Relación de ejercicios 1 EDIP

Carlos García, Bora Goker, Javier Gómez,
Ana Graciani, J.Alberto Hoces

2020/2021

Ejercicio 1. El número de hijos de las familias de una determinada barriada de una ciudad es una variable estadística de la que se conocen los siguientes datos:

x_i	n_i	N_i	f_i
0	80		0,16
1	110		
2		320	
3			0,18
4	40		
5			
6	20		

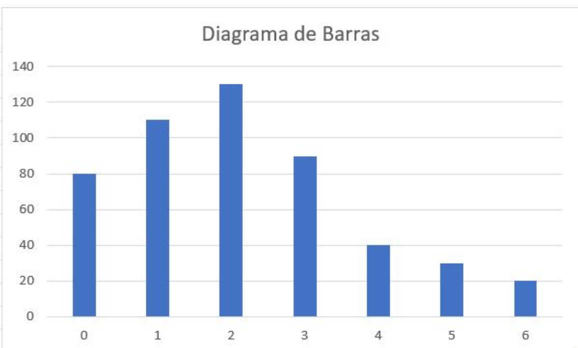
n_i : frecuencias absolutas
N_i : frecuencias absolutas acumuladas
f_i : frecuencias relativas

a) Completar la tabla de frecuencias.

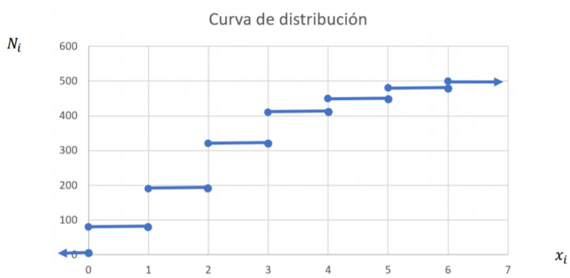
x_i	n_i	N_i	f_i
0	80	80	0,16
1	110	190	0,22
2	130	320	0,26
3	90	410	0,18
4	40	450	0,08
5	30	480	0,06
6	20	500	0,04

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

b) Representar la distribución mediante un diagrama de barras y la curva de distribución.



(a) Diagrama de barras



(b) Curva de distribución

c) Promediar los valores de la variable mediante diferentes medidas. Interprétalas.

I) Media: Puesto que se pueden sumar el número de hijos y la media es única calculamos su media aritmética.

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 80 + 1 \cdot 110 + 2 \cdot 130 + 3 \cdot 90 + 4 \cdot 40 + 5 \cdot 30 + 6 \cdot 20}{500} = 2{,}14 \ \approx 2\, hijos$$

II) Mediana:

$$\frac{n}{2} = \frac{500}{2} = 250, \qquad N_2 < 250 < N_3 \qquad Mediana = 2 \ \ hijos$$

III) Moda:

$$n_3 \geq n_j \qquad \forall j \neq 3 \qquad Moda = 2\, hijos$$

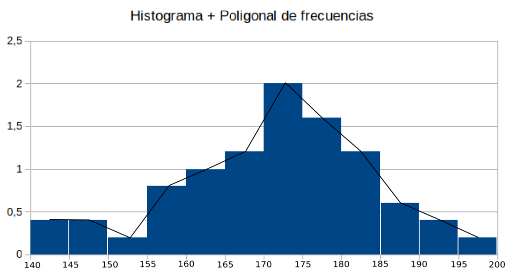
Ejercicio 2. La puntuación obtenida por 50 que presentaron a una prueba de selección, sumadas las puntuación de distintos test, fueron:

174, 185, 166, 176, 145, 166, 191, 175, 158, 156, 156, 187, 162, 172, 197, 181, 151, 161, 183, 172, 162, 147, 178, 176, 141, 170, 171, 158, 184, 173, 169, 162, 172, 181, 187, 177, 164, 171, 193, 183, 173, 179, 188, 179, 167, 178, 180, 168, 148, 173.

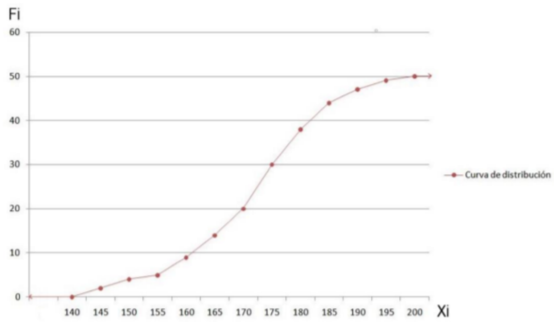
a) Agrupar los datos en intervalos de amplitud 5 desde 140 a 200 y dar la tabla de frecuencias.

