谱元法笔记

flag

2020 年 5 月 27 日

1 问题和离散

求解区域 $\Omega = [0,1]^d$，维数 $d = 1,2$。

Robin 边界特征值问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + h_0 u(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{2}$$

Robin 边界源项问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 1 \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) = g_0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{4}$$

Dirichlet 边界特征值问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{5}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{6}$$

Dirichlet 边界源项问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = 1 \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{7}$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{8}$$

一维的情况时，区域 $\Omega=[0,1]$ 被均匀分成 M 个方格 $\Omega^{(m)}(m=0,1,\cdots,M-1)$，二维时，$V(x)$ 区域 $\Omega=[0,1]\times[0,1]$ 被均匀分成 $M_1\times M_2$ 个方格 $\Omega^{(m_1,m_2)}(m_1,m_2=0,1,\cdots,M-1)$。在每个方格上 $V(\mathbf{x})$ 是分片常数，而且大于 0。

Robin 边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda,u\in\mathbb{C}\times H^1(\Omega)\quad (\nabla u,\nabla v)+(Vu,v)+h_0(u,v)_{\partial\Omega}=\lambda(u,v)\qquad \forall v\in H^1(\Omega) \tag{9}$$

Robin 边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u\in H^1(\Omega)\quad (\nabla u,\nabla v)+(Vu,v)=(f,v)+(g_0,v)_{\partial\Omega}\qquad \forall v\in H^1(\Omega) \tag{10}$$

Dirichlet 边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda,u\in\mathbb{C}\times H_0^1(\Omega)\quad (\nabla u,\nabla v)+(Vu,v)=\lambda(u,v)\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{11}$$

Dirichlet 边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u\in H_0^1(\Omega)\quad (\nabla u,\nabla v)+(Vu,v)=(f,v)\qquad \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{12}$$

其中区域内部和边界上的内积定义为

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)\ dx\qquad (u,v)_{\partial\Omega}=\int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\ dx$$

区域被分成的方格就是天然的剖分。选取 V_N 是分片 N 次多项式，而且整体连续的函数空间。V_N^0 是在 V_N 中，且边界为 0 的函数空间。

问题离散形式就是在变分形式中把空间选取为 V_N 和 V_N^0。

设 $\phi_1(\mathbf{x}),\phi_2(\mathbf{x}),\cdots\phi_N(\mathbf{x})$ 是函数空间的一组基，数值解 $u_N(\mathbf{x})$ 可以表示为

$$u_N(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^N U_i\phi_i(x)$$

系数向量 $U=(U_1,U_2,\cdots,U_N)^T$。离散问题可以写成矩阵形式

$$AU=F\qquad \text{and}\qquad AU=\lambda BU \tag{13}$$

其中矩阵元素为

$$A_{i,j} = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + (V\phi_i, \phi_j) + (h_0\phi_i, \phi_j)_{\partial\Omega}$$

$$B_{i,j} = (\phi_i, \phi_j) \qquad F_i = (f, \phi_i) + (g_0, \phi_i)_{\partial\Omega}$$

内积中的积分可以表示为

$$(u, v) = \sum_{m=0}^{M} \int_{\Omega^{(m)}} u(x)v(x)\ dx$$

边界上的内积也类似。所以只需要求出单元上的矩阵 $A^{(m)}, B^{(m)}, F^{(m)}$ 然后按照一定规则拼合起来，就可以得到全局的矩阵。

2 单元基函数

2.1 一维的情况

一维的参考单元 $\hat{\Omega} = [-1, 1]$，选取参考单元上的一组基函数为

$$\phi_k(x) = \begin{cases} (1-x)/2 = (L_0(x) - L_1(x))/2 & k = 0 \\ (L_{k+1}(x) - L_{k-1}(x))/\sqrt{4k+2} & 1 \le k \le N-1 \\ (1+x)/2 = (L_0(x) + L_1(x))/2 & k = N \end{cases} \tag{14}$$

共 $N+1$ 个，编号从 0 开始。其中 $L(x)$ 是勒让德多项式。

近似解就是由这组基张成的函数

$$u_N(x) = U_0\phi_0(x) + U_1\phi_1(x) + \cdots + U_N\phi_N(x)$$

此时 ϕ_0 的系数就是函数在左端点的函数值，ϕ_N 的系数就是函数在右端点的函数值。在很多块区域拼起来时，这两个就是边界上的自由度。

根据公式 $(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x)$ 得到

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sqrt{4k+2}}{2} L_k(x) & 1 \le k \le N-1 \\ \frac{1}{2} & k = N \end{cases} \tag{15}$$

所以在参考单元上，$(\phi_j'(x),\phi_k'(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{2} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

