谱元法笔记

flag

2020 年 1 月 10 日

目前的代码可以求解这两个问题:

特征值问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + hu(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{2}$$

源项问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 1 \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = g \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{4}$$

一维的情况时，区域 $\Omega = [0,1]$ 被均匀分成 M 个区间，二维时，$V(x)$ 区域 $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ 被均匀分成 $M_1 \times M_2$ 个方格。在每个方格上 $V(\mathbf{x})$ 是分片常数，而且大于 0。

1 comment1

在相同的位势 V 的选取下，比较 Robin 边界条件的解与 Dirichlet 边界条件的解，找到一个例子说明两者的 landscape 和 eigenmodes 都相差很大。这样可以说明我们研究的重要性。

Dirichlet 边界条件的程序正在写，过几天就可以完成。

2 comment2

让 V 在每个方格内取 [0,1] 上均匀分布的随机数。比较该结果与 V 在每个方格内取 0,1 值 Bernoulli 分布的异同。

取 K 为 8000，V 取均匀分布的随机数，Neumman 边界条件（h 和 g 都是 0）。得到图1

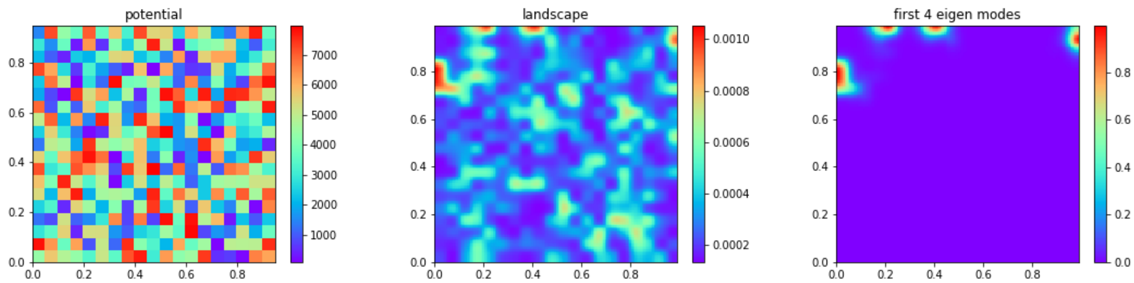

图 1: K=8000, Uniform distribution

取 K 为 8000，V 取 Bernoulli 分布的随机数，V 取 0 的概率 p=0.5（保证均值相同），Neumman 边界条件（h 和 g 都是 0）。得到图2

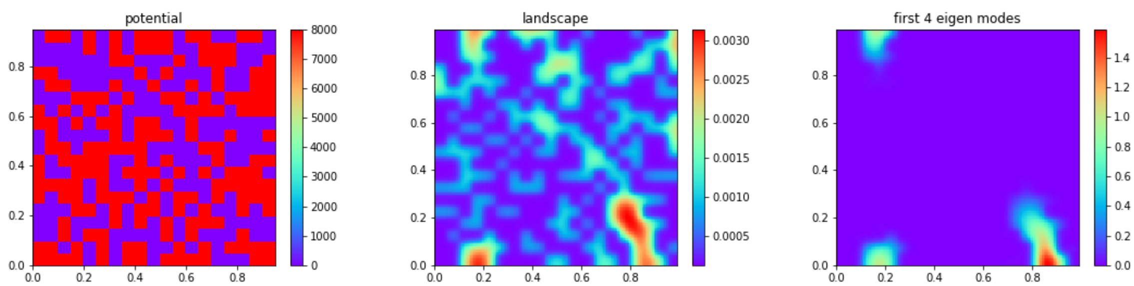

图 2: K=8000, p=0.5, Bernoulli distribution

可以看出，均匀分布让特征函数的峰局部化更加明显。

3 comment3

你上次提到的想法应该继续挖掘：找到一个阈值，将 landscape 大于这个阈值的子区域找出来，研究该子区域的分块情况。例如，这个阈值可以取作 1/[3(lambda+alpha+beta)]。

