Relación de ejercicios 2 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

Ejercicio 1.

Ejercicio 2. Medidos los pesos, X (en Kg), y las alturas, Y (en cm), a un grupo de individuos, se han obtenido los siguientes resultados:

X/Y	160	162	164	166	168	170
48	3	2	2	1	0	0
51	2	3	4	2	2	1
54	1	3	6	8	5	1
57	0	0	1	2	8	3
60	0	0	0	2	4	4

a) Calcular el peso medio y la altura media y decir cuál es más representativo.

Para ello hemos de trabajar con las distribuciones marginales del carácter X (peso en Kg) y del carácter Y (altura en cm). Tras efectuar los cálculos pertinentes, la tabla anterior queda de la siguiente forma:

X/Y	160	162	164	166	168	170	$n_{i.}$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
48	3	2	2	1	0	0	8	384	18432
51	2	3	4	2	2	1	14	714	36414
54	1	3	6	8	5	1	24	1296	69984
57	0	0	1	2	8	3	14	798	45486
60	0	0	0	2	4	4	10	600	36000
$n_{.j}$	6	8	13	15	19	9			
$n_{.j}y_j$	960	1296	2132	2490	3192	1530			
$n_{.j}y_j^2$	153600	209952	349648	413340	536256	260100			

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i n_{i.} = \frac{384 + 714 + 1296 + 798 + 600}{70} = 54{,}1714 \text{ kilogramos}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} y_j n_{.j} = \frac{960 + 1296 + 2132 + 2490 + 3192 + 1530}{70} = 165{,}7143 \text{ centímetros}$$

Para poder determinar cuál de las dos medias es más representativa, haremos uso del coeficiente de variación de Pearson, el cual nos permitirá interpretar independientemente de la escala la variabilidad de los datos respecto de su media:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2} = 3{,}582 \text{ kilogramos} \qquad C.V(X) = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = 0{,}0661$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{6} n_{.j}y_j^2 - \overline{y}^2} = 2{,}9519 \text{ centímetros} \qquad C.V(Y) = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} = 0{,}0178$$

En vista de los resultados, se deduce que la distribución marginal del carácter Y (la altura en cm) es más homogénea, por lo que la altura media es la más representativa de las dos.

b) Calcular el porcentaje de individuos que pesan menos de 55 Kg y miden más de 165 cm.

Si miden más de 165 cm y pesan menos de 55 kg, hemos de tener en cuenta las frecuencias absolutas de todos los pares (x_i, y_j) con $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{4, 5, 6\}$. Efectuamos el cálculo:

$$100 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=4}^{6}\sum_{i=1}^{3} n_{ij} = 100 \cdot \frac{1}{70} \cdot (1+2+2+1+8+5+1) = 28{,}571\,\% \text{ de los individuos}$$

c) Entre los que miden más de 165 cm, ¿cuál es el porcentaje de los que pesan más de 52 Kg?

Si miden más de 165 cm y pesan más de 52 kg, hemos de tener en cuenta las frecuencias absolutas de todos los pares (x_i, y_j) con $i \in \{3, 4, 5\}$ e $j \in \{4, 5, 6\}$. Efectuamos el cálculo:

$$100 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=4}^{6}\sum_{i=3}^{5} n_{ij} = 100 \cdot \frac{1}{70} \cdot (8+5+1+2+8+3+2+4+4) = 52{,}857\,\% \text{ de los individuos}$$

d) ¿Cuál es la altura más frecuente entre los individuos cuyo peso oscila entre 51 y 57 Kg?

Esto es equivalente a hallar la modalidad y_j a la que le corresponde el máximo de $n_{2j} + n_{3j} + n_{4j}$:

y_j	$n_{2j} + n_{3j} + n_{4j}$
160	3
162	6
164	11
166	12
168	15
170	5

De la tabla se obtiene que la altura más frecuente entre los individuos cuyo peso oscila entre 51 y 57 kg es $y_5 = 168$ cm.

e) ¿Qué peso medio es más representativo, el de los individuos que miden 164 cm o el de los que miden 168 cm?

Para poder determinar lo que se nos pide, hemos de estudiar de estudiar dos distribuciones condicionadas: la del carácter X condicionada a la modalidad y_3 y la del carácter X condicionada a la modalidad y_5:

x_i	n_{i3}	$x_i n_{i3}$	$x_i^2 n_{i3}$
48	2	96	4608
51	4	204	10404
54	6	324	17496
57	1	57	3249
60	0	0	0
	13	681	35757

x_i	n_{i5}	$x_i n_{i5}$	$x_i^2 n_{i5}$
48	0	0	0
51	2	102	5202
54	5	270	14580
57	8	456	25992
60	4	240	14400
	19	1068	60174

$$\bar{x}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i n_{i3} = \frac{681}{13} = 52{,}3846 \text{ kg} \qquad \bar{x}_5 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i n_{i5} = \frac{1068}{19} = 56{,}2105 \text{ kg}$$

$$\sigma_{x,3} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_{i3} x_i^2 - \overline{x}_3^2} = 2{,}5283 \text{ kg} \qquad \sigma_{x,5} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} n_{i5} x_i^2 - \overline{x}_5^2} = 2{,}7216 \text{ kg}$$

Al igual que se ha hecho en el apartado a), haremos uso del coeficiente de variación de Pearson para poder determinar qué peso medio es más representativo:

$$C.V_3(Y) = \frac{\sigma_{x,3}}{\bar{x}_3} = 0{,}0483 \qquad C.V_5(Y) = \frac{\sigma_{x,5}}{\bar{x}_5} = 0{,}0484$$

En vista de lo obtenido, podemos concluir que el peso medio de la distribución condicionada del carácter X a la modalidad y_3 es el más representativo de los dos, aunque en este caso los coeficientes de Pearson son prácticamente iguales.

Ejercicio 3. En una encuesta de familias sobre el número de individuos que la componen (X) y el número de personas activas en ellas (Y) se han obtenido los siguientes resultados:

X/Y	1	2	3	4
1	7	0	0	0
2	10	2	0	0
3	11	5	1	0
4	10	6	6	0
5	8	6	4	2
6	1	2	3	1
7	1	0	0	1
8	0	0	1	1

a) Calcular la recta de regresión de Y sobre X.