共 $3N+5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。其它满足

$$(\phi_k',\phi_k')=1 \quad 其中 \quad (k=1,2,\cdots,N-1)$$

同样得到，在参考单元上，$(\phi_j(x),\phi_k(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & & & & & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & & & & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{21} & 0 & * & & & -\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & 0 & * & 0 & * & & \\ & & * & 0 & * & 0 & * & \\ & & & * & 0 & * & 0 & \\ & & & & * & 0 & * & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{10}} & & & & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \tag{17}$$

共 $3N+5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。其它满足

$$(\phi_k,\phi_k)=\frac{2}{(2k+3)(2k-1)} \quad 其中 \quad (k=1,2,\cdots,N-1)$$

和

$$(\phi_k,\phi_{k+2})=(\phi_{k+2},\phi_k)=-\frac{1}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}} \quad 其中 \quad (k=1,2,\cdots,N-3)$$

一维的情况下，对 $f(x)=1$ 的情况，由于高次的勒让德多项式都和零次多项式正交，所以

$$(1,\phi_j)=\begin{cases} 1 & j=0 \text{ or } j=N \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & j=1 \\ 0 & \text{ortherwise} \end{cases} \tag{18}$$

对应向量为

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

下面考虑边界上的情况。一维的情况下，边界上的内积就是 $(\phi_i, \phi_j)_{\partial\hat{\Omega}} = \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1)$。对应只有两个矩阵元素不为 0，矩阵为

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{20}$$

同样有 $(1, \phi_i)_{\partial\hat{\Omega}} = \phi_i(0) + \phi_i(1)$。对应右端向量为

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

此时，对于数值解

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} U_n \phi_n(x)$$

对应的系数向量 $U = (U_0, U_1, \cdots, U_N)$，双线性型表示为

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = U^T \hat{A} V \qquad (u_N, v_N) = U^T \hat{B} V \qquad (1, v_N) = \hat{F}^T V$$

$$(u_N, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} = U^T \hat{H} V \qquad (1, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} = \hat{G}^T V$$

如果不对区域分割，$V(x)$ 是整体常数，直接在参考单元上求解，就相当于直接使用谱方法求解。要求解的方程组是

$$(\hat{A} + V\hat{B} + h_0\hat{H})U = \hat{F} + g_0\hat{G} \qquad \text{and} \qquad (\hat{A} + V\hat{B} + h_0\hat{H})U = \lambda\hat{B}U \tag{22}$$

下面我们考虑如何把空间分割，并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 h_m 的一般单元 $\Omega^{(m)} = [x_m, x_{m+1}]$，设 χ_m 是参考单元到当前单元的仿射变换，就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_k(\chi_m^{-1}(x))\}$

因为一维的变换就是区间伸缩和平移，所以

$$\chi_m(x) = \frac{h_m}{2}x + b_m \qquad \chi_m'(x) = \frac{h_m}{2}$$

当前单元上的内积为

$$(\phi_i^{(m)}, \phi_j^{(m)}) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(\chi_m^{-1}(x))\phi_j(\chi_m^{-1}(x))\ dx$$

积分变换的过程省略，在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)} = \frac{2}{h_m}\hat{A} \qquad B^{(m)} = \frac{h_m}{2}\hat{B} \qquad F^{(m)} = \frac{h_m}{2}\hat{F}$$

边界不用管，拼合之后的边界就变了。

下面要把小区间上的自由度对应到整体的自由度，在这个过程中要保证整体的函数是连续的，就是 $\Omega^{(m)}$ 上的自由度 $U_N^{(m)}$ 和 $\Omega^{(m+1)}$ 上的自由度 $U_0^{(m+1)}$ 必须是同一个。这样，局部编号 $U_n^{(m)}$ 的自由度对应总体自由度为 $mN + n$（所有的编号都是从 0 开始的）。

(此处应该有图)

对于边界，只要考虑 $\Omega^{(0)}$ 上的 $U_0^{(0)}$ 和 $\Omega^{(M-1)}$ 上的自由度 $U_N^{(M-1)}$，在最后的矩阵里把它们分别加上 h_0 就可以了。就是相当于加上

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(MN+1)\times(MN+1)} \tag{23}$$

右端项同样也要加上

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{MN+1} \tag{24}$$

2.2 二维的情况

二维的参考单元是 $\hat{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1]$，二维的基函数是张量形式的

$$u_N(x,y) = \sum_{n_1,n_2=0}^{N_1,N_2} U_{n_1,n_2} \phi_{n_1}(x) \phi_{n_2}(y)$$

在参考单元上 $(\nabla \phi_i(x)\phi_j(y), \nabla \phi_k(x)\phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned}
&\int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y)\ dxdy + \int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y)\ dxdy \\
=&\int_{-1}^{1} \phi_i'(x)\phi_k'(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi_j(y)\phi_l(y)\ dy + \int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_k(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi_j'(y)\phi_l'(y)\ dy \\
=&\hat{A}_{i,k}\hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k}\hat{A}_{j,l}
\end{aligned}$$