把 $\{x : (\lambda+\alpha+\beta)w(x) < 1\}$ 的区域涂黑，其它区域涂白。并把它和 eigenmode 对比，得到图3。

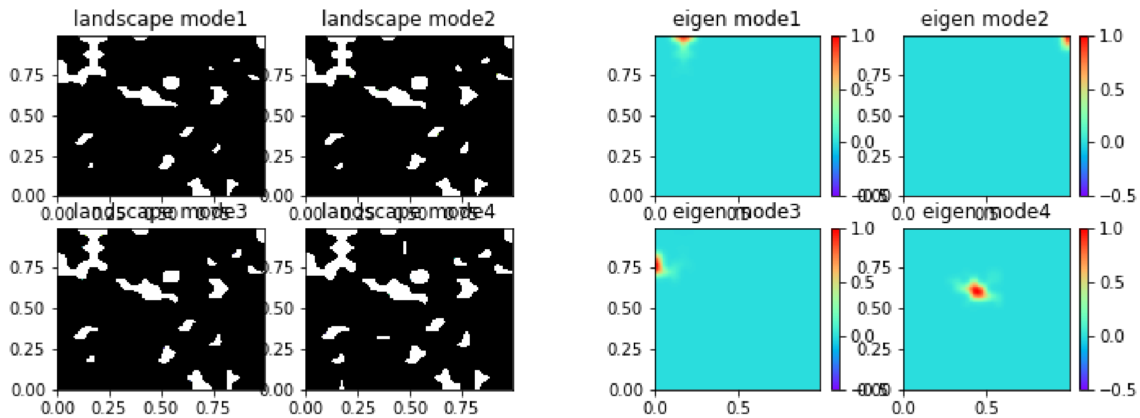

图 3: K=8000, p=0.3, Bernoulli distribution

从图中来看，eigenmode 的峰值位置确实被限制在了涂白的地方。但是黑白这样的图有点难看，不如 valley line 的图漂亮。但是从另一种角度看，valley line 只是告诉我们特征函数峰的划分，而黑白的图不仅可以看出特征函数在哪有峰，还可以看出特征函数在哪一定没有峰。

4 comment4

在 V 取 0,1 值 Bernoulli 分布时，二维情形取 0 的概率 p 有临界值 0.59。p 大于这个临界值时，子区域应该是连成一片的；小于这个临界值时，子区域应该分成很多小块。尝试验证这个结果。

