Épreuve du 10/11/2022

Durée 1h15

Nom : **Prénom :** **Numéro étudiant :**

Tout appareil électronique interdit.
Les seuls documents autorisés sont les formulaires des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle.
Inscrire votre nom et votre numéro d'étudiant sur votre copie et sur le sujet.
Rendre le sujet complété avec votre copie

Exercice 1 (2,5+0,5=3 points)
Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$\Big(\square\square\square\square\Big(\square\Big(\square\Big(\square\Big)\ ,\square\Big) \Rightarrow \square\Big(\square\Big(\square,\square\Big)\Big)\Big)\Big) \wedge \square\square\Big(\square\Big(\square,\square\Big)\Big)$$

où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$.

1. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :
   - x admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence liée par le quantificateur $\exists$,
   - y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence libre,
   - z admet uniquement une occurrence libre.

   Compléter, **sur le sujet**, la formule F en respectant les contraintes.
2. Déterminer une clotûre universelle de la formule F.

Exercice 2 (5,5+5,5=11 points)
Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow (A \vee C) \qquad\qquad (B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Exercice 3 (0,5 + (2,5 + (1,5 + 1,5)) = 6 points)

1. Soient F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Donner la définition mathématique de $F_1 \models F_2$.
2. Soit F la formule $(\neg(A \wedge B) \Rightarrow C) \vee (\neg B \Rightarrow C)$.
   (a) Etant donné une structure $\mathbf{M}$, calculer et simplifier l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I_M}(A)$, $\mathbf{I_M}(B)$ et $\mathbf{I_M}(C)$
   (b) Déterminer :
      i. une formule G telle que $G \models F$ et $F \not\models G$? (justifier)
      ii. une formule H (différente de F) telle que $F \models\!\!\mid H$? (justifier)

Exercice 4 (1+3+(3+3)=10 points)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
2. Soit la structure $\mathbf{M}_1$ suivante définie sur $\mathbb{Z}$, $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = 2 & g^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_1} = -2 & g^{\mathbf{M}_1}(n) = 2n & f^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) = n_1 + n_2 \end{array}$$

   Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = 2k$.
3. On considère maintenant l'ensemble des symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\mathrm{p}\}$ contenant l'unique prédicat unaire p et la formule $F{=}(\neg \mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)) \Rightarrow (\mathrm{p}(f(a, b)) \wedge (\mathrm{p}(g(a)) \wedge \mathrm{p}(g(b))))$.
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$. (justifier)
   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_3$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$. (justifier)

Corrigé de l'épreuve du 10/11/2022

▶ Corrigé de l'exercice 1.

(1). une solution possible, $F = (\forall x \forall y(q(f(x), y) \Rightarrow p(g(z, a)))) \wedge \exists x(q(x, y))$

(2). D'après les contraintes de la question 1, $free(F) = \{y, z\}$, une clôture universelle de F est $\forall y \forall z F$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

- $\langle 1 \rangle$ montrons $((A \wedge B) \vee C) \Rightarrow (A \vee C)$
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : (A \wedge B) \vee C$, montrons $A \vee C$
    - $\langle 3 \rangle$ montrons $(A \wedge B) \vee C$
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
    - $\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : A \wedge B$, montrons $A \vee C$
      - $\langle 5 \rangle$ montrons A
        - $\langle 7 \rangle$ montrons $(A \wedge B)$
        - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
      - $\langle 5 \rangle$ CQFD ($\mathrm{E}^{g}_{\wedge}$)
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD ($\mathrm{I}^{g}_{\vee}$))
    - $\langle 5 \rangle$ supposons $h_3 : C$, montrons $A \vee C$
      - $\langle 6 \rangle$ montrons C
      - $\langle 6 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
    - $\langle 5 \rangle$ CQFD ($\mathrm{I}^{d}_{\vee}$)
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD ($E_{\vee}$)
- $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

Voici 2 solutions possibles pour la preuve de $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

