Численное решение уравнений Навье-Стокса методом конечных объемов

Общие положения

Система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах с преобразованным радиусом $\xi = r^m$ приведена к дивергентной форме. Численное решение использует метод конечных объемов (FVM) с двухстадийным подходом:

1. **Predictor**: вычисление промежуточной скорости $\mathbf{u}^*$ с учетом конвективных (∇J_{conv}), вязких (∇J_{vis}) и источниковых ($S_{\text{ист}}$) членов.

2. **Corrector**: решение уравнения Пуассона для давления p^{n+1} и коррекция скорости $\mathbf{u}^{n+1}$.

Сетка структурированная, ортогональная в координатах (ξ, z), с шагом $\Delta\xi$ и Δz. Контрольный объем (КО) имеет центр $P(i, j)$ с координатами (ξ_P, z_P) и грани:

- East (e): $\xi = \xi_P + \Delta\xi/2$, площадь $A_e = \frac{2\pi}{m}\xi_e^{(2/m)-1}\Delta z$.

- West (w): $\xi = \xi_P - \Delta\xi/2$, площадь $A_w = \frac{2\pi}{m}\xi_w^{(2/m)-1}\Delta z$.

- North (n): $z = z_P + \Delta z/2$, площадь $A_n = \frac{2\pi}{m}\xi_P^{(2/m)-1}\Delta\xi$.

- South (s): $z = z_P - \Delta z/2$, площадь $A_s = \frac{2\pi}{m}\xi_P^{(2/m)-1}\Delta\xi$.

Физический объем КО, учитывающий аксисимметрию и преобразование $\xi = r^m$:

$$V_{\text{phys}} = \frac{2\pi}{m}\xi_P^{(2/m)-1}\Delta\xi\Delta z$$

Временная дискретизация явная (первого порядка, Euler forward), шаг Δt, текущий слой времени n, следующий $n+1$. Конвективные потоки аппроксимируются экспоненциальной схемой, вязкие — центральной разностной, источники — в центре КО.

Граничные условия

- **Горизонтальные границы ($z = 0$, $z = z_{\max}$)**:

  - Вертикальная скорость (u_z):

    $$u_{z,i,1} = 0 \quad (z = 0), \quad u_{z,i,N_y+1} = 0 \quad (z = z_{\max})$$

  - Горизонтальная скорость (u_r) в фиктивных ячейках:

    $$u_{r,i,1} = 2u_{\text{boundary bottom}}(\xi_i) - u_{r,i,2} \quad (z = 0)$$

    $$u_{r,i,N_y+2} = 2u_{\text{boundary up}}(\xi_i) - u_{r,i,N_y} \quad (z = z_{\max})$$

  - Давление: $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$, т.е. $p_{i,1} = p_{i,2}$, $p_{i,N_y+2} = p_{i,N_y}$.

- **Вертикальные границы ($\xi = 0$, $\xi = \xi_{\max}$)**:

– Горизонтальная скорость (u_r):

$$u_{r,1,j} = 0 \quad (\xi = 0), \quad u_{r,N_x+1,j} = 0 \quad (\xi = \xi_{\max})$$

– Вертикальная скорость (u_z) в фиктивных ячейках:

$$u_{z,1,j} = 2u_{z,\text{boundary left}}(z_j) - u_{z,2,j} \quad (\xi = 0)$$

$$u_{z,N_x+2,j} = 2u_{z,\text{boundary right}}(z_j) - u_{z,N_x+1,j} \quad (\xi = \xi_{\max})$$

– Давление: $\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$, т.е. $p_{1,j} = p_{2,j}$, $p_{N_x+2,j} = p_{N_x+1,j}$.

