# 谱元法笔记

flag

2019 年 12 月 30 日

## 1 问题和离散

求解区域 $\Omega = [0,1]^d$，维数 $d = 1,2,3$。

考虑源项问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + au(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{2}$$

和特征值问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + au(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{4}$$

一维的情况时，区域 $\Omega = [0,1]$ 被均匀分成 $M$ 个方格 $\Omega^{(m)}(m = 0,1,\cdots,M-1)$，二维时，$V(x)$ 区域 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ 被均匀分成 $M_1 \times M_2$ 个方格 $\Omega^{(m_1,m_2)}(m_i = 0,1,\cdots,M_i-1)$。在每个方格上 $V(\mathbf{x})$ 是分片常数，而且大于 0。

源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega) \quad (\nabla u, \nabla v) + (Vu, v) + (au, v)_{\partial\Omega} = (f, v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{5}$$

特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda, u \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega) \quad (\nabla u, \nabla v) + (Vu, v) + (au, v)_{\partial\Omega} = \lambda(u, v) \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{6}$$

其中

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx \qquad (u,v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\ dx$$

区域被分成的方格就是天然的剖分。选取 $V_N$ 是分片 $N$ 次多项式，而且整体连续的函数空间。

源项问题离散形式为

$$\text{find } u_N \in V_N \quad (\nabla u_N, \nabla v_N) + (Vu_N, v_N) + (au_N, v_N)_{\partial\Omega} = (f, v_N) \qquad \forall v_N \in V_N \tag{7}$$

特征值问题离散形式为

$$\text{find } \lambda_N, u_N \in \mathbb{C}\times V_N \quad (\nabla u_N, \nabla v_N)+(Vu_N, v_N)+(au_N, v_N)_{\partial\Omega} = \lambda_N(u_N, v_N) \qquad \forall v_N \in V_N \tag{8}$$

离散问题可以写成矩阵形式

$$AU = F \qquad \text{and} \qquad AU = \lambda Bu \tag{9}$$

其中矩阵元素为

$$A_{i,j} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + (V\phi_i, \phi_j) + (a\phi_i, \phi_j)_{\partial\Omega}$$

$$B_{i,j} = (\phi_i, \phi_j) \qquad F_i = (f, \phi_i)$$

$\phi_i(x)$ 是有限维空间 $V_N$ 的一组基，$U_i$ 是数值解 $u_N$ 在这组基下的系数。

内积中的积分可以表示为

$$(u, v) = \sum_{m=0}^{M} \int_{\Omega_m} u(x)v(x)\ dx$$

边界上的内积也类似。所以只需要求出单元上的矩阵 $A^{(m)}, B^{(m)}, F^{(m)}$ 然后按照一定规则拼合起来，就可以得到全局的矩阵。

# 2 单元基函数

## 2.1 一维的情况

一维的参考单元 $\hat{\Omega} = [-1, 1]$，选取参考单元上的一组基函数为

$$\phi_k(x) = \begin{cases} (1-x)/2 = (L_0(x) - L_1(x))/2 & k = 0 \\ (L_{k+1}(x) - L_{k-1}(x))/\sqrt{4k+2} & 1 \le k \le N-1 \\ (1+x)/2 = (L_0(x) + L_1(x))/2 & k = N \end{cases} \tag{10}$$

共 $N+1$ 个。其中 $L(x)$ 是勒让德多项式。

近似解就是由这组基张成的函数

$$u_N(x) = U_0\phi_0(x) + U_1\phi_1(x) + \cdots + U_N\phi_N(x)$$

此时 $\phi_0$ 的系数就是函数在左端点的函数值，$\phi_N$ 的系数就是函数在右端点的函数值。在很多块区域拼起来时，这两个就是边界上的自由度。

根据公式 $(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x)$ 得到

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k=0 \\ \frac{\sqrt{4k+2}}{2}L_k(x) & 1 \le k \le N-1 \\ \frac{1}{2} & k=N \end{cases} \tag{11}$$

所以在参考单元上，$(\phi'_j(x), \phi'_k(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{2} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

共 $3N+5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。

其它满足

$$(\phi'_k, \phi'_k) = 1 \quad \text{其中} \quad (k = 1, 2, \cdots, N-1)$$

同样得到，在参考单元上，$(\phi_j(x), \phi_k(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & & & & & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{21} & 0 & \ddots & & & -\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & 0 & \ddots & \ddots & -\frac{1}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}} & 0 & \frac{1}{(2k+3)(2k-1)} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{10}} & & & & & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{13}$$

