Математика и её приложения

Проводил лекцию:
Райгородский А. М.[1]

Пишет конспект:
Бауэр Н. В.[2]

05.07.2025

***Keywords*.** Мат. Статистика · Искусственный интеллект

1 Теорема Эрдёша

Допустим $n \in N$

$M = \{M_1, M_2, ..., M_n\}$,

$L = \{M_2, M_3, ..., M_n\}$

$L \subset M$

Тогда по т. Эрдёша

Существует такая раскраска вершин в красный и синий цвета, такая, что в каждом множестве M_i разность числа красных и числа синих вершин по модулю не больше чем $\sqrt{2n \ln(2m)}$. *Функция возрастает очень медненно и примерно равна* $\sqrt{n}$.

При $m = n$

для любого $V_i |M_i| = \frac{n}{2}$

Формула равна $\sqrt{2n \ln(2n)}$

(От себя) Кратко об идее доказательства: Теорема доказывается вероятностным методом: если выбрать случайную раскраску, то с очень большой вероятностью в любом подмножестве как раз и будет такой дисбаланс.

2 Мат. ожидание и дисперсия

Математическое ожидание — это среднее значение, которое примет случайная величина при большом количестве повторных испытаний. По сути, это "средневзвешенный исход" с учётом вероятностей всех возможных значений.

$\mathrm{EX} = \sum_k y_k P(x = y_k) = \sum_{i=1} (k) y_i P(x = y_k)$

Дисперсия — это мера разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания. Она показывает, насколько вероятные значения отклоняются от среднего. $\mathrm{D(X)} = \mathrm{E(X - E(X))^2} = \mathrm{E(X^2 - 2X \cdot E(X) + (E(X))^2)} = \mathrm{E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X)} + \mathrm{(E(X))^2} = \mathrm{E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2} = \mathrm{E(X^2) - (E(X))^2}$

То есть,

$\mathrm{D(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

3 Неравенство Маркова

Пусть случайная величина X принимает только неотрицательные значения. Тогда для любого a > 0 выполняется:

$P(X > a) \leq \frac{E(X)}{a}$

То есть вероятность того, что X превысит порог a, не больше, чем отношение математического ожидания X к этому порогу.

3.1 Доказательство неравенства Маркова

$\mathrm{EX} = \sum_{k:y_k>a} y_k P(X = y_k) + \sum_{k:y_k\leq a} y_k P(X = y_k)$

Так как X - положительная случайная величина, второй член неотрицательный. Его можно отбросить.

$$\mathrm{EX} \geq \sum_{k:y_k>a} y_k P(X = y_k)$$

Если $y_k > a$, то $y_k \geq a$. Поэтому заменим y_k на a в сумме.

$\mathrm{EX} \geq \sum_{k:y_k>a} aP(X = y_k)$

a - константа, можно вынести за знак суммы.

$\mathrm{EX} \geq a \sum_{k:y_k>a} P(X = y_k)$

Сумма вероятностей событий, где $y_k > a$, равна $P(X > a)$.

$\mathrm{EX} \geq aP(X > a)$

Перегруппируем члены:

$P(X > a) \leq \frac{\mathrm{EX}}{a}$

Ч.Т.Д

4 Неравенство Чебышёва:

Пусть X — любая случайная величина. Тогда для любого a > 0:

$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{D(X)}{a}{}^2$

Где E(X) — математическое ожидание X, а D(X) — дисперсия X.

Доказательство: Рассмотрим случайную величину Y = (X − E(X))² (она всегда неотрицательна). По неравенству Маркова для неотрицательной случайной величины Y и числа a²:

$P(Y \geq a^2) \leq \frac{E(Y)}{a}{}^2$

Но

$P(Y \geq a^2) = P((X - E(X))^2 \geq a^2) = P(|X - E(X)| \geq a)$

А

$E(Y) = E((X - E(X))^2) = D(X)$

Значит, $P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{D(X)}{a}{}^2$

Это и есть неравенство Чебышёва.

