谱元法笔记 2

sis-flag

2020 年 10 月 22 日

1 一维情况

求解区域 $\Omega = [0, 1]$。

特征值问题

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in \Omega$$

源项问题

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega$$

其中 $a(x), b(x), c(x), f(x)$ 是有界，分片连续的已知函数。$a(x)$ 有大于 0 的下界。

边界可以是：固定边界

$$u(0) = u_0 \quad \text{and} \quad u(1) = u_1$$

导数边界（$h(x) \geq 0$）

$$-a(0)u'(0) + h(0)u(0) = g(0) \quad \text{and} \quad a(1)u'(1) + h(1)u(0) = g(1)$$

和周期边界

$$u(0) = u(1) \quad \text{and} \quad u'(0) = u'(1)$$

在特征值问题中，边界条件都应是齐次的。

1.1 变分形式

1.1.1 固定边界

固定边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H_0^1(\Omega) \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv = \lambda \int_\Omega uv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

固定边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = u_0 \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

积分变量都是 x，省略。

1.1.2 导数边界

导数边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv + \int_{\partial\Omega} huv = \lambda \int_\Omega uv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

导数边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H^1(\Omega) \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv + \int_{\partial\Omega} huv = \int_\Omega fv + \int_{\partial\Omega} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

1.1.3 周期边界

周期边界特征值问题对应变分形式

$$\text{find } \lambda \in \mathbb{C}, u \in H_P^1(\Omega) \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv = \lambda \int_\Omega uv \quad \forall v \in H_P^1(\Omega)$$

周期边界源项问题对应变分形式

$$\text{find } u \in H_P^1(\Omega) \quad \int_\Omega au'v' + \int_\Omega bu'v + \int_\Omega cuv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_P^1(\Omega)$$

1.2 单元基函数

一维的参考单元 $\hat{\Omega} = [-1, 1]$，选取参考单元上的一组基函数为

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(L_0(x) - L_1(x)) & k = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{4k-2}}(L_k(x) - L_{k-2}(x)) & 2 \le k \le N \\ \frac{1}{2}(L_0(x) + L_1(x)) & k = N+1 \end{cases}$$

共 $N+1$ 个。其中 $L_k(x)$ 是 k 次勒让德多项式。

此时 φ_0 的系数就是函数在左端点的函数值，φ_N 的系数就是函数在右端点的函数值。在很多块区域拼起来时，这两个就是边界上的自由度。

根据公式 $(2k+1)L_k(x) = L'_{k+1}(x) - L'_{k-1}(x)$ 得到

$$\varphi'_k(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & k = 1 \\ \frac{\sqrt{4k-2}}{2} L_{k-1}(x) & 2 \le k \le N \\ \frac{1}{2} & k = N+1 \end{cases}$$

$x_1, \cdots x_{N+1}$ 和 $w_1, \cdots w_{N+1}$ 是 $[-1,1]$ 上的高斯积分点和积分权重。积分可以近似为

$$\int_{-1}^{1} a\varphi_i'\varphi_j' \ dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k a(x_k)\varphi_i'(x_k)\varphi_j'(x_k)$$
$$\int_{-1}^{1} b\varphi_i'\varphi_j \ dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k b(x_k)\varphi_i'(x_k)\varphi_j(x_k)$$
$$\int_{-1}^{1} c\varphi_i\varphi_j \ dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k c(x_k)\varphi_i(x_k)\varphi_j(x_k)$$
$$\int_{-1}^{1} f\varphi_i \ dx = \sum_{k=1}^{N+1} w_k f(x_k)\varphi_i(x_k)$$

在实际计算中，如果已经计算出了

$$d\Phi = (\varphi_j'(x_i))_{i,j}^{(N+1)\times(N+1)}$$
$$\Phi = (\varphi_j(x_i))_{i,j}^{(N+1)\times(N+1)}$$

例如

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) \end{bmatrix} \qquad d\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1'(x_1) & \varphi_2'(x_1) \\ \varphi_1'(x_2) & \varphi_2'(x_2) \end{bmatrix}$$

想要求出

$$A^{(l)} = (\int_{-1}^{1} a\varphi_i'\varphi_j' \ dx)_{i,j}^{(N+1)\times(N+1)}$$
$$B^{(l)} = (\int_{-1}^{1} b\varphi_i\varphi_j' \ dx)_{i,j}^{(N+1)\times(N+1)}$$
$$C^{(l)} = (\int_{-1}^{1} c\varphi_i\varphi_j \ dx)_{i,j}^{(N+1)\times(N+1)}$$
$$F^{(l)} = (\int_{-1}^{1} f\varphi_i \ dx)_{i}^{N+1}$$

