

# 超限再帰の定理 (ZF 公理系に基づく厳密な証明)

**定理 1** (超限再帰の定理).  $(A, <)$  を整列集合、 $G : V \rightarrow V$  を (集合とは限らない) 関数クラス (Class Function) とする。このとき、 $A$  上で定義され、すべての  $a \in A$  について

$$f(a) = G(\{(x, f(x)) \mid x < a\})$$

を満たす写像  $f : A \rightarrow V$  が、ZF 公理系において一意に存在する。

証明. 証明は「一意性」と「存在」の2部構成で行う。

## 1. 一意性 (Uniqueness)

証明. 定理の条件を満たす写像  $f : A \rightarrow V$  および  $g : A \rightarrow V$  が2つ存在したと仮定する。 $f = g$  であること (すなわち、グラフとしての集合が等しいこと  $\forall a \in A, f(a) = g(a)$ ) を証明する。

$f \neq g$  と仮定する。このとき、集合  $B$  を

$$B := \{a \in A \mid f(a) \neq g(a)\}$$

と定義する。 $A$  は集合であるから、**分出公理図式** (Axiom Schema of Specification) により、 $B$  は  $A$  の部分集合として集合である。

$f \neq g$  の仮定より、 $B$  は空集合  $\emptyset$  ではない。 $(A, <)$  は整列集合であるから、空でない部分集合  $B$  は最小元  $a_0$  を持つ。すなわち  $a_0 = \min B$  が存在する。

$a_0$  の最小性より、任意の  $x \in A$  について、 $x < a_0$  ならば  $x \notin B$  である。 $B$  の定義から、これは

$$\forall x < a_0, f(x) = g(x)$$

を意味する。

ここで、 $a_0$  より前の履歴を表すグラフ (集合) を

$$h_f := \{(x, f(x)) \mid x < a_0\}$$

$$h_g := \{(x, g(x)) \mid x < a_0\}$$

と定義する。 $A_{a_0} := \{x \in A \mid x < a_0\}$  は (分出公理により) 集合であり、 $f \upharpoonright A_{a_0}$  および  $g \upharpoonright A_{a_0}$  も (グラフとして) 集合であるから、 $h_f, h_g$  は集合である。

$\forall x < a_0$  について  $f(x) = g(x)$  であるから、 $\forall z(z \in h_f \iff z \in h_g)$  が成り立つ。よって、**外延性公理** (Axiom of Extensionality) により、 $h_f = h_g$  である。

$f, g$  は定理の条件を満たす写像であるから、その定義より  $a = a_0$  において

$$\begin{aligned} f(a_0) &= G(\{(x, f(x)) \mid x < a_0\}) = G(h_f) \\ g(a_0) &= G(\{(x, g(x)) \mid x < a_0\}) = G(h_g) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $G$  は関数クラス（入力等しければ出力も等しい）であり、かつ  $h_f = h_g$  であったから、 $G(h_f) = G(h_g)$  である。

したがって、 $f(a_0) = g(a_0)$  を得る。しかし、これは  $a_0 \in B$ （すなわち  $f(a_0) \neq g(a_0)$ ）であるという  $a_0$  の定義に矛盾する。

この矛盾は、最初の仮定  $f \neq g$  が偽であったことを示す。ゆえに  $f = g$  であり、写像は一意的に定まる。  $\square$

## 2. 存在 (Existence)

証明.  $f$  という写像（のグラフ  $f \subset A \times V$ ）が、ZF 公理系内で集合として存在することを示す。

### (i) 「近似」の定義と両立性

定義 (近似写像).  $a \in A$  に対し、 $A_a := \{x \in A \mid x < a\}$  とする。写像  $h$  が「 $a$  における近似」であるとは、以下の 2 条件を満たすことをいう。

1.  $\text{dom}(h) = A_a \cup \{a\}$
2.  $\forall y \in \text{dom}(h), h(y) = G(\{(x, h(x)) \mid x < y\})$

この条件を  $\Phi(a, h)$  と表す。

補題 1 (近似の一意的性).  $\forall a \in A$  について、 $\Phi(a, h)$  を満たす集合  $h$  は、存在するならば高々一つ（一意的）である。

