Relación de ejercicios 1 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

Ejercicio 1. El número de hijos de las familias de una determinada barriada de una ciudad es una variable estadística de la que se conocen los siguientes datos:

x_i	n_i	N_i	f_i
0	80		0,16
1	110		
2		320	
3			0,18
4	40		
5			
6	20		

n_i : frecuencias absolutas
N_i : frecuencias absolutas acumuladas
f_i : frecuencias relativas

Conceptos:

- Población: Es el conjunto de unidades o elementos con alguna/s característica/s en común, sobre el que se desea obtener cierta información. En este caso las familias de una determinada barriada de una ciudad.

- Tamaño de la población: 500 familias.

- Variable estadística: Es toda propiedad que se desea estudiar en la población y que debe poder ser observada sobre todos y cada uno de los individuos que la componen. En este caso el número de hijos de cada familia.

- Modalidades: Es una de todas las formas posibles en que la característica estadística que se estudia puede presentarse en la población. Cada individuo solo puede presentar una modalidad. En el ejercicio son todas las distintas x_i. En este caso son 0, 1, 2, 3, 4, 5, o 6 hijos.

a) Completar la tabla de frecuencias.

En toda tabla de una variable estadística discreta (y siempre que las modalidades se puedan ordenar) podemos identificar:

- Frecuencia absoluta del valor o modalidad x_i (n_i): Número total de individuos en la población que presenta dicho valor (modalidad).
- Frecuencia relativa del valor o modalidad x_i (f_i): Proporción del número de individuos que presenta dicho valor (modalidad).
- Frecuencia absoluta acumulada del valor o modalidad x_i (N_i): Número de individuos que presentan un valor (modalidad) menor o igual que x_i.
- Frecuencia relativa acumulada del valor o modalidad x_i (F_i): Proporción de individuos que presentan un valor (modalidad) menor o igual que x_i.

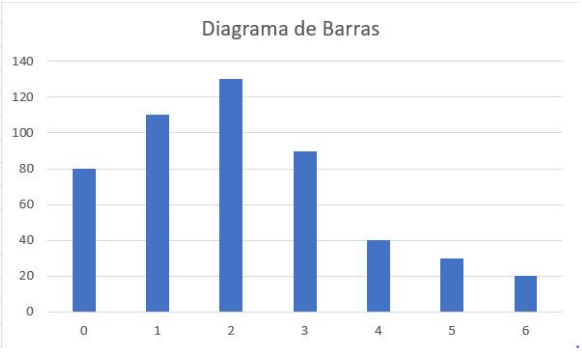
x_i	n_i	N_i	f_i
0	80	80	0,16
1	110	190	0,22
2	130	320	0,26
3	90	410	0,18
4	40	450	0,08
5	30	480	0,06
6	20	500	0,04

$f_i = \frac{n_i}{n}$

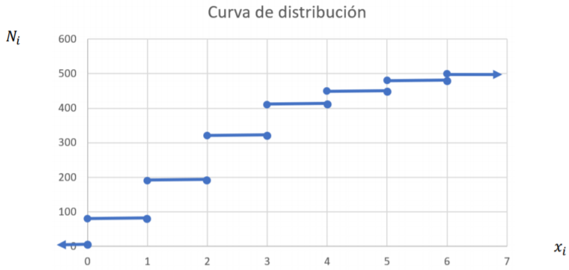
b) Representar la distribución mediante un diagrama de barras y la curva de distribución.

- Diagrama de barras: Se trata de una representación en un sistema de ejes cartesianos donde el eje de abscisas presenta los valores de la variable, y se trazan barras verticales con longitudes proporcionales a sus frecuencias (absolutas o relativas).
- Es la función definida para cada número real, x, como la proporción de datos menores o iguales que x.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \forall x < x_1 \\ \dfrac{\sum_{j=1}^{i} n_j}{n} = \sum_{j=1}^{i} f_j = \dfrac{N_i}{n} = F_i \quad \forall x \ / \ x_i \leq x < x_{i+1} \\ 1 \quad \forall x \geq x_k \end{cases}$$



(a) Diagrama de barras



(b) Curva de distribución

c) Promediar los valores de la variable mediante diferentes medidas. Interprétalas.

- Media: Medida de tendencia central que representa el valor promedio que más se ajusta a la distribución de los datos observados en la población.
- Mediana: Medida de posición que divide a los individuos de la población en dos efectivos iguales, supuestos ordenados por valor creciente del carácter.
- Moda: Medida de posición que determina la modalidad de mayor frecuencia (absoluta o relativa), la que más se repite.

I) Media: Puesto que se pueden sumar el número de hijos y la media es única calculamos su media aritmética.

$$\overline{x} = \frac{0\cdot 80 + 1\cdot 110 + 2\cdot 130 + 3\cdot 90 + 4\cdot 40 + 5\cdot 30 + 6\cdot 20}{500} = 2{,}142 \ \approx 2\, hijos$$

II) Mediana:

$$\frac{n}{2} = \frac{500}{2} = 250, \qquad N_2 < 250 < N_3 \qquad Me = 2 \ \ hijos$$

III) Moda:

$$n_3 \geq n_j \qquad \forall j \neq 3 \qquad Mo = 2\, hijos$$

Ejercicio 2. La puntuación obtenida por 50 personas que se presentaron a una prueba de selección, sumadas las puntuación de distintos test, fueron:

174, 185, 166, 176, 145, 166, 191, 175, 158, 156, 156, 187, 162, 172, 197, 181, 151, 161, 183,
172, 162, 147, 178, 176, 141, 170, 171, 158, 184, 173, 169, 162, 172, 181, 187, 177, 164, 171,
193, 183, 173, 179, 188, 179, 167, 178, 180, 168, 148, 173.

En este ejercicio estamos ante el estudio de una variable estadística discreta, por lo que hay nuevos añadidos a la tabla y por lo tanto, **nuevos conceptos**:

- Marca de clase c_i: Es el centro del intervalo de clase I_i y su valor es el que se tiene en cuenta a la hora de trabajar con los datos del intervalo I_i, es decir, todos los datos se suponen idénticos a la marca de clase.
- Densidad de frecuencia h_i: Valor numérico que indica el número de individuos que se hallan en un intervalo de clase I_i por unidad de amplitud a_i.
- Amplitud a_i: Diferencia entre los extremos superior e inferior de un intervalo de clase.

