

# Relación de ejercicios 1 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,  
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

**Ejercicio 1.** El número de hijos de las familias de una determinada barriada de una ciudad es una variable estadística de la que se conocen los siguientes datos:

$x_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$
0	80	320	0,16
1	110		0,18
2			
3			
4	40		
5			
6	20		

$n_i$  : frecuencias absolutas

$N_i$  : frecuencias absolutas acumuladas

$f_i$  : frecuencias relativas

## Conceptos:

- Población: Es el conjunto de unidades o elementos con alguna/s característica/s en común, sobre el que se desea obtener cierta información. En este caso las familias de una determinada barriada de una ciudad.
- Tamaño de la población: 500 familias.
- Variable estadística: Es toda propiedad que se desea estudiar en la población y que debe poder ser observada sobre todos y cada uno de los individuos que la componen. En este caso el número de hijos de cada familia.
- Modalidades: Es una de todas las formas posibles en que la característica estadística que se estudia puede presentarse en la población. Cada individuo solo puede presentar una modalidad. En el ejercicio son todas las distintas  $x_i$ . En este caso son 0, 1, 2, 3, 4, 5, o 6 hijos.

a) Completar la tabla de frecuencias.

En toda tabla de una variable estadística discreta (y siempre que las modalidades se puedan ordenar) podemos identificar:

- Frecuencia absoluta del valor o modalidad  $x_i$  ( $n_i$ ): Número total de individuos en la población que presenta dicho valor (modalidad).
- Frecuencia relativa del valor o modalidad  $x_i$  ( $f_i$ ): Proporción del número de individuos que presenta dicho valor (modalidad).
- Frecuencia absoluta acumulada del valor o modalidad  $x_i$  ( $N_i$ ): Número de individuos que presentan un valor (modalidad) menor o igual que  $x_i$ .
- Frecuencia relativa acumulada del valor o modalidad  $x_i$  ( $F_i$ ): Proporción de individuos que presentan un valor (modalidad) menor o igual que  $x_i$ .

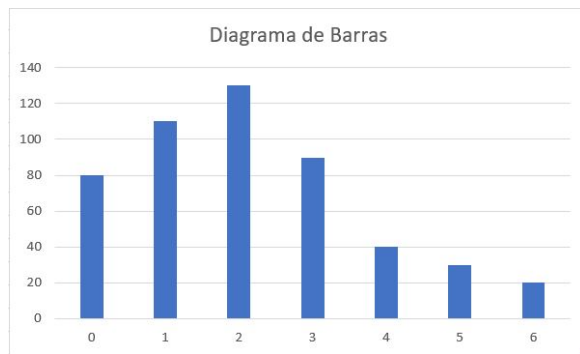
$x_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$
0	80	80	0,16
1	110	190	0,22
2	130	320	0,26
3	90	410	0,18
4	40	450	0,08
5	30	480	0,06
6	20	500	0,04

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

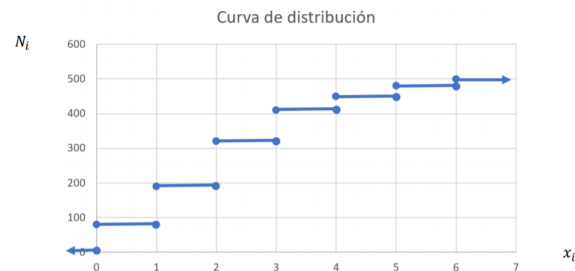
b) Representar la distribución mediante un diagrama de barras y la curva de distribución.

- Diagrama de barras: Se trata de una representación en un sistema de ejes cartesianos donde el eje de abscisas presenta los valores de la variable, y se trazan barras verticales con longitudes proporcionales a sus frecuencias (absolutas o relativas).
- Es la función definida para cada número real,  $x$ , como la proporción de datos menores o iguales que  $x$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < x_1 \\ \frac{\sum_{j=1}^i n_j}{n} = \sum_{j=1}^i f_j = \frac{N_i}{n} = F_i & \forall x / x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 & \forall x \geq x_k \end{cases}$$



(a) Diagrama de barras



(b) Curva de distribución

c) Promediar los valores de la variable mediante diferentes medidas. Interpretálas.

- Media: Medida de tendencia central que representa el valor promedio que más se ajusta a la distribución de los datos observados en la población.
- Mediana: Medida de posición que divide a los individuos de la población en dos efectivos iguales, supuestos ordenados por valor creciente del carácter.
- Moda: Medida de posición que determina la modalidad de mayor frecuencia (absoluta o relativa), la que más se repite.

i) Media: Puesto que se pueden sumar el número de hijos y la media es única calculamos su media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 80 + 1 \cdot 110 + 2 \cdot 130 + 3 \cdot 90 + 4 \cdot 40 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 20}{500} = 2,142 \approx 2 \text{ hijos}$$

ii) Mediana:

$$\frac{n}{2} = \frac{500}{2} = 250, \quad N_2 < 250 < N_3 \quad \text{Mediana} = 2 \text{ hijos}$$

iii) Moda:

$$n_3 \geq n_j \quad \forall j \neq 3 \quad \text{Moda} = 2 \text{ hijos}$$

**Ejercicio 2.** La puntuación obtenida por 50 personas que se presentaron a una prueba de selección, sumadas las puntuación de distintos test, fueron:

174, 185, 166, 176, 145, 166, 191, 175, 158, 156, 156, 187, 162, 172, 197, 181, 151, 161, 183, 172, 162, 147, 178, 176, 141, 170, 171, 158, 184, 173, 169, 162, 172, 181, 187, 177, 164, 171, 193, 183, 173, 179, 188, 179, 167, 178, 180, 168, 148, 173.

