Конспект лекции А.М. Райгородского

Вероятностный метод в комбинаторике. Неравенства для сумм независимых случайных величин.

1. Комбинаторная задача: Раскраска гиперграфа

- **1.1. Интуитивная постановка («Сардельки в кастрюльке»)**
  Лекция начинается с комбинаторной задачи. Представим множество из n элементов как "кастрюльку", а m его произвольных подмножеств — как "сардельки". Задача состоит в том, чтобы найти универсальную раскраску всех элементов в два цвета так, чтобы в каждой "сардельке" цвета были распределены максимально равномерно.

- **1.2. Формулировка теоремы**
  Для любого множества N из n элементов и любого семейства из m его подмножеств $\{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ **всегда** существует раскраска элементов N в два цвета (например, красный и синий) такая, что для **каждого** подмножества M_i выполнено:

$$|(\text{число красных в } M_i) - (\text{число синих в } M_i)| \le \sqrt{2n \cdot \ln(2m)}$$

2. Вероятностный подход: Модель случайного блуждания

Для доказательства подобных утверждений используется мощный вероятностный метод. Его работа иллюстрируется на классической модели.

- **2.1. Физическая модель («Задача о пьянице»)**
  Объект («пьяница») начинает движение из точки 0 («кабак»). На каждом шаге он с равной вероятностью смещается на +1 или -1.

- **2.2. Математическая модель**
  - X_i — случайная величина, соответствующая i-му шагу: $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$.
  - $Y_n = \Sigma$ (от $i=1$ до n) X_i — положение объекта после n независимых шагов.
  - Математическое ожидание: $E[Y_n] = 0$.
  - Дисперсия: $D[Y_n] = n$.

- **2.3. Оценка с помощью неравенства Чебышёва**
  Неравенство Чебышёва $P(|Y_n - E[Y_n]| \ge a) \le D[Y_n] / a^2$ даёт первую, но слабую оценку вероятности большого уклонения.
  - **Пример:** Для $n = 10^6$ шагов и уклонения $a = 10^4$, вероятность $P(|Y_n| \ge 10^4) \le 10^6 / (10^4)^2 = 1/100$.

3. Усиление оценки: Экспоненциальные неравенства

Неравенство Чебышёва даёт полиномиальную оценку. Для суммы независимых случайных величин существуют гораздо более сильные экспоненциальные оценки.

- **3.1. Неравенство Азумы-Хёфдинга (частный случай)**
  Для модели случайного блуждания верно следующее неравенство:

$P(Y_n \geq a) \leq \exp(-a^2 / (2n))$

- **3.2. Сравнение оценок**
  Для того же примера ($n=10^6$, $a=10^4$), новая оценка даёт $\exp(-(10^4)^2 / (2 \cdot 10^6)) = \exp(-50)$. Это астрономически малое число, что демонстрирует огромную мощь экспоненциальных оценок по сравнению с неравенством Чебышёва.

4. Доказательство экспоненциального неравенства

Цель: Доказать, что $P(Y_n \geq a) \leq \exp(-a^2 / 2n)$.

- **Шаг 1: Применение экспоненты и неравенства Маркова (трюк Чернова)**
  Для любого $\lambda > 0$, в силу монотонности экспоненты, $P(Y_n \geq a) = P(e^{\lambda Y_n} \geq e^{\lambda a})$.
  Применяем неравенство Маркова к неотрицательной случайной величине $e^{\lambda Y_n}$:
  $\ldots \leq E[e^{\lambda Y_n}] / e^{\lambda a} = E[e^{\lambda Y_n}] \cdot e^{-\lambda a}$.

- **Шаг 2: Оценка математического ожидания через независимость**
  $E[e^{\lambda Y_n}] = E[e^{\lambda \Sigma X_i}] = E[\Pi_i e^{\lambda X_i}]$.
  Так как шаги X_i независимы, то и $e^{\lambda X_i}$ независимы. Математическое ожидание произведения независимых величин равно произведению их математических ожиданий:
  $\ldots = \Pi_i E[e^{\lambda X_i}] = (E[e^{\lambda X_1}])^n$.

- **Шаг 3: Аналитическая оценка $E[e^{\lambda X_1}]$**
  $E[e^{\lambda X_1}] = (1/2)e^{\lambda} + (1/2)e^{-\lambda}$.
  Это выражение (гиперболический косинус $ch(\lambda)$) можно оценить сверху с помощью рядов Тейлора. Доказывается, что $ch(\lambda) \leq e^{\lambda^2/2}$.
  Следовательно, $E[e^{\lambda Y_n}] \leq (e^{\lambda^2/2})^n = e^{n\lambda^2/2}$.

- **Шаг 4: Минимизация верхней границы**
  Подставляем оценку из Шага 3 в неравенство из Шага 1:
  $P(Y_n \geq a) \leq e^{n\lambda^2/2} \cdot e^{-\lambda a} = e^{n\lambda^2/2 - a\lambda}$.
  Эта оценка верна для любого $\lambda > 0$. Для получения наилучшего результата необходимо минимизировать показатель $f(\lambda) = n\lambda^2/2 - a\lambda$. Это парабола с ветвями вверх, минимум которой достигается в вершине при $\lambda_{opt} = a/n$.

- **Шаг 5: Получение итогового результата**
  Подставляем оптимальное значение $\lambda = a/n$ в показатель степени:
  $n(a/n)^2/2 - a(a/n) = a^2/(2n) - a^2/n = -a^2/(2n)$.
  В итоге получаем: $P(Y_n \geq a) \leq \exp(-a^2/(2n))$.

Что и требовалось доказать.