

## $\Rightarrow$ LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI PER IL PENDOLO SEMPLICE IN MOTO "REALE"

\* equazione di moto ( $\sin \phi \approx \phi$ )

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m} \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0$$

$$\text{con } \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

$$\left( \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \right) \begin{array}{l} \text{freq. ang. per} \\ \text{PENDOLO SEMPLICE} \\ \text{IDEALE} \end{array}$$

$\Rightarrow$  equazione risolvibile analiticamente

$\Rightarrow$  a noi interessa il caso in cui la SOLUZIONE mostri un andamento di  $\phi(t)$  ancora di natura OSCILLATORIA, sebbene con AMPIZZA DELL'OSCILLAZIONE GRADUALMENTE DECRESCENTE, PERCHÉ questo è ciò che OSSERVIAMO per il moto del Pendolo in Laboratorio

$\Rightarrow$  il mantenimento della natura oscillatoria del moto è di per sé indice del fatto che gli altri in gioco producono effetti dissipativi sufficientemente piccoli rispetto all'energia totale del moto (e tanto più piccoli quanto più lento è lo smorzamento dell'oscillazione...)

$\Rightarrow$  MATEMATICAMENTE questo si traduce nella condizione

$$\frac{b}{2ml} < \omega_0$$

$\Rightarrow$  se questa condizione è soddisfatta (come deve essere, eampiamente!, per noi, proprio dall'osservazione del moto reale del nostro pendolo), allora la soluzione "generale" che possiamo cercare dell'equazione di moto nel LIMITE P.O. è della forma

$$\phi(t) = C e^{-\frac{b}{2ml} t} \cdot \cos(\omega'_0 t - \gamma) \quad (1)$$

con  $C$  e  $\gamma$  COSTANTI reali da determinare con le condizioni iniziali

e  $\omega'_0$  = frequenza angolare dell'oscillazione smorzata, determinabile sostituendo nell'equazione di moto la soluzione della forma (1) e legando ai coefficienti dell'eq. di moto

$\Rightarrow$  per determinare  $\omega'_0$ , dovremo calcolare  $\dot{\phi}$  e  $\ddot{\phi}$  dalla soluzione (1) per  $\phi(t)$   $\Rightarrow$

$\star$  per una impostazione più generale della soluzione dell'equazione differenziale del moto, vedere l'Appendice al termine di queste NOTE....

$\Rightarrow$  calcoliamo  $\ddot{\phi}$  e  $\ddot{\phi}'$  ...

$$\Rightarrow \left\{ \ddot{\phi} + \frac{b}{m} \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \Rightarrow \text{eq. di moto} \right.$$

$$\phi(t) = C e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_0 t - \gamma) \Rightarrow \text{forma stessa soluzione con } C \text{ e } \gamma \text{ costanti reali...}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= C \left\{ -\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^2 e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \sin(\omega_0 t - \gamma) \right\} = \\ &= C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ -\frac{b}{2m} \cos(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) \right\} = \dot{\phi} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  derivo  $\dot{\phi}$  rispetto al tempo per ottenere  $\ddot{\phi}$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(t) &= C \left\{ -\frac{b}{2m} e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ -\frac{b}{2m} \cos(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) \right] + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ +\frac{b}{2m} \cdot \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^4 \cos(\omega_0 t - \gamma) \right] \right\} = \\ &= C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ \left( \frac{b}{2m} \right)^2 \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{b}{2m} \cdot \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) + \frac{b}{2m} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^4 \cos(\omega_0 t - \gamma) \right\} \\ &= C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ \left[ \left( \frac{b}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 \right] \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{b}{2m} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) \right\} = \ddot{\phi} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  sostituiamo le espressioni ottenute per  $\dot{\phi}$  e  $\ddot{\phi}$  nell'eq. di moto

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{m} \dot{\phi} + \omega_0^2 \phi = 0 \Rightarrow$$

$$C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ \left[ \left( \frac{b}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 \right] \cos(\omega_0 t - \gamma) + \frac{b}{m} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) + \right. \\ \left. \frac{b}{m} \left[ -\frac{b}{2m} \cos(\omega_0 t - \gamma) - \omega_0^2 \sin(\omega_0 t - \gamma) \right] + \omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \gamma) \right\} = 0$$



$$C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ \cos(\omega_0 t - \gamma) \cdot \left[ \left( \frac{b}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 - 2 \left( \frac{b}{2m} \right)^2 + \omega_0^2 \right] + \sin(\omega_0 t - \gamma) \cdot \left[ \frac{b}{m} \omega_0^2 - \frac{b}{m} \omega_0^2 \right] \right\} = 0$$



