Exercício 01 - Sejam A e B fórmulas. Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas, justificando sua resposta.

a)Se A é satisfatível, então ¬A é satisfatível
A é satisfatível sse,∃I | I [A] = T.
Se I[A] = T, então I[¬A] = F.
Assim, se A é satisfatível, então ¬A não o é.

b)A é tautologia se ¬A é contraditória
A é uma tautologia,sse ∀I | I [A] = T.
Se∀I | I [A] = T, então ∀I | I [¬A] = F.
Logo, ¬ é uma Contradição

c)A é tautologia se A é satisfatível
A é uma tautologia,sse ∀I | I [A] = T.
Se A é satisfatível,então∃I | I [A] = T.
Logo, A somente será tautologia se ela for satisfatível.

d)Se A é contraditória, então ¬A é satisfatível
Se∀I | I [A] = F, então ∀I | I [¬A] = T.
Se A é satisfatível,então∃I | I [A] = T.
Logo ¬A é satisfatível.

e)Se A |= B e A é tautologia implica que B é tautologia
Se A |= B, então ∀I | I[A] = T, I[B] = T.
B não precisa ser Tautologia para atender essa condição.
Basta somente que ∀I | I[A] = T, I[B] = T.
Logo, B pode ser satisfatível ou Tautologia.

f)Se A |= B e B é tautologia implica que A é tautologia
Se A |= B, então ∀I | I[A] = T, I[B] = T.
Se B é tautologia, então ∀I | I[A] = T, I[B] = T.
Isso não implica em A ser tatutologia para antender essa condição.
Logo, B pode ser satisfatível ou Tautologia.

Exercício 02 - Utilizando todos os métodos de validação vistos em sala, diga se cada sentença abaixo é contraditória, satisfatível ou tautologia.

a) P→P

Tabela Verdade:

P	P→P
T	T
F	T

Tautologia.

Demonstração
P→P é tautologia sse, ∀I | I [P] = T.
Como a implicação consiste somente em uma possibilidade I [P] = F, essa condição nunca é satisfeita, uma vez que nesse caso, T→T e F→F.
Logo P→P é tautologia.

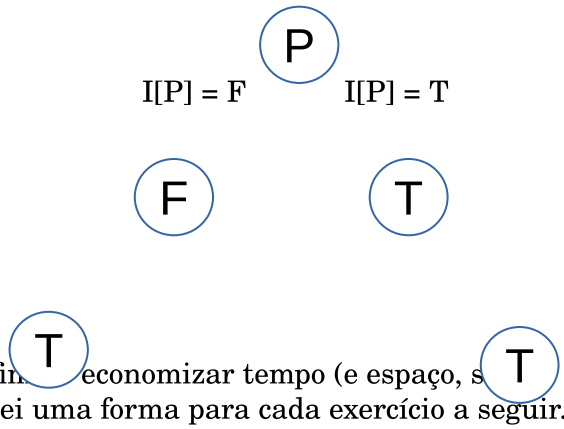
Método da Negação:

H = P→P

Supondo que H não é tautologia, então∃I | I [H] = F.

Para I[P→P] = F ⇒ I[P] = T e I[P] = T, logo: Absurdo. P não pode assumir dois valores ao mesmo instante. Logo H é tautologia.

Árvore semântica: H = P→P



A partir de agora, afim de economizar tempo (e espaço, sim isso aqui fica enooooorme >.<') farei uma forma para cada exercício a seguir.

b) P →¬P

Tabela Verdade:

P	¬P	P →¬P
T	F	F
F	T	T

Satisfatível

c) ¬P→P

H = ¬P→P

H é satisfatível sse, ∃I | I [H] = T.

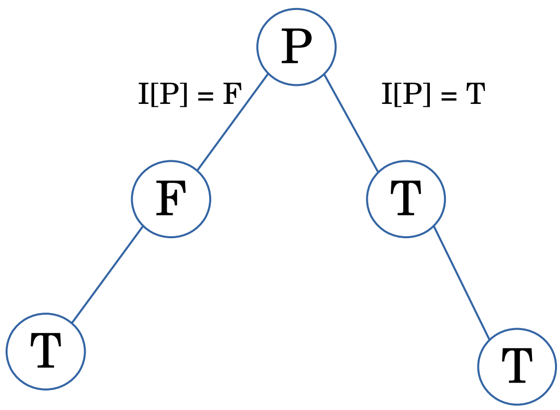
Como a implicação consiste somente uma possibilidade de I[H] = F, a saber: I[¬P] = T e I[P] = F.

Sempre que I[¬P] = T, I[P] = F. H não é tautologia. Não obstante, Sempre que I[¬P] = F, I[H] = T.