在临界值附近选取 p 的值，得到图4和图5。

两张图用的随机数种子是相同的，所以大致看上去没什么区别。仔细观察可以发现，他们的连通程度确实不一样。

5 comment5

尝试画出 landscape 的 valley line。并研究 valley line 分出的块和 Comment 3 中分出的块的关系。

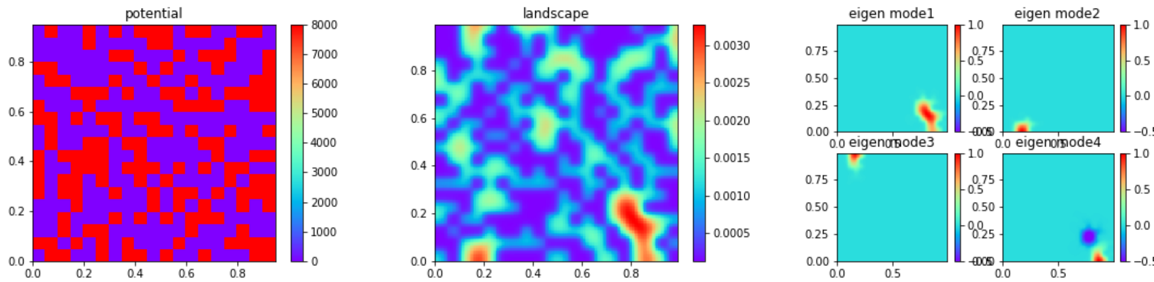

图 4: K=8000, p=0.58, Bernoulli distribution

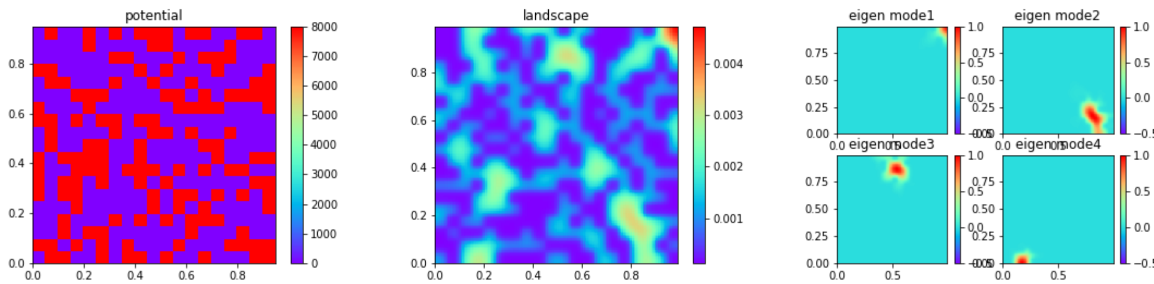

图 5: K=8000, p=0.60, Bernoulli distribution

valley line 的程序正在写，过几天就可以完成。

6 comment6

调整 p 与 K 的取值，使得 Comment 3 与 Comment 5 可以实现更好的分块。

改变不同的 p，画出 comment 3 中的图，得到图6，图7和图8。

根据试验的结果，p 越小，K 越大，局部化越明显。分块也更准确。

7 comment7

在 V 取 0,1 值的 Bernoulli 分布时，让 K 趋于无穷，比较 K 很大时候 landscape 的分块与 x: V(x)=0 的连通分支的关系。

不断增大 K，在同一组随机数下求解问题。得到图9，图10和图11。

