

# Anderson 局部化实验报告

flag

2020 年 1 月 14 日

目前的代码可以求解这些问题：

特征值问题（导数边界条件）

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + KV(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + hu(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2)$$

源项问题（导数边界条件）

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + KV(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 1 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = g \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4)$$

特征值问题（Dirichlet 边界条件）

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + KV(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (5)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (6)$$

源项问题（Dirichlet 边界条件）

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + KV(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 1 \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (7)$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (8)$$

一维的情况时，区域  $\Omega = [0, 1]$  被均匀分成  $M$  个区间。二维时， $V(x)$  区域  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  被均匀分成  $M_1 \times M_2$  个方格区域。在每个方格上  $V(\mathbf{x})$  是分片常数，而且大于 0。

## 1 comment1

在相同的位势  $V$  的选取下，比较 Robin 边界条件的解与 Dirichlet 边界条件的解，找到一个例子说明两者的 landscape 和 eigenmodes 都相差很大。这样可以说明我们研究的重要性。

仿照 PNAS 文章里的参数，取  $K$  为 8000， $V$  取  $[0,1]$  上均匀分布的随机数，在不同边界条件下得到结果如图1和图2。

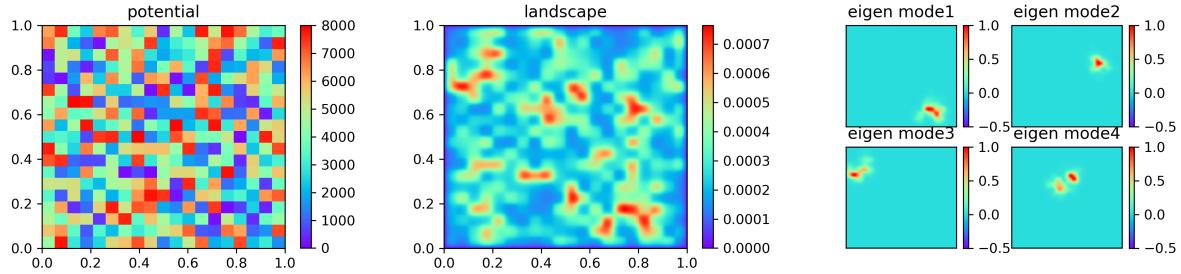


图 1:  $K=8000$ , Uniform distribution, Dirichlet boundary

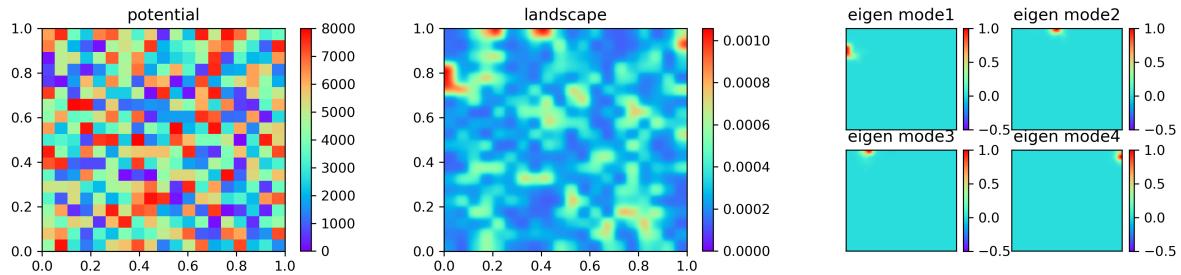


图 2:  $K=8000$ , Uniform distribution, Neumann boundary

可以看出，Dirichlet 边界条件和 Neumann 边界条件下的解和特征函数都很不相同。Dirichlet 边界条件的峰一定会出现在区域内部，而 Neumann 边界条件下的峰会出现在区域边界。

## 2 comment2

让  $V$  在每个方格内取  $[0,1]$  上均匀分布的随机数。比较该结果与  $V$  在每个方格内取  $\{0,1\}$  值 Bernoulli 分布的异同。

取  $K$  为 8000， $V$  取均匀分布的随机数。以及  $V$  取 Bernoulli 分布  $p=0.5$ （保证均值相同）的随机数，得到图3和图4

