

Уравнения, описывающие движение капли радиусом *R* смешивающейся магнитной жидкости с переменной вязкостью в магнитном поле в ячейке Хеле-Шоу, имеют вид

Для вязкости используем формулу Чонга

Работаем в размерном виде.

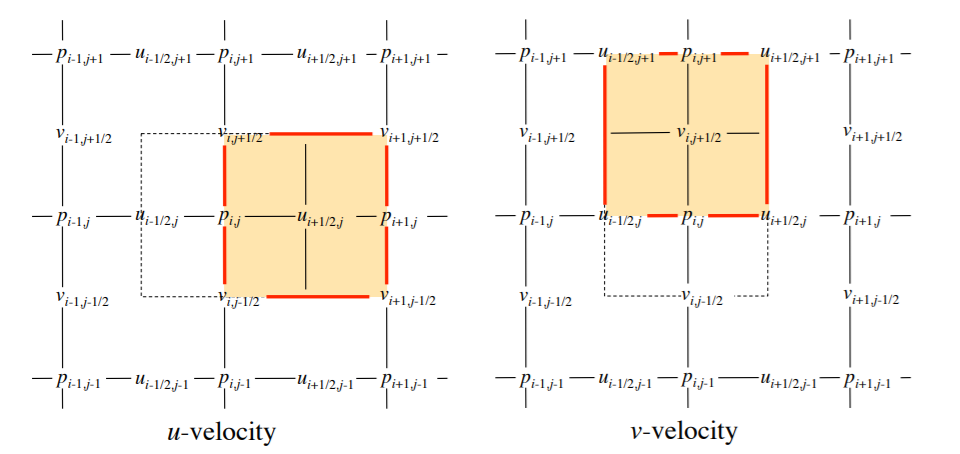
Распишем члены уравнения с вязкостью.

*х* – компонента:

*y* – компонента:

*х* – компонента уравнения движения имеет вид

*y* – компонента уравнения движения имеет вид



Введем обозначения *i* + ½ = *I*, *i* – ½ = *I* – 1, *i* + 3/2 = *I* +1, *j* + ½ = *J*, *j* – ½ = *J* – 1, *j* + 3/2 = *J* +1.

Уравнение движения разбиваем на две части: относительно *u*\* - без давления и собственно *u* – с давлением:

Так как , то воздействуем на последнее уравнение оператором ∇ и получим уравнение для давления

Решив это уравнение, найдем из предпоследнего уравнения *un+*1.

Для уравнения с давлением нам понадобятся значения скорости *u* в точках *I*,*j* и *I -*1,*j* и значения скорости в точках *i,J* и *i,J* – 1.

Для *u*\* уравнение имеет вид

Здесь имеет вид

Первые два члена правой части уравнения представим в виде

При вычислении этого члена уравнения воспользуемся интерполяционной функцией

где – скорость на грани контрольного объема *е*, которая соответствует узлу *I,j*.

Так как вязкость и плотность вычисляются в точках *i,j,* то ν*e* = *η*(*i,j*)/*ρ*(*i,j*),

Так как константы определяются по узловым значениям, то

Тогда, умножив первое уравнение на

и, вычитая из второго, получим

откуда

При интегрировании по контуру на правой границе контрольного объема получим

Есть три варианта определения скорости , обеспечивающей адвективный перенос. Первый – это скорость в центре контрольного объема *uI,j*. Второй вариант – использовать . Третий вариант – использовать -скорость на границе контрольного объема, в экспоненту которого входит она же, так что отпадает. Остановимся на втором варианте, который (интуитивно) обеспечивает второй порядок точности. Тогда

Соответственно

Для верхней и нижней границ контрольного объема получим

Интеграл по контуру есть сумма этих четырех интегралов.

Интеграл от *х* – компоненты источника по площади контрольного объема имеет вид

Концентрация, плотность, динамическая вязкость, намагниченность и напряженность магнитного поля вычисляются в тех же узлах, в которых вычисляется давление.

