Лекция по комбинаторике и вероятностным методам

Андрей Михайлович Райгородский

Доктор физико-математических наук,
Главный научный сотрудник,
Заведующий лабораторией продвинутой комбинаторики и сетевых приложений,
Заведующий кафедрой дискретной математики
Московского физико-технического института (государственного университета)

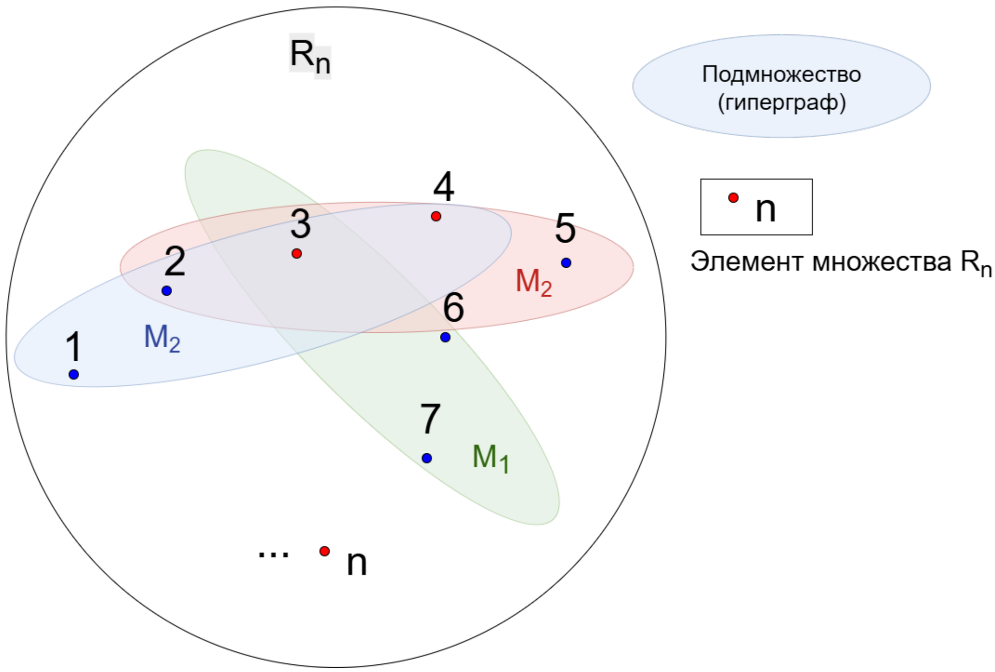
06 июля 2025 года

1 Комбинаторика

Пусть есть множество $R_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Рассмотрим произвольные подмножества $M_1, M_2, \dots, M_n \subset R_n$.

Это гиперграфы - так как соединяется сразу большое количество вершин.



Всегда найдётся раскраска множества R_n в красный и синий цвета, такая что в каждом множестве M_i разность числа красных и числа синих вершин по модулю не больше, чем $\sqrt{2n \cdot \ln(2m)}$.

При $m = n$, $\forall i \ \|M_i\| = \frac{n}{2}$ разность равна $\sqrt{2n \cdot \ln(2n)}$.

2 Отступление в область статистики и вероятности

1. **Неравенство Маркова**: Пусть случайная величина X принимает только неотрицательные значения, тогда для любого положительного числа a вероятность:

$$P(X > a) \leq \frac{EX}{a}$$

Математическое ожидание:

$$EX = \sum_k Y_k \cdot P(X = Y_k) = \sum_{k:Y_k > a} Y_k \cdot P(X = Y_k) + \sum_{k:Y_k \leq a} P(X = Y_k)$$

2. **Неравенство Чебышева**: Пусть X - случайная величина.

Доказательство: Рассмотрим $(X - EX)^2$:

$$P((X - EX)^2 > a^2) \leq \frac{E(X - EX)^2}{a^2} = \frac{DX}{a^2}$$

Пример статистической задачи:

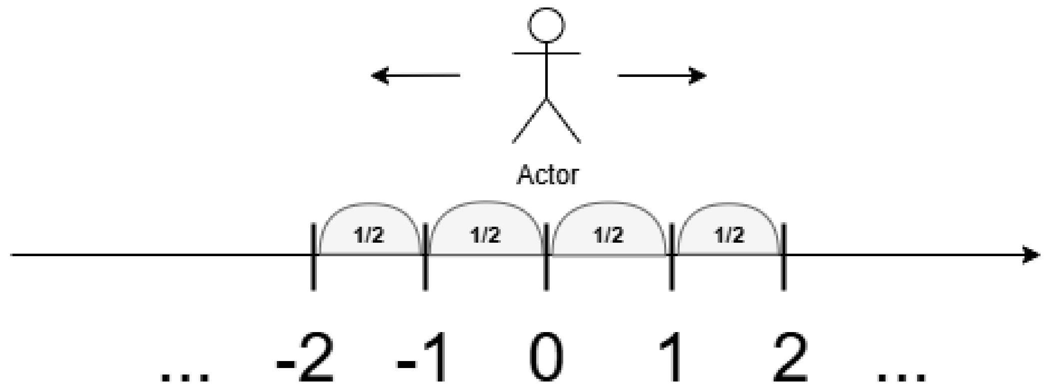


Рис. 1: Иллюстрация случайных величин

Опишем процесс:

$$X_i = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ -1, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$Y_n = X_1 + \ldots + X_n$$
$$EY_n = EX_1 + \ldots + EX_n = 0$$
$$DY_n = DX_1 + \ldots + DX_n = n$$
$$DX_i = EX^2 - (EX)^2 = 1 - 0 = 1$$
$$P(Y_n > a) = P(Y_n - EY_n > a) \leq P(|Y_n - EY_n| > a) \leq \frac{DY_n}{a^2} = \frac{n}{a^2}$$

3. **Теорема** (Неравенства Азума-Хёффдинга):

$$P(Y_n > a) \leq e^{-a^2/2n}$$

Доказательство:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
$$P(Y_n > a) = P(L \cdot Y_n > L \cdot a) = P(e^{L \cdot Y_n} > e^{L \cdot a}) \leq E(e^{L \cdot Y_n}) \cdot e^{-L \cdot a}$$
$$E(e^{L \cdot Y_n}) = \prod_{i=1}^{n} E(e^{L \cdot X_i}) = \left(\frac{1}{2}e^L + \frac{1}{2}e^{-L}\right)^n \leq e^{L^2 n/2}$$
$$\text{Оптимальное } L = \frac{a}{n} \text{ даёт:}$$
$$\frac{a^2}{2n} - \frac{a^2}{n} = -\frac{a^2}{2n}$$

Что и требовалось доказать.