Anderson 局部化实验报告 7

sis-flag

2020 年 10 月 23 日

原始不等式

椭圆算子

$$Lu = -\nabla(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$$

算子满足非退化条件，其中 $c(x)$ 是分片常数。

特征值问题

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

其中 n 是外法方向，$h \geq 0$。

三个右端项问题

$$\begin{aligned} Lw_1 &= 1 \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w_1}{\partial n} &= 0 \quad x \in \partial\Omega \\ w_1(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Lw_2 &= 1 \quad x \in \Omega \\ \frac{\partial w_2}{\partial n} &= 0 \quad x \in \partial\Omega \\ w_2(x_0) &= 1/\alpha \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Lw_3 &= 1 \quad x \in \Omega \\
\frac{\partial w_3}{\partial n} + hf(w_3) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \\
w_3(x_0) &= 0
\end{aligned}
$$

其中 $f(x)$ 是一个非负的函数。（不知道取成 x/β 算不算非负函数。。。）

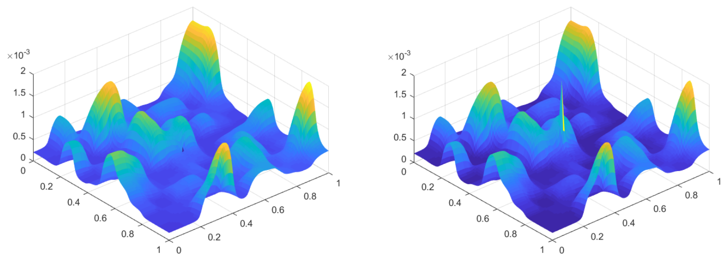
定理告诉我们，归一化后的特征函数和特征值满足

$$
|u(x)| \leq |\lambda| w_1(x) + \alpha w_2(x) + \frac{w_3(x)}{\min_{x\in\overline{\Omega}} f(w_3(x))}
$$

简化不等式的尝试

之前在对称算子的时候，其中的 G 可以取为空集，不知道现在还能不能这样选取。

图1中是某一组参数下 w_1 和 w_2 对比图。可以看出，α 对 landscape 的影响很小，把 G 取成空集应该不会有很大问题。



(a) w_1　　(b) w_2

图 1: 模拟结果

由于代码只能计算线性问题，f 就要取成线性函数 $f(w) = \beta w + \gamma$。

在这样的选取下 w_1 和 w_2 完全一样，方程变为

$$
\begin{aligned}
Lw_1 = Lw_3 &= 1 \quad x \in \Omega \\
\frac{\partial w_1}{\partial n} &= 0 \quad x \in \partial\Omega \\
\frac{\partial w_3}{\partial n} + h\beta\, w_3 &= h\gamma \quad x \in \partial\Omega
\end{aligned}
$$

特征函数和特征值满足

$$
|u(x)| \leq |\lambda| w_1(x) + \frac{w_3(x)}{\beta \min_{x\in\overline{\Omega}} w_3 + \gamma}
$$

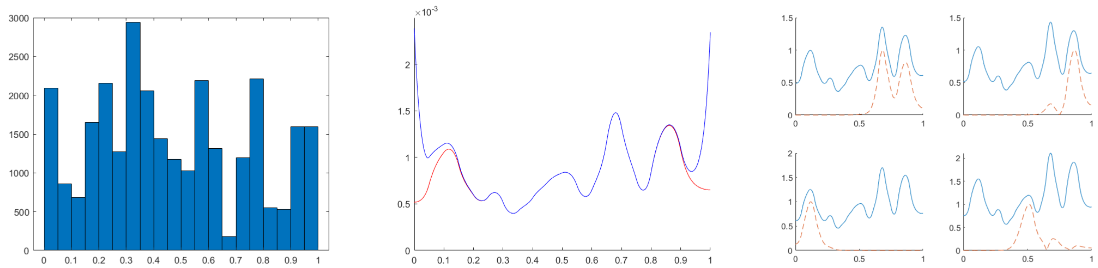
验证不等式

一维的情况下，所有的椭圆算子在合适的测度下都是对称算子。这里把 $b(x)$ 选为常数。

选取参数

$$a(x) = 1;\ b(x) = 10;\ h = 1;\ K = 3000;\ \beta = 10;\ \gamma = 0.1;$$

选取 $\beta = 1$。相关的解如图2。第二张图中，红色是 w_2，蓝色是 w_3，虽然蓝色的线在边界上翘起来很大，但是它对应的权重很小，landscape 并没有很大的变化。第三张图中，实线是 landscape，虚线是特征函数的绝对值。这里**不同的特征函数对应不同的 landscape**，很难画在一张图里了。



(a) $V(x)$ (b) $w(x)$ (c) landscape

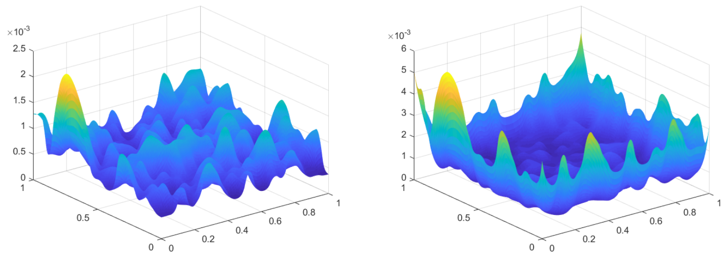
图 2: 模拟结果

根据经验，这里的参数 β, γ 对 landscape 的影响没有那么敏感。此外，landscape 的控制效果似乎和 K 有关。

二维的情况下，参数选取为

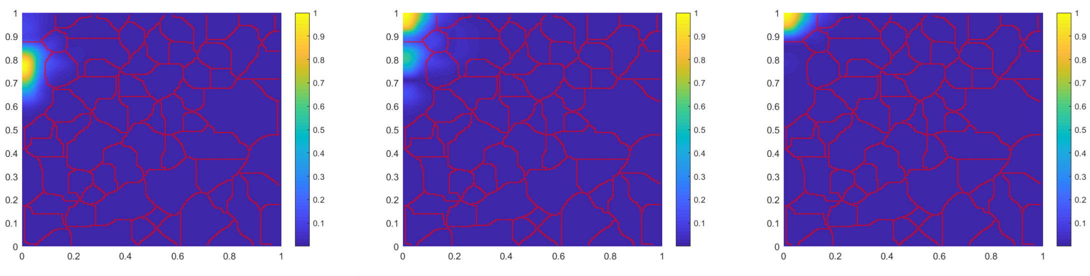
$$a(x) = I;\ b(x) = (10, 20)^T;\ h = 1;\ K = 3000;\ \beta = 10;\ \gamma = 0.1;$$

这里不同的特征函数对应不同的 landscape，同样地可以画出很多（大同小异的）valley-line。从图3和图4中可以看出，这些 landscape 可以起到分割特征函数的作用。



(a) $w_1(x)$ (b) $w_3(x)$

图 3: landscape（2 维）



(a) $u_1(x)$ (b) $u_2(x)$ (c) $u_3(x)$

图 4: 特征函数（2 维）