En este ejercicio estamos ante el estudio de una variable estadística discreta, por lo que hay nuevos añadidos a la tabla y por lo tanto, **nuevos conceptos**:

- Marca de clase  $c_i$ : Es el centro del intervalo de clase  $I_i$  y su valor es el que se tiene en cuenta a la hora de trabajar con los datos del intervalo  $I_i$ , es decir, todos los datos se suponen idénticos a la marca de clase.
- Densidad de frecuencia  $h_i$ : Valor numérico que indica el número de individuos que se hallan en un intervalo de clase  $I_i$  por unidad de amplitud  $a_i$ .
- Amplitud  $a_i$ : Diferencia entre los extremos superior e inferior de un intervalo de clase.

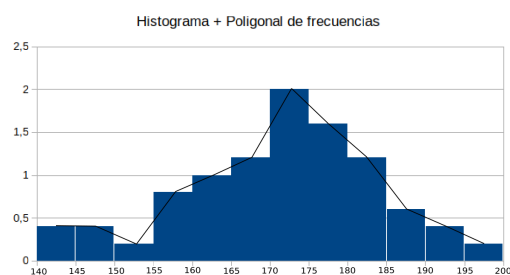
Por otro lado, además, podemos identificar otros elementos definidos anteriormente:

- Población: personas que se presentaron a dicha prueba de selección.
- Tamaño de la población: 50 personas.
- Variable estadística: la nota que obtuvo el participante sumando todos los test de la prueba.
- En este caso todas las notas que se presentan en el enunciado, tomando en cuenta solo una de las apariciones que pueda hacer dicha nota.

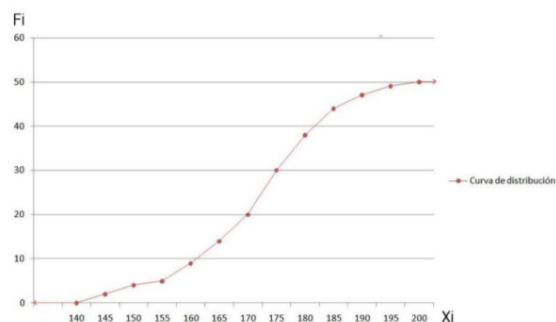
a) Agrupar los datos en intervalos de amplitud 5 desde 140 a 200 y dar la tabla de frecuencias.

$I_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$c_i$	$a_i$	$h_i$
[140, 145]	2	2	2/50	2/50	142,5	5	2/5
(145, 150]	2	4	2/50	4/50	147,5	5	2/5
(150, 155]	1	5	1/50	5/50	152,5	5	1/5
(155, 160]	4	9	4/50	9/50	157,5	5	4/5
(160, 165]	5	14	5/50	14/50	162,5	5	5/5
(165, 170]	6	20	6/50	20/50	167,5	5	6/5
(170, 175]	10	30	10/50	30/50	172,5	5	10/5
(175, 180]	8	38	8/50	38/50	177,5	5	8/5
(180, 185]	6	44	6/50	44/50	182,5	5	6/5
(185, 190]	3	47	3/50	47/50	187,5	5	3/5
(190, 195]	2	49	2/50	49/50	192,5	5	2/5
(195, 200]	1	50	1/50	50/50	197,5	5	1/5

b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma



(b) Curva de distribución

**Ejercicio 3.** La distribución de la renta familiar en el año 2003 por comunidades autónomas se recoge en la siguiente tabla:

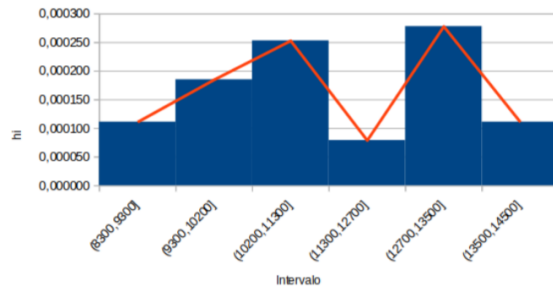
$I_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$c_i$	$a_i$	$h_i$
[8300, 9300] , 10200]	2	5		10/18		1100	
			2/18		1200		
	4	18					0,005/18 0,002/18

$n_i$  : frecuencias absolutas  
 $N_i$  : frec. absolutas acumuladas  
 $f_i$  : frecuencias relativas  
 $F_i$  : frec. relativas acumuladas  
 $c_i$  : marcas de clase  
 $a_i$  : amplitudes  
 $h_i$  : densidades de frecuencia

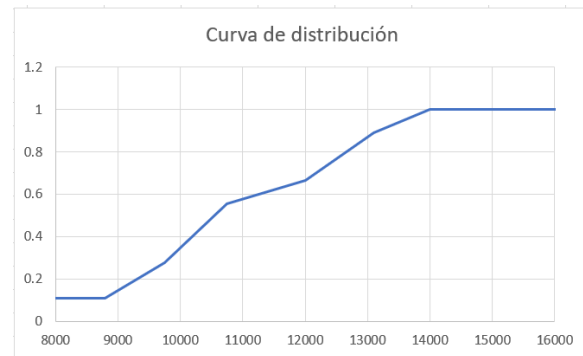
a) Completar la tabla.

