# 边中点有限体积格式

sis-flag

2022 年 4 月 6 日

一般在扭曲网格上的有限体积格式，未知量都定义在单元中心和网格节点上。这里我们构造一种未知量定义在网格边上的守恒的有限体积格式。

## 问题介绍

区域 $\Omega$ 是二维多边形区域。我们要在区域上求解稳态扩散问题

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (\kappa \, \nabla u) &= f \quad x \in \Omega \\ u(x) &= u_0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

其中 $u(x)$ 是未知函数，$\kappa(x)$ 是 $2 \times 2$ 对称正定的矩阵，表示张量型的扩散系数。

## 边中点有限体积格式

我们希望在任意多边形网格上求解方程。

如图1，边 $AB$ 是单元 $K$ 和单元 $L$ 之间的边，它的中点为 $E$。连接单元中心和节点，围成的四边形 $AKBL$。我们把这个四边形叫做“边控制体”。

在边控制体上对方程两边积分，用散度定理得到

$$-\int_{AKBL} \nabla \cdot (\kappa(x) \, \nabla u(x)) \; dx = -\sum_{\sigma = KA, AL, LB, BK} \int_{\sigma} (\kappa(x) \, \nabla u(x)) \cdot n_{E,\sigma} \; dx = \int_K f(x) \; dx$$

其中 $n_{E,\sigma}$ 表示虚线对应的法方向，也就是边控制体的外法方向。

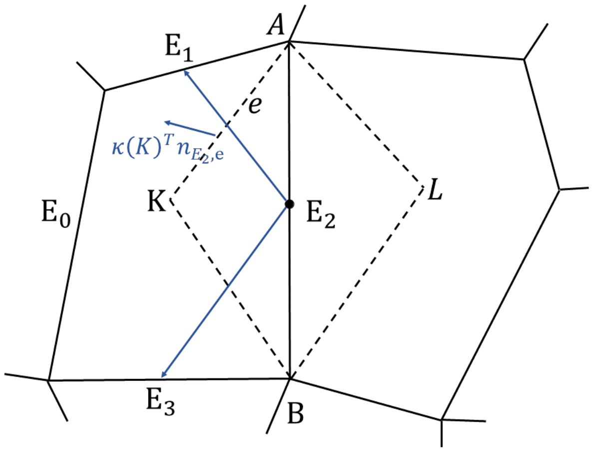



图 1: 数值格式的模板

我们假设扩散系数在每个单元上近似为常数。$\kappa(x) = \kappa(K) + \mathcal{O}(h)$。得到在虚线网格边上的流量近似为

$$F_{E,\sigma} = -\int_\sigma (\kappa(x)\,\nabla u(x)) \cdot n_{E,\sigma}\; dx = -\nabla u \cdot (|\sigma|\kappa(K)^T\, n_{E,\sigma}) + \mathcal{O}(h^2)$$

向量 $|\sigma|\kappa(K)^T n_{E,\sigma}$ 同样叫做联合法向量。

如图1，在单元 $K$ 中，边 $E_0, E_1, E_2, E_3$ 顺时针排列。在计算 $E_2$ 对应的边控制体上的流量时，我们把联合法向量分解成 $\overrightarrow{E_2E_1}, \overrightarrow{E_2E_3}$ 的组合，即

$$|\sigma|\kappa(K)^T n_{E_2,\sigma} = \alpha_1\, \overrightarrow{E_2E_1} + \alpha_2\, \overrightarrow{E_2E_3}$$

根据方向导数的性质

$$\nabla u \cdot \overrightarrow{E_2E_1} = u(E_1) - u(E_2) + \mathcal{O}(h)$$

得到流量表示为

$$F_{E_1,\sigma} = (\alpha_1\,(u(E_1) - u(E_0)) + \alpha_2\,(u(E_1) - u(E_2))) + \mathcal{O}(h^2)$$

同理，在相邻的边控制体上，我们也可以得到另一侧的流量 $F_{E_2,\sigma}$。既然两个流量都是二阶的，考虑到流守恒的要求，我们可以把两个流平均起来，就得到了最终的流量。（此处要注意符号，$E_1$ 和 $E_2$ 上计算的流量都是以向外为正方向）

$$F_\sigma = \frac{1}{2}(F_{E_1,\sigma} - F_{E_2,\sigma})$$

这样就得到了最终的数值格式。

## 数值实现

在网格边中点 $E$ 处，它对应的边控制体也用 $E$ 表示。边中点格式表示为

$$\sum_{\sigma} \mathcal{F}_{E,\sigma} = |E|\, f(E)$$

注意，这里的 $f(E)$ 表示的是右端项在四边形控制体内的积分平均，而不是在边中点处的函数值。

在程序中，我们要遍历每条单元中心和节点之间的连线来装配总体的系数矩阵。

设单元 $U$ 中，对应的边为 $E_0, E_1, \cdots E_n$，按顺时针排列。节点 $P$ 位于 $E_1, E_2$ 之间。$\sigma = UP$ 是单元中心和节点的连线。它的法向为 $n_e$，从 $E_1$ 指向 $E_2$。

在 $E_1$ 对应的边控制体上，$\sigma$ 上沿着 $n_e$ 方向的流量为

$$F_{E_1,\sigma} = \alpha_{1,0}\left(u(E_1) - u(E_0)\right) + \alpha_{1,2}\left(u(E_1) - u(E_2)\right)$$