Окончательно для *х*-компоненты скорости *u*\* можно записать

Аналогично для *у*-компоненты можно записать

где

Уравнение для давления имеет вид

или

то есть в выражении

потоки и имеют вид

Тогда интеграл может быть вычислен следующим образом

откуда получаем

или

Уравнение массопереноса

Для концентрации так же, как и для скорости, используем экспоненциальную схему:

Для правой границы контрольного объема получим

Тогда

Здесь

Если *bc* > 0, и *bchx/ace >* 18, то

Если же *bc* < 0, и *bchx/ace <* -18, то

Если же | *bchx/ace* | *<* 10-8, то

Аналогично

Здесь

Здесь

Здесь

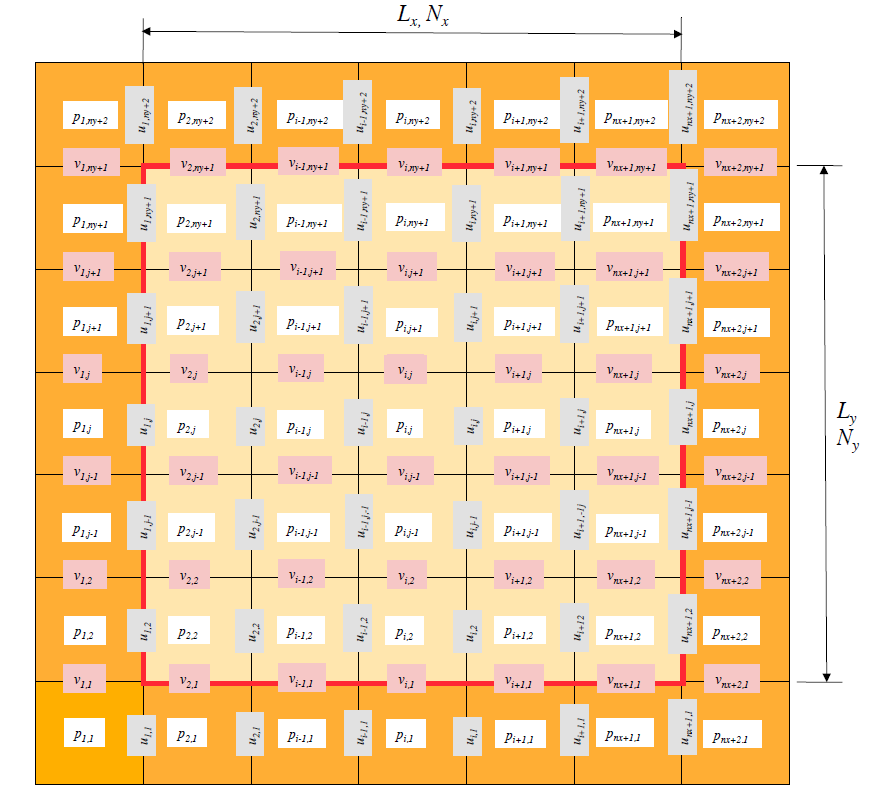
Теперь можем найти концентрацию на следующем временном слое:

Зная концентрацию, можем вычислить плотность и магнитную проницаемость

Для магнитного поля используется стандартная схема для потенциала *F* ( ):

Здесь

**Граничные условия**



*Скорость*

Для горизонтальных границ вертикальная компонента скорости, как правило равна 0. Так как совпадает с границей, то естественное условие для вертикальной компоненты скорости на горизонтальной границе

Горизонтальная компонента скорости вычисляется на полушаге и не совпадает с границей, крайняя «призрачная» линия сетки линия сетки отстоит от границы на полшага. Тогда

Теперь на нижней границе

Для вертикальных границ горизонтальная компонента скорости, как правило равна 0. А для вертикальной компоненты скорости на левой и правой границе области должной выполняться условие

*Давление*

Уравнение неразрывности для контрольного объема вблизи *левой* границы имеет вид

Так как связь давления и скорости имеет вид

Подставив, получим

Откуда для давления в приграничной точке 2, *j* ( *j* изменяется от 2 до *Nx* +1) получим

На правой границе области уравнение для давления имеет вид

Аналогично на верхней и нижней границах. В принципе, чтобы не выделять граничные точки из общего процесса, используется следующий прием. Во всех «призрачных» точках ( *i* = 1, *Nx* +2; *j* = 1, *Ny* +2) *плотность полагается достаточной большой*, а давление конечным (равным нулю), так что в формуле для давления во внутренних точках соответствующий четвертый член, отсутствующий в квадратных скобках в граничных точках, автоматически выпадает. Т.е. в граничных точках давление считается по тем же формулам, что и во внутренних.

