

Análisis de Sensibilidad

1. Introducción

Cualquier modelo de una situación es una simplificación de la situación real. Por lo tanto, existe cierta incertidumbre en la determinación de los valores de todos los parámetros involucrados. Debido a ello, es importante estudiar la variabilidad de la solución del problema planteado de acuerdo a eventuales modificaciones de los valores de los parámetros, o bien, debido a la incorporación de nuevos elementos a la situación.

Llamaremos **Análisis de Sensibilidad** al estudio de la variación del óptimo de un LP producto de modificaciones de ciertos parámetros como coeficientes de variables en la función objetivo, coeficientes del lado derecho de restricciones, etc.

La idea general consiste en determinar *rangos de variación* de los parámetros del LP de forma de mantener una cierta base óptima, teniendo en cuenta que una solución básica es factible sólo si todas las variables basales tienen un valor no negativo. Debido a que el estudio de la variación simultánea de varios parámetros puede ser difícil, nos centraremos en primer lugar en modificaciones de un parámetro a la vez manteniendo los restantes fijos. Estudiaremos las siguientes posibilidades:

Cambio 1 *Cambio del coeficiente en la función objetivo de una variable no básica.*

Cambio 2 *Cambio del coeficiente en la función objetivo de una variable básica.*

Cambio 3 *Cambio del coeficiente del lado derecho de una restricción.*

Cambio 4 *Incorporación de una nueva variable.*

Cambio 5 *Incorporación de una nueva restricción.*

Además, se estudiará la variación simultánea de coeficientes en la función objetivo y del lado derecho mediante *la regla del 100 %*.

Para desarrollar las distintas opciones consideraremos el siguiente ejemplo en su versión estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t.} & \\ & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + s_1 = 48 \quad (\text{a}) \\ & 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + s_2 = 20 \quad (\text{b}) \\ & 2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + s_3 = 8 \quad (\text{c}) \end{array} \quad (1.1)$$

Aplicando el método Simplex obtenemos el tableau final del Cuadro 1.1. Luego, la solución óptima del problema corresponde a $z = 280$, $s_1 = 24$, $x_3 = 8$, $x_1 = 2$ y $x_2 = s_2 = s_3 = 0$.

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	60	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2
z_j		60	35	20	0	10	10	280
$c_j - z_j$		0	-5	0	0	-10	-10	

Cuadro 1.1: Tableau Final del Problema (1.1)

2. Cambio del Coeficiente en la Función Objetivo de una Variable No Básica

En la base óptima del problema (1.1) la única variable de decisión no basal es x_2 . Dicha variable, posee como coeficiente en la función objetivo: $c_2 = 30$. Llamaremos c_j al coeficiente en la función objetivo de la variable j . Como x_2 no está en la base, sería interesante determinar el valor de c_2 necesario para que la variable x_2 sea incorporada a la base óptima.

Debido a que sólo se está cambiando el coeficiente de una variable en la función objetivo, la región factible del problema se ve inalterada, es decir, no se ve modificada la factibilidad del óptimo actual. Sólo puede ocurrir que la solución actual deje de ser la óptima si c_2 crece lo suficiente. Para determinar dicho valor, incorporaremos explícitamente una variación δ al coeficiente c_2 y veamos su efecto sobre el tableau óptimo (Cuadro 2.1).

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	60	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2
z_j		60	35	20	0	10	10	280
$c_j - z_j$		0	-5 + δ	0	0	-10	-10	

Cuadro 2.1: Modificación de c_2

Debido a que la modificación es en una variable no basal, sólo se ve alterado el precio sombra de la variable no basal modificada, es decir, $c_2 - z_2$. Para que la base no se altere, el precio sombra de x_2 debe seguir siendo no negativo (caso maximización):

$$c_2 - z_2 = -5 + \delta \leq 0 \rightarrow \delta \leq 5 \quad (2.1)$$

En este caso, cualquier variación inferior a 5 no cambiará la base. Un incremento exactamente igual 5 implica que x_2 puede pasar a ser una variable basal (óptimo alternativo). Valores mayores a 5 representan un cambio en el óptimo y requerirá efectuar iteraciones adicionales para obtener la nueva solución óptima. De todas formas, antes de asegurar que haya cambiado la solución óptima, se debe verificar que efectivamente pueda entrar a la base la variable a la que se le ha modificado su coeficiente en la

función objetivo. A modo de ejemplo, consideremos un incremento $\delta = 10$. En este caso, chequeamos que la variable x_2 pueda entrar (Cuadro 2.2). En este caso, sólo puede salir x_1 , x_2 puede entrar con valor 1,6. Luego, el nuevo valor de la función objetivo resulta:

$$z_{nueva} = z_{actual} + x_2 (c_2 - z_2) = 280 + 1,6 \times 5 = 288 \quad (2.2)$$

