Geometria

Tommaso Miliani

26-02-25

1 Esercizi

1.1 Esercizio 5

Con parametri x, y determinare il valore del rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ \text{x} & \text{y} & \text{x} & \text{x} & \text{y} & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} \\ 0 & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & 0 \\ 0 & 0 & \text{x} & \text{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nel caso in cui $x, y = 0$ allora il rango è zero; può il rango però essere 6? No, perché ci sono 3 righe uguali, ossia la riga 1, 3, 4. Tutte le sottomatrici 5×5 sono tutte con almeno due righe uguali e quindi si annullano con l'eliminazione di Gauss, dunque il rango non potrà essere 5 poiché ci sono queste righe uguali. Possiamo quindi dire con confidenza che $rk \leq 4$.

Analizziamo ora le colonne, sono uguali le colonne 3 e 4, e le colonne 1, 6, e anche le colonne 2, 5; così possiamo affermare che il rango delle colonne è sicuramente $rk \leq 3$ se $x \neq 0$, se invece $x = 0$ allora rimane solo y e quindi il rango può essere $= 1$ se $y \neq 0$, altrimenti 0. I possibili ranghi riassunti sono dunque:

1. 3: se $x \neq 0$;
2. 1: Se $x = 0$ e $y \neq 0$;
3. 0: Se $y = 0$.

1.2 Esercizio 6

Scelgo A in modo tale che $\leq 2 \Leftrightarrow \exists$ matrici del tipo 2×2 come somma di matrici di rango 1. Si vede innanzitutto che $rk(A + B) \leq rk(A) + rk(B)$ e quindi nelle colonne somma, essendo il rango lo spazio generato dalle colonne, queste sono somma e quindi lo spazio generato è contenuto nello span delle colonne di A o nelle colonne di B. Allora lo spazio generato da queste due è proprio $col(A) + col(B)$ per Grassman allora si ottiene:

$$\dim(col(A + B)) \leq \dim(col(A)) + \dim(col(B))$$

Allora il rango di A è minore di tutti quei ranghi somma. Il verso opposto ($\Leftarrow$) si dimostra nel seguente modo: A si ottiene da una matrice che ha solo n righe e quindi tutte le matrici hanno rango uno e ognuna di queste ha la n esima riga occupata da dei valori. Se

$$A' = A'_1 + \dots A'_s$$
$$rk(A'_s) = 1$$

Torno indietro ripetendo le operazioni elementari di Gauss al contrario e troverò A e siccome il rango non cambia, allora ho ancora una matrice di rango 1. Se A' si ottiene con operazioni semplici allora si ha che.

$$A' = GA$$

E quindi deve essere invertibile e si può tornare indietro con:

$$A = G^{-1}A'$$

Soluzione: per scambiare tra di loro le righe i, j basta moltiplicare a sinistra per la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ossia si pone al posto i, j un 1 e al posto j, i un 1 e per definizione quando si moltiplica si ottiene nuovamente il medesimo risultato, così facendo questa matrice se si scambiano le righe si ritrova nuovamente una matrice invertibile. Viceversa se alla riga j-esima sommo la riga λi, allora posso moltiplicare sempre a sinistra pere la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alla riga j-esima sommo, e ottengo al posto i un lambda e tutto il resto rimane o zero oppure 1 sulla diagonale. E' invertibile e rimane alla fine G che il prodotto di matrici invertibili ed è anch'essa invertibile. Si ottiene la soluzione moderna dell'esercizio 6: Partendo da A con le conclusioni fatte fino ad ora, trovo G invertibile tale che $A' = GA$ è a scalini con s scalini, allora riducendo A' come s matrici di rango 1, allora ho tutti addendi di rango 1. Tornando indietro con la linearità posso moltiplicare a sinistra per quella matrice G^{-1} e trovo che

$$A = G^{-1}(A'_1 + \dots A'_s)$$

E il rango non cambia.

2 Matrici ortogonali e determinante

Teorema 2.1. *Il determinante di una matrice ortogonale*

$$\det(A) = \pm 1 \tag{1}$$

Rovescia l'orientazione se è -1 o mantiene l'orientazione

Dimostrazione. L'inversa di A è la trasposta e quindi per ipotesi

$$A \cdot {}^tA = I_n$$
$$\det(A \cdot {}^tA) = 1$$

Allora il $\det(A) \cdot \det({}^tA) = \det(A)^2$. □

3 Determinante con le permutazioni

Definizione 3.1 (Permutazioni)**.** *Sono funzioni biunivoche; una permutazione di una funzione σ di un insieme di n elementi in sé stessa è biunivoca. Quindi l'insieme delle permutazioni forma un gruppo con $n!$ elementi dove l'operazione è la composizione e l'elemento neutro è la funzione identità.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \sigma(1) = 1 \\ \sigma(2) = 3 \\ \sigma(3) = 2 \end{matrix}$$

Questa permutazione scambia 2 e 3.

1. *Ogni permutazione è composizione di scambi (permutazioni più semplici);*
2. *La parità del numero di scambi è ben definita per ogni permutazione;*
3. *σ_n è un gruppo simmetrico con $n!$ elementi che contiene il gruppo a_n chiamato gruppo alterno formato solo dalle permutazioni pari, ossia ogni permutazione è ottenuta con un numero pari di scambi l'identità (0 scambi) è nel gruppo alterno.*

Ogni permutazione ha un segno (definito come $\epsilon(\sigma)$) che può essere ± 1: se è positivo si ottiene con numero pari di scambi, altrimenti se è -1 si ottiene con numero dispari di scambi.

