来自灵魂深处的问题

sis-flag

2020 年 10 月 27 日

区域 $\Omega = [0,1]^d$，维数 $d = 1,2,3$。

区域上的二阶非对称椭圆算子

$$Lu = -\nabla(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu$$

满足非退化，以及解的存在唯一性，适定性等条件。还要满足极值原理的条件。

它的共轭算子为

$$\begin{aligned} L^*u &= -\nabla(A\nabla u) - \nabla(bu) + cu \\ &= -\nabla(A\nabla u) - b \cdot \nabla u + (c - \nabla b)u \end{aligned}$$

特征值问题

$$\begin{aligned} Lu &= \lambda u \qquad x \in \Omega \\ n^T A\nabla u + hu &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

其中 $h(x) \geq 0$，n 是边界的外法向量。

$w(x)$ 是这个方程的解，边界条件相同。

$$\begin{aligned} Lw &= 1 \qquad x \in \Omega \\ n^T A\nabla w + hw &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

定义格林函数

$$\begin{aligned} L^*G_y &= \delta_y \qquad x \in \Omega \\ n^T A\nabla G_y + (h + b \cdot n)G_y &= 0 \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

假设函数 u 满足原问题的边界条件，v 满足格林函数对应的边界条件，根据分部积分公式（写成分量的形式）

$$(Lu, v) = \int_\Omega [-\sum_{i,j} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + \sum_i b_i \partial_i u + cu] v \; dx$$

其中

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\partial_i(a_{i,j}\partial_j u) v \; dx \\
=&\int_\Omega a_{i,j}\, \partial_j u\, \partial_i v \; dx - \int_{\partial\Omega} n_i a_{i,j} (\partial_j u) v \; ds \\
=&\int_\Omega -\partial_j(a_{i,j}\partial_i v) u \; dx + \int_{\partial\Omega} n_j a_{i,j} (\partial_i v) u \; ds - \int_{\partial\Omega} n_i a_{i,j} (\partial_j u) v \; ds
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega b_i\, \partial_i u\, v \; dx = \int_\Omega -\partial_i(b_i\, v)\, u \; dx + \int_{\partial\Omega} n_i\, b_i\, u\, v \; ds$$

得到

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [-\sum_{i,j} \partial_i(a_{i,j}\partial_j u) + \sum_i b_i \partial_i u + cu] v \; dx = &\int_\Omega [-\sum_{i,j} \partial_j(a_{i,j}\partial_i v) - \sum_i \partial_i(b_i v) + cv] u \; dx \\
&+ \int_{\partial\Omega} \sum_i n_i\, b_i\, u\, v \; ds \\
&- \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} n_i\, a_{i,j}\, (\partial_j u)\, v \; ds \\
&+ \int_{\partial\Omega} \sum_{i,j} n_j\, a_{i,j}\, (\partial_i v)\, u \; ds
\end{aligned}$$

边界条件按分量的形式写出来是

$$\sum_{i,j} n_i\, a_{i,j}\, (\partial_j u) + h\, u = 0$$

$$\sum_{i,j} n_j\, a_{i,j}\, (\partial_i v) + \sum_i n_i\, b_i\, v + h\, v = 0$$

把这两个条件代入，边界上的积分就消失了。

于是得到

$$(u, L^* G_y) = (Lu, G_y) \qquad (w, L^* G_y) = (Lw, G_y)$$

所以有

$$
\begin{aligned}
u(y) &= (u, \delta_y) = (u, L^* G_y) = (Lu, G_y) = \lambda (u, G_y) \\
w(y) &= (w, \delta_y) = (w, L^* G_y) = (Lw, G_y) = (1, G_y)
\end{aligned}
$$

如果格林函数有非负性

$$
|u(y)| = |\lambda| \; |\int_\Omega G_y u \; dx| \le |\lambda| \int_\Omega |G_y u| \; dx = |\lambda| \int_\Omega |u| G_y \; dx
$$

归一化 $\max_{x\in\Omega} |u(x)| = 1$ 的情况下

$$
|u(y)| \le |\lambda| \int_\Omega 1 \cdot G_y \; dx = |\lambda| w(y)
$$

目前还没有在数值上找到反例。。。