

谱元法笔记

flag

2020 年 1 月 5 日

1 问题和离散

先考虑简单的 Robin 边值问题，求解区域 $\Omega = [0, 1]^d$ ，维数 $d = 1, 2, 3$ 。

特征值问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + h_0 u(\mathbf{x}) = 0 \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (2)$$

源项问题

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}) + h_0 u(\mathbf{x}) = g_0(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (4)$$

一维的情况时，区域 $\Omega = [0, 1]$ 被均匀分成 M 个方格 $\Omega^{(m)} (m = 0, 1, \dots, M-1)$ ，二维时， $V(x)$ 区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 被均匀分成 $M_1 \times M_2$ 个方格 $\Omega^{(m_1, m_2)} (m_i = 0, 1, \dots, M_i - 1)$ 。在每个方格上 $V(\mathbf{x})$ 是分片常数，而且大于 0。

特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda, u \in \mathbb{C} \times H^1(\Omega) \quad (\nabla u, \nabla v) + (Vu, v) + (h_0 u, v)_{\partial\Omega} = \lambda(u, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (5)$$

源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega) \quad (\nabla u, \nabla v) + (Vu, v) + (h_0 u, v)_{\partial\Omega} = (f, v) + (g_0, v)_{\partial\Omega} \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (6)$$

其中

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \quad (u, v)_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u(x)v(x) \, dx$$

区域被分成的方格就是天然的剖分。选取 V_N 是分片 N 次多项式，而且整体连续的函数空间。

特征值问题离散形式为

$$\text{find } \lambda_N, u_N \in \mathbb{C} \times V_N \quad (\nabla u_N, \nabla v_N) + (Vu_N, v_N) + (h_0 u_N, v_N)_{\partial\Omega} = \lambda_N (u_N, v_N) \quad \forall v_N \in V_N \quad (7)$$

源项问题离散形式为

$$\text{find } u_N \in V_N \quad (\nabla u_N, \nabla v_N) + (Vu_N, v_N) + (h_0 u_N, v_N)_{\partial\Omega} = (f, v_N) + (g_0, v_N)_{\partial\Omega} \quad \forall v_N \in V_N \quad (8)$$

设 $\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})$ 是函数空间 V_N 的一组基，数值解 $u_N(\mathbf{x})$ 可以表示为

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N U_i \phi_i(x)$$

系数向量 $U = (U_1, U_2, \dots, U_N)^T$ 。离散问题可以写成矩阵形式

$$AU = F \quad \text{and} \quad AU = \lambda BU \quad (9)$$

其中矩阵元素为

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j) + (V \phi_i, \phi_j) + (h_0 \phi_i, \phi_j)_{\partial\Omega} \\ B_{i,j} &= (\phi_i, \phi_j) \quad F_i = (f, \phi_i) + (g_0, \phi_i)_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

内积中的积分可以表示为

$$(u, v) = \sum_{m=0}^M \int_{\Omega^{(m)}} u(x)v(x) \, dx$$

边界上的内积也类似。所以只要求出单元上的矩阵 $A^{(m)}, B^{(m)}, F^{(m)}$ 然后按照一定规则拼合起来，就可以得到全局的矩阵。

2 单元基函数

2.1 一维的情况

一维的参考单元 $\hat{\Omega} = [-1, 1]$ ，选取参考单元上的一组基函数为

$$\phi_k(x) = \begin{cases} (1-x)/2 = (L_0(x) - L_1(x))/2 & k = 0 \\ (L_{k+1}(x) - L_{k-1}(x))/\sqrt{4k+2} & 1 \leq k \leq N-1 \\ (1+x)/2 = (L_0(x) + L_1(x))/2 & k = N \end{cases} \quad (10)$$

共 $N+1$ 个，编号从 0 开始。其中 $L(x)$ 是勒让德多项式。

近似解就是由这组基张成的函数

$$u_N(x) = U_0\phi_0(x) + U_1\phi_1(x) + \cdots + U_N\phi_N(x)$$

此时 ϕ_0 的系数就是函数在左端点的函数值， ϕ_N 的系数就是函数在右端点的函数值。在很多块区域拼起来时，这两个就是边界上的自由度。

根据公式 $(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x)$ 得到

$$\phi'_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sqrt{4k+2}}{2} L_k(x) & 1 \leq k \leq N-1 \\ \frac{1}{2} & k = N \end{cases} \quad (11)$$