$$C e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega_0 t - \gamma) \cdot \left[ -\left( \frac{b}{2m} \right)^2 - \omega_0^2 + \omega_0^2 \right] = 0 \Rightarrow \phi(t) \cdot \left[ -\left( \frac{b}{2m} \right)^2 + \omega_0^2 \right] = 0$$

$$= \phi(t)$$

$$\phi(t) \cdot \left[ -\left( \frac{b}{2m} \right)^2 + \omega_0^2 \right] = 0$$

$$\frac{A}{t}$$



$\Rightarrow$  sostituendo  $\dot{\phi}$  e  $\ddot{\phi}$  [come calcolati dalla formula funzionale delle soluzioni  $\phi(t)$ ] nella eq. di moto abbiamo ricavato:

$$\boxed{\phi(t) \cdot \left[ \left( \frac{b}{2m} \right)^2 - \omega_0'^2 + \omega_0^2 \right] = 0} \quad \underline{\underline{At}}$$

$\Rightarrow$  non può essere  $\{\phi(t)=0 \wedge t\}$  che annulla l'espressione, perché vogliamo una soluzione che rappresenti il MOTO del pendolo  $\Rightarrow$  dunque, deve

essere  $-\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0'^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \omega_0'^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 \left[ 1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}}$$

$\Rightarrow$   $\omega_0'$  = frequenza angolare dell'oscillazione per il PENDOLO SEMPLICE "REALE"

NEL LIMITE DI PICCOLE OSCILLAZIONI

con soluzione per  $\phi = \phi(t)$  data da

$$\phi(t) = C e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_0' t - \gamma)$$

che descrive un moto OSCILLATORIO SMORZATO

$\Rightarrow$  periodo  $T_0'$  dell'oscillazione ricavabile come

$$T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0'} = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \left[ 1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = T_0 \cdot \left[ 1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2}}}$$

$\Rightarrow$  relazione fra  $T_0'$  e  $T_0$  !!

MOTO  
REALE

MOTO  
IDEALE

ci torneremo...  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  periodo  $T_0'$  dell'oscillazione SMORZATA DEL PENDOLO SEMPLICE IN MOTOREALE  
NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI ricavabile come

$$T_0' = \frac{2\pi}{\omega_0'} = \frac{2\pi}{\omega_0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = T_0 \left[ 1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2}}$$

$\Rightarrow$  relazione fra  $T_0'$  e  $T_0$  !!  
 ↑ MOTO REALE  
 ↑ MOTO IDEALE

... come già detto, ci torneremo, ma per ora possiamo notare che

$$T_0' = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2}} = T_0 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

è ottenuta

ASSUMENDO

$$\frac{b}{2m} < \omega_0 \Rightarrow \frac{b}{2m\omega_0} < 1 \Rightarrow$$

a maggior ragione

$$\left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 < 1 \quad \{ \text{e facilmente anche}$$

$\left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \ll 1$ , nel qual caso

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} \text{ per } x \ll 1$$

$$T_0' \approx T_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right]$$

$\Rightarrow$  la differenza fra  $T_0'$  e  $T_0$  passa attraverso i

termine QUADRATICO  $\left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2$

che risulta SICURAMENTE SENSI BILMENTE  $< 1$ , dato che

PER AVERE OSCILLAZIONI SMORZATE DEVE essere  $\frac{b}{2m\omega_0} < 1$

... ci torneremo....

$\Rightarrow$  abbiamo trovato la soluzione qualitativa della eq. di moto per il moto pendolo semplice "REALE" nel LIMITE P.O.

$$\phi(t) = C e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_0' t - \gamma) \Rightarrow$$

abbiamo ancora DETERMINARE

LE COSTANTI  $C$  e  $\gamma$  con le CONDIZIONI INIZIALI del moto:

$$\begin{cases} \phi(t=0) = \phi_0^{in} \\ \dot{\phi}(t=0) = 0 \end{cases}$$

(l'indica "in" sta per INIZIALE  $\Rightarrow$  sappiamo che poi diminuirà !!)