I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
$[140, 145]$	2	2	2/50	2/50	142,5	5	2/5
$(145, 150]$	2	4	2/50	4/50	147,5	5	2/5
$(150, 155]$	1	5	1/50	5/50	152,5	5	1/5
$(155, 160]$	4	9	4/50	9/50	157,5	5	4/5
$(160, 165]$	5	14	5/50	14/50	162,5	5	5/5
$(165, 170]$	6	20	6/50	20/50	167,5	5	6/5
$(170, 150]$	10	30	10/50	30/50	172,5	5	10/5
$(175, 180]$	8	38	8/50	38/50	177,5	5	8/5
$(180, 185]$	6	44	6/50	44/50	182,5	5	6/5
$(185, 190]$	3	47	3/50	47/50	187,5	5	3/5
$(190, 195]$	2	49	2/50	49/50	192,5	5	2/5
$(195, 200]$	1	50	1/50	50/50	197,5	5	1/5

b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma



(b) Curva de distribución

Ejercicio 3. La distribución de la renta familiar en el año 2003 por comunidades autónomas se recoge en la siguiente tabla:

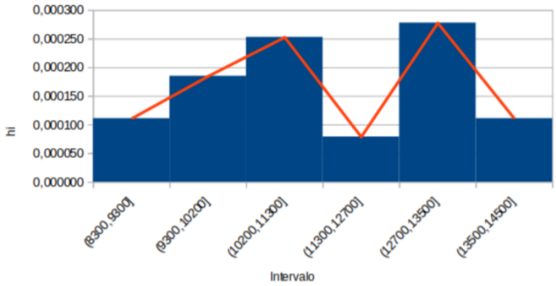
I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
[8300, 9300]	2						
, 10200]		5					
				10/18		1100	
			2/18		1200		
	4						0,005/18
		18					0,002/18

n_i : frecuencias absolutas
N_i : frec. absolutas acumuladas
f_i : frecuencias relativas
F_i : frec. relativas acumuladas
c_i : marcas de clase
a_i : amplitudes
h_i : densiades de frecuencia

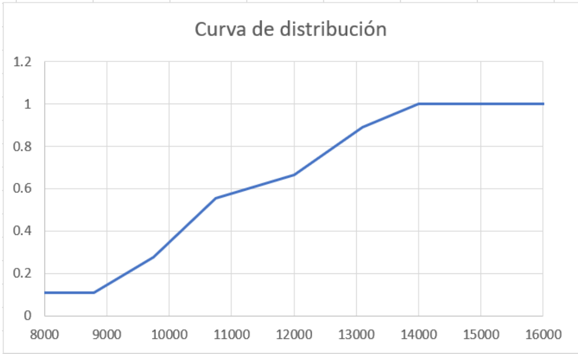
a) Completar la tabla.

I_i	n_i	N_i	f_i	F_i	c_i	a_i	h_i
[8300, 9300]	2	2	0,11	0,11	8800	1000	0,002/18
(9300 , 10200]	3	5	3/18	5/18	9750	900	$0{,}00\widehat{3}/18$
(10200, 11300]	5	10	5/18	10/18	10750	1100	$0{,}00\widehat{45}/18$
(11300, 12700]	2	12	2/18	12/18	12000	1400	0,0014/18
(12700, 13500]	4	16	4/18	16/18	13100	800	0,005/18
(13500, 14500]	2	18	2/18	18/18	14000	1000	0,002/18

b) Representar la distribución mediante un histograma, poligonal de frecuencias y curva de distribución.



(a) Histograma y poligonal de frecuencias



(b) Curva de distribución

c) ¿Cuántas comunidades presentan una renta menor o igual que 12700 euros? ¿Y cuántas superior a 11300 euros?

$N_4 = 12; \qquad I_4 = (11300, 12700]$
12 comunidades presentan una renta menor o igual a 12700 € .

$n_4 + n_5 + n_6 = 8$
8 comunidades presentan una renta superior a 11300 €.

Ejercicio 4. En una determinada empresa se realiza un estudio sobre la calidad de su producción. La distribución siguiente informa sobre el número de piezas defectuosas encontradas en 100 cajas examinadas con 50 unidades cada una de ellas:

Nº piezas defectuosas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de cajas	6	9	10	11	14	16	16	9	4	3	2

a) Calcular el número medio de piezas defectuosas por caja.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{100} \cdot 436 = 4{,}36 \ \ piezas \ \ defectuosas.$$

x_i	n_i	$n_i x_i$	N_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert n_i$	$\lvert x_i - Me \rvert n_i$	$x_i^2 n_i$
0	6	0	6	26,16	27	0
1	9	9	15	30,24	31,5	9
2	10	20	25	23,6	25	40
3	11	33	36	14,96	16,5	99
4	14	56	50	5,04	7	224
5	16	80	66	10,24	8	400
6	16	96	82	26,24	24	576
7	9	63	91	23,76	22,5	441
8	4	32	95	14,56	14	256
9	3	27	98	13,92	13,5	243
10	2	20	100	11,28	11	200

b) ¿Cuántas piezas defectuosas se encuentran más frecuentemente en las cajas examinadas?

