \pi)$$

Il primo  $\pi$  è dovuto al ritardo di fase dovuto alla riflessione dell'interferometro, mentre il termine  $2kL_1$  è il termine di ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio sopra all'interfaccia, ossia la distanza che percorre la luce prima di tornare all'interfaccia. Il termine  $\pi$  è dovuto invece al ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza  $L_1$ .

L'altro contributo è quello del fascio che prima è trasmesso e poi è riflesso allo specchio a distanza  $L_2$  e poi è riflesso sull'interfaccia. Posso quindi dire che il campo elettrico di quel fascio di luce che giunge sul rilevatore è

$$\frac{E_0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \pi + 2kL_2)$$

Qui abbiamo il termine  $\pi$  che è il ritardo di fase dovuto alla riflessione sullo specchio a distanza  $L_2$  e anche il contributo  $2kL_2$  dovuto alla distanza dall'interfaccia dello specchio. Per questo fascio di luce non c'è il termine  $\pi$  in quanto il fascio in riflessione non accumula ritardo di fase. A

Figura 4.5: L'interferometro di Machelson

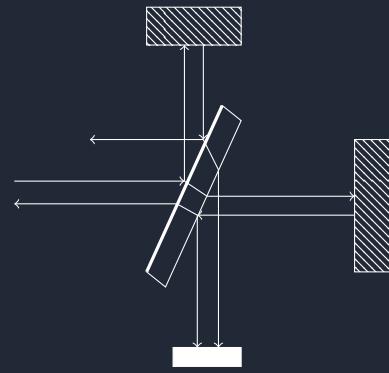


Figura 4.6: Fascio riflesso

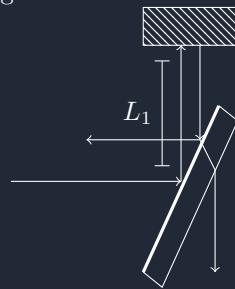
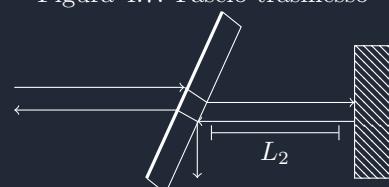


Figura 4.7: Fascio trasmesso



questo punto devo fare la somma dei campi elettrici complessivi in modo tale da poter ottenere il campo elettrico risultante al rilevatore:

$$\frac{E_0}{2} \left( \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + 2kL_2 + \pi) + \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + 2kL_1) \right)$$

Adesso posso applicare le formule di Prostaferesi per ottenere il campo elettrico totale come

$$E_{TOT} = \frac{E_0}{2} \cdot \left( 2 \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + k(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left( k(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Adesso posso ottenere il quadrato del campo elettrico e mediato nel tempo mi dà l'intensità del fascio luminoso medio:

$$\langle I_{TOT} \rangle = c\epsilon_0 \left\langle \left| \overrightarrow{E_{TOT}} \right|^2 \right\rangle = I_0 \cos^2 \left( k(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \sin^2(k(L_2 - L_1))$$

Si può ottenere ora una nuova espressione per l'intensità esplicitando  $k$ :

$$I_{TOT} = I_0 \sin^2 \left( \pi \frac{L_2 - L_1}{\frac{\lambda}{2}} \right)$$

Basta che cambi la differenza tra i cammini ottici di  $\frac{\lambda}{2}$  che il seno ha fatto una oscillazione completa. Basta dunque cambiare la distanza degli specchi di una lunghezza d'onda per poter accorgersi della variazione dell'intensità del campo elettrico.

#### 4.4.1 Lo specchio con la camera a vuoto

Supponendo di avere una impostazione simile, se lo specchio su cui deve riflettersi la luce è nel vuoto ed è lasciato cadere, la luce che torna indietro dai due specchi interferirà sul rilevatore. Si può esprimere lo spostamento dello specchio come

$$\Delta L(t) = L_1 - L_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + \cos t$$

Allora l'intensità dovrà anch'essa dipendere dal tempo, ottenendo la seguente espressione:

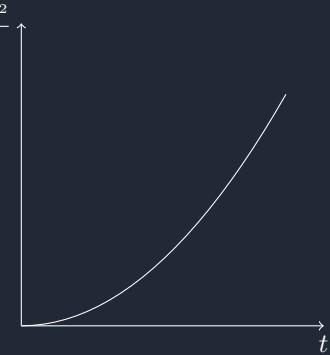
$$I(t) = I_0 \sin^2 \left( \pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda}{2}} \right) = \sin^2 \left( \pi \frac{gt^2}{\lambda} \right)$$

Immaginando di avere uno oscilloscopio al rilevatore, io mi aspetto che l'intensità possa sempre variare tra zero ed uno e man mano mi aspetto che il periodo di oscillazione avvenga sempre più velocemente. Questo vuol dire che il termine dentro al seno è tale per cui

$$\frac{gt_1^2}{\lambda} = 1 \quad \frac{gt_2^2}{\lambda} = 2, \quad \dots$$

Se volessi riportare tutti i  $t_i$  nei quali l'intensità del campo elettrico è zero, otterrei un andamento congruente con quello di una parabola che dipende esattamente da  $g$ .