X/Y	1	2	3	4	$n_{i.}$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
1	7	0	0	0	7	7	7
2	10	2	0	0	12	24	48
3	11	5	1	0	17	51	153
4	10	6	6	0	22	88	352
5	8	6	4	2	20	100	500
6	1	2	3	1	7	43	252
7	1	0	0	1	2	14	98
8	0	0	1	1	2	16	128
$n_{.j}$	48	21	15	5	89		
$n_{.j}y_j$	48	42	45	20			
$n_{.j}y_j^2$	48	84	135	80			

La recta de regresión lineal de Y sobre X viene dada por la expresión:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y}$$

Por lo tanto, comencemos calculando las medias aritméticas y la varianza de x y la covarianza:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} x_i n_{i.} = 3{,}8427 \text{ individuos} \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} y_j n_{.j} = 1{,}7416 \text{ personas activas}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2 = 2{,}5146 \text{ individuos}^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{4} n_{ij}x_i y_j - \overline{x}\ \overline{y} = 0{,}7907$$

Por lo tanto, la recta de regresión de Y sobre X quedaría:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y} = 0{,}3144x + 0{,}5333$$

b) ¿Es adecuado suponer una relación lineal para explicar el comportamiento de Y a partir de X?

Para ver cómo de adecuado es suponer dicha relación calculamos el coeficiente de correlación lineal:

$$r^2 = \sqrt{\frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2}} \qquad r = \sqrt{r^2}$$

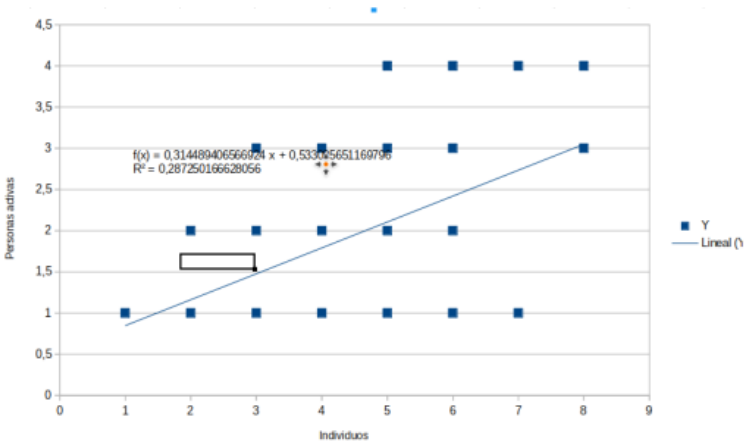
Ahora calculamos la varianza de Y:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} n_{.j}y_j^2 - \overline{y}^2 = 0{,}8657 \text{ personas activas}^2$$

Por tanto:

$$r^2 = \frac{0{,}7907^2}{2{,}5146 \cdot 0{,}8657} = 0{,}2872 \qquad r = 0{,}536$$

Observando estos resultados podemos afirmar que no es adecuado suponer esta relación linear puesto que el coeficiente de correlación lineal está demasiado alejado de 1.



temperaturas

Ejercicio 4. Se realiza un estudio sobre la tensión de vapor de agua (Y , en ml. de Hg.) a distintas temperaturas (X, en o C). Efectuadas 21 medidas, los resultados son:

X/Y	(0,5, 1,5]	(1,5, 2,5]	(2,5, 5,5]
$(1, 15]$	4	2	0
$(15, 25]$	1	4	2
$(25, 30]$	0	3	5

Explicar el comportamiento de la tensión de vapor en términos de la temperatura mediante una función lineal. ¿Es adecuado asumir este tipo de relación?

$n_{13} = 0 \neq \frac{6 \cdot 7}{21} = \frac{n_{1\cdot} \cdot n_{\cdot 3}}{n} \Longrightarrow$ existe al menos un par de valores de las variables tal que la frecuencia absoluta nde ese par o coincide con el producto de las de las marginales partido por el tamaño de la población, lego podemos afirmar que X e Y no son independientes.

Buscamos la recta de regresión Y/X:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \cdot (x - \overline{x})$$

Escribimos la tabla utilizando las marcas de clase

X/Y	1	2	4	$n_{i.}$	$c_i \cdot n_{i.}$	$c_i^2 \cdot n_{i.}$
8	4	2	0	6	48	384
20	1	4	2	7	140	2800
27.5	0	3	5	8	220	6050
$n_{.j}$	5	9	7	21	408	9234
$d_j \cdot n_{.j}$	5	18	28	51		
$d_j^2 \cdot n_{.j}$	5	36	112	153		

Media de la distribución marginal de X:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{3} c_i \cdot n_{i.} = \frac{408}{21} = 19{,}429°C$$

Media de la distribución marginal de Y:

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{3} d_j \cdot n_{.j} = \frac{51}{21} = 2{,}429 \text{ ml. de Hg}$$

Varianza de la marginal de X:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{3}(n_{i.}c_i^2) - \overline{x}^2 = \frac{9234}{21} - 19{,}429^2 = 62{,}226°C^2$$

Varianza de la marginal de Y:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{3}(n_{.j}d_j^2) - \overline{y}^2 = 1{,}386 \text{ ml}^2 \text{ de Hg}$$

Covarianza de las variables X e Y:

$$Cov(X,Y) = \sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}c_i d_j - \overline{xy} = \frac{1119}{21} - 19,429 \cdot 2{,}429 = 6{,}093$$

Recta de regresión:

$$y = ax + b = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x + \overline{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x}$$

$a = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{6{,}093}{62{,}228} = 0{,}098$;
$b = \overline{y} - a\overline{x} = 2{,}429 - 0{,}098 \cdot 19{,}429 = 0{,}525$;

$$y = 0{,}098x + 0{,}525$$

Razón de correlacón:

$$\eta^2_{Y/X} = \eta^2_{X/Y} = r^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2} = \frac{6{,}093^2}{62{,}228 \cdot 1386} = 0{,}430$$

La recta de regresión explica el 43 % de los casos, menos del 50 %, luego podemos concluir que no se trata de un buen ajuste.

Ejercicio 5. Estudiar la dependencia o independencia de las variables en cada una de las siguientes distribuciones. Dar, en cada caso las curvas de regresión y la covarianza de las dos variables.