La moda de una distribución es el valor de mayor frecuencia (el más repetido). En este caso :

$n_6 = n_7 = 16 \qquad M_o = x_6 = 5 \;\; piezas\, defectuosas \qquad M_o = x_7 = 6 \;\; piezas\, defectuosas$

Podemos observar que nos hayamos ante una distribución bimodal.

c) ¿Cuál es el número mediano de piezas defectuosas por caja? Recordemos que la mediana de una distribución es un valor que divide a los individuos de la población en dos efectivos iguales, supuestos ordenados por el valor creciente del carácter.

$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \rightarrow N_i = \frac{n}{2}; \quad Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$ piezas defectuosas

d) Calcular los cuartiles de la distribución. Interpretarlos.

$x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{nr}{100} \leq N_i.$

$Q_1 = P_{25} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{n}{4} = 25 \leq N_i.$
Como en este caso, $N_3 = 25$, hemos de hacer la media aritmética entre x_3 y x_4.
$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2{,}5 \Rightarrow 25\,\%$ de las cajas presentan 3,5 piezas defectuosas o menos.

$Q_2 = P_{50} = Me = 4{,}5 \Rightarrow$ El 50 % de las cajas presentan 4.5 piezas defectuosas o menos.

$Q_3 = P_{75} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{4} \leq N_i$
$Q_3 = x_7 = 6 \Rightarrow$ El 75 % de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.

e) Calcular los deciles de orden 3 y 7. Interpretarlos.

$D_3 = P_{30} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{3n}{10} \leq N_i$
$D_3 = 3 \Rightarrow$ El 30 % de las cajas presentan 3 o menos piezas defectuosas.

$D_7 = P_{70} \quad \Rightarrow \quad x_i \quad / \quad N_{i-1} < \frac{7n}{10} \leq N_i$
$D_7 = 6 \Rightarrow$ El 70 % de las cajas presentan 6 o menos piezas defectuosas.

f) Cuantificar la dispersión de la distribución mediante diferentes medidas, interpretando los resultados y señalando las ventajas e inconvenientes de cada una.

1) *Recorrido o rango.*

$$R = x_k - x_1 = 10 - 0 = 10$$

Esta medida se interpreta como el rango de modalidades que ha presentado un carácter cuantitativo estudiado en los individuos de una población, en nuestro caso el rango es de 10 piezas defectuosas. Solo necesitamos 2 valores para calcularlo, sin embargo, es una medida poco representativa ya que no nos informa sobre cómo se hallan repartidos los individuos de la población en ese rango.

2) *Recorrido intercuartílico.*

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 3{,}5$$

Esta medida representa el valor máximo en el que se diferencia el 50 % central de la distribución. En este caso, las cajas del 50 % central se diferencian en 3.5 piezas defectuosas como máximo. Sin embargo, no informa sobre cómo se hallan distribuidas las cajas dentro de ese 50 % central.

3) *Desviación absoluta media respecto a $\overline{x}$*

$$D_{\overline{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}| n_i}{n} = \frac{200}{100} = 2$$

4) *Desviación absoluta media respecto a Me.*

$$D_{Me} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - Me|}{n} = \frac{200}{100} = 2$$

Estas dos últimas medidas nos permiten conocer la distancia promedio de la que se separan las cajas con respecto de la media y de la mediana, permitiéndonos hacernos una idea de la representatividad de estas dos medidas. Podemos considerar que son bastantes representativas ya que una diferencia de 2 piezas defectuosas no es alta considerando que estamos ante un rango 10.

5) *Varianza*

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \overline{x}^2 = \frac{2488}{100} - 4{,}36^2 = 5{,}8704$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas al cuadrado.

6) *Desviación típica.*

$$\sigma = 2{,}422890835$$

Representa la dispersión de los datos de la distribución respecto de la media en piezas defectuosas. Esto quiere decir que la mayoría de los datos de la distribución se encuentra entre 1,9371 y 6,78289 piezas defectuosas.

7) *Medidas de dispersión relativas*

Ahora hallaremos las medidas de dispersión relativas, las cuales resultan útiles para comparar nuestra distribución con otras que presentan distinta media, desviación típica, etc:

$R_R = \frac{R}{\overline{x}} = 2{,}29358$ (Recorrido relativo)
$R_{SI} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = 0{,}41176$ (Recorrido semi-intercuartílico)
$C.V(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}5557$ (Coeficiente de variación de Pearson)
$V_{\mu e} = \frac{D_{\mu e}}{\mu_e} = 0{,}44\ldots$ (Índice de dispersión respecto a la mediana)

Ejercicio 5. Dada las siguientes distribuciones:

$I_i^{(1)}$	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3$	$(3,4$	$(4,5]$
$n_i^{(2)}$	12	13	11	8	6

$I_i^{(2)}$	$(0,1]$	$(1,3]$	$(3,6]$	$(6,10]$	$10,12]$
$n_i^{(2)}$	1	6	7	12	2

Calcular para cada una de ellas:

a) Medias aritmética, armónica y geométrica.

