



Matematika Diskrit

Program Studi Informatika

Sesi 6 – Aljabar Boolean

Syahid Abdullah, S.Si, M.Kom



Aljabar Boolean

- Aljabar Boolean menyediakan operasi dan aturan untuk bekerja dengan set $\{0, 1\}$.
- Kita akan memfokuskan pada 3 buah operasi :
 - komplement Boolean,
 - penjumlahan Boolean , dan
 - perkalian Boolean



Operasi Boolean

- Komplemen dinotasikan dengan bar (pada slide ini kita gunakan tanda minus).

$$\neg 0 = 1 \quad \text{dan} \quad \neg 1 = 0.$$

- Penjumlahan Boolean, dinotasikan dengan + atau OR, mempunyai aturan sbb :

$$1 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 0 + 1 = 1, \quad 0 + 0 = 0$$

- Perkalian Boolean, dinotasikan dengan \cdot atau AND, mempunyai aturan sbb:

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 0 \cdot 0 = 0$$



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Definisi : Ambil $B = \{0, 1\}$. Variabel x disebut variabel Boolean jika diasumsikan nilainya hanya dari B .
- Fungsi dari B^n , set $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$, ke B disebut Boolean function of degree n .
- Fungsi Boolean dapat direpresentasikan menggunakan ekspresi terbuat dari variabel dan operasi boolean.



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Contoh : Buatlah ekspresi boolean untuk fungsi boolean $F(x, y)$ seperti didefinisikan oleh tabel berikut :

x	y	$F(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Solusi yang mungkin : $F(x, y) = (\neg x) \cdot y$



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Contoh lain :

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Solusi I:

$$F(x, y, z) = -(xz + y)$$

Solusi II:

$$F(x, y, z) = (-(xz))(-y)$$



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Ada metoda yang sederhana untuk menurunkan ekspresi boolean dari fungsi yang didefinisikan dengan tabel. Metoda ini didasarkan pada minterms.
- Definisi: literal adalah variabel Boolean atau komplemennya. minterm dari variabel Boolean x_1, x_2, \dots, x_n adalah perkalian Boolean $y_1 y_2 \dots y_n$, dimana $y_i = x_i$ atau $y_i = \neg x_i$.



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Lihat $F(x,y,z)$ lagi :

x	y	z	$F(x, y, z)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

$F(x, y, z) = 1$ jika dan hanya jika :

$x = y = z = 0$ atau

$x = y = 0, z = 1$ atau

$x = 1, y = z = 0$

Sehingga ,

$$F(x, y, z) = (-x)(-y)(-z) + (-x)(-y)z \\ + x(-y)(-z)$$



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Definisi : Fungsi Boolean F dan G dari variabel n adalah sama jika dan hanya jika $F(b_1, b_2, \dots, b_n) = G(b_1, b_2, \dots, b_n)$ untuk b_1, b_2, \dots, b_n milik B .
- 2 ekspresi Boolean yang berbeda yang merepresentasikan fungsi yang sama disebut equivalent.
- Contoh, ekspresi Boolean xy , $xy + 0$, dan $xy \cdot 1$ adalah equivalent.



Fungsi dan ekspresi Boolean

- komplemen dari fungsi Boolean F adalah fungsi $\neg F$, di mana $\neg F(b_1, b_2, \dots, b_n) = \neg(F(b_1, b_2, \dots, b_n))$.
- Ambil F dan G adalah fungsi Boolean dengan derajat n . Penjumlahan Boolean $F+G$ dan perkalian Boolean FG adalah didefinisikan :
- $(F + G)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) + G(b_1, b_2, \dots, b_n)$
- $(FG)(b_1, b_2, \dots, b_n) = F(b_1, b_2, \dots, b_n) G(b_1, b_2, \dots, b_n)$



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Pertanyaan : berapa banyak fungsi Boolean berderajat 1 yang berbeda?
- Solusi: ada, F_1 , F_2 , F_3 , dan F_4 :

x	F_1	F_2	F_3	F_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Pertanyaan : berapa banyak fungsi Boolean berderajat 2 yang berbeda?
- Solusi: ada 16 yaitu F_1, F_2, \dots, F_{16} :

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1



Fungsi dan ekspresi Boolean

- Pertanyaan : berapa banyak fungsi boolean berderajat n yang berbeda?
- Solusi :
- ada 2^n n -tuples berbeda dari 0 dan 1.
- fungsi Boolean adalah penunjukan 0 atau 1 pada masing-masing 2^n n -tuples yang berbeda.
- Sehingga, ada 2^{2^n} fungsi Boolean yang berbeda.