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24	—
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8	—
x_1	60	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2	$\frac{2}{1,25} = 1,6$
z_j		60	35	20	0	10	10	280	
$c_j - z_j$		0	(-5)	0	0	-10	-10		

Cuadro 2.2: Modificación con $\delta = 10$

La iteración se completa en el Cuadro 2.3, donde se verifica el nuevo valor máximo de la función objetivo y la combinación de valores de las variables basales. Si bien en este caso bastó sólo una iteración para determinar el nuevo óptimo, en general pueden requerirse varias iteraciones. En este ejemplo la primera restricción sigue siendo activa, pero en términos generales puede cambiar la condición de una restricción (pasar de activa a no activa o viceversa). En suma, si el cambio del coeficiente de una variable no basal es lo suficiente para alterar el óptimo, se está trasladando el óptimo de un punto extremo a otro, en ningún caso se altera la región factible del problema.

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	1,6	0	0	1	1,2	-5,6	27,2
x_3	20	1,6	0	1	0	1,2	-1,6	11,2
x_2	40	0,8	1	0	0	-0,4	1,2	1,6
z_j		64	40	20	0	8	16	288
$c_j - z_j$		-4	0	0	0	-8	-16	

Cuadro 2.3: Tableau Final Modificado

3. Cambio del Coeficiente en la Función Objetivo de una Variable Básica

El estudio de variaciones en coeficientes en la función objetivo de variables básicas sigue la misma lógica de la variación de coeficientes en la función objetivo de variables no básicas. La idea es determinar cómo varían los $c_j - z_j$ de todas variables y obtener a partir de dichas modificaciones un *rango* en el cual la base se ve inalterada. Evidentemente, una modificación de este tipo no afectada la región factible y sólo puede cambiar la optimalidad de la solución actual si la variación es lo suficientemente importante.

Para ilustrar el análisis consideremos una variación δ sobre el coeficiente c_1 , es decir, modifiquemos el valor del coeficiente en la función objetivo de la variable x_1 . La incorporación del parámetro δ

al tableau final original del problema (Cuadro 1.1) se ve en forma explícita en el Cuadro 3.1.

Base	c_j	x_1 $60 + \delta$	x_2 30	x_3 20	s_1 0	s_2 0	s_3 0	b_i
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	$60 + \delta$	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2
z_j		$60 + \delta$	$35 + 1,25\delta$	20	0	$10 - 0,5\delta$	$10 + 1,5\delta$	280
$c_j - z_j$		0	$-5 - 1,25\delta$	0	0	$-10 + 0,5\delta$	$-10 - 1,5\delta$	

Cuadro 3.1: Tableau Final del Problema (1.1)

Como el tableau final siempre es una forma canónica de las variables basales, la modificación sólo afecta los $c_j - z_j$ de variables no básicas. En otras palabras, para determinar el rango de variación que mantiene la base debemos imponer (caso de maximización):

$$(c_k - z_k) - a_{ik} \times \delta \leq 0 \quad (3.1)$$

Donde el índice k se refiere a la variable no básica k y a_{ik} es el coeficiente en la restricción i de la variable no básica k . En este caso, se debe imponer:

$$\begin{aligned} -5 - 1,25\delta &\leq 0 &\rightarrow &\delta \geq -\frac{5}{1,25} = -4 \\ -10 + 0,5\delta &\leq 0 &\rightarrow &\delta \leq \frac{10}{0,5} = 20 \\ -10 - 1,5\delta &\leq 0 &\rightarrow &\delta \geq -\frac{10}{1,5} = -\frac{20}{3} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por lo tanto, el parámetro δ debe variar en el *rango de optimalidad*:

$$-4 \leq \delta \leq 20 \quad (3.3)$$

para mantener la base óptima. En caso que la variación supere este rango cambiará la combinación de variables en la base y el valor de la función objetivo. Si el valor de δ se mantiene en el rango, las variables no cambian de valor y la nueva magnitud de la función objetivo queda definida por:

