Математика и её приложения

4 июля 2025 г.

Андрей Михайлович Райгородский

доктор физико-математических наук, профессор МФТИ, директор ФПМИ

Содержание

1 Введение в комбинаторику

Рассмотрим конечное множество $R_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть заданы подмножества $M_1, M_2, \ldots, M_m$. Такие структуры называют *гиперграфами*, поскольку вершины объединяются не по две, а по произвольному количеству.

Теорема. Существует двуцветная раскраска элементов R_n (красный и синий), такая что для любого M_i модуль разности количества красных и синих элементов не превышает $\sqrt{2n\ln(2m)}$.

Пример: При $m = n$ и $|M_i| = n/2$ граница составляет $\sqrt{2n\ln(2n)}$.

2 Классические неравенства вероятности

2.1 Неравенство Маркова

Если случайная величина $X \geq 0$, то для любого $a > 0$:

$$P(X > a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Запишем:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k Y_k P(X = Y_k) = \sum_{Y_k > a} Y_k P(X = Y_k) + \sum_{Y_k \leq a} Y_k P(X = Y_k).$$

2.2 Неравенство Чебышева

Для случайной величины X:

$$P\left(|X - \mathbb{E}[X]| > a\right) \leq \frac{\mathrm{D}(X)}{a^2}.$$

3 Пример задачи

Пусть случайные величины X_i принимают значения 1 и -1 с равными вероятностями:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вводим сумму:

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Математическое ожидание: $\mathbb{E}[Y_n] = 0$.
Дисперсия:

$$\mathrm{D}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}(X_i) = n.$$

Следует:

$$P(|Y_n| > a) \leq \frac{n}{a^2}.$$

4 Неравенство Азума–Хёффдинга

4.1 Формулировка

Для суммы независимых симметричных случайных величин:

$$P(Y_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

4.2 Идея доказательства

Используем экспоненциальное неравенство:

$$P(e^{LY_n} > e^{La}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{LY_n}]}{e^{La}}.$$

Вычисление:

$$\mathbb{E}[e^{LY_n}] = \left(\frac{e^L + e^{-L}}{2}\right)^n \leq e^{nL^2/2}.$$

Оптимизируя $L = \frac{a}{n}$, получаем:

$$P(Y_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$