Duality

- Dual dari ekspresi Boolean didapat dengan menukarkan penjumlahan dengan perkalian dan menukarkan 0 dengan 1 .
- Contoh :

The dual of $x(y + z)$ is $x + yz$.

The dual of $-x \cdot 1 + (-y + z)$ is $(-x + 0)((-y)z)$.



Definisi aljabar Boolean

- Definisi : Aljabar Boolean adalah set B dengan dua operasi biner \vee dan \wedge , elemen 0 dan 1, dan operasi unary— seperti sifat yang berlaku untuk seluruh x , y , dan z dalam B :
- $x \vee 0 = x$ dan $x \wedge 1 = x$ (Hk. identitas)
- $x \vee (-x) = 1$ dan $x \wedge (-x) = 0$ (Hk. dominasi)
- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ dan $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ dan (Hk. asosiatif)
- $x \vee y = y \vee x$ dan $x \wedge y = y \wedge x$ (Hk. komutatif)
- $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ dan $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (Hk. distributif)



Aplikasi Aljabar Boolean

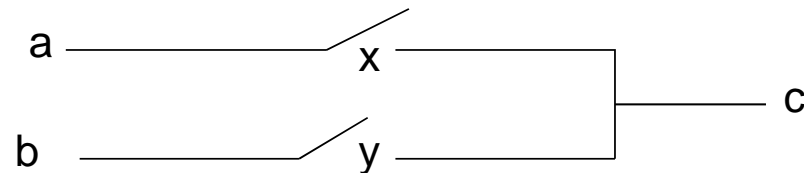
- Aljabar Boolean mempunyai aplikasi yang luas, antara lain bidang jaringan pensaklaran dan rangkaian digital.
1. Aplikasi dalam jaringan pensaklaran (Switching Network)
- Saklar adalah obyek yang mempunyai dua buah keadaan: buka dan tutup. Kita asosiasikan setiap peubah dalam fungsi Boolean sebagai “gerbang” (gate) didalam sebuah saluran yang dialiri listrik, air, gas, informasi atau benda lain yang mengalir secara fisik, gerbang ini dapat berupa kran di dalam pipa hidrolik, transistor atau dioda dalam rangkaian listrik, dispatcher pada alat rumah tangga, atau sembarang alat lain yang dapat melewatkan atau menghambat aliran.



- Kita dapat menyatakan fungsi logika untuk gerbang yang bersesuaian. Pada fungsi tersebut, peubah komplemen menyatakan closed gate, sedangkan peubah bukan komplemen menyatakan opened gate.



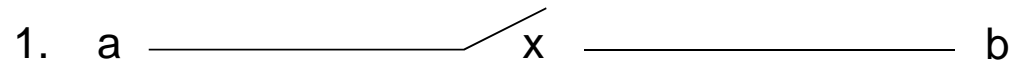
Saklar dalam hubungan SERI: logika AND



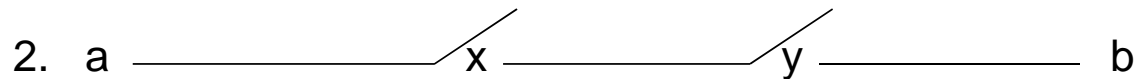
Saklar dalam hubungan PARALEL: logika OR