Уравнение импульса для u_r (ξ-компонента)

Оригинальное уравнение:

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} = -m\xi^{(m-1)/m} \frac{\partial p}{\partial \xi} - \nabla J^{\xi}_{\text{conv}} + \nabla J^{\xi}_{\text{vis}} + S^{\xi}_{\text{ист}}$$

Где:

$$\nabla J^{\xi}_{\text{conv}} = \rho \left[m\xi^{-2/m} \frac{\partial(\xi^{1/m} u_r u_r)}{\partial \xi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} \right]$$

$$\nabla J^{\xi}_{\text{vis}} = 2m^2 \xi^{(m-2)/m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\eta \xi \frac{\partial u_r}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\eta \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + u_z m \xi^{(m-1)/m} \frac{\partial u_z}{\partial \xi} \right) \right)$$

$$S^{\xi}_{\text{ист}} = -2\eta u_r \xi^{-2/m} + \rho g_r$$

Стадия 1: Промежуточная скорость u_r^*

$$\rho \frac{u_r^* - u_r^n}{\Delta t} V_{\text{phys}} = -(J^{\xi}_{\text{conv},e} - J^{\xi}_{\text{conv},w} + J^{\xi}_{\text{conv},n} - J^{\xi}_{\text{conv},s}) + (J^{\xi}_{\text{vis},e} - J^{\xi}_{\text{vis},w} + J^{\xi}_{\text{vis},n} - J^{\xi}_{\text{vis},s}) + S^{\xi}_{\text{ист}} V_{\text{phys}}$$

- **Конвективные потоки** (J_{conv}): Экспоненциальная схема.

  – Для грани east (e):

  $$J^{\xi}_{\text{conv},e} = \rho m \xi_e^{-2/m} \xi_e^{1/m} (u_r)_e (u_r)_e^{\text{conv}} A_e$$

  где $(u_r)_e = \frac{u_{r,P} + u_{r,E}}{2}$ — интерполированная скорость для массопереноса (эффективная скорость в ξ-направлении: $m\xi_e^{-1/m}(u_r)_e$),

  $$Pe_e = \frac{\rho m \xi_e^{-1/m} (u_r)_e \Delta \xi}{\eta}\_, .$$

  Если $Pe_e > 0$ (поток из P в E):

  $$(u_r)_e^{\text{conv}} = u_{r,P} + (u_{r,E} - u_{r,P}) \frac{\exp(Pe_e/2) - 1}{\exp(Pe_e) - 1}$$

  Если $Pe_e < 0$ (поток из E в P):

  $$(u_r)_e^{\text{conv}} = u_{r,E} + (u_{r,P} - u_{r,E}) \frac{\exp(|Pe_e|/2) - 1}{\exp(|Pe_e|) - 1}$$

  Эта аппроксимация обеспечивает плавный переход от центральной разности (при малом Pe) к upwind-схеме (при большом Pe), минимизируя осцилляции и сохраняя точность.

– Для грани west (w):

$$J^{\xi}_{\text{conv},w} = \rho m \xi_w^{-2/m} \xi_w^{1/m} (u_r)_w (u_r)_w^{\text{conv}} A_w$$

где $(u_r)_w = \frac{u_{r,W}+u_{r,P}}{2}$,

$$Pe_w = \frac{\rho m \xi_w^{-1/m} (u_r)_w \Delta\xi}{\eta}$$

Если $Pe_w > 0$ (поток из W в P):

$$(u_r)_w^{\text{conv}} = u_{r,W} + (u_{r,P} - u_{r,W}) \frac{\exp(Pe_w/2) - 1}{\exp(Pe_w) - 1}$$

Если $Pe_w < 0$ (поток из P в W):

$$(u_r)_w^{\text{conv}} = u_{r,P} + (u_{r,W} - u_{r,P}) \frac{\exp(|Pe_w|/2) - 1}{\exp(|Pe_w|) - 1}$$

Направление Pe инвертируется относительно east, чтобы учитывать поток слева.

