

Занятие 1. Научный листочек

1. Нарисуйте планарно на торе (а) $K_{3,3}$ (б*) K_7 .
2. Пусть дан граф G без петель. Алиса и Боб получают две вершины заданного графа u и v соответственно, и хотят узнать, существует ли ребро (u, v) . Докажите, что коммуникационная сложность данной задачи не менее $\log \chi(G)$, где $\chi(G)$ – хроматическое число графа G (*Подсказка:* попробуйте предъявить хорошую раскраску, если есть короткий коммуникационный протокол).
3. Покажите, что если I, J идеалы в кольце R , то выполняются равенства

$$\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

Приведите пример, когда $\sqrt{IJ} \neq \sqrt{I}\sqrt{J}$
 $\sqrt{I} := \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} x^n \in I\}$.

4. (*) Трое мальчиков решают, кому водить в игре. Для этого каждый из них одновременно с другими "выбрасывает" на пальцах число от 0 до 5. Три числа складываются и сумма отсчитывается по кругу, начиная с заранее выбранного мальчика (ему соответствует ноль). Водить будет тот, на ком остановится счет. Однакова ли вероятность водить у всех трех мальчиков?
При каком числе мальчиков этот метод является справедливым, а при каком – нет?
5. Пусть $\{a_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{N}}$ – двойная последовательность вещественных чисел (ее следует понимать как отображение множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в множество вещественных чисел). Справедливо ли неравенство

$$\sup \{\inf \{a_{mn} \mid n \in \mathbb{N}\} \mid m \in \mathbb{N}\} \leq \inf \{\sup a_{mn} \mid m \in \mathbb{N}\} \mid n \in \mathbb{N}\}?$$

6. Какие из следующих языков задаются грамматиками? Задайте или докажите, что это невозможно.
 - (а) $\{a^{2n}b^{3n+1} \mid n \geq 0\}$
 - (б) $\{a^{n^3} \mid n \geq 0\}$
 - (в) $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$
 - (г*) $\{ucv \mid u \neq v, u, v \in \{a,b\}^*\}$
7. Приведите пример таких замкнутых множеств X и Y на \mathbb{R} , что множество $X + Y$ не замкнуто.