$\Rightarrow$  ricordando che per  $\dot{\phi}(t)$

abbiamo ricavato

$$\dot{\phi} = C e^{-\frac{b}{2m}t} \left\{ -\frac{b}{2m} \cos(\omega_0' t - \gamma) - \omega_0' \sin(\omega_0' t - \gamma) \right\},$$

cavremo

$$\begin{cases} \phi_0^{in} = C \cos \gamma \\ \dot{\phi}(t=0) = 0 = C \left\{ -\frac{b}{2m} \cos \gamma + \omega_0' \sin \gamma \right\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  non può essere  $C=0$ , quindi  
 $-\frac{b}{2m} \cos \gamma + \omega_0' \sin \gamma = 0$

NOTA: nel moto "REALE" DEVE ESSERE  $\gamma \neq 0$

$\Rightarrow$  se fosse  $\gamma=0 \Rightarrow$  d'altra condizione  $\dot{\phi}(0)=0$  sarebbe  $C \frac{b}{2m} = 0$  e,

per avere MOTO ( $C \neq 0$ ) l'unico modo di soddisfare  $\bullet$  sarebbe  $b=0 \Rightarrow$  MOTO IDEALE !!

$$\begin{cases} \tan \gamma = \frac{b}{2m \omega_0'} = \frac{b}{2m \omega_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{b}{2m \omega_0}\right)^2}^{\frac{1}{2}} \\ C = \frac{\phi_0^{in}}{\cos \gamma} \end{cases}$$

$\Rightarrow$  soluzione per il nostro moto "REALE" del pendolo semplice:

$$\boxed{\phi(t) = \left[ \phi_0^{in} e^{-\frac{b}{2m}t} \right] \cdot \left[ \frac{\cos(\omega_0' t - \gamma)}{\cos \gamma} \right]}$$

$\Rightarrow$  possiamo anche scrivere in un'altra forma equivalente (formula trigonometrica...)

$$\phi(t) = \phi_0^{in} e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \left[ \frac{\cos(\omega_0' t - \gamma)}{\cos \gamma} \right] = \phi_0^{in} e^{-\frac{b}{2m}t} \left[ \frac{\cos(\omega_0' t) \cos \gamma + \sin(\omega_0' t) \sin \gamma}{\cos \gamma} \right]$$

$$\boxed{\phi(t) = \left[ \phi_0^{in} e^{-\frac{b}{2m}t} \right] \cdot \left[ \cos(\omega_0' t) + \sin(\omega_0' t) \cdot \tan \gamma \right]}$$



$\Rightarrow$  soluzione per il moto "REALE" del pendolo semplice:

$$\phi(t) = \left[ \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}t} \right] \cdot \left[ \frac{\cos(\omega_0't - \gamma)}{\cos \gamma} \right] =$$

$\Rightarrow$  analizziamo la seconda formula:

$$\phi(t) = \left[ \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}t} \right] \cdot \left[ \cos(\omega_0't) + \sin(\omega_0't) \cdot \tan \gamma \right]$$

\phi(t)      funzione oscillante \gamma(t)      con periodo T\_0' = \frac{2\pi}{\omega\_0'}  
... \gamma(t) = \gamma\_0(t + nT\_0') = \gamma\_0(t + n \cdot \frac{2\pi}{\omega\_0'})

$\Rightarrow \phi_0(t) = \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}t}$

è la funzione che descrive  
la diminuzione dell'amplitude

angolare  $\phi_0$  nel tempo: se valutata per

$t = nT_0'$ , cioè quando il pendolo termina l' $n$ -esima

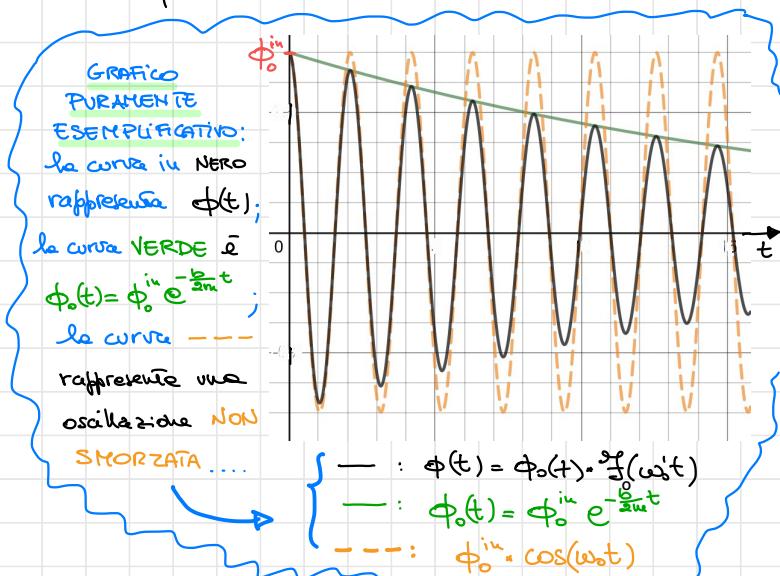
oscillazione, ci

definisce proprio

$$\phi_0 = \phi_0(n) = \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}nT_0'}$$