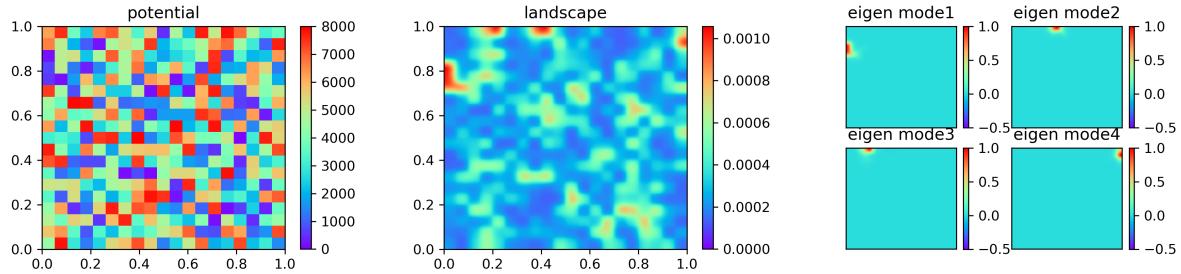


图 3:  $K=8000$ , Uniform distribution, Neumann boundary

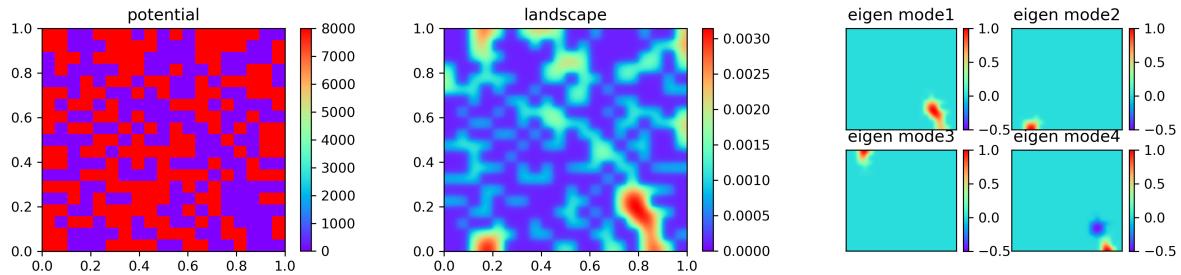


图 4:  $K=8000$ ,  $p=0.5$ , Bernoulli distribution, Neumann boundary

可以看出，均匀分布让特征函数的峰局部化更加明显。

### 3 comment3

你上次提到的想法应该继续挖掘：找到一个阈值，将 landscape 大于这个阈值的子区域找出来，研究该子区域的分块情况。例如，这个阈值可以取作  $1/[3(\lambda + \alpha + \beta)]$ 。

把  $\{x : (\lambda + \alpha + \beta)w(x) < 1\}$  的区域涂黑，其它区域涂白。并把它和 eigenmode 对比。取不同的势场。得到图5和图6。

从图中来看，eigenmode 的峰值位置确实被限制在了涂白的地方。但是黑白这样的图有点难看，不如 valley line 的图漂亮。但是从另一种角度看，valley line 只是告诉我们特征函数峰的划分，而黑白的图不仅可以看出特征函数在哪有峰，还可以看出特征函数在哪一定没有峰。

