Examen du 14/06/2022

Durée 2h

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (0,5+0,5+1+1+1+1,5=5,5 points)
Soit F la formule $(\forall x\, p(x, y)) \Rightarrow \exists y\, p(z, y)$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.
2. Donner **toutes** les clôtures universelles de F.
3. Existe-t-il une formule F_1 logiquement équivalente à F qui utilise les deux symboles de variables y et z et seulement ces deux symboles. Si oui, donner F_1, sinon justifier.
4. Existe-t-il une formule F_2 logiquement équivalente à F qui utilise les deux symboles de variables x et y et seulement ces deux symboles. Si oui, donner F_2, sinon justifier.
5. Existe-t-il une formule F_3 logiquement équivalente à F qui utilise les quatre symboles de variables w, x, y et z et seulement ces quatre symboles. Si oui, donner F_3, sinon justifier.
6. Calculer $F[x := f(x, y, z)]$ et $F[y := f(x, y, z)]$.

Exercice 2 (8+10=18 points)
Pour formaliser l'affirmation : « *Dans tout village, il ne peut pas exister de barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là.* », on utilise un prédicat binaire r tel que $r(t_1, t_2)$ signifie que t_1 rase t_2. La formule F_1 qui exprime qu'il n'existe aucun individu x tel que x rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là, peut être définie à partir du prédicat r comme suit :

$$\text{formule } F_1 \ : \ \neg\exists x\, \forall y\ (\underbrace{(\neg r(y, y) \Rightarrow r(x, y))}_{\substack{\text{si } y \text{ ne se rase pas}\\ \text{lui-même alors } x \text{ rase } y}} \wedge \underbrace{(r(x, y) \Rightarrow \neg r(y, y))}_{\substack{\text{si } x \text{ rase } y \text{ alors } y \text{ ne}\\ \text{se rase pas lui-même}}})$$

Une autre façon de formuler cette affirmation consiste à exprimer que pour tout individu x, il existe un individu y tel que soit y ne se rase pas lui-même et x ne rase pas y, soit y se rase lui-même et x rase y. La formule F_2 ci-dessous correspond à cette formulation :

$$\text{formule } F_2 \ : \ \forall x\, \exists y\ (\underbrace{(\neg r(y, y) \wedge \neg r(x, y))}_{\substack{y \text{ ne se rase pas lui-même}\\ \text{et } x \text{ ne rase pas } y}} \vee \underbrace{(r(y, y) \wedge r(x, y))}_{\substack{y \text{ se rase lui-même}\\ \text{et } x \text{ rase } y}})$$

Le but de cet exercice est de prouver la formule $F_2 \Rightarrow F_1$. Les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire la preuve P_1 vous pouvez quand même l'utiliser dans la deuxième question.

1. Soit A et B deux formules atomiques quelconques. Prouver la formule :

$$((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow \neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$$

On note P_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{P_1} \rangle$	montrons $((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow \neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{P_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** P_1

2. Compléter la preuve P_2 ci-dessous de la formule $F_2 \Rightarrow F_1$.

$\langle 1_{P_2}\rangle$	montrons $(\forall x\, \exists y\, ((\neg r(y,y) \wedge \neg r(x,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(x,y))))$ $\Rightarrow (\neg\exists x\, \forall y\, ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y))))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{P_2}\rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** P_2

Indication : après avoir construit un contexte d'hypothèse (à l'aide des règles d'introduction), la preuve peut s'obtienir en appliquant les règles d'élimination des quantificateurs $\exists$ et $\forall$ ainsi que la preuve P_1 de la question précédente en supposant que la formule A est la formule $r(\Box,\Box)$ et que la formule B est la formule $r(\bigcirc,\Box)$, où $\Box$ et $\bigcirc$ désignent deux symboles de variable qui dépendent des symboles choisis lors de l'application des règles sur les quantificateurs, et donc en utilisant directement la boîte ci-dessous.

