Anderson 局部化实验报告 4

flag

2020 年 3 月 9 日

定义算子 $L = -\Delta + KV$，它是一个正的，对称的算子。

研究特征值问题

$$Lu = \lambda u \qquad \mathbf{x} \in \Omega \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{2}$$

对某个特定的特征值 λ 和对应的特征函数 u，在子区域 Ω_1 上，假设我们知道 u 在边界 $\partial\Omega_1$ 上的值是 $g = u|_{\partial\Omega_1}$，则 u 在内部的值可以看作这样一个方程的解。

$$Lu - \lambda u = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \tag{4}$$
$$u = g \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega \tag{5}$$

在子区域 Ω_1 上，定义函数 v 是一个边界条件相同的方程的解。

$$Lv = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{6}$$
$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \tag{7}$$
$$v = g \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega \tag{8}$$

此时 $w = u - v$ 在边界上就是零边界条件。

定义空间 $H_{h,0}(\Omega_1) = \{w \in H^1(\Omega_1) | \frac{\partial w}{\partial n} + hw = 0 \text{ for } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \text{ and } u = 0 \text{ for } \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega\}$。它是 $H^1(\Omega_1)$ 的一个线性子空间。w 就在这个空间 $H_{h,0}(\Omega_1)$ 里面。

考虑特征值问题 $L\phi = \lambda\phi$，它的特征函数 $\phi_1, \phi_2, \cdots$ 构成空间的一组正交的 Hilbert 基。把 w 按这组基函数展开，得到

$$w = \sum_k w_k \phi_k$$

此时有

$$Lw = \sum_k \lambda_k w_k \phi_k \quad \text{and} \quad Lw - \lambda w = \sum_k (\lambda_k - \lambda) w_k \phi_k$$

就得到

$$\|Lw - \lambda w\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \sum_k (\lambda_k - \lambda)^2 w_k^2 \geq \min_k (\lambda_k - \lambda)^2 \sum_k w_k^2 = dist(\lambda, \lambda(\Omega_1))^2 \|w\|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

注意到 $Lu - \lambda u = 0, Lv = 0$，就是 $Lw - \lambda w = L(u - v) - \lambda(u - v) = \lambda v$。

记 $d = dist(\lambda, \lambda(\Omega_1))$ 因此得到

$$\lambda \|v\|_{L^2(\Omega_1)} \geq d \|w\|_{L^2(\Omega_1)} \tag{9}$$

就是

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \|w\|_{L^2(\Omega_1)} \leq (1 + \frac{\lambda}{d}) \|v\|_{L^2(\Omega_1)} \tag{10}$$

文章附录中的证明到这里就结束了。

上面的证明就是把文章附录里的证明推广到 Robin 边界条件的情况。但是在把定理应用到文章中的结论的时候，不同的边界就不一样了。

在 Dirichlet 边界条件下，得到 v 满足的方程

$$Lv = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{11}$$

$$v = u|_{\partial\Omega_1} \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \tag{12}$$

这个时候，$\|v\|_{L^2(\Omega_1)}$ 可以被边界 $\|u|_{\partial\Omega_1}\|$ 控制，之后又因为 landscape 的控制关系 $\|u|_{\partial\Omega_1}\|$ 可以被 landscape 在边界 $\partial\Omega_1$ 的范数控制。所以在 landscape 在边界处很小的时候，可以用特征值是否相近来判断特征函数是否 localize 到这一块区域。

在 Robin 边界条件下，v 满足的方程是

$$Lv = 0 \qquad \mathbf{x} \in \Omega_1 \tag{13}$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0 \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \tag{14}$$

$$v = g \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega \tag{15}$$

这个时候，$\|v\|_{L^2(\Omega_1)}$ 不仅仅被边界 $\|u|_{\partial\Omega_1}\|$ 影响，还受到边界条件中的参数 h 的影响。即使 landscape 在子区域在内部的边界上很小，也不能说明 $\|v\|_{L^2(\Omega_1)}$ 在子区域的内部很小。条件就失效了。

所以说现在的问题就是要用 g 控制 v，我们用极值原理来处理它。

假设方程13有经典解。**而且 h>0**。由于 $L = -\Delta + KV$ 中的 $KV \geq 0$，方程的解满足极值原理，最大值一定在边界 $\partial\Omega_1$ 处取到。

设最大值在 x_0 处取到，如果 $x_0 \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$，说明最大值在 Dirichlet 边界上取到，就有 $\|v\|_{L^\infty(\Omega_1)} < \max_{x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega} g(x)$，就可以控制了。

如果 $x_0 \in \partial\Omega_1 \setminus \partial\Omega$，说明最大值在 Robin 边界上取到，由于 $g > 0$，最大值应该是大于 0 的数。根据 Robin 边界条件 $\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0$，而且 $h > 0$，可以得到 $\frac{\partial v}{\partial n} < 0$。这说明解沿外法方向是递减的，这和解的最大值在边界取到矛盾。

综上，我们就得到了在 Ω_1 上，

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega_1)} < \max_{x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega} g(x)$$

最终结论

设 u 是特征值问题1对应于特征值 λ 的解，满足 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$，参数 $h > 0$。在子区域 Ω_1 上，就有

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C(1 + \frac{\lambda}{dist(\lambda, \lambda(\Omega_1))}) \max_{x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega} u(x)$$

其中 C 是只和 Ω_1 的测度有关的常数。

进一步地，如果 w 是对应的 landscape，满足 $u(x) \leq (\lambda + \alpha + \beta)w(x)$，则有

$$\|u\|_{L^2(\Omega_1)} \leq C(\lambda + \alpha + \beta)(1 + \frac{\lambda}{dist(\lambda, \lambda(\Omega_1))}) \max_{x\in\partial\Omega_1\cap\partial\Omega} w(x)$$