$$\Rightarrow \phi_0(t) = \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}t}$$

definisce l'inviluppo dei  
valori di massima  
dell'oscillazione di  $\phi(t)$ ,  
funzione che rappresenta  
oscillazioni con ampiezza  
segnata nel tempo



$\Rightarrow$  infatti, valutando LA SOLUZIONE

$\phi(t)$  per  $t = nT_0'$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \phi(nT_0') &= \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}nT_0'} \left\{ \cos\left(\omega_0' \cdot n \frac{2\pi}{\omega_0'}\right) + \tan \gamma \cdot \sin\left(\omega_0' \cdot n \frac{2\pi}{\omega_0'}\right) \right\} = \\ &= \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}nT_0'} \left\{ \cos(2\pi n) + \tan \gamma \cdot \sin(2\pi n) \right\} = \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}nT_0'} = \phi_0(nT_0') = \phi(nT_0') \end{aligned}$$

$$(nT_0' = n \frac{2\pi}{\omega_0'})$$

$\Rightarrow$  dunque, dalla risoluzione dell'equazione di moto per il PENDOLO SEMPLICE IN MOTO REALE NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI abbiamo ottenuto:

- \* la soluzione analitica, che mostra un moto oscillatorio con oscillazioni smorzate nel tempo,

$$\phi(t) = \left[ \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m}t} \right] \cdot \left\{ \cos(\omega'_0 t) + \sin(\omega'_0 t) \cdot \tan \gamma \right\}$$

dove  $\omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2}$

- \* l'espressione per il periodo NEL LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI,  $T'_0$ :

$$T'_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2}}$$

con  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

- \* la forma funzionale della dipendenza dell'ampiezza angolare  $\phi$  dal numero di oscillazioni  $n$  compiute dae rilascio del pendolo,  $\phi_0 = \phi_0(n)$ , per il CASO LIMITE DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI che siamo trattando:

$$\phi_0(n) = \phi_0^{\text{in}} e^{-\frac{b}{2m} T'_0 \cdot n}$$

$\Rightarrow$  la relazione sopra scritta è particolarmente interessante, perché, BENCHÉ RICAVATA NEL LIMITE P.O., come già detto, si può dimostrare che LA SUA FORMA FUNZIONALE DESCRIVE BENE ANCHE LO SMORZAMENTO DELLE OSCILLAZIONI DI AMPIZZA GENERICA (CHE È IL NOSTRO CASO Sperimentale), SE GLI EFFETTI DEGLI ATTRITI SONO SUFFICIENTEMENTE PICCOLI, COME È NEL NOSTRO CASO ...



➡ Cerchiamo dunque di analizzare questa funzione:

$$\phi_o(t) = \phi_o e^{-\frac{bt}{2m}} \Rightarrow \phi_o(n) = \phi_o e^{-\frac{bT_0}{2m} \cdot n} \quad \text{se } t = nT_0 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

⇒ l'abbiamo ricavato nel caso  $\frac{b}{2m} < \omega_0$ , condizione che consente una soluzione all'eq. di moto del tipo "oscillazioni smorzate".

⇒ SUPONIAMO che la condizione sia ancora più stringente, cioè che nego

$$\frac{b}{2m} \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$$

⇒ questa situazione corrisponde ad effetti dissipativi dovuti al lavoro compiuto dalle forze d'attrito molto piccole rispetto all'energia meccanica totale del moto ed è BEN VERIFICATA nelle nostre simulazioni sperimentali in LAB.

|| dato che osserviamo uno smorzamento MOLTO LENTO con l'aumentare del numero di oscillazioni compiute dal rilascio.