Figura 4.8: Il grafico dei valori di  $t$



### 4.5 La realizzazione di uno spettrografo

#### 4.5.1 Due lunghezze d'onda

Supponendo di mandare dentro all'interferometro di Michelson due fasci di luce con due lunghezze d'onda differenti, ci si aspetterebbe una lettura diversa al rilevatore. Quello che accade però è che il campo elettrico non subisce alcuna modifica in quanto i due fasci con lunghezze d'onda diverse non interferiscono tra di loro: infatti i loro campi elettrici totali sono esattamente:

$$E_{TOT_1} = \frac{E_{01}}{2} \cdot \left( 2 \cos \left( \vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + k_1(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left( k_1(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$E_{TOT_2} = \frac{E_{02}}{2} \cdot \left( 2 \cos \left( \vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + k_2(L_1 + L_2) + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left( k_2(L_2 - L_1) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Adesso mi interessa solamente della dipendenza temporale del campo elettrico. Dato che alcuni dei termini sono fissati, allora posso utilizzare una certa approssimazione per evidenziare questa dipendenza temporale ottenendo, rispettivamente, per i due campi totali:

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

Ottengo allora il seguente campo sul rilevatore:

$$E_{TOT} = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Il modulo del campo elettrico totale è dunque:

$$|\overrightarrow{E_{TOT}}|^2 = A_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) + A_2^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) + 2A_1 A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Il terzo termine è esattamente l'interferenza tra le due lunghezze d'onda nel tempo. Posso ora dimostrare che quel terzo termine mediato nel tempo è nullo: infatti posso, da prodotto, trasformarlo in una somma di coseni attraverso la formula di Prostaferesi:

$$\cos(\omega_1 t + \phi_1) \cos(\omega_2 t + \phi_2) = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2} \right) + \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \right) \right)$$

Mediando ora temporalmente questa espressione, si osserva che è zero. Adesso l'intensità totale del campo mediata nel tempo sarà

$$I_{TOT}(t) = I_1 \sin^2 \left( \pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_1}{2}} \right) + I_2 \sin^2 \left( \pi \frac{\Delta L(t)}{\frac{\lambda_2}{2}} \right)$$

## 4.6 Sommare due lunghezze d'onda diverse

Se i due fasci in ingresso sono di lunghezze d'onde diverse, si è già detto l'intensità totale come è ottenuta. Se le intensità sono equivalenti per entrambi i fasci di luce, allora posso esprimere le intensità come

$$I_1 = I_2 = I_0$$

Sfruttando le formule di Prostaferesi e le considerazioni trigonometriche sul seno quadro per cui  $\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(\alpha)}{2}$ , posso esprimere l'intensità totale dei due fasci luminosi come

$$I_0 (1 - \cos((k_1 + k_2)\Delta L) \cdot \cos((k_1 - k_2)\Delta L))$$

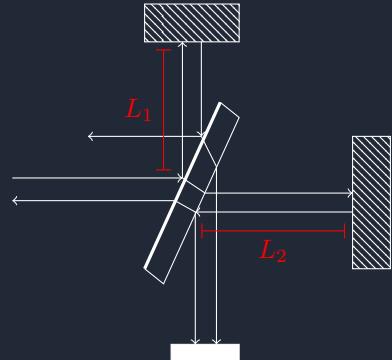
Il primo contributo del coseno rappresenta l'oscillazione più lunga mentre il secondo è una oscillazione più corta (spazialmente) per cui la variazione di lunghezza d'onda  $\delta l$  per entrambi i fasci sono:

$$\begin{aligned} \delta l_1 &= \frac{2\pi}{k_1 + k_2} \\ \delta l_2 &= \frac{2\pi}{k_1 - k_2} \end{aligned}$$

L'ampiezza del secondo termine determina la modulazione dell'onda che introduce una dipendenza spaziale all'oscillazione delle onde. Tramite l'interferometro e spostando gli specchi di un certo  $\Delta L$ , la luce in ingresso nell'interferometro risulta modulata.

### 4.6.1 Lo spettro continuo

Figura 4.9: L'interferometro di Machelson



Nel caso in cui si utilizzi una sorgente luminosa di luce bianca: questa conterrà tutte le lunghezze d'onda del visibile in maniera continua. Si può ora andare ad analizzare cosa accade nell'interferometro al variare di  $\Delta L$ . La luce emessa da un led bianco è centrato intorno ad un valore di  $\omega_0$  e  $\lambda_0$ : con una certa distribuzione dell'intensità luminosa, io so che

$$\omega_0 = ck_0 \implies \omega_0 = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Dato che il led è costruito in modo tale che sia visibile all'occhio umano, io posso fare in modo che il  $\Delta\lambda$  sia circa uguale a  $150\text{nm}$  per poter stare nel visibile. Per trovare il corrispettivo intervallo in termini di  $\omega$  posso dire che, dato che esiste una relazione lineare tra  $\omega$  e  $\lambda$ ,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Conosciuto  $\Delta\lambda$ , allora è possibile trovare  $\Delta\omega$ , ossia l'intervallo della pulsazione della luce. Il  $\Delta\lambda$  e  $\Delta\omega$  sono delle stime qualitative della distanza del centro della distribuzione gaussiana della lunghezza d'onda dal punto di metà altezza. Con queste considerazioni posso determinare l'intensità luminosa che riceve il rilevatore in funzione dello scostamento delle distanze dei due specchi  $\Delta L$  in maniera discreta:

$$I(\Delta L) = \sum I_i \sin^2(k_i \Delta L)$$

Posso allora passare al caso continuo attraverso l'integrale nella seguente maniera:

$$I(\Delta L) = \int I(\omega) \Delta\omega \sin^2(k_\omega \Delta L) = \int I(\omega) \sin^2\left(\frac{\omega}{c} \Delta L\right) d\omega$$

Il led che si ha non ha necessariamente una distribuzione gaussiana delle lunghezze d'onda centrate intorno ad un certo  $\lambda_0$  ma supponiamo che lo sia entro certe approssimazioni. Posso allora cercare di risolvere l'integrale della funzione dell'intensità luminosa secondo la distribuzione Gaussiana:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{\pi} \Delta\omega} \exp\left(-\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}\right)^2$$

Di conseguenza la risoluzione dell'integrale di  $I(\Delta L)$  è:

$$\frac{I_0}{2} \left( 1 - \exp\left(-\frac{(\Delta L \Delta\omega)^2}{c}\right) \cos\left(\frac{2\Delta L \omega_0}{2}\right) \right)$$

