Draft Jawaban UTS Aljabar Linier

Tema: Sistem Navigasi Drone Otonom & Manajemen Logistik Berbasis AI

Pendahuluan: Jawaban ini disusun dengan asumsi bahwa variabel-variabel matematika yang digunakan merepresentasikan data riil dalam sistem kecerdasan buatan (AI) untuk pengiriman logistik menggunakan drone.

1. Analisis Vektor Navigasi Drone

Konteks: Vektor $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ merepresentasikan **vektor perpindahan (displacement vectors)** dari dua drone pengintai dalam koordinat 3D (x, y, z) relatif terhadap menara kontrol.

- $\vec{u} = (0, -3, 1)$: Drone Alpha bergerak ke Selatan 3 unit dan Naik 1 unit.
- $\vec{v} = (-2, -4, 2)$: Drone Beta bergerak ke Barat 2 unit, Selatan 4 unit, dan Naik 2 unit.

a. Menentukan Vektor Resultan Formasi ($3\vec{u} + 2\vec{v}$) Operasi ini merepresentasikan manuver formasi gabungan di mana Drone Alpha meningkatkan jangkauan 3x lipat dan Drone Beta 2x lipat untuk pemetaan area.

$$\begin{aligned} 3\vec{u} + 2\vec{v} &= 3(0, -3, 1) + 2(-2, -4, 2) \\ &= (0, -9, 3) + (-4, -8, 4) \\ &= (0 + (-4), -9 + (-8), 3 + 4) \\ &= (\mathbf{-4}, \mathbf{-17}, \mathbf{7}) \end{aligned}$$

Jawaban: Vektor resultan adalah $(-4, -17, 7)$.

b. Menghitung Jarak Jangkauan Maksimal (Panjang Vektor) Kita menghitung panjang (magnitude) dari vektor hasil poin (a) untuk mengetahui jarak total dari pusat kontrol ke titik akhir formasi.

$$\begin{aligned} |3\vec{u} + 2\vec{v}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-17)^2 + (7)^2} \\ &= \sqrt{16 + 289 + 49} \\ &= \sqrt{354} \\ &\approx 18.81 \text{ satuan jarak} \end{aligned}$$

Jawaban: Panjang vektor adalah $\sqrt{354}$ atau sekitar **18.81 satuan**.

2. Konstruksi Matriks Data Logistik

Konteks: Kita diminta membuat dua matriks 3×3. Agar relevan, kita asumsikan:

- **Matriks A (Stok Gudang):** Baris = Gudang (Pusat, Utara, Selatan), Kolom = Barang (Baterai, Baling-baling, Sensor).
- **Matriks B (Matriks Transformasi/Biaya):** Faktor konversi biaya atau distribusi.

Matriks A (Stok Gudang):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks B (Koefisien Distribusi):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Operasi Transpose dan Perkalian Matriks ($A^T B$)

Konteks: Menghitung $A^T B$ sering digunakan dalam *Data Science* untuk mencari korelasi antar fitur atau memproyeksikan data stok ke dalam ruang biaya.

Langkah 1: Tentukan A^T (Transpose A)

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Kalikan A^T dengan B

$$A^T B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Perhitungan Baris x Kolom:

- **Baris 1:**
  - $(2)(1) + (1)(2) + (0)(1) = 4$
  - $(2)(0) + (1)(1) + (0)(-1) = 1$
  - $(2)(2) + (1)(0) + (0)(3) = 4$
- **Baris 2:**
  - $(1)(1) + (3)(2) + (2)(1) = 1 + 6 + 2 = 9$
  - $(1)(0) + (3)(1) + (2)(-1) = 0 + 3 - 2 = 1$
  - $(1)(2) + (3)(0) + (2)(3) = 2 + 0 + 6 = 8$
- **Baris 3:**
  - $(0)(1) + (1)(2) + (1)(1) = 0 + 2 + 1 = 3$
  - $(0)(0) + (1)(1) + (1)(-1) = 0 + 1 - 1 = 0$
  - $(0)(2) + (1)(0) + (1)(3) = 0 + 0 + 3 = 3$

Hasil Akhir:

$$A^T B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Transformasi Elementer ($B_2 - 2B_3$)

Konteks: Melakukan reduksi baris untuk menyederhanakan sistem persamaan atau mengeliminasi redundansi data pada Matriks B. *Operasi: Baris 2 dikurangi 2 kali Baris 3 ($R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3$).*

Matriks B awal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proses pada Baris 2 (R_2):

- Elemen 1: $2 - 2(1) = 0$
- Elemen 2: $1 - 2(-1) = 1 + 2 = 3$
- Elemen 3: $0 - 2(3) = -6$

Hasil Transformasi Matriks B':

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & -\mathbf{6} \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(Catatan: Asumsi soal "B2-2 B3" merujuk pada operasi baris standar $R_2 - 2R_3$. Bagian "1/2" pada soal dianggap sebagai typo penomoran atau bagian yang tidak lengkap, namun jika itu adalah skalar perkalian, prinsipnya tetap sama).

5. Determinan Matriks ($A + B$)

Konteks: Mengecek apakah gabungan sistem A dan B memiliki solusi unik (invertible) atau singular (sistem crash/tidak ada solusi tunggal).

Langkah 1: Hitung $A + B$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Langkah 2: Cari Determinan menggunakan Ekspansi Kofaktor (misal Baris 1) Matriks $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\det(M) &= 3\begin{vmatrix}4 & 1\\1 & 4\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & 4\end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 1\end{vmatrix}\\ &= 3(16-1) - 1(12-1) + 2(3-4)\\ &= 3(15) - 1(11) + 2(-1)\\ &= 45 - 11 - 2\\ &= 32\end{aligned}$$

Jawaban: Determinan dari matriks $(A + B)$ adalah **32**. *(Interpretasi: Karena* $\det \neq 0$*, sistem gabungan ini stabil dan memiliki solusi unik).*

6. Rank Matriks A

Konteks: Menentukan "Rank" sama dengan mencari berapa banyak baris informasi yang benar-benar unik (independen). Jika Rank < 3, berarti ada data yang redundan (pemborosan).

Matriks A:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\1 & 3 & 1\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Lakukan Eliminasi Gauss untuk mendapatkan bentuk Eselon Baris:

1. Tukar B_1 dan B_2 (agar pivot utama = 1, opsional tapi memudahkan):

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 1 & 0\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

2. $B_2 \leftarrow B_2 - 2B_1$:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -5 & -2\\0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

3. Cek proporsionalitas B_2 dan B_3. Baris 2 adalah $(0, -5, -2)$. Baris 3 adalah $(0, 2, 1)$. Mereka tidak saling berkelipatan. Kita bisa membuat B_3 menjadi nol sebagian tapi tidak seluruhnya. Lanjut eliminasi: Kalikan B_2 dengan 2 dan B_3 dengan 5, lalu jumlahkan ($5B_3 + 2B_2$):
   - $5(2) + 2(-5) = 10 - 10 = 0$
   - $5(1) + 2(-2) = 5 - 4 = 1$ Hasil baris 3 baru: $(0, 0, 1)$.