Comencemos con la primera distribución:

X/Y	1	2	3	4	5
10	2	4	6	10	8
20	1	2	3	5	4
30	3	6	9	15	12
40	4	8	12	20	16

Debemos saber que el cáracter Y es independiente a nivel estadístico del carácter X si las distribuciones de Y condicionadas a cada valor de la variable X son iguales $\forall x_i \quad i = 1, 2, \ldots, k$:

$$f_j^i = f_{j/i}$$

Así, se tiene que cumplir lo siguiente:

$$\frac{n_{1j}}{n_{1.}} = \frac{n_{2j}}{n_{2.}} = \cdots = \frac{n_{ij}}{n_{i.}} = \cdots = \frac{n_{kj}}{n_{k.}} \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, p \tag{1}$$

Ahora comprobemos si esto se cumple en la distribución representada por la tabla anterior. Es digno de mención que el recíproco también es cierto, es decir, si Y es independiente de X, X también lo es de Y.

$$\begin{aligned} j=1 \quad & \frac{2}{30}=\frac{1}{15}=\frac{3}{45}=\frac{4}{60} \\ j=2 \quad & \frac{4}{30}=\frac{2}{15}=\frac{6}{45}=\frac{8}{60} \\ j=3 \quad & \frac{6}{30}=\frac{3}{15}=\frac{9}{45}=\frac{12}{60} \\ j=4 \quad & \frac{10}{30}=\frac{5}{15}=\frac{15}{45}=\frac{20}{60} \\ j=5 \quad & \frac{8}{30}=\frac{4}{15}=\frac{12}{45}=\frac{16}{60} \end{aligned}$$

Podemos observar que, efectivamente, Y es independiente de X y por tanto carace de sentido estudiar la curva de regresión y afirmamos que:

$$\sigma_{xy}=0$$

Ahora pasemos a estudiar la segunda distribución:

X/Y	1	2	3
-1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0

De entrada, podemos observar que estas dos variables no son independientes, puesto que si hubiese algún $n_{ij}=0$, la igualdad (1) no se daría a no ser que $n_{ij}=0 \quad \forall i,j$, lo cual volvería absurdo el estudio de esta tabla puesto que no representaría ninguna distribución de frecuencias.

Ahora observemos la posible dependencia funcional. Podemos afirmar que X no depende funcionalmente, pues $n_{12}=1$ y $n_{22}=0$, es decir, a la modalidad 2 de Y le corresponden dos posibles modalidades de X.

X/Y	1	2	3	$n_{i.}x_i$
-1	0	1	0	-1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Calculemos la covarianza:

$$\sigma_{xy}=m_{11}-\overline{x}\ \overline{y}$$

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{3}n_{i.}x_i=0$$

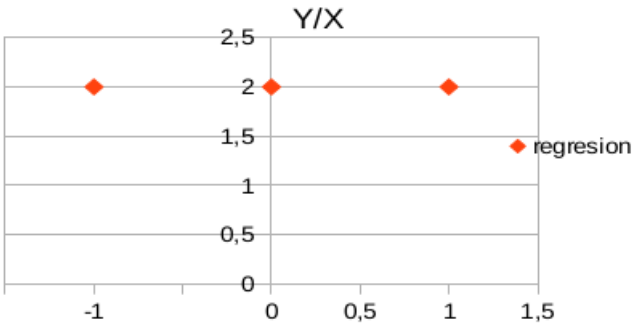
Al ser $\overline{x}=0$, la covarianza será m_{11}:

$$\sigma_{xy}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}f_{ij}x_iy_j=0$$

Este resultado nos demuestra que si las variables son independientes, su covarianza es 0, pero el recíproco no es cierto. Aquí las variables no son independientes y su covarianza es 0.

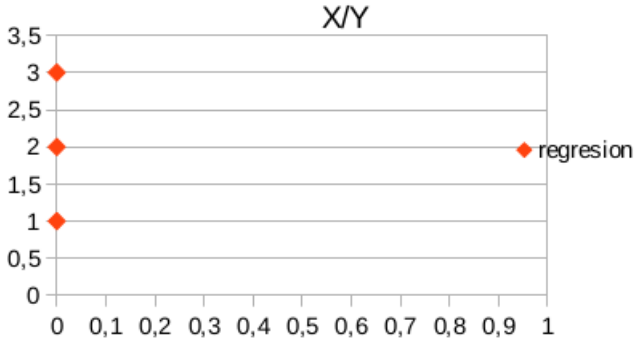
Ahora calcularemos la curva de regresión de tipo 1 de Y/X, que es la curva que pasa por los puntos $(x_i,\overline{y}_i) \quad i=1,\ldots,k$.

Punto 1: $(-1,2)$ Punto 2: $(0,2)$ Punto 3: $(1,2)$



Ahora calcularemos la curva de regresión tipo 1 de X/Y, la cual pasa por los puntos $\overline{x}_j, y_j \quad j = 1, \ldots, p$.

Punto 1: $(0, 1)$ Punto 2: $(0, 2)$ Punto 3: $(0, 3)$



Ejercicio 6. Dada la siguiente distribución bidemensional:

X/Y	1	2	3	4
10	1	3	0	0
12	0	1	4	3
14	2	0	0	2
16	4	0	0	0

Primero vamos a obtener unos datos previos que facilitarán los cálculos posteriores:

X/Y	1	2	3	4	$n_{i.}$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
10	1	3	0	0	4	40	400
12	0	1	4	3	8	96	1152
14	2	0	0	2	4	56	784
16	4	0	0	0	4	64	1024
				Total	20	256	3360
$n_{.j}$	7	4	4	5	20		
$n_{.j}y_j$	7	8	12	20	47		
$n_{.j}y_j^2$	7	16	36	80	139		

Ahora calcularemos la media de x, de y, las varianzas y la covarianza:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_{i.}x_i}{n} = 12{,}8 \qquad \overline{y} = \frac{\sum_{j=1}^{4} n_{.j}y_j}{n} = 2{,}35$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 n_{i.} - \overline{x}^2 = 4{,}16$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1} n_{.j} y_j^2 - \overline{y}^2 = 1{,}4275$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} n_{ij} x_i y_j - \overline{x}\ \overline{y} = -0{,}78$$

a) ¿Son estadísticamente independientes X e Y?

Podemos observar que existen ciertos $n_{ij} = 0$, por tanto las variables no son independientes puesto que la igualdad (1) no se va a dar a menos que $n_{ij} = 0 \quad \forall i, j$, lo cual carecería de sentido porque sería estudiar una variable que no ha presentado distribución de frecuencias ninguna. También observamos que como para cada modalidad de X no encontramos una única modalidad de Y con frecuencia no nula y por tanto tampoco son funcionalmente dependientes.

b) Calcular y representar las curvas de regresión de X/Y e Y/X.