$$z_{nueva} = z_{actual} + x_1 \times \delta \quad (3.4)$$

Si el valor de δ escapa al rango definido en (3.3) cambiará la base y será necesario iterar para determinar el nuevo valor de las variables basales. Consideremos por ejemplo $\delta = 40$ y veamos el efecto sobre la solución óptima. Incorporando el nuevo valor de c_1 el tableau deja de ser óptimo (Cuadro 3.2), en este caso conviene ingresar la variable s_2 con valor 4. Completando la iteración (Cuadro 3.3) se verifica que se ha alcanzado el óptimo. En este caso se obtiene $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$ y $x_2 = x_3 = 0$, con valor de función objetivo igual a 400. El nuevo valor de z se podría haber predicho en términos del precio sombra de la variable entrante y el valor que toma la variable:

$$z_{nueva} = z_{actual} + s_2 (-10 + 0,5\delta)_{\delta=40} = 360 + s_2 \times 10 = 400 \quad (3.5)$$

Luego, un cambio en el coeficiente de una variable básica fuera de su rango de optimalidad implica un cambio de la base óptima y por lo tanto un desplazamiento a otro punto extremo de la región factible (puede ser más de una iteración). Por otro lado, un cambio dentro del rango de optimalidad modifica los $c_j - z_j$, pero mantiene la base.

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i	$\frac{b_i}{c_{ij}}$
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	24	$\frac{24}{2} = 12$
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	8	$\frac{8}{2} = 4 \rightarrow$
x_1	100	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2	-
z_j		100	85	20	0	-10	70	360	
$c_j - z_j$		0	-55	0	0	(10)	-70		

Cuadro 3.2: Tableau Modificado

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	0	0	-1	1	0	-4	16
s_2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	4
x_1	100	1	0,75	0,25	0	0	0,5	4
z_j		100	75	25	0	0	50	400
$c_j - z_j$		0	-45	-5	0	0	-50	

Cuadro 3.3: Tableau Final Modificado

4. Cambio del Coeficiente del Lado Derecho de una Restricción

La variación del coeficiente del lado derecho de una restricción modifica la región factible del problema, por lo tanto puede afectar la optimalidad de la solución óptima y la condición de las restricciones (activas o no activas).

El efecto de la variación del coeficiente b_i asociado a la restricción i deber ser analizado considerando la condición de la restricción afectada. Desde este punto de vista existen dos posibilidades:

Caso 1 La variación afecta a una restricción no activa, es decir, una restricción de tipo \leq con su variable de holgura en la base, o bien una restricción de tipo \geq con su variable de exceso en la base.

Caso 2 La variación afecta una restricción activa, es decir, una restricción de tipo \leq con su variable de holgura igual a cero, o bien una restricción de tipo \geq con su variables de exceso igual a cero.

4.1. Caso 1

En este caso, las restricciones tienen un *costo de oportunidad* nulo, es decir, no existe un costo asociado al hecho de no contar con una unidad adicional para esa restricción (caso \leq). Como existe una variable de holgura o de exceso con valor no nulo (en la base), se puede disminuir (caso \leq) o aumentar (caso \geq) el coeficiente b_i hasta llevar la restricción a su límite sin alterar la solución óptima.

Para ilustrar la situación, en el problema en estudio podemos disminuir el coeficiente b_1 hasta en 24 sin modificar la solución óptima, ya que se están quitando recursos que no se están empleando. Si disminuimos b_1 en exactamente 24 el tableau se degenera, con las consecuencias estudiadas previamente. Una disminución mayor a 24 cambiará el óptimo. En dicha situación, debemos buscar un tableau en el que podamos hacer la modificación sin degenerarlo (en el peor de los casos el inicial) y volver a iterar hasta encontrar el nuevo óptimo.

4.2. Caso 2

En este caso es necesario estudiar dos aspectos: la variación del valor de la función objetivo y el rango en el que puede variar b_i para mantener la condición de no negatividad de las variables.

Cuando la variable de holgura o de exceso asociada a la restricción no está en la base, el costo de oportunidad será no nulo (negativo en el caso de maximización). Si se trata de una restricción de tipo \leq , el valor de $c_j - z_j$ representa lo que se deja de ganar por no disponer una unidad adicional a la derecha de esa restricción. Por ejemplo, de acuerdo al tableau final del problema (Cuadro 1.1) para la segunda restricción se tiene: $c_2 - z_2 = -10$, es decir el aumento en 1 unidad de b_2 generará un aumento en la función objetivo en 10, similarmente una disminución en 1 unidad provocará una disminución de la función objetivo en 10. Las conclusiones anteriores son válidas siempre y cuando la variación respecte el *rango de factibilidad*.