Media aritmética

1. $\overline{x}_1 = \frac{12\cdot 0{,}5+13\cdot 1{,}5+11\cdot 2{,}5+8\cdot 3{,}5+6\cdot 4{,}5}{12+13+11+8+6} = 2{,}16$
2. $\overline{x}_2 = \frac{1\cdot 0{,}5+6\cdot 2+7\cdot 4{,}5+12\cdot 8+2\cdot 11}{1+6+7+12+2} = 5{,}7857$

Media armónica

1. $H_1 = \frac{12+13+11+8+6}{\frac{12}{0{,}5}+\frac{12}{1{,}5}+\frac{11}{2{,}5}+\frac{8}{3{,}5}+\frac{6}{4{,}5}} = 1{,}2289325 \approx 1{,}23$
2. $H_2 = \frac{1+6+7+12+2}{\frac{1}{0{,}5}+\frac{6}{2}+\frac{7}{4{,}5}+\frac{12}{8}+\frac{2}{11}} = 3{,}399141631$

Media geométrica

1. $G_1 = \sqrt[50]{0{,}5^{12}\cdot 1{,}5^{13}\cdot 2{,}5^{11}\cdot 3{,}5^{8}\cdot 4{,}5^{6}} = 1{,}684688918$
2. $G_2 = \sqrt[28]{0{,}5^{1}\cdot 2^{6}\cdot 4{,}5^{7}\cdot 8^{12}\cdot 11^{2}} = 4{,}769603117$

b) El valor más frecuente.

Se nos está pidiendo la moda (Mo), la cual se debe encontrar en el intervalo modal (el de mayor densidade de frecuencias. Primero hallemos los h_i:

$h_i^{(1)}$	0,24	0,26	0,22	0,16	0,12

Observamos que el intervalo modal es (1, 2].
Ahora recordemos la fórmula (demostrada en clase) para las variables continuas:

$$Mo = e_{Mo-1} + \frac{h_{Mo}-h_{Mo-1}}{(h_{Mo}-h_{Mo-1})+(h_{Mo}-h_{Mo+1})}a_i \tag{1}$$

$$1 + \frac{0{,}26-0{,}24}{(0{,}26-0{,}24)+(0{,}26-0{,}22)}\cdot 1 = \frac{4}{3} = 1.\widehat{3}$$

$h_i^{(2)}$	0,03571	0,107142	$0{,}08\widehat{3}$	0,107142	0,03571428

En este caso tenemos 2 intervalos modales: (1, 3] y (6,10], por lo que habrá dos modas. Volvemos a emplear (1):

(1)

$$1 + \frac{0{,}107142-0{,}03571}{(0{,}107142-0{,}03571)+(0{,}107142-0{,}08\widehat{3})}\cdot 2 = 2{,}5$$

(2)

$$6 + \frac{0{,}107142-0{,}08\widehat{3}}{(0{,}107142-0{,}08\widehat{3})+(0{,}107142-0{,}03571428)}\cdot 4 = 7$$

c) El valor superado por el 50 % de las observaciones.

Dicho valor será la mediana ya que divide a los individuos de la población en 2 efectivos iguales, supuestos ordenados por valor creciente del carácter:

(1)

$$(e_{i-1}, e_i)\;\; N_{i-1} < \frac{n}{2} \le N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 25 \;\; y \;\; N_2 = 25 \qquad Me = e_2 = 2$$

(2)

$$(e_{i-1}, e_i) \;\; N_{i-1} < \frac{n}{2} \leq N_i \Rightarrow \frac{n}{2} = 14 \;\; y \;\; N_3 = 14 \qquad Me = e_3 = 6$$

d) Recorrido, recorrido intercuartílico y desviación típica. Interprétalos. ¿Qué distribución es más homogénea?

1) *Recorrido*
Se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo de la distribución y el extremo inferior del primer intervalo de la distribución.

(1)

$$R_1 = e_5 - e_o = 5 - 0 = 5$$

(2)

$$R_2 = e_5 - e_0 = 12$$

2) Recorrido intercuartílico
Primero hemos de hallar los cuartiles Q_1 y Q_3 de cada una de las dos distribuciones para poder calcular el recorrido intercuartílico. Recordemos la fórmula demostrada en clase para cuantiles, la cual también se puede trasladar a cuartiles:

$$C_\alpha = e_{C\alpha-1} + \frac{n\alpha - N_{C\alpha-1}}{n_{C_\alpha}} a_{C\alpha} \tag{2}$$

Busquemos en que intervalo deben encontrarse estos dos cuantiles:

(1)

$$\frac{n}{4} = 12{,}5 \Rightarrow (1, 2]$$
$$\frac{3n}{4} = 37{,}5 \Rightarrow (3, 4]$$

Por tanto:

$$C_{0{,}25} = 1 + \frac{0{,}25 \cdot 50 - 12}{13} \cdot 1 = 1{,}03846$$
$$C_{0{,}75} = 3 + \frac{0{,}75 \cdot 50 - 36}{8} \cdot 1 = 3{,}1875$$