Da questo di può vedere cosa succede quando  $\Delta L \rightarrow 0$ :

$$\frac{I_0}{2} \left( 1 - \cos\left(\frac{2\Delta L \omega_0}{2}\right) \right) \implies \frac{I_0}{2} \sin^2(k_0 \Delta L)$$

Per  $\Delta L$  molto piccoli allora i fasci luminosi oscillano normalmente mentre per  $\Delta L$  non piccoli invece c'è da considerare anche il termine esponenziale. Il coefficiente  $\frac{I_0}{\sqrt{\pi} \Delta\omega}$  è tale per cui si ottiene

$$\int I(\omega) d\omega = I_0$$

Posso determinare il valore minimo di  $\Delta L$  tale per cui io posso osservare l'oscillazione dell'intensità luminosa. Questa lunghezza è detta **lunghezza di coerenza**, e si indica con  $L_c$  e si definisce come l'ampiezza di oscillazione tale per cui il termine  $L_c$  è tale per cui l'esponente della  $e$  diventa 1, ossia

$$\frac{L_c \cdot \Delta\omega}{c} = 1$$

Si ha quindi

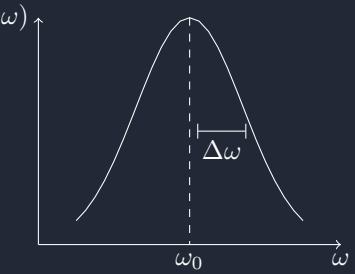
$$L_c = \frac{c}{\Delta\omega} \implies L_c = \frac{c}{\omega_0} \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \quad (4.5)$$

Ho sostituito  $\Delta\omega$  in funzione di  $\lambda_0$  e inoltre posso esprimere anche  $\omega_0$  in funzione di  $\lambda_0$  come  $\omega_0 = c \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . Dunque

$$L_c = \frac{\lambda_0^2}{2\pi \cdot \Delta\lambda} \quad (4.6)$$

Si scopre, facendo i conti, che per un led che emette luce bianca nel visibile, la lunghezza di coerenza è di  $400\text{ nm}$ . Se si vuole dunque vedere l'oscillazione della luce per un led a luce bianca bisogna utilizzare una lunghezza di coerenza di questa dimensione.

Figura 4.10: L'intensità luminosa in funzione della pulsazione



# Parte III

# Esperienze

# Capitolo 5

## Ottica Geometrica

### 5.1 Introduzione: obiettivi e finalità

L'esperienza dell'ottica geometrica è la verifica della legge delle lenti sottili e di una misura della focale di una lente convergente incognita. Ricordando la legge delle lenti sottili

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

Si eseguono seguenti procedure in laboratorio

1. Ogni sperimentatore misura  $f \pm \Delta f$  ad un valore diverso  $p$  (e di conseguenza di  $q$ );
2. Se tutte le misure sono consistenti entro le barre di errore, allora si sarà dimostrata la legge delle lenti sottili.
3. Determinare la migliore stima di  $f$  mediante la media pesata del valore di  $f$  trovato da ogni sperimentatore.

### 5.2 L'apparato sperimentale

L'apparato sperimentale consiste in un regolo lungo circa un metro e mezzo con precisione di un millimetro. Una lente è posta ad una certa distanza con una scala graduata (nonio) che mi permette di ottenere una precisione di posizionamento del decimo di millimetro. La sorgente è realizzata mediante un led che illumina una diapositiva in modo tale che il led giaccia esattamente sull'asse ottico rispetto alla lente e parallelo alla guida.

1. Per determinare la distanza della diapositiva dalla lente, devo fare in modo di creare una immagine virtuale utilizzando la lente convergente con  $f = 50 \text{ mm}$  nella configurazione  $2f - 2f$  (dove  $f$  è quella della lente conosciuta). La lente che si utilizza prende il nome di **lente di servizio** per cui:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2f}$$

Per cui  $d = 2f$ . L'incertezza associata a questa distanza non è fondamentale in quanto l'immagine nella sorgente virtuale si formerà (più o meno sfuocata) a prescindere dalla precisione.

Ad una certa distanza c'è un oculare che mi permette di osservare l'immagine ottenuta. Sull'oculare c'è un crocefisso che mi permette di osservare l'allineamento dell'immagine sull'oculare. Il fatto che si utilizza un oculare con una lente davanti

Figura 5.1:

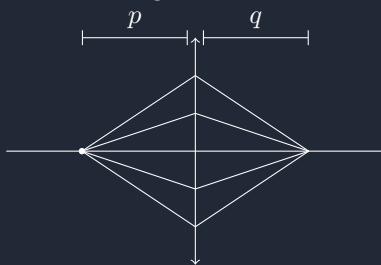


Figura 5.2: Rappresentazione apparato Lente di servizio e oculare-occhio

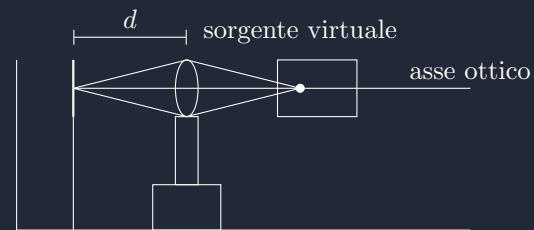
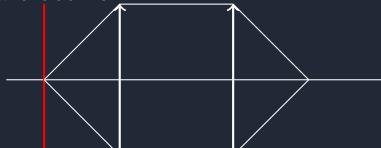


Figura 5.3: Schematizzazione del sistema oculare-occhio



(che è possibile ruotare con una ghiera), vuol dire che si utilizza l'occhio per osservare l'immagine. Si dispone l'oculare in modo tale che il crocefilo sia visibile e anche l'immagine (questo accade quando il mio occhio li vede nitidi entrambi) e in modo tale che l'immagine sia sovrapposta esattamente sul crocefilo. La schematizzazione oculare-occhio comprende il crocefilo con una lente associata ed il cristallino dell'occhio (che deve essere completamente rilassato in modo tale da avere il fuoco all'infinito). Nel disegno il tratto rosso è il crocefilo, le due lenti convergenti sono invece la lente prima dell'occhio e poi il cristallino.