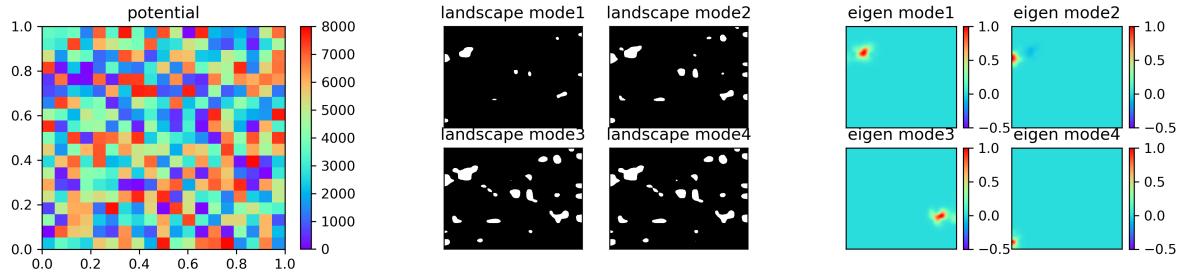


图 5:  $K=8000$ , Uniform distribution, Neumann boundary

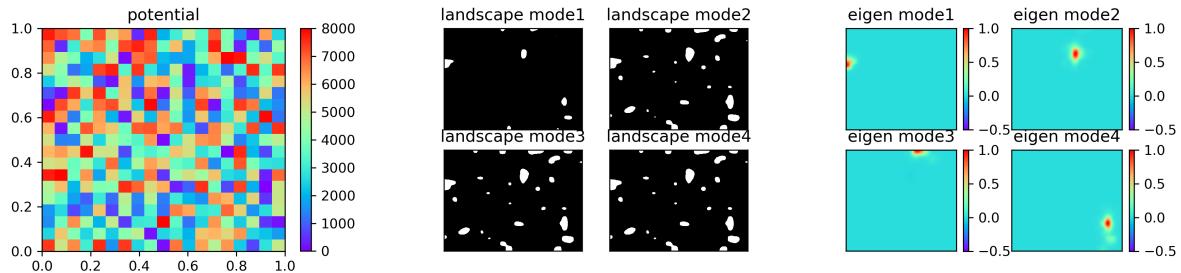


图 6:  $K=8000$ , Uniform distribution, Neumann boundary

#### 4 comment4

在  $V$  取 0,1 值 Bernoulli 分布时, 二维情形取 0 的概率  $p$  有临界值 0.59。 $p$  大于这个临界值时, 子区域应该是连成一片的; 小于这个临界值时, 子区域应该分成很多小块。尝试验证这个结果。