Así:

$$R_I = Q_3 - Q_1 = 2{,}14904$$

(2)

$$\frac{n}{4} = 7$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 7 es el (1, 3]. Como $N_2 = 7$ podemos afirmar que $Q_1 = 3$

$$\frac{3n}{4} = 21$$

El intervalo que presenta una frecuencia absoluta acumulada inmediatamente mayor que 21 es (6, 10] por lo que hemos de buscar ahí el Q_3. Usaremos (2)

$$Q_3 = 6 + \frac{28 \cdot 0{,}75 - 14}{12} \cdot 4 = 8.\widehat{3}$$
$$R_I = Q_3 - Q_1 = 8.\widehat{3} - 3 = 5.\widehat{3}$$

Recordemos que el R_I representa cuanto se diferencian como máximo los datos que se encuentran en el 50 % de la distribución.

3) *Desviación típica*

(1)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{12 \cdot 0{,}5^2 + 13 \cdot 1{,}5^2 + 11 \cdot 2{,}5^2 + 8 \cdot 3{,}5^2 + 6 \cdot 4{,}5^2}{50} - 2{,}16^2 = 1{,}7444$$

$$\sigma = 1{,}32075$$

(2)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 2^2 + 7{,}4 \cdot 4{,}5^2 + 12 \cdot 8^2 + 2 \cdot 11^2}{28} - 5{,}7857^2 = 8{,}52567551$$

$$\sigma = 2{,}919875941$$

Para poder comparar las desviaciones típicas y determinar que distribución es más homogénea es necesario emplear el coeficiente de variación de Pearson (que es adimensional), ya que las distribuciones presentan distintas medidas y desviaciones típicas:

(1)

$$C.V_1(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}611458$$

(2)

$$C.V_2(x) = \frac{\sigma}{\overline{x}} = 0{,}50467116$$

Como la 2ª distribución presenta menor coeficiente de Pearson, sus datos no están tan repartidos como la primera, es decir, la segunda distribución es más HOMOGÉNEA.

Ejercicio 6. Un móvil efectúa un recorrido de 100 km en dos sentidos. En uno va a una velocidad constante de $V_1 = 60$ km/h y en el otro va a una velocidad constante de $V_2 = 70$ km/h. Calcular la velocidad media del recorrido.

Para ello emplearemos la media armónica, pues se usa para promediar datos que son cocientes de dos magnitudes distintas; esto es, magnitudes relativas (en este caso nuestros datos son velocidades, es decir, $\frac{e}{t}$:

$$v_M = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{70}} = 64{,}61538 \ \ km/h$$

Ejercicio 7. Las acciones de una empresa han producido los siguientes rendimientos netos anuales:

Año	Rentabilidad
1994	12 %
1995	10 %
1996	7 %
1997	6 %
1998	5 %

Obtener el rendimiento neto medio en esos cincos años.

Como nuestra variable (la rentabilidad) presenta efectos multiplicativos acumulativos, lo más lógico será emplear la media geométrica:

$$G = \sqrt[5]{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12} = 7{,}5906 \approx 7{,}6\,\%$$

Así, obtenemos que 7.6 % es la rentabilidad neta media en esos 5 años.

Ejercicio 8. Un profesor califica a sus alumnos según el criterio siguiente: 40 % de suspensos, 30 % de aprobados, 15 % notables, 10 % sobresalientes y 5 % matrículas. Las notas obtenidas son las siguientes:

$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$	$(5,6]$	$(6,7]$	$(7,8]$	$(8,9]$	$(9,10]$
34	74	56	81	94	70	41	28	16	4

Calcular las notas máximas para obtener cada una de las calificaciones.

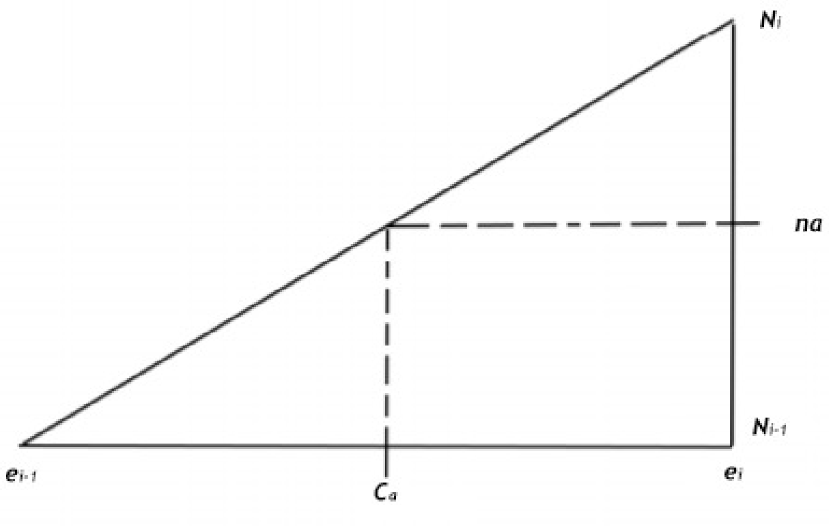
Sabemos que el orden es el siguiente:

Suspensos	Aprobados	Notables	Sobresalientes	Matrículas
40 %	30 %	15 %	10 %	5 %

Para saber la nota máxima de los suspensos hemos de hallar el cuantil 0.40, es decir la nota por la que está debajo el 40 % de la población: $\frac{4n}{10} = 199{,}2$

	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$	$(5,6]$	$(6,7]$	$(7,8]$	$(8,9]$	$(9,10]$
	34	74	56	81	94	70	41	28	16	4
N_i	34	108	164	245	339	409	450	478	494	498

Así, observamos que el cuantil buscado está en el intervalo (3,4].



$$\frac{a_i}{c_\alpha - e_{i-1}} = \frac{n_i}{n\alpha - N_{i-1}} \longleftrightarrow C_\alpha = e_{i-1} + \frac{n\alpha - N_{i-1}}{n_i}\alpha_i$$

Esta fórmula será usada de aquí en adelante en los ejercicios.

$$C_{0,40} = 4 + \frac{0{,}4 \cdot 498 - 245}{81} \cdot 1 = 3{,}434567 \textit{ Se suspende por debajo de dicha nota.}$$

Para el cálculo de la nota máxima en aprobados, notables, sobresalientes, y matrículas hemos de emplear la fórmula obtenida:

Aprobados $\Rightarrow$ cuantil 0.70 $\Rightarrow n \cdot 0{,}7 = 348{,}6 \Rightarrow$ La nota máxima de los aprobados está en el intervalo (5,6].

$$C_{0,70} = 6 + \frac{348{,}6 - 409}{70} \cdot 1 = 5{,}137142857$$

Notables $\Rightarrow$ Cuantil 0.85 $\Rightarrow n \cdot 0{,}85 = 423{,}3 \Rightarrow$ Buscar en (6,7].

$$C_{0,85} = 7 + \frac{423{,}3 - 450}{41} \cdot 1 = 6{,}34878$$

Sobresalientes $\Rightarrow$ Cuantil 0.95 $\Rightarrow n \cdot 0{,}95 = 473{,}1 \Rightarrow$ Buscar en (7,8].

$$C_{0,95} = 8 + \frac{473{,}1 - 478}{28} \cdot 1 = 7{,}825$$

Matrículas $\Rightarrow$ Es obvio, pues el cuantil 1 es $C_1 = 10$

Ejercicio 9. Se ha medido la altura de 110 jóvenes, obteniendo:

Altura	(1.55, 1.60]	(1.60, 1.70]	(1.70, 1.80]	(1.80, 1.90]	(1.90, 2.00]
Nº jóvenes	18	31	24	20	17
N_i	18	49	73	93	110
a_i	0.05	0.1	0.1	0.1	0.1

a) Si se considera bajos al 3 % de los individuos de menor altura, ¿cuál es la altura máxima que pueden alcanzar?

Para poder saberlo, es necesario calcular el cuantil 0,03, que indica la altura por debajo de la cual se halla el 3 % de la población estudiada. Deduzcamos la fórmula para los cuantiles:
1 $n\alpha = 3{,}3 \leftarrow$ Como $N_1 = 18$ es inmediatamente mayor que $n\alpha$, $C_{0,03}$ ha de hallarse en el intervalo $(155, 160]$.
2 Si tomamos el tramo de la curva de distribución de I_i
Empleamos la formula para $C_{0,03}$

$$C_{0,03} = 1{,}55 + \frac{3{,}3 - 0}{18} 00{,}05 = 1{,}5591\widehat{6} \approx 1{,}56m$$

b) Si se condiera altos al 18 % de los individuos de mayor altura, ¿cuál es su altura mínima?

Debemos calcular la altura por debajo de la cual queda el 82 % de la población. Repitiendo el proceso anterior empleando la fórmula:
1 $n\alpha = 90{,}2 \implies N_y = 93$ es inmediatamente mayor que $n\alpha$, $C_{0,82}$ ha de hallarse I_y:

$$C_{0,82} = 1{,}80 + \frac{90{,}2 - 73}{20} 0{,}1 = 1{,}886$$

c) ¿Qué altura es superada sólo por 1/4 de los jóvenes?

Como el $\frac{3}{4}$ de los jóvenes no superan esa altura y $\frac{3}{4} = 0{,}75$, hemos de calcular $C_{0,75}$:
1 $n\alpha = 82{,}5 \implies C_{0,75}$ ha de hallarse en I_4:

$$C_{0,75} = 1{,}80 + \frac{82{,}2 - 73}{20} 0{,}1 = 1{,}8475$$

d) Calcular el número de jóvenes cuya altura es superior a 1.75.

