Analisi

Tommaso Miliani

05-12-24

1 Integrali impropri

Supponendo che io abbia una funzione continua, il suo integrale è esattamenta l'area del sottografico: il che è ragionevolmente calcolabile. SI potrebbe però pensare in linea teorica sottoinsiemi del piano illimitati: ossia che non riesco a racchiudere in zone limitate di piano

$$f : [1, +\infty] \to R, f(x) = \frac{1}{x}$$

Posso considerarare il suo sottografico per cui $x \geq 1$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$. La domanda è questa: l'area è finita o infinita? Idealmente sto facendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx$$

Però non posso definirlo con Riemann poiché non posso fare partizioni finite per un intervallo infinito poiché altrimenti dovrei fare una somma con almeno una partizione di lunghezza infinita e questo perde di significato. Posso integrare fino ad un certo punto ed integrare fino a c con $c > 1$ e quindi so fare:

$$\int_1^{c} \frac{1}{x}\ dx$$

Posso fare ora il $\lim_{c\to\infty}$ quindi:

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x}\ dx.$$

Per cui diventa:

$$\int_1^{c} \frac{1}{x}\ dx = F(c) - F(1)$$
$$ossia\ \lim_{c\to\infty} \ln(c) - 0 = +\infty.$$

Con un'altro esempio si vede invece che l'integrale di una funzione che tende all'infinito non sempre ha un area infinita:

$$f : [1, \infty] \to R$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Il suo integrale associato diventa quindi:

$$\lim_{c\to\infty} \int_1^{c} \frac{1}{x^2}\ dx.$$

La mia primitiva è dunque $-\frac{1}{x}$ (è solo una delle primitive), in ogni caso diventa:

$$\int_1^{c} \frac{1}{x^2}\ dx = \lim_{c\to\infty} -\frac{1}{c} + \frac{1}{1} = 1.$$

Definizione 1.1 (Integrale improprio)**.** *Sia $a \in R$ e sia $f : [a, +\infty] \to R$ e supponiamo che f sia tale che sia integrabile in $[a, c]$ $\forall c > a$. Se esiste finito o infinito il limiti per $c \to \infty$ dell'int:*

$$\int_a^{c} f(x)\ dx \tag{1}$$

Allora $f(x)$ è integrabile in senso improprio nell'intervallo $[a, c]$ e si pone:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\ dx \tag{2}$$

Inoltre se il limite è finito allora l'integrale è convergente altrimenti divergente. Se invece il limite non esiste allora l'integrale è indeterminato.

Gli esercizi sugli integrali impropri solitamente chiedono di il carattere dell'integrale improprio. Un esempio è:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln^2(x)}\ dx$$

2 Carattere degli integrali impropri di funzioni con segno costante

Proposizione 2.0.1 (Carattere degli integrali impropri di funzioni con segno costante)**.** *Se $f : [a, +\infty] \to R$ è integrabile in $[a, c]$ $\forall c > a$ e $f(x) \geq 0$ $\forall xgeqa$ allora l'integrale di f(x) è ben definito ed esiste e può essere finito o infinito.*

Dimostrazione. La funzione che associa $c \to \int_a^c f(x)\ dx$ è costante e allora $c_1, c_2 > 0$ con $c_2 < c_1$ faccio:

$$\int_a^{c_2} - \int_a^{c_1} f(x)\ dx = \int_a^{c_1} f(x)\ dx + \int_a^{c_2} f(x)\ dx - \int_a^{c_1} f(x)\ dx$$

Quindi si ha che:

$$\int_a^{c_2} f(x)\ dx \geq \int_a^{c_1} f(x)\ dx \Rightarrow \int_{c_1}^{c_2} f(x)\ dx \geq 0.$$

□

La proposizione vale anche se $f(x) \leq 0$ in $[a, +\infty]$ ed in questo caso l'integrale improprio può essere un numero oppure divergere a $-\infty$. La situazione del tutto speculare è quella per $[-\infty, a]$. GLi integrali da $.\infty a + \infty$ è un integrale non ben definito poiché si potrebbe trovare valori diversi dell'integrale se si fa crescere più velocemente un interevallo rispetto all'altro.

Teorema 2.1. *Siano f, g due funzioni integrabili e tali che: $0 \leq f(x) \leq g(x)$: allora:*

$$\textit{Se} \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \textit{ converge} \tag{3}$$

$$\textit{Allora} \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \textit{ converge.} \tag{4}$$

Analogamente se

$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \textit{ diverge} \tag{5}$$

$$\textit{Allora} \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \textit{ diverge.} \tag{6}$$

Dimostrazione. Riprendendo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \ln^2(x)}\ dx$$

Voglio dimostrare che questo integrale converge, allora prendo : $\frac{1}{x^2}$ come $g(x)$ e quindi, dal momento che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx = 1$$

Allora anche il primo integrale converge poiché io ho imposto che $0 \leq f(x) \leq g(x)$. □