

# Analisi II - Equazioni differenziali

Marco Delton\*

A.A. 2025/26

## 1 EDO del 1° ordine

Trovare l'**integrale generale** delle seguenti equazioni differenziali

$$1. \quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

$$2. \quad y' = \frac{(x-y)y}{x^2}$$

$$3. \quad \begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} y' = -\frac{x+y}{x} \\ y(1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(4) = 0 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

$$7. \quad y' = \frac{y}{x-2\sqrt{xy}}$$

---

\*esercizi dei prof. Gabriele Bianchi e Chiara Bianchini

## 2 EDO lineari del 2° ordine

Trovare l'**integrale generale** delle seguenti equazioni differenziali del 2° ordine lineari e a coefficienti costanti

1. (a)  $y'' - 4y = 4e^{-x} + x^2 + 2$

(b)  $y'' - 4y = 3e^{2x}$

(c)  $y'' - 4y = 3e^{2x} - e^{-2x}$

2. (a)  $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 + 3e^{-x}$

(b)  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$  NOTA:  $e^{2x} \cos x = \operatorname{Re}(e^{\lambda_0 x})$  con  $\lambda_0 = 2 + i$

(c)  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$  NOTA:  $e^x \sin x = \operatorname{Im}(e^{\lambda_0 x})$

3. (a)  $4y'' - 4y' + y = x$

(b)  $4y'' - 4y' + y = 3x^2 + 2x - 1$

(c)  $4y'' - 4y' + y = e^{\frac{x}{2}}$

(d)  $4y'' - 4y' + y = 3xe^{\frac{x}{2}}$

4. (a)  $y'' + y = e^x \cos(2x)$

(b)  $y'' + y = xe^x \cos(2x)$

(c)  $y'' + y = -e^{-x} \cos x$

5. (a)  $y'' - 3y' + 2y = ax^2 + bx + c$

(b)  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$

(c)  $y'' - 3y' + 2y = e^x$

6. (a)  $y'' - y' + y = \pi e^{-\frac{x}{2}}$

(b)  $y'' - y' + y = \pi x e^{-\frac{x}{2}}$

(c)  $y'' - y' + y = -\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

7. (a)  $y'' - 2y' + y = ax^2 + bx + c$

(b)  $y'' - 2y' + y = 3e^x$

8. Risolvere

$$y'' - 5y + 6y = x$$

con il metodo di **variazione delle costanti** e per **similarità**

Cerco  $y_p(x) = A(x)e^{2x} + B(x)e^{3x} \Rightarrow$  Cerco  $A(x)$  e  $B(x)$  t.c.  $\begin{cases} A'e^{2x} + B'e^{3x} = 0 \\ 2A'e^{2x} + 3B'e^{3x} = x \end{cases}$

9. Risolvere

$$y'' - y = \sin x$$

con il metodo di **variazione delle costanti** e per **similarità**

Cerco $y_p(x) = A(x)e^{-x} + B(x)e^x \Rightarrow$ Cerco $A(x)$ e $B(x)$ t.c.	$\begin{cases} A'e^{-x} + B'e^x = 0 \\ -A'e^{2x} + B'e^x = \sin x \end{cases}$
--	--

10. Ricondursi all'EDO lineare e risolverla, sfruttando un opportuno cambio di variabili

(a) 
$$\begin{cases} x^2y'' - xy' - 3y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

(b)  $x^2y'' - xy' + y = x + \frac{4}{x}$

(c) Determinare le soluzioni di

$$x^2y'' + xy' - 4y = \frac{1}{x^3} - x$$

tali che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{3}$$

### 3 EDO qualitative

1. Studiare l'andamento di  $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = 4y(1 - y) \\ y(0) = a \end{cases}$$

2. Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = x \left(1 + \frac{1}{y}\right) \\ y(0) = a \quad \text{con } a \neq 0 \end{cases}$$

- (a) Provare che  $y(x)$  è definita  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (b) Studiare l'andamento di  $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$  con  $a \neq 0$
- (c) Studiare la natura del punto critico  $x = 0$
- (d) Studiare eventuali asintoti orizzontali e obliqui di  $y(x)$

3. Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4x^2y' + 2 \sin(y) \cos(y) = 1 \\ y(1) = \pi \end{cases}$$

- (a) Provare che  $y(x)$  è prolungabile a  $+\infty$
- (b) Determinare se  $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$
- (c) Trovare la soluzione esplicita

4. Studiare l'andamento di  $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = \sin(y^2) \\ y(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5. Dato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

- (a) Provare che  $x = 0$  è un punto di flesso
- (b) Studiare qualitativamente la soluzione massimale  $y(x)$  (eventuali simmetrie, massimi e minimi locali, etc.)

6. Dato il seguente problema di Cauchy, studiare qualitativamente la soluzione massimale  $y(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$  (crescenza e decrescenza, concavità, punti critici, informazioni sul dominio, etc.):

$$\begin{cases} y' = \frac{\tan(y)}{1+y^2} \\ y(0) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$$