1 聚集到边界的概率

研究特征值问题，定义在 $[0,1]^d$ 上。

$$\begin{aligned} -\Delta u + KVu = \lambda u \qquad & \mathbf{x} \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0 \qquad & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

研究 $V(x)$ 为 Bernoulli 分布的情况。**它以概率 p 取值为 0，概率 $1-p$ 取值为 1。**

一维情况下，对于某个特征函数 $u(x)$，定义它聚集到边界的“程度”为

$$Pb = \frac{\max\{|u(0)|, |u(1)|\}}{\max_{x\in\Omega} |u(x)|}$$

二维情况下，定义它 localize 到边界的“程度”为

$$Pe = \frac{\max_{x\in\partial\Omega} |u(x)|}{\max_{x\in\Omega} |u(x)|}$$

同样可以定义 localize 到角落的“程度”为

$$Pc = \frac{\max\{|u(0,0)|, |u(0,1)|, |u(1,1)|, |u(1,0)|\}}{\max_{x\in\Omega} |u(x)|}$$

在 Dirichlet 边界下，这些都是 0。在导数边界条件下，随着 $V(x)$ 随机生成，这些量就是一些和 K, p, h 有关的随机变量。取值在 0 到 1 之间。下面研究这个随机变量的分布随参数的变化。

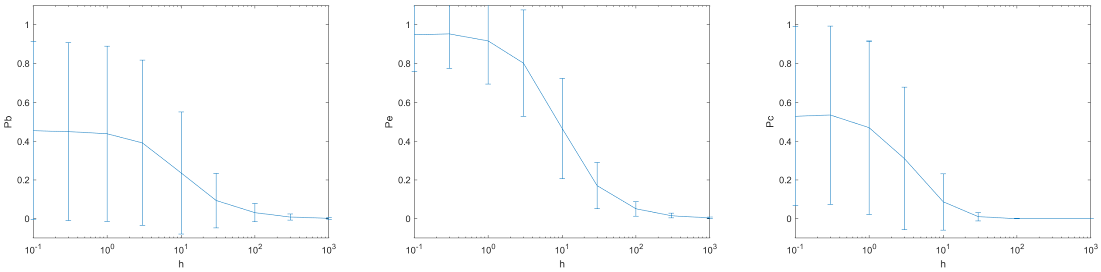
这里**只画出了最小特征值对应的特征函数**，其它较小特征值的规律和它是一样的。

一维情况下，区间分为 20 段。二维情况下，区域被分成 10×10 的方格。

之前的样本点只有 100 个，结果不是很精确。这里在每种情况下求解了 1000 个特征值问题。

1.1 关于 h 的变化

模拟结果 集中在边界的程度随 h 的变化如图1。图中参数为 $p = 0.5, K = 10^3$。



(a) 一维 (b) 二维（边） (c) 二维（角）

图 1: 实验结果

从图中可以看出，集中到边界的程度随 h 都是下降的。而且一维情况下没有二维情况下的剧烈。这和我们的理论相符。因为 h 越小越接近 Neumann 边界条件，而 h 越大越接近于 Dirichlet 边界条件。一维情况下不剧烈是因为一维情况下，边界附近 $V(x)$ 为 0 的概率较小，而二维情况下这个概率就大大增加了。

理论分析 无论其它参数如何变化，在 h 趋于无穷时，方程趋于 Dirichlet 边界条件，此时聚集到边界的程度趋于 0，这一点在所有的模拟结果中都很明显。

在 h 趋于 0 时，方程趋于 Neumann 边界条件，情况比较复杂，我们只能分析 K 足够大时候的情况。根据前面的结果，K 很大时，Neumann 边界条件下，特征函数会聚集到子区域特征值最大的地方。二维情况下的子区域特征值难以分析，一维情况下子区域特征值就是边界对称之后最长的一段。

