

# 1 一维情况

求解区域  $\Omega = [0, 1]$ 。

特征值问题

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = \lambda u(x) \quad x \in \Omega$$

源项问题

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \quad x \in \Omega$$

其中  $a(x), b(x), c(x), f(x)$  是有界, 分片连续的已知函数。 $a(x)$  有大于 0 的下界。

边界可以是: 固定边界

$$u(0) = u_0 \quad \text{and} \quad u(1) = u_1$$

导数边界 ( $h(x) \geq 0$ )

$$-a(0)u'(0) + h(0)u(0) = g(0) \quad \text{and} \quad a(1)u'(1) + h(1)u(0) = g(1)$$

和周期边界

$$u(0) = u(1) \quad \text{and} \quad u'(0) = u'(1)$$

在特征值问题中, 边界条件都应是齐次的。

## 1.1 变分形式

### 1.1.1 固定边界

固定边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv = \lambda \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

固定边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = u_0 \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

积分变量都是  $x$ , 省略。

### 1.1.2 导数边界

导数边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv + \int_{\partial\Omega} huv = \lambda \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

导数边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv + \int_{\partial\Omega} huv = \int_{\Omega} fv + \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

### 1.1.3 周期边界

周期边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H_P^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv = \lambda \int_{\Omega} uv \quad \forall v \in H_P^1(\Omega)$$

周期边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H_P^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} au'v' + \int_{\Omega} bu'v + \int_{\Omega} cuv = \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_P^1(\Omega)$$

## 1.2 单元基函数

一维的参考单元  $\hat{\Omega} = [-1, 1]$ ，选取参考单元上的一组基函数为

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_0(x) - L_1(x)) & k = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{4k-2}}(L_k(x) - L_{k-2}(x)) & 2 \leq k \leq N \\ \frac{1}{2}(L_0(x) + L_1(x)) & k = N + 1 \end{cases}$$

共  $N + 1$  个。其中  $L_k(x)$  是  $k$  次勒让德多项式。

此时  $\varphi_0$  的系数就是函数在左端点的函数值， $\varphi_N$  的系数就是函数在右端点的函数值。在很多块区域拼起来时，这两个就是边界上的自由度。

根据公式  $(2k + 1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x)$  得到

$$\varphi'_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{\sqrt{4k-2}}{2}L_{k-1}(x) & 2 \leq k \leq N \\ \frac{1}{2} & k = N + 1 \end{cases}$$

$x_1, \dots, x_{N+1}$  和  $w_1, \dots, w_{N+1}$  是  $[-1, 1]$  上的高斯积分点和积分权重。积分可以近似为

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 a \varphi'_i \varphi'_j dx &= \sum_{k=1}^{N+1} w_k a(x_k) \varphi'_i(x_k) \varphi'_j(x_k) \\ \int_{-1}^1 b \varphi'_i \varphi_j dx &= \sum_{k=1}^{N+1} w_k b(x_k) \varphi'_i(x_k) \varphi_j(x_k) \\ \int_{-1}^1 c \varphi_i \varphi_j dx &= \sum_{k=1}^{N+1} w_k c(x_k) \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \\ \int_{-1}^1 f \varphi_i dx &= \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(x_k) \varphi_i(x_k) \end{aligned}$$

在实际计算中，如果已经计算出了

$$\begin{aligned} d\Phi &= (\varphi'_j(x_i))_{i,j}^{(N+1) \times (N+1)} \\ \Phi &= (\varphi_j(x_i))_{i,j}^{(N+1) \times (N+1)} \end{aligned}$$

例如

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \quad d\Phi = \begin{bmatrix} \varphi'_1(x_1) & \varphi'_2(x_1) \\ \varphi'_1(x_2) & \varphi'_2(x_2) \end{bmatrix}$$

想要求出

$$\begin{aligned} A^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 a \varphi'_i \varphi'_j dx \right)_{i,j}^{(N+1) \times (N+1)} \\ B^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 b \varphi_i \varphi'_j dx \right)_{i,j}^{(N+1) \times (N+1)} \\ C^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 c \varphi_i \varphi_j dx \right)_{i,j}^{(N+1) \times (N+1)} \\ F^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 f \varphi_i dx \right)_i^{N+1} \end{aligned}$$