在参考单元上 $(\phi_i(x)\phi_j(y), \phi_k(x)\phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned}
&\int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi_i(x)\phi_j(y)\phi_k(x)\phi_l(y)\ dxdy \\
=&\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_k(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi_j(y)\phi_l(y)\ dy \\
=&\hat{B}_{i,k}\hat{B}_{j,l}
\end{aligned}$$

在参考单元上 $(1, \phi_i(x)\phi_j(y))$ 就是

$$\int_{[-1,1]\times[-1,1]} \phi_i(x)\phi_j(y)\ dxdy = \int_{-1}^{1} \phi_i(x)\ dx \int_{-1}^{1} \phi_j(y)\ dy = \hat{F}_i\hat{F}_j$$

在参考单元边界上 $(\phi_i(x)\phi_j(y), \phi_k(x)\phi_l(y))_{\partial\hat{\Omega}}$ 就是

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \phi_i(1)\phi_j(y)\phi_k(1)\phi_l(y)\ dy + \int_{-1}^{1} \phi_i(-1)\phi_j(y)\phi_k(-1)\phi_l(y)\ dy \\
+&\int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_j(1)\phi_k(x)\phi_l(1)\ dx + \int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_j(-1)\phi_k(x)\phi_l(-1)\ dx \\
=&(\phi_j(-1)\phi_l(-1) + \phi_j(1)\phi_l(1)) \int_{-1}^{1} \phi_i(x)\phi_k(x)\ dx \\
+&(\phi_i(-1)\phi_k(-1) + \phi_i(1)\phi_k(1)) \int_{-1}^{1} \phi_j(y)\phi_l(y)\ dy \\
=&\hat{H}_{i,k}\hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k}\hat{H}_{j,l}
\end{aligned}$$

在参考单元边界上 $(1,\phi_k(x)\phi_l(y))_{\partial\hat{\Omega}}$ 就是

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\phi_k(1)\phi_l(y)\ dy+\int_{-1}^{1}\phi_k(-1)\phi_l(y)\ dy+\int_{-1}^{1}\phi_k(x)\phi_l(1)\ dx+\int_{-1}^{1}\phi_k(x)\phi_l(-1)\ dx\\
=&(\phi_l(-1)+\phi_l(1))\int_{-1}^{1}\phi_k(x)\ dx+(\phi_k(-1)+\phi_k(1))\int_{-1}^{1}\phi_l(y)\ dy\\
=&\hat{G}_k\hat{F}_l+\hat{F}_k\hat{G}_l
\end{aligned}
$$

此时，对于

$$
u_N(x,y)=\sum_{i,j=0}^{N_x,N_y}U_{i,j}\phi_i(x)\phi_j(y)
$$

双线性型表示为

$$
(\nabla u_N,\nabla v_N)=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}(\hat{A}_{i,k}\hat{B}_{j,l}+\hat{B}_{i,k}\hat{A}_{j,l})V_{k,l}
$$

$$
(u_N,v_N)=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}\hat{B}_{i,k}\hat{B}_{j,l}V_{k,l}
$$

$$
(u_N,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=\sum_{i,j,k,l}U_{i,j}(\hat{H}_{i,k}\hat{B}_{j,l}+\hat{B}_{i,k}\hat{H}_{j,l})V_{k,l}
$$

$$
(1,v_N)=\sum_{i,j}\hat{F}_iV_{i,j}\hat{F}_j
$$

$$
(1,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=\sum_{i,j}\sum_{i,j}V_{i,j}(\hat{G}_i\hat{F}_j+\hat{F}_i\hat{G}_j)
$$

对应的系数向量拉直成一维的

$$
U=(U_{0,0},U_{0,1},\cdots,U_{0,N_2},U_{1,0},U_{1,1},\cdots,U_{N_1,N_2})
$$

此时 U_{n_1,n_2} 对应的一维下标是 $n_1(N_1+1)+n_2$。双线性型表示为

$$
(\nabla u_N,\nabla v_N)=U^T(\hat{A}\otimes\hat{B}+\hat{B}\otimes\hat{A})V\qquad(u_N,v_N)=U^T(\hat{B}\otimes\hat{B})V\qquad(1,v_N)=(\hat{F}\otimes\hat{F})^TV
$$

$$
(u_N,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=U^T(\hat{B}\otimes\hat{H}+\hat{H}\otimes\hat{B})V\qquad(1,v_N)_{\partial\hat{\Omega}}=(\hat{F}\otimes\hat{G}+\hat{G}\otimes\hat{F})^TV
$$

