Конспект лекции: «Математика и её приложения» А.М. Райгородского

Автор: Мещеряков Марк (Н07-1)

1 Гиперсардельки и теорема о раскрасках

Определение 1. *Пусть дано основное множество (“кастрюлька”) из n элементов, которое мы для простоты считаем $N = \{1, 2, \dots, n\}$. В этом множестве зафиксировано семейство из m произвольных подмножеств (“сарделек”): $M_1, M_2, \dots, M_m$, где каждое $M_i \subseteq N$. Такая структура в комбинаторике называется **гиперграфом**.*

Теорема 1. *Для любого множества N мощности n и любого семейства из m его подмножеств всегда существует **раскраска** элементов N в два цвета (например, красный и синий) такая, что для **каждого** подмножества M_i выполняется условие:*

$$|(\textit{число красных в } M_i) - (\textit{число синих в } M_i)| \le \sqrt{2n \ln(2m)}.$$

Интерпретация: Какое бы хитрое семейство подмножеств мы ни взяли, всегда можно так раскрасить все элементы исходного множества, что *каждое* из подмножеств окажется сбалансированным по цветам — разница в количестве элементов двух цветов будет мала по сравнению с мощностью самого множества. Для доказательства этой теоремы требуются мощные инструменты из теории вероятностей.

2 Вероятности

2.1 Базовые определения

Определение 2 (Математическое ожидание)**.** *Для дискретной случайной величины X, принимающей значения y_k с вероятностями $p_k = \mathsf{P}(X = y_k)$, математическое ожидание определяется как взвешенная сумма ее значений:*

$$\mathbb{E}[X] = \sum_k y_k \cdot \mathsf{P}(X = y_k).$$

Определение 3 (Дисперсия)**.** *Дисперсия измеряет среднеквадратичное отклонение случайной величины от ее математического ожидания.*

$$\mathrm{D}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$

Также справедлива более удобная для вычислений формула:

$$\mathrm{D}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

2.2 Фундаментальные неравенства

Неравенство 1 (Неравенство Маркова)**.** *Пусть* X *— неотрицательная случайная величина* ($X \geq 0$)*. Тогда для любого* $a > 0$ *справедливо:*

$$\mathsf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}.$$

Неравенство 2 (Неравенство Чебышёва)**.** *Пусть* X *— любая случайная величина с конечными* $\mathbb{E}[X]$ *и* $\mathrm{D}(X)$*. Тогда для любого* $a > 0$ *справедливо:*

$$\mathsf{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{D}(X)}{a^2}.$$

Доказательство: Неравенство Чебышёва является следствием неравенства Маркова. Рассмотрим неотрицательную случайную величину $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$. Применим к ней неравенство Маркова с константой a^2:

$$\mathsf{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a^2}.$$

Заметим, что $Y \geq a^2$ эквивалентно $|X - \mathbb{E}[X]| \geq a$, а $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathrm{D}(X)$. Подставляя это, получаем требуемый результат.

3 Модель случайного блуждания

Рассмотрим модель симметричного случайного блуждания (“блуждание пьяницы”) на прямой $\mathbb{Z}$.

- В начальный момент времени $t = 0$ блуждающий находится в точке 0.
- На каждом шаге он сдвигается на $+1$ с вероятностью $1/2$ или на -1 с вероятностью $1/2$.
- Шаги независимы. Пусть X_i — случайная величина, равная сдвигу на i-м шаге. Тогда $\mathsf{P}(X_i = 1) = \mathsf{P}(X_i = -1) = 1/2$.
- $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ — положение блуждающего после n шагов.

Характеристики Y_n:

1. $\mathbb{E}[X_i] = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$.
2. $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = 0$. В среднем блуждающий остается в начале.
3. $\mathrm{D}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = 1 - 0 = 1$.
4. $\mathrm{D}(Y_n) = \mathrm{D}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}(X_i) = n$ (в силу независимости).

Применение неравенства Чебышёва: Вероятность отклонения от начала координат (мат. ожидания) на расстояние не менее a:

$$\mathsf{P}(|Y_n| \geq a) = \mathsf{P}(|Y_n - \mathbb{E}[Y_n]| \geq a) \leq \frac{\mathrm{D}(Y_n)}{a^2} = \frac{n}{a^2}.$$

Пример: Пусть $n = 10^6$ шагов. Какова вероятность уйти на расстояние $a = 10^4$?

$$\mathsf{P}(|S_{10^6}| \geq 10^4) \leq \frac{10^6}{(10^4)^2} = \frac{10^6}{10^8} = 0.01.$$

Эта оценка показывает, что вероятность уйти далеко мала, но она является довольно грубой.

4 Усиление оценки с помощью Неравенства Хёфдинга

Существуют гораздо более сильные оценки, одна из которых (частный случай неравенства Хёфдинга) утверждает:

Неравенство 3. *Для* $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *где* X_i *— независимые случайные величины с* $\mathsf{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$, *и любого* $a > 0$*:*

$$\mathsf{P}(Y_n \geq a) \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}.$$

Пример (продолжение): Для $n = 10^6$ и $a = 10^4$:

$$\mathsf{P}(S_{10^6} \geq 10^4) \leq e^{-\frac{(10^4)^2}{2 \cdot 10^6}} = e^{-\frac{10^8}{2 \cdot 10^6}} = e^{-50}.$$

Это неизмеримо более сильная оценка, чем 0.01.