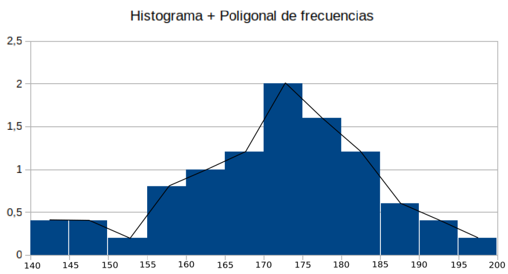
Por otro lado, además, podemos identificar otros elementos definidos anteriormente:

- Población: personas que se presentaron a dicha prueba de selección.
- Tamaño de la población: 50 personas.
- Variable estadística: la nota que obtuvo el participante sumando todos los test de la prueba.
- En este caso todas las notas que se presentan en el enunciado, tomando en cuenta solo una de las apariciones que pueda hacer dicha nota.

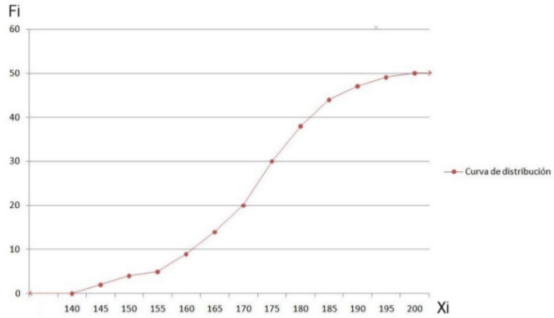
a) Agrupar los datos en intervalos de amplitud 5 desde 140 a 200 y dar la tabla de frecuencias.

I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
$[140, 145]$	2	2	2/50	2/50	142,5	5	2/5
$(145, 150]$	2	4	2/50	4/50	147,5	5	2/5
$(150, 155]$	1	5	1/50	5/50	152,5	5	1/5
$(155, 160]$	4	9	4/50	9/50	157,5	5	4/5
$(160, 165]$	5	14	5/50	14/50	162,5	5	5/5
$(165, 170]$	6	20	6/50	20/50	167,5	5	6/5
$(170, 150]$	10	30	10/50	30/50	172,5	5	10/5
$(175, 180]$	8	38	8/50	38/50	177,5	5	8/5
$(180, 185]$	6	44	6/50	44/50	182,5	5	6/5
$(185, 190]$	3	47	3/50	47/50	187,5	5	3/5
$(190, 195]$	2	49	2/50	49/50	192,5	5	2/5
$(195, 200]$	1	50	1/50	50/50	197,5	5	1/5
	50		1				

b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma



(b) Curva de distribución

Ejercicio 3. La distribución de la renta familiar en el año 2003 por comunidades autónomas se recoge en la siguiente tabla:

I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
[8300, 9300]	2						
, 10200]		5					
				10/18		1100	
			2/18		1200		
	4						0,005/18
		18					0,002/18

n_i : frecuencias absolutas
N_i : frec. absolutas acumuladas
f_i : frecuencias relativas
F_i : frec. relativas acumuladas
c_i : marcas de clase
a_i : amplitudes
h_i : densiades de frecuencia

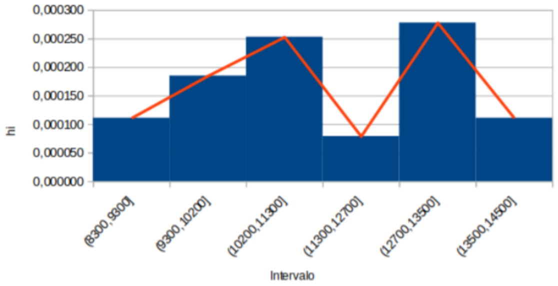
- Población: En este caso el conjunto de comunidades autónomas de España, y tomando en cuenta a Ceuta y Melilla como una comunidad extra.
- Tamaño de la población: 18 comunidades.
- Variable estadística: la renta familiar media en 2003 de cada comunidad autónoma.
- Modalidades: son los intervalos de la renta familiar media en 2003 por comunidad autónoma, es decir, 6 modalidades que van desde los 8300 € hasta los 14500 €.

∗ *Cabe mencionar que el enunciado de este ejercicio no es del todo preciso, primero porque el número de comunidades autónomas que componen el Estado Español es 17, no 18 (este último individuo son las ciudades autónomas Ceuta y Melilla). Además, la variable que se ha observado suponemos que es la renta familiar* ***media*** *de las comunidades, no la renta familiar a secas.*

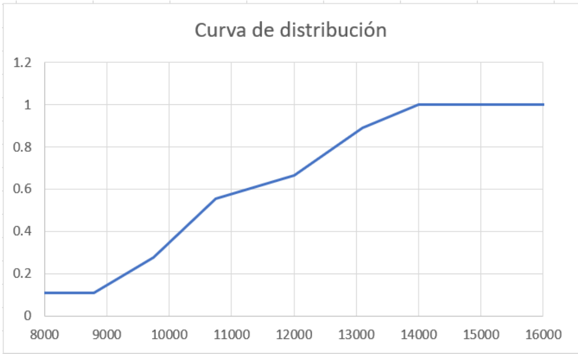
a) Completar la tabla.

I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
[8300, 9300]	2	2	0,11	0,11	8800	1000	0,002/18
(9300 , 10200]	3	5	3/18	5/18	9750	900	$0{,}00\widehat{3}/18$
(10200, 11300]	5	10	5/18	10/18	10750	1100	$0{,}00\widehat{45}/18$
(11300, 12700]	2	12	2/18	12/18	12000	1400	0,0014/18
(12700, 13500]	4	16	4/18	16/18	13100	800	0,005/18
(13500, 14500]	2	18	2/18	18/18	14000	1000	0,002/18

b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma y poligonal de frecuencias



(b) Curva de distribución

c) ¿Cuántas comunidades presentan una renta menor o igual que 12700 euros? ¿Y cuántas superior a 11300 euros?

$N_4 = 12; \qquad I_4 = (11300, 12700]$
12 comunidades presentan una renta menor o igual a 12700 € .