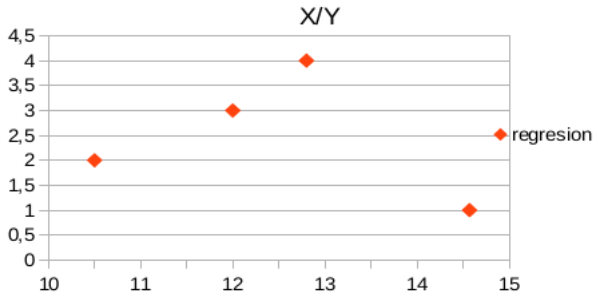
Para calcular la curva de regresión de tipo 1 de X/Y tenemos que calcular los puntos por los que pasa. Estos son los puntos $(\overline{x}_j, y_j) \quad j = 1, \ldots, p$.

$$\overline{x}_1 = \frac{10 + 14 \cdot 2 + 16 \cdot 4}{7} = 14{,}57 \qquad \overline{x}_2 = \frac{10 \cdot 3 + 12}{4} = 10{,}5$$

$$\overline{x}_3 = \frac{12 \cdot 4}{4} = 12 \qquad \overline{x}_4 = \frac{12 \cdot 3 + 14 \cdot 2}{5} = 12{,}8$$

Punto 1: (14.57, 1) Punto 2: (10.5, 2)

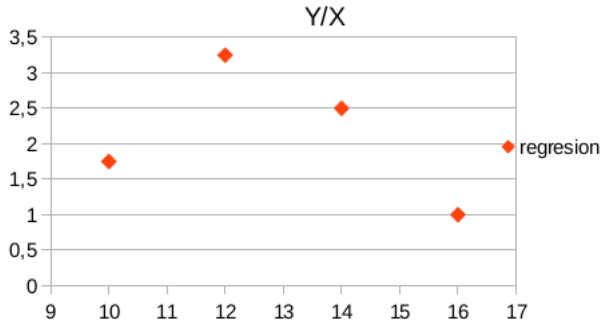
Punto 3: (12, 3) Punto 4: (12.8, 4)



Ahora calculamos la curva de regresión de tipo 1 de Y/X, la cual pasa por los puntos $(x_i, \overline{y}_i) \quad i = 1, \ldots, k$

$$\overline{y}_{10} = \frac{1 + 2 \cdot 3}{4} = 1{,}75 \qquad \overline{y}_1 2 = \frac{2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{8} = 3{,}25$$

$$\overline{y}_{14} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{4} = 2{,}5 \qquad \overline{y}_{16} = \frac{4}{4} = 1$$



c) Cuantificar el grado en que cada variable es explicada por la otra mediante la correspondiente curva de regresión.

Es necesario resaltar que los valores de las desviaciones típicas han sido calculadas en el siguiente apartado.

Ahora calculamos los valores de la razón de correlación lineal de Y/X y X/Y.

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{\sigma^2_{ey}}{\sigma^2_y} \qquad \sigma_{ey} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}(\overline{y}_i - y_j)^2 = 0{,}765$$

$$\eta^2_{Y/X} = 0{,}5359$$

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{\sigma^2_{ex}}{\sigma^2_x} \qquad \sigma_{ex} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}(\overline{x}_j - x_i)^2 = 2{,}2843$$

$$\eta^2_{X/Y} = 0{,}5491$$

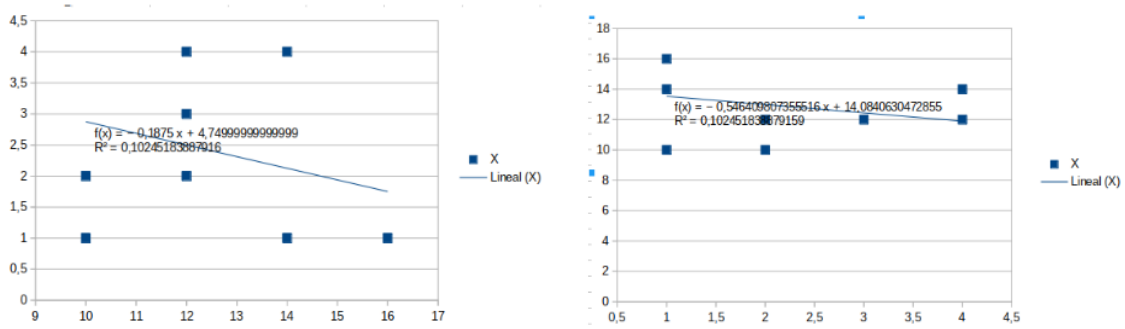
Concluimos que cada variable explica alrededor de el 54 % de la otra.

d) ¿Están X e Y correladas linealmente? Dar las expresiones de las rectas de regresión.

Las expresiones de las rectas de regresión de Y sobre X y la recta de regresión de X sobre Y son respectivamente:

$$y = \overline{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_x}(x - \overline{x}) \qquad x = \overline{x} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma^2_y}(y - \overline{y})$$

$$y = -0{,}1875x + 4{,}75 \qquad x = -0{,}5464y + 14{,}084$$



Para ver si X e Y están correlacionadas linealmente, calculamos el coeficiente de correlación lineal de Pearson. Hacemos primero la razón de correlación lineal y tomamos la raíz cuadrada negativa ya que la covarianza es negativa.

$$r^2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} = 0{,}1024 \Rightarrow r = -\sqrt{r^2} = -0{,}32$$

Así, concluimos que no están correlacionadas linealmente puesto que el resultado obtenido está bastante alejado de -1. Como se puede observar, la razón de correlación de nuestras rectas no supera a la recta de regresión de tipo 1 lo cual siempre se cumple.

Ejercicio 7. Para cada una de las distribuciones:

[Distribución A] X/Y	10	15	20
1	0	2	0
2	1	0	0
3	0	0	3
4	0	1	0

[Distribución B] X/Y	10	15	20
1	0	2	0
2	1	0	0
3	0	0	3

[Distribución C] X/Y	10	15	20	25
1	0	3	0	1
2	0	0	1	0
3	2	0	0	0

a) ¿Dependen funcionalmente X de Y o Y de X?
Dist. A: Y depende funcionalmente de X, porque para cada valor de X solo existe un único valor de Y, en cambio X no depende funcionalmente de Y.
Dist. B: X depende funcionalmente de Y y a la vez, Y depende funcionalmente de X.
Dist. C: En este caso, X depende funcionalmente de Y pero Y no depende funcionalmente de X.
Podemos observar que las distribuciones con tablas que no son cuadradas no pueden ser recíprocamente dependientes.

