COMPLEX - Partie 2

2021-2022

Énoncé

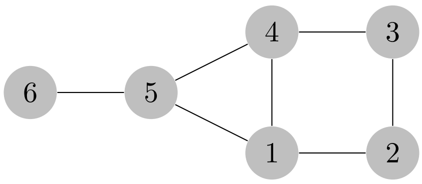
Nom ou numéro d'anonymat :

Les deux exercices sont indépendants.
Une rédaction claire et concise sera appréciée. Toute affirmation devra être justifiée.
Une question non résolue n'empêche pas de faire les suivantes
(dans ce cas indiquez clairement que vous admettez le(s) résultat(s) de la question non faite).

Exercice 1 : 3-coupes minimales

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté à $n \geq 3$ sommets et m arêtes. Une 3-coupe est une partition de V en trois sous-ensembles non vides S_1, S_2, S_3 telle que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = V$ et $S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S_3 = S_2 \cap S_3 = \emptyset$. Le cardinal d'une telle 3-coupe est le nombre d'arêtes de G avec une extrémité dans un ensemble S_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et l'autre extrémité dans un ensemble S_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$ et $i \neq j$. Par abus de langage, nous dirons qu'une telle arête appartient à la 3-coupe.

1.a] Trouver une 3-coupe de cardinal minimal pour le graphe $G = (V, E)$ défini par $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$



1.b] Supposons que l'on considère une partition aléatoire formée en prenant pour S_1 un sommet aléatoire u de V, pour S_2 un sommet aléatoire $v \neq u$ de V et pour S_3 l'ensemble $V \setminus \{u, v\}$. Calculer la probabilité qu'une arête de G n'appartienne pas à la 3-coupe ainsi construite.

1.c] En déduire l'espérance du cardinal de la 3-coupe aléatoire ainsi construite.

1.d] En déduire, qu'il existe une 3-coupe de G de cardinal inférieur ou égal à

$$\left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n-1}\right)\right] m$$

1.e] Considérons une 3-coupe minimale C de G. Donner une borne inférieure sur la probabilité qu'une arête tirée uniformément aléatoirement dans E n'appartienne pas à la 3-coupe C.

1.f] Considérons la variante de l'algorithme de Karger qui s'arrête lorsqu'il ne reste plus que trois sommets du graphe (au lieu de deux pour celui vu en cours). Pour rappel, l'algorithme tire à chaque étape une arête uniformément aléatoirement dans V et effectue la contraction du graphe selon cette arête. Cette opération diminue le nombre d'arêtes de 1 et replace les deux sommets de l'arête par un sommet fusionné. Lorsqu'il ne reste plus que trois sommets, l'algorithme retourne les trois ensembles formés des sommets fusionnés dans chacun de ces sommets restants.

Montrer la probabilité que l'algorithme ne sélectionne jamais une arête appartenant à C est supérieure ou égale à

$$\prod_{i=4}^{n}\left(1-\frac{2}{i}\right)\left(1-\frac{2}{i-1}\right)$$

1.g] En déduire un algorithme probabiliste (de type Monte-Carlo) qui étant donné un graphe G retourne une 3-coupe minimale avec probabilité au moins $1/2$ en $O(n^6)$ opérations.

Exercice 2 : Atlantic City

Soient $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction et $\mathcal{L} \subset \{0,1\}^*$ un langage.

Nous dirons que $\mathcal{L}$ appartient à la classe $\widetilde{\mathsf{BPTIME}}(\mathsf{T})$, s'il existe une machine de Turing probabiliste M qui termine en temps espéré $T(|x|)$ pour tout mot $x \in \{0,1\}^*$ et telle que $\Pr[M(x) = 1] \geq 2/3$ si $x \in \mathcal{L}$ et $\Pr[M(x) = 0] \geq 2/3$ si $x \notin \mathcal{L}$ (où $\Pr[M(x) = b]$ pour $b \in \{0,1\}$ désigne la proportion des calculs de M qui retournent le résultat b sur l'entrée x).

Nous notons $\widetilde{\mathsf{BPP}} = \bigcup_{k \geq 0} \widetilde{\mathcal{BPTIME}}(n \mapsto n^k)$.

2.a] Montrer que $\mathsf{BPP} \subseteq \widetilde{\mathsf{BPP}}$.

2.b] Montrer que $\widetilde{\mathsf{BPP}} \subseteq \mathsf{BPP}$.

2.c] Conclure