$n_4 + n_5 + n_6 = 8$
8 comunidades presentan una renta superior a 11300 €.

Ejercicio 4. En una determinada empresa se realiza un estudio sobre la calidad de su producción. La distribución siguiente informa sobre el número de piezas defectuosas encontradas en 100 cajas examinadas con 50 unidades cada una de ellas:

Nº piezas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cajas	6	9	10	11	14	16	16	9	4	3	2

- Población: las cajas de una empresa con 50 piezas cada una de ellas.
- Tamaño de la población: 100 cajas.
- Variable estadística: el número de piezas defectuosas por caja estudiada.
- Modalidades: en este caso, 11 modalidades. Desde 0 hasta 10 piezas defectuosas, ambas inclusive.

a) Calcular el número medio de piezas defectuosas por caja.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{100} \cdot 436 = 4{,}36 \;\; \textit{piezas defectuosas.}$$

x_i	n_i	n_ix_i	N_i	$\|x_i - \overline{x}\|n_i$	$\|x_i - Me\|n_i$	$x_i^2 n_i$
0	6	0	6	26,16	27	0
1	9	9	15	30,24	31,5	9
2	10	20	25	23,6	25	40
3	11	33	36	14,96	16,5	99
4	14	56	50	5,04	7	224
5	16	80	66	10,24	8	400
6	16	96	82	26,24	24	576
7	9	63	91	23,76	22,5	441
8	4	32	95	14,56	14	256
9	3	27	98	13,92	13,5	243
10	2	20	100	11,28	11	200
	100	436		200	200	2488

b) ¿Cuántas piezas defectuosas se encuentran más frecuentemente en las cajas examinadas?

La moda de una distribución es el valor de mayor frecuencia (el más repetido). En este caso :

$$n_6 = n_7 = 16 \qquad Mo_2 = x_6 = 5 \ piezas\,defectuosas \qquad Mo_2 = x_7 = 6 \ piezas\,defectuosas$$

Podemos observar que nos hayamos ante una distribución bimodal.

c) ¿Cuál es el número mediano de piezas defectuosas por caja? Recordemos que la mediana de una distribución es un valor que divide a los individuos de la población en dos efectivos iguales, supuestos ordenados por el valor creciente del carácter.

$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \rightarrow N_i = \frac{n}{2}; \quad Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$ piezas defectuosas

d) Calcular los cuartiles de la distribución. Interpretarlos.

- Percentil: Es un valor, P_r $(r = 1, \ldots, 100)$, que divide al conjunto ordenado de datos en dos partes, tales que el $r\,\%$ del total son inferiores o iguales a P_r.
- Cuartiles: Q_1, Q_2, Q_3 que equivalen a los percentiles de orden 25, 50 y 75 respectivamente.

$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{nr}{100} \leq N_i.$

$Q_1 = P_{25} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{4} = 25 \leq N_i.$
Como en este caso, $N_3 = 25$, hemos de hacer la media aritmética entre x_3 y x_4.
$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5 \Rightarrow 25\,\%$ de las cajas presentan 3,5 piezas defectuosas o menos.

$Q_2 = P_{50} = Me = 4{,}5 \Rightarrow$ El $50\,\%$ de las cajas presentan 4.5 piezas defectuosas o menos.

$Q_3 = P_{75} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{4} \leq N_i$
$Q_3 = x_7 = 6 \Rightarrow$ El $75\,\%$ de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.

e) Calcular los deciles de orden 3 y 7. Interpretarlos.

- Deciles: $D_1, D_2, \ldots, D_{10}$ que equivalen a los percentiles de orden $10, 20, \ldots, 100$.

$D_3 = P_{30} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{10} \leq N_i$
$D_3 = 3 \Rightarrow$ El 30 % de las cajas presentan 3 o menos piezas defectuosas.

$D_7 = P_{70} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{7n}{10} \leq N_i$
$D_7 = 6 \Rightarrow$ El 70 % de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.

f) Cuantificar la dispersión de la distribución mediante diferentes medidas, interpretando los resultados y señalando las ventajas e inconvenientes de cada una.

1) *Recorrido o rango.*

- Recorrido o rango: Es el intervalo entre el valor máximo y el valor mínimo. Permite obtener una idea de la dispersión de los datos, cuanto mayor es el rango, aún más dispersos están los datos.

$$R = x_k - x_1 = 10 - 0 = 10 \qquad piezas \quad defectuosas$$

Esta medida se interpreta como el rango de modalidades que ha presentado un carácter cuantitativo estudiado en los individuos de una población, en nuestro caso el rango es de 10 piezas defectuosas. Solo necesitamos 2 valores para calcularlo, sin embargo, es una medida poco representativa ya que no nos informa sobre cómo se hallan repartidos los individuos de la población en ese rango.

2) *Recorrido intercuartílico.*

- Recorrido intercuartílico: Se determina por la diferencia entre el tercer cuartil con el primer cuartil, indica la longitud del intervalo en el que está incluido el 50 % central de los datos.

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 3{,}5 \qquad piezas \quad defectuosas$$

Esta medida representa el valor máximo en el que se diferencia el 50 % central de la distribución. En este caso, las cajas del 50 % central se diferencian en 3.5 piezas defectuosas como máximo. Sin embargo, no informa sobre cómo se hallan distribuidas las cajas dentro de ese 50 % central.

3) *Desviación absoluta media respecto a $\overline{x}$*

- Desviación absoluta media respecto a la media: Informa de lo muy disperso con respecto a la media (o no) que están los datos. Una desviación media elevada implica mucha variabilidad en los datos, mientras que una desviación media igual a cero implica que todos los valores son iguales y por lo tanto coinciden con la media.

$$D_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}| n_i}{n} = \frac{200}{100} = 2 \qquad piezas \quad defectuosas$$

4) *Desviación absoluta media respecto a Me.*

- Desviación absoluta media respecto a la mediana: Informa de lo muy disperso con respecto a la mediana (o no) que están los datos. Una desviación media elevada implica mucha variabilidad en los datos, mientras que una desviación media igual a cero implica que todos los valores son iguales y por lo tanto coinciden con la mediana.

$$D_{Me} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - Me|}{n} = \frac{200}{100} = 2 \qquad piezas \quad defectuosas$$

Estas dos últimas medidas nos permiten conocer la distancia promedio de la que se separan las cajas con respecto de la media y de la mediana, permitiéndonos hacernos una idea de la representatividad de estas dos medidas. Podemos considerar que son bastantes representativas ya que una diferencia de 2 piezas defectuosas no es alta considerando que estamos ante un rango 10.