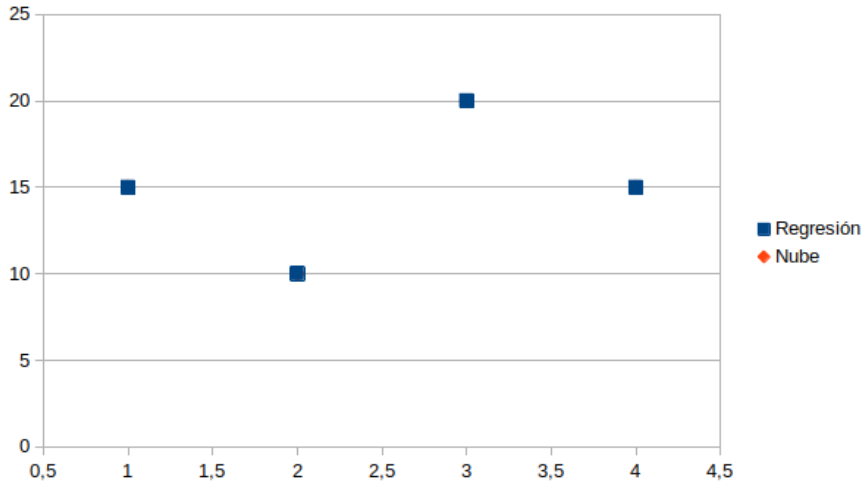
b) Calcular las curvas de regresión y comentar los resultados. La curva de regresión de tipo 1 de Y/X es la que viene dada por los puntos $(x_i, \bar{y}_i)$, la de X/Y es análoga, y viene dada por los puntos $(\bar{x}_j, y_j)$ con $i = 1, \ldots, k$ y $j = 1, \ldots, p$.

Distribución A

Curva de regresión Y/X:

$\bar{y}_1 = \frac{2 \cdot 15}{2} = 15$ $\bar{y}_2 = \frac{1 \cdot 10}{1} = 10$ $\bar{y}_3 = \frac{3 \cdot 20}{3} = 20$ $\bar{y}_4 = \frac{1 \cdot 15}{1} = 15$

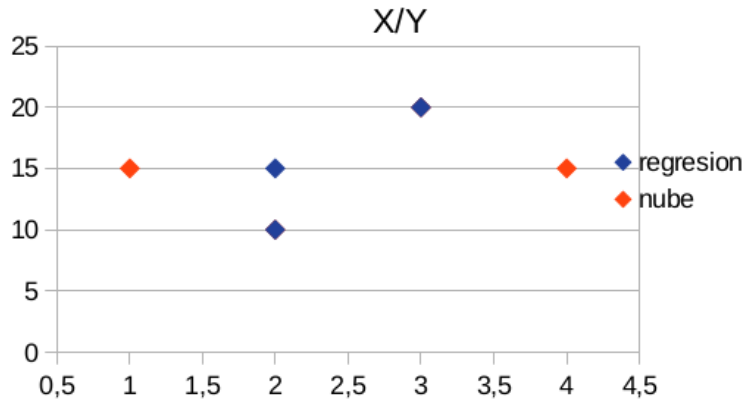
Pasará por los puntos: $(1, 15)$; $(2, 10)$; $(3, 20)$; $(4, 15)$



Curva de regresión X/Y:

$\bar{x}_1 = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$ $\bar{x}_2 = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{3} = 2$ $\bar{x}_3 = \frac{3 \cdot 3}{3} = 3$

Pasará por los puntos: $(2, 10)$; $(2, 15)$; $(3, 20)$

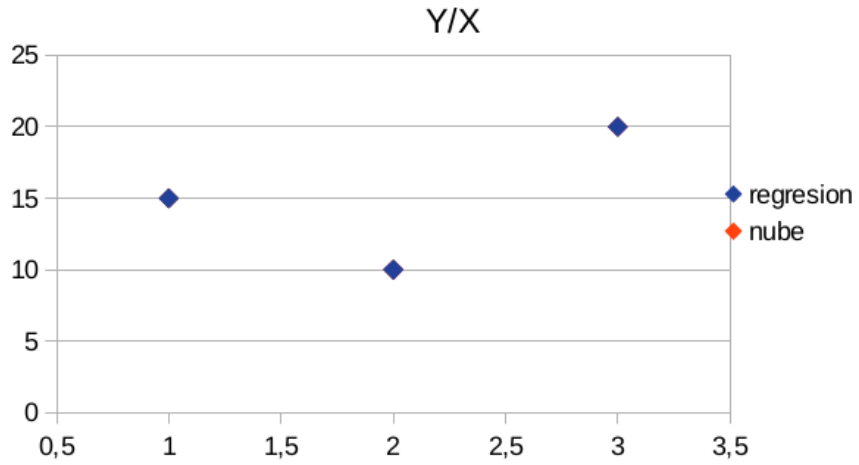


Distribución B

Curva de regresión Y/X:

$\bar{y}_1 = \frac{2 \cdot 15}{2} = 15$ $\bar{y}_2 = \frac{1 \cdot 10}{1} = 10$ $\bar{y}_3 = \frac{3 \cdot 20}{3} = 20$

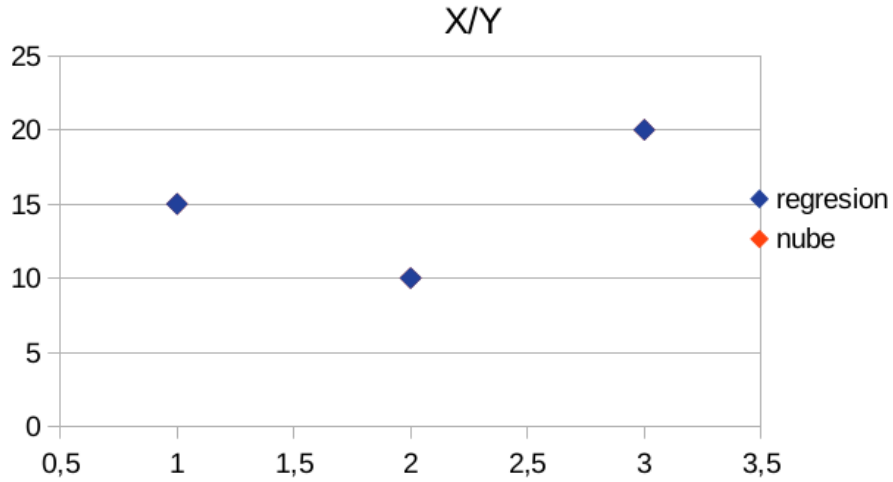
Pasará por los puntos: $(1, 15)$; $(2, 10)$; $(3, 20)$;



Curva de regresión X/Y:

$\bar{x}_1 = \frac{2 \cdot 1}{1} = 2$ $\bar{x}_2 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ $\bar{x}_3 = \frac{3 \cdot 3}{3} = 3$

Pasará por los puntos: $(2, 10)$; $(1, 15)$; $(3, 20)$

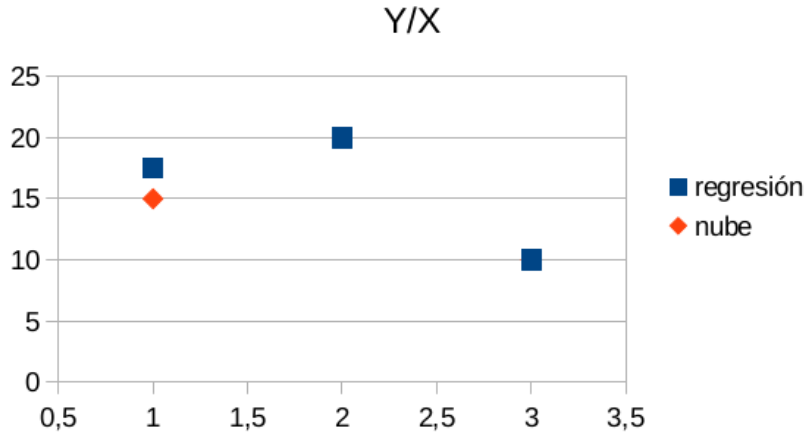


Distribución C

Curva de regresión Y/X:

$\bar{y}_1 = \frac{3 \cdot 15 + 1 \cdot 25}{4} = 17{,}5$ $\bar{y}_2 = \frac{1 \cdot 20}{1} = 20$ $\bar{y}_3 = \frac{2 \cdot 10}{2} = 10$

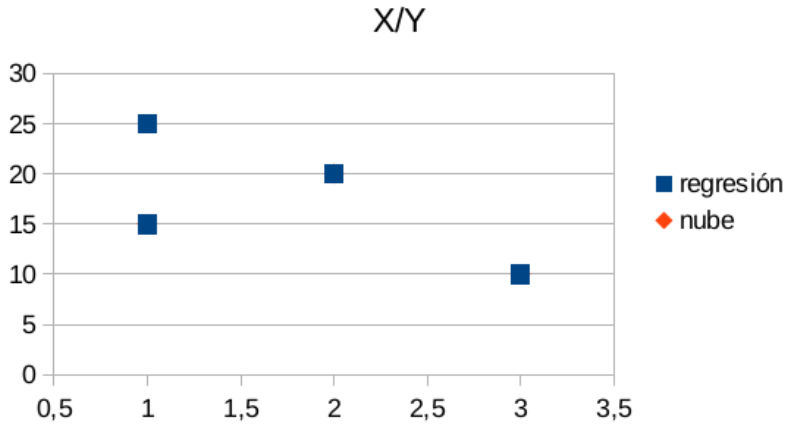
Pasará por los puntos: $(1, 17{,}5)$; $(2, 20)$; $(3, 10)$;



Curva de regresión X/Y:

$\bar{x}_1 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ $\bar{x}_2 = \frac{1 \cdot 3}{3} = 1$ $\bar{x}_3 = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2$ $\bar{x}_4 = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$

Pasará por los puntos: $(3, 10)$; $(1, 15)$; $(2, 20)$ $(1, 25)$



Se pueden observar dos características de las curvas de regresión, en primer lugar, que en los casos en los que son funcionalmente dependientes , coinciden con la nube de puntos, además, cuando la dependencia es recíproca, la curva de regresión y la nube de puntos son iguales para X/Y, Y/X y entre ellas, como se ve en la distribución B.

Ejercicio 8. De una muestra de 24 puestos de venta en un mercado de abastos se ha recogido información sobre el número de balanzas (X) y el número de dependientes (Y). Los resultados aparecen en la siguiente tabla:

X/Y	1	2	3	4
1	1	2	0	0
2	1	2	3	1
3	0	1	2	6
4	0	0	2	3

a) Determinar las rectas de regresión.

Las rectas que se nos pide determinar son la recta de regresión lineal de Y sobre X y la recta de regresión lineal de X sobre Y, las cuales vienen dadas por las siguientes expresiones respectivamente:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y}$$

$$x - \overline{x} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{y}) \Rightarrow x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\overline{y} + \overline{x}$$

Por lo tanto, será necesario calcular las medias y varianzas marginales de cada carácter y la covarianza. Antes de desarrollar los cálculos de la tabla, vamos a especificar cómo calcularemos la covarianza. Como se vio en clase, $\sigma_{xy} = \mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01}$, siendo μ_{rs} el momento conjunto central de órdenes r y s y m_{rs} el momento conjunto respecto al origen de órdenes r y s. Recordemos que $m_{10} = \bar{x}$, $m_{01} = \bar{y}$ y $m_{11} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_iy_j$. Procedamos a efectuar los cálculos pertinentes en la tabla:

X/Y	1	2	3	4	$n_{i.}$	$n_{i.}x_i$	$n_{i.}x_i^2$
1	1	2	0	0	3	3	3
2	1	2	3	1	7	14	28
3	0	1	2	6	9	27	81
4	0	0	2	3	5	20	80
$n_{.j}$	2	5	7	10	24	64	192
$n_{.j}y_j$	2	10	21	40	73		
$n_{.j}y_j^2$	2	20	63	160	245		
$\sum_{i=1}^{k} n_{ij}x_i$	3	9	20	32			

$$m_{10} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} x_i n_{i.} = \frac{64}{24} = 2{,}667 \text{ balanzas}$$

$$m_{01} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} n_{.j}y_j = \frac{73}{24} = 3{,}0417 \text{ dependientes}$$

$$m_{11} = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} f_{ij}x_iy_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} y_j \sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_i =$$

$$= \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 9 + 3\cdot 20 + 4\cdot 32}{24} = 8{,}708$$

$$\sigma_{xy} = m_{11} - m_{10}m_{01} = 0{,}5958$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2 = 0{,}8871 \text{ balanzas}^2 \qquad \sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{4} n_{.j}y_j^2 - \overline{y}^2 = 0{,}9564 \text{ dependientes}^2$$

Ahora que tenemos todos los datos que necesitábamos, sustituimos sus valores en las expresiones de las rectas expuestas al principio del ejercicio:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y} \Rightarrow y = 0{,}6716x + 1{,}2505$$

$$x = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}y - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}\overline{y} + \overline{x} \Rightarrow x = 0{,}623y + 0{,}7721$$

b) ¿Es apropiado suponer que existe una relación lineal entre las variables?