– Для грани north (n):

$$J^{\xi}_{\text{conv},n} = \rho (u_z)_n (u_r)_n^{\text{conv}} A_n$$

где $(u_z)_n = \frac{u_{z,P}+u_{z,N}}{2}$ — интерполированная скорость в z-направлении,

$$Pe_n = \frac{\rho (u_z)_n \Delta z}{\eta}$$

Если $Pe_n > 0$ (поток из P в N):

$$(u_r)_n^{\text{conv}} = u_{r,P} + (u_{r,N} - u_{r,P}) \frac{\exp(Pe_n/2) - 1}{\exp(Pe_n) - 1}$$

Если $Pe_n < 0$ (поток из N в P):

$$(u_r)_n^{\text{conv}} = u_{r,N} + (u_{r,P} - u_{r,N}) \frac{\exp(|Pe_n|/2) - 1}{\exp(|Pe_n|) - 1}$$

Здесь конвекция определяется u_z, u_r.

– Для грани south (s):

$$J^{\xi}_{\text{conv},s} = \rho (u_z)_s (u_r)_s^{\text{conv}} A_s$$

где $(u_z)_s = \frac{u_{z,S}+u_{z,P}}{2}$,

$$Pe_s = \frac{\rho (u_z)_s \Delta z}{\eta}$$

Если $Pe_s > 0$ (поток из S в P):

$$(u_r)_s^{\text{conv}} = u_{r,S} + (u_{r,P} - u_{r,S}) \frac{\exp(Pe_s/2) - 1}{\exp(Pe_s) - 1}$$

Если $Pe_s < 0$ (поток из P в S):

$$(u_r)_s^{\text{conv}} = u_{r,P} + (u_{r,S} - u_{r,P}) \frac{\exp(|Pe_s|/2) - 1}{\exp(|Pe_s|) - 1}$$

Аналогично north, но направление инвертировано.

- **Вязкие потоки** (J_{vis}): Центральная разностная аппроксимация.
  - Для грани east (e):

$$J^{\xi}_{\text{vis},e} = 2m^2 \xi_e^{(m-2)/m} \eta_e \xi_e \frac{u_{r,E} - u_{r,P}}{\Delta\xi} A_e$$

    Здесь $\eta_e = \frac{\eta_P + \eta_E}{2}$ — интерполированная вязкость, производная $\frac{\partial u_r}{\partial \xi}$ аппроксимирована центрально, коэффициент 2 $\mathrm{m}^2 \xi_e^{(m-2)/m} \eta_e \xi_e$.

- Для грани west (w):

$$J^{\xi}_{\text{vis},w} = 2m^2 \xi_w^{(m-2)/m} \eta_w \xi_w \frac{u_{r,P} - u_{r,W}}{\Delta\xi} A_w$$

$\eta_w = \frac{\eta_W + \eta_P}{2}$, производная $\frac{\partial u_r}{\partial \xi}$ центральная, знак минус в балансе потоков (вход/выход) учитывается в общей формуле.

- Для грани north (n):

$$J^{\xi}_{\text{vis},n} = \eta_n \left(\frac{u_{r,N} - u_{r,P}}{\Delta z} + (u_z)_n m \xi_P^{(m-1)/m} \frac{u_{z,E} - u_{z,W}}{2\Delta\xi} \right) A_n$$

$\eta_n = \frac{\eta_P + \eta_N}{2}$, смешанный член: $\frac{\partial u_r}{\partial z}$ — центральная, $\frac{\partial u_z}{\partial \xi}$ — центральная по соседям E и W для стабильности.

- Для грани south (s):

$$J^{\xi}_{\text{vis},s} = \eta_s \left(\frac{u_{r,P} - u_{r,S}}{\Delta z} + (u_z)_s m \xi_P^{(m-1)/m} \frac{u_{z,E} - u_{z,W}}{2\Delta\xi} \right) A_s$$

$\eta_s = \frac{\eta_S + \eta_P}{2}$, аналогично north, но производная $\frac{\partial u_r}{\partial z}$ с инверсированным знаком для входа/выхода.

