Lista De Exercícios 03

Consideramos que:

O alfabeto lógico possui:

Símbolos de pontuação : “(“ e “)”

Símbolos de Verdade: True e False

Símbolos Proposicionais: P, Q, R, S P1, Q1, R1.....

Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$

Prove que os alfabetos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, {nand} e {nor} são completos:

Primeiramente faremos o Alfabeto $\{\neg, \wedge\}$:

A negação ($\neg$) e conjunção ($\wedge$) são conectivos básicos, então não preciso me deter aqui.

Para disjunção ($\vee$), aplicando De Morgan, temos:

$P \vee Q \equiv \neg\neg(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$

Original ≡ *Dupla negação* ≡ *De Morgan*

Para Implicação ($\rightarrow$), $p \rightarrow q$, pela propriedade de substituição,percebemos que $P \wedge \neg Q$, caso negado, se equivale. Logo:

$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \equiv \neg\neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(\neg\neg P \wedge \neg Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$

Original ≡ *Propriedade de Substituição* ≡ *Dupla negação* ≡ *De Morgan*

A Equivalência ($\leftrightarrow$), $p \leftrightarrow q$, pode ser representada como $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, pela propriedade de substituição. Logo: $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

Usando a propriedade de contraposição teremos: $\neg(P \wedge \neg Q) \wedge \neg(Q \wedge \neg P)$. Tal fórmula nos mostra que o alfabeto $\{\neg, \wedge\}$ é completo.

Todos os modelos acima estão representados e provados na tabela verdade abaixo:

P	Q	¬P	¬Q	¬P ∧ ¬Q	P∨Q	P→Q	¬(P ∧ ¬Q)	P↔Q	¬(Q ∧ ¬P)	¬(P ∧ ¬Q) ∧ ¬(Q ∧ ¬P)
T	T	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T	T

Em seguida, o alfabeto {¬, ∨}:

A negação (¬) e disjunção (∨) são conectivos básicos desse alfabeto.

Para conjunção (∧):
$P \vee Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
Original ≡ Dupla negativa ≡ De Morgan

Para Implicação (→):
$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Original ≡ Propriedade Substituição.

Equivalência (↔):
$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \equiv \neg\neg((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)) \equiv \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P))$
Original ≡ Propriedade Substituição ≡ Dupla Negativa ≡ De Morgan

Todos os modelos acima estão representados e provados na tabela verdade abaixo:

P	Q	¬P	¬Q	P ∨ Q	¬(¬P ∧ ¬Q)	P → Q	¬P ∨ Q	¬Q ∨ P	P ↔ Q	¬(¬(¬P ∨ Q) ∨ ¬(¬Q ∨ P))
T	T	F	F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T	T	T	T	T

O Alfabeto {nand}:

Definição: $P \{nand\} Q \triangleq \neg(P \wedge Q)$

$P \equiv (P \wedge P)$

$\neg P \equiv \neg(P \wedge P) \equiv P$ nand P (Tal qual a definição acima)

$P \vee Q \equiv \neg\neg(P \vee Q) \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv \neg P$ nand $\neg Q \equiv (P$ nand $P)$ nand $(Q$ nand $Q)$
Original ≡ Dupla Negação ≡ De Morgan

$P \wedge Q \equiv \neg\neg(P \wedge Q) \equiv \neg\,(P$ nand $Q) \equiv (P$ nand $Q)$ nand $(P$ nand $Q)$ (Tal qual *¬(P ∧ P) ≡ P nand P*
Original ≡ Dupla negação ≡ Definição ≡ Definição

$P \rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \equiv \neg\neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(P \wedge \neg Q) \equiv P$ nand $\neg Q \equiv P$ nand $(Q$ nand $Q)$
Original ≡ Propriedade Substituição ≡ Dupla Negação ≡ De morgan ≡ Definição ≡ Definição

$P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$. Vamos dividir para facilitar

$(\neg P \vee Q) \equiv P$ nand $(Q$ nand $Q)$ (como já demonstrado.)

$(\neg Q \vee P) \equiv \neg\neg(\neg Q \vee P) \equiv \neg(Q \wedge \neg P) \equiv Q$ nand $\neg P \equiv Q$ nand $(P$ nand $P)$

$P \leftrightarrow Q \equiv$

$(\neg P \lor Q) \land (\neg Q \lor P) \equiv$

P nand (Q nand Q) $\land$ Q nand (P nand P) $\equiv$

$\neg\neg$(P nand (Q nand Q) $\land$ Q nand (P nand P)) $\equiv$

$\neg$(P nand (Q nand Q) nand Q nand (P nand P))

Logo:

$P \leftrightarrow Q \equiv \neg$(P nand (Q nand Q) nand Q nand (P nand P))

Por motivos de: Preguiça, não vou montar a tabela verdade disso não. Afinal é só uma extensão da implicação.