$I_i$	$n_i$	$N_i$	$f_i$	$F_i$	$c_i$	$a_i$	$h_i$
[8300, 9300]	2	2	0,11	0,11	8800	1000	0,002/18
(9300 , 10200]	3	5	3/18	5/18	9750	900	0,003/18
(10200, 11300]	5	10	5/18	10/18	10750	1100	0,0045/18
(11300, 12700]	2	12	2/18	12/18	12000	1400	0,0014/18
(12700, 13500]	4	16	4/18	16/18	13100	800	0,005/18
(13500, 14500]	2	18	2/18	18/18	14000	1000	0,002/18

- b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma y poligonal de frecuencias



(b) Curva de distribución

- c) ¿Cuántas comunidades presentan una renta menor o igual que 12700 euros? ¿Y cuántas superior a 11300 euros?

$$N_4 = 12; \quad I_4 = (11300, 12700]$$

12 comunidades presentan una renta menor o igual a 12700 €.

$$n_4 + n_5 + n_6 = 8$$

8 comunidades presentan una renta superior a 11300 €.

**Ejercicio 4.** En una determinada empresa se realiza un estudio sobre la calidad de su producción. La distribución siguiente informa sobre el número de piezas defectuosas encontradas en 100 cajas examinadas con 50 unidades cada una de ellas:

Nº piezas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cajas	6	9	10	11	14	16	16	9	4	3	2

- a) Calcular el número medio de piezas defectuosas por caja.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{100} \cdot 436 = 4,36 \text{ piezas defectuosas.}$$

$x_i$	$n_i$	$n_i x_i$	$N_i$	$ x_i - \bar{x}  n_i$	$ x_i - Me  n_i$	$x_i^2 n_i$
0	6	0	6	26,16	27	0
1	9	9	15	30,24	31,5	9
2	10	20	25	23,6	25	40
3	11	33	36	14,96	16,5	99
4	14	56	50	5,04	7	224
5	16	80	66	10,24	8	400
6	16	96	82	26,24	24	576
7	9	63	91	23,76	22,5	441
8	4	32	95	14,56	14	256
9	3	27	98	13,92	13,5	243
10	2	20	100	11,28	11	200

- b) ¿Cuántas piezas defectuosas se encuentran más frecuentemente en las cajas examinadas?

La moda de una distribución es el valor de mayor frecuencia (el más repetido). En este caso :

$$n_6 = n_7 = 16 \quad M_o = x_6 = 5 \text{ piezas defectuosas} \quad M_o = x_7 = 6 \text{ piezas defectuosas}$$

Podemos observar que nos hayamos ante una distribución bimodal.

- c) ¿Cuál es el número mediano de piezas defectuosas por caja? Recordemos que la mediana de una distribución es un valor que divide a los individuos de la población en dos efectivos iguales, supuestos ordenados por el valor creciente del carácter.

$$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \rightarrow N_i = \frac{n}{2}; \quad Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4,5 \text{ piezas defectuosas}$$

- d) Calcular los cuartiles de la distribución. Interpretarlos.

$$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{nr}{100} \leq N_i.$$

$$Q_1 = P_{25} \Rightarrow x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{4} = 25 \leq N_i.$$

Como en este caso,  $N_3 = 25$ , hemos de hacer la media aritmética entre  $x_3$  y  $x_4$ .

$$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5 \Rightarrow 25 \% \text{ de las cajas presentan 3,5 piezas defectuosas o menos.}$$

$$Q_2 = P_{50} = Me = 4,5 \Rightarrow \text{El } 50 \% \text{ de las cajas presentan 4.5 piezas defectuosas o menos.}$$

$$Q_3 = P_{75} \Rightarrow x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{4} \leq N_i$$

$$Q_3 = x_7 = 6 \Rightarrow \text{El } 75 \% \text{ de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.}$$

- e) Calcular los deciles de orden 3 y 7. Interpretarlos.

$$D_3 = P_{30} \Rightarrow x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{10} \leq N_i$$

$$D_3 = 3 \Rightarrow \text{El } 30 \% \text{ de las cajas presentan 3 o menos piezas defectuosas.}$$

$$D_7 = P_{70} \Rightarrow x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{7n}{10} \leq N_i$$

$$D_7 = 6 \Rightarrow \text{El } 70 \% \text{ de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.}$$

- f) Cuantificar la dispersión de la distribución mediante diferentes medidas, interpretando los resultados y señalando las ventajas e inconvenientes de cada una.

- 1) *Recorrido o rango.*

$$R = x_k - x_1 = 10 - 0 = 10$$

Esta medida se interpreta como el rango de modalidades que ha presentado un carácter cuantitativo estudiado en los individuos de una población, en nuestro caso el rango es de 10 piezas defectuosas. Solo necesitamos 2 valores para calcularlo, sin embargo, es una medida poco representativa ya que no nos informa sobre cómo se hallan repartidos los individuos de la población en ese rango.