- **Источник** ($S^{\xi}_{\text{ист}}$):

$$S^{\xi}_{\text{ист}} = \left(-2\eta_P u_{r,P} \xi_P^{-2/m} + \rho g_r \right) V_{\text{phys}}$$

  Вычисляется в центре КО P: первый член — дополнительный вязкий эффект от цилиндрической геометрии, второй — гравитация в радиальном направлении; умножен на полный физический объем для интеграла.

На границах:

- $\xi = 0$: $(u_r)_w = 0$, $J^{\xi}_{\text{conv},w} = 0$, $J^{\xi}_{\text{vis},w} = 0$.
- $\xi = \xi_{\max}$: $(u_r)_e = 0$, $J^{\xi}_{\text{conv},e} = 0$, $J^{\xi}_{\text{vis},e}$ использует $u_{r,N_x+2,j} = -u_{r,N_x,j}$.
- $z = 0$: $(u_z)_s = 0$, $J^{\xi}_{\text{conv},s} = 0$, $J^{\xi}_{\text{vis},s}$ использует $u_{r,i,1} = 2u_{\text{boundary bottom}}(\xi_i) - u_{r,i,2}$.
- $z = z_{\max}$: $(u_z)_n = 0$, $J^{\xi}_{\text{conv},n} = 0$, $J^{\xi}_{\text{vis},n}$ использует $u_{r,i,N_y+2} = 2u_{\text{boundary up}}(\xi_i) - u_{r,i,N_y}$.

Стадия 2: Коррекция с давлением

Уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(m\xi^{(m-1)/m}\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\rho}{\Delta t}\left[m\xi^{(m-1)/m}\frac{u^*_{r,E}-u^*_{r,W}}{\Delta \xi}+\frac{u^*_{z,N}-u^*_{z,S}}{\Delta z}\right]$$

Граничные условия для p:

- $\xi=0$, $\xi=\xi_{\max}$: $\frac{\partial p}{\partial \xi}=0$, т.е. $p_{1,j}=p_{2,j}$, $p_{N_x+2,j}=p_{N_x+1,j}$.
- $z=0$, $z=z_{\max}$: $\frac{\partial p}{\partial z}=0$, т.е. $p_{i,1}=p_{i,2}$, $p_{i,N_y+2}=p_{i,N_y}$.

Коррекция:

$$u_r^{n+1}=u_r^*-\frac{\Delta t}{\rho}m\xi_P^{(m-1)/m}\frac{p_E-p_W}{2\Delta\xi}$$

Уравнение импульса для u_z (z-компонента)

Оригинальное уравнение:

$$\rho\frac{\partial u_z}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}-\nabla J^z_{\text{conv}}+\nabla J^z_{\text{vis}}+S^z_{\text{ист}}$$

Где:

$$\nabla J^z_{\text{conv}}=m\xi^{-2/m}\frac{\partial(\xi^{1/m}u_z u_r)}{\partial \xi}+\frac{\partial(u_z^2)}{\partial z}$$

$$\nabla J^z_{\text{vis}}=m\xi^{(m-2)/m}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(m\eta\xi\frac{\partial u_z}{\partial \xi}+\eta\xi^{1/m}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2\eta\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)$$

$$S^z_{\text{ист}}=\rho g_z$$

Стадия 1: Промежуточная скорость u_z^*

$$\rho\frac{u_z^*-u_z^n}{\Delta t}V_{\text{phys}}=-(J^z_{\text{conv},e}-J^z_{\text{conv},w}+J^z_{\text{conv},n}-J^z_{\text{conv},s})+(J^z_{\text{vis},e}-J^z_{\text{vis},w}+J^z_{\text{vis},n}-J^z_{\text{vis},s})+S^z_{\text{ист}}V_{\text{phys}}$$