在临界值附近选取  $p$  的值, 画出随机的势场, 得到图7和图8。

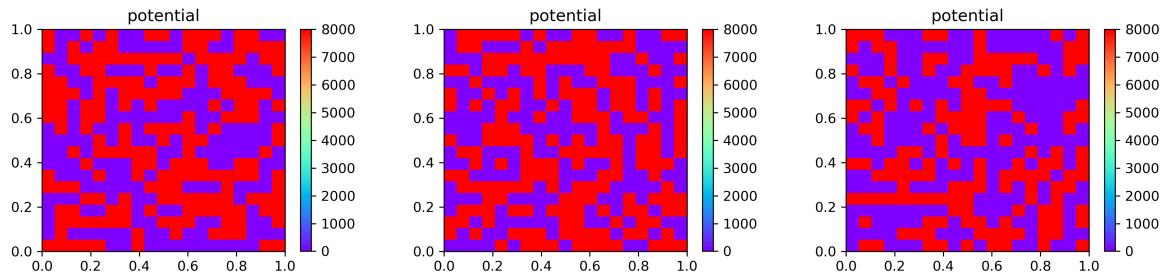


图 7:  $K=8000$ ,  $p=0.5$ , Bernoulli distribution

两张图用的随机数种子是相同的, 所以大致看上去没什么区别。仔细观察可以发现, 他们的连通程度确实不一样。

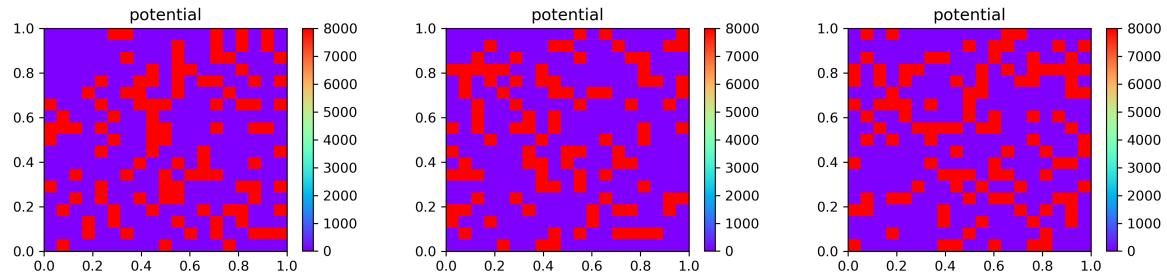


图 8:  $K=8000, p=0.7$ , Bernoulli distribution

## 5 comment5

尝试画出 landscape 的 valley line。并研究 valley line 分出的块和 Comment 3 中分出的块的关系。

valley line 的程序正在写，过几天就可以完成。

## 6 comment6

调整  $p$  与  $K$  的取值，使得 Comment 3 与 Comment 5 可以实现更好的分块。

改变不同的  $p$ ，画出 comment 3 中的图，得到图9，图10和图11。

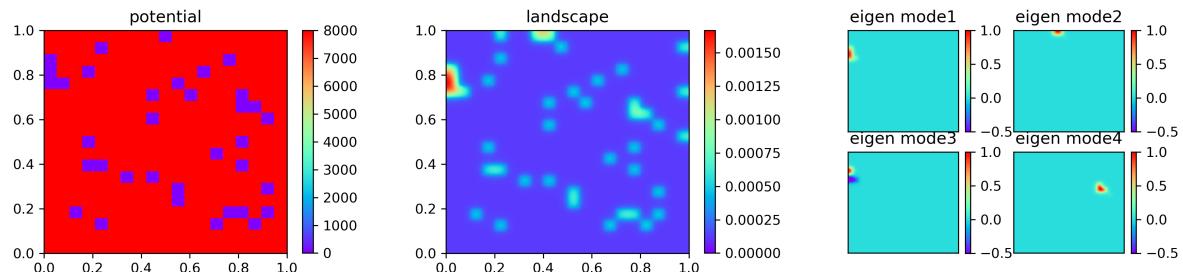


图 9:  $K=8000, p=0.1$ , Bernoulli distribution, Neumann boundary

根据试验的结果， $p$  越小， $K$  越大，局部化越明显。

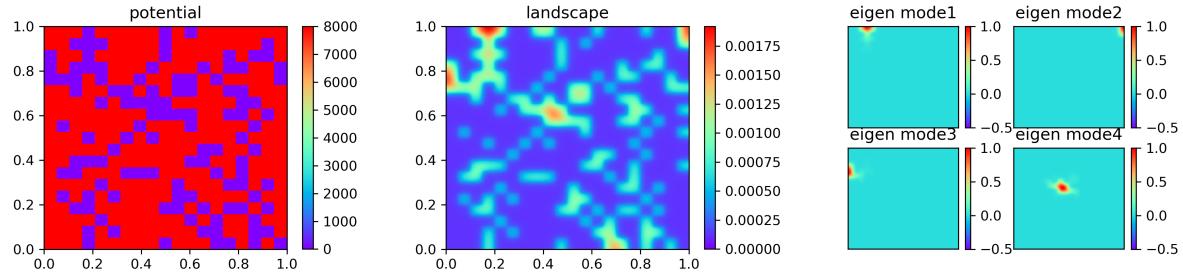


图 10:  $K=8000, p=0.3$ , Bernoulli distribution, Neumann boundary

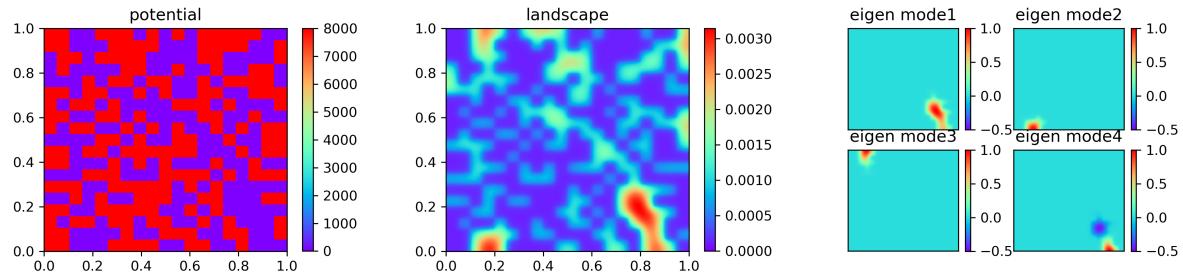


图 11:  $K=8000, p=0.5$ , Bernoulli distribution, Neumann boundary

## 7 comment 7

在  $V$  取  $\{0,1\}$  值的 Bernoulli 分布时, 让  $K$  趋于无穷, 比较  $K$  很大时候 landscape 的分块与  $\{x: V(x)=0\}$  的连通分支的关系。