➡ SE  $\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$ , possiamo dire che vale anche

$$\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$$

$$\left[ \text{INFATTI, } \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2m\omega_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{b}{2m\omega_0}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{b}{2m\omega_0} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right] \approx \frac{b}{2m\omega_0} \ll 1 \right]$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

per  $x \ll 1$  [qui  $x = \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2 \ll 1$  !!]

e quindi

$$1 \gg \frac{b}{2m\omega_0} \approx \frac{b}{2m\omega_0} = \frac{b}{2m} \frac{T_0}{2\pi} \Rightarrow \frac{b}{2m} \frac{T_0}{2\pi} \ll 1$$

⇒ supponiamo allora che la condizione  $\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$  sia verificata in modo sufficiente mentre

FORTE, da garantire che sia  $\frac{b}{2m} T_0 \ll 1$  e, ancor più,

che sia anche  $\frac{b}{2m} T_0 \cdot n \ll 1$ , almeno fino ad un

Certo numero  $n_{\max}$  di oscillazioni



$\Rightarrow$  in questo caso ( $\frac{bT_0'}{2m}n \ll 1$ ), la funzione  $\phi_o = \phi_o(n)$  potrà essere espressa come

$$\phi_o(n) = \phi_o^{in} e^{-\frac{bT_0'}{2m}n} \approx \phi_o^{in} \left(1 - \frac{bT_0'}{2m}n\right) = \phi_o^{in} - \left(\phi_o^{in} \frac{bT_0'}{2m}\right) \cdot n$$

$\left(\frac{bT_0'}{2m} \cdot n \ll 1\right)$

(rappresentando l'esponenziale al primo ordine secondo il suo sviluppo di Taylor....)

$$\Rightarrow \phi_o(n) \approx \phi_o^{in} - \left(\phi_o^{in} \frac{bT_0'}{2m}\right) \cdot n$$

$\Rightarrow$  ANDAMENTO DI DIMINUZIONE LINEARE CON  $n$

SE  $\frac{bT_0'}{2m} \cdot n \ll 1$

- \* A QUESTO PUNTO, SUPPONENDO, A BUON DIRITTO, di essere in una CONFIGURAZIONE Sperimentale IN CUI GLI EFFETTI DEGLI ATTRITTI SONO SUFFICIENTEMENTE "PICCOLI", POSSIAMO UTILIZZARE LA FORMA FUNZIONALE OTtenuta per  $\phi_o = \phi_o(n)$  NEL LIMITE P.O.
- ANCHE PER LA NOSTRA ANALISI Sperimentale DELLO SMIzzAMENTO DI OSCILLAZIONI DI AMPIZZA GENERICA, scrivendola così

$$\phi_o(n) = \phi_o^{in} e^{-\frac{bT'}{2m}n}$$

, dove  $T'$  = durata di una oscillazione del moto reale per  $\phi_o = \phi_o^{in}$ , che noi stimeremo come il valore da noi misurato per  $\phi_o^{in}$ ,  $T(\phi_o^{in})$ , avendo scelto  $\phi_o^{in}$  fra i  $\phi_o$  per cui abbiamo fatto misure di periodo.

$\Rightarrow$  In LABORATORIO, misureremo l'ampiezza angolare  $\phi_o(n)$  per diversi valori del numero di oscillazioni  $n$  e ci baseremo sulle relazioni sopra scritte  $\circledast$  per interpretare le misure di smorzamento e ricavare una stima anche quantitativa del termine  $\frac{b}{2m\omega_0}$ , che misura l'entità e la rilevanza degli effetti deper:  
centri sul nostro pendolo di laboratorio.

$\Rightarrow$

⇒ Supponiamo di avere effettuato la misura di  $\phi_{0k} = \phi_0(n_k)$  per diversi valori  $n_k$  ( $k = 1 \dots 5$ ) del numero  $n$  di oscillazioni compiute dal pendolo dal momento del rilascio (vedremo fra poco COME ESEGUIRE QUESTE MISURE OPERATIVAMENTE... MA occorre ricordare che, parlando di "MISURE", ovviamente avremo anche indicato l'INCERTEZZA,  $\Delta\phi_{0k}$ , associata a ciascuna misura !!)

⇒ che tipo di andamento mostrano le nostre misure per  $\phi_0(n)$ ?

