Anderson 局部化实验报告 3

flag

2020 年 2 月 24 日

1 文献大意

文章搞了一个“有效势”，可以用来估计局部化的特征函数的边界。并且根据这个给出了 weyl 公式来估计特征值的具体值。

1.1 解释指数收敛的现象

特征值问题

$$-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

其中，$\psi(x)$ 是归一化到最大值为 1 的特征函数。

源项问题

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = 1$$

定义 $W = 1/u$ 就是“有效势”。

引入辅助函数 ϕ 满足 $\psi = u\phi$，特征值问题就化为

$$-\Delta(u\phi) + Vu\phi = Eu\phi$$

展开，把 $Vu = 1 + \Delta u$ 代入得到

$$-\frac{1}{u^2}div(u^2\nabla\phi) + W\phi = E\phi$$

这相当于一个势函数为 W 的新型椭圆方程。

如果是不用考虑边界上积分的情况（Dirichlet 边界，Neumann 边界还有周期边界）。两边乘以 $u^2\phi$ 之后积分得到

$$\|u\cdot\nabla(\frac{\psi}{u})\|^2+(W\psi,\psi)=E\|\psi\|^2$$

这说明，如果归一化到 $\|\psi\|^2=1$，那特征函数对应的特征值就可以满足 $E<(W\psi,\psi)$。

这个方程还表明，在 $E<W$ 的地方，W 和 E 之间的差可以定义一个 Agmon 距离 $\rho_E(x_1,x_2)$，它可以控制 ψ 在这些区域处的下降。（不知道这个结论数学上的解释是什么样的）

距离的定义为

$$\rho_E(x_1,x_2)=\min_{\gamma}\int_{\gamma}\sqrt{(W(x)-E)_+}\,ds$$

其中 γ 是 x_1 到 x_2 的所有路径。

结论是

$$|\psi(x)|\leqslant e^{\rho_E(x_0,x)}$$

这个结论在数学上怎么推的我也不知道。

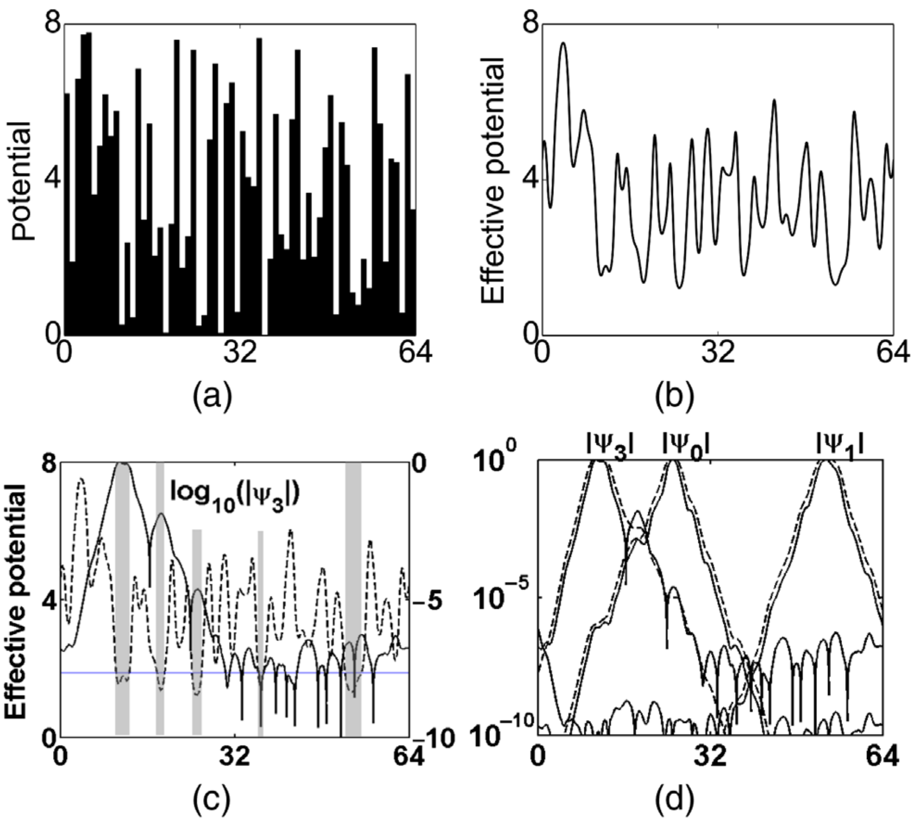

图 1: 文章里的 figure1

通过数值模拟来验证这个结论。图1是文章里的图。其中 (a) 是势函数 V 的图像，(b) 是 $W = 1/u$ 的图像，(c) 中灰色部分是 $W < E$ 的部分，这部分 ψ 没有衰减，在白色的部分，ψ 有指数衰减。(d) 中实线是三个特征函数的图像，虚线是 $e^{\rho E}$ 的图像。可以看出在 ψ 比较大的时候，这个估计还是特别准的。（边界条件为周期边界）