不断增大  $K$ , 在同一组随机数下求解问题。得到图12, 图13和图14。

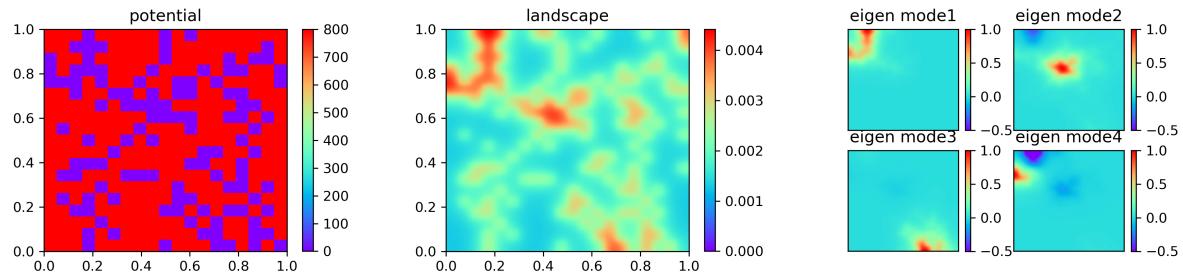


图 12:  $K=800, p=0.3$ , Bernoulli distribution

可以看出,  $K$  越大时, landscape 的局部化现象会更加明显, 特征函数的局部化也会更加明显。在  $K$  很大的时候, landscape 会呈现出和  $K$  类似的形状, 在  $V(x)$  间断的地方, landscape 就会变得陡峭。