5) *Varianza*

- Varianza: Medida de dispersión que se utiliza para representar la variabilidad de un conjunto de datos respecto a su media.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{2488}{100} - 4{,}36^2 = 5{,}870 \qquad piezas \quad defectuosas^2$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas al cuadrado.

6) *Desviación típica.*

- Desviación típica: Medida que se utiliza para cuantificar la variación o la dispersión de un conjunto de datos numéricos.

$$\sigma = 2{,}423 \qquad piezas \quad defectuosas$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas. Esto quiere decir que la mayoría de los datos de la distribución se encuentra entre 1,9371 y 6,78289 piezas defectuosas.

7) *Medidas de dispersión relativas*

Ahora hallaremos las medidas de dispersión relativas, las cuales resultan útiles para comparar nuestra distribución con otras que presentan distinta media, desviación típica, etc:

- Recorrido relativo: Medida de dispersión relativa, se define como el cociente entre el recorrido y la media aritmética.
- Recorrido semi-intercuartílico: : Medida de dispersión relativa, se define como el cociente entre el recorrido intercuartílico y la suma del primer y tercer cuartil.
- Coeficiente de variación de Pearson: Medida de dispersión relativa, se define como la relación por cociente entre la desviación típica y la media. Muestra una interpretación relativa del grado de variabilidad, independiente de la escala de la variable. A mayor valor del coeficiente de variación mayor heterogeneidad de los valores de la variable; y a menor C.V., mayor homogeneidad en los valores de la variable.
- Índice de dispersión respecto a la mediana: Medida de dispersión relativa, se define como el cociente entre la desviación absoluta media respecto a la mediana, y la mediana.

$R_R = \frac{R}{\overline{x}} = 2{,}294$ (Recorrido relativo)
$R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = 0{,}412$ (Recorrido semi-intercuartílico)
$C.V(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}556$ (Coeficiente de variación de Pearson)
$V_{\mu e} = \frac{D_{\mu e}}{\mu_e} = 0{,}44\ldots$ (Índice de dispersión respecto a la mediana)

Ejercicio 5. Dada las siguientes distribuciones:

$I_i^{(1)}$	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
$n_i^{(1)}$	12	13	11	8	6

$I_i^{(2)}$	$(0,1]$	$(1,3]$	$(3,6]$	$(6,10]$	$(10,12]$
$n_i^{(2)}$	1	6	7	12	2

- Población: en este caso no se determina cuál es en ninguna de ellas.
- Tamaño de la población: en la primera es 50 (la obtenemos sumando todos los n_i) y en la segunda es de 28.
- Variable estadística: no se especifica en el ejercicio.
- Modalidades: en ambas se presentan 5 modalidades distintas. En la primera son intervalos de amplitud 1 desde 0 hasta 5. En la segunda son intervalos que van desde 0 a 12 con amplitudes variables.

Calcular para cada una de ellas:

a) Medias aritmética, armónica y geométrica.

Media aritmética

(1) $\overline{x} = \frac{12 \cdot 0{,}5 + 13 \cdot 1{,}5 + 11 \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 3{,}5 + 6 \cdot 4{,}5}{12+13+11+8+6} = 2{,}16$
(2) $\overline{x} = \frac{1 \cdot 0{,}5 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 4{,}5 + 12 \cdot 8 + 2 \cdot 11}{1+6+7+12+2} = 5{,}786$

Media armónica

> - Media armónica: Se usa para promediar datos de magnitudes que son cocientes de dos magnitudes; esto es, magnitudes relativas (su unidad de medida es referida a una unidad de otra variable).

(1) $H = \frac{12+13+11+8+6}{\frac{12}{0,5}+\frac{12}{1,5}+\frac{11}{2,5}+\frac{8}{3,5}+\frac{6}{4,5}} = 1{,}229$

(2) $H = \frac{1+6+7+12+2}{\frac{1}{0,5}+\frac{6}{2}+\frac{7}{4,5}+\frac{12}{8}+\frac{2}{11}} = 3{,}399$

Media geométrica

> - Media geométrica: Se usa cuando se desea promediar datos de una variable que tiene efectos multiplicativos acumulativos en la evolución de una determinada característica con un valor inicial fijo.

(1) $G_1 = \sqrt[50]{0{,}5^{12} \cdot 1{,}5^{13} \cdot 2{,}5^{11} \cdot 3{,}5^{8} \cdot 4{,}5^{6}} = 1{,}685$

(2) $G_2 = \sqrt[28]{0{,}5^{1} \cdot 2^{6} \cdot 4{,}5^{7} \cdot 8^{12} \cdot 11^{2}} = 4{,}770$

b) El valor más frecuente.

Se nos está pidiendo la moda (Mo), la cual se debe encontrar en el intervalo modal (el de mayor densidade de frecuencias. Primero hallemos los h_i:

$h_i^{(1)}$	0,24	0,26	0,22	0,16	0,12

Observamos que el intervalo modal es (1, 2].
Ahora recordemos la fórmula (demostrada en clase) para las variables continuas:

$$Mo = e_{Mo-1} + \frac{h_{Mo} - h_{Mo-1}}{(h_{Mo} - h_{Mo-1}) + (h_{Mo} - h_{Mo+1})} a_i \tag{1}$$

(1)

$$Mo = 1 + \frac{0{,}26 - 0{,}24}{(0{,}26 - 0{,}24) + (0{,}26 - 0{,}22)} \cdot 1 = \frac{4}{3} = 1.\widehat{3}$$

$h_i^{(2)}$	0,03571	0,107142	0,08$\widehat{3}$	0,107142	0,03571428

(2) En este caso tenemos 2 intervalos modales: (1, 3] y (6,10], por lo que habrá dos modas. Volvemos a emplear (1):

$$Mo_1 = 1 + \frac{0{,}107142 - 0{,}03571}{(0{,}107142 - 0{,}03571) + (0{,}107142 - 0{,}08\widehat{3})} \cdot 2 = 2{,}5$$

$$Mo_2 = 6 + \frac{0{,}107142 - 0{,}08\widehat{3}}{(0{,}107142 - 0{,}08\widehat{3}) + (0{,}107142 - 0{,}03571428)} \cdot 4 = 7$$

c) El valor superado por el 50 % de las observaciones.