后面模拟了二维的情况，二维的情况就是 valleyline 来划分位置了，$1/u$ 仍然可以控制特征函数的指数下降。图1是文章里的图。其中 (a) 是势函数 V 的图像，(b) 是 $W = 1/u$ 的图像，和 valleyline。(c) 是 $\log_{10}(\psi_0)$ 的图像。(d) 是 $\log_{10}(|\nabla\psi|)$ 的图像。（边界条件好像也是周期边界。）

（PS：这里说画出 valleyline 是用 watershed 算法画出来的，那是啥算法？）

（PPS：这个文章里实验的都是 K 比较小的情况，没提到 K 很大时候的情况，不知道 K 大了会咋样。）

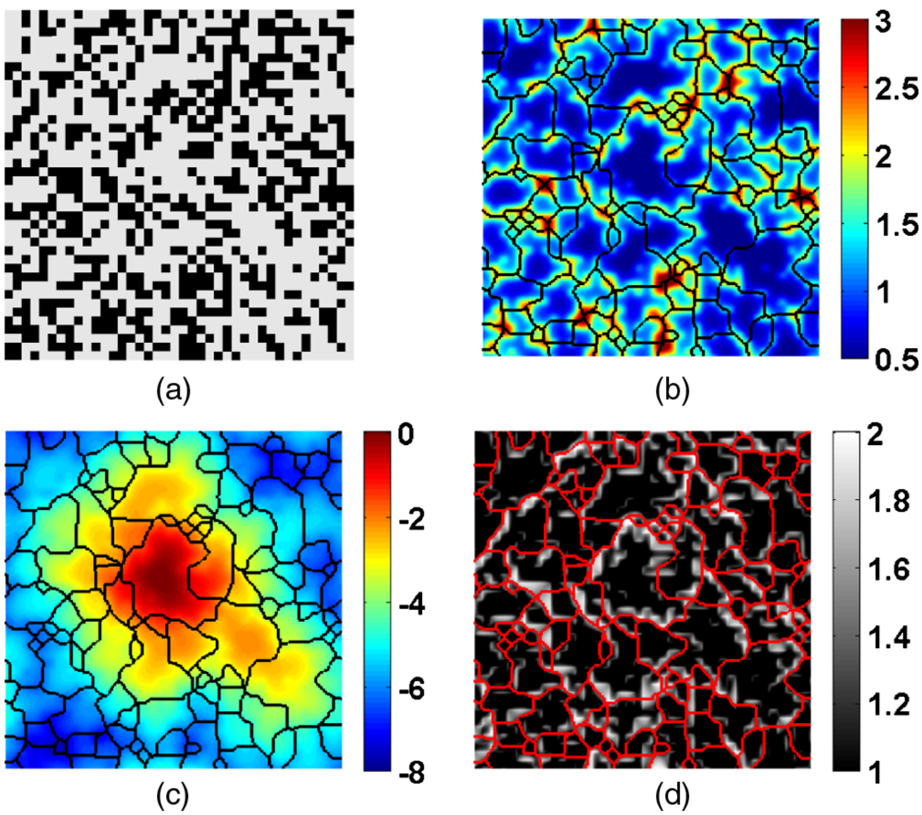

图 2: 文章里的 figure2

最后的结论大概是，valleyline 相当于阻碍量子效应传播的障碍，量子隧穿效应使特征函数在穿过 valleyline 的时候指数衰减。用 W 控制特征函数的方法和之前 PNAS 里的文章差不多。当特征值大于 W 的最大值的时候，量子化就失效了。

1.2 修正的 weyl 定理

“有趣”的事情是，W 可以看成是势函数 V 的光滑化。因为有这个式子

$$V - W = \frac{\Delta u}{u}$$

Weyl 定律告诉我们，某个特征值对应的“态密度”（我猜可能是小于 E 的特征值个数）$N(E)$ 可以用这个公式近似

$$N(E) \approx (2\pi)^{-n} \int_{k^2+V(x)\leq E} dxdk$$

这里的 n 是空间维数。它在 E 很大的时候渐进地准确。

一维的 Weyl 定律就可以写成

$$N_V(E) = \frac{1}{\pi} \int_{E>V(x)} (E - V(x))^{1/2} \, dx$$

文章里说这个东西在 E 比较小的时候不准，就把这里面的 V 换成了 W，得到 $N_W(E)$，经过模拟证明，这样换完之后，预测特征值准确多了。

图3是文章里的图。其中左边是势函数 V 的图像，右边是 $N(E), N_V(E), N_W(E)$ 的图像。可以明显地看到 N_W 更加准确一些。

这个 weyl 定理文章里没有二维的情况，可能是由于之前我们模拟的结果，二维情况下不同边界条件对特征值影响很大。

2 在其他边界条件下的推广

文章中说结论适用于 Dirichelt 边界，Neumann 边界，周期边界。更细致的推导我也不知道，但是就文章中写出来的结果来看，和边界条件有关的地方只有一个，就是计算这个的时候。

