GROUP PROJECT

Конспект по лекции А. В. Гасникова «Математические основы ИИ для школьников. Статистика и теория вероятности»

Бауэр Никита Владимирович
Т-Банк (создатель конспекта)

Гасников А. В. (ИИ)
Университет Иннополис (создатель лекции)

Три математических кита ИИ

1. **Вероятность, статистика: Ф-ла Байеса, ЦПТ, теория об ОМП**
2. **Оптиимизация: Принцип Ферма, Лагранжа; Градиентный спуск**
3. **Линейная алгебра: Теорема Рисса, SVD-разложение, PCA**

1. Формула Байеса: задача о многоруком бандите

Рис. 1. Игровые автоматы - атрибуты задачи

Задача о многоруком бандите (MAB) — одна из классических задач в RL. Много рукий бандит — игровой автомат; азартная игра, в которой игрок нажимает на рычаг и получает награду (выигрыш) на основании случайно сгенерированного распределения вероятностей. Отдельный автомат называется «одноруким бандитом»; если же таких автоматов несколько, это называется «многоруким бандитом» или k-руким бандитом. Цель - определить, какой из игровых автоматов принесёт максимальную накапливаемую награду за конкретный промежуток времени.	

Варианты:

Жадный алгоритм:

Всегда выбирать стратегию, максимизирующую прибыль; прибыль можно оценить как среднее вознаграждение, полученное от этого действия:

$$Qt(a) = \frac{r1 + r2 + r3 + \ldots + r(ka)}{k(a)}$$

Проблемы жадного алгоритма:

- Оптимум легко проглядеть, если на начальной выборке не

повезёт (что вполне возможно).

- Поэтому полезная эвристика — оптимизм при

неопределённости.

- То есть выбирать жадно, но при этом прибыль оценивать

оптимистично, и нужны серьёзные свидетельства, чтобы отклонить стратегию.

Многорукий бандит и формула Байеса

Пусть есть автоматы с вероятностями выигрыша p_k (для k-ого автомата), где $p_k in[0, 1]$.

Пусть для автомата k проведено n_k игр, из которых k_k успешны (выигрыш).
Вероятность успеха для одного испытания — p_k.

Апостериорное распределение вероятности выигрыша (при биномиальной модели):
$Ppk(x) = \frac{(Wk_l k+1)!}{(Wk)!(lk)!} x^{Wk}(1-x)^{lx}, x \in [0;1]$

Математическое ожидание вероятности выигрыша автомата k после наблюдений:

$$E[p_k] = \frac{W_k + 1}{W_k + l_k + 2}$$

Это позволяет выбирать автомат с максимальным ожидаемым значением выигрыша.

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Математическое ожидание — это среднее значение, которое примет случайная величина при большом количестве повторных испытаний. По сути, это «средневзвешенный исход» с учётом вероятностей всех возможных значений.

Дисперсия — это мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания. Она показывает, насколько вероятные значения отклоняются от среднего.

2. (a) **Пример с игральным кубиком (мой личный пример)**

i. Пример: игральный кубик

Рассмотрим правильный кубик с 6 гранями, где каждая грань имеет равную вероятность 1/6, а значения на гранях — от 1 до 6.

Математическое ожидание:

$$E[X] = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 6 = \frac{21}{6} = 3.5$$

Дисперсия:

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

Сначала находим (E[X^2]):

$$E[X^2] = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2}{6}$$

$$= (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) \cdot 6 = 9\frac{1}{6}$$

Теперь считаем дисперсию:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{91}{6} - 12.25 \approx 15.1667 - 12.25 = 2.9167$$

Ответ: Математическое ожидание = 3.5

Дисперсия ≈ 2.92

Центральная предельная теорема и предельная плотность

Центральная предельная теорема (ЦПТ) утверждает, что при большом числе независимых одинаково распределённых случайных величин их сумма (или среднее) распределена примерно нормально, независимо от исходного распределения. Это фундаментальный результат, лежащий в основе статистики и практических вычислений, объясняющий, почему нормальное распределение так часто встречается в природе и экономике.