- 2) *Recorrido intercuartílico.*

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 3,5$$

Esta medida representa el valor máximo en el que se diferencia el 50 % central de la distribución. En este caso, las cajas del 50 % central se diferencian en 3.5 piezas defectuosas como máximo. Sin embargo, no informa sobre cómo se hallan distribuidas las cajas dentro de ese 50 % central.

3) *Desviación absoluta media respecto a  $\bar{x}$*

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - \bar{x}| n_i}{n} = \frac{200}{100} = 2$$

4) *Desviación absoluta media respecto a  $Me$ .*

$$D_{Me} = \frac{\sum_{i=1}^k |x_i - Me|}{n} = \frac{200}{100} = 2$$

Estas dos últimas medidas nos permiten conocer la distancia promedio de la que se separan las cajas con respecto de la media y de la mediana, permitiéndonos hacernos una idea de la representatividad de estas dos medidas. Podemos considerar que son bastantes representativas ya que una diferencia de 2 piezas defectuosas no es alta considerando que estamos ante un rango 10.

5) *Varianza*

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{2488}{100} - 4,36^2 = 5,870$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas al cuadrado.

6) *Desviación típica.*

$$\sigma = 2,423$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas. Esto quiere decir que la mayoría de los datos de la distribución se encuentra entre 1,9371 y 6,78289 piezas defectuosas.

7) *Medidas de dispersión relativas*

Ahora hallaremos las medidas de dispersión relativas, las cuales resultan útiles para comparar nuestra distribución con otras que presentan distinta media, desviación típica, etc:

$$R_R = \frac{R}{x} = 2,294 \text{ (Recorrido relativo)}$$

$$R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = 0,412 \text{ (Recorrido semi-intercuartílico)}$$

$$C.V(x) = \frac{\sigma}{x} = 0,556 \text{ (Coeficiente de variación de Pearson)}$$

$$V_{\mu_e} = \frac{D_{\mu_e}}{\mu_e} = 0,44 \dots \text{ (Índice de dispersión respecto a la mediana)}$$

**Ejercicio 5.** Dada las siguientes distribuciones:

$I_i^{(1)}$	(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]
$n_i^{(2)}$	12	13	11	8	6

$I_i^{(2)}$	(0, 1]	(1, 3]	(3, 6]	(6, 10]	(10, 12]
$n_i^{(2)}$	1	6	7	12	2



Calcular para cada una de ellas:

a) Medias aritmética, armónica y geométrica.

*Media aritmética*

$$\begin{aligned} 1. \bar{x}_1 &= \frac{12 \cdot 0,5 + 13 \cdot 1,5 + 11 \cdot 2,5 + 8 \cdot 3,5 + 6 \cdot 4,5}{12 + 13 + 11 + 8 + 6} = 2,16 \\ 2. \bar{x}_2 &= \frac{1 \cdot 0,5 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4,5 + 12 \cdot 8 + 2 \cdot 11}{1 + 6 + 7 + 12 + 2} = 5,786 \end{aligned}$$

*Media armónica*

$$\begin{aligned} 1. H_1 &= \frac{12 + 13 + 11 + 8 + 6}{\frac{12}{0,5} + \frac{13}{1,5} + \frac{11}{2,5} + \frac{8}{3,5} + \frac{6}{4,5}} = 1,229 \approx 1,23 \\ 2. H_2 &= \frac{1 + 6 + 7 + 12 + 2}{\frac{1}{0,5} + \frac{6}{2} + \frac{7}{4,5} + \frac{12}{8} + \frac{2}{11}} = 3,399 \end{aligned}$$

*Media geométrica*

$$\begin{aligned} 1. G_1 &= \sqrt[50]{0,5^{12} \cdot 1,5^{13} \cdot 2,5^{11} \cdot 3,5^8 \cdot 4,5^6} = 1,685 \\ 2. G_2 &= \sqrt[28]{0,5^1 \cdot 2^6 \cdot 4,5^7 \cdot 8^{12} \cdot 11^2} = 4,770 \end{aligned}$$

b) El valor más frecuente.

Se nos está pidiendo la moda (Mo), la cual se debe encontrar en el intervalo modal (el de mayor densidad de frecuencias. Primero hallemos los  $h_i$ :

$h_i^{(1)}$	0,24	0,26	0,22	0,16	0,12
-------------	------	------	------	------	------

Observamos que el intervalo modal es (1, 2].

Ahora recordemos la fórmula (demostrada en clase) para las variables continuas:

$$\begin{aligned} Mo &= e_{Mo-1} + \frac{h_{Mo} - h_{Mo-1}}{(h_{Mo} - h_{Mo-1}) + (h_{Mo} - h_{Mo+1})} a_i \\ 1 + \frac{0,26 - 0,24}{(0,26 - 0,24) + (0,26 - 0,22)} \cdot 1 &= \frac{4}{3} = 1,3 \end{aligned} \quad (1)$$

$h_i^{(2)}$	0,03571	0,107142	0,083	0,107142	0,03571428
-------------	---------	----------	-------	----------	------------

En este caso tenemos 2 intervalos modales: (1, 3] y (6,10], por lo que habrá dos modas. Volvemos a emplear (1):

$$(1) \quad 1 + \frac{0,107142 - 0,03571}{(0,107142 - 0,03571) + (0,107142 - 0,083)} \cdot 2 = 2,5$$

$$(2) \quad 6 + \frac{0,107142 - 0,083}{(0,107142 - 0,083) + (0,107142 - 0,03571428)} \cdot 4 = 7$$

c) El valor superado por el 50 % de las observaciones.