- $\langle 1 \rangle$ montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : A$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
    - $\langle 3 \rangle$ montrons $(B \vee A)$
      - $\langle 4 \rangle$ montrons A
      - $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD ($I^{d}_{\vee}$)
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD ($I^{g}_{\vee}$)
  - $\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \neg A$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
    - $\langle 4 \rangle$ supposons $h_3 : B$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
      - $\langle 5 \rangle$ montrons $B \vee A$
        - $\langle 6 \rangle$ montrons B
        - $\langle 6 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
      - $\langle 5 \rangle$ CQFD ($I^{g}_{\vee}$)
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD ($I^{g}_{\vee}$)
    - $\langle 5 \rangle$ supposons $h_4 : \neg B$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
      - $\langle 6 \rangle$ montrons $\neg A \wedge \neg B$
        - $\langle 7 \rangle$ montrons $\neg A$
        - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
        - $\langle 8 \rangle$ montrons $\neg B$
        - $\langle 8 \rangle$ CQFD (Ax avec h_4)
      - $\langle 6 \rangle$ CQFD ($I_{\wedge}$)
    - $\langle 5 \rangle$ CQFD ($I^{d}_{\vee}$)
  - $\langle 3 \rangle$ CQFD (D_{TE})
- $\langle 1 \rangle$ CQFD (D_{TE})

- $\langle 1\rangle$ montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
  - $\langle 2\rangle$ supposons $h_1 : B \vee A$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
    - $\langle 3\rangle$ montrons $(B \vee A)$
    - $\langle 3\rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
  - $\langle 2\rangle$ CQFD $(I_\vee^g)$
  - $\langle 3\rangle$ supposons $h_2 : \neg(B \vee A)$, montrons $(B \vee A) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
    - $\langle 4\rangle$ montrons $\neg A \wedge \neg B$
      - $\langle 5\rangle$ montrons $\neg A$
        - $\langle 6\rangle$ supposons $h_3 : A$, montrons false
          - $\langle 7\rangle$ montrons $\neg(B \vee A)$
          - $\langle 7\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
          - $\langle 8\rangle$ montrons $B \vee A$
            - $\langle 9\rangle$ montrons A
            - $\langle 9\rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
          - $\langle 8\rangle$ CQFD (Ax avec h_4)
        - $\langle 6\rangle$ CQFD $(E_\neg)$
      - $\langle 5\rangle$ CQFD $(I_\neg)$
      - $\langle 6\rangle$ montrons $\neg B$
        - $\langle 7\rangle$ supposons $h_4 : B$, montrons false
          - $\langle 8\rangle$ montrons $\neg(B \vee A)$
          - $\langle 8\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
          - $\langle 9\rangle$ montrons $B \vee A$
            - $\langle 10\rangle$ montrons B
            - $\langle 10\rangle$ CQFD (Ax avec h_4)
          - $\langle 9\rangle$ CQFD $(I_\vee^g)$
        - $\langle 7\rangle$ CQFD $(E_\neg)$
      - $\langle 6\rangle$ CQFD $(I_\neg)$
    - $\langle 4\rangle$ CQFD $(I_\wedge)$
  - $\langle 3\rangle$ CQFD $(I_\vee^d)$
- $\langle 1\rangle$ CQFD (D_{TE})

▶ Corrigé de l'exercice 3.

(1.) $F_1 \models F_2$ si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$ si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$ (2.a).

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}} &= [(\neg(A \wedge B) \Rightarrow C) \vee (\neg B \Rightarrow C)]^{\mathbf{M}} \\
&= [\neg(A \wedge B) \Rightarrow C]^{\mathbf{M}} + [\neg B \Rightarrow C]^{\mathbf{M}} \\
&= (\overline{[\neg(A \wedge B)]^{\mathbf{M}}} + [C]^{\mathbf{M}}) + (\overline{[\neg B]^{\mathbf{M}}} + [C]^{\mathbf{M}}) \\
&= (\overline{\overline{[(A \wedge B)]^{\mathbf{M}}}} + [C]^{\mathbf{M}}) + (\overline{\overline{[B]^{\mathbf{M}}}} + [C]^{\mathbf{M}}) \\
&= (\overline{\overline{[A]^{\mathbf{M}}.[B]^{\mathbf{M}}}}) + [C]^{\mathbf{M}}) + (\overline{\overline{[B]^{\mathbf{M}}}} + [C]^{\mathbf{M}}) \\
&= ([A]^{\mathbf{M}}.[B]^{\mathbf{M}}) + [C]^{\mathbf{M}}) + ([B]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}}) \\
&= ([A]^{\mathbf{M}}.[B]^{\mathbf{M}}) + [B]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}} \\
&= ([A]^{\mathbf{M}}.[B]^{\mathbf{M}}) + [B]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}} \\
&= ([B]^{\mathbf{M}}.([A]^{\mathbf{M}} + 1)) + [C]^{\mathbf{M}} \\
&= ([B]^{\mathbf{M}}.1) + [C]^{\mathbf{M}} \\
&= [B]^{\mathbf{M}} + [C]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I_M}(B) + \mathbf{I_M}(C)
\end{aligned}$$