所以在参考单元上， $(\phi'_j(x), \phi'_k(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{2} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (12)$$

共 $3N+5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。其它满足

$$(\phi'_k, \phi'_k) = 1 \quad \text{其中} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

同样得到，在参考单元上， $(\phi_j(x), \phi_k(x))$ 形成的矩阵是

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3\sqrt{10}} & & & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3\sqrt{10}} & 0 & \frac{2}{21} & 0 & * & -\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ & -\frac{1}{5\sqrt{21}} & 0 & * & 0 & * \\ & & * & 0 & * & 0 & * \\ & & & * & 0 & * & 0 \\ & & & & * & 0 & * & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3\sqrt{10}} & & & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

共 $3N + 5$ 个非零元，矩阵编号从 0 开始。矩阵中只有第一行和最后一行，第一列和最后一列特殊。其它满足

$$(\phi_k, \phi_k) = \frac{2}{(2k+3)(2k-1)} \quad \text{其中 } (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

和

$$(\phi_k, \phi_{k+2}) = (\phi_{k+2}, \phi_k) = -\frac{1}{(2k+3)\sqrt{(2k+5)(2k+1)}} \quad \text{其中 } (k = 1, 2, \dots, N-3)$$

一维的情况下，对 $f(x) = 1$ 的情况，由于高次的勒让德多项式都和零次多项式正交，所以

$$(1, \phi_j) = \begin{cases} 1 & j = 0 \text{ or } j = N \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & j = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (14)$$

对应向量为

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

下面考虑边界上的情况。一维的情况下，边界上的内积就是 $(\phi_i, \phi_j)_{\partial\hat{\Omega}} = \phi_i(0)\phi_j(0) + \phi_i(1)\phi_j(1)$ 。对应只有两个矩阵元素不为 0，矩阵为

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (16)$$

同样有 $(1, \phi_i)_{\partial\Omega} = \phi_i(0) + \phi_i(1)$ 。对应右端向量为

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

此时，对于数值解

$$u_N(x) = \sum_{n=0}^N U_n \phi_n(x)$$

对应的系数向量 $U = (U_0, U_1, \dots, U_N)$ ，双线性型表示为

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = U^T \hat{A} V \quad (u_N, v_N) = U^T \hat{B} V \quad (1, v_N) = \hat{F}^T V$$

$$(u_N, v_N)_{\partial\Omega} = U^T \hat{H} V \quad (1, v_N)_{\partial\Omega} = \hat{G}^T V$$

如果不对区域分割， $V(x)$ 是整体常数，直接在参考单元上求解，就相当于直接使用谱方法求解。要求解的方程组是

$$(\hat{A} + V\hat{B} + h_0\hat{H})U = \hat{F} + g_0\hat{G} \quad \text{and} \quad (\hat{A} + V\hat{B} + h_0\hat{H})U = \lambda\hat{B}U \quad (18)$$

下面我们考虑如何把空间分割，并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 h_m 的一般单元 $\Omega^{(m)} = [x_m, x_{m+1}]$ ，设 χ_m 是参考单元到当前单元的仿射变换，就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_k(\chi_m^{-1}(x))\}$

因为一维的变换就是区间伸缩和平移，所以

$$\chi_m(x) = \frac{h_m}{2}x + b_m \quad \chi'_m(x) = \frac{h_m}{2}$$

当前单元上的内积为

$$(\phi_i^{(m)}, \phi_j^{(m)}) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \phi_i(\chi_m^{-1}(x)) \phi_j(\chi_m^{-1}(x)) dx$$

积分变换的过程省略，在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)} = \frac{2}{h_m} \hat{A} \quad B^{(m)} = \frac{h_m}{2} \hat{B} \quad F^{(m)} = \frac{h_m}{2} \hat{F}$$