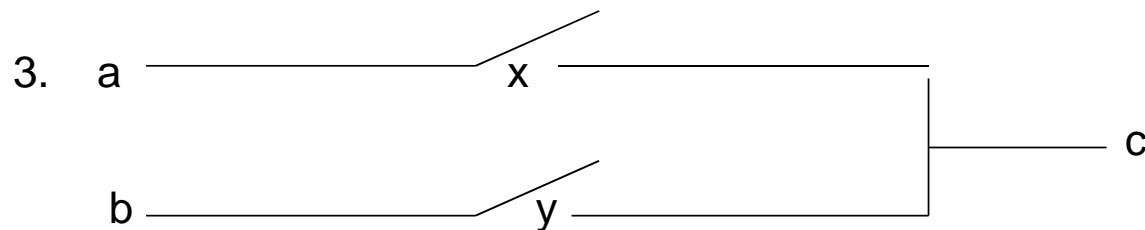
Contoh: Tiga bentuk gate paling sederhana



Output b hanya ada jika dan hanya jika x tertutup $\Rightarrow x$



Output b hanya ada jika dan hanya jika x dan y tertutup $\Rightarrow xy$



Output c hanya ada jika dan hanya jika x atau y tertutup $\Rightarrow x + y$

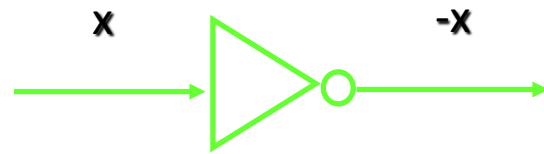


- 2. Aplikasi dalam rangkaian digital elektronik
- Rangkaian digital elektronik biasanya dimodelkan dalam bentuk gerbang logika. Ada tiga macam gerbang logika dasar: AND, OR dan NOT. Secara fisik, rangkaian logika diimplementasikan dalam rangkaian listrik spesifik

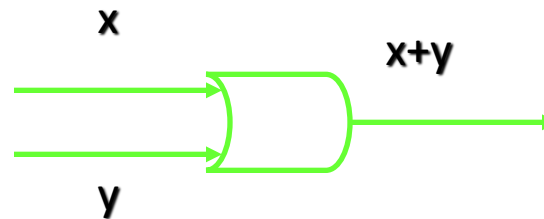


Gerbang Logika

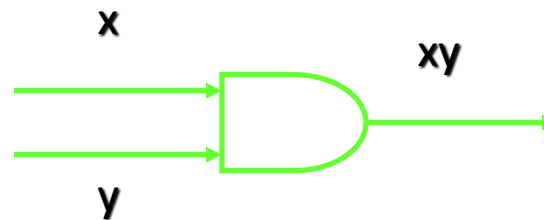
- Sirkuit elektronik terdiri dari apa yang disebut dengan gerbang. Ada 3 dasar jenis dari gerbang :



Gerbang NOT (inverter)



Gerbang OR

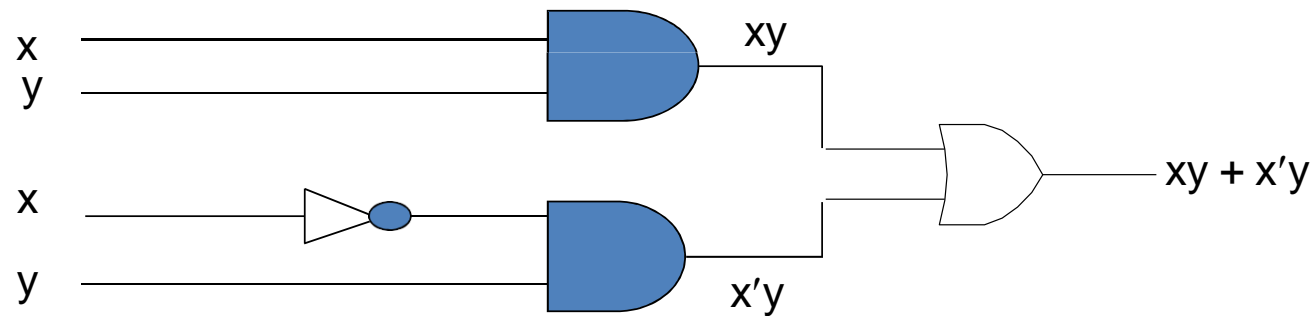


Gerbang AND



Contoh:

- Nyatakan fungsi $f(x,y,z) = xy + x'y$ ke dalam rangkaian logika.





Terima Kasih