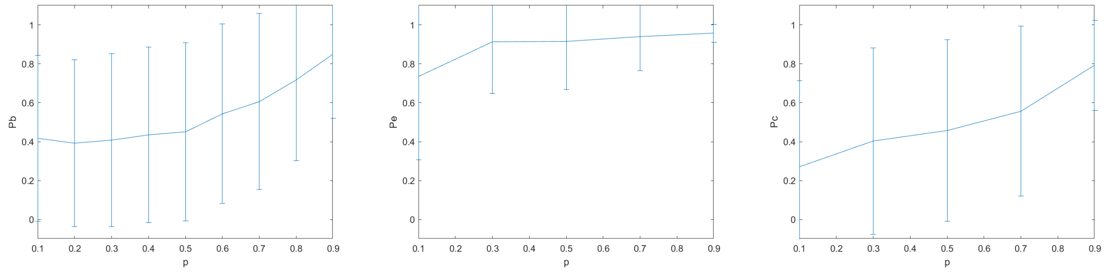
目前还算不出“最长的一段位于边界”这个概率的表达式。

1.2 关于 p 的变化

模拟结果 集中在边界的程度随 p 的变化如图2。图中参数为 $h = 1$，一维情况下 $K = 10^3$，二维情况下 $K = 10^4$。

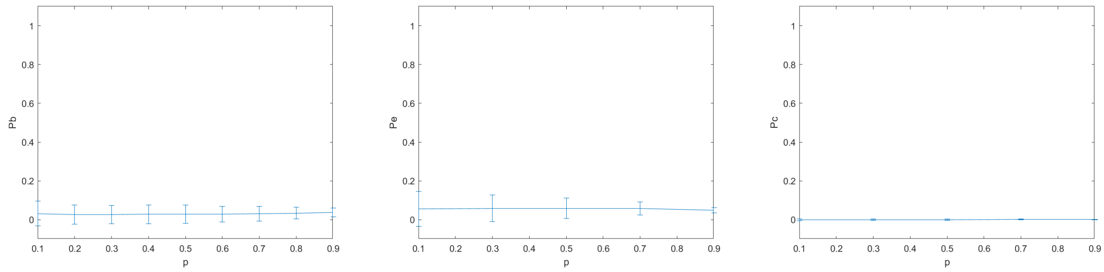
从图中可以看出，此时集中到边界的程度随 p 是上升的。

我们换一组参数，得到图3。图中参数为 $h = 100$，一维情况下 $K = 10^3$，二维情况下 $K = 10^4$。



(a) 一维　　(b) 二维（边）　　(c) 二维（角）

图 2: 实验结果



(a) 一维　　(b) 二维（边）　　(c) 二维（角）

图 3: 实验结果

从图中可以看出，当 h 很大的时候，方程接近于 Dirichlet 边界条件，集中到边界的程度接近于 0，此时和参数 p 就没什么关系了。

理论分析　在 p 等于 1 的时候，$V(x)$ 恒为 0，特征函数就是于常数。此时按照上面的指标，集中到边界的程度为 1。在 p 等于 0 的时候，$V(x)$ 恒为 K，特征函数集中到边界的程度由 h 决定。

图4中展示了不同 K 下，程度随 p 变化的情况，取的点比较少。**看起来这个问题可能比我们想的要复杂。**

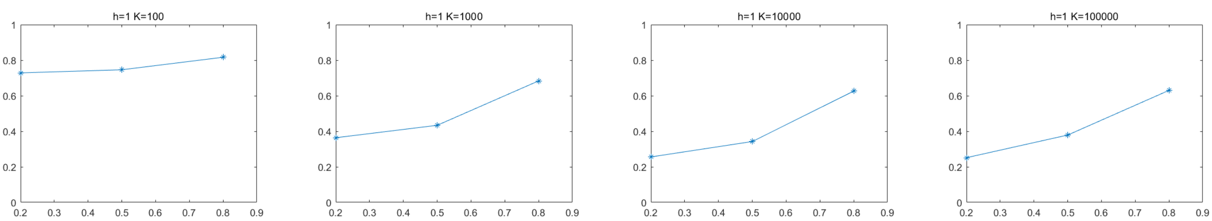
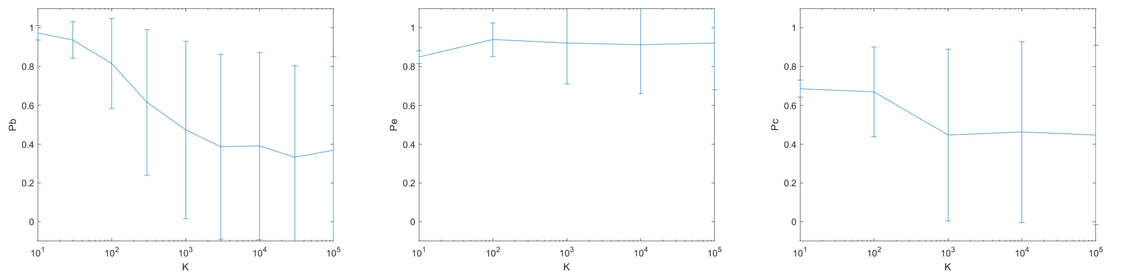


