От красоты математики к ее приложениям

Андрей Михайлович Райгородский

09.07.2025

Системы представителей. Задача о составлении команды на олимпиаду

Есть 20 школьников, которые тренируются в олимпиадной школе. Им и их наставникаи известно, что через год будет большая математическая командная олимпиада, куда нужно выставить сильную команду. В команде кто-то может решать задачи одного типа, кто-то другого, но в совокупности должны решить все задачи. Будем считать, что у нас есть перечень из 18 математических дисциплин, задачи по которой нужно уметь решать:

- комбинаторика,
- геометрия (планиметрия),
- теория чисел,
- алгебра,

...,

- стереометрия.

Это задача прикладная, и у нее есть ограничение, а именно бюджет на билеты, гостиницу и т. д., то есть мы не можем отправить всех 20 школьников.

Нужно минимизировать количество людей, но выбрать тех, которые смогут решить все. Нельзя ожидать, что среди 20 человек найдется человек, который все 18 предметов будет решать одинакого хорошо. В худшем случае нужно будет отправить 18 человек (по одному на предмет).

Через год будем отбирать не самого лучшего в предмете, а пятерых лучших в каждом предмете. Это лучше, чем закладывать 18 лучших в каждой области, так как пятерки людей будет пересекаться. Точно найдутся школьники, которые послужат представителями нескольких предметов, как максимум 17.

На сколько меньше сможем собрать людей?

Пронумеруем школьников $1, 2, ..., 20$

Глупая идея: никого не тренировать и заранее решить, что пойдут люди $1, 2, ..., 16$. Формально результат тот, который мы хотим. В конце года дадим задачи и отсортируем лучших. Точно попадут люди, лучшие в предмете ($(17, 18, 19, 20)$ — всего 4 человека). Таким образом мы оптимизируем до 16-и человек.

Двойной счет

Как бы не сформировались пятерки, они пересекутся (какой-то школьник будет хорошо знать 2 предмета).

Обязательно найдется школьник, который послужит представителем хотя бы пяти предметов.

Доказательство.

Допустим, мы нашли по пять лучших в каждом предмете, всего 18 групп. Нас интересует человек на пересечении групп, которого точно отправим на олимпиаду.

Высота — количество предметов, представителем которых служит школьник.

$$20r \geq 5 * 18$$

$$r \geq 90/20 = 4,5$$

Если отправим на олимиаду его, то нужно еще максимум 13 школьников (Всего сейчас 14, и до этого мы шли с арифметической прогрессией с шагом 2).

Данный подход похож на жадный алгоритм. Сделаем второй шаг. Одного представителя на 5 предметов мы точно найдем. Осталось 13 предметов, и 19 человек. Снова запустим жадный алгоритм и найдем еще одного представителя многих предметов:

$$\left\lceil \frac{(5 * 13)}{19} \right\rceil = 4$$

Теперь 9 предметов и 18 человек:

$$\left\lceil \frac{(5 * 9)}{18} \right\rceil = 3$$

Осталось 6 предмета и 17 человек:

$$\left\lceil \frac{5 * 6}{17} \right\rceil = 2$$

Осталось 4 предмета и 16 человек:

$$\left\lceil \frac{5 * 4}{16} \right\rceil = 2$$

Последняя попытка:

$$\left\lceil \frac{2 * 5}{15} \right\rceil = 1$$

Добавим двоих, в сумме получилось 7.

Мы заинтересованы тренировать хорошо, чтобы худший из пятерки решал хорошо, но при этом мы можем заложить бюджет на 7-х школьников.

Оценка снизу

Оценка сверху - семи точно хватит. Оценить снизу - придумать ситуацию, при которой потребуется много школьников.

Допустим, комбинаторики $1, 2, 3, 4, 5$,

геометрия $6, 7, 8, 9, 10$,

теория чисел $11, 12, 13, 14, 15$,

алгебра $16, 17, 18, 19, 20$.

То есть, иногда потребуется четверо . Нужна точная граница, сколько человек потребуется.

Докажем, что есть ситуация, когда потребуется 6 человек. Рассмотрим человек с номерами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Разных пятерок из них можно составить 6. Теоретически возможно, что первые 6 предметов будет представлены этими людьми. На эти шесть пятерок нельзя отправить одного человека, потому что есть пятерка без него, но двоих людей можно можно.

Дальше с пятерки от 7-го до 12-го тоже потребуются 2 человека, не пересекающимися с людьми $1, 2, ..., 6$. $13, 14, ..., 18$ — еще 2 человека. Суммарно потребуется 6 человек в команду.

Большой вызов: 6 или 7?

7 школьников всегда хватает, но иногда требуется шесть. Вопрос в том, можно ли снизить до 6-и жадный плгоритм, или необходимо увеличить оптимизацию до семи.

Объекты в математике, с которыми мы работали

Граф: $\bigvee$ - вершины, E- ребра, связи между парами вершин.

Гиперграф: $\bigvee$ — вершины, E — ребра, формируюся не на парах вершин, а на группах вершин.

Многомерный симплекс — это ребро гиперграфа.

Заключение

Допустим, будет не 20 школьников, а 100, и группы по 7 человек, а не по 5.

20 превратим в n, 18 в s, 5 в k.

τ — размер самой маленькой системы представителей для группы множеств.

$\tau \leq max\{\frac{n}{k}, \frac{n}{k} \cdot lm \cdot \frac{sk}{n}\} + \frac{n}{k} + 1$

В общем случае можно доказать, что оценка жадного алгоритма в некотором смысле почти не улучшаема.