Dicho valor será la mediana ya que divide a los individuos de la población en 2 efectivos iguales, supuestos ordenados por valor creciente del carácter:

$$(1) \quad (e_{i-1}, e_i) \quad N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 25 \quad y \quad N_2 = 25 \quad Me = e_2 = 2$$

(2)

$$(e_{i-1}, e_i) \quad N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 14 \text{ y } N_3 = 14 \quad Me = e_3 = 6$$

d) Recorrido, recorrido intercuartílico y desviación típica. Interpretalos. ¿Qué distribución es más homogénea?

1) *Recorrido*

Se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo de la distribución y el extremo inferior del primer intervalo de la distribución.

(1)

$$R_1 = e_5 - e_0 = 5 - 0 = 5$$

(2)

$$R_2 = e_5 - e_0 = 12$$

2) Recorrido intercuartílico

Primero hemos de hallar los cuartiles  $Q_1$  y  $Q_3$  de cada una de las dos distribuciones para poder calcular el recorrido intercuartílico. Recordemos la fórmula demostrada en clase para cuantiles, la cual también se puede trasladar a cuartiles:

$$C_\alpha = e_{C_\alpha-1} + \frac{n\alpha - N_{C_\alpha-1}}{n_{C_\alpha}} a_{C_\alpha} \quad (2)$$

Busquemos en que intervalo deben encontrarse estos dos cuantiles:

(1)

$$\begin{aligned} \frac{n}{4} &= 12,5 \Rightarrow (1, 2] \\ \frac{3n}{4} &= 37,5 \Rightarrow (3, 4] \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} C_{0,25} &= 1 + \frac{0,25 \cdot 50 - 12}{13} \cdot 1 = 1,038 \\ C_{0,75} &= 3 + \frac{0,75 \cdot 50 - 36}{8} \cdot 1 = 3,188 \end{aligned}$$

Así:

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 2,149$$

(2)

$$\frac{n}{4} = 7$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 7 es el  $(1, 3]$ . Como  $N_2 = 7$  podemos afirmar que  $Q_1 = 3$

$$\frac{3n}{4} = 21$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 21 es  $(6, 10]$  por lo que hemos de buscar ahí el  $Q_3$ . Usaremos (2)

$$\begin{aligned} Q_3 &= 6 + \frac{28 \cdot 0,75 - 14}{12} \cdot 4 = 8,3 \\ R_I &= Q_3 - Q_1 = 8,3 - 3 = 5,3 \end{aligned}$$

Recordemos que el  $R_I$  representa cuanto se diferencian como máximo los datos que se encuentran en el 50 % de la distribución.

3) *Desviación típica*

(1)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i c_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{12 \cdot 0,5^2 + 13 \cdot 1,5^2 + 11 \cdot 2,5^2 + 8 \cdot 3,5^2 + 6 \cdot 4,5^2}{50} - 2,16^2 = 1,744$$

$$\sigma = 1,321$$

(2)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i c_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot 0,5^2 + 6 \cdot 2^2 + 7,4 \cdot 4,5^2 + 12 \cdot 8^2 + 2 \cdot 11^2}{28} - 5,7857^2 = 8,526$$

$$\sigma = 2,920$$

Para poder comparar las desviaciones típicas y determinar que distribución es más homogénea es necesario emplear el coeficiente de variación de Pearson (que es adimensional), ya que las distribuciones presentan distintas medidas y desviaciones típicas:

(1)

$$C.V_1(x) = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,611$$

(2)

$$C.V_2(x) = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,505$$

Como la 2ª distribución presenta menor coeficiente de Pearson, sus datos no están tan repartidos como la primera, es decir, la segunda distribución es más HOMOGÉNEA.

**Ejercicio 6.** Un móvil efectúa un recorrido de 100 km en dos sentidos. En uno va a una velocidad constante de  $V_1 = 60$  km/h y en el otro va a una velocidad constante de  $V_2 = 70$  km/h. Calcular la velocidad media del recorrido.

Para ello emplearemos la media armónica, pues se usa para promediar datos que son cocientes de dos magnitudes distintas; esto es, magnitudes relativas (en este caso nuestros datos son velocidades, es decir,  $\frac{e}{t}$ ):

$$v_M = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{70}} = 64,615 \text{ km/h}$$

**Ejercicio 7.** Las acciones de una empresa han producido los siguientes rendimientos netos anuales:

Año	Rentabilidad
1994	12 %
1995	10 %
1996	7 %
1997	6 %
1998	5 %

Obtener el rendimiento neto medio en esos cinco años.

Como nuestra variable (la rentabilidad) presenta efectos multiplicativos acumulativos, lo más lógico será emplear la media geométrica:

$$G = \sqrt[5]{1,12 \cdot 1,10 \cdot 1,07 \cdot 1,06 \cdot 1,05} - 1 = 0,079 \%$$

Así, obtenemos que 7.6 % es la rentabilidad neta media en esos 5 años.

**Ejercicio 8.** Un profesor califica a sus alumnos según el criterio siguiente: 40 % de suspensos, 30 % de aprobados, 15 % notables, 10 % sobresalientes y 5 % matrículas. Las notas obtenidas son las siguientes:

(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]	(5, 6]	(6, 7]	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]
34	74	56	81	94	70	41	28	16	4

Calcular las notas máximas para obtener cada una de las calificaciones.