图 4: 实验结果

1.3 关于 K 的变化

集中在边界的程度随 K 的变化如图5。图中参数为 $h = 1, p = 0.5$。



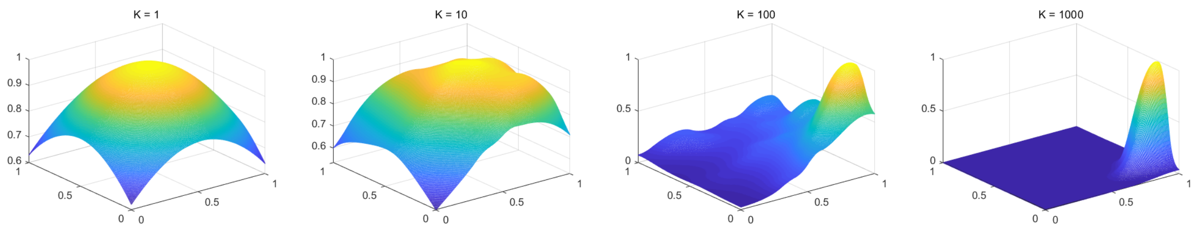
(a) 一维 (b) 二维（边） (c) 二维（角）

图 5: 实验结果

从图中可以看出，当 K 接近 0 的时候，特征函数接近常数，一定会聚集到边界。随着 K 逐渐增大，特征函数会逐渐产生聚集在某处的峰，此时可能不会聚集到边界。

对于二维情况，我们实在不知道该怎么解释。在 K 较大，已经产生 localize 现象的时候，我们可以看出，K 对结果影响不大。在 K 较小的时候，localize 现象还没有产生，分析起来比较困难。

图6中画出了某一个势函数下，不同的 K 对应的最小特征函数。可以看出，在一维的时候，localization 现象比较明显，而二维的时候，只有 K 很大的时候才有这种现象。在二维 K 不大不小的时候，什么都可能发生，很难分析。

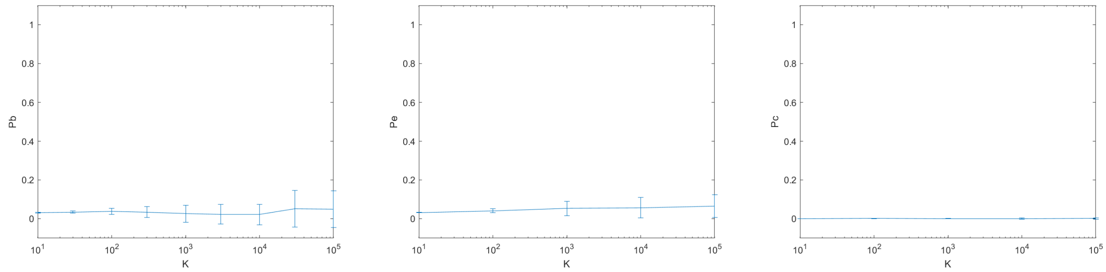


(a) (b) (c) (d)

图 6: 不同的 K

我们换一组参数，得到图7。图中参数为 $h = 100, p = 0.5$。

从图中可以看出，当 h 很大的时候，它和参数 K 也没什么关系。



(a) 一维　　(b) 二维（边）　　(c) 二维（角）

图 7: 实验结果

2　相变

这里我们考虑一维的情况。势函数取成：$N_2/2$ 个 1 + N_1 个 0 + N_2 个 1 + N_3 个 0 + N_4 个 1 + N_5 个 0 + ：$N_2/2$ 个 1。其中 $\max\{N_3, N_5\} < N_1 < N_3 + N_5$（两边差不多长），$N_4 < \min\{N_3, N_5\}/2$（被吃掉的部分要足够短），$N_2 > N_1 + N_3 + N_4 + N_5$（中间的分隔要足够长）。边界为周期边界。总长度 $N = N_2 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$。