Adesso posso spostare l'oculare dal punto dove si forma l'immagine virtuale e mettere una lente ad una certa distanza  $p$  dall'immagine virtuale ed una certa distanza  $q$  dall'oculare nuovo.

### 5.3 La soluzione di Gauss

Il problema principale con la configurazione in laboratorio è che il centro di formazione dell'immagine virtuale ha un certo offset rispetto allo zero del nonio: l'allineamento centro della lente - lettura del nonio introduce dunque un errore  $\epsilon$  per cui bisogna trovare un modo alternativo per poter misurare  $p$  e  $q$ . Gauss ha proposto una soluzione a questa problematica: se esistesse una configurazione per  $p$  e  $q$  per cui la legge delle lenti sottili è soddisfatta, allora esiste anche una configurazione simmetrica per cui:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} &= \frac{1}{f} \\ \frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} &= \frac{1}{f} \\ \implies p_1 = q_2 \wedge q_1 &= p_2 \end{aligned}$$

Ossia si invertono le distanze rispetto alla lente convergente considerata. Posso dunque pensare che se si disponesse la lente ad una certa distanza  $p_2 \neq p_1$ , si otterrebbe una situazione in cui la stessa sorgente  $S$  possa far formare la stessa immagine in  $I$ . Posso ora introdurre delle lunghezze (diverse da  $p$  e  $q$ , ma comunque loro funzione) che io conosco a priori e che sono definite come

1.  $s = p_1 + q_1 = p_2 + q_2$ : ossia la distanza tra la sorgente e l'immagine;
2.  $l = p_2 - p_1 = q_1 - q_2$ : ossia la distanza tra le due lenti nelle due differenti configurazioni.

Con queste definizioni e con la legge delle lenti sottili si ottiene un sistema per cui, conoscendo  $s$  e  $l$ , posso ottenere  $p_1$  e  $q_1$ :

$$\begin{cases} s = p_1 + q_1 \\ l = q_1 - p_1 \\ \frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \end{cases}$$

Dunque, risolvendo, si esprimono  $p_1$  e  $q_1$ :

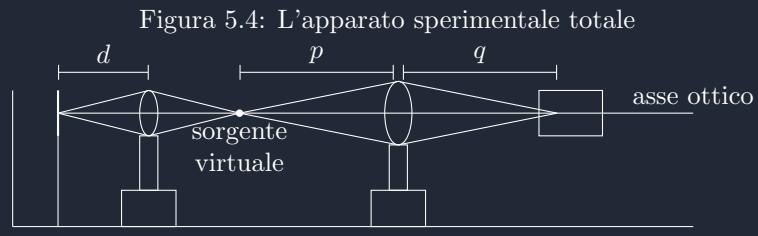
$$\begin{cases} q_1 = \frac{s+l}{2} \\ p_1 = \frac{s-l}{2} \end{cases}$$

Adesso possiamo sostituire queste nella legge delle lenti sottili:

$$\frac{1}{f} = \frac{2}{s-l} + \frac{2}{s+l} = \frac{4s}{s^2 - l^2} \implies f = \frac{s^2 - l^2}{4s}$$

Ossia l'espressione della focale della lente in funzione di soli  $s$  ed  $l$ .

### 5.4 Applicazione della soluzione di Gauss all'esperienza geometrica





Per poter trovare  $s$  e  $l$  per porci nelle condizioni della soluzione di Gauss,

- $I_1^N$  la posizione misurata con il nonio dell'oculare quando la sorgente virtuale coincide con il crocefilo dell'oculare: ossia quando per il nostro occhio è a fuoco. Ci possiamo immaginare che a causa della differente posizione tra il nonio ed il crocefilo ci sia un certo  $\epsilon$  di differenza tra le due posizioni.
- $I_1^V$  diventa la posizione vera della sorgente virtuale rispetto alla scala graduata della guida.

Dato che c'è questo offset rispetto alla formazione dell'immagine virtuale, da qualche parte dietro la lente ci sarà un  $I_2^V$  dove c'è la formazione dell'immagine vera. Quando l'immagine è a fuoco allora vuol dire che l'immagine vera si sta generando sul crocefilo.  $I_2^V$  è dunque l'immagine reale, ossia la posizione dell'immagine vera rispetto alla scala graduata, ovviamente in corrispondenza della  $I_2^N$  ci sarà la lettura del nonio che è chiamata come  $I_2^N$ , ossia la posizione misurata dal nonio dell'oculare quando l'immagine è a fuoco. Dunque posso dire che

$$s = I_2^V - I_1^V$$

E, per l'offset di  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} I_1^N &= I_1^V + \epsilon \\ I_2^N &= I_2^V + \epsilon \end{aligned}$$

Per ricavare le misure vere bisogna fare in modo da ottenere una espressione per  $\epsilon$  attraverso la distanza  $s$ :

$$s = (I_2^N - \epsilon) - (I_1^N - \epsilon)$$

Ho dunque legato la distanza tra due posizioni che non conosco, ma che sono traslate della medesima quantità; dunque, posso determinare la distanza come

$$s = I_2^N - I_1^N$$

Ossia semplicemente la distanza tra le due posizioni trovate dall'oculare. Bisogna ora trovare la distanza  $l$  e determinare se effettivamente esiste sempre questa distanza per la quale si ottiene la situazione simmetrica nella soluzione di Gauss. Dato un certo  $s$ , c'è una condizione matematica per la quale ci sono solamente certi valori di  $s$  per cui si osserva la formazione dell'immagine. Fissata la focale  $f$  e dato  $s$ , posso ora ricavare la distanza  $l$  in funzione delle altre due:

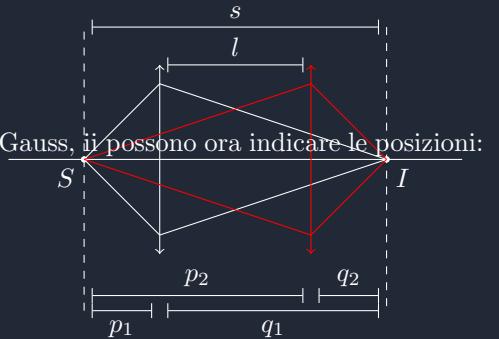
$$l^2 = s^2 - 4sf$$

In questo modo posso ottenere che se  $s^2 - 4sf \geq 0$ , allora  $l^2$  ha una soluzione. Posso allora risolvere la disequazione (considerando che  $s$  è positivo in quanto è una distanza):

$$s(s - 4f) \geq 0 \implies s \geq 4f$$

Dunque la formazione di questa situazione simmetrica è possibile solamente per questa condizione. Dire che  $s = 4f$ , equivale a porci nel caso limite in una configurazione  $2f - 2f$ . Si pone il nonio e la lente misurando la prima posizione e poi la seconda in modo tale che la sorgente virtuale e l'oculare siano fissati e si deve spostare le lenti per far sì che si veda sempre a fuoco l'immagine

Figura 5.5: Schematizzazione della soluzione di Gauss



### 5.4.1 Le lenti dell'esperienza

Si possono determinare le posizioni vere e misurate dal nonio delle lenti con un altro offset diverso

- $L_1^V$ : posizione vera della prima lente
- $L_1^N$ : posizione dello zero del nonio della prima lente
- $L_2^V$ : posizione vera della seconda lente
- $L_2^N$ : posizione dello zero del nonio della seconda lente

Penso allora chiamare  $\epsilon'$  l'incertezza tra le due misure e dunque posso ottenere la relazione

$$\begin{aligned} L_2^V &= L_2^N + \epsilon' \\ L_1^V &= L_1^N + \epsilon' \end{aligned}$$

Dunque posso ottenere la distanza tra le due lenti  $l$  con la stessa procedura che si è utilizzato per determinare  $s$ :

$$l = L_2^V - L_1^V = L_2^N - L_1^N$$

## 5.5 Presa delle misure

Ci sono due metodi di misura:

**Primo metodo** Scegliere la posizione per cui un osservatore vede a fuoco l'immagine e leggere il nonio (per cui ci sarà l'errore di sens del nonio); si sposta dunque l'oculare e ripete questa misura un certo numero di volte (almeno 5 misure) di  $I_1$ . Adesso posso ottenere media e scarto massimo per la posizione

$$I_1 = \bar{I}_1 \pm \Delta I_1$$

A questo punto posso posizionare l'oculare ad una posizione fissata rispetto alla guida (la sua incertezza è solo la sens del nonio). Si sceglie quindi  $I_2$  in modo tale che  $s \geq 4f$  e si ottiene la posizione

$$I_2 = I_2 \pm \Delta I_2$$

Dove la posizione è misurata una sola volta e l'incertezza è proprio la sensibilità del nonio. Adesso si misura  $L_1$  ossia la posizione per la quale si vede a fuoco l'immagine in  $I_2$  5/6/7 volte in modo che si ottenga

$$L_1 = \bar{L}_1 \pm \Delta L_1$$

E la stessa cosa faccio per la posizione della seconda lente

$$L_2 = \bar{L}_2 \pm \Delta L_2$$

Si determina ora  $s$  come

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{I}_2 - \bar{I}_1 & \Delta s &= \Delta I_1 + \Delta I_2 \\ &\implies s = \bar{s} + \Delta s \end{aligned}$$

E lo stesso si fa per  $l$ :

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \bar{L}_2 - \bar{L}_1 & \Delta l &= \Delta L_1 + \Delta L_2 \\ &\implies l = \bar{l} + \Delta l \end{aligned}$$

Adesso posso riprendere la formulazione che mi permette di trovare  $f$ :

$$f = \frac{s^2 - l^2}{4s}$$

Dunque per determinare  $\bar{f}$  posso determinare i valori  $\bar{l}$  e  $\bar{s}$  e sostituirli mentre per l'incertezza si fa la propagazione degli errori:

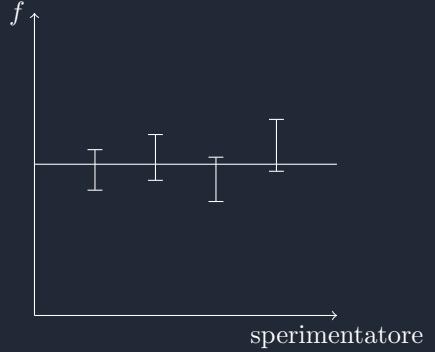
$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right| \Delta s + \left| \frac{\partial f}{\partial l} \right| \Delta l$$

E dunque si ottiene

$$\Delta f = \left| \frac{1}{4} + \frac{l^2}{4s^2} \right| \Delta s + \left| \frac{l}{2s} \right| \Delta l$$