就是

$$A^{(l)} = (d\Phi)^T \cdot diag(a(x_1), \cdots, a(x_{N+1})) \cdot diag(w_1, \cdots, w_{N+1}) \cdot (d\Phi)$$
$$B^{(l)} = \Phi^T \cdot diag(b(x_1), \cdots, b(x_{N+1})) \cdot diag(w_1, \cdots, w_{N+1}) \cdot d\Phi$$
$$C^{(l)} = \Phi^T \cdot diag(c(x_1), \cdots, c(x_{N+1})) \cdot diag(w_1, \cdots, w_{N+1}) \cdot \Phi$$
$$F^{(l)} = \Phi^T \cdot (w_1 f(x_1), \cdots, w_{N+1} f(x_{N+1}))^T$$

1.3 单元基和全局基

区域上的网格 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{M+1} = 1$。选取离散空间 V_N 是分片 N 次多项式，而且整体连续的函数空间。

设 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots$ 是函数空间的一组基，数值解可以表示为

$$u_N(x) = \sum_i U_i \phi_i(x)$$

全局自由度 $U = (U_1, U_2, \cdots, U_N)^T$。

离散问题可以写成矩阵形式

$$AU = F \qquad \text{and} \qquad AU = \lambda BU$$

网格把区间分成很多个单元 $\Omega^{(m)} (m = 1, 2, \cdots, M)$。在每个单元上，基函数是 φ_i。数值解可以表示为

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N+1} U_n^{(m)} \varphi_i(\xi) \quad x \in \Omega^{(m)}$$

局部自由度 $U_i^{(m)}$。

由于在单元连接处要连续，可以得到从局部自由度到整体自由度的对应关系为

$$U_{(m-1)N+n} \leftrightarrow U_n^{(m)} \quad n = 1, 2, \cdots, N+1 \quad m = 1, 2, \cdots, M$$

对于周期边界条件，对应关系为

$$\begin{aligned} U_{(m-1)N+n} &\leftrightarrow U_n^{(m)} \\ U_1 &\leftrightarrow U_{N+1}^{(M)} \end{aligned}$$

在弱形式中，积分可以写成每个单元上积分的叠加

$$\int_\Omega au'v' \, dx = \sum_{m=1}^{M} \int_{\Omega^{(m)}} au'v' \, dx$$

这样就得到了通过单元刚度矩阵拼接成总体刚度矩阵的方法。

1.4 仿射变换

把定义在 $\Omega^{(m)}$ 上的积分和定义在 $[-1, 1]$ 上的基函数对应起来。（略）

2 二维情况

求解区域 $\Omega = [0,1]^2$。

特征值问题

$$-\nabla(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \lambda u(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega$$

源项问题

$$-\nabla(a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + b(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \Omega$$

其中 $a(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2}, b(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}^2, c(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$ 是有界，分片连续的已知函数。$a(\mathbf{x})$ 对称正定，特征值有一致的大于 0 的下界。

边界可以是：固定边界

$$u(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

导数边界（n 是区域外法向量，$h(\mathbf{x}) \geq 0$）

$$\frac{\partial au}{\partial n}(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

和周期边界

$$\begin{aligned} u(x,0) = u(x,1) \quad &\text{and} \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial n}(x,1) \qquad x \in [0,1] \\ u(0,y) = u(1,y) \quad &\text{and} \quad -\frac{\partial u}{\partial n}(0,y) = \frac{\partial u}{\partial n}(1,y) \qquad y \in [0,1] \end{aligned}$$

在特征值问题中，边界条件都应是齐次的。

2.1 变分形式

（略）

2.2 单元基函数

一维的参考单元 $\hat{\Omega} = [-1,1]^2$，参考单元上的基函数是张量形式的

$$\phi_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)$$

共 $(N+1)^2$ 个。

$x_1, \cdots x_{N+1}$，$y_1, \cdots y_{N+1}$ 和 $w_1, \cdots w_{N+1}$ 是 $[-1,1]$ 上的高斯积分点和积分权重。

