一种基于最小二乘和流连续性的有限体积格式

sis-flag

2021 年 12 月 16 日

问题介绍

区域 Ω 是二维多边形区域。我们要在区域上求解稳态扩散问题

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a \, \nabla u) &= f \quad x \in \Omega \\ u &= u_0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $u(x)$ 是未知函数，$a(x)$ 是 2×2 对称正定的矩阵，表示张量型的扩散系数。

有限体积格式

我们希望在扭曲的多边形网格上求解方程。网格中的多边形叫做控制体。这里我们要求控制体至少是星形的，控制体的中心到其中任何一点的连线还在控制体中。

在控制体 K 上对方程两边积分，用散度定理得到

$$-\int_K \nabla \cdot (\kappa(x) \, \nabla u(x)) \; dx = -\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \int_e (\kappa(x) \, \nabla u(x)) \cdot n_{K,e} \; dx = \int_K f(x) \; dx$$

其中 $n_{K,e}$ 是控制体在边界上的外法方向，$e = AB$ 是控制体的边。

我们用函数在单元中心处的值代替边界上的值，也就是假设扩散系数和未知函数的梯度在每个单元上近似为常数。$\kappa(x) \, \nabla u(x) = \kappa(K) \, \nabla u(K) + \mathcal{O}(h)$。得到

$$F_{K,e} = -\int_e (\kappa(K) \, \nabla u(K)) \cdot n_{K,e} \; dx + \mathcal{O}(h^2)$$

这里 K 有时表示控制体，有时表示控制体中心坐标。

图 1: 数值格式的模板

如图1，边 $e = AB$ 是一条位于内部的边，它的中点为 E，方向向量为 t_e，法向为 n_e，n_e 从单元 K 指向单元 L。在图中红色的四边形中，我们定义近似解 $\hat{u}(x)$，它在三角形 KAB 和 LAB 上是线性函数。

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} g_K^T x + c_K & x \in K \\ g_L^T x + c_L & x \in L \end{cases}$$

已知方程的解 $u(x)$ 是连续的，而且流量 $a(x)\,\nabla u(x)$ 也连续。为了使两个单元上计算出的流量相同，需要满足

$$g_K^T\, a(K)\, n_e = g_L^T\, a(L)\, n_e = F_e \qquad g_K^T\, t_e = g_L^T\, t_e \qquad g_K^T\, x_E + c_K = g_L^T\, x_E + c_L$$

此时边界上的流量就是 $|e|F_e$。

此外，我们希望 $\hat{u}(x)$ 尽可能贴近解，也就是

$$\min \sum_{\alpha=K,L,A,B} |u(\alpha) - \hat{u}(\alpha)|^2$$

这个鬼东西的解写不出来显式表达式，就尴尬了。。。