其中系数由向量分解确定

$$|\sigma|\kappa(K)^T n_\sigma = \alpha_{1,0}\,\overrightarrow{E_1E_0} + \alpha_{1,2}\,\overrightarrow{E_1E_2}$$

在 $E_2$ 对应的边控制体上，$\sigma$ 上沿着 $n_e$ 方向的流量为

$$F_{E_2,\sigma} = \alpha_{2,1}\left(u(E_2) - u(E_1)\right) + \alpha_{2,3}\left(u(E_2) - u(E_3)\right)$$

其中系数由向量分解确定

$$|\sigma|\kappa(K)^T n_\sigma = \alpha_{2,1}\,\overrightarrow{E_2E_1} + \alpha_{2,3}\,\overrightarrow{E_2E_3}$$

平均之后的流量为

$$F_\sigma = \frac{1}{2}F_{E_1,\sigma} + \frac{1}{2}F_{E_2,\sigma}$$

计算边 $\sigma$ 上的流量时，相当于把这两个边流量矩阵加到总体矩阵中去

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_{1,0} & \alpha_{1,0} + \alpha_{1,2} & -\alpha_{1,2} \\ \alpha_{1,0} & -\alpha_{1,0} - \alpha_{1,2} & \alpha_{1,2} \end{pmatrix}$$

在总体矩阵中对应第 $E_1, E_2$ 行和第 $E_0, E_1, E_2$ 列，

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha_{2,1} & \alpha_{2,1} + \alpha_{2,3} & -\alpha_{2,3} \\ \alpha_{2,1} & -\alpha_{2,1} - \alpha_{2,3} & \alpha_{2,3} \end{pmatrix}$$

在总体矩阵中对应第 $E_1, E_2$ 行和第 $E_1, E_2, E_3$ 列，

只考虑 Dirichlet 边界条件。如果某条边 $E_i$ 在区域边界，它直接通过方程的边界条件得到。就是在矩阵中 $E_i$ 对应的行全部改成 0，只有第 $E_i$ 行，第 $E_i$ 列为 1，右端项中 $E_i$ 对应的位置为边界条件在 $E_i$ 处的值。

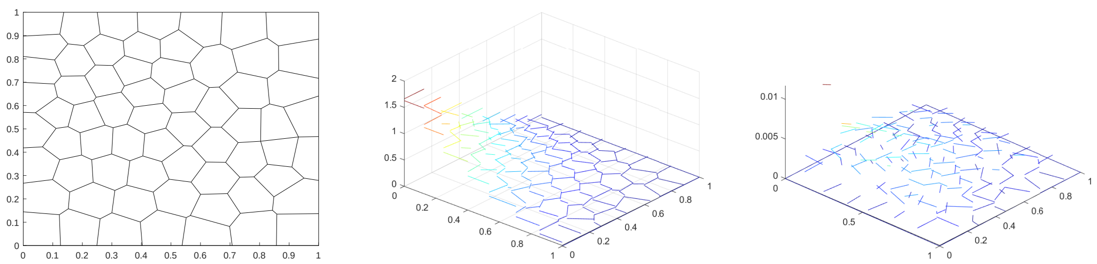
# 实验结果

## 实验 1

求解稳态扩散方程，精确解和扩散系数选为

$$u = \sin((x-1)(y-1)) - (x-1)^3(y-1)^2 \qquad a = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

网格为随机多边形网格，使用的网格和结果如图。



(a) 多边形网格 (b) 数值解 $u_h$ (c) 误差 $u - u_h$

图 2: 实验结果 1

在这样的网格上，误差已经达到了 $10^{-2}$。

## 实验 2

精确解和扩散系数选为

$$u = 16\, x\, y\, (1-x)\, (1-y) \qquad a = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}$$

使用的网格如图。对网格不断加密，得到收敛阶如下表

| 九点有限体积格式 | | | 边中点有限体积格式 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| DOF | $\|u-u_h\|_\infty$ | order | DOF | $\|u-u_h\|_\infty$ | order |
| 56 | 4.32e-02 | * | 92 | 5.43e-02 | * |
| 224 | 1.08e-02 | 1.99381 | 352 | 1.77e-02 | 1.67478 |
| 896 | 2.72e-03 | 1.99582 | 1376 | 4.96e-03 | 1.86234 |
| 3584 | 6.81e-04 | 1.99781 | 5440 | 1.31e-03 | 1.93628 |
| 14336 | 1.70e-04 | 1.99893 | 21632 | 3.37e-04 | 1.9693 |

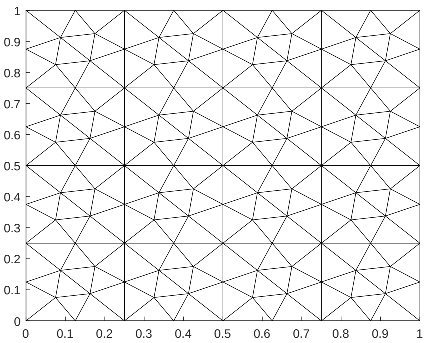



图 3: 实验 2 网格

边中点有限体积格式可以达到二阶收敛，而且在某些特殊的网格上，它比九点格式更有优势。