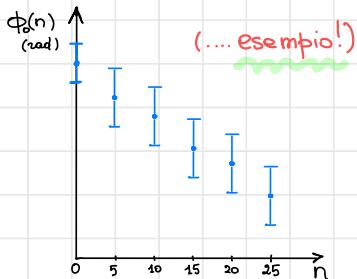
⇒ per vedere riporteremo in grafico le misure  $\phi_0 \pm \Delta\phi_0$  in funzione del corrispondente valore del numero di oscillazioni compiute,  $n_k$ , a cui la misura corrisponde, SENZA DIMENTICARE DI INCLUDERE ANCHE L'AMPIEZZA ANGOLARE AL RILASCIO da noi scelta per queste misure,

cioè  $\phi_0^{in}$  che potremo indicare come CORRISPONDENTE ad  $n=0$ , per cui  $\phi_0^{in} = \phi_0(n=0) = \phi_0(n_k=0)$  per  $k=0$ , da cui  $\phi_0^{in} \pm \Delta\phi_0^{in} = \phi_0_0 \pm \Delta\phi_0_0$  ....

⇒ i valori da riportare in grafico saranno quindi:

$\{ \phi_0 \pm \Delta\phi_0, k=0,1 \dots 5 \}$  in funzione di  $\{ n_k, k=0,1 \dots 5 \}$

⇒ ovviamente  $\phi_0(n)$  DIMINUISCE se cresce di  $n$ ,  
ma se, COME PREVEDIAMO, gli effetti degli altri sono di piccola entità nel moto del nostro pendolo, ci aspettiamo che, ALMENO FINO AD UN CERTO VALORE di  $n$ , LE NOSTRE MISURE MOSTRINO UNA DECRESCEZA DI  $\phi_0(n)$  CON UN ANDAMENTO COMPATIBILE CON UNA RELAZIONE LINEARE FRA  $\phi_0(n)$  ed  $n$  ....  
⇒ SE È COSÌ, cosa possiamo dedurre da questo risultato?



\* QUALITATIVAMENTE ⇒ se dalle nostre misure verifichiamo un andamento di diminuzione LINEARE per  $\phi_0(n)$ , questo NUOLO dire che le condizioni sono tali che la forma funzionale di  $\phi_0(n)$ , che è in generale esponentiale, può a buon diritto essere rappresentata secondo la sua approssimazione in forma lineare, che è valida e corretta per valori dell'argomento  $\ll 1$  .... ovvero



$\Rightarrow \dots$  ovvero è possibile scrivere

$$\phi_o(n) = \phi_o^{in} e^{-\frac{bT'n}{2m}} \approx \phi_o^{in} \left(1 - \frac{bT'}{2m} n\right) = \phi_o^{in} - \left(\phi_o^{in} \frac{bT'}{2m}\right) n ,$$

il che implica che deve valere la condizione

$$\frac{bT'}{2m} n \ll 1 \quad \text{e, a maggior ragione, } \frac{bT'}{2m} \ll 1$$

$$\Rightarrow \text{SE } \frac{bT'}{2m} \ll 1 , \text{ allora } 1 \gg \frac{bT'}{2m} \approx \frac{bT_0'}{2m} \Rightarrow \frac{bT_0'}{2m} \ll 1$$

differenza fra  $T'$  e  $T_0'$  QUI trascurabile, perché, essendo il termine  $\frac{bT'}{2m} \ll 1$ , rappresenta una modifica del valore di  $\frac{bT'}{2m}$  che risulta "di ordine superiore"; cioè molto più piccola del valore stesso....

$$\Rightarrow \text{ma anche, se } \frac{bT_0'}{2m} \ll 1 , \text{ allora } 1 \gg \frac{bT_0'}{2m} \approx \frac{bT_0}{2m} \Rightarrow \frac{bT_0}{2m} \ll 1$$

↔ (analoga a sopra...)

infatti:  $1 \gg \frac{bT_0'}{2m} = \frac{b}{2m} \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{b}{2m} \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx 2\pi \frac{b}{2m\omega_0} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right]$

$$\Rightarrow 1 \gg 2\pi \left\{ \frac{b}{2m\omega_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^3 \right\} \approx \frac{b \cdot 2\pi}{2m\omega_0} = \frac{bT_0}{2m} \Rightarrow \frac{bT_0}{2m} \ll 1$$

termine di ordine superiore trascurabile!

$$\Rightarrow \frac{bT_0}{2m} \ll 1 , \text{ ovvero } \frac{b}{2m} \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right) \ll 1 \quad \text{e,}$$

a maggior ragione,

$$\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$$

$\Rightarrow$  dunque, effettivamente...