Dicho valor será la mediana ya que divide a los individuos de la población en 2 efectivos iguales, supuestos ordenados por valor creciente del carácter:

(1)

$$(e_{i-1}, e_i) \;\; N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 25 \;\; y \;\; N_2 = 25 \qquad Me = e_2 = 2$$

(2)

$$(e_{i-1}, e_i) \;\; N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 14 \;\; y \;\; N_3 = 14 \qquad Me = e_3 = 6$$

d) Recorrido, recorrido intercuartílico y desviación típica. Interprétalos. ¿Qué distribución es más homogénea?

1) *Recorrido*

Se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo de la distribución y el extremo inferior del primer intervalo de la distribución.

(1)

$$R = e_5 - e_o = 5 - 0 = 5$$

(2)

$$R = e_5 - e_0 = 12$$

2) Recorrido intercuartílico

Primero hemos de hallar los cuartiles Q_1 y Q_3 de cada una de las dos distribuciones para poder calcular el recorrido intercuartílico. Recordemos la fórmula demostrada en clase para cuantiles, la cual también se puede trasladar a cuartiles:

$$C_\alpha = e_{C\alpha-1} + \frac{n\alpha - N_{C\alpha-1}}{n_{C_\alpha}} a_{C\alpha} \tag{2}$$

Busquemos en que intervalo deben encontrarse estos dos cuantiles:

(1)

$$\frac{n}{4} = 12{,}5 \Rightarrow (1, 2]$$
$$\frac{3n}{4} = 37{,}5 \Rightarrow (3, 4]$$

Por tanto:

$$C_{0{,}25} = 1 + \frac{0{,}25 \cdot 50 - 12}{13} \cdot 1 = 1{,}038$$
$$C_{0{,}75} = 3 + \frac{0{,}75 \cdot 50 - 36}{8} \cdot 1 = 3{,}188$$

Así:

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 2{,}149$$

(2)

$$\frac{n}{4} = 7$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 7 es el (1, 3]. Como $N_2 = 7$ podemos afirmar que $Q_1 = 3$

$$\frac{3n}{4} = 21$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 21 es (6, 10] por lo que hemos de buscar ahí el Q_3. Usaremos (2)

$$Q_3 = 6 + \frac{28 \cdot 0{,}75 - 14}{12} \cdot 4 = 8.\widehat{3}$$
$$R_I = Q_3 - Q_1 = 8.\widehat{3} - 3 = 5.\widehat{3}$$

Recordemos que el R_I representa cuanto se diferencian como máximo los datos que se encuentran en el 50 % de la distribución.

3) *Desviación típica*

(1)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{12 \cdot 0{,}5^2 + 13 \cdot 1{,}5^2 + 11 \cdot 2{,}5^2 + 8 \cdot 3{,}5^2 + 6 \cdot 4{,}5^2}{50} - 2{,}16^2 = 1{,}744$$

$$\sigma = 1{,}321$$

(2)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 2^2 + 7{,}4 \cdot 4{,}5^2 + 12 \cdot 8^2 + 2 \cdot 11^2}{28} - 5{,}7857^2 = 8{,}526$$

$$\sigma = 2{,}920$$

Para poder comparar las desviaciones típicas y determinar que distribución es más homogénea es necesario emplear el coeficiente de variación de Pearson (que es adimensional), ya que las distribuciones presentan distintas medidas y desviaciones típicas:

(1)

$$C.V.(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}611$$

(2)

$$C.V.(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}505$$

Como la 2ª distribución presenta menor coeficiente de Pearson, sus datos no están tan repartidos como la primera, es decir, la segunda distribución es más HOMOGÉNEA.

Ejercicio 6. Un móvil efectúa un recorrido de 100 km en dos sentidos. En uno va a una velocidad constante de $V_1 = 60$ km/h y en el otro va a una velocidad constante de $V_2 = 70$ km/h. Calcular la velocidad media del recorrido.

- Población: trayectos realizados por un móvil en un espacio de tiempo.
- Tamaño de la población: 2 trayectos.
- Variable estadística: la velocidad del móvil en cada uno de los trayectos
- Modalidades: presenta 2; 60 km/h y 70 km/h.

Para ello emplearemos la media armónica, pues se usa para promediar datos que son cocientes de dos magnitudes distintas; esto es, magnitudes relativas (en este caso nuestros datos son velocidades, es decir, $\frac{e}{t}$:

$$v_M = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{70}} = 64{,}615 \ km/h$$

Ejercicio 7. Las acciones de una empresa han producido los siguientes rendimientos netos anuales:

Año	Rentabilidad
1994	12 %
1995	10 %
1996	7 %
1997	6 %
1998	5 %

Obtener el rendimiento neto medio en esos cincos años.

- Población: los distintos años a estudiar de la empresa.
- Tamaño de la población: 5 años.
- Variable estadística: la rentabilidad de las acciones de dicha empresa cada año.
- Modalidades: presenta 5. 12 %, 10 %; 7 %, 6 %, 5 %.

Como nuestra variable (la rentabilidad) presenta efectos multiplicativos acumulativos, lo más lógico será emplear la media geométrica:

$$G = \sqrt[5]{1{,}12 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}05} - 1 = 0{,}079 \quad de \quad rentabilidad$$

Así, observamos que el rendimiento neto medio entre 1994 y 1998 es del 7,97 %.

Ejercicio 8. Un profesor califica a sus alumnos según el criterio siguiente: 40 % de suspensos, 30 % de aprobados, 15 % notables, 10 % sobresalientes y 5 % matrículas. Las notas obtenidas son las siguientes:

$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$	$(5,6]$	$(6,7]$	$(7,8]$	$(8,9]$	$(9,10]$
34	74	56	81	94	70	41	28	16	4

Calcular las notas máximas para obtener cada una de las calificaciones.