Когда мы изучаем поведение таких сумм, важно знать, как выглядит предельная плотность их распределения. Если математическое ожидание $m = 0$, то форма предельной плотности по ЦПТ следующая:

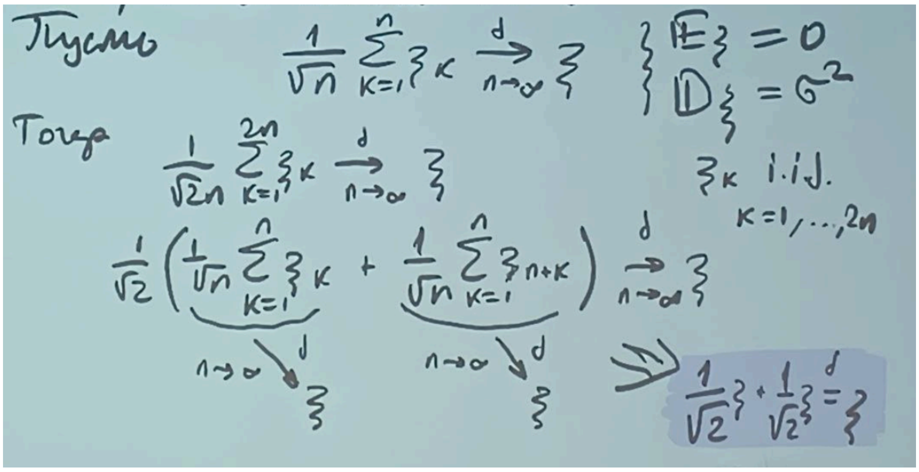


Рис. 2. Форма предельной плотности по ЦПТ

(b) Итак нужно найти такое распр., что $\frac{1}{\sqrt{2}}\xi + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi = \xi$

Пусть $p\xi(x)$ - плотность

Тогда $p_{\frac{1}{\sqrt{2}}\xi}$ $=\sqrt{2}p_\xi\left(\sqrt{2}x\right)$. Действ

$p_{\frac{1}{\sqrt{2}}\xi}(x)\Delta\mathrm{x} = P\left(x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\xi < x + \Delta\mathrm{x}\right) = P\left(\sqrt{2}x \le \xi < \sqrt{2}x + \sqrt{2}\Delta\mathrm{x}\right) = p_\xi\left(\sqrt{2}x\right)\sqrt{2}\ \Delta\mathrm{x}$

Следовательно $p_\xi(x) = 2\int p_\xi\left(\sqrt{2}(x-y)\right)p_\xi\left(\sqrt{2}y\right)\ \mathrm{dy}$

$\xi \in N(0, \sigma^2)$

$p_\xi(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$

Центральная предельная теорема (К.Ф. Гаусс)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — i.i.d.,

$E\xi_k = m$

$D\xi_k = \sigma^2$

Тогда при $n \to \infty$:

$$\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \xi_k = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \zeta$$

$$\zeta \in N(0, 1)$$

Условие одинакового распределения не существенно! Итак, если много разных случайных факторов суммируются, получается гауссовский (нормальный) шум.

Решаем обратную задачу:

По $\xi_1, \ldots, \xi_n$ нужно оценить m.

$(m) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \xi_k$

$\mathbb{P}\left(\mid \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k - m \mid \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\delta}\right)}\right) \geq 1 - \delta -$ оптимально!

• Рассмотрим еще более простую задачу:

$\xi_k = m + \eta_k$, $\eta_k \in N(0, \sigma^2)$ Нужно восстановить m.

$(\xi_k)(\xi, m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\xi - m)^2\right)$

• Рассмотрим задачу оптимизации:

$\min_x (\mathbb{E})\xi\left[(\xi - x)^2\right] <-$ задача стохастической оптимизации

• $(\mathbb{E})_\xi\left[(\xi - x)^2\right] = (\mathbb{E})_{\xi[\xi^2]} - 2x(\mathbb{E})\xi[\xi] + x^2 = m^2 + \sigma^2 - 2x \cdot m + x^2 = (x - m)^2 + \sigma^2$

Минимум достигается при x = m.

• Задачу можно решать заменяя мат. ожидание выборочным средним:

$(\mathbb{E})_{\xi[(\xi - x)^2]} \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k - x\right)^2 \Rightarrow x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k$

Метод максимального правдоподобия

Правдоподобие (likelihood function) — это вероятность получить наблюдаемую выборку при конкретном значении параметра.

Оценка максимального правдоподобия — значение параметра, которое максимизирует правдоподобие.