共 $3N+5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。
其它满足

$$(\phi_k,\phi_k)=\frac{2}{(2k+3)(2k-1)}\quad \text{其中}\quad (k=1,2,\cdots,N-1)$$

和

$$(\phi_k,\phi_{k+2})=(\phi_{k+2},\phi_k)=-\frac{1}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}}\quad \text{其中}\quad (k=1,2,\cdots,N-3)$$

一维的情况下，边界上的内积就是 $(\phi_i,\phi_j)_{\partial\hat{\Omega}}=\phi_i(0)\phi_j(0)+\phi_i(1)\phi_j(1)$。对应只有两个矩阵元素不为 0，矩阵为

$$\hat{H}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

一维的情况下，对 $f(x)=1$ 的情况，由于高次的勒让德多项式都和零次多项式正交，所以

$$(1,\phi_j)=\begin{cases} 1 & j=0 \text{ or } j=N \\ 0 & \text{ortherwise} \end{cases} \tag{15}$$

对应向量为

$$\hat{F}=\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

此时，对于数值解

$$u_N(x)=\sum_{n=0}^{N}U_n\phi_n(x)$$

对应的系数向量 $U=(U_0,U_1,\cdots,U_N)$，双线性型表示为

$$(\nabla u_N,\nabla v_N)=U^T\hat{A}V\qquad (u_N,v_N)=U^T\hat{B}V$$

$$(u_N,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=U^T\hat{H}V\qquad (1,v_N)=\hat{F}^TV$$

如果不对区域分割，直接在参考单元上求解，就相当于直接使用谱方法求解。下面我们考虑如何把空间分割，并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 $h_m$ 的一般单元 $\Omega_m=[x_m,x_{m+1}]$，设 $\chi_m$ 是参考单元到当前单元的仿射变换，就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_k^{(m)}(x)=\phi_k(\chi_m^{-1}(x))\}$

因为一维的变换就是区间伸缩和平移，所以

$$\chi_m(x) = h_m/2x + b_m \qquad \chi'_m(x) = h_m/2$$

当前单元上的内积为

$$(\phi_i^{(m)}, \phi_j^{(m)}) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(\chi_m^{-1}(x))\phi_j(\chi_m^{-1}(x))\ dx$$

积分变换的过程省略，在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)} = \frac{2}{h_m}\hat{A} \qquad B^{(m)} = \frac{h_m}{2}\hat{B} \qquad F^{(m)} = \frac{h_m}{2}\hat{F}$$

边界不用管，拼合之后的边界就变了。

下面要把小区间上的自由度对应到整体的自由度，在这个过程中要保证整体的函数是连续的，就是 $\Omega_m$ 上的自由度 $U_N^{(m)}$ 和 $\Omega_{m+1}$ 上的自由度 $U_0^{(m+1)}$ 必须是同一个。这样，局部编号 $U_n^{(m)}$ 的自由度对应总体自由度为 $mN+n$（所有的编号都是从 0 开始的）。

对于边界，只要考虑 $\Omega_0$ 上的 $U_0^{(0)}$ 和 $\Omega_{M-1}$ 上的自由度 $U_N^{(M-1)}$，在最后的矩阵里把它们分别加上 a 就可以了。就是相当于加上

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(MN+1)\times(MN+1)} \tag{17}$$

## 2.2 二维的情况

二维的参考单元是 $\hat{\Omega} = [-1,1]\times[-1,1]$，二维的基函数是张量形式的

$$u_N(x,y) = \sum_{n_x,n_y=0}^{N_x,N_y} U_{n_x,n_y}\phi_{n_x}(x)\phi_{n_y}(y)$$

在参考单元上 $(\nabla\phi_i(x)\phi_j(y), \nabla\phi_k(x)\phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned}
&\int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi'_i(x)\phi_j(y)\phi'_k(x)\phi_l(y)\ dxdy + \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi_i(x)\phi'_j(y)\phi_k(x)\phi'_l(y)\ dxdy \\
=&\int_{-1}^{1} \phi'_i(x)\phi'_k(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi_j(y)\phi_l(y)\ dy + \int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_k(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi'_j(y)\phi'_l(y)\ dy \\
=&\hat{A}_{i,k}\hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k}\hat{A}_{j,l}
\end{aligned}$$

在参考单元上 $(\phi_i(x)\phi_j(y),\phi_k(x)\phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned}&\int_{[-1,1]\times[-1,1]}\phi_i(x)\phi_j(y)\phi_k(x)\phi_l(y)\ dxdy\\=&\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_k(x)\ dx\int_{-1}^{1}\phi_j(y)\phi_l(y)\ dy\\=&\hat{B}_{i,k}\hat{B}_{j,l}\end{aligned}$$

