

Analisi II - Spazi Metrici e Normati

Marco Delton*

November 2025

1. Sia (X, d) spazio metrico. Sia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y \in X$

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Provare che (X, δ) è spazio metrico.

2. Sia $X = \mathbb{R}^2$. $\forall x, y \in X$ definiamo:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| & \text{se } x, y \text{ sono collineari in } \mathbb{R}^2 \\ |x| + |y| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Provare che d è una metrica su \mathbb{R}^2
 - Descrivere graficamente le palle di D
3. Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ t.c. $d(x, y) = \arctan(|x - y|) \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- Provare che (\mathbb{R}, d) è spazio metrico
 - Stabilire se è completo
4. Sia $X = C^0([0, 1])$. Sia $\|\cdot\|_{L^2} = (\int_0^1 |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$
Provare che $\|\cdot\|_{L^2}$ è una norma su X

Suggerimento: Usare la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

5. Sia $(\mathbb{R}, d_\varepsilon)$ spazio metrico. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$.
Provare o confutare tramite controesempi le seguenti affermazioni:
- $f(A)$ aperto $\implies A$ aperto
 - A aperto $\implies f(A)$ aperto
 - $f(A)$ chiuso $\implies A$ chiuso
 - A chiuso $\implies f(A)$ chiuso

*esercizi dei prof. *Gabriele Bianchi* e *Chiara Bianchini*

6. Sia $X = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- Provare che $\{x_n\}$ è di Cauchy in $(\mathbb{Q}, d_\varepsilon)$
- Dedurre che $(\mathbb{Q}, d_\varepsilon)$ non è uno spazio metrico completo

7. Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ n(x - \frac{1}{2}) & \text{se } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

- Provare che $\{f_n\}$ è di Cauchy in $(C^0([0, 1]), d_{L^1})$
con $d_{L^1} = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$
- Dedurre che $(C^0([0, 1]), d_{L^1})$ non è completo

8. Sia $X = (0, 1)$. Provare che $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ è una metrica su X

9. Sia $X = \mathbb{R}$. Quali delle seguenti funzioni sono metriche su X ?

- $d(x, y) = \begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$
- $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$
- $d(x, y) = |x - y| + |x^3 + y^3|$
- $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$