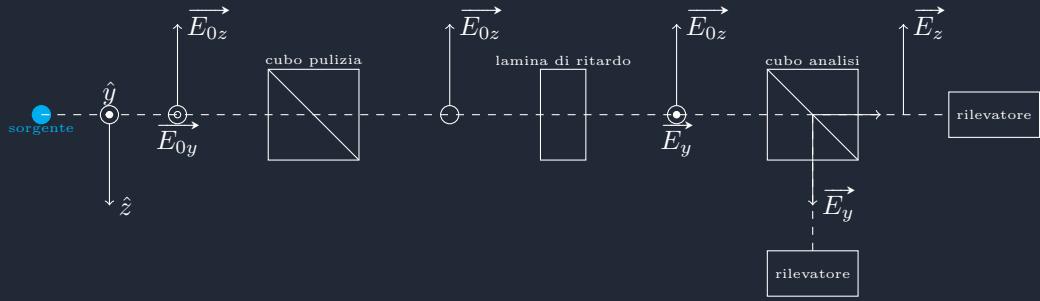
Bisogna anche assicurarsi che si riesca sempre a vedere l'immagine anche spostando indietro l'oculare perché in questo modo si è più suscettibili al cattivo allineamento dei componenti ottici: si verifica che l'asse ottico sia ben allineato prima di procedere con la determinazione delle altre misure di  $f_i$ . Ogni sperimentatore può ottenere il valore di  $f$  e della sua incertezza; si verifica dunque che tutte le misure di  $f$  siano consistenti tra di loro entro le rispettive barre di errore. Posso prendere la media pesata e confrontarla con le singole incertezze (dovrebbe essere minore).

Figura 5.6: Queste misure della focale sono consistenti tra di loro



# Capitolo 6

## Esperienza Polarizzazione



Si studiano le leggi di trasformazione della polarizzazione di una onda polarizzata linearmente che incide su di una lamina di ritardo con angolo generico tra polarizzazione incidente e gli assi della lamina.  $z$  e  $y$  sono gli assi del cubo polarizzatore mentre gli assi  $a$  e  $b$  sono gli assi della lamina rispettivamente dell'asse lento e di quello veloce. Il campo magnetico uscente dal cubo polarizzatore è dato da

$$\vec{E}_{tot} = (E_{0z} \cos^2 \theta(\psi + \delta\phi) + E_{0z} \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} + (E_{0z} \cos \theta \sin \theta \cos(\psi + \delta\phi) - E_{0z} \sin \theta \cos \psi \cos \theta) \hat{y}$$

Il fascio di luce passa dopo attraverso una lamina di ritardo e dunque il campo elettrico sarà modificato ed è possibile esprimere attraverso gli assi fast e slow come:

$$\vec{E}_{out} = E_{0z} \cos \theta \cos(\psi + \delta\phi) \hat{a} - E_{0z} \sin \theta \cos \psi \hat{b}$$

Dove

$$\hat{a} = \cos \theta \hat{z} + \sin \theta \hat{y} \quad \hat{b} = -\sin \theta \hat{z} + \cos \theta \hat{y}$$

### 6.0.1 Lamina $\frac{\lambda}{2}$

La prima lamina è una lamina  $\frac{\lambda}{2}$  e il suo  $\delta\phi = \pi$ , il campo elettrico totale uscente dalla lamina può essere espresso come

$$\vec{E}_{out} = E_{0z} (-\cos^2 \theta \cos \psi + \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} - 2E_{0z} \sin \theta \cos \theta \cos \psi \hat{y} = -E_{0z} \cos \psi (\cos 2\theta) \hat{z} - E_{0z} \sin 2\theta \cos \psi \hat{y}$$

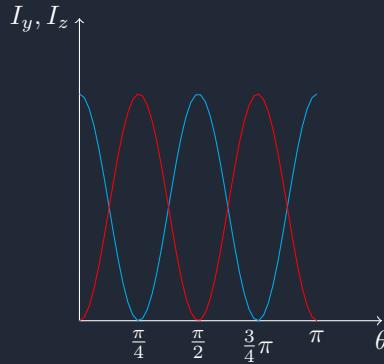
Allora l'intensità media rispetto all'asse  $z$  in uscita dalla lamina di ritardo sarà

$$I_z = c\epsilon_0 \langle E_z^2 \rangle = c\epsilon_0 \langle E_{0z}^2 \cos^2 \psi \rangle \cos^2 2\theta \quad (6.1)$$

Dove il termine  $c\epsilon_0 \langle E_{0z}^2 \cos^2 \psi \rangle$  indica l'intensità luminosa iniziale prima di attraversare la lamina di ritardo. Si può esprimere ora l'intensità luminosa della luce rispetto all'asse  $y$  e tracciarne il grafico (sia di  $I_y$  che di

$I_z$ ):

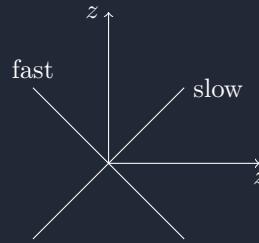
$$I_y = I_0 \sin^2 2\theta$$



Dove il tratto rosso corrisponde all'intensità sull'asse  $y$  ed il tratto ciano rappresenta l'intensità sull'asse  $z$ . La lamina ha un asse slow diretto lungo  $\hat{a}$  diretto lungo l'asse  $\hat{z}$ ; dunque rimane una polarizzazione lineare in quanto la lamina ritarda solamente l'oscillazione dell'onda. la prima lamina con  $\theta = 0$  non cambia la polarizzazione mentre una lamina con angolo  $\theta \neq 0$  lo fa.

### 6.0.2 Lamina $\frac{\lambda}{4}$

Mettendo la lamina a  $\frac{\pi}{4}$  rispetto alla posizione iniziale e non ho più luce polarizzata nel verso  $\hat{z}$  ma sarà tutta polarizzata verso  $\hat{y}$  dunque  $I_y$  ha un minimo.  $\delta\phi = \frac{\pi}{2}$ .