- **Конвективные потоки** (J_{conv}): Экспоненциальная схема.
  - Для грани east (e):

    $$J^z_{\text{conv},e}=m\xi_e^{-2/m}\xi_e^{1/m}(u_z)_e^{\text{conv}}(u_r)_e A_e$$

    где $(u_r)_e=\frac{u_{r,P}+u_{r,E}}{2}$ — интерполированная скорость для массопереноса (эффективная скорость в ξ-направлении: $m\xi_e^{-1/m}(u_r)_e$),

    $$Pe_e=\frac{\rho m\xi_e^{-1/m}(u_r)_e\Delta\xi}{\eta}_-,.$$

    Если $Pe_e>0$ (поток из P в E):

    $$(u_z)_e^{\text{conv}}=u_{z,P}+(u_{z,E}-u_{z,P})\frac{\exp(Pe_e/2)-1}{\exp(Pe_e)-1}$$

Если $Pe_e < 0$ (поток из E в P):

$$(u_z)_e^{\text{conv}} = u_{z,E} + (u_{z,P} - u_{z,E})\frac{\exp(|Pe_e|/2) - 1}{\exp(|Pe_e|) - 1}$$

Эта аппроксимация обеспечивает плавный переход от центральной разности (при малом Pe) к upwind-схеме (при большом Pe), минимизируя осцилляции и сохраняя точность. Здесь переносимой величиной является u_z.

– Для грани west (w):

$$J^z_{\text{conv},w} = m\xi_w^{-2/m}\xi_w^{1/m}(u_z)_w^{\text{conv}}(u_r)_w A_w$$

где $(u_r)_w = \frac{u_{r,W}+u_{r,P}}{2}$,

$$Pe_w = \frac{\rho m\xi_w^{-1/m}(u_r)_w\Delta\xi}{\eta}$$

Если $Pe_w > 0$ (поток из W в P):

$$(u_z)_w^{\text{conv}} = u_{z,W} + (u_{z,P} - u_{z,W})\frac{\exp(Pe_w/2) - 1}{\exp(Pe_w) - 1}$$

Если $Pe_w < 0$ (поток из P в W):

$$(u_z)_w^{\text{conv}} = u_{z,P} + (u_{z,W} - u_{z,P})\frac{\exp(|Pe_w|/2) - 1}{\exp(|Pe_w|) - 1}$$

Направление Pe инвертируется относительно east, чтобы учитывать поток слева.

– Для грани north (n):

$$J^z_{\text{conv},n} = (u_z)_n(u_z)_n^{\text{conv}}A_n$$

где $(u_z)_n = \frac{u_{z,P}+u_{z,N}}{2}$ — интерполированная скорость в z-направлении,

$$Pe_n = \frac{\rho(u_z)_n\Delta z}{\eta}$$

Если $Pe_n > 0$ (поток из P в N):

$$(u_z)_n^{\text{conv}} = u_{z,P} + (u_{z,N} - u_{z,P})\frac{\exp(Pe_n/2) - 1}{\exp(Pe_n) - 1}$$

Если $Pe_n < 0$ (поток из N в P):

$$(u_z)_n^{\text{conv}} = u_{z,N} + (u_{z,P} - u_{z,N})\frac{\exp(|Pe_n|/2) - 1}{\exp(|Pe_n|) - 1}$$

Здесь конвекция определяется $\mathrm{u}_z, u_z()$.

– Для грани south (s):

$$J^z_{\text{conv},s} = (u_z)_s(u_z)_s^{\text{conv}}A_s$$

где $(u_z)_s = \frac{u_{z,S}+u_{z,P}}{2}$,

$$Pe_s = \frac{\rho(u_z)_s\Delta z}{\eta}$$

Если $Pe_s > 0$ (поток из S в P):

$$(u_z)_s^{\text{conv}} = u_{z,S} + (u_{z,P} - u_{z,S})\frac{\exp(Pe_s/2) - 1}{\exp(Pe_s) - 1}$$

Если $Pe_s < 0$ (поток из P в S):

$$(u_z)_s^{\text{conv}} = u_{z,P} + (u_{z,S} - u_{z,P})\frac{\exp(|Pe_s|/2) - 1}{\exp(|Pe_s|) - 1}$$

Аналогично north, но направление инвертировано.