⇒ SE verifico una DIMINUZIONE con andamento LINEARE, posso concludere che  $\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$

e in questo caso,

$$\text{essendo } \phi(n) \approx \phi_0^{\text{in}} - \left(\phi_0^{\text{in}} \frac{bT}{2\pi}\right)n \approx \phi_0^{\text{in}} - \left[\phi_0^{\text{in}} \frac{2\pi}{2m\omega_0} \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)\right]n$$

$$\text{e } T' = T_0 \left[1 - \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \approx T_0 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)^2\right], \text{ è chiaro che}$$

nel caso di attriti di piccolo effetto nel moto del pendolo ( $\frac{b}{2m\omega_0} \ll 1$ ), l'effetto dell'attrito più manifestarsi in modo osservabile nella ampiezza angolare (in cui il termine  $\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)$  incide linearmente), sul periodo nel LIMITE P.O.,  $T'$ , l'effetto dell'attrito risulta senz'altro molto meno sensibile, poiché il termine che lo descrive  $\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)$  (che è  $\ll 1$ !!) compare QUADRATICAMENTE

⇒ LA VERIFICA DI UN ANDAMENTO DI DIMINUZIONE LINEARE DELL'AMPIZZA ANGOLARE  $\phi(n)$  col crescere di  $n$  costituisce già un criterio, ALMENO QUALITATIVO,

- per poter affermare che ci aspettiamo un termine  $\frac{b}{2m\omega_0}$  TALMENTE PICCOLO da rendere TRASCURABILE (per le nostre condizioni sperimentali) LA DIFFERENZA FRA  $T'$  e  $T_0$  e dunque
- per SUPPORTARE LA VALIDITÀ della nostra scelta di ricavare la misura del PERIODO NEL LIMITE di PICCOLE OSCILLAZIONI secondo la schematizzazione di PENDOLO SEMPLICE IN MOTO IDEALE ( $T_0$ ) nella nostra esperienza (almeno qualitativamente....)

... ma, avendo tempo per farlo, sarebbe possibile una verifica anche QUANTITATIVA ...



\* Per una valutazione più QUANTITATIVA, sempre nel caso in cui i punti in grafico mostrino una decrescita di  $\phi_o(n)$  con andamento lineare in  $n$ , potremo cercare di tracciare la retta "migliore" per le nostre misure  
 $\Rightarrow$  ricordando che la relazione per  $\phi_o(n)$ , nel caso in cui possa avere la sua approssimazione in forma LINEARE in  $n$ , è espressa come

$$\phi_o(n) = \phi_o^{in} - \left[ \phi_o^{in} \cdot \frac{bT'}{2m} \right] n \quad (*)$$

la nostra retta migliore

rappresenterà

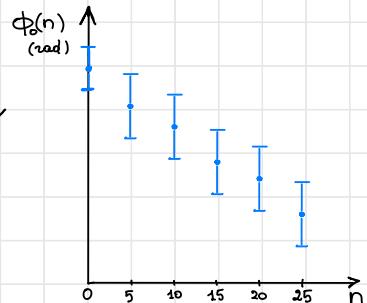
$\phi_o(n) = A + B \cdot n$ , in cui i coefficienti  $A$  e  $B$  possono essere determinati graficamente  
 $\Rightarrow$  ciò che ci interessa va valutare è IL COEFFICIENTE ANGOLARE delle rette tracciate che sarà da scegliere a piacere della relazione lineare fra  $\phi_o(n)$  ed  $n$  **(\*)**  
che descrive il nostro problema :

$$B = -\phi_o^{in} \left( \frac{bT'}{2m} \right) \Rightarrow \frac{|B|}{\phi_o^{in}} = \frac{bT'}{2m}$$

$\Rightarrow$  notiamo : \* in questo caso, poiché ci interessa l'ORDINE DI GRANDEZZA del termine  $\frac{bT'}{2m}$ , NON sarà necessario tracciare altre rette per valutare l'incertezza su  $|B|$ ,  
\*  $\frac{bT'}{2m}$  DEVE essere  $\frac{bT'}{2m} \ll 1$ , DATO che la DIMINUZIONE  $\phi_o(n)$  RISULTA LINEARE !