Il campo elettrico in uscita dalla lamina ha la seguente espressione (derivata dall'espressione all'inizio della sezione):

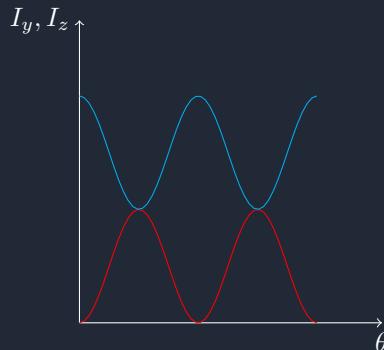
$$\vec{E}_{out} = E_{0z} (\cos^2 \theta (-\sin \psi) + \sin^2 \theta \cos \psi) \hat{z} + E_{0z} (-\sin \psi \cos \theta \sin \theta - \cos \psi \sin \theta \cos \theta) \hat{y}$$

Posso ottenere i moduli dei campi elettrici nelle due direzioni elevando al quadrato e poi, moltiplicando per  $\epsilon_0$  e  $c$  e mediando nel tempo si ha che

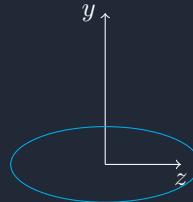
$$I_z = c\epsilon_0 \langle E_z^2 \rangle = c\epsilon_0 \langle E_0^2 (\sin^2 \psi \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \psi) \rangle = I_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \right)$$

$$I_y = \frac{I_0}{2} \sin^2(2\theta)$$

La lamina  $\frac{\lambda}{4}$  spancia l'ellisse che descrive il luogo dei punti che attraversano il campo elettrico.



Di conseguenza, lungo  $y$  non ho mai l'intensità riflessa dal mio cubo, al minimo ne ho la metà. Se la lamina introduce shift di fase lungo  $z$  non cambia la mia polarizzazione quindi lungo  $y$  ho zero luce e dunque avrò una polarizzazione ellittica.



## 6.1 Scopi e finalità

### 6.1.1 Il fit sinusoidale

Nella polarizzazione si deve validare le leggi della polarizzazione per le lenti  $\frac{\lambda}{4}$  e per le lenti  $\frac{\lambda}{2}$ . Si deve realizzare un fit (non lineare) di una funzione sinusoidale: per realizzarlo dobbiamo fare le seguenti assunzioni (così come per i fit lineari):

- l'incertezza  $\sigma$  sulla variabile aleatoria  $x$  sia trascurabile: questo vuol dire che si ha uno strumento che misura ole  $x$  con una precisione di diversi ordini di grandezza superiore delle  $y$ .
- La funzione  $g$ , ossia la funzione del fit, abbia una distribuzione gaussiana e con i vari  $\sigma_{y_i}$  costanti per tutte le misure  $\Rightarrow \sigma_{y_i} \approx \sigma_y$ .
- Devo minimizzare il  $\chi^2$ .

Nel nostro caso non posso applicare le regole del fit lineare ma posso supporre di avere una funzione generica ottenuta con dei certi valori sperimentali  $(x_i, y_i)$  dove i dati sono legati tra di loro mediante una determinata legge

$$f(a, b, c, \dots)$$

Tuttavia questa funzione non è completamente arbitraria ma è del tipo

$$f = a \cos^2(bx + \phi) + \text{offset}$$

Questa funzione sarà ovviamente una funzione dell'angolo  $x$  (ossia la rotazione della lamina) e descrive l'intensità luminosa del cubo in analisi in trasmissione e riflessione. Dunque posso determinare il  $\chi^2$  come

$$\chi^2 = \frac{\sum(y_i - f(a, b, \phi, \text{offset}, x))^2}{\sigma_y^2}$$

Posso ottenere la minimizzazione del  $\chi^2$  mediante l'utilizzo di un calcolatore e delle  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ . Inoltre è capace di ottenere anche le incertezze associate alle singole variabili.

### 6.1.2 Le lamine $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ nell'esperienza

Le lamine possono riflettere il campo elettrico lungo le due direzioni

$$\begin{aligned} E_z &= E_{z0} \cos(kx - \omega t + \phi_z) \\ E_y &= E_{y0} \cos(kx - \omega t + \phi_y) \end{aligned}$$

Con la lamina  $\frac{\lambda}{4}$  posso cambiare la spaciatura dell'ellisse che descrive la polarizzazione ellittica generica senza modificare la direzione degli assi: per quello si utilizza la  $\frac{\lambda}{2}$ .

Figura 6.1: La funzione generica

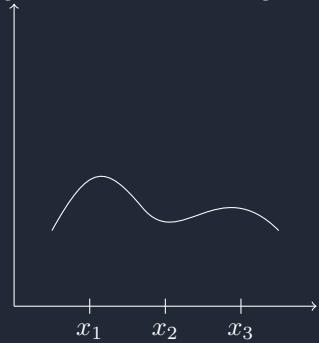
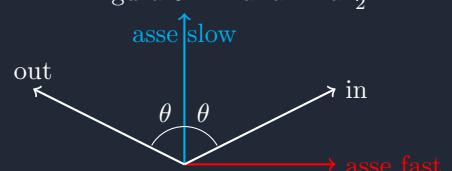
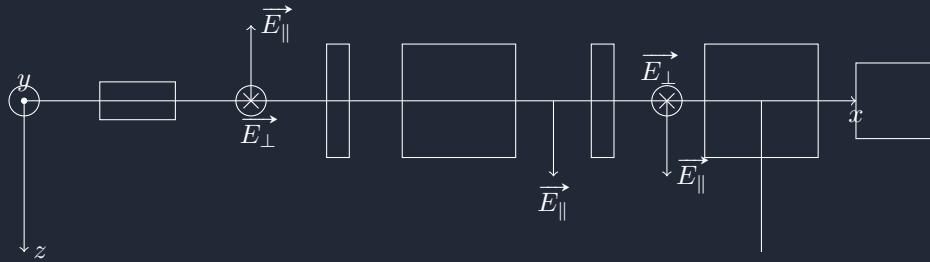


Figura 6.2: La lamina  $\frac{\lambda}{2}$



## 6.2 Apparato sperimentale

Si ha un tavolo con una breadboard: ossia un piano di alluminio con dei fori che permette di fissare gli strumenti ottici. La polarizzazione in uscita dal laser non la conosciamo e potrebbe aver qualsiasi tipo di polarizzazione ma si conosce la lunghezza d'onda che è di  $532\text{ nm}$ .