把二维的下标拉直成一维，就是

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{i+(j-1)(N+1)} &\leftrightarrow (x_i, y_j) \\
\mathbf{w}_{i+(j-1)(N+1)} &\leftrightarrow w_i w_j \\
\phi_{i+(j-1)(N+1)}(\mathbf{x}) &\leftrightarrow \phi_{i,j}(x,y) = \varphi_i(x)\varphi_j(y)
\end{aligned}$$

liru

$$(1,1) \leftrightarrow 1, (2,1) \leftrightarrow 2, \cdots (N+1,1) \leftrightarrow N+1, (1,2) \leftrightarrow N+2, \cdots (N+1,N+1) \leftrightarrow (N+1)^2$$

二维的基函数矩阵可以由一维情况下的张量积产生，就是

$$\begin{aligned}
\Phi_0 = (\phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} &= \Phi \otimes \Phi \\
\Phi_x = (\nabla_x \phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} &= \Phi \otimes (d\Phi) \\
\Phi_y = (\nabla_y \phi_j(\mathbf{x}_i))_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} &= (d\Phi) \otimes \Phi
\end{aligned}$$

其中的符号代表 Kronecker 张量积。

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
\nabla_x\phi_1(\mathbf{x}_1) & \nabla_x\phi_2(\mathbf{x}_1) & \nabla_x\phi_3(\mathbf{x}_1) & \nabla_x\phi_4(\mathbf{x}_1) \\
\nabla_x\phi_1(\mathbf{x}_2) & \nabla_x\phi_2(\mathbf{x}_2) & \nabla_x\phi_3(\mathbf{x}_2) & \nabla_x\phi_4(\mathbf{x}_2) \\
\nabla_x\phi_1(\mathbf{x}_3) & \nabla_x\phi_2(\mathbf{x}_3) & \nabla_x\phi_3(\mathbf{x}_3) & \nabla_x\phi_4(\mathbf{x}_3) \\
\nabla_x\phi_1(\mathbf{x}_4) & \nabla_x\phi_2(\mathbf{x}_4) & \nabla_x\phi_3(\mathbf{x}_4) & \nabla_x\phi_4(\mathbf{x}_4)
\end{bmatrix} \\
=&\begin{bmatrix}
\varphi_1'(x_1)\varphi_1(y_1) & \varphi_2'(x_1)\varphi_1(y_1) & \varphi_1'(x_1)\varphi_2(y_1) & \varphi_2'(x_1)\varphi_2(y_1) \\
\varphi_1'(x_2)\varphi_1(y_1) & \varphi_2'(x_2)\varphi_1(y_1) & \varphi_1'(x_2)\varphi_2(y_1) & \varphi_2'(x_2)\varphi_2(y_1) \\
\varphi_1'(x_1)\varphi_1(y_2) & \varphi_2'(x_1)\varphi_1(y_2) & \varphi_1'(x_1)\varphi_2(y_2) & \varphi_2'(x_1)\varphi_2(y_1) \\
\varphi_1'(x_2)\varphi_1(y_2) & \varphi_2'(x_2)\varphi_1(y_2) & \varphi_1'(x_2)\varphi_2(y_2) & \varphi_2'(x_2)\varphi_2(y_2)
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

积分可以近似为

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\nabla\phi_i)^T a(\nabla\phi_j)\ dx \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \begin{bmatrix} \nabla_x\phi_i(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y\phi_i(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a_{1,1}(\mathbf{x}_n) & a_{1,2}(\mathbf{x}_n) \\ a_{2,1}(\mathbf{x}_n) & a_{2,2}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_x\phi_j(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y\phi_j(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_x\phi_i(\mathbf{x}_n) a_{1,1}(\mathbf{x}_n)\nabla_x\phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_y\phi_i(\mathbf{x}_n) a_{2,1}(\mathbf{x}_n)\nabla_x\phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_x\phi_i(\mathbf{x}_n) a_{1,2}(\mathbf{x}_n)\nabla_y\phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \nabla_y\phi_i(\mathbf{x}_n) a_{2,2}(\mathbf{x}_n)\nabla_y\phi_j(\mathbf{x}_n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i b^T(\nabla\phi_j)\ dx &= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) \begin{bmatrix} b_1(\mathbf{x}_n) \\ b_2(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \nabla_x\phi_j(\mathbf{x}_n) \\ \nabla_y\phi_j(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) b_1(\mathbf{x}_n)\nabla_x\phi_j(\mathbf{x}_n) \\
&+ \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) b_2(\mathbf{x}_n)\nabla_y\phi_j(\mathbf{x}_n)
\end{aligned}
$$

$$
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i c\phi_j\ dx = \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n \phi_i(\mathbf{x}_n) c(\mathbf{x}_n)\phi_j(\mathbf{x}_n)
$$

$$
\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\phi_i\ dx = \sum_{n=0}^{(N+1)^2} \mathbf{w}_n f(\mathbf{x}_n)\phi_i(\mathbf{x}_n)
$$

