El problema de transporte

Carlos Castro

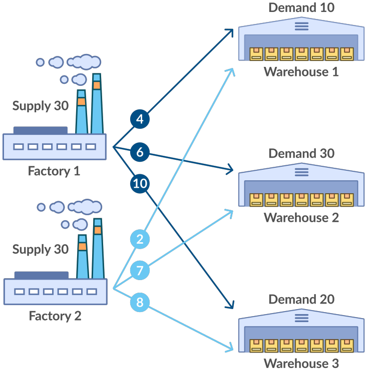
UTFSM

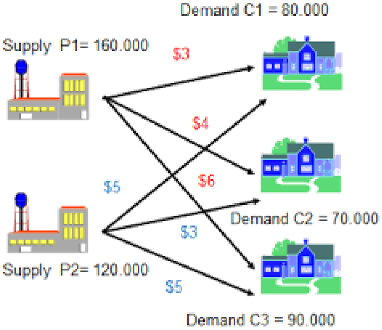
Octubre 2020

El problema de transporte es un caso especial de programación lineal cuyo nombre se debe a su interpretación económica:

determinar la cantidad de productos que se debe enviar desde cada centro proveedor a cada sitio de destino de manera tal de minimizar el costo de transporte total y satisfacer todas las demandas

El problema de transporte





El problema de transporte

- Existe un conjunto de proveedores que deben enviar productos a un conjunto de clientes.
- Proveedores y clientes tienen localizaciones diferentes.
- Las diferentes localizaciones están conectadas por rutas que permiten el transporte de productos entre proveedores y clientes, por lo tanto, existe un costo de transporte.
- Los costos de transporte se consideran proporcionales o lineales a la cantidad transportada
- No existen restricciones de rutas o capacidades, se puede enviar cualquiera cantidad desde proveedores a clientes.
- El objetivo es satisfacer las demandas minimizando el costo total de transporte.

Ejemplo

Una fábrica tiene tres plantas, con las siguientes capacidades de producción:

Planta	Capacidad
A	5.000
B	6.000
C	2.500
Total de producción	13.500

Sus productos son distribuidos a través de cuatro centros de distribución al público, cuyas demandas se señalan a continuación:

Centro de distribución	Demanda
I	6.000
II	4.000
III	2.000
IV	1.500
Total de demanda	13.500

Ejemplo

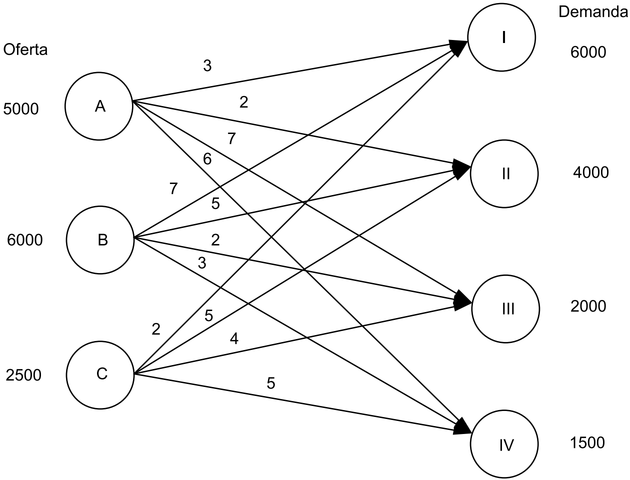
Además, se cuenta con la siguiente información de costos de transporte unitarios:

		Centro de distribución			
		I	II	III	IV
	A	3	2	7	6
Planta	B	7	5	2	3
	C	2	5	4	5

Asumiendo costos unitarios de producción idénticos en cada una de las plantas, los únicos costos relevantes involucrados son los de transporte.

Problema: determinar las rutas de distribución a utilizar y la cantidad transportada por cada ruta de manera tal que las demandas de los centros de distribución se satisfagan al mínimo costo.

Ejemplo


Oferta
5000
6000
2500
A
B
C
Demanda
6000
4000
2000
1500
I
II
III
IV
3
2
7
6
7
5
2
3
2
5
4
5

Enfoque

- Se define una variable de decisión x_{ij} por ruta desde los nodos de origen i a los nodos de destino j.
- Restricciones: se establece una restricción por cada nodo:
  - Nodo de origen: suma de los recursos que salen del nodo debe ser menor o igual que capacidad de oferta.
  - Nodo de destino: suma de los recursos que entran al nodo debe ser igual a cantidad demandada.
- Objetivo: minimizar el costo del transporte por todos las rutas

Modelo

- Variables:
  - x_{ij}: cantidad de productos a ser enviada desde la planta i al centro j; $\forall i = A, \ldots, C$, $\forall j = I, \ldots, IV$.