*Proof.*  $a \in A$  を固定する。 $h_1, h_2$  が共に  $\Phi(a, h)$  を満たすとする。 $\text{dom}(h_1) = \text{dom}(h_2) = A_a \cup \{a\}$  である。この定義域  $D = A_a \cup \{a\}$  は、 $A$  の順序  $<$  により整列されている。この整列集合  $D$  上で、上記「1. 一意性の証明」と全く同じ議論（ $B' = \{y \in D \mid h_1(y) \neq h_2(y)\}$  を考える）を適用することにより、 $h_1 = h_2$  が示される。  $\square$

系 2 (近似の両立性).  $a, b \in A$  が  $a < b$  を満たすとする。もし「 $a$  における近似」 $f_a$  と「 $b$  における近似」 $f_b$  が共に存在するならば、 $f_b$  は  $f_a$  の拡張である。すなわち、 $f_a = f_b \upharpoonright (A_a \cup \{a\})$  が成り立つ。

*Proof.*  $h := f_b \upharpoonright (A_a \cup \{a\})$  とおく。 $h$  の定義域は  $A_a \cup \{a\}$  である。任意の  $y \in \text{dom}(h)$  をとる。

$y \leq a < b$  であるから、 $y \in \text{dom}(f_b)$  であり、

$$h(y) = f_b(y) = G(\{(x, f_b(x)) \mid x < y\})$$

ここで  $x < y$  ならば  $x \in \text{dom}(h)$  であり、 $f_b(x) = h(x)$  であるから、

$$h(y) = G(\{(x, h(x)) \mid x < y\})$$

よって  $h$  は「 $a$  における近似」の条件  $\Phi(a, h)$  を満たす。近似の一意性（補題 1）より、 $h = f_a$  でなければならない。□

## (ii) 近似 $f_a$ の存在（超限帰納法）

「 $\forall a \in A$  について、 $\Phi(a, f_a)$  を満たす集合  $f_a$  が存在する」ことを、 $A$  上の超限帰納法によって証明する。

$a \in A$  を任意にとり、**帰納法の仮定 (IH)** として

$$\forall x < a, \exists! f_x \text{ s.t. } \Phi(x, f_x)$$

が成り立つと仮定する。この仮定のもとで、 $\Phi(a, f_a)$  を満たす  $f_a$  が集合として存在することを示す。

1.  $A_a = \{x \in A \mid x < a\}$  は、**分出公理図式**により集合である。
2. 帰納法の仮定 (IH) と近似の一意性（補題 1）より、 $x \mapsto f_x$  は  $A_a$  上で定義された関数的クラスである。 $A_a$  は集合なので、**置換公理図式** (Axiom Schema of Replacement) により、その像（値域）は集合である。

$$\mathcal{H}_a := \{f_x \mid x < a\} \quad (\text{は集合である})$$

3.  $g_a := \bigcup \mathcal{H}_a = \bigcup_{x < a} f_x$  と定義する。**和集合の公理** (Axiom of Union) により、 $g_a$  は集合である。
4.  $g_a$  は写像（関数グラフ）である。

*Proof.*  $\langle y, v_1 \rangle \in g_a$  かつ  $\langle y, v_2 \rangle \in g_a$  と仮定する。 $g_a$  の定義より、ある  $x_1 < a, x_2 < a$  が存在し、 $\langle y, v_1 \rangle \in f_{x_1}$  かつ  $\langle y, v_2 \rangle \in f_{x_2}$  となる。 $A$  は全順序であるから、 $x_1 \leq x_2$  または  $x_2 < x_1$  が成り立つ。 $x_1 \leq x_2$  と仮定する。 $y \in \text{dom}(f_{x_1})$  より  $y \leq x_1 \leq x_2$  である。 $x_1 = x_2$  ならば、 $f_{x_1}$  が写像であることから  $v_1 = v_2$ 。 $x_1 < x_2$  ならば、近似の両立性（系 2）より  $f_{x_1} = f_{x_2} \upharpoonright \text{dom}(f_{x_1})$  である。 $y \in \text{dom}(f_{x_1})$  であるから、 $v_1 = f_{x_1}(y) = f_{x_2}(y) = v_2$ 。 $x_2 < x_1$  の場合も同様にして  $v_1 = v_2$  が示される。ゆえに  $g_a$  は関数グラフである。□

