Matematika Diskrit

Program Studi Informatika

Sesi 7 – Rekursif

Syahid Abdullah, S.Si, M.Kom

Definisi Rekursif

- Rekursi adalah suatu prinsip yang sangat dekat berhubungan dengan induksi matematika.
- Didalam suatu definisi rekursif, suatu objek didefinisikan dari dirinya sendiri.
- Kita dapat mendefinisikan deretan, fungsi dan himpunan secara rekursif.

Deretan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Contoh:
- Suatu deretan {an} dinyatakan sebagai

  an = 2n untuk n = 0, 1, 2, … .

- Deretan tsb dapat juga didefinisikan secara rekursif:

  a0 = 1

  an+1 = 2an   untuk n = 0, 1, 2, …

Deretan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Kita dapat menggunakan metoda berikut ini untuk mendefinisikan suatu fungsi dengan domain bilangan cacah:
- Tentukan nilai fungsi pada (argumen) nol.
- Berikan aturan untuk mencari nilainya pada sebarang bilangan bulat berdasarkan dari nilainya pada bilangan bulat yang lebih kecil.

- Definisi yang demikian disebut rekursif atau induktif.

Deretan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Contoh:

- $f(0) = 3$
- $f(n + 1) = 2f(n) + 3$

- $f(0) = 3$
- $f(1) = 2f(0) + 3 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$
- $f(2) = 2f(1) + 3 = 2 \cdot 9 + 3 = 21$
- $f(3) = 2f(2) + 3 = 2 \cdot 21 + 3 = 45$
- $f(4) = 2f(3) + 3 = 2 \cdot 45 + 3 = 93$

Deretan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Bagaimana mendefinisikan fungsi faktorial $f(n) = n!$ secara rekursif?

- $f(0) = 1$
- $f(n + 1) = (n + 1)f(n)$

- $f(0) = 1$
- $f(1) = 1f(0) = 1 \cdot 1 = 1$
- $f(2) = 2f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
- $f(3) = 3f(2) = 3 \cdot 2 = 6$
- $f(4) = 4f(3) = 4 \cdot 6 = 24$

Deretan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Contoh yang terkenal: Bilangan Fibonacci

- $f(0) = 0, f(1) = 1$
- $f(n) = f(n – 1) + f(n - 2)$

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $f(2) = f(1) + f(0) = 1 + 0 = 1$
- $f(3) = f(2) + f(1) = 1 + 1 = 2$
- $f(4) = f(3) + f(2) = 2 + 1 = 3$
- $f(5) = f(4) + f(3) = 3 + 2 = 5$
- $f(6) = f(5) + f(4) = 5 + 3 = 8$

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Untuk mendefinisikan suatu himpunan secara rekursif, kita memerlukan dua hal berikut:

- sekumpulan elemen-elemen awal,
- aturan untuk mendefinisikan elemen-elemen tambahan dari elemen yang sudah ada didalam himpunan.

- Contoh: Mis. S didefinisikan secara rekursif sbb:
- $3 \in S$
- $(x + y) \in S$ jika $(x \in S)$ dan $(y \in S)$

- S adalah himpunan dari bilangan bulat positif yang dapat dibagi 3.

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Bukti:
- Misalkan A himpunan semua bilangan bulat positif yang dapat dibagi 3.
- Untuk menunjukkan A = S, kita harus membuktikan bahwa $A \subseteq S$ and $S \subseteq A$.

- Bag. I: Untuk membuktikan bahwa $A \subseteq S$, kita harus menunjukkan bahwa setiap bilangan bulat positif yang dapat dibagi 3 berada didalam S.

- Untuk menunjukkan hal ini kita akan memakai induksi matematika.

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Mis. P(n) adalah pernyataan “3n anggota S”.
- Langkah dasar: P(1) benar, karena 3 anggota S.
- Langkah induktif: Untuk menunjukkan:
  Jika P(n) benar, maka P(n + 1) benar.
- Asumsikan 3n anggota S. Karena 3n anggota S dan 3 adalah anggota S, dari definisi rekursif S maka
- 3n + 3 = 3(n + 1) adalah juga anggota S.
- Kesimpulan Bagian I: A $\subseteq$ S.

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Bag II: Akan ditunjukkan: $S \subseteq A$.
- Langkah dasar: Akan ditunjukkan:
  Semua elemen awal dari S adalah anggota A. 3 anggota A. Benar.
- Langkah induktif: Akan ditunjukkan:
  $(x + y)$ anggota A manakala x dan y anggota S.
- Jika x dan y keduanya anggota A, maka berarti $3 \mid x$ dan $3 \mid y$. Seperti telah kita ketahui, maka $3 \mid (x + y)$.
- Kesimpulan Bagian II: $S \subseteq A$.
- Kesimpulan keseluruhan: $A = S$.