$$-\int_\Omega div(u^2 \nabla\phi) \; \phi \; dx = \int_\Omega |u\nabla\phi|^2 \; dx - \int_{\partial\Omega} u^2 (\nabla\phi \cdot \mathbf{n}) \phi \; dx$$

边界上的项可以化为

$$u^2(\nabla\phi \cdot \mathbf{n})\phi = \phi \; (\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} u - \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} \psi)$$

如果特征值问题是 Robin 边界，就是

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} + h\psi = 0$$

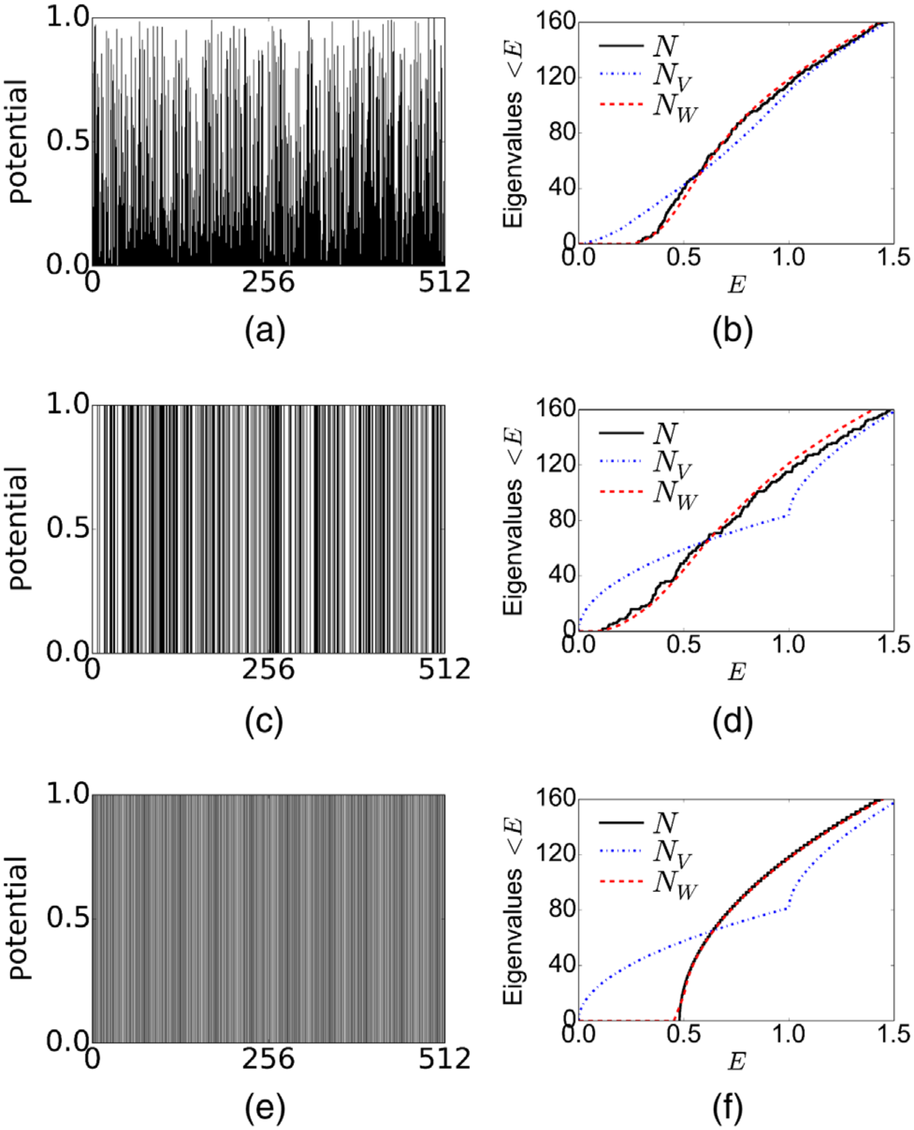

图 3: 文章里的 figure3

这个时候想要消掉边界，landscape 函数 u 也要满足一样的边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + hu = 0$$

这个和之前我们对 landscape 提的边界条件不一样，这里就难以推广了。