Интуиция метода заключается в том, что существует некая генеральная совокупность, из которой к нам в руки попала некоторая выборка. Мы же, как исследователи, хотим понять каким образом устроена генеральная совокупность. Для этого мы делаем предположение, что выборка, которая к нам пришла, соответствует определенной модели. В простейшем случае, мы можем сформулировать предположение так: выборка к нам пришла из распределения с плотностью

$f(x \mid \theta)$. Параметр θ является константой, мы его не знаем и пытаемся оценить по выборке.

Пример: Закон Хаббла

Закон Хаббла утверждает: скорость удаления галактики (v) пропорциональна её расстоянию (r):

$$v = H_0 r$$

где (H_0) — константа Хаббла.

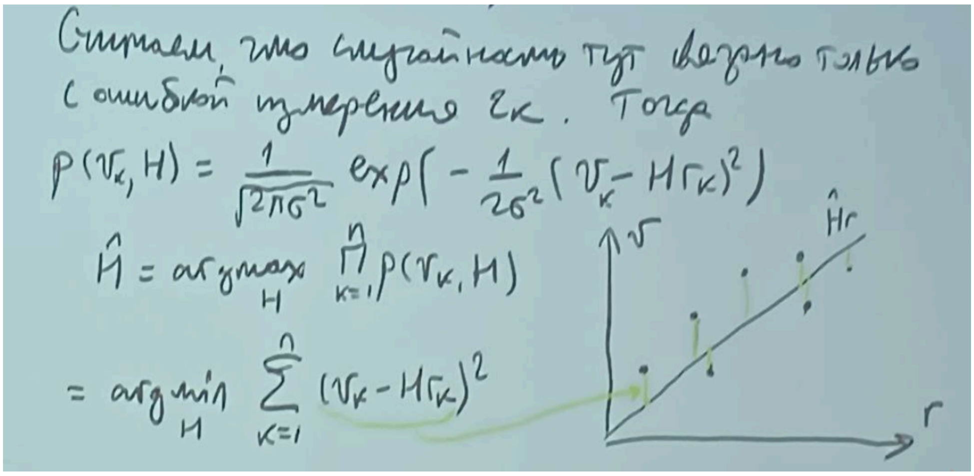
– Метод наименьших квадратов

В практике астрономии у нас есть экспериментальные данные: пары значений $((r_i, v_i))$. Измерения содержат ошибки, данные «разбросаны». Чтобы оценить (H_0), используется **метод наименьших квадратов**: мы подбираем такое (H_0), чтобы минимизировать сумму квадратов отклонений:

$$\sum_{\{i=1\}}^{n} (v_i - H_0 r_i)^2$$

Минимизируя эту сумму по (H_0), получаем «наилучшую» прямую.

Этот же результат (оценка (H_0)) можно получить через **метод максимального правдоподобия**, если мы считаем, что ошибки измерений (v_i) — независимы и распределены нормально:



Логарифмируя и максимизируя по (H_0), вы снова придёте к уравнению наименьших квадратов! То есть **метод наименьших квадратов в этой ситуации совпадает с методом максимального правдоподобия** для нормальных ошибок.

Машинное обучение vs Мат. стат. на примере обучения нейронных сетей.

Пусть $f(a, x)$ — выход нейронной сети, где a — вход, а x — веса.

ML:

$$m \in E(a, y)(y - f(a, x))^2$$

Поступающие реализации (примеров) — случайны.

Мат. стат.:

$$y = f(a, x) + xi \text{ где } xis \in N(0, \sigma^2)$$

$$m \in E(a, y)(y - f(a, x))^2$$

Реализации получены на фоне шума $xiinN$

—

Краткое объяснение разницы:

- В машинном обучении мы минимизируем ошибку модели на случайно поступающих парах (a, y), думая о них как об определённых неопределённых данных, без явного предположения о том, откуда взялся шум или случайность в y.
- В математической статистике мы считаем, что наблюдения y получены по формуле $y = f(a, x) + xi$, где xi — это случайный шум, обычно с конкретным распределением (например, нормальным). Весы x подбираются с учётом явной модели шума — это помогает делать выводы о свойствах оценок (например, дисперсии).

Ключевая разница: В машинном обучении фокус — на ошибке предсказания, данные считаются «черным ящиком». В мат. статистике — на вероятностной природе данных и их соответствии зафиксированной модели шума.