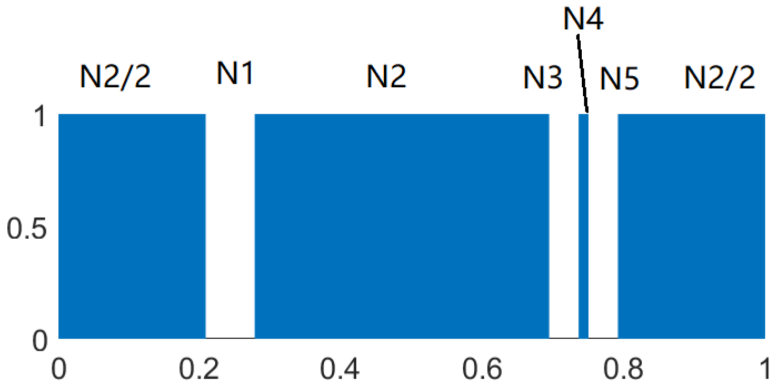
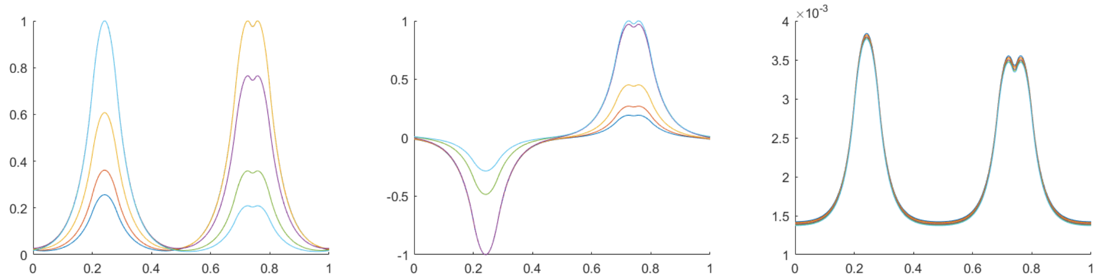


图 8: 示意图

取 $N = (5, 24, 3, 1, 3)$，画出不同 K 值下的第一个，第二个特征函数，和 landscape 如图9。可以看出，landscape 变化不大，但是特征函数 localize 的位置发生很大变化。

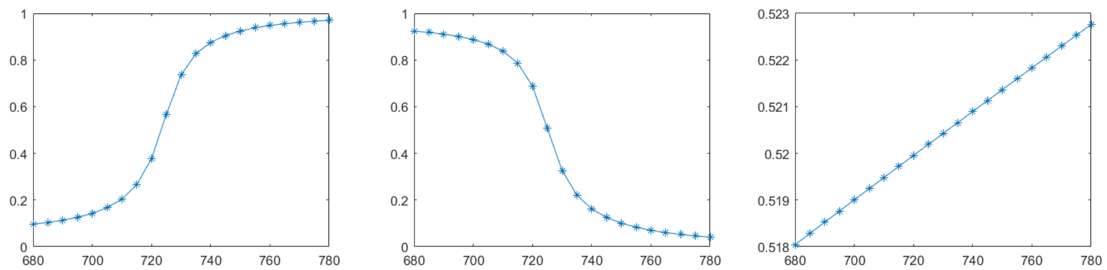
这里最小的特征函数可能出现两个峰，定义 F 为左峰高度除以左右两个峰高度之和。下面的图10里画出了第一个，第二个特征函数，和 landscape 的 F 随 K 的变化。横轴是 K，纵轴是 F。

可以看出，landscape 的峰高度比随 K 大致是线性的，变化范围很小。u1 和 u2 会有“相变”的现象。而且 u1 和 u2 呈现明显的负相关，相变的位置几乎相同。它们的 F 加起来近似等于 1。这一点可以通过正交性解释。前两个特征函数一定是正交的，也就是说相乘之后



(a) u1 (b) u2 (c) w

图 9: 模拟结果



(a) u1 (b) u2 (c) w

图 10: 模拟结果

积分为 0。因此第一个特征函数有两个峰，而且峰值全是大于 0 的时候，第二个特征函数的两个峰必定一正一负，而且高度的大小和第一个相反。这里的解释只是一个定量的解释，在模拟中，$F1$ 和 $F2$ 相加并不是精确等于 1 的。