边界不用管，拼合之后的边界就变了。

下面要把小区间上的自由度对应到整体的自由度，在这个过程中要保证整体的函数是连续的，就是 $\Omega^{(m)}$ 上的自由度 $U_N^{(m)}$ 和 $\Omega^{(m+1)}$ 上的自由度 $U_0^{(m+1)}$ 必须是同一个。这样，局部编号 $U_n^{(m)}$ 的自由度对应总体自由度为 $mN + n$ （所有的编号都是从 0 开始的）。

(此处应该有图)

对于边界，只要考虑 $\Omega^{(0)}$ 上的 $U_0^{(0)}$ 和 $\Omega^{(M-1)}$ 上的自由度 $U_N^{(M-1)}$ ，在最后的矩阵里把它们分别加上 h_0 就可以了。就是相当于加上

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & 0 & 1 & \end{bmatrix}_{(MN+1) \times (MN+1)} \quad (19)$$

右端项同样也要加上

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{MN+1} \quad (20)$$

2.2 二维的情况

二维的参考单元是 $\hat{\Omega} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ，二维的基函数是张量形式的

$$u_N(x, y) = \sum_{n_1, n_2=0}^{N_1, N_2} U_{n_1, n_2} \phi_{n_1}(x) \phi_{n_2}(y)$$

在参考单元上 $(\nabla \phi_i(x) \phi_j(y), \nabla \phi_k(x) \phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned} & \int_{[-1,1] \times [-1,1]} \phi'_i(x) \phi_j(y) \phi'_k(x) \phi_l(y) \, dx dy + \int_{[-1,1] \times [-1,1]} \phi_i(x) \phi'_j(y) \phi_k(x) \phi'_l(y) \, dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \phi'_i(x) \phi'_k(x) \, dx \int_{-1}^1 \phi_j(y) \phi_l(y) \, dy + \int_{-1}^1 \phi_i(x) \phi_k(x) \, dx \int_{-1}^1 \phi'_j(y) \phi'_l(y) \, dy \\ &= \hat{A}_{i,k} \hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k} \hat{A}_{j,l} \end{aligned}$$

在参考单元上 $(\phi_i(x)\phi_j(y), \phi_k(x)\phi_l(y))$ 就是

$$\begin{aligned} & \int_{[-1,1] \times [-1,1]} \phi_i(x)\phi_j(y)\phi_k(x)\phi_l(y) \, dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \phi_i(x)\phi_k(x) \, dx \int_{-1}^1 \phi_j(y)\phi_l(y) \, dy \\ &= \hat{B}_{i,k} \hat{B}_{j,l} \end{aligned}$$

在参考单元上 $(1, \phi_i(x)\phi_j(y))$ 就是

$$\int_{[-1,1] \times [-1,1]} \phi_i(x)\phi_j(y) \, dx dy = \int_{-1}^1 \phi_i(x) \, dx \int_{-1}^1 \phi_j(y) \, dy = \hat{F}_i \hat{F}_j$$

在参考单元边界上 $(\phi_i(x)\phi_j(y), \phi_k(x)\phi_l(y))_{\partial\hat{\Omega}}$ 就是

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \phi_i(1)\phi_j(y)\phi_k(1)\phi_l(y) \, dy + \int_{-1}^1 \phi_i(-1)\phi_j(y)\phi_k(-1)\phi_l(y) \, dy \\ &+ \int_{-1}^1 \phi_i(x)\phi_j(1)\phi_k(x)\phi_l(1) \, dx + \int_{-1}^1 \phi_i(x)\phi_j(-1)\phi_k(x)\phi_l(-1) \, dx \\ &= (\phi_j(-1)\phi_l(-1) + \phi_j(1)\phi_l(1)) \int_{-1}^1 \phi_i(x)\phi_k(x) \, dx \\ &+ (\phi_i(-1)\phi_k(-1) + \phi_i(1)\phi_k(1)) \int_{-1}^1 \phi_j(y)\phi_l(y) \, dy \\ &= \hat{H}_{i,k} \hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k} \hat{H}_{j,l} \end{aligned}$$

