Математика и её приложения.

Конспект лекции А.М. Райгородского.

4 июля 2025

Содержание

1 Гиперграфы и раскраска множеств

Рассмотрим множество $R_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, состоящее из n элементов. Определим гиперграф как совокупность множеств $M_1, M_2, \ldots, M_m \subseteq R_n$, где каждое M_i представляет собой гиперребро, соединяющее группу вершин.

Теорема 1 (О существовании сбалансированной раскраски)**.** *Для любого набора подмножеств $M_1, \ldots, M_m \subseteq R_n$ существует раскраска множества R_n в два цвета (красный и синий), такая что для каждого подмножества M_i выполняется:*

$$|\textit{Число красных вершин} - \textit{Число синих вершин}| \leq \sqrt{2n\ln(2m)}$$

Доказательство. Используем вероятностный метод. Присвоим каждой вершине случайную величину $X_j \in \{+1, -1\}$ с равной вероятностью $\frac{1}{2}$. Для каждого подмножества M_i определим случайную величину $S_i = \sum_{j \in M_i} X_j$. Тогда математическое ожидание $\mathbb{E}[S_i] = 0$, а дисперсия $\mathrm{Var}(S_i) \leq n$. Применяя неравенство Хёфдинга, получаем:

$$\mathbb{P}(|S_i| > t) \leq 2e^{-t^2/(2n)}$$

Выбирая $t = \sqrt{2n\ln(2m)}$, вероятность события $|S_i| > t$ будет меньше $\frac{1}{m}$. Объединяя все m событий, получаем ненулевую вероятность существования нужной раскраски. □

2 Неравенства теории вероятностей

2.1 Неравенство Маркова

Теорема 2 (Неравенство Маркова)**.** *Для неотрицательной случайной величины X и любого $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину X, принимающую конечное число значений $y_1, \ldots, y_k$. Тогда:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{k} y_i \mathbb{P}(X = y_i) \geq \sum_{y_i \geq a} y_i \mathbb{P}(X = y_i) \geq a \sum_{y_i \geq a} \mathbb{P}(X = y_i) = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

Деление на a завершает доказательство. □

2.2 Неравенство Чебышева

Теорема 3 (Неравенство Чебышева)**.** *Для произвольной случайной величины X и $a > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{Var(X)}{a^2}$$

Доказательство. Применим неравенство Маркова к случайной величине $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$:

$$\mathbb{P}((X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}$$

Замечая, что $|X - \mathbb{E}[X]| \geq a$ эквивалентно $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq a^2$, получаем требуемое. □

3 Пример: Случайное блуждание пьяницы

Рассмотрим случайное блуждание на прямой:

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad X_i = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2} \end{cases}$$

Следствие 1. *Для $n = 10^6$ шагов и $a = 10^4$:*

$$\mathbb{P}(|Y_n| > a) \leq \frac{n}{a^2} = \frac{10^6}{10^8} = 0.01$$

Однако экспоненциальная оценка даёт более точный результат:

$$\mathbb{P}(Y_n > a) \leq e^{-a^2/(2n)} = e^{-50} \approx 1.9 \times 10^{-22}$$

Доказательство. Используем метод экспоненциальных моментов. Для $\lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(Y_n > a) = \mathbb{P}(e^{\lambda Y_n} > e^{\lambda a}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda Y_n}]}{e^{\lambda a}}$$

Вычислим производящую функцию:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Y_n}] = \left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n \leq \left(e^{\lambda^2/2}\right)^n = e^{n\lambda^2/2}$$

Оптимизируя по λ, получаем $\lambda = \frac{a}{n}$, что приводит к итоговой оценке. □

Заключение

Мы узнали, что такое гиперграфы и как можно раскрасить множество в два цвета так, чтобы ни одно подмножество не было слишком несбалансированным — для этого использовали вероятностный метод. Также разобрали важные неравенства теории вероятностей: Маркова и Чебышева, которые помогают оценивать, насколько вероятно, что случайная величина сильно отклонится от своего среднего значения. В конце посмотрели пример со случайным блужданием пьяницы и поняли, как с помощью этих неравенств можно оценить вероятность больших отклонений по прямой. Всё это показывает, как математика помогает понимать случайные процессы.