Para ello, calcularemos el coeficiente de correlación de Pearson y a través de su interpretación podremos contestar esta pregunta:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0{,}5958}{\sqrt{0{,}8871} \cdot \sqrt{0{,}9564}} = 0{,}6468$$

En nuestro caso, $0 < r < 1 \Rightarrow$ Cuanto más próximo se encuentre r de 1, mejor dependencia lineal existirá entre el carácter X y el carácter Y en estudio. Sin embargo, 0.6468 es un valor que dista mucho de 1 como para poder considerar la relación lineal como la que mejor describe la relación del número de balanzas y de dependientes (se empezaría a considerar el coeficiente alto a partir de 0.85). Así, concluimos que no es apropiado suponer una relación lineal entre las variables.

c) Predecir, a partir de los resultados, el número de balanzas que puede esperarse en un puesto con seis dependientes. ¿Es fiable esta predicción?

Para realizar la predicción haremos uso de la recta de regresión lineal de X sobre Y, ya que se nos está proporcionando el número de dependientes:

$$x = 0{,}623 \cdot 6 + 0{,}7721 = 4{,}5101 \text{ balanzas (entre 4 y 5)}$$

Por el apartado anterior, podemos afirmar que esta predicción no es fiable al estar basada en una relación lineal, pues esta no es la que mejor explica la relación entre las variables.

Ejercicio 9. Se eligen 50 matrimonios al azar y se les pregunta la edad de ambos al contraer matrimonio. Los resultados se recogen en la siguiente tabla, en la que X denota la edad del hombre e Y la de la mujer:

X/Y	(10,20]	(20,25]	(25,30]	(30,35]	(35,40]
(15,18]	3	2	3	0	0
(18,21]	0	4	2	2	0
(21,24]	0	7	10	6	1
(24,27]	0	0	2	5	3

Estudiar la interdependencia lineal entre ambas variables. Primero, se han de determinar las marcas de clase y crear la tabla con éstas:

X/Y	15	22.5	27.5	32.5	37.5	$n_{i\cdot}$	$c_i \cdot n_i$	$c_i^2 \cdot n_i$	$c_i \cdot \sum_{j=1}^{5} n_{ij} \cdot c_j$
16.5	3	2	3	0	0	8	132	2178	2846.25
19.5	0	4	2	2	0	8	156	3042	4095
22.5	0	7	10	6	1	24	540	12150	14962.5
25.5	0	0	2	5	3	10	255	6502.5	8415
$n_{\cdot j}$	3	13	17	13	4	50			30318.75
$c_j^2 \cdot n_{\cdot j}$	675	6581.25	12836.3	13731.3	5625				

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{4} c_i \cdot n_{i\cdot}}{n} = 21{,}66 \text{ años hombre } \bar{y} = \frac{\sum_{j=1}^{5} c_j \cdot n_{\cdot j}}{n} = 27{,}55 \text{ años mujer}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} n_{i\cdot} \cdot c_i^2 - \bar{x}^2 = 8{,}294 \implies \sigma_x = +\sqrt{\sigma_x^2} = 2{,}88 \text{ años hombre}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} n_{\cdot j} \cdot c_j^2 - \bar{y}^2 = 30{,}375 \implies \sigma_y = +\sqrt{\sigma_y^2} = 5{,}511 \text{ años mujer}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} n_{ij} \cdot c_i \cdot c_j - \bar{x}\bar{y} = 9{,}642$$

Ahora, si queremos determinar el grado de dependencia lineal debemos calcular el coeficiente de correlación lineal:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = 0{,}608$$

De este resultado se puede observar que la correlación es positiva y el grado de dependencia lineal es elevado.

Ejercicio 10.

Ejercicio 11. Consideremos una distribución bidimensional en la que la recta de regresión de Y sobre X es $y = 5x - 20$, y $\sum y_j^2 n_{\cdot j} = 3240$. Supongamos, además, que la distribución marginal de X es:

x_i	3	5	8	9
$n_{i\cdot}$	5	1	2	1

Determinar la recta de regresión de X sobre Y , y la bondad de los ajustes lineales.

Ejercicio 12. De las estadísticas de "Tiempos de vuelo y consumos de combustible "de una compañía aérea, se han obtenido datos relativos a 24 trayectos distintos realizados por el avión DC-9. A partir de estos datos se han obtenido las siguientes medidas:

$$\sum_{j=1}^{p} n_{\cdot j} y_j = 219{,}719 \qquad \sum_{j=1}^{p} n_{\cdot j} y_j^2 = 2396{,}504 \qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij} x_i y_j = 349{,}486$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} x_i = 31{,}470 \qquad \sum_{i=1}^{k} n_{i\cdot} x_i^2 = 51{,}075 \qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij} x_i^2 y_j = 633{,}993$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij} x_i^4 = 182{,}977 \qquad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij} x_i^3 = 93{,}6$$

La variable Y expresa el consumo total de combustible, en miles de libras, correspondiente a un vuelo de duración X (el tiempo se expresa en horas, y se utilizan como unidades de orden inferior fracciones decimales de la hora).

a) Ajustar un modelo del tipo $Y = aX + b$. ¿Qué consumo total se estimaría para un programa de vuelos compuesto de 100 vuelos de media hora, 200 de una hora y 100 de dos horas? ¿Es fiable esta estimación?

Hemos de calcular la expresión de la recta de regresión lineal de Y sobre X, la cual es de la forma:

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x}) \Rightarrow y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y}$$

Procederemos como en ejercicios anteriores calculando las medias marginales $m_{10} = \bar{x}$ y $m_{11} = \bar{y}$, la varianza del carácter X que es $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2$ y la covarianza, que es $\sigma_{xy} = \mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_iy_j - \bar{x}\bar{y}$. En este caso no se requiere hacer tabla, ya que se nos han proporcionado todos los datos necesarios para calcular lo que necesitamos:

$$m_{10} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_{i.} = \frac{31{,}470}{24} = 1{,}3113 \text{ horas de vuelo}$$

$$m_{01} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}y_j = \frac{2396{,}504}{24} = 9{,}155 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$m_{11} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_iy_j = \frac{349{,}486}{24} = 14{,}5619 \qquad \mu_{11} = \sigma_{xy} = m_{11} - m_{10}m_{01} = 2{,}557$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_{i.}x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{51{,}075}{24} - 1{,}3113^2 = 0{,}4086 \text{ horas de vuelo}^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} n_{.j}y_j^2 - \overline{y}^2 = \frac{2396{,}504}{24} - 9{,}155^2 = 16{,}0403 \text{ miles de libras de combustible}^2$$