Conceptos:

- Población: alumnos que cierto profesor ha calificado
- Tamaño de la población: $n = 498$
- Variable estadística (X): nota obtenida por cada alumno
- Modalidades: intervalos de amplitud 1 que van de 0 a 10; (10 modalidades)

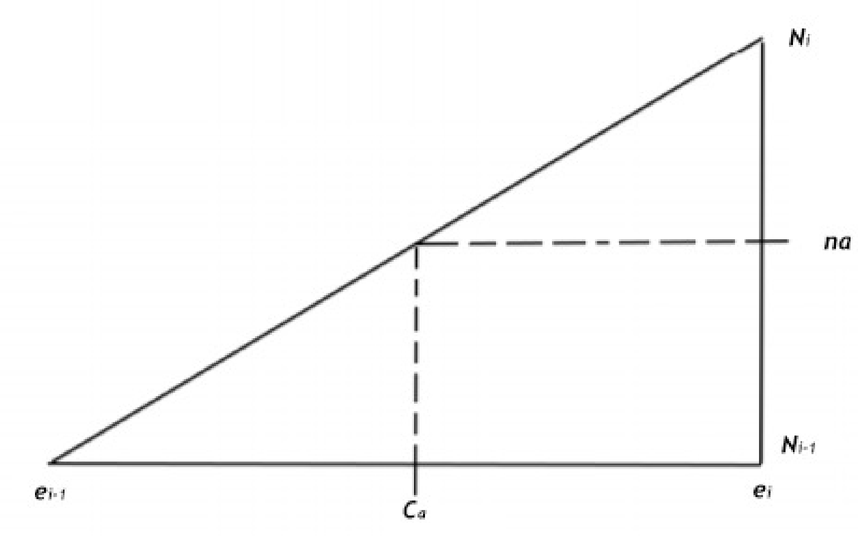
Sabemos que el orden es el siguiente:

Suspensos	Aprobados	Notables	Sobresalientes	Matrículas
40 %	30 %	15 %	10 %	5 %

Para saber la nota máxima de los suspensos hemos de hallar el cuantil 0.40, es decir la nota por la que está debajo el 40 % de la población: $\frac{4n}{10} = 199{,}2$

	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$	$(5,6]$	$(6,7]$	$(7,8]$	$(8,9]$	$(9,10]$
n_i	34	74	56	81	94	70	41	28	16	4
N_i	34	108	164	245	339	409	450	478	494	498

Así, observamos que el cuantil buscado está en el intervalo (3,4].



$$\frac{a_i}{c_\alpha - e_{i-1}} = \frac{n_i}{n\alpha - N_{i-1}} \longleftrightarrow C_\alpha = e_{i-1} + \frac{n\alpha - N_{i-1}}{n_i}\alpha_i$$

Esta fórmula será usada de aquí en adelante en los ejercicios.

$$C_{0,40} = 4 + \frac{0{,}4 \cdot 498 - 245}{81} \cdot 1 = 3{,}435 \;\; \textit{puntos}$$

Se suspende por debajo de dicha nota.
Para el cálculo de la nota máxima en aprobados, notables, sobresalientes, y matrículas hemos de emplear la fórmula obtenida:

Aprobados $\Rightarrow$ cuantil 0.70 $\Rightarrow n \cdot 0{,}7 = 348{,}6 \Rightarrow$ La nota máxima de los aprobados está en el intervalo (5,6].

$$C_{0,70} = 6 + \frac{348{,}6 - 409}{70} \cdot 1 = 5{,}137 \quad \textit{puntos}$$

Notables $\Rightarrow$ Cuantil 0.85 $\Rightarrow n \cdot 0{,}85 = 423{,}3 \Rightarrow$ Buscar en (6,7].

$$C_{0,85} = 7 + \frac{423{,}3 - 450}{41} \cdot 1 = 6{,}349 \quad \textit{puntos}$$

Sobresalientes $\Rightarrow$ Cuantil 0.95 $\Rightarrow n \cdot 0{,}95 = 473{,}1 \Rightarrow$ Buscar en (7,8].

$$C_{0,95} = 8 + \frac{473{,}1 - 478}{28} \cdot 1 = 7{,}825 \quad \textit{puntos}$$

Matrículas $\Rightarrow$ Es obvio, pues el cuantil 1 es $C_1 = 10 \quad puntos$

$*$ *Se ha supuesto, pese a no estar especificado en el enunciado, que las unidades en las que se ha medido la variable estudiada son* ***puntos****.*

Ejercicio 9. Se ha medido la altura de 110 jóvenes, obteniendo:

Altura	(1.55, 1.60]	(1.60, 1.70]	(1.70, 1.80]	(1.80, 1.90]	(1.90, 2.00]
Nº jóvenes	18	31	24	20	17
N_i	18	49	73	93	110
a_i	0.05	0.1	0.1	0.1	0.1

Conceptos:

- Población: jóvenes
- Tamaño de la población: $n = 110$
- Variable estadística (X): altura de cada joven
- Modalidades: intervalos de distinta amplitud que van de 1.55 a 2.00; (5 modalidades)

a) Si se considera bajos al 3 % de los individuos de menor altura, ¿cuál es la altura máxima que pueden alcanzar?

Para poder saberlo, es necesario calcular el cuantil 0,03, que indica la altura por debajo de la cual se halla el 3 % de la población estudiada. Deduzcamos la fórmula para los cuantiles:
1 $n\alpha = 3{,}3 \leftarrow$ Como $N_1 = 18$ es inmediatamente mayor que $n\alpha$, $C_{0,03}$ ha de hallarse en el intervalo $(155, 160]$.
2 Si tomamos el tramo de la curva de distribución de I_i
Empleamos la formula para $C_{0,03}$

$$C_{0,03} = 1{,}55 + \frac{3{,}3 - 0}{18} 00{,}05 = 1{,}5591\widehat{6} \approx 1{,}56 \quad m$$

b) Si se condiera altos al 18 % de los individuos de mayor altura, ¿cuál es su altura mínima?