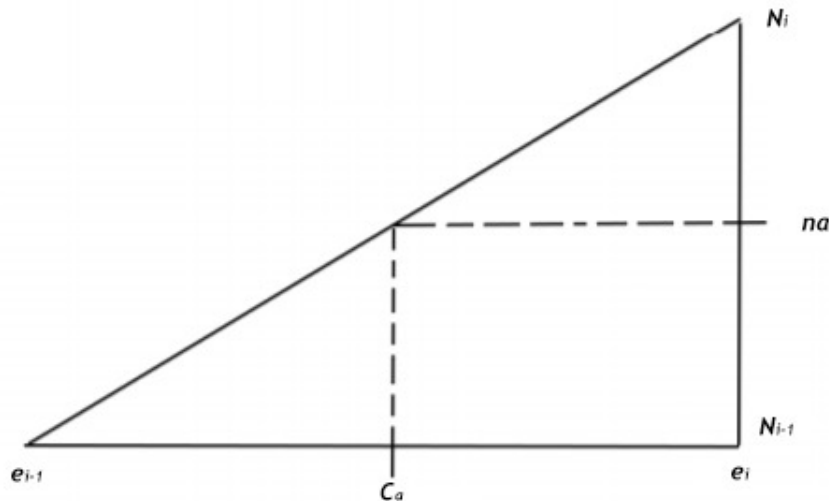
Sabemos que el orden es el siguiente:

Suspensos	Aprobados	Notables	Sobresalientes	Matrículas
40 %	30 %	15 %	10 %	5 %

Para saber la nota máxima de los suspensos hemos de hallar el cuantil 0.40, es decir la nota por la que está debajo el 40 % de la población:  $\frac{4n}{10} = 199,2$

	(0, 1]	(1, 2]	(2, 3]	(3, 4]	(4, 5]	(5, 6]	(6, 7]	(7, 8]	(8, 9]	(9, 10]
	34	74	56	81	94	70	41	28	16	4
$N_i$	34	108	164	245	339	409	450	478	494	498

Así, observamos que el cuantil buscado está en el intervalo (3,4].



$$\frac{a_i}{c_\alpha - e_{i-1}} = \frac{n_i}{n\alpha - N_{i-1}} \longleftrightarrow C_\alpha = e_{i-1} + \frac{n\alpha - N_{i-1}}{n_i} \alpha_i$$

Esta fórmula será usada de aquí en adelante en los ejercicios.

$$C_{0,40} = 4 + \frac{0,4 \cdot 498 - 245}{81} \cdot 1 = 3,435 \text{ Se suspende por debajo de dicha nota.}$$

Para el cálculo de la nota máxima en aprobados, notables, sobresalientes, y matrículas hemos de emplear la fórmula obtenida:

Aprobados  $\Rightarrow$  cuantil 0.70  $\Rightarrow n \cdot 0,7 = 348,6 \Rightarrow$  La nota máxima de los aprobados está en el intervalo (5,6].

$$C_{0,70} = 6 + \frac{348,6 - 409}{70} \cdot 1 = 5,137142857$$

Notables  $\Rightarrow$  Cuantil 0.85  $\Rightarrow n \cdot 0,85 = 423,3 \Rightarrow$  Buscar en (6,7].

$$C_{0,85} = 7 + \frac{423,3 - 450}{41} \cdot 1 = 6,349$$

Sobresalientes  $\Rightarrow$  Cuantil 0.95  $\Rightarrow n \cdot 0,95 = 473,1 \Rightarrow$  Buscar en (7,8].

$$C_{0,95} = 8 + \frac{473,1 - 478}{28} \cdot 1 = 7,825$$

Matrículas  $\Rightarrow$  Es obvio, pues el cuantil 1 es  $C_1 = 10$

**Ejercicio 9.** Se ha medido la altura de 110 jóvenes, obteniendo:

Altura	(1.55, 1.60]	(1.60, 1.70]	(1.70, 1.80]	(1.80, 1.90]	(1.90, 2.00]
Nº jóvenes	18	31	24	20	17
$N_i$	18	49	73	93	110
$a_i$	0.05	0.1	0.1	0.1	0.1

- a) Si se considera bajos al 3 % de los individuos de menor altura, ¿cuál es la altura máxima que pueden alcanzar?

Para poder saberlo, es necesario calcular el cuantil 0,03, que indica la altura por debajo de la cual se halla el 3 % de la población estudiada. Deduzcamos la fórmula para los cuantiles:

1  $n\alpha = 3,3 \leftarrow$  Como  $N_1 = 18$  es inmediatamente mayor que  $n\alpha$ ,  $C_{0,03}$  ha de hallarse en el intervalo (155, 160].

2 Si tomamos el tramo de la curva de distribución de  $I_i$

Empleamos la formula para  $C_{0,03}$

$$C_{0,03} = 1,55 + \frac{3,3 - 0}{18} 0,05 = 1,5591\widehat{6} \approx 1,56m$$

- b) Si se condiera altos al 18 % de los individuos de mayor altura, ¿cuál es su altura mínima?