写成矩阵的形式

$$
\begin{aligned}
A^{(l)} &= (\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\nabla\phi_i)^T a(\nabla\phi_j)\ dx)_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} \\
B^{(l)} &= (\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i b^T(\nabla\phi_j)\ dx)_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} \\
C^{(l)} &= (\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_i c\phi_j\ dx)_{i,j}^{(N+1)^2\times(N+1)^2} \\
F^{(l)} &= (\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\phi_i\ dx)_{i}^{(N+1)^2}
\end{aligned}
$$

就是

$$\begin{aligned}
A^{(l)} &= \Phi_x^T \cdot diag(\mathbf{w}a_{1,1}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_x^T \cdot diag(\mathbf{w}a_{1,2}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\
&\quad + \Phi_y^T \cdot diag(\mathbf{w}a_{2,1}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_y^T \cdot diag(\mathbf{w}a_{2,2}(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\
B^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot diag(\mathbf{w}b_1(\mathbf{x})) \cdot \Phi_x + \Phi_0^T \cdot diag(\mathbf{w}b_2(\mathbf{x})) \cdot \Phi_y \\
C^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot diag(\mathbf{w}c(\mathbf{x})) \cdot \Phi \\
F^{(l)} &= \Phi_0^T \cdot (\mathbf{w}f(\mathbf{x}))^T
\end{aligned}$$

2.3 单元基和全局基

同样的非均匀方形网格。

网格把区间分成很多个单元 $\Omega^{(m_x,m_y)}(m_x = 1, 2, \cdots, M_x, m_y = 1, 2, \cdots, M_y)$。

从局部自由度到整体自由度的对应关系为

$$U_{n_x,n_y}^{(m_x,m_y)} \leftrightarrow U_{n_x+(n_y-1)(N+1)}^{(m_x,m_y)} \leftrightarrow U_{(m_x-1)N+n_x,(m_y-1)N+n_y} \leftrightarrow U_{(m_x-1)N+n_x+((m_y-1)N+(n_y-1))(M_xN+1)}$$
$$n_x, n_y = 1, \cdots, N+1 \quad m_x = 1, \cdots, M_x, m_y = 1, \cdots, M_y$$

对于周期边界条件，对应关系（略）

2.4 边界条件的处理

一维情况下边界条件就是两点，不用特殊说明。周期区域没有边界，只有固定边界和导数边界要详细说明。

这里只考虑下边界，其他边界是一样的。

2.4.1 导数边界条件

在参考单元上，对于下边界

$$\int_{-1}^{1} \phi_{i,j}(x,0)h(x,0)\phi_{k,l}(x,0)\ dx = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \varphi_i(x)h(x,0)\varphi_k(x)\ dx & j = l = 1 \\ 0 & j \neq 1 \text{ or } l \neq 1 \end{cases}$$

还有

$$\int_{-1}^{1} \phi_{i,j}(x,0)g(x,0)\ dx = \begin{cases} \int_{-1}^{1} \varphi_i(x)g(x,0)\ dx & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}$$

因此，在计算边界上积分的时候，只要考虑边界上对应的自由度。

2.4.2 固定边界条件

固定边界条件相当于限制边界上的自由度必须等于某一数值。就是计算函数空间 $\{\varphi_i(x)\}$ 中，对 u_0 的最佳逼近。基函数不正交，直接计算内积无法得到系数。

最佳逼近要满足残量正交，就是

$$\int_{-1}^{1}(u_0(x)-\sum_{i=1}^{N+1}u_i\varphi_i(x))\varphi_j(x)\ dx=0 \quad j=1,\cdots,N+1$$

得到方程组 $Au=b$，其中

$$A_{i,j}=\int_{-1}^{1}\varphi_i(x)\varphi_j(x)\ dx \qquad b_j=\int_{-1}^{1}u_0(x)\varphi_j(x)\ dx$$

转换成数值积分的过程略。

2.5 仿射变换

（略）大概就是因为区域变换要乘以 h_xh_y。在 x 方向出现导数的要乘以 $1/h_x$，在 y 方向出现导数的要乘以 $1/h_y$。