Конспект лекции А.М. Райгородского

Применение комбинаторики и теории гиперграфов
Спикер: Андрей Михайлович Райгородский
Доктор физико-математических наук,
Заведующий лабораторией продвинутой комбинаторики и сетевых приложений,
Заведующий кафедрой дискретной математики
Московского физико-технического института (государственного университета)

Постановка задачи

- **Цель:** Сформировать минимальную команду школьников для математической олимпиады
- **Параметры:** $\begin{cases} n = 20 & \text{школьников} \\ s = 18 & \text{предметов} \\ k = 5 & \text{лучших по каждому предмету} \end{cases}$
- **Требование:** Каждый предмет должен быть представлен хотя бы одним экспертом из топ-k
- **Ограничение:** Минимизировать размер команды из-за бюджетных ограничений

Наивные подходы

Таблица 1: Сравнение подходов

Стратегия	Размер команды	Недостатки
Отправка всех	20	Неэффективно по бюджету
По одному на предмет	18	Игнорирует специализацию
"Идиотская идея"	16	$\frac{5 \times 18}{20} = 4.5 \Rightarrow$ гарантия пересечений

Оптимизация через релаксацию

Идея: Выбирать топ-k вместо одного эксперта
Принцип Дирихле :

Сумма слотов: $18 \times 5 = 90$
Среднее: $r = \frac{90}{20} = 4.5$
$\Rightarrow \exists$ *школьник с* ≥ 5 *предметами*

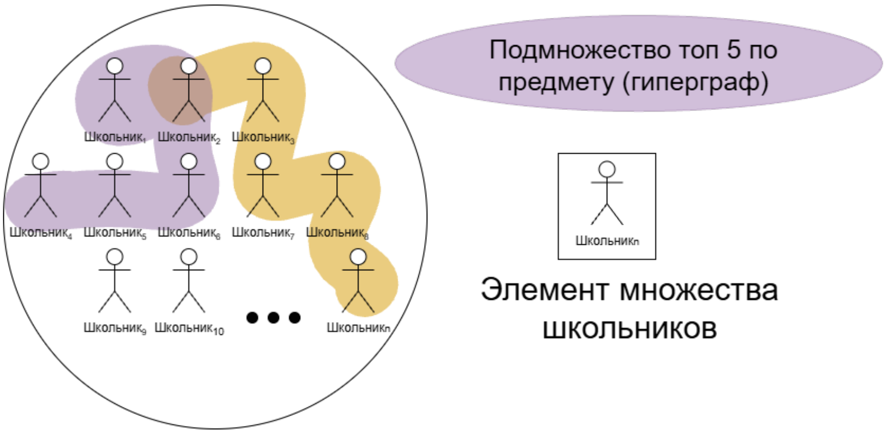

Рис. 1: Визуализация объединения по 5 школьников, всего 18 подмножеств

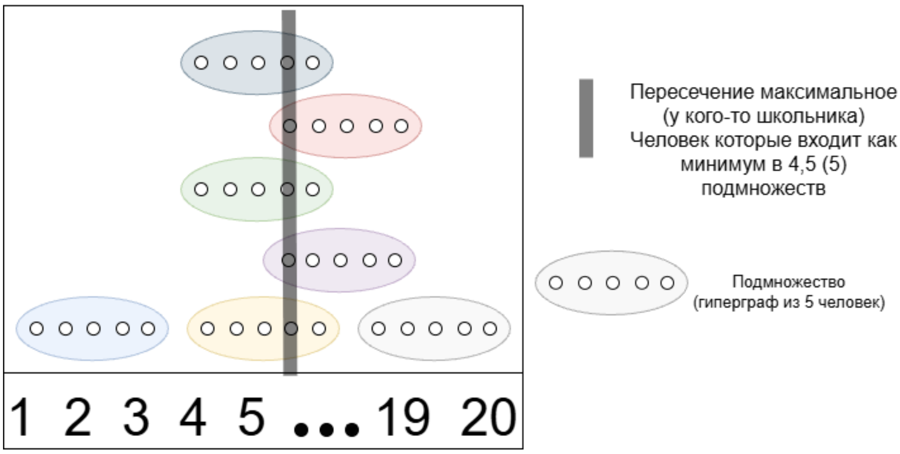

Рис. 2: Пронумеруем школьников по другому и посмотрим максимальное пересечения подмножеств, этот школьник разбирается сразу в 5 предмета

Жадный алгоритм

1. Выбрать школьника с макс. покрытием предметов
2. Исключить покрытые предметы
3. Повторить для оставшихся

Таблица 2: Пошаговое выполнение алгоритма

Шаг	s	n	$\left\lceil \frac{k \cdot s}{n} \right\rceil$	Команда	Остаток
1	18	20	$\left\lceil \frac{5 \times 18}{20} \right\rceil = 5$	+1	13/19
2	13	19	$\left\lceil \frac{5 \times 13}{19} \right\rceil = 4$	+1	9/18
3	9	18	$\left\lceil \frac{5 \times 9}{18} \right\rceil = 3$	+1	6/17
4	6	17	$\left\lceil \frac{5 \times 6}{17} \right\rceil = 2$	+1	4/16
5	4	16	$\left\lceil \frac{5 \times 4}{16} \right\rceil = 2$	+1	2/15
6	2	15	$\left\lceil \frac{5 \times 2}{15} \right\rceil = 1$	+2	0
			Итого	**7**	

Оценка минимального размера команды

Пример 1: Непересекающиеся группы

$$
\begin{aligned}
&\text{Комбинаторика: } \{1-5\} \\
&\text{Геометрия: } \{6-10\} \\
&\text{Теория чисел: } \{11-15\} \\
&\text{Алгебра: } \{16-20\} \\
\Rightarrow &\tau \geq 4
\end{aligned}
$$

Пример 2 (оптимальная конструкция):

- Разделим 18 школьников на 3 группы по 6
- Для группы $\{1-6\}$ создаем 6 пятерок:

$$A_1 = \{1,2,3,4,5\},\ A_2 = \{1,2,3,4,6\},\ \ldots,\ A_6 = \{2,3,4,5,6\}$$

- Аналогично для $\{7-12\}$ и $\{13-18\}$
- $\forall$ группы требуется ≥ 2 человек
- Итого: $3 \times 2 = 6$ человек

Теоретическое обоснование

Гиперграф $T = (V, E)$:

- $V = \{v_1, \ldots, v_{20}\}$ - школьники
- $E = \{e_1, \ldots, e_{18}\}$ - гиперрёбра (топ-5 по предметам)

Оценка покрытия:

$$\tau \leqslant \max\left(\frac{n}{k},\ \frac{n}{k} \cdot \ln\left(\frac{s \cdot k}{n}\right)\right) + \frac{n}{k} + 1$$

Для $n = 20,\ s = 18,\ k = 5$:

$$\tau \leqslant \max(4,\ 4 \cdot \ln(4.5)) + 4 + 1 \approx \max(4, 6.0) + 5 = 11 \quad \text{(грубая оценка)}$$

Уточненная оценка жадным алгоритмом: $\tau \leqslant 7$

Заключение

- **Практический вывод:** Инвестиции в обучение ($\uparrow k$) снижают размер команды
- **Математический результат:** $6 \leqslant \tau \leqslant 7$