En este caso sería hacer el cuartil inverso, es decir, deducir qué cuantil cumple que $C_\alpha = 1{,}75$ y finalmente calcular $n\alpha$. Deduciendo que está en I_3, empleemos la fórmula:

$$1{,}75 = 1{,}75 + \frac{110\alpha - 49}{24} 0{,}1 \longleftrightarrow \alpha = 0{,}5\widehat{54}$$

$n\alpha = 110 \cdot 0{,}5\widehat{54} = 61$ jóvenes no superan dicha altura y, por tanto, 49 la superan.

e) Calcular la altura máxima de los 11 jóvenes más bajos.

$\frac{11}{110} = 0{,}1 \implies$ Se nos pide el cuartil 0,1, $C_{0,1}$, que se halla en I_1:
$C_{0,1} = 1{,}55 + \frac{11-0}{18} 0{,}05 = 1{,}580\widehat{5} \approx 1{,}58$ m.

f) Calcular la altura mínima de los 11 jóvenes más altos.

$1 - \frac{11}{100} = 0{,}9 \implies$ Se nos pide la altura por debajo de la cual se encuentra el 90 % de la población, es decir, $C_{0,9}$, que se halla en I_5:

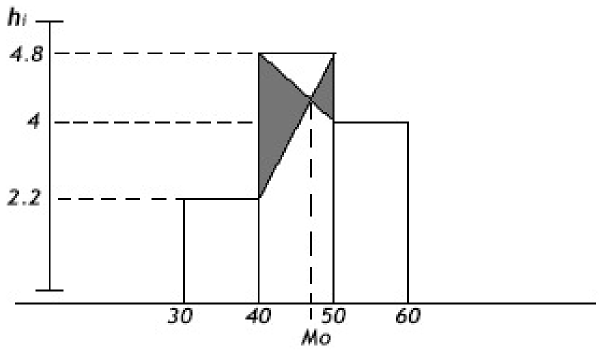
$$C_{0,9} = 1{,}90 + \frac{99 - 93}{17} 0{,}1 = 1{,}935394\ m$$

Ejercicio 10. Realizando una prueba para el estudio del cáncer a 150 personas se obtuvo la siguiente tabla según la edad de los enfermos:

Edad	(10, 30]	(30, 40]	(40, 50]	(50, 60]	(60, 90]
N$^{\underline{o}}$ enfermos	15	22	48	40	25

Edad	n_i	a_i	h_i	N_i	C_i	$n_i c_i$	$n_i c_i^2$	$n_i c_i^3$	$n_i c_i^4$
(10,30]	15	20	0.75	15	20	300	6000	120000	2400000
(30,40]	22	10	2.2	37	35	770	26950	943250	33013750
(40,50]	48	10	4.8	85	45	2160	97200	4374000	19683000
(50,60]	40	10	4	125	55	2200	121000	6655000	366025000
(60,90]	25	30	$0{,}8\widehat{3}$	150	75	1875	140625	10546875	791015625
	150					7305	391775	22639125	1389284375

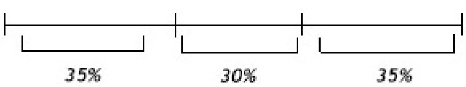
a) Calcular la edad más común de los individuos estudiados.
Se nos está pidiendo la moda, la cual la encontraremos en el intervalo modal, es decir, el intervalo con mayor densidad de frecuencia $h_i = \frac{n_i}{a_i}$. En este caso, $h_3 > h_j \ \forall j \neq 3$ con $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Ahora llevamos a cabo la semejanza de triángulos vista en clase sobre un trozo del histograma (el intervalo modal y sus contiguos):



Con los triángulos semejantes, usaremos la razón base entre altura (el dibujo no está a escala):

$$\frac{4{,}8 - 2{,}2}{Mo - 40} = \frac{4{,}8 - 4}{50 - Mo} \longleftrightarrow Mo = 47{,}647 \text{ años}$$

b) Calcular la edad mínima y máxima del 30 % central de los individuos.



Lo que se nos pide es equivalente a calcular $C_{0,35}$ y $C_{0,65}$. Emplearemos la fórmula demostrada en el ejercicio 8:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}35 = 52{,}5 \implies C_{0,35}$ estará en I_3 pues N_3 es inmediatamente mayor que n_α

$$C_{0,35} = 40 + \frac{52{,}5 - 37}{48} \cdot 10 = 43{,}22291\widehat{6} \text{ años (edad mínima)}$$