$\Rightarrow$  DUNQUE, la nostra stima di  $\frac{bT'}{2m} = \frac{|B|}{\phi_o^{in}}$  è considerata come BEN RAFFRESENTATIVA, ai nostri ordini di grandezza), del valore di  $\frac{bT_0}{2m} = \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right) \cdot 2\pi$

$$\Rightarrow 1 \gg \frac{bT'}{2m} \approx \frac{bT_0}{2m} \approx \frac{bT_0}{2m} = 2\pi \frac{b}{2m\omega_0} \dots \text{vedere pag 12} \dots$$



$$\Rightarrow \frac{|B|}{\Phi_0^{\text{in}}} \simeq 2\pi \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{b}{2m\omega_0} = \frac{|B|}{\Phi_0^{\text{in}}} \cdot \frac{1}{2\pi}}$$

• posso verificare che  $\frac{b}{2m\omega_0} = \frac{|B|}{\Phi_0^{\text{in}}} \cdot \frac{1}{2\pi} \ll 1$

• posso riconoscere l'ERRORE DI SCHEMATIZZAZIONE RELATIVO sul periodo nel LIMITE P.O. FRA LE DUE SCHEMATIZZAZIONI DI PENDOLO SEMPLICE IDEALE e REALE,  $\left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{schem}} \equiv \frac{|T_0' - T_0|}{T_0}$ , VALUTARLO QUANTITATIVAMENTE e CONFRONTARLO con l'errore relativo sperimentale sulla misura di  $T_0$ ,  $\left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{sper}} \approx 1 \div 2 \times 10^{-3}$  ....

$\Rightarrow * \text{ Ricaviamo } \left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{schem}} = \frac{|T_0' - T_0|}{T_0}$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{schem}} &= \left| \frac{T_0' - T_0}{T_0} \right| = \left\{ T_0 \left[ 1 - \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - T_0 \right\} \cdot \frac{1}{T_0} \approx \left\{ T_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \right] - T_0 \right\} \cdot \frac{1}{T_0} \\ &= \frac{T_0}{T_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 - 1 \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{schem}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  confronto  $\left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{schem}} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2$  con  $\left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{sper}} \approx 1 \div 2 \times 10^{-3}$

$\Rightarrow$  SE (COME MI ASPETTO !!)

$$\frac{1}{2} \left( \frac{b}{2m\omega_0} \right)^2 \ll \left( \frac{\Delta T_0}{T_0} \right)_{\text{sper}}, \text{ allora}$$

ho mostrato, anche QUANTITATIVAMENTE, che LA SCELTA DI STIMARE  $T_0 \pm \Delta T_0$  NELL'AMBITO DELLA DESCRIZIONE DI PENDOLO SEMPLICE IN MOTO IDEALE E' CORRETTA PER LA NOSTRA CONFIGURAZIONE SPERIMENTALE  $\Leftrightarrow$  la differenza fra  $T_0'$  e  $T_0$  è talmente piccola da NON ESSERE SIGNIFICATIVA NÉ RILEVABILE nelle nostre condizioni di misura in laboratorio.

## NOTA

Se, osservando i nostri punti  $(n_k, \phi_o(n_k))$  (con  $k=0, 1, \dots, 5$ ) in grafico, avessimo dei dubbi sull'andamento effettivamente lineare fino ad  $n=25$ , potremmo comunque dare una valutazione del parametro  $\frac{b}{2m\omega_0} \Rightarrow$

in generale, infatti, possiamo considerare che le nostre misure rispondono alle relazioni non approssimate

$$\phi_o(n) = \phi_o^{in} e^{-\frac{bT'}{2m} \cdot n}$$

$\Rightarrow$  se oli questa relazione valutiamo il logaritmo naturale, avremo

$$\ln[\phi_o(n)] = \ln \phi_o^{in} - \frac{bT'}{2m} \cdot n$$

$$(\ln e^{-\frac{bT'}{2m} n} = -\frac{bT'}{2m} n)$$

e, se riportiamo in grafico  $\ln[\phi_o(n)]$  in funzione di  $n$ , i nostri punti  $(n_k, \ln[\phi_o(n_k)])$  (con  $k=0, 1, \dots, 5$ ) dovranno comunque disporsi in modo da indirizzare un andamento di decrescita lineare secondo la relazione  $\textcircled{*}$ , che possiamo scrivere come

$$\ln[\phi_o(n)] = A_L + B_L n$$

$$\text{con } \left\{ \begin{array}{l} A_L = \ln(\phi_o^{in}) \\ B_L = -\frac{bT'}{2m} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow$  dunque, potremo determinare graficamente  $B_L$  e ricavare così

$$\frac{bT'}{2m} = |B_L| -$$

Similmente a quanto già visto, avremo poi

$$|B_L| = \frac{bT'}{2m} \sim \frac{bT_0}{2m} = \frac{b}{2m\omega_0} \cdot 2\pi \Rightarrow \frac{b}{2m\omega_0} \approx \frac{|B_L|}{2\pi}$$