Debemos calcular la altura por debajo de la cual queda el 82 % de la población. Repitiendo el proceso anterior empleando la fórmula:

1  $n\alpha = 90,2 \Rightarrow N_y = 93$  es inmediatamente mayor que  $n\alpha$ ,  $C_{0,82}$  ha de hallarse  $I_y$ :

$$C_{0,82} = 1,80 + \frac{90,2 - 73}{20} 0,1 = 1,886$$

c) ¿Qué altura es superada sólo por 1/4 de los jóvenes?

Como el  $\frac{3}{4}$  de los jóvenes no superan esa altura y  $\frac{3}{4} = 0,75$ , hemos de calcular  $C_{0,75}$ :  
 $1 \cdot n\alpha = 82,5 \implies C_{0,75}$  ha de hallarse en  $I_4$ :

$$C_{0,75} = 1,80 + \frac{82,2 - 73}{20} 0,1 = 1,848$$

d) Calcular el número de jóvenes cuya altura es superior a 1.75.

En este caso sería hacer el cuartil inverso, es decir, deducir qué cuantil cumple que  $C_\alpha = 1,75$  y finalmente calcular  $n\alpha$ . Deduciendo que está en  $I_3$ , empleemos la fórmula:

$$1,75 = 1,75 + \frac{110\alpha - 49}{24} 0,1 \longleftrightarrow \alpha = 0,554$$

$n\alpha = 110 \cdot 0,554 = 61$  jóvenes no superan dicha altura y, por tanto, 49 la superan.

e) Calcular la altura máxima de los 11 jóvenes más bajos.

$\frac{11}{110} = 0,1 \implies$  Se nos pide el cuartil 0,1,  $C_{0,1}$ , que se halla en  $I_1$ :  
 $C_{0,1} = 1,55 + \frac{11-0}{18} 0,05 = 1,5805 \approx 1,58$  m.

f) Calcular la altura mínima de los 11 jóvenes más altos.

$1 - \frac{11}{100} = 0,9 \implies$  Se nos pide la altura por debajo de la cual se encuentra el 90% de la población, es decir,  $C_{0,9}$ , que se halla en  $I_5$ :

$$C_{0,9} = 1,90 + \frac{99 - 93}{17} 0,1 = 1,935 \text{ m}$$

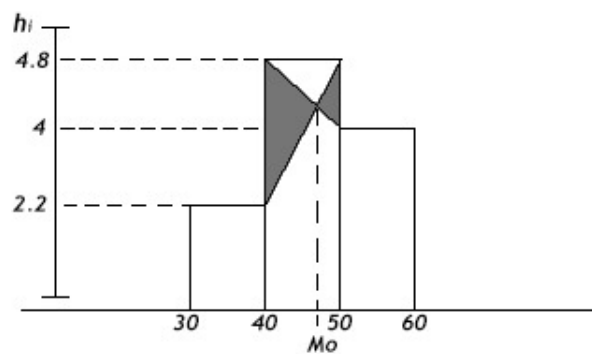
**Ejercicio 10.** Realizando una prueba para el estudio del cáncer a 150 personas se obtuvo la siguiente tabla según la edad de los enfermos:

Edad	(10, 30]	(30, 40]	(40, 50]	(50, 60]	(60, 90]
Nº enfermos	15	22	48	40	25

Edad	$n_i$	$a_i$	$h_i$	$N_i$	$C_i$	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$	$n_i c_i^3$	$n_i c_i^4$
(10,30]	15	20	0.75	15	20	300	6000	120000	2400000
(30,40]	22	10	2.2	37	35	770	26950	943250	33013750
(40,50]	48	10	4.8	85	45	2160	97200	4374000	19683000
(50,60]	40	10	4	125	55	2200	121000	6655000	366025000
(60,90]	25	30	0,83	150	75	1875	140625	10546875	791015625
	150					7305	391775	22639125	1389284375

a) Calcular la edad más común de los individuos estudiados.

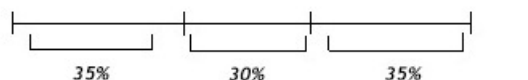
Se nos está pidiendo la moda, la cual la encontraremos en el intervalo modal, es decir, el intervalo con mayor densidad de frecuencia  $h_i = \frac{n_i}{a_i}$ . En este caso,  $h_3 > h_j \forall j \neq 3$  con  $j \in \{1, \dots, 5\}$ . Ahora llevamos a cabo la semejanza de triángulos vista en clase sobre un trozo del histograma (el intervalo modal y sus contiguos):



Con los triángulos semejantes, usaremos la razón base entre altura (el dibujo no está a escala):

$$\frac{4,8 - 2,2}{Mo - 40} = \frac{4,8 - 4}{50 - Mo} \longleftrightarrow Mo = 47,647 \text{ años}$$

b) Calcular la edad mínima y máxima del 30 % central de los individuos.



Lo que se nos pide es equivalente a calcular  $C_{0,35}$  y  $C_{0,65}$ . Emplearemos la fórmula demostrada en el ejercicio 8:

$1 \ n\alpha = 150 \cdot 0,35 = 52,5 \implies C_{0,35}$  estará en  $I_3$  pues  $N_3$  es inmediatamente mayor que  $n\alpha$

$$C_{0,35} = 40 + \frac{52,5 - 37}{48} \cdot 10 = 43,22291\widehat{6} \text{ años (edad mínima)}$$

Y para el cuantil  $C_{0,65}$ :

$1 \ n\alpha = 150 \cdot 0,65 = 97,5 \implies$  Estará en  $I_4$  ya que  $N_4$  es inmediatamente superior a  $n\alpha$

$$C_{0,65} = 50 + \frac{97,5 - 85}{40} \cdot 10 = 53,125 \text{ años (edad máxima)}$$

c) Calcular el recorrido intercuartílico y la desviación típica.