Y para el cuantil $C_{0,65}$:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}65 = 97{,}5 \implies$ Estará en I_4 ya que N_4 es inmediatamente superior a $n\alpha$

$$C_{0,65} = 50 + \frac{97{,}5 - 85}{40} \cdot 10 = 53{,}125 \text{ años (edad máxima)}$$

c) Calcular el recorrido intercuartílico y la desviación típica.
$R_I = Q_3 - Q_1 \implies$ Necesitamos hallar los cuartiles 1 y 3 que equivalen a los cuantiles 0,25 0,75. Repetimos el proceso del anterior apartado:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}25 = 37{,}5 \implies C_{0,25}$ estará en $I_3 = (40, 50]$ pues N_3 es inmediatamente mayor que 37,5

$$C_{0,25} = 40 + \frac{37{,}5 - 37}{48} \cdot 10 = 40{,}1041\widehat{6} \text{ años}$$

1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}75 = 112{,}5 \implies C_{0,75}$ estará en $I_4 = (50, 60]$ pues N_4 es inmediatamente mayor que 112,5

$$C_{0,75} = 50 + \frac{112{,}5 - 85}{40} \cdot 10 = 56{,}875 \text{ años}$$

Por lo tanto, $R_I = Q_3 - Q_1 = 56{,}875 - 40{,}1041\widehat{6} = 16{,}7708\widehat{3}$ años
Esto significa que todos los datos encontrados en el 50 % central de la distribución se diferencian como máximo en $16{,}7708\widehat{3}$ años.
En cuanto a la desviación típica, debemos hallar antes la varianza:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci^2 - (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i ci)^2 = \frac{391775}{150} - (\frac{7305}{150})^2 = 240{,}1434 \text{ años al cuadrado}$$

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2} = 15{,}49656$ años $\implies$ Esto significa que la mayoría de los datos de nuestra distribución se hallan en el intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$.

d) Calcular e interpretar los valores de los coeficientes de asimetría y curtosis.
De asimetría son 3:
- De Fisher: $\rightarrow \gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$
- De Pearson:

$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x}$$

$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x}$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = \frac{1}{n}\sum n_i ci^3 - 3\frac{1}{n}\sum n_i ci^2 \cdot \bar{x} + 2 \cdot \bar{x}^3 =$$

$$= \frac{22639125}{150} - \frac{3}{150} \cdot 391775 \cdot \frac{7305}{150} + 2 \cdot (\frac{7305}{150})^3 = 341{,}256$$

$$\gamma_1(x) = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{341{,}256}{15{,}49656^3} = 0{,}0917 > 0 \implies \text{Es algo asimétrica por la derecha}$$

$$A_p = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma_x} = \frac{\frac{7305}{150} - 47{,}647}{15{,}49656} = 0{,}06795$$

Para A_{p^*} nos falta Me:
1 $n\alpha = 150 \cdot 0{,}5 = 75 \implies$ Me estará en I_3

$$Me = 40 + \frac{75 - 37}{48} \cdot 10 = 47{,}91\widehat{6}$$

$$A_{p^*} = \frac{3(\bar{x} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3 \cdot (\frac{7305}{150} - 47{,}91\widehat{6})}{15{,}49656} = 0{,}151647$$

Ahora pasamos a los coeficientes de Curtosis:
- Fisher: $\gamma_{2(x)} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ Hallemos $\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_1^2m_2 - 3m_1^4$:

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum n_i c_i^4 - 4\frac{1}{n}\sum n_i c_i^3 \cdot \bar{x} + 6\bar{x}^2 \cdot \frac{1}{n}\sum n_i c_i^2 - 3\bar{x}^4 =$$

$$= \frac{1389284375}{150} - 4 \cdot \frac{1}{150} \cdot (22639125) \cdot \frac{7305}{150} + 6 \cdot (\frac{7305}{150})^2 \cdot \frac{1}{150} \cdot 391775 - 3 \cdot (\frac{7305}{150})^4 = 153232{,}46$$

$$\gamma_2(x) = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{153232{,}46}{15{,}49656^2} - 3 = -0{,}3429 < 0$$

La distribución es platicúrtica, es decir, presenta una menor concentración central de frecuencias que una normal de su misma media y desviación típica (está más aplanada que la curva normal y los datos están más dispersos).
De Kelley: $\frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0{,}263$, como ya tenemos Q_1 y Q_3, debemos calcular $D_1 = C_{0,1}$ y $D_9 = C_{0,9}$:
1 $n\alpha = 15 \implies C_{0,1}$ coincide justamente con el extremo superior de $I_1 = (10, 30]$, es decir, 30 años.
1 $n\alpha = 135 \implies C_{0,9}$ ha de hallarse en $I_5 = (60, 90]$ ya que N_5 es inmediatamente mayor que 135. Aplicamos la fórmula demostrada:

$$C_{0,9} = 60 + \frac{135 - 125}{25} \cdot 30 = 72 \text{ años}$$

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_3 - Q_1}{D_9 - D_1} - 0{,}263 = \frac{1}{2} \cdot \frac{56{,}875 - 40{,}4041\widehat{6}}{72 - 30} - 0{,}263 = -0{,}06335 < 0$$

Como $K < 0$, la distribución es platicúrtica, por lo que llegamos a la misma conclusión que con el coeficiente de curtosis de Fisher.