对于特征值，图11中画出了前几个特征值随 K 变化的图像。横轴是 K，纵轴是特征值。localize 到左边的特征函数对应一个特征值，localize 到右边的对应一个特征值。它们随 K 增加而增长的变化速率不一样。由于我们关心“最小”特征值对应的特征函数，当一个特征值和另一个相等的时候，“最小”的特征值就从一个变成了另一个，从而发生了相变。后面的特征值和两个最小的特征值之间有很大的一段间隔，它们对相变几乎没什么影响。

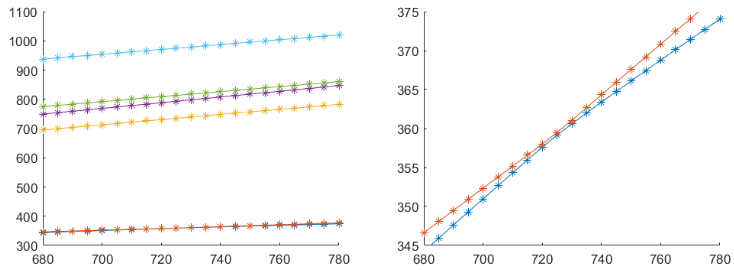
下面我们只研究最小特征值对应特征函数的相变现象。

这里对变量进行归一化，定义

$$L_1 = \frac{N_1}{N}, \quad L_2 = \frac{2N_2}{N}, \quad L_3 = \frac{N_3}{N}, \quad L_4 = \frac{N_4}{N}, \quad L_5 = \frac{N_5}{N}$$

这里满足 $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = 1$，它们分别对应问题中对应某一段的区间长度。

这五个变量中共有 4 个自由度。后面我们分别拟合这 4 个变量和相变点之间的关系。



(a) 特征值 (b) 特征值放大图

图 11: 模拟结果

2.1 模拟结果

下面我们做了更多的模拟，得到了不同 N 下的相变阈值，以及阈值附近相变的剧烈程度。表1中是用二分法求的。后面的 a 和 b 是用公式

$$F-0.5=b(K-K_c)^a$$

拟合得到的相变临界指数。这里的临界指数都是 1，说明这里的相变比较平缓，不是那种剧烈的相变。

表中展示了更多结果。结果数量很多，表里只有一部分。从这里可以看出，**换成周期边界条件之后，N_3 和 N_5 的地位完全等同了！**

N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	K(F=0.2)	K(F=0.5)	K(F=0.8)	a	b	$F'(K)$
3	10	2	1	2	413.648	448.785	467.804	0.990349	0.00977886	0.0096554
3	14	2	1	2	744.921	749.735	753.546	1.0029	0.0553361	0.0551021
3	18	2	1	2	1120.48	1121.27	1121.92	1.00228	0.331664	0.329056
4	14	2	1	3	485.277	506.996	521.789	0.994986	0.0135875	0.0135081
4	16	2	1	3	610.77	620.751	628.73	1.0015	0.0266872	0.0266278
4	20	2	1	3	878.578	880.924	883.011	1.00163	0.10729	0.106806
4	14	3	1	2	485.277	506.996	521.789	0.994986	0.0135875	0.0135081
4	16	3	1	2	610.77	620.751	628.73	1.0015	0.0266872	0.0266278
4	20	3	1	2	878.578	880.924	883.011	1.00163	0.10729	0.106806
4	13	3	1	3	1089.76	1090.34	1090.8	1.00172	0.457853	0.454671
4	19	3	1	3	1912.53	1912.54	1912.55	0.989933	21.1165	22.5528

表 1: 模拟结果

定义左右两个峰一样高 $F=0.5$ 时为相变点 K_c。

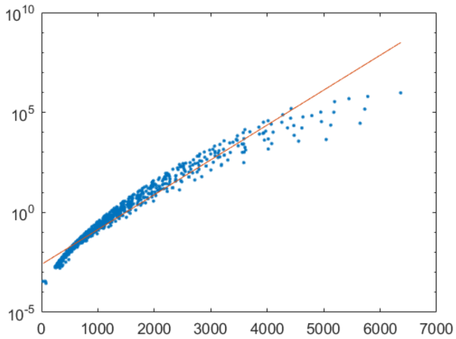
2.2 K_c 和 b 之间的关系

我们观察到，相变点越大的时候，相变越剧烈。我们首先来验证这个想法，做出临界点 Kc 和临界点导数 b 的散点图，如图12。可以看出，它们之间有很强的正相关关系。我们尝试用多项式拟合这些散点，得到的关系为