$R_I = Q_3 - Q_1 \implies$  Necesitamos hallar los cuartiles 1 y 3 que equivalen a los cuantiles 0,25 0,75. Repetimos el proceso del anterior apartado:

$1 \ n\alpha = 150 \cdot 0,25 = 37,5 \implies C_{0,25}$  estará en  $I_3 = (40, 50]$  pues  $N_3$  es inmediatamente mayor que 37,5

$$C_{0,25} = 40 + \frac{37,5 - 37}{48} \cdot 10 = 40,1041\widehat{6} \text{ años}$$

$1 \ n\alpha = 150 \cdot 0,75 = 112,5 \implies C_{0,75}$  estará en  $I_4 = (50, 60]$  pues  $N_4$  es inmediatamente mayor que 112,5

$$C_{0,75} = 50 + \frac{112,5 - 85}{40} \cdot 10 = 56,875 \text{ años}$$

Por lo tanto,  $R_I = Q_3 - Q_1 = 56,875 - 40,1041\widehat{6} = 16,7708\widehat{3}$  años

Esto significa que todos los datos encontrados en el 50 % central de la distribución se diferencian como máximo en  $16,7708\widehat{3}$  años.

En cuanto a la desviación típica, debemos hallar antes la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i c_i \right)^2 = \frac{391775}{150} - \left( \frac{7305}{150} \right)^2 = 240,1434 \text{ años al cuadrado}$$

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = 15,49656$  años  $\implies$  Esto significa que la mayoría de los datos de nuestra distribución se hallan en el intervalo  $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ .

d) Calcular e interpretar los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis.

De asimetría son 3:

- De Fisher:  $\rightarrow \gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$

- De Pearson:

$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x}$$

$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x}$$

$$\begin{aligned} \mu_3 &= m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = \frac{1}{n} \sum n_i c_i^3 - 3 \frac{1}{n} \sum n_i c_i^2 \cdot \bar{x} + 2 \cdot \bar{x}^3 = \\ &= \frac{22639125}{150} - \frac{3}{150} \cdot 391775 \cdot \frac{7305}{150} + 2 \cdot \left( \frac{7305}{150} \right)^3 = 341,256 \end{aligned}$$

$$\gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{341,256}{15,49656^3} = 0,0917 > 0 \implies \text{Es algo asimétrica por la derecha}$$



$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x} = \frac{\frac{7305}{150} - 47,647}{15,49656} = 0,06795$$

Para  $A_{p^*}$  nos falta Me:

$$1 \ n\alpha = 150 \cdot 0,5 = 75 \implies \text{Me estará en } I_3$$

$$Me = 40 + \frac{75 - 37}{48} \cdot 10 = 47,91\widehat{6}$$

$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3 \cdot (\frac{7305}{150} - 47,91\widehat{6})}{15,49656} = 0,151647$$

Ahora pasamos a los coeficientes de Curtosis:

- Fisher:  $\gamma_2(x) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$  Hallemos  $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$ :

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \frac{1}{n} \sum n_i c_i^4 - 4 \frac{1}{n} \sum n_i c_i^3 \cdot \bar{x} + 6 \bar{x}^2 \cdot \frac{1}{n} \sum n_i c_i^2 - 3 \bar{x}^4 = \\ &= \frac{1389284375}{150} - 4 \cdot \frac{1}{150} \cdot (22639125) \cdot \frac{7305}{150} + 6 \cdot \left(\frac{7305}{150}\right)^2 \cdot \frac{1}{150} \cdot 391775 - 3 \cdot \left(\frac{7305}{150}\right)^4 = 153232,46 \\ \gamma_2(x) &= \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{153232,46}{15,49656^2} - 3 = -0,3429 < 0 \end{aligned}$$

La distribución es platicúrtica, es decir, presenta una menor concentración central de frecuencias que una normal de su misma media y desviación típica (está más aplanada que la curva normal y los datos están más dispersos).

De Kelley:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0,263$ , como ya tenemos  $Q_1$  y  $Q_3$ , debemos calcular  $D_1 = C_{0,1}$  y  $D_9 = C_{0,9}$ :

$1 \ n\alpha = 15 \implies C_{0,1}$  coincide justamente con el extremo superior de  $I_1 = (10, 30]$ , es decir, 30 años.

$1 \ n\alpha = 135 \implies C_{0,9}$  ha de hallarse en  $I_5 = (60, 90]$  ya que  $N_5$  es inmediatamente mayor que 135. Aplicamos la fórmula demostrada:

$$C_{0,9} = 60 + \frac{135 - 125}{25} \cdot 30 = 72 \text{ años}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0,263 = \frac{1}{2} \cdot \frac{56,875 - 40,4041\widehat{6}}{72 - 30} - 0,263 = -0,06335 < 0$$

Como  $K < 0$ , la distribución es platicúrtica, por lo que llegamos a la misma conclusión que con el coeficiente de curtosis de Fisher.