Teorema 3.1 (Formula del detrminante mediante le permutazioni)**.** *Se $A \in M(n \times n, K)$ allora il determinante di A è*

$$\sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(n)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} \tag{2}$$

Dove la colonna scelta dipende dal segno del σ. Ossia per una matrice 3×3 per le colonne col segno $+$ del σ:

$$a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1}$$

Per le colonne invece col segno meno del σ:

$$-a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} - a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1}$$

Dove il secondo numero al pedice è il valore σ.

Dimostrazione. Ancora niente dimostrazione (L'ha detto l'Ottaviani) □

Il determinante nel 1800 era definito con questa formula e presentava diversi vantaggi:

1. E' esplicita e se $a_{i,j} \in Z$ mostra che il determinate $\in Z$;
2. Il determinate è un polinomio di grado n.
3. Bella!

Svantaggi:

1. E' intrattabile dal punto di vista computazionale poiché $n!$ è enorme;
2. Teoricamente alcuni risultati sono difficili

Il problema $P = NP$ è un problema nel quale ci si chiede se si possa calcolare la permutazioni di A con un numero di operazioni polinomiali in n dove le permutazioni

$$Perm(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(n)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Proposizione 3.1.1 (Applicazioni alle matrici inverse)**.** *Sia $A \in M(n \times n, K)$ troviamo allora $B : AB = I_n$ (inversa destra) ma anche $BA = I_n$ e quindi inverte anche a sinistra e quindi*

$$B = A^{-1} \tag{3}$$

Dimostrazione. Considero $f_A : K^n \to K^n$ allora:

$$1_K = f_B = f_A \circ f_B \Rightarrow f_A \text{suriettiva}$$

poiché

$$f_A\left(f_B(x)\right) = 1_K = x, \qquad \forall x \in K^n$$

e allora f_A è suriettiva se e solo se il rango è massimo (è biunivoca) $\Leftrightarrow rk(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Quindi devo ottenere:

$$BA = I_n, \quad f_B \circ f_A(y) = y \forall y \in K^n$$

Dato che f_B è suriettiva, allora $\exists x \in K^n : y = f_B(x)$ e quindi:

$$f_B f_A(y) = f_B(f_A(f_B(x))) = f_B(I(x)) = f_B(x) = y.$$

□

4 Formula per l'inversa

Teorema 4.1. *Se A è invertibile, allora, tolta la riga j e la colonna i:*

$$\boxed{A_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}\det(A_{\hat{j},\hat{i}})}{\det(A)}} \tag{4}$$

Dove $\hat{j}, \hat{i}$ *vuol dire con una riga ed una colonna esclusa.*

Dimostrazione. Niente dimostrazione (L'Otta ha detto di saltarla) □

Conseguenze:

Proposizione 4.1.1. *Se* $a_{i,j} \in Z, \det(A) = \pm 1$ *allora* A^{-1} *ha coefficienti reali in* Z.

Esempio di un calcolo di inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempi di coefficienti: il determinate di A conviene calcolarlo sulla terza riga, quindi viene $\det(A) = 4$, togliendo la priam riga e la prima colonna viene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pluggando nella formula viene 0 mentre l'altra matrice nella formula è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

che nella formula è -1. Un metodo più efficace è quello di Gauss per cui può essere parallelizzato per calcolare l'inversa perché la prima colonna dell'inversa è data dalle soluzioni del sistema lineare che prende la matrice e gli mette come colonna dei termini noti la prima colonna dell'identità poiché per ogni colonna devo trovare le colonne dell'identità, quindi per la prima colonna si ottiene la seguente e successivamente si sostituisce le altre colonne dell'identità trovando le colonne dell'inversa.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Parametrizzando si può ottenere tutte le colonne in un colpo solo mettendo accanto nel sistema la matrice identità:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Con le eliminazioni di Gauss si può ottenere la matrice svolta sul libro (I'm lazy)

La matrice che ho trovato a destra della barra verticale è proprio l'inversa poiché l'identità è traslata sulla sinistra e a destra si ottiene l'inversa (si può anche fare la cosa inversa, ossia mettere a destra come termini noti le colonne di A e ottenere l'inversa sulla sinistra).

4.1 Esercizio 13

La matrice di Vandermonde è definita come una matrice tale che ad ogni riga aumenta la potenza della variabile x per n colonne ed n righe:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \\ x_1^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Tale che

$$V_{i,j} = x_j^{i-1}$$

Dobbiamo allora provare che:

$$\det(V) = \prod_{i<j}(x_j - x_i) \neq 0 \in \{x_1, \dots, x_n\}$$

Si può trovare la soluzione per il caso $n = 2$ e per induzione applicarlo a tutti gli n:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1$$

Per $n = 3$ si ottiene la riduzione a scalini e quindi si ottiene una sottomatrice due per due e quindi il determinate:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_3)$$

Procedendo allora per induzione si ottiene che il determinante della matrice di Vandermonde si ottiene (procedendo sempre all'indietro):

$$\prod_{i=2}^{n}(x_i - x_1) \cdot \prod_{2 \leq p < q}(x_q - x_p)$$

Che è la tesi