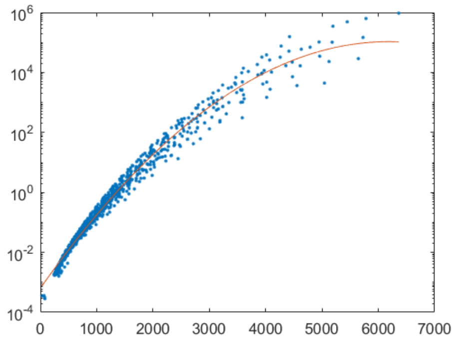
$$\log(b) = p_2 K_c^2 + p_1 K_c + p_0 \qquad p_2 = -0.49 \times 10^{-6}, p_1 = 0.00612, p_0 = -7.35$$

虽然这个多项式外推的趋势不太靠谱，但至少在当前范围内精确度比较高。线性模型似乎不能很好的刻画这个趋势。

好像也想不出为什么相变点越大时越剧烈，只是观察到了这样的现象。



(a) 线性拟合



(b) 二次多项式

图 12: K_c-b 拟合结果

2.3 L_2 和 K_c 之间的关系

N_2 对应的区域，作用就是把两段区域分割开。相变的本质是子区域的特征值哪个更大，整个问题是定义在 $[0,1]$ 上的，因此增加 L_2 相当于压缩两个子区域的区间长度，而区间长度的平方是和特征值成反比的。

根据这些分析，我们猜测关系为

$$\frac{1}{K_c} = A_c(L_1 + L_3 + L_4 + L_5)^2$$

在以下三组参数对模型进行拟合，得到拟合的参数值和 R^2 如下：

$$N = (5, ?, 3, 1, 3), \quad A_c = 0.0346, \quad R^2 = 1 - 2.6 \times 10^{-6} \quad \text{图中紫色}$$
$$N = (5, ?, 3, 1, 4), \quad A_c = 0.0112, \quad R^2 = 1 - 1.3 \times 10^{-11} \quad \text{图中红色}$$
$$N = (7, ?, 5, 1, 5), \quad A_c = 0.0077, \quad R^2 = 1 - 2.6 \times 10^{-15} \quad \text{图中蓝色}$$

由于数据是由模拟生成的，而不是从实际测量中获得，所以几乎没有什么误差，R^2 的值十分接近 1 也是可以接受的。

图13中可以看出，拟合结果很好。A_c 是一个和 N_2 无关的量，它越大代表相变点越小。

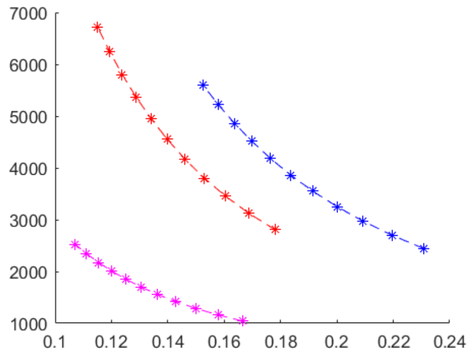


图 13: 拟合结果。横轴：$(L_1 + L_3 + L_4 + L_5)^2$，纵轴：$K_c$

2.4 L_4 和 A_c 之间的关系

画出 L_4 和 A_c 之间的散点图，我们发现它们近似是线性的关系。

进一步分析发现，如果 N_4 等于 0，模型中就不会出现相变。在 N_4 趋近于 0 的时候，相变点会不断变大，直到无穷，此时 A_c 趋于 0，所以线性关系对应的直线一定要过原点。

在 N_4 很大的时候，相变会消失，也就是随着 L_4 的增大，A_c 会在某个有限的位置趋于无穷。因此这里得到的线性关系只有在 L_4 较小的某个范围内才成立。

我们猜测 N_4 和 A_c 之间的关系为

$$A_c = B_c L_4$$

在以下三组参数对模型进行拟合，得到拟合的参数值和 R^2 如下：

$$\begin{aligned}
N = (30, 100, 20, ?, 20), &\quad B_c = 0.0.7608, \quad R^2 = 1 - 1.2 \times 10^{-3} \quad \text{图中紫色} \\
N = (20, 80, 15, ?, 15), &\quad B_c = 0.4434, \quad R^2 = 1 - 1.6 \times 10^{-3} \quad \text{图中红色} \\
N = (25, 90, 20, ?, 15), &\quad B_c = 0.5523, \quad R^2 = 1 - 9.6 \times 10^{-4} \quad \text{图中蓝色}
\end{aligned}$$

