# Лекция «Математика и её приложения»
# Конспект

**Автор конспекта:** Феофанов Илья Сергеевич. Н-07-3
**Спикер:** Райгородский Андрей Михайлович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией продвинутой комбинаторики и сетевых приложений, заведующий кафедрой дискретной математики МФТИ

---

## Лирические отступления (повторение)

### Математическое ожидание

Лектор предлагает представить, что он вызывает случайного человека из аудитории и измеряет его рост.
Получается, что рост человека – случайная величина.

Что же такое её математическое ожидание величина?

$$\sum_{\text{люди}} \text{Рост}(\text{чел}) * P(\text{чел})$$

$$\sum_{\omega} \text{Рост}(\omega) * P(\omega)$$

Наверное, в аудитории есть люди с одинаковым ростом, если измерять в сантиметрах

$$y_1, ..., y_k, k \leq n = \sum_{i=1}^{k} y_i * P(x = y_i)$$

$$\text{где n} - \text{количество людей}$$

$$y_i, ..., y_k \text{ все возмодные значения роста}$$

### Дисперсия

$$EX, DX = (X - EX)^2 = E(x^2 - 2xEX + (EX)^2) =$$
$$= EX^2 - 2EX * EX + (EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

### Экспонента

$$e = 2,718281828459045...$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

## Основная часть

Пусть у нас есть множество $R_n = \{1, 2, ..., n\}$

Рассмотрим в этом множестве произвольные подмножества $M_1, ..., M_m \leq R_n$

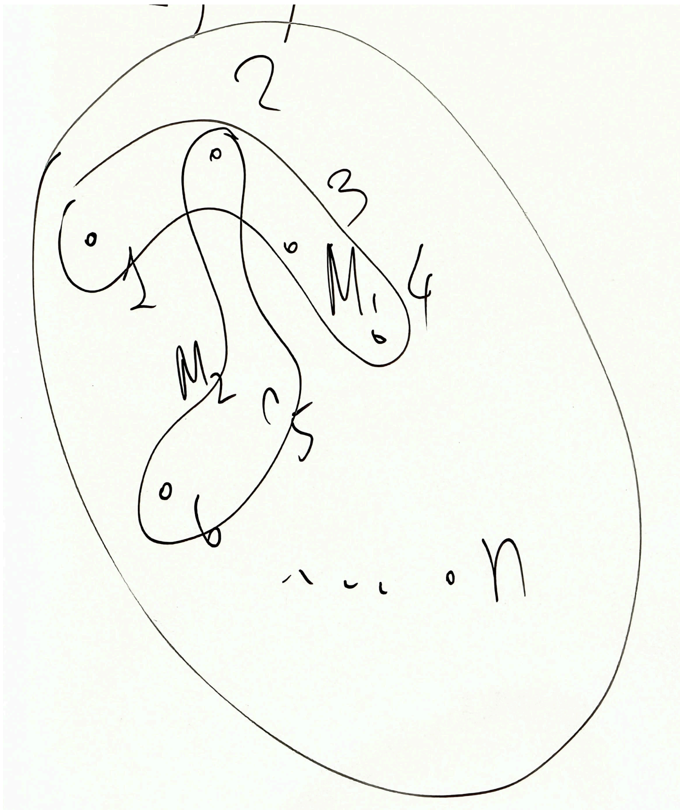


Иллюстрация “Сардельки в кастрюльке”
или гиперграф

**Теорема:**

Всегда найдётся раскрасска множества $R_n$ в красный и синий цвета, такая, что в каждом множестве $M_i$ разность числа красных и числа синих вершин элементов по модулю не больше, чем $\sqrt{2n\ln(2m)}$

**Пример:** $m = n \forall i |M_i| = \frac{n}{2}$

$\sqrt{2n\ln(2m)}$ – очень медленно растущая функция

### Неравенство Маркова

Пусть случайная величина X принимает только неотрицательные значения. Тогда $\forall a > 0$

*Док-во:*

Будем считать, что X принимает конечное количество значений

$$EX = \sum_k y_k P(x = y_k) + \sum y_k * P(X = y_k) \geq \sum_{k:y>a} = a * P(X > a)$$

**Неравенство Чебышова**

Пусть X – любая случайная величина. Тогда

$$\forall a > 0 \qquad P(|X - EX| > a) \le \frac{DX}{a^2}$$

Док-во:
Рассмотрим $(X - EX)^2$.

$$P((X - EX)^2 > a^2) \le \frac{E(X - EX)^2}{a^2}$$

На примере сильно пьяного мужика :)

Он выходит из кабака и у него есть выбор, пойти на право или налево. При условии, что не в одну из сторон нет горки, вероятность обоих событий 1/2.

Будем считать, что мужик не трезвеет

Воспользуемся неравенством чебышова, где:

$$X_i = \begin{cases} +1 \text{ вер. } \frac{1}{2} \\ -1 \text{ вер. } \frac{1}{2} \end{cases} \qquad DX_i = (EX_i)^2 - (EX_i)^2 = 1$$

$$Y_n = X_1 + ... + X_n, EY_n = EX_i + ... + EX_n = 0$$

С какой вероятностью пьяница ушёл на растояние, больше чем *a*?

$$P(Y_n > a) = P(Y_n - EY_n > a) \le P(|Y_n - EY_n| > a)$$

$$\le \frac{DY_n}{a^2} = \frac{n}{a^2}$$

Пример: какова вероятность, что мужчина сделает $n = 10^6$ шагов и уйдёт на $a = 10^4$?

$\frac{10^6}{10^8} = \frac{1}{100}$ – вероятность того, что пьяница за 1 000 000 шагов “ушкандыбает” на 10 000 шагов < $\frac{1}{100}$

*Но это не верно :)*

Обратим внимание на следующее

Теорема: $P(Y_n > a) \le e^{-\frac{a^2}{2n}}$ (пример: $e^{-\frac{10^8}{2}*10^6}$. Это ОЧЕНЬ маленькое число)

То есть вероятность уйти из кабака на 1 000 000 шагов очень мала. Это объясняет алкаголизм :)
**Азума-Хёвдинг**

Доказательство

$$P(Y_n > a) = P(\lambda * Y_n > \lambda * a) = P\left(e^{\lambda Y} > e^{\lambda a}\right) \le \left(E\left(e^{\lambda * Y_n}\right)\right)e^{-\lambda a}$$

$$E\left(e^{\lambda Y_n}\right) = E\left(e^{\lambda(x_1 + \ldots + x_n)}\right) = E\left(e^{\lambda x_1} * e^{\lambda x_2} * \ldots * e^{\lambda x_n}\right) = \\ = E\left(e^{\lambda x_1}\right) * \ldots * E\left(e^{\lambda x_n}\right)$$

$$E\left(e^{\lambda x_1}\right) = \frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}$$

$$\left(\frac{1}{2}e^{\lambda} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\sum_k^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{1}{2}\sum_k^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!}\right) = \\ = \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2l}}{(2l)!}\right)^n \le \left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2l}}{l! * 2^l}\right)^n = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^l}{l!} = \left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right)^n = e^{\frac{\lambda^2 n}{2}}$$

Что и требовалось доказать.