5.  $g_a$  の定義域は  $A_a$  である。

*Proof.*  $\text{dom}(g_a) = \bigcup_{x < a} \text{dom}(f_x) = \bigcup_{x < a} (A_x \cup \{x\})$  である。 $y \in \text{dom}(g_a)$  ならば、ある  $x < a$  について  $y \leq x < a$  となり  $y \in A_a$ 。逆に  $y \in A_a$  (すなわち  $y < a$ ) ならば、帰納法の仮定 (IH) より  $f_y$  が存在し、 $y \in \text{dom}(f_y)$  であるから、 $y \in \text{dom}(g_a)$ 。よって  $\text{dom}(g_a) = A_a$ 。  $\square$

6.  $g_a$  は  $\text{dom}(g_a) = A_a$  なる集合 (関数グラフ) である。 $G$  は関数クラスであるから、その値  $v_a := G(g_a)$  は一意に定まる対象 (集合) である。
7.  $f_a := g_a \cup \{\langle a, v_a \rangle\}$  と定義する。これは**対の公理** (Axiom of Pairing) と**和集合の公理**により集合である。
8. この  $f_a$  が  $\Phi(a, f_a)$  の条件を満たすことを確認する。

- $\text{dom}(f_a) = \text{dom}(g_a) \cup \{a\} = A_a \cup \{a\}$ 。(条件 1 OK)
- $y \in \text{dom}(f_a)$  について条件 2 を確認する。

Case 1:  $y < a$  のとき  $y \in \text{dom}(g_a)$ 。  $f_a(y) = g_a(y)$  である。 $y < a$  ゆえ  $f_y$  が存在し、両立性 (系 2) より  $g_a \upharpoonright \text{dom}(f_y) = f_y$  である。よって  $g_a(y) = f_y(y)$ 。  $f_y$  の定義  $\Phi(y, f_y)$  より、 $f_y(y) = G(f_y \upharpoonright A_y)$ 。  $x < y$  ならば  $x \in \text{dom}(g_a)$  であり  $f_a(x) = g_a(x) = f_y(x)$  であるから、 $f_y \upharpoonright A_y = f_a \upharpoonright A_y$ 。以上より、 $f_a(y) = G(f_a \upharpoonright A_y)$  を得る。

Case 2:  $y = a$  のとき  $f_a(a) = v_a$  である。 $v_a$  の定義 (ステップ 6) より  $v_a = G(g_a)$ 。  
 $g_a = f_a \upharpoonright A_a$  ( $g_a$  の定義域は  $A_a$ ) であるから、 $f_a(a) = G(f_a \upharpoonright A_a)$  を得る。

9. したがって、 $a$  における近似  $f_a$  が集合として存在する。

超限帰納法の原理により、 $\forall a \in A$  について、 $\Phi(a, f_a)$  を満たす集合  $f_a$  が一意に存在する。

### (iii) $f$ の構成と証明の完結

1. ステップ (ii) により、 $a \mapsto f_a$  は  $A$  上で定義された関数的クラスである。 $A$  は集合であるから、**置換公理図式**により、その像は集合である。

$$\mathcal{F} := \{f_a \mid a \in A\} \quad (\text{は集合である})$$

2.  $f := \bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{a \in A} f_a$  と定義する。**和集合の公理**により  $f$  は集合である。
3.  $f$  は写像である ((ii) の  $g_a$  と同様の議論、および近似の両立性 (系 2) より)。
4.  $f$  の定義域は  $\text{dom}(f) = \bigcup_{a \in A} \text{dom}(f_a) = \bigcup_{a \in A} (A_a \cup \{a\}) = A$  である。
5.  $f$  が定理の条件を満たすことを確認する。 $a \in A$  を任意にとる。 $f$  と  $f_a$  の構成および両立性より、 $f(a) = f_a(a)$  である。ステップ (ii)-8 (Case 2) の証明より、 $f_a(a) = G(f_a \upharpoonright A_a)$ 。  
 $f_a \upharpoonright A_a = f \upharpoonright A_a$  (両立性) であるから、

$$f(a) = G(f \upharpoonright A_a) = G(\{(x, f(x)) \mid x < a\})$$

これは  $f$  が定理の条件を満たすことを示している。

以上により、条件を満たす写像  $f : A \rightarrow V$  が集合として存在することが示された。 □