- Función objetivo:

$$Min \;\; z = 3x_{AI} + 2x_{AII} + 7x_{AIII} + 6x_{AIV} +$$

$$7x_{BI} + 5x_{BII} + 2x_{BIII} + 3x_{BIV} +$$

$$2x_{CI} + 5x_{CII} + 4x_{CIII} + 5x_{CIV}$$

Modelo

- Restricciones:
  - Ofertas deben ser respetadas:

$$\begin{aligned} x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII} + x_{AIV} &= 5000 \\ x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII} + x_{BIV} &= 6000 \\ x_{CI} + x_{CII} + x_{CIII} + x_{CIV} &= 2500 \end{aligned}$$

  - Demandas deben ser satisfechas:

$$\begin{aligned} x_{AI} + x_{BI} + x_{CI} &= 6000 \\ x_{AII} + x_{BII} + x_{CII} &= 4000 \\ x_{AIII} + x_{BIII} + x_{CIII} &= 2000 \\ x_{AIV} + x_{BIV} + x_{CIV} &= 1500 \end{aligned}$$

  - Valores posibles para las variables:

$$x_{ij} \geq 0; \quad \forall i = A, \ldots, C; j = I, \ldots, IV$$

Modelo

$$Min \;\; z = 3x_{AI} + 2x_{AII} + 7x_{AIII} + 6x_{AIV} +$$
$$7x_{BI} + 5x_{BII} + 2x_{BIII} + 3x_{BIV} +$$
$$2x_{CI} + 5x_{CII} + 4x_{CIII} + 5x_{CIV}$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
x_{AI} + x_{AII} + x_{AIII} + x_{AIV} &= 5000 \\
x_{BI} + x_{BII} + x_{BIII} + x_{BIV} &= 6000 \\
x_{CI} + x_{CII} + x_{CIII} + x_{CIV} &= 2500 \\
x_{AI} + x_{BI} + x_{CI} &= 6000 \\
x_{AII} + x_{BII} + x_{CII} &= 4000 \\
x_{AIII} + x_{BIII} + x_{CIII} &= 2000 \\
x_{AIV} + x_{BIV} + x_{CIV} &= 1500 \\
x_{ij} \geq 0; \;\; \forall i = A, \ldots, C; j &= I, \ldots, IV
\end{aligned}$$

El caso general

- Se tiene m fuentes proveedoras y n sitios de destino considerándose los siguientes parámetros:

  s_i: capacidad de producción de la fuente i; $\forall i = 1, \ldots, m$.
  d_j: demanda del sitio de destino j; $\forall j = 1, \ldots, n$.
  c_{ij}: costo unitario de transporte desde la fuente i al destino j; $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, n$.

- Los costos de transporte se consideran proporcionales o lineales a la cantidad transportada

- No existen restricciones de rutas o capacidades, se puede enviar cualquiera cantidad desde proveedores a clientes

Relación entre oferta y demanda

- Caso balanceado: Suministro total es igual a la demanda total
$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$
se denomin *problema de transporte balanceado*

- Casos desbalanceados: Suma total de los suministros es diferente a la suma total de las demandas
$$\sum_{i=1}^{m} s_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j$$
se denomina *problema de transporte desbalanceado*

Modelo caso balanceado

- La cantidad de suministro disponible es igual a la demanda total $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_{ij}\ \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Modelo caso oferta mayor que la demanda

- La cantidad de suministro disponible es mayor que la demanda total $\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$, pero las demandas deben ser satisfechas exactamente:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_{ij}\ \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Modelo caso oferta mayor que la demanda

- La cantidad total de suministro disponible es mayor que la demanda total $\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$, pero la sobresatisfacción de demandas no es explícitamente prohibida:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_{ij}\ \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Modelo caso oferta mayor que la demanda

- La cantidad total de suministro disponible es mayor que la demanda total $\sum_{i=1}^{m} s_i > \sum_{j=1}^{n} d_j$, pero obligatoriamente cada unidad producida debe ser despachada o algunas demandas deben ser sobresatisfechas:

$$Min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij}$$

Sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_{ij}\ \forall i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j\ \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Modelo caso oferta menor que la demanda

- La cantidad total de suministro disponible es menor que la demanda total $\sum_{i=1}^{m} s_i < \sum_{j=1}^{n} d_j$:
  - No hay solución posible a este problema.
  - Se puede obtener una solución de costo mínimo para el suministro disponible e identificar los destinos que no recibirán la demanda requerida:
    - Se agrega una fuente artificial con suministro igual a la diferencia entre demanda total y suministro total:

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} s_i$$

    - Modelo obtenido es similar al del caso balanceado, demanda total es igual a suministro total.
    - Todos los coeficientes de costo en la función objetivo correspondientes a la fuente s_{m+1} son cero pues no hay transporte desde esa fuente.

El problema de transporte

Carlos Castro

UTFSM

Octubre 2020