(2.b.i). Considérons $G = B$

- Soit une structure $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{I_M}(B) = 1$ alors $[F]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I_M}(B) + \mathbf{I_M}(C) = 1$, donc $G \models F$
- Soit une structure $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{I_M}(B) = 0$ et $\mathbf{I_M}(C) = 1$ alors $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[G]^{\mathbf{M}} = 0$, donc $F \not\models G$

(2.c.ii).Considérons $H = B \vee C$, pour toute structure $\mathbf{M}$, $[H]^{\mathbf{M}} = \mathbf{I_M}(B) + \mathbf{I_M}(C) = [F]^{\mathbf{M}}$, donc $H \models\!\!\mid F$

▶ Corrigé de l'exercice 4.

(1). Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

- $\{a, b\} \subseteq \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
- Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $g(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
- Si $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2). Raisonnement par induction sur t.
(B) Si $t = a$ alors $[a]^{\mathbf{M}_1} = 2 = 2 * 1$ et si $t = b$, alors $[b]^{\mathbf{M}_1} = -2 = 2 * -1$.
(I) Supposons $[t']^{\mathbf{M}_1} = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, et $t = g(t')$.

$$\begin{aligned}
[t]^{\mathbf{M}_1} &= [g(t')]^{\mathbf{M}_1} \\
&= g^{\mathbf{M}_1}([t']^{\mathbf{M}_1}) \\
&= g^{\mathbf{M}_1}(2k) \text{ par hyp. d'induction} \\
&= 2 * (2k) = 2k' \text{ avec } k' = 2k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Supposons $[t_1]^{\mathbf{M}_1} = 2k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $[t_2]^{\mathbf{M}_1} = 2k_2 1$, $k_2 \in \mathbb{Z}$ et $t = f(t_1, t_2)$.

$$\begin{aligned}
[t]^{\mathbf{M}_1} &= [(f(t_1, t_2)]^{\mathbf{M}_1} \\
&= f^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1}, [t_2]^{\mathbf{M}_1}) \\
&= f^{\mathbf{M}_1}(2k_1, 2k_2) \text{ par hyp. d'induction} \\
&= 2k_1 + 2k_2 \\
&= 2(k_1 + k_2) \\
&= 2k' \text{ avec } k' = 2(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(3.a) Définissons la structure $\mathbf{M}_2$ comme étant égale à $\mathbf{M}_1$ enrichie par l'interprétation suivante du prédicat p : $\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \text{ est pair}\}$.

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}_2} &= [(\neg \mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)) \Rightarrow (\mathrm{p}(f(a,b)) \wedge (\mathrm{p}(g(a)) \wedge \mathrm{p}(g(b))))]^{\mathbf{M}_2} \\
&= \overline{[\neg \mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}} + [\mathrm{p}(f(a,b)) \wedge (\mathrm{p}(g(a)) \wedge \mathrm{p}(g(b)))]^{\mathbf{M}_2} \\
&= \overline{\overline{[\mathrm{p}(a)]^{\mathbf{M}_2}}.[\mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}} + ([\mathrm{p}(f(a,b))]^{\mathbf{M}_2}.[\mathrm{p}(g(a))]^{\mathbf{M}_2}.[\mathrm{p}(g(b))]^{\mathbf{M}_2}) \\
&= [\mathrm{p}(a)]^{\mathbf{M}_2} + \overline{[\mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}} + ([\mathrm{p}(f(a,b))]^{\mathbf{M}_2}.[\mathrm{p}(g(a))]^{\mathbf{M}_2}.[\mathrm{p}(g(b))]^{\mathbf{M}_2}) \\
&= \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}) + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2})} + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(f^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}, b^{\mathbf{M}_2})).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2})).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2}))) \\
&= \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(2) + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(-2)} + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(f^{\mathbf{M}_2}(2,-2)).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(2)).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(-2))) \\
&= \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(2) + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(-2)} + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(0).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(4).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(-4)) \\
&= 1 + \overline{1} + (1.1.1) = 1
\end{aligned}$$

(3.b) Définissons la structure $\mathbf{M}_3$ comme étant égale à $\mathbf{M}_1$ enrichie par l'interprétation suivante du prédicat p : $\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3} = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq 0\}$.

En reprenant le calcul de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}_3} &= \mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(2) + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(-2)} + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(0).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(4).\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(-4)) \\
&= 0 + \overline{1} + (1.0.1) = 0
\end{aligned}$$