Como *rango de factibilidad* entenderemos el intervalo de variación del coeficiente del lado derecho b_i asociado a la restricción activa i de forma de mantener una cierta combinación de variables en la base (el valor de la función objetivo puede cambiar).

Para ilustrar como se determina el rango de factibilidad consideremos una variación Δ sobre b_2 . Observando la fila asociada a la primera restricción en el Cuadro 1.1 tenemos:

$$0 \times x_1 + (-2) \times x_2 + 0 \times x_3 + 1 \times s_1 + 2 \times s_2 + (-8) \times s_3 = 24 \quad (4.1)$$

Debido a que las variables x_2 , s_2 y s_3 son no basales, se tiene $s_1 = 24$. Si estamos modificando el valor del lado derecho de la segunda restricción, se está modificando directamente el valor de su variable de holgura, es decir, el valor de s_2 , ya que como s_2 no está en la base, la segunda restricción es activa. Por lo tanto, si se incrementa el valor de s_2 en Δ se tiene:

$$0 \times x_1 + (-2) \times x_2 + 0 \times x_3 + 1 \times s_1 + 2 \times \Delta + (-8) \times s_3 = 24 \quad (4.2)$$

Considerando que las variables no basales valen cero, la expresión anterior se reduce a:

$$1 \times s_1 + 2 \times \Delta = 24 \quad (4.3)$$

Luego, el valor de s_1 se reduce en 2Δ al incrementar el valor de s_2 en Δ , o bien al aumentar el coeficiente b_2 del lado derecho de la segunda restricción en Δ . Generalizando, podemos concluir que el coeficiente a_{ij} representa la *disminución de la variable basal de la fila i debido a la incorporación de una unidad de la variable j a la base*.

A partir de (4.3) podemos determinar el valor máximo de Δ que mantiene en la base a s_1 . Como el valor actual de s_1 es 24 y a la derecha de la expresión (4.3) vemos el nuevo valor de la variable basal s_1 , para mantener la base se debe cumplir

$$1 \times 24 + 2 \times \Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -12 \quad (4.4)$$

La operación realizada en la expresión (4.4) pueden ser planteadas simultáneamente para todas las variables basales según (restricciones de tipo \leq):

$$\begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{nueva} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{actual} \end{pmatrix} + \Delta b_i \begin{pmatrix} \text{columna de la} \\ \text{variable de} \\ \text{holgura } i \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

En este caso se tiene:

$$\begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{nueva} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \Delta b_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 + 2\Delta b_2 \\ 8 + 2\Delta b_2 \\ 2 - 0,5\Delta b_2 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Para que la solución nueva sea factible, cada componente debe ser positiva:

$$\begin{aligned} 24 + 2\Delta b_2 &\geq 0 &\rightarrow \Delta b_2 &\geq -12 \\ 8 + 2\Delta b_2 &\geq 0 &\rightarrow \Delta b_2 &\geq -4 \\ 2 - 0,5\Delta b_2 &\geq 0 &\rightarrow \Delta b_2 &\leq 4 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es decir, el rango de factibilidad queda:

$$-4 \leq \Delta b_2 \leq 4 \quad (4.8)$$

Por ejemplo, si la variación fuera $\Delta b_2 = 2$, sabemos que el nuevo valor de la función objetivo será:

$$z_{nueva} = z_{actual} + \Delta b_2 \times (c_j - z_j)_{de \ s_2} = 280 + 2 \times 10 = 300 \quad (4.9)$$

Podemos obtener el mismo resultado calculando explícitamente el valor de la nueva solución óptima:

$$\begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{nueva} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

y luego evaluando en la función objetivo:

$$z = 60 \times 1 + 30 \times 0 + 20 \times 12 = 300 \quad (4.11)$$

La expresión (4.5) puede ser modificada para restricciones de tipo \geq e $=$:

- Restricción de tipo \geq :

$$\begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{nueva} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{actual} \end{pmatrix} - \Delta b_i \begin{pmatrix} \text{columna de la} \\ \text{variable de} \\ \text{exceso } i \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

- Restricción de tipo $=$:

$$\begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{nueva} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{solución} \\ \text{actual} \end{pmatrix} + \Delta b_i \begin{pmatrix} \text{columna de la} \\ \text{variable} \\ \text{artificial } i \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

¿ Qué ocurriría si la modificación excede el rango de factibilidad ? Para responder esta pregunta consideremos que se decide aumentar el coeficiente del lado derecho de la segunda restricción b_2 en 6, es decir excediendo en 2 unidades el límite máximo obtenido en (4.8). En este caso, haremos la modificación en dos etapas:

1. Actualizamos la base al valor límite del rango de factibilidad, en otras palabras se impone $\Delta b_2 = 4$ y se actualiza el tableau. Se obtiene entonces un tableau degenerado (Cuadro 4.1). La función objetivo verifica: $280 + 10 \times 4 = 320$.
2. Debido a que la variable s_2 vale ahora $6 - 4 = 2$, debemos incorporarla a la base en el lugar de la variable degenerada x_1 mediante pivoteo. Primero, introducimos s_2 a la base (Cuadro 4.2). En segundo lugar cambiamos el valor de s_2 a 2 (Cuadro 4.3), el nuevo tableau corresponde al tableau final del problema con el aumento del coeficiente del lado derecho de la segunda restricción en 6. En este caso, el nuevo tableau sigue siendo final.

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	$24 + 4 \times 2 = 32$
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	$8 + 4 \times 2 = 16$
x_1	60	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	$2 + 4 \times (-0,5) = 0$
z_j		60	35	20	0	10	10	320
$c_j - z_j$		0	-5	0	0	-10	-10	

Cuadro 4.1: Tableau Final Modificado - Primera Etapa ($\Delta b_2 = 4$)

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	4	3	0	1	0	-2	32
x_3	20	4	3	1	0	0	2	16
s_2	0	-2	-2,5	0	0	1	-3	0
z_j		80	60	20	0	0	40	320
$c_j - z_j$		-20	-30	0	0	0	-40	

Cuadro 4.2: Tableau degenerado introduciendo s_2 a la base

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i
s_1	0	4	3	0	1	0	-2	32
x_3	20	4	3	1	0	0	2	16
s_2	0	-2	-2,5	0	0	1	-3	2
z_j		80	60	20	0	0	40	320
$c_j - z_j$		-20	-30	0	0	0	-40	

Cuadro 4.3: Tableau final considerando $\Delta b_2 = 6$

5. Incorporación de una Nueva Variable

El análisis consiste en determinar la conveniencia o no de la incorporación de una nueva variable (nuevo producto) a un problema, desde el punto de vista si la nueva variable mejorará el valor actual de la función objetivo.

Supongamos que se desea incorporar una variable x_4 al problema en estudio. Las características de esta nueva alternativa son: un beneficio de 25 (coeficiente en la función objetivo) y un requerimiento de una unidad en la primera y tercera restricción, y de dos unidades en la segunda restricción. Por lo tanto, el nuevo modelo queda:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 \\
\text{s.t.} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + s_1 = 48 \quad (\text{a}) \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 + 2x_4 + s_2 = 20 \quad (\text{b}) \\
& 2x_1 + 1,5x_2 + 0,5x_3 + x_4 + s_3 = 8 \quad (\text{c})
\end{aligned} \tag{5.1}$$

La idea del presente análisis es definir la conveniencia de la incorporación de x_4 al problema. Para ello debemos estudiar la diferencia entre la utilidad o aporte de la variable a la función objetivo y la disminución debido al empleo de los recursos disponibles. Desde este punto de vista, considerando que el costo de oportunidad asociado a una restricción de tipo \leq se asocia a lo que se deja de ganar por no disponer de unidades adicionales, podemos asociar esta magnitud a la disminución de la función objetivo por cada unidad en que se reduce la disponibilidad.

Los costos de oportunidad de las restricciones del problema (Cuadro 1.1) son:

$$\begin{aligned} \text{Restricción (a)} &\rightarrow (c_j - z_j)_{s_1} = 0 \\ \text{Restricción (b)} &\rightarrow (c_j - z_j)_{s_2} = -10 \\ \text{Restricción (c)} &\rightarrow (c_j - z_j)_{s_3} = -10 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Considerando los requerimientos en cada restricción definidos previamente, el *costo* de producir una unidad de x_4 resulta:

$$\begin{aligned} \text{De (a)} &\rightarrow 1 \times (c_j - z_j)_{s_1} = 0 \\ \text{De (b)} &\rightarrow 2 \times (c_j - z_j)_{s_2} = -20 \\ \text{De (c)} &\rightarrow 1 \times (c_j - z_j)_{s_3} = -10 \\ &\quad \underline{-30} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por lo tanto, la producción de una unidad de x_4 representa una disminución de la función objetivo en 30. A continuación podemos contrastar este valor con el ingreso o aporte a la función objetivo de x_4 :

$$\Delta z = (c_j)_{x_4} - \sum_j (a_{ij})_{x_4} \times (c_j - z_j) = 25 - 30 = -5 \leq 0 \quad (5.4)$$

Luego, ingresar una unidad de x_4 a la base representa un efecto neto de disminuir la función objetivo en 5. Por lo tanto si se incorpora a x_4 al modelo, el óptimo se mantiene y x_4 no estará en la base.