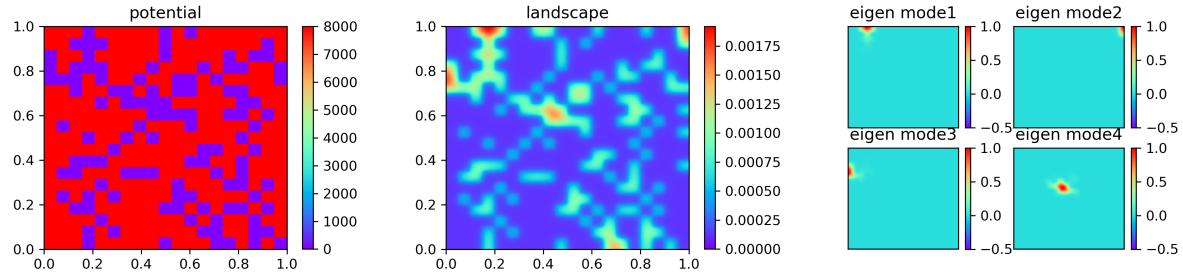


图 13:  $K=8000$ ,  $p=0.3$ , Bernoulli distribution, Neumann boundary

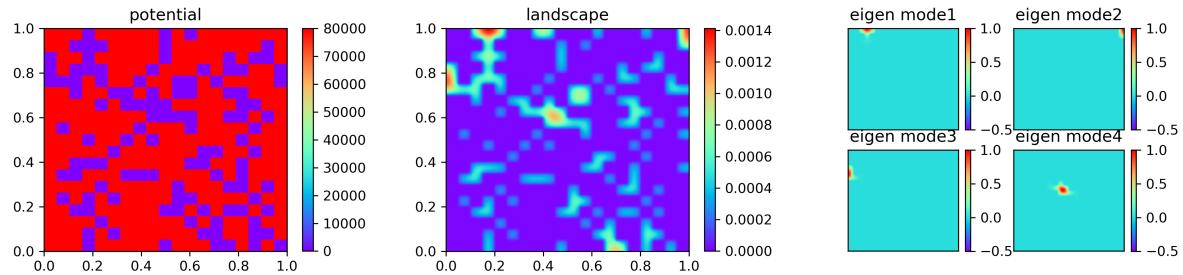


图 14:  $K=80000$ ,  $p=0.3$ , Bernoulli distribution

## 8 comment8

在  $V$  取  $[0,1]$  上均匀分布的随机数时, 验证当  $K$  趋于无穷时, eigenmode 集中在  $V$  的最小值附近。

不断增大  $K$ , 在同一组随机数下求解问题。得到图15, 图16和图17。

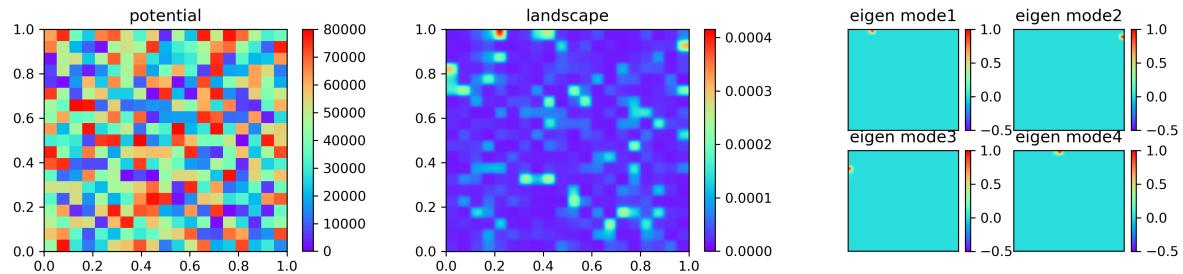


图 15:  $K=80000$ , Uniform distribution

均匀分布下, 特征函数随  $K$  增大而局部化的现象比 0-1 分布时更加明显。 $w$  逐渐呈现出和  $V$  相反的分布, eigenmode 也逐渐聚拢到  $V$  的最小值处。

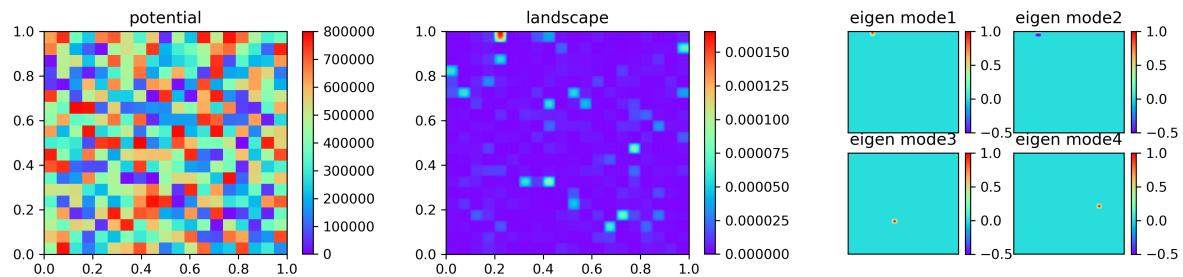


图 16:  $K=800000$ , Uniform distribution

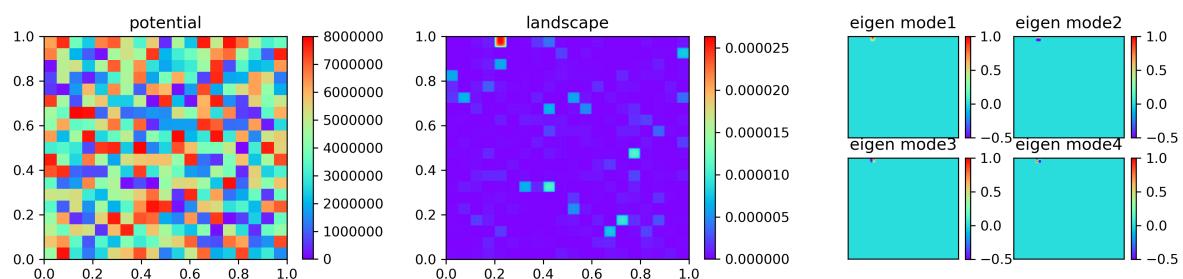


图 17:  $K=8000000$ , Uniform distribution