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Contoh lain:
- Formula yang “well-formed” dari variabel, bilangan dan operator {+, -, *, /, ^} didefinisikan sebagai:
- x adalah suatu fromula yang “well-formed” jika x merupakan suatu bilangan atau variable.
- (f + g), (f – g), (f * g), (f / g), (f ^ g) adalah formula yang well-formed jika f dan g formula yang well-formed.

Himpunan yang Didefinisikan Secara Rekursif

- Dengan definisi ini, kita dapat membentuk formula-formula spt:

- (x – y)
- ((z / 3) – y)
- ((z / 3) – (6 + 5))
- ((z / (2 * 4)) – (6 + 5))

Algoritma Rekursif

- Suatu algoritma disebut rekursif jika algoritma tsb memecahkan suatu permasalahan dengan cara mereduksi permasalahan ybs menjadi permasalahan yang sama dengan masukan yang lebih kecil.

- Contoh I: Algoritma Euklidian Rekursif

- procedure gcd(a, b: nonnegative integers dng a < b)
- if a = 0 then gcd(a, b) := b
- else gcd(a, b) := gcd(b mod a, a)

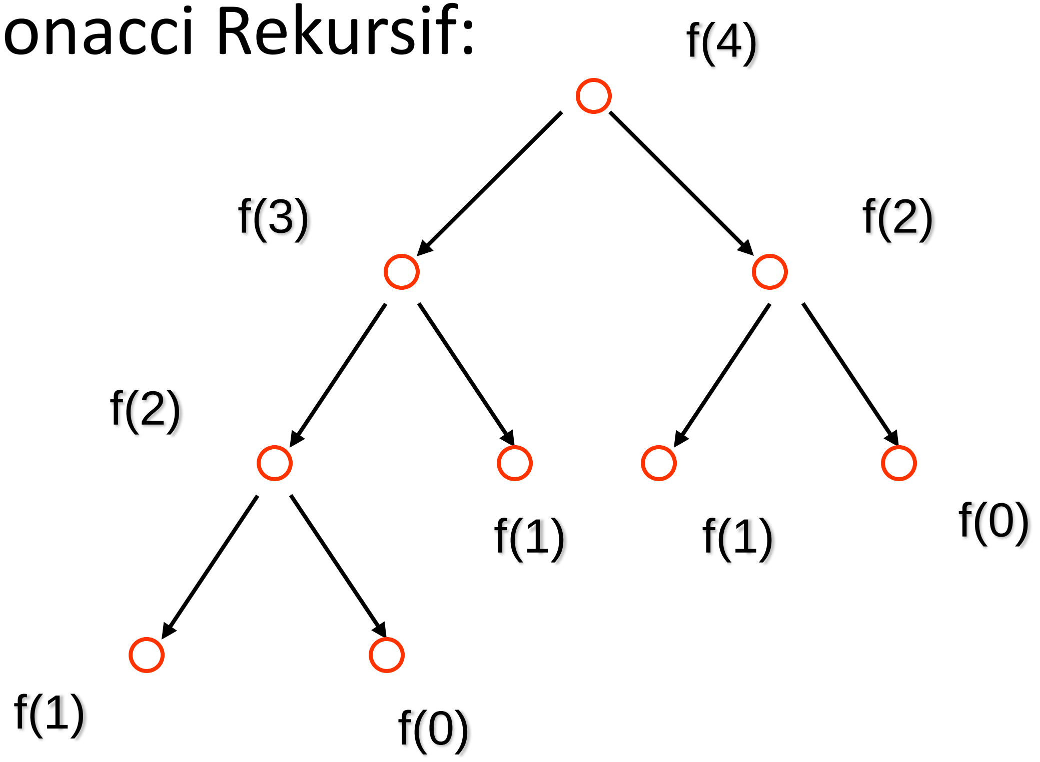
Algoritma Rekursif

- Contoh II: Algoritma Fibonacci Rekursif

- procedure fibo(n: nonnegative integer)
- if n = 0 then fibo(0) := 0
- else if n = 1 then fibo(1) := 1
- else fibo(n) := fibo(n – 1) + fibo(n – 2)

Algoritma Rekursif

- Evaluasi Fibonacci Rekursif:



Algoritma Rekursif

```
• procedure iterative_fibo(n: nonnegative integer)
• if n = 0 then y := 0
• else
• begin
•           x := 0
•           y := 1
•           for i := 1 to n-1
•           begin
•                     z := x + y
•                     x : = y
•                     y := z
•           end
• end   {y adalah bilangan Fibonacci ke-n}
```

Algoritma Rekursif

- Untuk setiap algoritma rekursif, terdapat algoritma iteratif yang ekivalen.
- Algoritma rekursif sering kali lebih singkat, lebih elegan, dan lebih mudah dipahami dibandingkan algoritma iteratif-nya.
- Tetapi, algoritma iteratif biasanya lebih efisien dalam penggunaan ruang dan waktu.

Terima Kasih