

# Exercice ex01 : L'INTRICATION QUANTIQUE (ÉTAT DE BELL)

## Sujet :

Écrivez un programme qui produira un circuit quantique avec deux qubits afin d'obtenir cet état  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0.0\rangle + |1.1\rangle)$  en utilisant le principe de superposition et d'intrication quantique.

## Analyse:

L'état quantique  $|\psi\rangle$  appelé **2-qubit** est la réunion de 2 qubit et est défini par la superposition :

$$|\psi\rangle = \alpha|0.0\rangle + \beta|0.1\rangle + \gamma|1.0\rangle + \delta|1.1\rangle \quad (1)$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$

$|\psi\rangle$  à par convention une **norme** égale à **1** donc :

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$$

La mesure d'un 2-qubit, donne 2 bits classique:

- [0.0] avec une probabilité  $|\alpha|^2$ .
- [0.1] avec une probabilité  $|\beta|^2$ .
- [1.0] avec une probabilité  $|\gamma|^2$ .
- [1.1] avec une probabilité  $|\delta|^2$ .

Pour l'état demandé dans le sujet, on a:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0.0\rangle + |1.1\rangle) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}|0.0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1.1\rangle$$

qui peut s'écrire :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0.0\rangle + 0|0.1\rangle + 0|1.0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1.1\rangle$$

Donc  $|\psi\rangle$  s'écrit bien comme (1) avec  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0$  et  $\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

La mesure de ce 2-qubit donne:

- [0.0] avec une probabilité  $|\alpha|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ .
- [0.1] avec une probabilité  $|\beta|^2 = 0$ .
- [1.0] avec une probabilité  $|\gamma|^2 = 0$ .
- [1.1] avec une probabilité  $|\delta|^2 = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$ .

On a aucune chance d'avoir [0.1] ou [1.0] et une chance sur 2 d'avoir [0.0] ou [1.1]

## Analogie des 2 pièces de Monnaie:

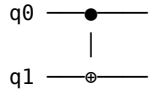
En lançant 2 pièces de monnaie qui ont soit **Pile**, soit **Face**, tant qu'elles sont en l'air on a 4 états possibles à l'arrivée. ([**F**,**F**], [**F**,**P**], [**P**,**F**], [**P**,**P**])? Les 4 états ont la même chance de se produire, et c'est bien sûr que lorsque les pièces sont tombées (Mesure), que l'on a l'état définitif. Mais avec *l'intrication quantique* les deux pièces peuvent être *liée* fortement entre elles et tomber dans le même état. Si l'une est côté **Pile**, l'autre aussi.

Cela revient à obtenir un **état de Bell** pour un 2-quBit, et que l'on note  $|\Phi^+\rangle$

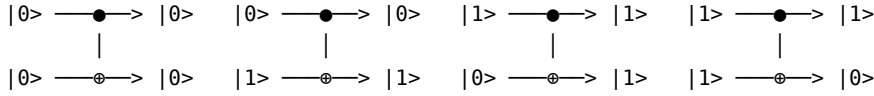
Pour obtenir l'état de Bell, on a besoin de la porte **CNOT**

## Porte *CNOT*

La porte *CNOT* est une porte qui a en entrée et en sortie 2 qubits:



Le principe de cette porte est de changer le second qubit en fonction de l'état du premier:

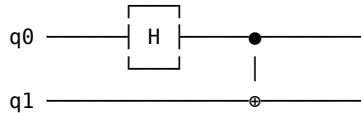


On notera :

- Le premier qubit ne change jamais
- Si le premier qubit est  $|0\rangle$ , le second ne varie pas.
- Si le premier qubit est  $|1\rangle$ , alors le second qubit change par une porte **X** :  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  et  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$

## Solution

Pour l'obtention de *l'état de Bell* nous devons utiliser le circuit suivant:



Reprenons le calcul en détails (notation verticale) à partir de l'entrée :

$$|0.0\rangle = \begin{matrix} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix}$$

Tout d'abord le premier qubit (celui du haut) passe par une porte (H), le second qubit reste inchangé :

$$\begin{matrix} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix} \xrightarrow{H} \begin{matrix} H(|0\rangle) \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix}$$

ce qui donne :

$$\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} |1\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix}$$

Ensuite ce résultat intermédiaire passe par la porte CNOT.

On regarde d'abord indépendamment chaque terme :

- **Premier terme :**

$$\begin{matrix} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix} \xrightarrow{\text{CNOT}} \begin{matrix} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{matrix}$$

- **Second terme :**

$$\begin{array}{ccc} |1\rangle & & |1\rangle \\ \otimes & \xrightarrow{\text{CNOT}} & \otimes \\ |0\rangle & & |1\rangle \end{array}$$


---

Ainsi par linéarité :

$$\begin{array}{ccc} H(|0\rangle) & & \\ \otimes & \xrightarrow{\text{CNOT}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} |0\rangle \\ \otimes \\ |0\rangle \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} |1\rangle \\ \otimes \\ |1\rangle \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0.0\rangle + |1.1\rangle) \\ |0\rangle & & \end{array}$$

qui est bien l'état de *Bell*  $|\Phi\rangle^+$ .