*Концентрация*

Здесь всё просто: для левой стенки задаем *I*3, для правой *I*1, для верхней *I*2, для нижней *I*4. Для твердых стенок это 0, для входа в канал и выхода из него – в зависимости от задачи.

*Магнитное поле*

Решаем как для обычных задач, задаем граничные условия в «призрачных» точках. В конце пересчитываем как среднее арифметическое соседних точек, если нужно рисовать. Или не пересчитываем.

*Магнитное поле*

1. Задаем начальные условия и параметры задачи
2. Находим временные компоненты скорости
3. Находим давление
4. Находим концентрацию
5. Находим плотность
6. Находим магнитное поле
7. Возвращаемся к п.2.

**Безразмерная форма уравнений**

*Уравнение движения.*

Задача о капле. В качестве масштабов используем для координат размер капли *R*, вязкости *ηf*, плотности *ρf*, для скорости *νf*/*R*, *νf* = *ηf*/*ρf*, давления *ρfu*2 = *ρfνf*2/*R* 2, времени *R*2/*νf*. Тогда

В начальном состоянии, когда концентрация магнитной жидкости равна *c*0, для плотности можно записать . Если ячейка Хеле – Шоу расположена вертикально и находится в поле силы тяжести, то при заполнении ее неподвижной жидкостью с плотностью *ρf* распределение давления в ней подчиняется выражению ∇*p*0 = *ρfg*(-***e****z*) (ось *z* направлена вертикально вверх). Записав давление в движущейся жидкости в виде *p* = *p*0 + *p*' и сократив гидростатическую компоненту *p*0, уравнение движение запішем в виде (для напряженности магнитного поля масштаб – величина внешнего поля *H*0, для намагниченности – намагниченность насыщения жидкости *MS*), здесь и далее все переменные безразмерные, ' далее опускаем:

Умножаем на . Получим

Здесь . Отметим, что при малых значениях напряженности магнитного поля Тогда магнитная объемная сила принимает вид , как и должно быть. При больших значениях напряженности магнитного поля Тогда магнитная объемная сила принимает вид , как и должно быть.

Теперь уравнение приобретает вид (все переменные безразмерные)

где – классическое и магнитное числа Архимеда.

Если решается не задача о капле, а о вытеснении, то имеется естественный масштаб для скорости жидкости и нет силы тяжести. В качестве масштаба для координат логично использовать расстояние между пластинами ячейки Хеле-Шоу δ, для скорости – скорость потока на входе *U*, для времени δ2/ν. Тогда исходное уравнение приобретает вид

Умножаем на . Получим

Вводим число Рейнольдса как Re = *U*δ/ν*f* и преобразовываем последний член как и выше. Получим

где – магнитный критерий Мортона, имеет смысл отношения сил, создаваемых магнитостатическим давлением к силам вязкого трения.

Уравнение массопереноса с учетом зависимости коэффициента диффузии от вязкости

Учитывая для капли масштабы времени *R*2/*νf* и скорости *νf*/*R*, получим

Умножаем на *R2*/*νf*

Где – ланжевеновский аргумент, который для исследуемой ситуации принимает значения, заведомо меньшие десяти. Так как для жидкостей число Шмидта имеет величину от 1000 до 100000, то ζ/Sc≪1 и перенос массы осуществляется в основном за счет конвективного механизма. Тогда третьим членом в скобках можно пренебречь. Первый также невелик, но учитывая неизвестный порядок градиента концентрации, по традиции его оставляем. Окончательно получаем

Для задачи вытеснения масштабы времени δ2/*νf* и скорости *U* приводят к следующему безразмерному уравнению

Умножаем на *δ*2/*νf*, получаем

Окончательно оставляем