如果不对区域分割，$V(x)$ 是整体常数，直接在参考单元上求解，就相当于直接使用谱方法求解。要求解的方程组是

$$
[(\hat{A}\otimes\hat{B}+\hat{B}\otimes\hat{A})+V(\hat{B}\otimes\hat{B})+h_0(\hat{B}\otimes\hat{H}+\hat{H}\otimes\hat{B})]U=(\hat{F}\otimes\hat{F})+g_0(\hat{F}\otimes\hat{G}+\hat{G}\otimes\hat{F})\quad(25)
$$

$$[(\hat{A}\otimes\hat{B}+\hat{B}\otimes\hat{A})+V(\hat{B}\otimes\hat{B})+h_0(\hat{B}\otimes\hat{H}+\hat{H}\otimes\hat{B})]U=\lambda(\hat{B}\otimes\hat{B})U \tag{26}$$

下面我们考虑如何把空间分割，并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 $h_{m_1}\times h_{m_2}$ 的一般单元 $\Omega^{(m_1,m_2)}=[x_{m_1},x_{m_1+1}]\times[y_{m_2},y_{m_2+1}]$，设 χ 是参考单元到当前单元的仿射变换，就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_{n_1}(\chi^{-1}(x,y))\phi_{n_2}(\chi^{-1}(x,y))\}$。

因为只考虑矩形分割，所以二维的仿射变换也可以看成分别在每个维度上伸缩和平移。积分变换的部分省略，在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)}=\hat{A}\qquad B^{(m)}=\frac{4}{h_{m_1}h_{m_2}}\hat{B}\qquad F^{(m)}=\frac{h_{m_1}h_{m_2}}{2}\hat{F}$$

边界不用管，拼合之后的边界就变了。

下面要把小区域上的自由度对应到整体的自由度，在这个过程中要保证整体的函数是连续的。

小区域 $\Omega^{(m_1,m_2)}$ 的右边界为

$$\sum_{n_1,n_2=0}^{N_1,N_2}U_{n_1,n_2}^{(m_1,m_2)}\phi_{n_1}(1)\phi_{n_2}(y)=\sum_{n_2=0}^{N_2}U_{N_1,n_2}^{(m_1,m_2)}\phi_{n_2}(y)$$

小区域 $\Omega^{(m_1+1,m_2)}$ 的左边界为

$$\sum_{n_1,n_2=0}^{N_1,N_2}U_{n_1,n_2}^{(m_1+1,m_2)}\phi_{n_1}(-1)\phi_{n_2}(y)=\sum_{n_2=0}^{N_2}U_{0,n_2}^{(m_1+1,m_2)}\phi_{n_2}(y)$$

想要让函数整体连续，必须在边界上基函数的系数相同，就是 $U_{0,n_2}^{(m_1+1,m_2)}$ 和 $U_{N_1,n_2}^{(m_1,m_2)}$ 必须是同一个。

对上下左右四条边界的要求都是一样的。最后得到单元自由度 $U_{n_1,n_2}^{(m_1,m_2)}$ 对应的总体二维下标是 $(m_1N_1+n1,+m2N_2+n2)$，再拉直成一维坐标就是 $(m_1N_1+n1)(M_1N_1+1)+m2N_2+n2$ 所有的编号都是从 0 开始的。

(此处也应该有图)

注：程序里面只有 $N_1=N_2$ 且 $M_1=M_2$ 的情况。

下面考虑边界，边界分为上下左右四部分考虑。

左边界是由 $\Omega^{(0,0)}, \Omega^{(0,1)}, \cdots, \Omega^{(0,M_2-1)}$ 的左边界拼接成的。在 $\Omega^{(0,m_2)}$ 的左边界上，(u_N, v_N) 表示为

$$\sum_{i,j,k,l} U_{i,j}^{(0,m_2)} V_{k,l}^{(0,m_2)} \int_{-1}^{1} \phi_i(-1)\phi_j(y)\phi_k(-1)\phi_l(y)\ dy = \sum_{j,l} U_{0,j}^{(0,m_2)} V_{0,l}^{(0,m_2)} \hat{B}_{j,l}$$

对于左边界，系数矩阵拉直成一维之后的单元刚度矩阵是 $\hat{B} \otimes \hat{H}^0$。同理，右边界的是 $\hat{B} \otimes \hat{H}^1$，上边界的是 $\hat{H}^1 \otimes \hat{B}$，下边界的是 $\hat{H}^0 \otimes \hat{B}$。

$$\hat{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \qquad \hat{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)} \tag{27}$$

对于右端项，同样的。左边界是 $\hat{F} \otimes \hat{G}^0$。同理，右边界的是 $\hat{F} \otimes \hat{G}^1$，上边界的是 $\hat{G}^1 \otimes \hat{F}$，下边界的是 $\hat{G}^0 \otimes \hat{F}$。

$$\hat{G}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N+1} \qquad \hat{G}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N+1} \tag{28}$$

边界上的尺度变换系数是 $h_m/2$

3 目标问题