SI fa passare il campo attraverso un filtro variabile che permette di cambiare (variando il suo angolo di rotazione) l'intensità luminosa che passa. La luce passa poi attraverso un cubo di pulizia, che permette di filtrare il campo perpendicolare e di far passare solo il campo  $\vec{E}_{\parallel}$  che risulta avere verso contrario a quello di entrata.

Si utilizza un supporto con goniometro che permette di ruotare la lamina; dato che il laser passa dentro la lamina, posso fare in modo che l'asse slow e quello fast possano ruotare rispetto alla scala goniometrica. Questo componente ottico sta dopo il cubo di pulizia e permette di cambiare la polarizzazione in base all'angolo di rotazione  $\theta$ . Dopo si pone un altro cubo di pulizia che permette di filtrare nuovamente il campo perpendicolare (che prende il nome di cubo di analisi) e porre i due rilevatori.

## 6.3 Funzioni del fit

### 6.3.1 Calibrazione dei laser

Si presentano vari problemi nella raccolta dei dati sperimentali:

- Il rilevatore non è perfetto e dunque non riesce a misurare perfettamente tutta l'intensità;
- Il rilevatore ha una sensibilità diversa da quella dell'altro rilevatore
- I rilevatori sono sporchi oppure tarati male
- L'allineamento dell'apparato ottico non è perfetto

E' possibile ovviare alla calibrazione dei rilevatori sfruttando la lamina  $\frac{\lambda}{2}$ : dopo aver posizionato i rilevatori si ruota la lamina  $\frac{\lambda}{2}$  e si misura il valore massimo che si ottiene in ognuno dei rilevatori.

### 6.3.2 Lamina $\frac{\lambda}{2}$

Si può ora descrivere le leggi di Malus per i vari assi

$$I_{\parallel}(\theta) = I_0 \cos^2(2\theta)$$

$$I_{\perp}(\theta) = I_0 \sin^2(2\theta)$$

SI ottiene allora le seguenti condizioni



Facendo ora ruotare le polarizzazioni, si ottengono tanti dati sperimentali: in funzione dell'angolo si può allora disegnare il grafico della legge di Malus (circa 20 punti per gli angoli da zero a  $360^\circ$  equispaziati, ossia ogni  $\sim 20^\circ$ ) Mentre si collezionano i dati per l'intensità trasmessa, si collezionano anche i dati per l'intensità riflessa e si disegnerà anche il grafico attraverso quei punti. La funzione del fit sarà ora data da

$$f(a, b, \phi, \text{offset}, x) = a \cos^2(bx + \phi) + \text{offset}$$

Supponendo ora di avere questa funzione da farne il fit, dividendo  $I_{\parallel}(\theta)$  e  $I_{\perp}(\theta)$  per i loro valori massimi ci si aspetta che l'ampiezza dell'oscillazione del coseno e del seno sia  $\bar{a} \approx 1$ . Posso invece dire che  $\bar{b} \approx 2$  in quanto nella legge di Malus deve risultare  $2\theta$  e dove offset = 0. Tra la fase del coseno e del seno ci si aspetta una differenza di circa  $\approx \frac{\pi}{2}$ , e dunque, arbitrariamente, posso dire che  $\bar{\phi} \approx 0$ . Riassumendo

$$\bar{a} \approx 1 \quad \bar{b} \approx 2 \quad \bar{\phi} \approx 0 \quad \text{offset} \approx 0$$

Tuttavia in condizioni non ideali l'offset del laser non sarà zero ma sarà un valore molto piccolo da dover sottrarre a tutti i valori trovati in laboratorio. Si può ora vedere che

$$\cos^2(2\theta) = 1 - \sin^2(2\theta) = 1 - \cos^2(2\theta + \frac{\pi}{2})$$

Data questa legge, si osserva che si trova un altro set di valori con

$$\bar{a} \approx -1 \quad \bar{b} \approx 2 \quad \bar{\phi} \approx \frac{\pi}{2} \quad \text{offset} = 1$$

In questo caso si vede che  $\chi^2$  ha due minimi e permette di ottenere due funzioni dal programma di fit.

### 6.3.3 La lamina $\frac{\lambda}{4}$

Con la lamina  $\frac{\lambda}{4}$  si per la legge di Malus che

$$I_{\parallel} = I_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \right)$$

$$I_{\perp} = \frac{I_0}{2} (\sin^2(2\theta))$$

Dato che questa lamina mi permette di spiancare l'ellisse, se ruotassi la lamina di un certo angolo  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , il ritardo di fase è lungo una direzione dove il campo elettrico non oscilla neanche, allora la polarizzazione rimane tutta  $\vec{E}_{\parallel}$  e dunque tutta la potenza è trasmessa.



L'ellisse si spancia solamente quando  $\theta = \frac{\pi}{4}$ . Allora, la polarizzazione in uscita diventa circolare.

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad I_{\parallel} = \frac{I_0}{2} \quad I_{\perp} = \frac{I_0}{2}$$

Dato che la lamina  $\frac{\lambda}{2}$  permette di ruotare il campo di un certo angolo  $\theta$  e, quando la luce passa nuovamente all'interno della lamina viene riportata alla polarizzazione iniziale, tutta la luce che torna sul cubo analisi sarà totalmente riflessa. Invece, una  $\frac{\lambda}{4}$  attraversata due volte si comporta come una  $\frac{\lambda}{2}$ : l'effetto complessivo del doppio passaggio è una riflessione rispetto all'asse slow della lamina.