La misma idea anterior puede ser aplicada cuando un modelo posee restricciones de tipo \geq y/o $=$, poniendo atención a los signos involucrados. ¿Cómo se obtendría el nuevo óptimo si fuera conveniente introducir la nueva variable al problema ?

6. Incorporación de una Nueva Restricción

La incorporación de una nueva restricción a un LP puede provenir no sólo de cambios en las hipótesis de formulación o bien de cambios en las condiciones de desarrollo de un cierto proceso productivo, si no que también pueden aparecer producto de la resolución del problema con algunas condiciones especiales. Más adelante se estudiarán técnicas para resolver problemas de LP con variables discretas basadas en la incorporación sucesiva de nuevas restricciones a un problema.

En términos generales, pueden ocurrir dos situaciones al agregar una nueva restricción a un problema:

1. La solución óptima actual satisface la nueva restricción.
2. La solución óptima actual **no satisface** la nueva restricción.

En el primer caso la solución del problema no se ve alterada, ya que la restricción no modifica la región factible o al menos no excluye al punto extremo óptimo actual. Hay que tener claro que la incorporación de una nueva restricción no puede generar una mejora de la función objetivo, en el mejor de los casos sólo mantiene el óptimo ya que la región factible corresponde a un subconjunto de la región

factible original.

Consideremos por ejemplo que al problema en estudio se le agrega la siguiente restricción:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \quad (6.1)$$

Al evaluar la solución óptima actual se tiene:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 2 + 0 + 8 = 12 \leq 15 \quad (6.2)$$

Como la restricción se satisface, el óptimo se mantiene. Si queremos ver como queda el nuevo tableau podemos ingresar la nueva restricción como una nueva fila en el tableau, también se generará una nueva columna para la nueva variable de holgura s_5 . Para ello debemos respetar la condición de las variables basales, es decir, mediante operaciones fila debemos hacer coeficientes 0 en las variables basales de la nueva restricción. En este caso, en la nueva restricción:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_4 = 0 \quad (6.3)$$

podemos hacer un cero para x_1 multiplicando por -2 la fila 3 del Cuadro 1.1 y sumándosela:

$$-1,5x_2 + x_3 + s_2 - 3s_3 + s_4 = 11 \quad (6.4)$$

A continuación, hacemos un cero para x_3 multiplicando la fila 2 del Cuadro 1.1 por -1 y sumándosela a (6.4):

$$0,5x_2 - s_2 + s_3 + s_4 = 3 \quad (6.5)$$

La ecuación (6.5) puede ser introducida al tableau final original para obtener el nuevo tableau óptimo (Cuadro 6.1).

Cuando la solución óptima no satisface la nueva restricción la situación no es tan sencilla. Por

Base	c_j	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b_i
s_1	0	0	-2	0	1	2	-8	0	24
x_3	20	0	-2	1	0	2	-4	0	8
x_1	60	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	0	2
s_4	0	0	0,5	0	0	-1	1	1	3
z_j		60	35	20	0	10	10	0	280
$c_j - z_j$		0	-5	0	0	-10	-10	0	

Cuadro 6.1: Tableau Final con la nueva restricción

ejemplo, supongamos que la nueva restricción es:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \quad (6.6)$$

En este caso, al verificar la solución óptima actual se tiene:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 2 + 0 + 8 = 12 \geq 10 \quad (6.7)$$

Como la solución óptima actual no satisface la nueva restricción es preciso determinar el nuevo óptimo. A diferencia del caso anterior, no es posible ingresar directamente la nueva restricción al tableau final

ya que como no se satisface la restricción al aplicar las operaciones filas se obtendrá un valor negativo para la variable de holgura s_4 . Luego, antes de ingresar la nueva restricción debemos buscar una base que satisfaga la restricción nueva. En este caso, el penúltimo tableau (ver apunte de Simplex) tiene como solución $s_1 = 16$, $s_2 = 4$, $x_1 = 4$ y $x_2 = x_3 = s_3 = 0$ (Cuadro 6.2). Evaluando esta base en la nueva restricción:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times 8 + 0 + 0 = 8 \leq 10 \quad (6.8)$$

Como esta solución básica factible satisface la nueva restricción podemos introducir la nueva restricción

