Appunti di Analisi (Bianchi)

Tommaso Miliani

09-12-25

1 Teorema di Stokes

Il teorema di Stokes esprime il flusso di campo lungo una superficie. Se F è definito in un intorno di una superficie orientata S e se N è una scelta del vettore normale a S, si esprime il flusso F come

$$F = \int_S < F, N > \ d\sigma$$

Se $\phi : D \to \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di S, allora se $\phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$$\int_D \langle F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \phi_U \wedge \phi_U \rangle = \int_D \langle F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \phi_U \wedge \phi_U \rangle \ dudv$$

Osservazione 1.1.
Se S è il grafico di una funzione $f(x,y)$, allora il vettore normale è dato da

$$N = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\left\|\sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\right\|}$$

Teorema 1.1.
Sia S una superficie orientabile di $\mathbb{R}^3$, e avente campo normale unitario N il cui bordo consiste di un numero finito di curve chiuse con orientazioni ereditate dall'orientazione di S. Se F è un campo vettoriale definito su un insieme aperto $\mathbb{A}$ che contiene S e C^2 e $\hat{t}$ è un versore tangente a il bordo di S, concorde al verso positivo, allora l'integrale

$$\int_S \langle rotF, N \rangle \ d\sigma = \int_{\partial S} \langle F, T \rangle \ dS$$

Dimostrazione. Dimostrazione solo del caso particolare nel quale S è il grafico di una funzione $z = f(x,y)$ con $(x,y) \in D$. Si suppone dunque che N punti verso l'alto (lungo $\hat{z}$). A ∂D corrisponde ∂S e a ll'orientazione positiva di ∂D corrisponde l'orientazione positiva di ∂S.

$$\int_D \langle rotF, N \rangle \ d\sigma$$

Ossia

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, f(x,y)) - \frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots) \right) \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(\dots) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(\dots) \right) \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots) - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \frac{\partial f}{\partial z} \ dxdy$$

Prendendo l'integrele lungo il verso positivo

$$\int_{\partial^+ S} \langle F \cdot T \rangle \ d\sigma$$

Supponiamo che $\partial^+ D$ consista ad una curva chiusa. Sia

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$$

Una parametrizzazione di $\partial^+ D$ coerente con l'orientazione positiva, allora una parametrizzazione di $\partial^+ S$ è proprio

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t))) \qquad t \in [a,b] \quad \dot{\tilde{\gamma}}(t) = \frac{d}{dt}\tilde{\gamma}(t) = \left(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \right)$$

Ossia

$$\int_a^b \left\langle F(x(t),y(t),f(x(t),y(t))), \left(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\frac{\partial f}{\partial x}(\dots)\dot{x}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)\dot{y}(t)\right)\right\rangle\ dt =$$
$$\int_a^b F_1(x,y,f(x,y))\dot{x}(t)+F_2(x,y,f(x,y))\dot{y}(t)+F_3(\dots)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\dots)\dot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right)\ dt$$

$$\int_{\partial^+ D}\left(F_1(x,y,f(x,y))+F_3(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)dx+\left(F_2(\dots)+F_3(\dots)\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)\right)dy$$

Le formule di Gauss Green mi dicono che tale integrale è

$$\int_D \frac{\partial}{\partial x}\left(F_2(x,y,f(x,y))+F_3(x,y,f(x,y))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}\left(F_1(x,y,f(x,y))+F_3(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)dxdy$$

Allora

$$\int_D\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)+\frac{\partial F_2}{\partial z}(\dots)+\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(\dots)+\frac{\partial F_3}{\partial z}(\dots)\frac{\partial f}{\partial x}(\dots)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(\dots)+F_3(\dots)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x,y)\right)$$
$$-\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+F_3(\dots)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)$$

Si può semplificare dunque l'integrale come

$$\int_D\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\left(\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial y}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dxdy$$

$\square$