在参考单元边界上 $(1, \phi_k(x)\phi_l(y))_{\partial\hat{\Omega}}$ 就是

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \phi_k(1)\phi_l(y) \, dy + \int_{-1}^1 \phi_k(-1)\phi_l(y) \, dy + \int_{-1}^1 \phi_k(x)\phi_l(1) \, dx + \int_{-1}^1 \phi_k(x)\phi_l(-1) \, dx \\ &= (\phi_l(-1) + \phi_l(1)) \int_{-1}^1 \phi_k(x) \, dx + (\phi_k(-1) + \phi_k(1)) \int_{-1}^1 \phi_l(y) \, dy \\ &= \hat{G}_k \hat{F}_l + \hat{F}_k \hat{G}_l \end{aligned}$$

此时, 对于

$$u_N(x, y) = \sum_{i,j=0}^{N_x, N_y} U_{i,j} \phi_i(x) \phi_j(y)$$

双线性型表示为

$$(\nabla u_N, \nabla v_N) = \sum_{i,j,k,l} U_{i,j} (\hat{A}_{i,k} \hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k} \hat{A}_{j,l}) V_{k,l}$$

$$\begin{aligned}
(u_N, v_N) &= \sum_{i,j,k,l} U_{i,j} \hat{B}_{i,k} \hat{B}_{j,l} V_{k,l} \\
(u_N, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} &= \sum_{i,j,k,l} U_{i,j} (\hat{H}_{i,k} \hat{B}_{j,l} + \hat{B}_{i,k} \hat{H}_{j,l}) V_{k,l} \\
(1, v_N) &= \sum_{i,j} \hat{F}_i V_{i,j} \hat{F}_j \\
(1, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} &= \sum_{i,j} \sum_{i,j} V_{i,j} (\hat{G}_i \hat{F}_j + \hat{F}_i \hat{G}_j)
\end{aligned}$$

对应的系数向量拉直成一维的

$$U = (U_{0,0}, U_{0,1}, \dots, U_{0,N_2}, U_{1,0}, U_{1,1}, \dots, U_{N_1,N_2})$$

此时 U_{n_1,n_2} 对应的一维下标是 $n_1(N_1 + 1) + n_2$ 。双线性型表示为

$$\begin{aligned}
(\nabla u_N, \nabla v_N) &= U^T (\hat{A} \otimes \hat{B} + \hat{B} \otimes \hat{A}) V & (u_N, v_N) &= U^T (\hat{B} \otimes \hat{B}) V & (1, v_N) &= (\hat{F} \otimes \hat{F})^T V \\
(u_N, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} &= U^T (\hat{B} \otimes \hat{H} + \hat{H} \otimes \hat{B}) V & (1, v_N)_{\partial\hat{\Omega}} &= (\hat{F} \otimes \hat{G} + \hat{G} \otimes \hat{F})^T V
\end{aligned}$$

如果不对区域分割, $V(x)$ 是整体常数, 直接在参考单元上求解, 就相当于直接使用谱方法求解。要求解的方程组是

$$[(\hat{A} \otimes \hat{B} + \hat{B} \otimes \hat{A}) + V(\hat{B} \otimes \hat{B}) + h_0(\hat{B} \otimes \hat{H} + \hat{H} \otimes \hat{B})]U = (\hat{F} \otimes \hat{F}) + g_0(\hat{F} \otimes \hat{G} + \hat{G} \otimes \hat{F}) \quad (21)$$

$$[(\hat{A} \otimes \hat{B} + \hat{B} \otimes \hat{A}) + V(\hat{B} \otimes \hat{B}) + h_0(\hat{B} \otimes \hat{H} + \hat{H} \otimes \hat{B})]U = \lambda(\hat{B} \otimes \hat{B})U \quad (22)$$

下面我们考虑如何把空间分割, 并把不同的区域拼合起来。

对于长度为 $h_{m_1} \times h_{m_2}$ 的一般单元 $\Omega^{(m_1, m_2)} = [x_{m_1}, x_{m_1+1}] \times [y_{m_2}, y_{m_2+1}]$, 设 χ 是参考单元到当前单元的仿射变换, 就得到当前单元上的基函数为 $\{\phi_{n_1}(\chi^{-1}(x, y))\phi_{n_2}(\chi^{-1}(x, y))\}$ 。

