# Конспект лекции:

## Постановка задачи

- **Контекст**: Имеется $n=20$ школьников и $s=18$ математических дисциплин (комбинаторика, геометрия, теория чисел, алгебра, стереометрия и др.).
- **Цель**: Сформировать команду минимального размера, чтобы для каждой дисциплины был хотя бы один представитель, способный решать задачи этой дисциплины.
- **Ограничение**: Каждый школьник не может быть экспертом во всех дисциплинах, поэтому требуется найти оптимальное покрытие.

## Математическая модель

Задача моделируется с использованием теории гиперграфов:

- **Гиперграф**:
  - Вершины — школьники (20 человек).
  - Гиперрёбра — множества из $k=5$ лучших специалистов по каждой из $s=18$ дисциплин (в лекции названы "сардельками").
- **Система представителей**: Минимальное множество школьников, где каждый является представителем хотя бы одной дисциплины (т.е. входит в соответствующее гиперребро).

## Жадный алгоритм

Для решения задачи применяется жадный алгоритм:

1. Для каждой дисциплины формируется множество из $k=5$ лучших школьников.

2. На каждом шаге выбирается школьник, который является представителем максимального числа дисциплин ("прокалывает наибольшее количество сарделек").

3. После выбора школьника удаляются покрытые им дисциплины, и процесс повторяется для оставшихся дисциплин и школьников.

## Анализ алгоритма на примере

- **Шаг 1**: Рассмотрим $s=18$ дисциплин, каждая с $k=5$ лучшими школьниками, и $n=20$ школьников. Суммарное количество вхождений школьников в множества: $s \times k = 18 \times 5 = 90$. Поскольку школьников всего $n=20$, по принципу Дирихле найдётся школьник, входящий хотя бы в $\lceil 90 / 20 \rceil = 5$ множеств. Таким образом, один школьник покрывает минимум 5 дисциплин.
- **Шаг 2**: После выбора одного школьника остаётся $s=13$ дисциплин и $n=19$ школьников. Аналогично, $13 \times 5 = 65$, и найдётся школьник, покрывающий $\lceil 65 / 19 \rceil = 4$ дисциплины.
- **Шаг 3**: Остаётся $s=9$ дисциплин, $n=18$ школьников. Покрытие: $\lceil 9 \times 5 / 18 \rceil = 3$ дисциплины.

- **Шаг 4**: Остаётся s=6 дисциплин, n=17 школьников. Покрытие: $\lceil 6 \times 5 / 17 \rceil = 2$ дисциплины.
- **Шаг 5**: Остаётся s=4 дисциплин, n=16 школьников. Покрытие: $\lceil 4 \times 5 / 16 \rceil = 2$ дисциплины.
- **Шаг 6**: Остаётся s=2 дисциплины, n=15 школьников. Покрытие: $\lceil 2 \times 5 / 15 \rceil = 1$ дисциплина (дважды).
- **Итог**: Жадный алгоритм даёт команду из 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 7 школьников.

## Доказательство

- **Пример на 4**: Разделим 20 школьников на четыре непересекающиеся группы по 5 человек (1–5, 6–10, 11–15, 16–20), каждая покрывает одну дисциплину (комбинаторика, геометрия, теория чисел, алгебра....*стереометрия*). 4 школьников.
- **Пример на 6**: Рассмотрим 18 школьников, разбитых на три группы по 6 человек (1–6, 7–12, 13–18). Для каждой группы сформируем 6 пятёрок, исключая по одному человеку (например, для 1–6: {2,3,4,5,6}, {1,3,4,5,6}, и т.д.). Каждая группа требует 2 представителей, итого 2 × 3 = 6 школьников.

## Общая формула:

Минимальный размер системы представителей ($\tau$) в общем случае для n вершин, s гиперрёбер размера k удовлетворяет:

$$\tau \leq \max( n/k, (n/k) \times \ln(sk/n) + n/k + 1 ).$$

## Заключение

Лекция демонстрирует, как математическая задача о системе представителей, представленная в доступной форме, связана с реальными приложениями. Использование жадного алгоритма и примеров показывает, как простые идеи могут приводить к глубоким результатам. Задача остаётся открытой для дальнейших исследований, что делает её привлекательной для олимпиадников и математиков.

Спасибо за прочтение!))))