- **Вязкие потоки** (J_{vis}): Центральная разностная аппроксимация.
  - Для грани east (e):

$$J^z_{\text{vis},e} = m\xi_e^{(m-2)/m}\left(m\eta_e\xi_e\frac{u_{z,E} - u_{z,P}}{\Delta\xi} + \eta_e\xi_e^{1/m}\frac{u_{r,N} - u_{r,S}}{2\Delta z}\right)A_e$$

Здесь $\eta_e = \frac{\eta_P+\eta_E}{2}$, смешанный член: m $\eta_e\xi_e\frac{\partial u_z}{\partial\xi}{}^{-}u_z, \eta_e\xi_e^{1/m}\frac{\partial u_r}{\partial z}{}^{-}u_rNS$.

– Для грани west (w):

$$J^z_{\text{vis},w} = m\xi_w^{(m-2)/m}\left(m\eta_w\xi_w\frac{u_{z,P} - u_{z,W}}{\Delta\xi} + \eta_w\xi_w^{1/m}\frac{u_{r,N} - u_{r,S}}{2\Delta z}\right)A_w$$

$\eta_w = \frac{\eta_W+\eta_P}{2}$, аналогично east, но производная $\frac{\partial u_z}{\partial\xi}$ с инверсированным знаком.

– Для грани north (n):

$$J^z_{\text{vis},n} = 2\eta_n\frac{u_{z,N} - u_{z,P}}{\Delta z}A_n$$

$\eta_n = \frac{\eta_P+\eta_N}{2}$, коэффициент 2 для $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ (из тензора напряжений в Навье-Стокса), центральная аппроксимация.

– Для грани south (s):

$$J^z_{\text{vis},s} = 2\eta_s\frac{u_{z,P} - u_{z,S}}{\Delta z}A_s$$

$\eta_s = \frac{\eta_S+\eta_P}{2}$, аналогично north, но с инверсированным знаком для входа/выхода.

- **Источник** ($S^z_{\text{ист}}$):

$$S^z_{\text{ист}} = \rho g_z V_{\text{phys}}$$

  Вычисляется в центре КО P: гравитационный источник в осевом направлении, умножен на полный физический объем для интеграла.

На границах:

- $\xi = 0$: $(u_r)_w = 0$, $J^z_{\text{conv},w} = 0$, $J^z_{\text{vis},w}$ использует $u_{z,1,j} = 2u_{z,\text{boundary left}}(z_j) - u_{z,2,j}$.
- $\xi = \xi_{\max}$: $(u_r)_e = 0$, $J^z_{\text{conv},e} = 0$, $J^z_{\text{vis},e}$ использует $u_{z,N_x+2,j} = 2u_{z,\text{boundary right}}(z_j) - u_{z,N_x+1,j}$.
- $z = 0$: $(u_z)_s = 0$, $J^z_{\text{conv},s} = 0$, $J^z_{\text{vis},s} = 0$.
- $z = z_{\max}$: $(u_z)_n = 0$, $J^z_{\text{conv},n} = 0$, $J^z_{\text{vis},n} = 0$.

Стадия 2: Коррекция с давлением

$$u_z^{n+1} = u_z^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{p_N - p_S}{2\Delta z}$$

Примечания

- Уравнение Пуассона решается итеративно (например, методом SOR) для обеспечения $\operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} \approx 0$.
- Для стабильности требуется соблюдение условий CFL ($u\Delta t/\Delta x < 1$) и ограничения на вязкость.
- Функции $u_{\text{boundary bottom}}(\xi)$, $u_{\text{boundary up}}(\xi)$, $u_{z,\text{boundary left}}(z)$, $u_{z,\text{boundary right}}(z)$ должны быть заданы пользователем.
- Предполагается, что η — динамическая вязкость μ; если $\eta = \mu/\rho$, умножьте Pe на ρ.