任意网格上的边自由度有限体积格式

刘子旗 & 苗帅

2022 年 5 月 12 日

一般在扭曲网格上的有限体积格式，未知量都定义在单元中心和网格节点上。这里我们构造一族未知量定义在网格边上的有限体积格式。对于边自由度有限体积的框架下，我们证明了收敛性。

问题介绍

区域Ω是二维多边形区域。我们要在区域上求解稳态扩散问题

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(\kappa\,\nabla u) &= f \quad x\in\Omega \\ u(x) &= u_0 \quad x\in\partial\Omega \end{aligned}$$

其中$u(x)$是未知函数，$\kappa(x)$是2×2对称正定的矩阵，表示张量型的扩散系数。

我们希望在任意多边形网格上求解方程。多边形网格由单元，节点和边组成。如图1，边AB是单元K和单元L之间的边，它的中点为E。我们把单元中心和节点连接起来（虚线），使得每条边都被包围在一个四边形内。虚线所组成的网格叫做对偶网格，每条边对应的四边形叫做边控制体。

格式构造

在图中虚线围成的四边形$AKBL$中，对方程两边积分，用散度定理得到

$$-\int_{AKBL}\nabla\cdot(\kappa(x)\,\nabla u(x))\;dx = -\sum_{\sigma=KA,AL,LB,BK}\int_{\sigma}(\kappa(x)\,\nabla u(x))\cdot n_{E,\sigma}\;dx = \int_K f(x)\;dx$$

其中$n_{E,\sigma}$表示虚线对应的法方向，也就是四边形的外法方向。

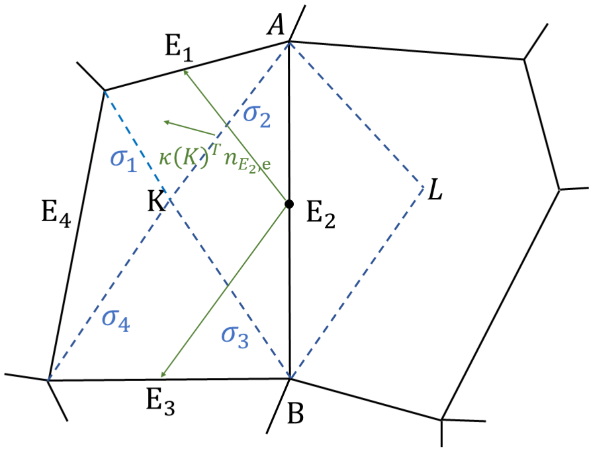


图 1: 数值格式的网格和模板

我们假设扩散系数在每个单元上近似为常数。$\kappa(x) = \kappa(K) + \mathcal{O}(h)$。在虚线网格边上的流量可以表示为

$$F_{E,\sigma} = -\int_{\sigma} (\kappa(x)\,\nabla u(x)) \cdot n_{E,\sigma}\; dx = |\sigma|\,\nabla u(x) \cdot \kappa(K)^T\, n_{E,\sigma} + \mathcal{O}(h^2)$$

下面我们给出两种通过边自由度近似流量的方法。

边自由度格式

如图1，在单元K中，边E_0, E_1, E_2, E_3顺时针排列。考虑E_2对应的边控制体，在计算对偶网格边σ上的流量时，我们把联合法向量$\kappa(K)^T\, n_{E,\sigma}$分解成$\overrightarrow{E_2E_1}, \overrightarrow{E_2E_3}$的组合，即

$$|\sigma|\kappa(K)^T n_{E_2,\sigma} = \alpha_1\, \overrightarrow{E_2E_1} + \alpha_2\, \overrightarrow{E_2E_3}$$

根据方向导数的性质

$$\nabla u \cdot \overrightarrow{E_2E_1} = u(E_1) - u(E_2) + \mathcal{O}(h)$$

得到流量表示为

$$F_{E_1,\sigma} = (\alpha_1\,(u(E_1) - u(E_0)) + \alpha_2\,(u(E_1) - u(E_2))) + \mathcal{O}(h^2)$$

这样我们就给出了流量的表达式。

同理，在相邻的边控制体上，我们也可以得到另一侧的流量$F_{E_1,\sigma}$。既然两个流量都是二阶的，考虑到流守恒的要求，我们可以把两个流平均起来，就得到了最终的流量。（此处要注意符号，E_1和E_2上计算的流量都是以向外为正方向）

$$F_{\sigma} = \frac{1}{2}(F_{E_1,\sigma} - F_{E_2,\sigma})$$

边自由度格式的一般框架

对于原网格中的单元K，单元中包含n条对偶网格边$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$

强制性证明

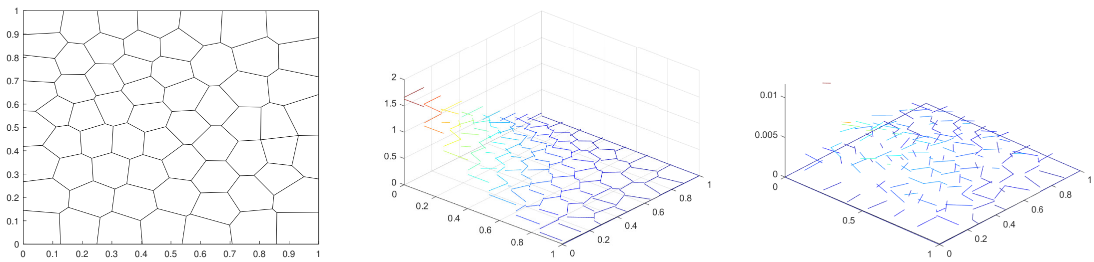
实验结果

实验1

求解稳态扩散方程，精确解和扩散系数选为

$$u = \sin((x-1)(y-1)) - (x-1)^3(y-1)^2 \qquad a = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

网格为随机多边形网格，使用的网格和结果如图。



(a) 多边形网格　　(b) 数值解u_h　　(c) 误差$u - u_h$

图 2: 实验结果1

在这样的网格上，误差已经达到了10^{-2}。

实验2

精确解和扩散系数选为

$$u = 16\, x\, y\, (1-x)\, (1-y) \qquad a = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

九点有限体积格式			边中点有限体积格式		
DOF	$\|u-u_h\|_\infty$	order	DOF	$\|u-u_h\|_\infty$	order
56	4.32e-02	*	92	5.43e-02	*
224	1.08e-02	1.99381	352	1.77e-02	1.67478
896	2.72e-03	1.99582	1376	4.96e-03	1.86234
3584	6.81e-04	1.99781	5440	1.31e-03	1.93628
14336	1.70e-04	1.99893	21632	3.37e-04	1.9693

使用的网格如图。对网格不断加密，得到收敛阶如下表

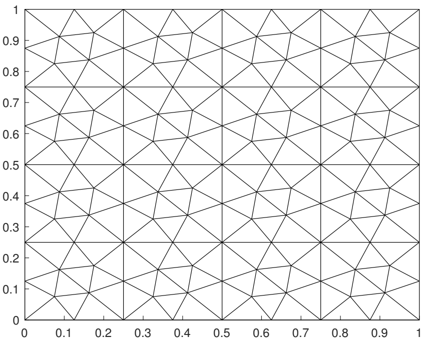


图 3: 实验2网格

边中点有限体积格式可以达到二阶收敛，而且在某些特殊的网格上，它比九点格式更有优势。