Fisica

Tommaso Miliani

25-03-25

1 Altri esempi corpo rigido

1.1 Ruota su un piano inclinato

1.2 Asta in rotazione

Figura 1:

Adesso si verifica che l'equilibrio sia stabile o instabile: con la derivata seconda si ha:

$$Mg\frac{L}{2}\cos\alpha - \frac{2}{3}M\omega^2L^2\cos^2\alpha + \frac{1}{3}M\omega^2L^2$$

Figura 2:

Calcolata nelle soluzioni, allora si ha che:

$$\alpha = 0 : \begin{cases} > 0 & \omega^2 < \frac{3}{2}\frac{g}{L} \\ < 0 & \omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{L} \end{cases}$$

$$\alpha = \pi \text{ sempre instabile}$$

Nel caso limite in cui $\cos\alpha = \frac{3g}{2\omega^2L}$ si ha che la derivata seconda vale esattamente:

$$Mg\frac{L}{2}\frac{3g}{2\omega^2L} - \frac{2}{3}M\omega^2L^2\frac{9g^2}{4\omega^4L^2} + \frac{1}{3}M\omega^2L^2$$

E allora diventa:

$$\frac{3Mg^2}{4\omega^2} - \frac{2}{3}\frac{Mg^2}{\omega^2} + \frac{1}{3}M\omega^2L^2 = \frac{1}{3}M\omega^2L^2\left(1 - \frac{9}{4}\frac{g^2}{\omega^4L^2}\right)$$

Diventa stabile se e solo se:

$$\omega^2 > \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

1.3 La formula fondamentale per i punti del corpo rigido

Nel corpo rigido ogni corpo si muove con una certa velocità che ha 3 gradi di libertà per la velocità del centro e 3 gradi di libertà per la velocità angolare:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \omega \times (P - O)$$

Nel caso di moti traslatori

$$\vec{\omega} = 0, \qquad \vec{v}_P = \vec{v}_O$$

Il momento angolare allora è dato da:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{n}(P_i - \Omega) \times m_i\vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n}(P_i - \Omega) \times m_i\vec{v}_O = (C - \Omega) \times M\vec{v}_O$$

Nel caso del moto ROTOtraslatorio,

$$\vec{v}_O \neq 0, \quad \vec{\omega} \neq 0$$

Allora il momento angolare sarà:

$$\vec{L}_\Omega = \sum_{i=1}^{n} (P_i - \Omega) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - \Omega) \times \vec{v}_O + \sum_{i=1}^{n} m_i (P_i - \Omega) \times (\vec{\omega} \times (P_i - O))$$

Nel caso in cui il momento angolare sia applicato sull'origine del sistema di riferimento e che questo coincida esattamente con il centro del corpo rigido, allora si semplifica :

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} m_i (P_I - O) \times (\vec{\omega} \times (P_i - O))$$

Nel caso in cui $\vec{\omega}$ sia costante, allora essendo il suo versore costante, il momento si semplifica ulteriormente.

1.4 IL momento assiale

$$L_{\omega,O} = \vec{L}_O \cdot \hat{u}_\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \hat{u}_\omega (P_i - O) \times (\hat{u}_\omega \times (P_i - O))\omega \tag{1}$$

Con le regole del prodotto misto si ottiene:

$$L_{\omega,O} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \left| \hat{u}_\omega \times (P_i - O) \right|^2 \right) \omega$$

Posso allora esprimere la distanza dall'asse di rotazione di ogni punto come

$$|\hat{u}_\omega \times (P_i - O)| = d_i \tag{2}$$

Posso allora esprimere il momento di inerzia:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2 = \int d^2 dm \tag{3}$$

E quindi il momento di inerzia:

$$L_{\vec{\omega}} = I\omega$$

L'equazione cardinale si semplifica allora come:

$$\vec{M}_\Omega \cdot \hat{u}_\omega = I_{\hat{\omega}} \dot{\omega} \tag{4}$$

diventando il momento assiale delle forze.2