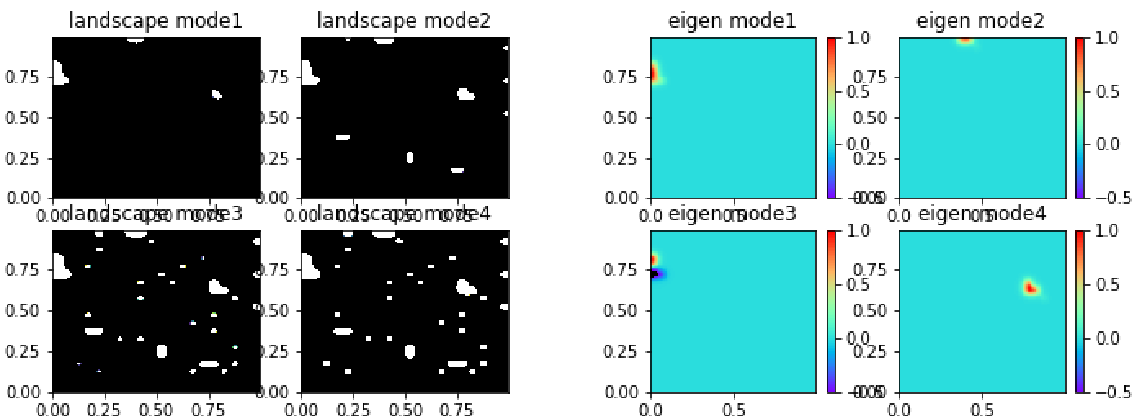

图 6: K=8000, p=0.1, Bernoulli distribution

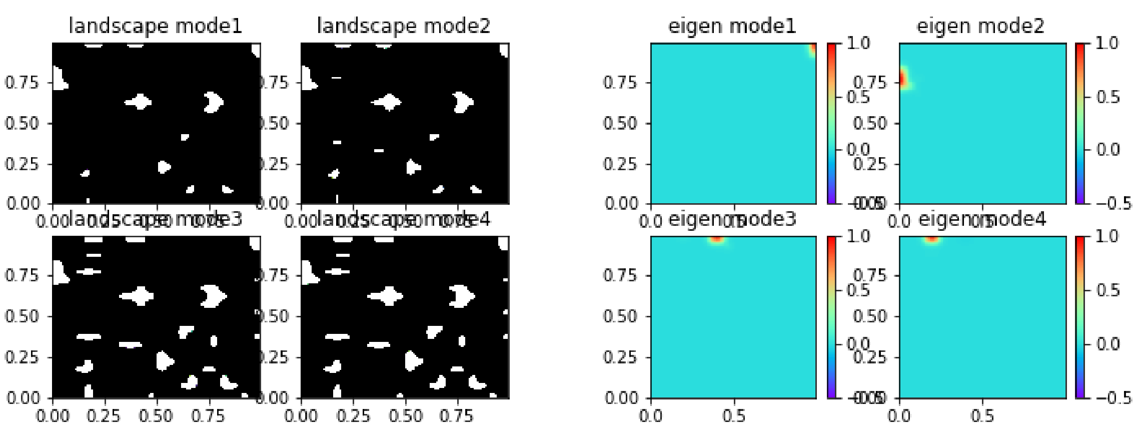

图 7: K=8000, p=0.2, Bernoulli distribution

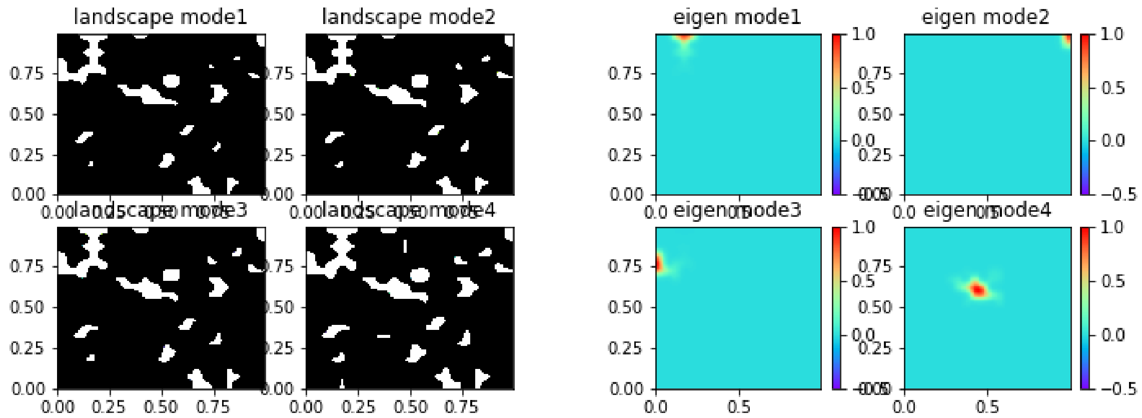

图 8: K=8000, p=0.3, Bernoulli distribution

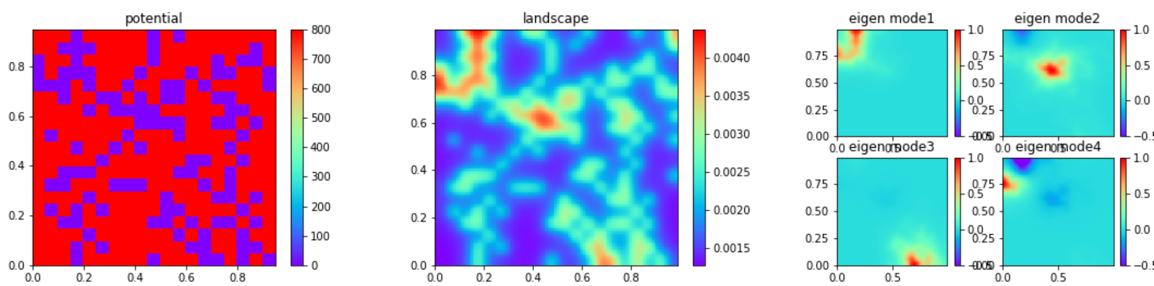

图 9: K=800, p=0.30, Bernoulli distribution

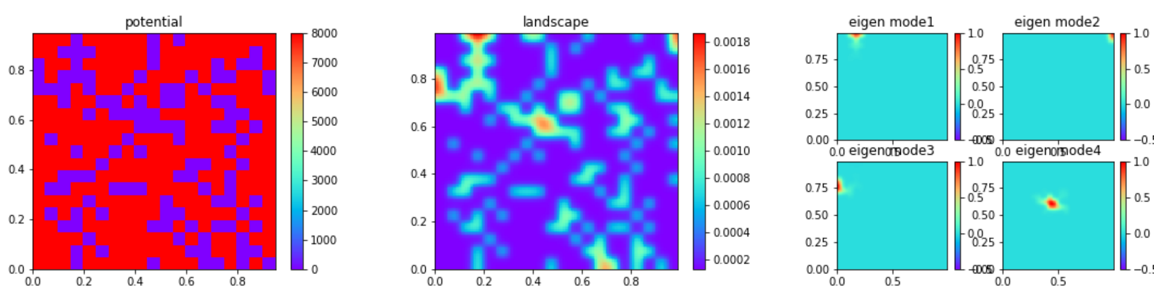

图 10: K=8000, p=0.30, Bernoulli distribution

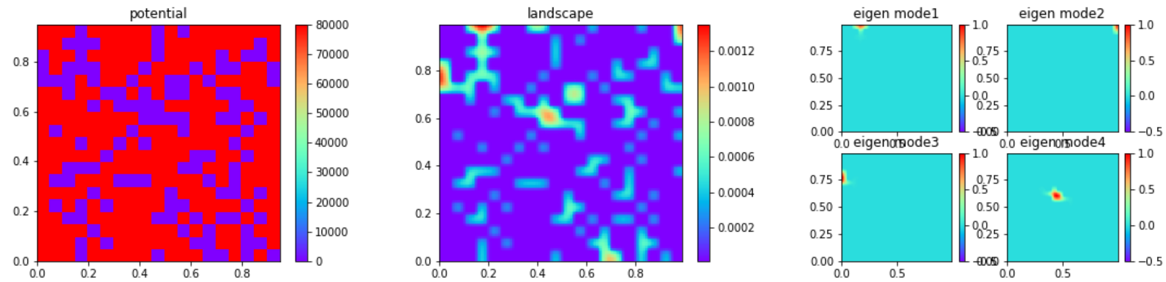

图 11: K=80000, p=0.30, Bernoulli distribution

可以看出，K 越大时，landscape 的局部化现象会更加明显，特征函数的局部化也会更加明显。在 K 很大的时候，landscape 会呈现出和 K 类似的形状，在 V(x) 间断的地方，landscape 就会变得陡峭。