就是

$$\begin{aligned} A^{(l)} &= (d\Phi)^T \cdot \text{diag}(a(x_1), \dots, a(x_{N+1})) \cdot \text{diag}(w_1, \dots, w_{N+1}) \cdot (d\Phi) \\ B^{(l)} &= \Phi^T \cdot \text{diag}(b(x_1), \dots, b(x_{N+1})) \cdot \text{diag}(w_1, \dots, w_{N+1}) \cdot d\Phi \\ C^{(l)} &= \Phi^T \cdot \text{diag}(c(x_1), \dots, c(x_{N+1})) \cdot \text{diag}(w_1, \dots, w_{N+1}) \cdot \Phi \\ F^{(l)} &= \Phi^T \cdot (w_1 f(x_1), \dots, w_{N+1} f(x_{N+1}))^T \end{aligned}$$

### 1.3 单元基和全局基

区域上的网格  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{M+1} = 1$ 。选取离散空间  $V_N$  是分片  $N$  次多项式，而且整体连续的函数空间。

设  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots$  是函数空间的一组基，数值解可以表示为

$$u_N(x) = \sum_i U_i \phi_i(x)$$

全局自由度  $U = (U_1, U_2, \dots, U_N)^T$ 。

离散问题可以写成矩阵形式

$$AU = F \quad \text{and} \quad AU = \lambda BU$$

网格把区间分成很多个单元  $\Omega^{(m)} (m = 1, 2, \dots, M)$ 。在每个单元上，基函数是  $\varphi_i$ 。数值解可以表示为

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N+1} U_n^{(m)} \varphi_i(\xi) \quad x \in \Omega^{(m)}$$

局部自由度  $U_i^{(m)}$ 。

由于在单元连接处要连续，可以得到从局部自由度到整体自由度的对应关系为

$$U_{(m-1)N+n} \leftrightarrow U_n^{(m)} \quad n = 1, 2, \dots, N+1 \quad m = 1, 2, \dots, M$$

对于周期边界条件，对应关系为

$$\begin{aligned} U_{(m-1)N+n} &\leftrightarrow U_n^{(m)} \\ U_1 &\leftrightarrow U_{N+1}^{(M)} \end{aligned}$$

在弱形式中，积分可以写成每个单元上积分的叠加

$$\int_{\Omega} au'v' dx = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega^{(m)}} au'v' dx$$

这样就得到了通过单元刚度矩阵拼接成总体刚度矩阵的方法。

## 1.4 仿射变换

把定义在  $\Omega^{(m)}$  上的积分和定义在  $[-1, 1]$  上的基函数对应起来。(略)

## 2 二维情况

求解区域  $\Omega = [0, 1]^2$ 。

特征值问题

$$-\nabla(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

源项问题

$$-\nabla(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

其中  $a(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $b(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $c(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  是有界，分片连续的已知函数。 $a(\mathbf{x})$  对称正定，特征值有一致的大于 0 的下界。

边界可以是：固定边界

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

导数边界 ( $n$  是区域外法向量,  $h(\mathbf{x}) \geq 0$ )

$$\frac{\partial au}{\partial n}(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

和周期边界

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u(x, 1) \quad \text{and} \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, 1) \quad x \in [0, 1] \\ u(0, y) = u(1, y) \quad \text{and} \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial n}(1, y) \quad y \in [0, 1] \end{aligned}$$

在特征值问题中，边界条件都应是齐次的。

## 2.1 变分形式

(略)

## 2.2 单元基函数

一维的参考单元  $\hat{\Omega} = [-1, 1]^2$ ，参考单元上的基函数是张量形式的

$$\phi_{i,j}(x, y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

共  $(N+1)^2$  个。

$x_1, \dots, x_{N+1}$ ,  $y_1, \dots, y_{N+1}$  和  $w_1, \dots, w_{N+1}$  是  $[-1, 1]$  上的高斯积分点和积分权重。