Debemos calcular la altura por debajo de la cual queda el 82 % de la población. Repitiendo el proceso anterior empleando la fórmula:
1 $n\alpha = 90{,}2 \implies N_y = 93$ es inmediatamente mayor que $n\alpha$, $C_{0,82}$ ha de hallarse I_y:

$$C_{0,82} = 1{,}80 + \frac{90{,}2 - 73}{20} 0{,}1 = 1{,}886 \quad m$$

c) ¿Qué altura es superada sólo por 1/4 de los jóvenes?

Como el $\frac{3}{4}$ de los jóvenes no superan esa altura y $\frac{3}{4} = 0{,}75$, hemos de calcular $C_{0,75}$:
1 $n\alpha = 82{,}5 \implies C_{0,75}$ ha de hallarse en I_4:

$$C_{0,75} = 1{,}80 + \frac{82{,}2 - 73}{20} 0{,}1 = 1{,}848 \quad m$$

d) Calcular el número de jóvenes cuya altura es superior a 1.75.

En este caso sería hacer el cuantil inverso, es decir, deducir qué cuantil cumple que $C_\alpha = 1{,}75$ y finalmente calcular $n\alpha$. Deduciendo que está en I_3, empleemos la fórmula:

$$1{,}75 = 1{,}75 + \frac{110\alpha - 49}{24} 0{,}1 \longleftrightarrow \alpha = 0{,}5\widehat{54}$$

$n\alpha = 110 \cdot 0{,}5\widehat{54} = 61$ jóvenes no superan dicha altura y, por tanto, 49 la superan.

e) Calcular la altura máxima de los 11 jóvenes más bajos.

$\frac{11}{110} = 0{,}1 \implies$ Se nos pide el cuantil 0,1, $C_{0,1}$, que se halla en I_1:
$C_{0,1} = 1{,}55 + \frac{11-0}{18} 0{,}05 = 1{,}580\widehat{5} \approx 1{,}58$ m.

f) Calcular la altura mínima de los 11 jóvenes más altos.

$1 - \frac{11}{100} = 0{,}9 \implies$ Se nos pide la altura por debajo de la cual se encuentra el 90 % de la población, es decir, $C_{0,9}$, que se halla en I_5:

$$C_{0,9} = 1{,}90 + \frac{99 - 93}{17} 0{,}1 = 1{,}935\ m$$

∗ *Se ha supuesto, pese a no estar especificado en el enunciado, que las unidades en las que se ha medido la variable estudiada son* ***metros (m)***.

Ejercicio 10. Realizando una prueba para el estudio del cáncer a 150 personas se obtuvo la siguiente tabla según la edad de los enfermos:

Edad	(10, 30]	(30, 40]	(40, 50]	(50, 60]	(60, 90]
Nº enfermos	15	22	48	40	25

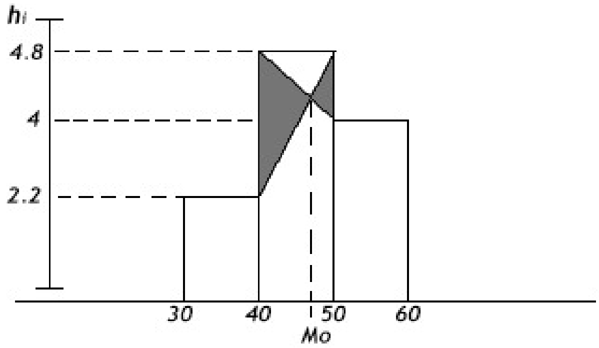
Conceptos:

- Población: enfermos de cáncer
- Tamaño de la población: $n = 150$
- Variable estadística (X): edad de cada enfermo
- Modalidades: intervalos de distinta amplitud que van de 10 a 90; (5 modalidades)

Edad	n_i	a_i	h_i	N_i	c_i	n_ic_i	$n_ic_i^2$	$n_ic_i^3$	$n_ic_i^4$
(10,30]	15	20	0.75	15	20	300	6000	120000	2400000
(30,40]	22	10	2.2	37	35	770	26950	943250	33013750
(40,50]	48	10	4.8	85	45	2160	97200	4374000	19683000
(50,60]	40	10	4	125	55	2200	121000	6655000	366025000
(60,90]	25	30	$0{,}8\widehat{3}$	150	75	1875	140625	10546875	791015625
	150					7305	391775	22639125	1389284375

a) Calcular la edad más común de los individuos estudiados.
Se nos está pidiendo la moda, la cual la encontraremos en el intervalo modal, es decir, el intervalo con mayor densidad de frecuencia $h_i = \frac{n_i}{a_i}$

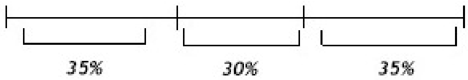
$\frac{n_i}{a_i}$. En este caso, $h_3 > h_j\ \forall j \neq 3$ con $j \in\ \{1, \ldots, 5\}$. Ahora llevamos a cabo la semejanza de triángulos vista en clase sobre un trozo del histograma (el intervalo modal y sus contiguos):



Con los triángulos semejantes, usaremos la razón base entre altura (el dibujo no está a escala):

$$\frac{4{,}8 - 2{,}2}{Mo - 40} = \frac{4{,}8 - 4}{50 - Mo} \Longleftrightarrow Mo = 47{,}647 \text{ años}$$

b) Calcular la edad mínima y máxima del 30 % central de los individuos.



Lo que se nos pide es equivalente a calcular $C_{0,35}$ y $C_{0,65}$. Emplearemos la fórmula demostrada en el ejercicio 8:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}35 = 52{,}5 \implies$ $C_{0,35}$ estará en I_3 pues N_3 es inmediatamente mayor que n_α

$$C_{0,35} = 40 + \frac{52{,}5 - 37}{48} \cdot 10 = 43{,}22\widehat{36} \text{ años (edad mínima)}$$