8 comment8

在 V 取 [0,1] 上均匀分布的随机数时，验证当 K 趋于无穷时，eigenmode 集中在 V 的最小值附近。

不断增大 K，在同一组随机数下求解问题。得到图12，图13和图14。

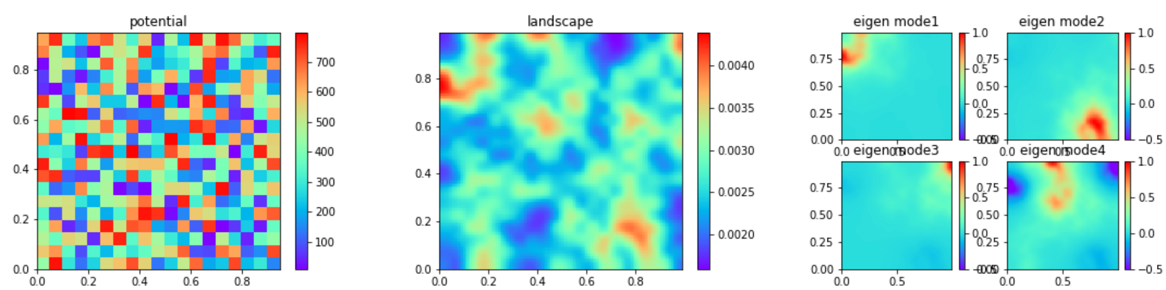

图 12: K=800, Uniform distribution

均匀分布下，特征函数随 K 增大而局部化的现象比 0-1 分布时更加明显。但是 eigenmode 集中在 V 的最小值附近的现象还不是很明显。

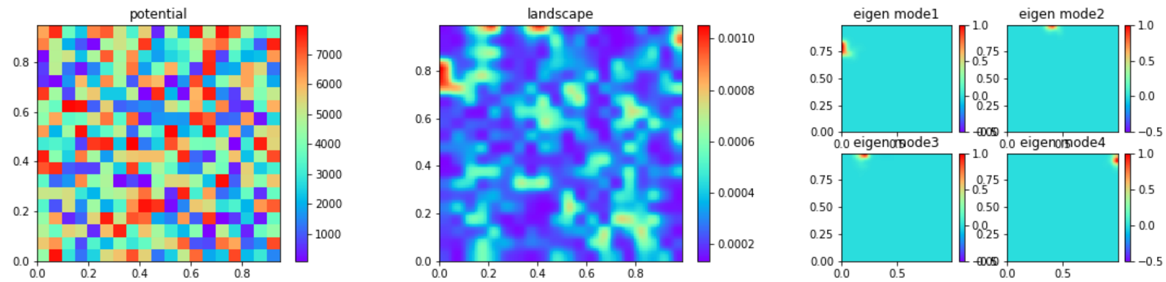

图 13: K=8000, Uniform distribution

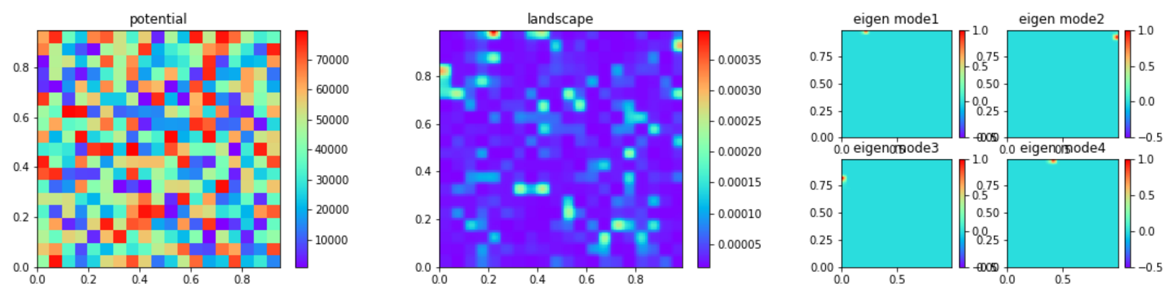

图 14: K=80000, Uniform distribution