Ч.Т.Д

5 Практика: игра в пьяницу

Условие задачи игры в пьяницу:

Пьяница находится в кабаке на отметке 0 на числовой прямой. На каждом шаге он с равной вероятностью $\frac{1}{2}$ может сделать шаг либо вправо $(+1)$, либо влево (-1).

$X_i = \{+1 \text{ с вероятностью } \frac{1}{2} - 1 \text{ с вероятностью } \frac{1}{2}\}$

$$Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$E(X_i) = 0E(Y_n) = E(X_1) + ... + E(X_n) = 0$$

$$D(X_i) = E({X_i}^2) - (E(X_i))^2 = 1D(Y_n) = D(X_1) + ... + D(X_n) = n$$

Далее неравенство Чебышёва для суммы:

$$P(Y_n > a) = P(Y_n - E(Y_n) > a) \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq a) \leq \frac{D(Y_n)}{a}{}_2 = \frac{n}{a}{}_2$$

$$\text{Далее подставляются числа: } n = 10^6, a = 10^4 \ \frac{n}{a}{}_2 = \frac{10^6}{10^8} = \frac{1}{100}$$

Объяснение для подстановки: если сделать миллион шагов и спросить, что вероятность уйти дальше чем на десять тысяч, она $\leq 1/100$.

6 Азума - Хёффдинг

На практике оказалось, что прошлый подход даёт слишком высокую вероятность.

Т $\quad P(Y_n > a) \leq e^{-\frac{a^2}{2}n} e^{-\frac{10^8}{2} \cdot 10^6} = e^{-50}$

Азумо-Хёффдинг

$\mathrm{e} = 2.718281828459045...$

$\lim(x \to \infty)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$Y_n = X_1 + ... + X_n \ X_i = \left\{+1, \text{вер. } \frac{1}{2}; -1, \text{вер. } \frac{1}{2}\right\}$

$P(Y_n \geq a) = P(\lambda Y_n \geq \lambda a) = P\left(e^{\lambda Y_n} \geq e^{\lambda a}\right) \leq \left(E\left(e^{\lambda Y_n}\right)\right) \cdot e^{\lambda a}$

$E\left(e^{\lambda Y_n}\right) = E(e^{\lambda(X_1 + ... + X_n)} == E\left(e^{\lambda X_1} e^{\lambda X_2} ... e^{\lambda X_n}\right) = E\left(e^{\lambda X_1}\right) \cdot ... \cdot E\left(e^{\lambda X_n}\right) = \left(E\left(e^{\lambda X_1}\right)\right)^{\mathrm{n}}$

$E\left(e^{\lambda X_1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)e^{\lambda} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^k}{2}\right] \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^{\{2l\}}}{(2l)!} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^l}{(2l)!} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2)^l}{l!}{}^2 = e^{\lambda^2}$ (по биномиальной теореме)

Следовательно, $E\left(e^{\frac{\lambda Y_n}{2}}\right) \leq \left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right)^{\mathrm{n}} = e^{\frac{n\lambda^2}{2}}$

7 Работа с примером

$\text{ТР}(\text{У}_n > a) \leq e^{\frac{-a^2}{2n}}$

$\frac{a^2}{2n} \cdot \frac{n}{2} - \frac{a^2}{n} = \frac{-a^2}{2n} \lim(x \to \infty)\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

$e^x = \sum\left(\frac{x^k}{k!}\right)k = 0$

$Y_n = X_1 + ... + X_n$

$P(Y_n > a) = P(\lambda Y_n > \lambda a) = P\left(e^{\lambda Y_n} > e^{\lambda a}\right) \leq \mathrm{E}\left(e^{\lambda Y_n}\right)e^{-\lambda a} \leq e^{\frac{\lambda^2 n}{\Sigma} - \lambda a}$

a / n : λ