在参考单元上 $(\phi_i(x)\phi_j(y),\phi_k(x)\phi_l(y))_{\partial\hat{\Omega}}$ 就是

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\phi_i(1)\phi_j(y)\phi_k(1)\phi_l(y)\ dy+\int_{-1}^{1}\phi_i(-1)\phi_j(y)\phi_k(-1)\phi_l(y)\ dy\\+&\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_j(1)\phi_k(x)\phi_l(1)\ dx+\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_j(-1)\phi_k(x)\phi_l(-1)\ dx\\=&(\phi_j(-1)\phi_l(-1)+\phi_j(1)\phi_l(1))\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\phi_k(x)\ dx\\+&(\phi_i(-1)\phi_k(-1)+\phi_i(1)\phi_k(1))\int_{-1}^{1}\phi_j(y)\phi_l(y)\ dy\\=&\hat{H}_{i,k}\hat{B}_{j,l}+\hat{B}_{i,k}\hat{H}_{j,l}\end{aligned}$$

在参考单元上 $(1,\phi_i(x)\phi_j(y))$ 就是

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]}\phi_i(x)\phi_j(y)\ dxdy=\int_{-1}^{1}\phi_i(x)\ dx\int_{-1}^{1}\phi_j(y)\ dy=\hat{F}_i\hat{F}_j$$

此时，对于

$$u_N(x,y)=\sum_{i,j=0}^{N_x,N_y}U_{i,j}\phi_i(x)\phi_j(y)$$

双线性型表示为

$$(\nabla u_N,\nabla v_N)=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}(\hat{A}_{i,k}\hat{B}_{j,l}+\hat{B}_{i,k}\hat{A}_{j,l})V_{k,l}$$

$$(u_N,v_N)=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}\hat{B}_{i,k}\hat{B}_{j,l}V_{k,l}$$

$$(u_N,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}(\hat{H}_{i,k}\hat{B}_{j,l}+\hat{B}_{i,k}\hat{H}_{j,l})V_{k,l}$$

$$(1,v_N)=\sum_{i,j}\hat{F}_iV_{i,j}\hat{F}_j$$

对应的系数向量拉直成一维的

$$U=(U_{0,0},U_{0,1},\cdots,U_{0,N},U_{1,0},U_{1,1},\cdots,U_{N,N})$$

此时 $U_{i,j}$ 对应的一维下标是 $i(N+1)+j$。双线性型表示为

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = U^T(\hat{A}\otimes\hat{B}+\hat{B}\otimes\hat{A})V \qquad (u_N, v_N) = U^T(\hat{B}\otimes\hat{B})V$$

$$(u_N, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} = U^T(\hat{B}\otimes\hat{H}+\hat{H}\otimes\hat{B})V \qquad (1, v_N) = (\hat{F}\otimes\hat{F})^T V$$

下面我们考虑如何把空间分割，并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 $h_{x,m_x}\times h_{y,m_y}$ 的一般单元 $\Omega_{m_x,m_y}=[x_{m_x},x_{m_x+1}]\times[y_{m_y},y_{m_y+1}]$，设 $\chi$ 是参考单元到当前单元的仿射变换，就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_{n_x}(\chi^{-1}(x,y))\phi_{n_y}(\chi^{-1}(x,y))\}$。

因为只考虑矩形分割，所以二维的仿射变换也可以看成分别在每个维度上伸缩和平移。在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)} = \frac{h_{x,i}h_{y,j}}{4}\hat{A} \qquad B^{(m)} = \frac{4}{h_{x,i}h_{y,j}}\hat{B} \qquad F^{(m)} = \frac{h_m}{2}\hat{F}$$

下面要把小区间上的自由度对应到整体的自由度，在这个过程中要保证整体的函数是连续的，就是 $\Omega_m$ 上的自由度 $U_N^{(m)}$ 和 $\Omega_{m+1}$ 上的自由度 $U_0^{(m+1)}$ 必须是同一个。这样，局部编号 $U_n^{(m)}$ 的自由度对应总体自由度为：

$$\begin{cases} mN & k=0 \\ (m+1)N & k=1 \\ mN+n-1 & 2\le k\le N \end{cases} \tag{18}$$

所有的编号都是从 0 开始的。

## 2.3 三维的情况

三维的情况不仅要考虑如何在面上拼接，还要考虑如何在棱上拼接。这个太复杂，先不考虑。