图14中可以看出，拟合结果很好。图中的这些直线都通过原点。这说明 N_4 越大的时候相变点越小，这和我们的直观相符。

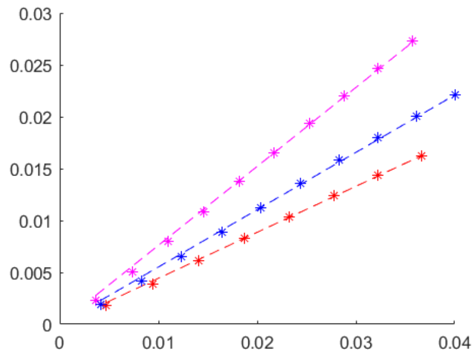


图 14: 拟合结果。横轴：L_4，纵轴：A_c

2.5　N_4 对应的位置和 B_c 之间的关系

这里我们保持 $N_3+N_4+N_5$ 整个区间的长度不变，改变 N_4 对应区间在其中的位置。由于 N_3 和 N_5 地位等同，这里的图像有一定的对称性。下面我们深入分析。在 $N_1>N_3$ 且 $N_1>N_5$ 的时候，只要 K 足够大，就一定会发生相变。而不满足这两个条件的时候，无论如何都不会发生相变。N_3 或 N_5 靠近 N_1 的时候，相变点就会变大，趋于无穷，此时 A_c 趋于 0。

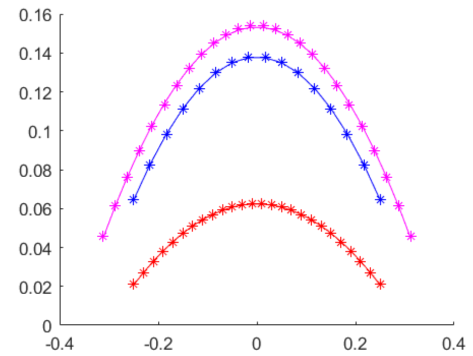


图 15: 对称性示意图。横轴：L_3-L_5，纵轴：B_c

根据这些分析，我们猜测关系为

$$B_c = D_c(L_3-L_1)(L_5-L_1)$$

图16中可以看出问题。图中所展示的关系确实是线性关系，但是常数项不为 0，这就和我们的猜测不符，无法进行下去了。

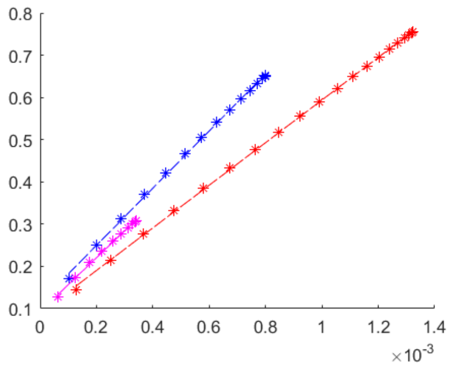


图 16: 拟合结果。横轴：$(L_3 - L_1)(L_5 - L_1)$，纵轴：B_c

2.6 L_1 和 A_c 之间的关系

对于 L_1，同样可以分析出来，如果 L_1 趋近于 $\max\{L_3, L_5\}$ 的时候，模型中就不会出现相变，相变点会不断变大，直到无穷，此时 A_c 趋于 0，所以对应的线一定要过原点。在 L_1 很大的时候，相变会消失，也就是随着 L_1 的增大，A_c 会在某个有限的位置趋于无穷。

画出 L_1 和 A_c 之间的散点图。如图17。图中的虚线是假设它们之间具有指数关系得到的。这也是在一定范围内成立的近似。

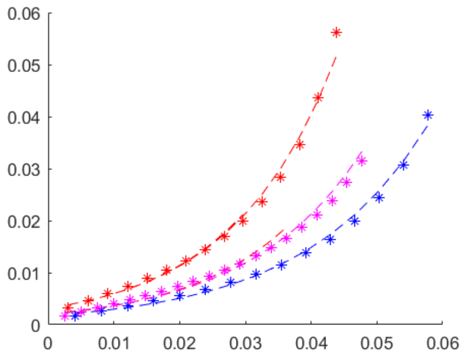


图 17: 拟合结果。横轴：$L_1 - \max\{L_3, L_5\}$，纵轴：A_c