Matematika Diskrit

Program Studi Informatika

Sesi 3 – Induksi Matematika

Syahid Abdullah, S.Si, M.Kom

Kuantor Pernyataan

- Misalkan P(x) adalah pernyataan yang menyangkut variabel x dan D adalah sebuah himpunan, maka P adalah fungsi proposisi jika untuk setiap $x \in D$, berlaku P(x) adalah sebuah proposisi.

Contoh

- Misalkan P(x) merupakan pernyataan :

  x adalah sebuah bilangan bulat genap.
- Misalkan D = himpunan bilangan bulat positif
- Maka fungsi proposisi P(x) dapat ditulis:

  jika x = 1 maka proposisinya:

  1 adalah bilangan bulat genap. (F)

  jika x = 2 maka proposisinya:

  2 adalah bilangan bulat genap. (T)

  dst.
- Untuk menyatakan kuantitas suatu objek proposisi digunakan notasi yang disebut **kuantor**.

Macam-Macam Kuantor

- Untuk setiap x, P(x) disebut kuantor universal. Simbol: $\forall$
- Untuk beberapa x, P(x) disebut kuantor eksistensial. Simbol: $\exists$

Contoh

- Misalkan x himpunan warga negara Indonesia, P predikat membayar pajak, R predikat membeli Ms Office, maka:

1. $\forall x, P(x)$

   artinya: semua warga negara membayar pajak

2. $\exists x, R(x), P(x)$

   artinya: ada beberapa warga negara membeli Ms Office membayar pajak

3. $\forall x, R(x) \rightarrow P(x)$

   artinya: semua warga negara jika membeli Ms Office maka membayar pajak

4. $\exists x, R(x) \wedge \sim P(x)$

   artinya: ada warga negara membeli Ms Office dan tidak membayar pajak

Negasi Kuantor

$$\sim\forall x = \exists x$$

$$\sim\exists x = \forall x$$

Sehingga:

$$\sim(\forall x, P(x)) = \exists x, \sim P(x)$$

$$\sim(\exists x, P(x)) = \forall x, \sim P(x)$$

$$\sim(\forall x, P(x) \rightarrow Q(x)) = \exists x, (\sim P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$= \exists x,\ P(x) \wedge Q(x)$$

Induksi Matematika

- Perhatikan argumen matematika berikut ini:
- P(n) : Jumlah bilangan bulat positif dari sampai 1 sampai n adalah n(n+1)/2

  misal untuk n = 5 adalah 5(5+1)/2=15 terlihat: 1+2+3+4+5=15
- P(n) : Jumlah dari n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

  misal untuk n = 3 adalah $3^2 = 9$ terlihat : 1 + 3 + 5 = 9
- **Induksi matematika** merupakan teknik pembuktian yang baku dalam matematik, khususnya menyangkut bilangan bulat positif.

Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan P(n) adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa P(n) benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

  1. P(1) benar, dan

  2. Untuk semua bilangan bulat positif $n \geq 1$, jika P(n) benar maka P(n+1) juga benar.

- Langkah 1 dinamakan basis induksi
- Langkah 2 dinamakan langkah induksi
- Asumsi jika p(n) benar dinamakan hipotesis induksi.

Contoh

- Tunjukkan bahwa untuk **$n \geq 1$, $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$**.
- Bukti:

Basis induksi:

Untuk $n=1$ kita peroleh $1 = 1(1+1)/2$, ini jelas benar sebab

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\,(1+1)/2 \\
&= 1\,(2)/2 \\
&= 2/2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Langkah induksi:

Andaikan untuk $n \geq 1$ pernyataan $1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$ adalah benar (hipotesis induksi), kita harus menunjukkan bahwa: $1+2+3+\ldots+n + (n+1) = (n+1)[(n+1)]/2$ juga benar

- Untuk membuktikan ini tunjukkan bahwa:

$$
\begin{aligned}
1+2+3+\ldots+ n + (n+1) &= (1+2+3+\ldots+n)+(n+1) \\
&= [n(n+1)/2]+(n+1) \\
&= [(n2+n)/2]+(n+1) \\
&= [(n2+n)/2]+[(2n+2)/2] \\
&= (n2+3n+2)/2 \\
&= (n+1)[(n+1)+1]/2
\end{aligned}
$$

- Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah dibuktikan benar, maka untuk semua bilangan bulat positif n, terbukti bahwa:

$$1+2+3+\ldots+n = n(n+1)/2$$

Latihan

- Buktikan dengan induksi matematika

1. Jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2
2. Untuk semua $n \geq 1$ maka $n^3 + 2n$ adalah kelipatan 3
3. $n! \geq 2n-1$ untuk $n= 1,2,3,\ldots$
4. $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$

Terima Kasih