Y para el cuantil $C_{0,65}$:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}65 = 97{,}5 \implies$ Estará en I_4 ya que N_4 es inmediatamente superior a $n\alpha$

$$C_{0,65} = 50 + \frac{97{,}5 - 85}{40} \cdot 10 = 53{,}125 \text{ años (edad máxima)}$$

c) Calcular el recorrido intercuartílico y la desviación típica.
$R_I = Q_3 - Q_1 \implies$ Necesitamos hallar los cuartiles 1 y 3 que equivalen a los cuantiles 0,25 0,75. Repetimos el proceso del anterior apartado:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}25 = 37{,}5 \implies C_{0,25}$ estará en $I_3 = (40, 50]$ pues N_3 es inmediatamente mayor que 37,5

$$C_{0,25} = 40 + \frac{37{,}5 - 37}{48} \cdot 10 = 40{,}104 \text{ años}$$

1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}75 = 112{,}5 \implies C_{0,75}$ estará en $I_4 = (50, 60]$ pues N_4 es inmediatamente mayor que 112,5

$$C_{0,75} = 50 + \frac{112{,}5 - 85}{40} \cdot 10 = 56{,}875 \text{ años}$$

Por lo tanto, $R_I = Q_3 - Q_1 = 56{,}875 - 40{,}1041\widehat{6} = 16{,}771$ años
Esto significa que todos los datos encontrados en el 50 % central de la distribución se diferencian como máximo en 16,771 años.
En cuanto a la desviación típica, debemos hallar antes la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci)^2 = \frac{391775}{150} - (\frac{7305}{150})^2 = 240{,}143 \text{ años al cuadrado}$$

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = 15{,}497$ años $\implies$ Esto significa que la mayoría de los datos de nuestra distribución se hallan en el intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$.

d) Calcular e interpretar los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis.

- Momentos: son indicadores genéricos de una distribución. Se basan en una generalización de la idea de media. Si dos distribuciones son iguales todos sus infinitos momentos coinciden.
  Momento de orden r respecto al valor a: sea r un número real positivo

  $$_a m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - a)^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - a)^r$$

  - Momentos no centrales: momentos respecto del origen; $a = 0$

    $$m_r = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^r$$

  - Momentos centrales: momentos respecto de la media aritmética; $a = \overline{x}$

    $$\mu_r = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \overline{x})^r$$

- Medidas de asimetría: sea X una variable estadística, se entiende por asimetría de X a la falta de simetría respecto del eje vertical $x = \overline{x}$. Una distribución es simétrica si la perpendicular que pasa por la media aritmética divide al diagrama diferencial (histograma, en el caso continuo; o diagrama de barras, en el discreto) en dos partes iguales; de lo contrario, es asimétrica.

  - Coeficiente de asimetría de Fisher, $\gamma_1(x)$
  - Coeficientes de asimetría de Pearson, A_p , A_{p^*}
    - $coeficiente > 0 \Rightarrow$ distribución asimétrica por la derecha o positiva
    - $coeficiente < 0 \Rightarrow$ distribución asimétrica por la izquierda o negativa
    - $coeficiente = 0 \Rightarrow$ distribución simétrica

- Medidas de apuntamiento o curtosis: miden la menor o mayor concentración central de frecuencias de una distribución respecto a la que presenta una distribución Normal de su misma media y su misma desviación típica.

  - Coeficiente de curtosis de Fisher, $\gamma_2(x)$
  - Coeficiente de curtosis de Kelley, K
    - $coeficiente > 0 \Rightarrow$ distribución leptocúrtica
    - $coeficiente < 0 \Rightarrow$ distribución platicúrtica
    - $coeficiente = 0 \Rightarrow$ distribución mesocúrtica

De asimetría son 3:

- De Fisher: $\rightarrow \gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$

- De Pearson:

$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x}$$

$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = \frac{1}{n}\sum n_i ci^3 - 3\frac{1}{n}\sum n_i ci^2 \cdot \bar{x} + 2 \cdot \bar{x}^3 =$$
$$= \frac{22639125}{150} - \frac{3}{150} \cdot 391775 \cdot \frac{7305}{150} + 2 \cdot (\frac{7305}{150})^3 = 341{,}256$$
$$\gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{341{,}256}{15{,}49656^3} = 0{,}0917 > 0 \implies \text{ Es algo asimétrica por la derecha}$$
$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x} = \frac{\frac{7305}{150} - 47{,}647}{15{,}49656} = 0{,}06795$$
Para A_{p^*} nos falta Me:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}5 = 75 \implies$ Me estará en I_3
$$Me = 40 + \frac{75 - 37}{48} \cdot 10 = 47{,}91\widehat{6}$$
$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3 \cdot (\frac{7305}{150} - 47{,}91\widehat{6})}{15{,}49656} = 0{,}151647$$

Ahora pasamos a los coeficientes de Curtosis:

- Fisher: $\gamma_{2(x)} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ Hallemos $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$:
$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum n_i c_i^4 - 4\frac{1}{n}\sum n_i c_i^3 \cdot \bar{x} + 6\bar{x}^2 \cdot \frac{1}{n}\sum n_i c_i^2 - 3\bar{x}^4 =$$
$$= \frac{1389284375}{150} - 4 \cdot \frac{1}{150} \cdot (22639125) \cdot \frac{7305}{150} + 6 \cdot (\frac{7305}{150})^2 \cdot \frac{1}{150} \cdot 391775 - 3 \cdot (\frac{7305}{150})^4 = 153232{,}46$$
$$\gamma_2(x) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{153232{,}46}{15{,}49656^2} - 3 = -0{,}3429 < 0$$
La distribución es platicúrtica, es decir, presenta una menor concentración central de frecuencias que una normal de su misma media y desviación típica (está más aplanada que la curva normal y los datos están más dispersos).
De Kelley: $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0{,}263$, como ya tenemos Q_1 y Q_3, debemos calcular $D_1 = C_{0,1}$ y $D_9 = C_{0,9}$:
1 $n\alpha = 15 \implies C_{0,1}$ coincide justamente con el extremo superior de $I_1 = (10, 30]$, es decir, 30 años.
1 $n\alpha = 135 \implies C_{0,9}$ ha de hallarse en $I_5 = (60, 90]$ ya que N_5 es inmediatamente mayor que 135. Aplicamos la fórmula demostrada:
$$C_{0,9} = 60 + \frac{135 - 125}{25} \cdot 30 = 72 \text{ años}$$
$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0{,}263 = \frac{1}{2} \cdot \frac{56{,}875 - 40{,}4041\widehat{6}}{72 - 30} - 0{,}263 = -0{,}06335 < 0$$
Como $K < 0$, la distribución es platicúrtica, por lo que llegamos a la misma conclusión que con el coeficiente de curtosis de Fisher.