Base	c_j	x_1 60	x_2 30	x_3 20	s_1 0	s_2 0	s_3 0	b_i
s_1	0	0	0	-1	1	0	-4	16
s_2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	4
x_1	60	1	0,75	0,25	0	0	0,5	4
z_j		60	45	15	0	0	30	240
$c_j - z_j$		0	-15	5	0	0	-30	

Cuadro 6.2: Tableau de la Segunda Iteración.

al tableau. Se agrega una columna para s_4 y mediante operaciones filas construimos la forma canónica. Considerando la restricción estandarizada:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_4 = 10 \quad (6.9)$$

podemos multiplicar por -2 la fila 3 del Cuadro 6.2 para hacer un cero para la variable basal x_1 :

$$-0,5x_2 + 0,5x_3 - s_3 + s_4 = 2 \quad (6.10)$$

Como en (6.10) las variables básicas s_1 y s_2 no aparecen, podemos introducir la restricción al tableau (Cuadro 6.3). En este caso, entra la variable x_3 con valor igual a 4. Iterando, se completa el Cuadro 6.4. Como todos los $c_j - z_j$ son no positivos y se está maximizando se ha alcanzado el óptimo. El nuevo valor de la función objetivo resulta $z = 260$, con variables basales $x_1 = 3$, $x_3 = 4$, $s_1 = 20$, $s_2 = 2$ y $x_2 = s_3 = s_4 = 0$.

Base	c_j	x_1 60	x_2 30	x_3 20	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	b_i	$\frac{a_{ij}}{b_i}$
s_1	0	0	0	-1	1	0	-4	0	16	-
s_2	0	0	-1	0,5	0	1	-2	0	4	8
x_1	60	1	0,75	0,25	0	0	0,5	0	4	16
s_4	0	0	-0,5	0,5	0	0	-1	1	2	4 \rightarrow
z_j		60	45	15	0	0	30	0	240	
$c_j - z_j$		0	-15	(5)	0	0	-30	0		

Cuadro 6.3: Tableau de la Segunda Iteración con restricción nueva.

Base	c_j	x_1 60	x_2 30	x_3 20	s_1 0	s_2 0	s_3 0	s_4 0	b_i
s_1	0	0	-1	0	1	0	-6	2	20
s_2	0	0	-0,5	0	0	1	-1	-1	2
x_1	60	1	1	0	0	0	1	-0,5	3
x_3	20	0	-1	1	0	0	-2	2	4
z_j		60	40	20	0	0	20	10	260
$c_j - z_j$		0	-10	0	0	0	-20	-10	

Cuadro 6.4: Tableau de Final con restricción nueva.

7. La Regla del 100 %

Los resultados del análisis de sensibilidad en base a cambiar una variable manteniendo las otras fijas se pueden emplear para estudiar variaciones simultáneas mediante la regla del 100 %. Se verán los siguientes casos:

- Variación de coeficientes en la función objetivo.
- Variación de coeficientes del lado derecho.

7.1. Variación simultánea de coeficientes de la función objetivo

Se consideran dos casos:

Caso 1 *Todas las variables a las que se les modifica el coeficiente no son básicas.*

Caso 2 *Al menos una de variables a las que se les modifica el coeficiente es básica.*

En el Caso 1 si todas las variables están dentro de su rango de optimalidad (calculado variando una variable) la base actual permanece óptima y el valor de las variables básicas no cambia por lo que tampoco se ve afectado el valor de la función objetivo.

Si la variación de al menos una de las variables está fuera del rango de optimalidad, la solución deja de ser la óptima.

En el Caso 2 si definimos:

$$\begin{aligned}
 c_j &= \text{coeficiente original de } x_j \text{ en la función objetivo} \\
 \Delta c_j &= \text{variación de } c_j \\
 I_j &= \text{incremento máximo de } c_j \text{ para que se mantenga la base óptima} \\
 D_j &= \text{decremento máximo de } c_j \text{ para que se mantenga la base óptima}
 \end{aligned}$$

Para cada variable x_j se puede definir la razón r_j como:

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \Delta c_j \geq 0 &\rightarrow r_j = \frac{\Delta c_j}{I_j} \\
 \text{Si } \Delta c_j \leq 0 &\rightarrow r_j = \frac{-\Delta c_j}{D_j}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Si c_j no cambia, $r_j = 0$. La razón r_j mide la proporción entre el cambio real de c_j y el máximo cambio admisible para c_j para mantener la base óptima. Si sólo se cambia un coeficiente de la función objetivo,

la base permanecerá óptima mientras $r_j \leq 1$ (un cambio inferior al 100 %). La regla del 100 % es una generalización de la idea anterior, es decir si:

$$\sum_j r_j \leq 1 \quad (7.2)$$

se puede asegurar que la base actual sigue siendo la óptima y los valores de las variable tampoco cambian, pero la función objetivo podría cambiar. Si la expresión (7.2) es mayor a 1 no se puede asegurar que se mantenga como óptima, pero tampoco hay seguridad de que vaya a cambiar.