Logo, H é satisfatível pois ∃I | I [H] = T.

d) P⇔P

Árvore semântica: H = P⇔P



Logo H é tautologia.

e) $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$

$H = P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
Supondo que H não é tautologia, então $\exists I \mid I\,[H] = F$.
Para $I[P \rightarrow (Q \rightarrow P)] = F \Rightarrow I[P] = T$, $I[Q] = T$ e $I[P] = F$, logo: Absurdo. P não pode assumir dois valores ao mesmo instante. Logo H é tautologia.

f) $(P \rightarrow (Q \lor R)) \rightarrow (P \land (Q \rightarrow \neg R))$

$H = (P \rightarrow (Q \lor R)) \rightarrow (P \land (Q \rightarrow \neg R))$
Tabela Verdade:

P	Q	R	$\neg R$	$(Q \lor R)$	$(Q \rightarrow \neg R)$	$(P \rightarrow (Q \lor R))$	$(P \land (Q \rightarrow \neg R))$	H
T	T	T	F	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	T	F	F

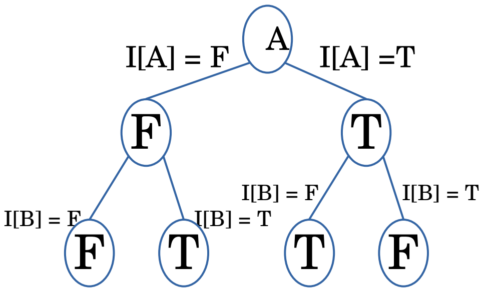
Logo, H é satisfatível.

g) $(P \lor R) \land (Q \lor R) \rightarrow (P \land Q) \lor R$

Demosntração.
Seja uma fórmula $H = (P \lor R) \land (Q \lor R) \rightarrow (P \land Q) \lor R$. Seja I, interpretação.
Para que exista $I[H] = F$, o conectivo "$\rightarrow$", deve "implicar $T \rightarrow F$, logo para que $I[H] = F$ sse $I[(P \lor R) \land (Q \lor R)] = T$ e $I[(P \land Q) \lor R] = F$.
Para $I[(P \land Q) \lor R] = F \Leftrightarrow I[P] = T$ ou F, $I[Q] = T$ ou F e $I[R] = F$
Seja $I[P] = F$, $I[Q] = T$ e $I[R] = F$, então $I[(P \land Q) \lor R] = F$ e $I[(P \lor R) \land (Q \lor R)] = F$.
Seja $I[P] = T$, $I[Q] = F$ e $I[R] = F$, então $I[(P \land Q) \lor R] = F$ e $I[(P \lor R) \land (Q \lor R)] = F$
Portanto, não há caso em que H = F. Logo, H é satisfatível e Tautologia.

h) $P \rightarrow Q \rightarrow (P \land Q)$
Demonstração do Absurdo:
Seja uma fórmula $H = P \rightarrow Q \rightarrow (P \land Q)$. Seja I, interpretação.
Suponhamos que $\exists I \mid I[H] = F \Leftrightarrow I[P \rightarrow Q] = T$ e $I\,[(P \land Q)] = F$
$\Leftrightarrow I\,[(P \land Q)] = F$
$\Leftrightarrow I[P] = F$ e $I[Q] = F$
$\Leftrightarrow I[P \rightarrow Q] = T$
$\Leftrightarrow I[P] = F$ e $I[Q] = F$
Concluímos que H não é tautologia, pois existe interpretação H = F. C.Q.D

i) ¬(A⇔B)



¬(A⇔B) é satisfatível.

j) A ∧ (B⇔C)
Tabela Verdade:

A	B	C	(B⇔C)	A ∧ (B⇔C)
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	T	F

A ∧ (B⇔C) é satisfatível.

k) (A ∧ B)⇔(A ∧ C)
Tabela Verdade:

A	B	C	(A ∧ B)	(A ∧ C)	(A ∧ B)⇔(A ∧ C)
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	T

(A ∧ B)⇔(A ∧ C) é satisfatível.

l) (¬A ∨ B)→C
Método da Negação:
Seja H = (¬A ∨ B)→C. Seja I, interpretação.

Suponhamos que H não é tautologia.
Então ∃I | I[H] = F ⇔ I[(¬A ∨ B)] = T e I [C] = F
⇔ I[(¬A ∨ B)] = T
⇔ I[A] = F e I[B] = T
Se ∃I | I[A] = F e I[B] = T e I [C] = F, então H não é tautologia.
C.Q.D

m) (A⇔B)→(¬A ∧ B)

Método da Negação:
Seja H = (A⇔B)→(¬A ∧ B). Seja I, interpretação.
Suponhamos que H não é tautologia.
Então ∃I | I[H] = F ⇔ I[(A⇔B)] = T e I [(¬A ∧ B)] = F
⇔ I [(¬A ∧ B)] = F
⇔ I[A] = T e I[B] = F
Para I[(A⇔B)] = T ⇒ I[A] = T ou F e I[B] = T ou F.
Logo, há um absurdo pois enquanto A = T ,B = F e enquanto B = T, A =F.
Logo, não há I[(A⇔B)] = T.
Portanto H é Tautologia.

Exercício 3 Construa a árvore semântica associada à fórmula abaixo e diga se ela é tautologia, satisfatível ou contraditória.

H = (P ∧ Q) → (R ∧ S)