Y sustituimos los valores calculados en la expresión de la recta:

$$y = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}x - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\overline{x} + \overline{y} \Rightarrow y = 6{,}258x + 0{,}9489$$

Haciendo uso de esta recta, podemos estimar el consumo total de combustible tras 100 vuelos de media hora, 200 de una hora y 100 de dos horas respectivamente:

$$y = 6{,}258 \cdot 0{,}5 \cdot 100 + 0{,}9489 = 4{,}0779 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$y = 6{,}258 \cdot 1 + 0{,}9489 = 7{,}2069 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$y = 6{,}258 \cdot 2 + 0{,}9489 = 13{,}4649 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$\text{Combustible total} = 4{,}0779 \cdot 100 + 7{,}2069 \cdot 200 + 13{,}4649 \cdot 100 = 3195{,}66 \text{ miles de libras}$$

Para saber si esta estimación es fiable, calcularemos el coeficiente de correlación de Pearson y lo interpretaremos:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{2{,}557}{\sqrt{0{,}4086} \cdot \sqrt{16{,}0403}} = 0{,}9988$$

En nuestro caso, $0 < r < 1 \Rightarrow$ Cuanto más próximo se encuentre r de 1, mejor dependencia lineal existirá entre el carácter X y el carácter Y en estudio. Como r es prácticamente 1, l relación lineal explica de forma óptima la relación entre las variables y podemos afirmar que las estimaciones hechas son fiables.

b) Ajustar un modelo del tipo $Y = a + bX + cX^2$. ¿Qué consumo total se estimaría para el mismo programa de vuelos del apartado a)?

Para poder hallar los coeficientes a, b y c y ajustar al modelo pedido necesitamos minimizar la siguiente función:

$$\psi(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y_j - a - bx_i - cx_i^2)^2$$

$$\psi(a,b,c) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(y_j^2 - 2ay_j - 2bx_iy_j - 2cx_i^2y_j + a^2 + 2abx_i + 2acx_i^2 + b^2x_i^2 + 2bcx_i^3 + c^2x_i^4)$$

Ahora hallaremos las derivadas parciales de dicha función y las igualaremos a 0, obteniendo así un SEL compatible determinado del cual despejaremos los valores de a, b y c:

$$\frac{\partial\psi(a,b,c)}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}y_j + 2a + 2b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i + 2c\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^2 =$$

$$= -2m_{01} + 2a + 2bm_{10} + 2cm_{20}$$

Hallamos m_{20}, que no habíamos calculado:

$$m_{20} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_i^2 = \frac{51{,}075}{24} = 2{,}1281$$

Y sustituimos m_{01}, m_{10} y m_{20} en la expresión anterior igualándola a 0 para obtener la primera ecuación del sistema:

$$-2m_{01} + 2a + 2bm_{10} + 2cm_{20} = 0 \Rightarrow a + 1{,}3113b + 2{,}1281c = 9{,}155$$

Repetimos el proceso con las derivadas parciales en función de b y de c:

$$\frac{\partial\psi(a,b,c)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_iy_j + 2a\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i + 2b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^2 + 2c\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^3 =$$

$$= -2m_{11} + 2am_{10} + 2bm_{20} + 2cm_{30}$$

Calculamos m_{30}:

$$m_{30} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_i^3 = \frac{93{,}6}{24} = 3{,}9$$

Y sustituimos en la expresión igualándola a 0 para obtener la segunda ecuación del sistema:

$$-2m_{11} + 2am_{10} + 2bm_{20} + 2cm_{30} = 0 \Rightarrow 1{,}3113a + 2{,}1281b + 3{,}9c = 14{,}5619$$

$$\frac{\partial\psi(a,b,c)}{\partial c} = -2\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^2y_j + 2a\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^3 + 2c\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} f_{ij}x_i^4 =$$

$$= -2m_{21} + 2am_{20} + 2bm_{30} + 2cm_{40}$$

Calculamos m_{21} y m_{40}:

$$m_{21} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_i^2 = \frac{633{,}993}{24} = 26{,}4139 \qquad m_{40} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} n_{ij}x_i^4 = \frac{182{,}977}{24} = 7{,}6240$$

Y sustituimos en la expresión anterior igualándola a 0 para obtener la última ecuación del sistema:

$$= -2m_{21} + 2am_{20} + 2bm_{30} + 2cm_{40} \Rightarrow 2{,}1281a + 3{,}9b + 7{,}624c = 26{,}4139$$

Y resolvemos el sistema resultante:

$$\left.\begin{array}{rcl} a + 1{,}3113b + 2{,}1281c &=& 9{,}155 \\ 1{,}3113a + 2{,}1281b + 3{,}9c &=& 14{,}5619 \\ 2{,}1281a + 3{,}9b + 7{,}624c &=& 26{,}4139 \end{array}\right\}$$

La solución del sistema es: $a = 0{,}7491$, $b = 6{,}6368$ y $c = -0{,}1395$ y por lo tanto la parábola del modelo que se nos pedía es de la forma $y = 0{,}7491 + 6{,}6368x - 0{,}1395x^2$. Realicemos las estimaciones que se nos pedían el apartado a) pero con el nuevo modelo:

$$y = 0{,}7491 + 6{,}6368 \cdot 0{,}5 - 0{,}1395 \cdot 0{,}5^2 = 4{,}0326 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$y = 0{,}7491 + 6{,}6368 \cdot 1 - 0{,}1395 \cdot 1^2 = 7{,}2464 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$y = 0{,}7491 + 6{,}6368 \cdot 2 - 0{,}1395 \cdot 2^2 = 13{,}4647 \text{ miles de libras de combustible}$$

$$\text{Combustible total} = 4{,}0326 \cdot 100 + 7{,}2464 \cdot 200 + 13{,}4647 \cdot 100 = 3199{,}01 \text{ miles de libras}$$

c) ¿Cuál de los dos modelos se ajusta mejor? Razonar la respuesta.

Al observar el segundo modelo, podemos notar que la ecuación del modelo es prácticamente idéntica a la del primer modelo exceptuando el término $-0{,}1395x^2$. De hecho, en las estimaciones realizadas, ambos modelos nos dan un valor muy parecido (casi 3200). Este modelo es más fino ya que el término $-0{,}1395x^2$ está añadiendo información a la recta del modelo del apartado a), es decir, no se pierde la información que había en el modelo 1. En conclusión, la razón de correlación de la parábola siempre será mayor o igual que la de la recta.