A modo de ejemplo, consideremos que en el problema en estudio el coeficiente de la variable x_1 crece a 70 y el de x_3 baja a 18. Como ambas variables son basales estamos en el Caso 2 (al menos una basal). Previamente se vio que $I_1 = 20$ y $D_1 = 4$, se deja al lector chequear que $I_3 = 2,5$ y $D_3 = 5$. Luego:

$$\begin{aligned} \Delta c_1 &= 70 - 60 = 10 \geq 0, & I_1 &= 20 \rightarrow r_1 = \frac{10}{20} = 0,5 \\ \Delta c_2 &= 0, & & \rightarrow r_2 = 0 \\ \Delta c_3 &= 18 - 20 = -2 \leq 0, & D_3 &= 5 \rightarrow r_3 = \frac{2}{5} = 0,4 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Luego $r_1 + r_2 + r_3 = 0,9 \leq 1$, por lo que la solución sigue siendo óptima.

7.2. Variación simultánea de coeficientes del lado derecho

También se consideran dos casos:

Paso 1 *Todas las restricciones a las que se les modifica el coeficiente del lado derecho son no activas, es decir, tienen su variable de holgura o exceso en la base.*

Paso 2 *Al menos una de las restricciones a las que se les modifica el coeficiente del lado derecho es activa, es decir, tiene su variable de holgura o exceso fuera de la base.*

En el Caso 1 si todas las variaciones de los coeficientes del lado derecho de las restricciones permanecen en el rango de factibilidad (calculando variando sólo una variable), la base actual permanece óptima y los valores de las variables de decisión no cambian, por lo que no cambia el valor de la función objetivo. Si alguna de las variaciones está fuera del rango de factibilidad, la base actual deja de ser óptima.

En el Caso 2 si definimos:

$$\begin{aligned} b_i &= \text{valor original del coeficiente del lado derecho de la restricción } i \\ \Delta b_i &= \text{variación de } b_i \\ I_i &= \text{incremento máximo de } b_i \text{ para que se mantenga la base óptima} \\ D_i &= \text{decremento máximo de } b_i \text{ para que se mantenga la base óptima} \end{aligned}$$

Para cada variable restricción i se puede definir la razón r_i como:

$$\begin{aligned} \text{Si } \Delta b_i &\geq 0 \rightarrow r_i = \frac{\Delta b_i}{I_i} \\ \text{Si } \Delta b_i &\leq 0 \rightarrow r_i = \frac{-\Delta b_i}{D_i} \end{aligned} \quad (7.4)$$

La razón r_i mide la proporción entre el cambio real de b_i y el máximo cambio admisible para b_i para mantener la base óptima. Si sólo se cambia un coeficiente de la función objetivo, la base permanecerá óptima mientras $r_i \leq 1$ (un cambio inferior al 100 %). Luego, si:

$$\sum_i r_i \leq 1 \quad (7.5)$$

la base permanecerá óptima a pesar de que los valores de las variables puedan cambiar y con ello el valor de la función objetivo. Al igual que el caso anterior, si $\sum_i r_i > 1$ la base puede como no puede cambiar, nada se puede asegurar.

A modo de ejemplo, consideremos que en el problema en estudio el coeficiente del lado derecho de la segunda restricción aumenta a 22 y el de la tercera restricción crece a 9. Como ambas variables de holgura son basales estamos en el Caso 2 (al menos una basal). Previamente se vio que $I_2 = 4$ y $D_2 = 4$, se deja al lector chequear que $I_3 = 2$ y $D_3 = \frac{4}{3}$. Luego:

$$\begin{aligned} \Delta b_1 &= 0, & \rightarrow r_1 &= 0 \\ \Delta b_2 &= 22 - 20 = 2 \geq 0, \quad I_2 = 4 & \rightarrow r_2 &= \frac{2}{4} = 0,5 \\ \Delta b_3 &= 9 - 8 = 1 \geq 0, \quad I_3 = 2 & \rightarrow r_3 &= \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Luego $r_1 + r_2 + r_3 = 1 \leq 1$, por lo que la solución sigue siendo óptima.