因为只考虑矩形分割, 所以二维的仿射变换也可以看成分别在每个维度上伸缩和平移。积分变换的部分省略, 在小区间上的矩阵是

$$A^{(m)} = \frac{1}{4} \hat{A} \quad B^{(m)} = \frac{4}{h_{m_1} h_{m_2}} \hat{B} \quad F^{(m)} = \frac{h_{m_1} h_{m_2}}{2} \hat{F}$$

边界不用管, 拼合之后的边界就变了。

下面要把小区域上的自由度对应到整体的自由度, 在这个过程中要保证整体的函数是连续的。

小区域 $\Omega^{(m_1, m_2)}$ 的右边界为

$$\sum_{n_1, n_2=0}^{N_1, N_2} U_{n_1, n_2}^{(m_1, m_2)} \phi_{n_1}(1) \phi_{n_2}(y) = \sum_{n_2=0}^{N_2} U_{N_1, n_2}^{(m_1, m_2)} \phi_{n_2}(y)$$

小区域 $\Omega^{(m_1+1, m_2)}$ 的左边界为

$$\sum_{n_1, n_2=0}^{N_1, N_2} U_{n_1, n_2}^{(m_1+1, m_2)} \phi_{n_1}(-1) \phi_{n_2}(y) = \sum_{n_2=0}^{N_2} U_{0, n_2}^{(m_1+1, m_2)} \phi_{n_2}(y)$$

想要让函数整体连续，必须在边界上基函数的系数相同，就是 $U_{0, n_2}^{(m_1+1, m_2)}$ 和 $U_{N_1, n_2}^{(m_1, m_2)}$ 必须是同一个。

对上下左右四条边界的要求都是一样的。最后得到单元自由度 $U_{n_1, n_2}^{(m_1, m_2)}$ 对应的总体二维下标是 $(m_1 N_1 + n_1, +m_2 N_2 + n_2)$ ，再拉直成一维坐标就是 $(m_1 N_1 + n_1)(M_1 N_1 + 1) + m_2 N_2 + n_2$ 所有的编号都是从 0 开始的。

(此处也应该有图)

注：程序里面只有 $N_1 = N_2$ 且 $M_1 = M_2$ 的情况。

下面考虑边界，边界分为上下左右四部分考虑。

左边界是由 $\Omega^{(0,0)}, \Omega^{(0,1)}, \dots, \Omega^{(0, M_2-1)}$ 的左边界拼接成的。在 $\Omega^{(0, m_2)}$ 的左边界上， (u_N, v_N) 表示为

$$\sum_{i, j, k, l} U_{i, j}^{(0, m_2)} V_{k, l}^{(0, m_2)} \int_{-1}^1 \phi_i(-1) \phi_j(y) \phi_k(-1) \phi_l(y) dy = \sum_{j, l} U_{0, j}^{(0, m_2)} V_{0, l}^{(0, m_2)} \hat{B}_{j, l}$$

对于左边界，系数矩阵拉直成一维之后的单元刚度矩阵是 $\hat{B} \otimes \hat{H}^0$ 。同理，右边界的是 $\hat{B} \otimes \hat{H}^1$ ，上边界的是 $\hat{H}^1 \otimes \hat{B}$ ，下边界的是 $\hat{H}^0 \otimes \hat{B}$ 。

$$\hat{H}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad \hat{H}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & \ddots & & \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)} \quad (23)$$

对于右端项，同样的。左边界是 $\hat{F} \otimes \hat{G}^0$ 。同理，右边界的是 $\hat{F} \otimes \hat{G}^1$ ，上边界的是 $\hat{G}^1 \otimes \hat{F}$ ，下边界的是 $\hat{G}^0 \otimes \hat{F}$ 。

$$\hat{G}^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N+1} \quad \hat{G}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{N+1} \quad (24)$$

边界上的尺度变换系数是 $h_m/2$

3 目标问题