把二维的下标拉直成一维，就是

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+(j-1)(N+1)} &\leftrightarrow (x_i, y_j) \\ \mathbf{w}_{i+(j-1)(N+1)} &\leftrightarrow w_i w_j \\ \phi_{i+(j-1)(N+1)}(\mathbf{x}) &\leftrightarrow \phi_{i,j}(x, y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y) \end{aligned}$$

liru

$$(1, 1) \leftrightarrow 1, (2, 1) \leftrightarrow 2, \dots, (N+1, 1) \leftrightarrow N+1, (1, 2) \leftrightarrow N+2, \dots, (N+1, N+1) \leftrightarrow (N+1)^2$$

二维的基函数矩阵可以由一维情况下的张量积产生，就是

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (\phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} = \Phi \otimes \Phi \\ \Phi_x &= (\nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} = \Phi \otimes (d\Phi) \\ \Phi_y &= (\nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} = (d\Phi) \otimes \Phi \end{aligned}$$

其中的符号代表 Kronecker 张量积。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \nabla_x \phi_1(\mathbf{x}_1) & \nabla_x \phi_2(\mathbf{x}_1) & \nabla_x \phi_3(\mathbf{x}_1) & \nabla_x \phi_4(\mathbf{x}_1) \\ \nabla_x \phi_1(\mathbf{x}_2) & \nabla_x \phi_2(\mathbf{x}_2) & \nabla_x \phi_3(\mathbf{x}_2) & \nabla_x \phi_4(\mathbf{x}_2) \\ \nabla_x \phi_1(\mathbf{x}_3) & \nabla_x \phi_2(\mathbf{x}_3) & \nabla_x \phi_3(\mathbf{x}_3) & \nabla_x \phi_4(\mathbf{x}_3) \\ \nabla_x \phi_1(\mathbf{x}_4) & \nabla_x \phi_2(\mathbf{x}_4) & \nabla_x \phi_3(\mathbf{x}_4) & \nabla_x \phi_4(\mathbf{x}_4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \varphi'_1(x_1)\varphi_1(y_1) & \varphi'_2(x_1)\varphi_1(y_1) & \varphi'_1(x_1)\varphi_2(y_1) & \varphi'_2(x_1)\varphi_2(y_1) \\ \varphi'_1(x_2)\varphi_1(y_1) & \varphi'_2(x_2)\varphi_1(y_1) & \varphi'_1(x_2)\varphi_2(y_1) & \varphi'_2(x_2)\varphi_2(y_1) \\ \varphi'_1(x_1)\varphi_1(y_2) & \varphi'_2(x_1)\varphi_1(y_2) & \varphi'_1(x_1)\varphi_2(y_2) & \varphi'_2(x_1)\varphi_2(y_2) \\ \varphi'_1(x_2)\varphi_1(y_2) & \varphi'_2(x_2)\varphi_1(y_2) & \varphi'_1(x_2)\varphi_2(y_2) & \varphi'_2(x_2)\varphi_2(y_2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

积分可以近似为

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\nabla \phi_i)^T a (\nabla \phi_j) dx \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \begin{bmatrix} \nabla_x \phi_i(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y \phi_i(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{1,1}(\mathbf{x}_n) & a_{1,2}(\mathbf{x}_n) \\ a_{2,1}(\mathbf{x}_n) & a_{2,2}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_x \phi_i(\mathbf{x}_n) a_{1,1}(\mathbf{x}_n) \nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_y \phi_i(\mathbf{x}_n) a_{2,1}(\mathbf{x}_n) \nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_x \phi_i(\mathbf{x}_n) a_{1,2}(\mathbf{x}_n) \nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_y \phi_i(\mathbf{x}_n) a_{2,2}(\mathbf{x}_n) \nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i b^T (\nabla \phi_j) dx = \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{x}_n) \\ b_2(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) b_1(\mathbf{x}_n) \nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) b_2(\mathbf{x}_n) \nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_n) \\
& \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i c \phi_j dx = \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) c(\mathbf{x}_n) \phi_j(\mathbf{x}_n)
\end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \phi_i dx = \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n f(\mathbf{x}_n) \phi_i(\mathbf{x}_n)$$

写成矩阵的形式

$$\begin{aligned} A^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\nabla \phi_i)^T a(\nabla \phi_j) dx \right)_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \\ B^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i b^T(\nabla \phi_j) dx \right)_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \\ C^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi_i c \phi_j dx \right)_{i,j}^{(N+1)^2 \times (N+1)^2} \\ F^{(l)} &= \left( \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f \phi_i dx \right)_i^{(N+1)^2} \end{aligned}$$

就是

$$\begin{aligned} A^{(l)} &= \Phi_x^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}a_{1,1}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_x^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}a_{1,2}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\ &\quad + \Phi_y^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}a_{2,1}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_y^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}a_{2,2}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\ B^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}b_1(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_0^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}b_2(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\ C^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot \text{diag}(\mathbf{w}c(\mathbf{x})) \cdot \Phi \\ F^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot (\mathbf{w}f(\mathbf{x}))^T \end{aligned}$$

## 2.3 单元基和全局基

同样的非均匀方形网格。

网格把区间分成很多个单元  $\Omega^{(m_x, m_y)} (m_x = 1, 2, \dots, M_x, m_y = 1, 2, \dots, M_y)$ 。

从局部自由度到整体自由度的对应关系为

$$\begin{aligned} U_{n_x, n_y}^{(m_x, m_y)} &\leftrightarrow U_{n_x + (n_y - 1)(N+1)}^{(m_x, m_y)} \leftrightarrow U_{(m_x - 1)N + n_x, (m_y - 1)N + n_y} \leftrightarrow U_{(m_x - 1)N + n_x + ((m_y - 1)N + (n_y - 1))(M_x N + 1)} \\ n_x, n_y &= 1, \dots, N + 1 \quad m_x = 1, \dots, M_x, m_y = 1, \dots, M_y \end{aligned}$$

对于周期边界条件，对应关系（略）

## 2.4 边界条件的处理

一维情况下边界条件就是两点，不用特殊说明。周期区域没有边界，只有固定边界和导数边界要详细说明。

这里只考虑下边界，其他边界是一样的。

### 2.4.1 导数边界条件

在参考单元上，对于下边界

$$\int_{-1}^1 \phi_{i,j}(x,0)h(x,0)\phi_{k,l}(x,0) dx = \begin{cases} \int_{-1}^1 \varphi_i(x)h(x,0)\varphi_k(x) dx & j = l = 1 \\ 0 & j \neq 1 \text{ or } l \neq 1 \end{cases}$$

还有

$$\int_{-1}^1 \phi_{i,j}(x,0)g(x,0) dx = \begin{cases} \int_{-1}^1 \varphi_i(x)g(x,0) dx & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}$$

因此，在计算边界上积分的时候，只要考虑边界上对应的自由度。

### 2.4.2 固定边界条件

固定边界条件相当于限制边界上的自由度必须等于某一数值。就是计算函数空间  $\{\varphi_i(x)\}$  中，对  $u_0$  的最佳逼近。基函数不正交，直接计算内积无法得到系数。

最佳逼近要满足残量正交，就是

$$\int_{-1}^1 (u_0(x) - \sum_{i=1}^{N+1} u_i \varphi_i(x)) \varphi_j(x) dx = 0 \quad j = 1, \dots, N+1$$

得到方程组  $Au = b$ ，其中

$$A_{i,j} = \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad b_j = \int_{-1}^1 u_0(x) \varphi_j(x) dx$$

转换成数值积分的过程略。

## 2.5 仿射变换

(略) 大概就是因为区域变换要乘以  $h_x h_y$ 。在  $x$  方向出现导数的要乘以  $1/h_x$ ，在  $y$  方向出现导数的要乘以  $1/h_y$ 。