$\langle 1_{P_1}\rangle$	montrons $((\neg r(\Box,\Box) \wedge \neg r(\bigcirc,\Box)) \vee (r(\Box,\Box) \wedge r(\bigcirc,\Box)))$ $\Rightarrow \neg((\neg r(\Box,\Box) \Rightarrow r(\bigcirc,\Box)) \wedge (r(\bigcirc,\Box) \Rightarrow \neg r(\Box,\Box)))$	
	ne pas recopier le contenu la preuve P_1 sur votre copie	
$\langle 1_{P_1}\rangle$	CQFD	**preuve** P_1

Exercice 3 (0,5+1+2+0,5=4 points)

1. Soit F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F},\mathcal{P})$, donner la définition mathématique de $F_1 \models F_2$.
2. Soit $F_1 = (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$ et $F_2 = A \Rightarrow B$. Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, donner (sans simplification) les expressions booléennes $[F_1]^{\mathbf{M}}$ et $[F_2]^{\mathbf{M}}$.
3. Montrer que $F_1 \models F_2$.
4. Que pouvez-vous en déduire sur la formule $F_1 \Rightarrow F_2$?

Exercice 4 (1+1+4=6 points)

On considère un langage de termes avec un seul symbole de variable : $X = \{x\}$. L'ensemble des symboles de fonction de ce langage est $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ (f et g sont des symboles de fonction unaire).

1. Particulariser la définition de $\mathcal{T}(X,\mathcal{F})$ pour X et $\mathcal{F}$.
2. Donner une définition inductive du nombre $\text{nbf}(t)$ de symboles f et du nombre $\text{nbg}(t)$ de symboles g apparaissant dans un terme t.
3. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et telle que :

$$\begin{array}{ll} f^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & g^{\mathbf{M}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ f^{\mathbf{M}}(n) = 2 \times n & g^{\mathbf{M}}(n) = -n \end{array}$$

   Montrer (par induction) que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(X,\mathcal{F})$, $[t]_v^{\mathbf{M}} = 2^{\text{nbf}(t)} \times v(x) \times (-1)^{\text{nbg}(t)}$ pour toute valuation v.

Exercice 5 (0,5+2+1+(2+3+4)=12,5 points)

Soit l'ensemble de symbole de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p\}$ et X un ensemble de symboles de variable. Soit $\mathbf{M}$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$ contient exactement deux éléments distincts.

1. Soit $v : X \to |\mathbf{M}|$ une valuation et $x \in X$ un symbole variable quelconque. Quelles sont les valeurs possibles de $v(x)$?
2. Combien d'interprétations $f^{\mathbf{M}}$ du symbole de fonction f existe-t-il ? Donner ces interprétations.
3. Combien d'interprétations $p^{\mathbf{M}}$ du symbole de prédicat p existe-t-il ? (on ne demande pas de donner ces interprétations)
4. Soit la formule $F = \forall x\, (p(x, f(x)) \Rightarrow p(f(x), x))$ et v une valuation quelconque.
   (a) Donner l'expression $[F]_v^{\mathbf{M}}$ et la développer en utilisant le fait que $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$.
   (b) Parmi les interprétations possibles de f données dans la question 2, existe-t-il une interprétation de f telle que $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$ quelle que soit l'interprétation de p ? Si oui laquelle ? Justifier votre réponse.
   (c) On considère l'interprétation $p^{\mathbf{M}} = \{(d_1, d_2)\}$. Pour chacune des interprétations possibles de f données dans la question 2, donner la valeur de $[F]_v^{\mathbf{M}}$. Justifier vos réponses.

Corrigé de l'examen du 14/06/2022

▶ Corrigé de l'exercice 1.

1. $\mathrm{Free}(F) = \{y, z\}$
2. La formule F admet les deux clôtures universelles $\forall y \forall z\, F$ et $\forall z \forall y\, F$.
3. La formule F_1 s'obtient en renommant l'occurrence liée de x par z dans la sous-formule $\forall x\, p(x, y)$: $F_1 = (\forall z\, p(z, y)) \Rightarrow \exists y\, p(z, y)$
4. Il n'existe pas de formule logiquement équivalente à F qui utilise les deux symboles de variables x et y et seulement ces deux symboles car toute formule logiquement équivalente à F contient nécessairement une occurrence libre du symbole variable z.
5. La formule F_3 peut s'obtenir en renommant l'occurrence liée de y par w dans la sous-formule $\exists y\, p(z, y)$: $F_3 = (\forall x\, p(x, y)) \Rightarrow \exists w\, p(z, w)$
6. Puisque $x \notin \mathrm{Free}(F)$, on a $F[x := f(x, y, z)] = F$. Pour substituer y par $f(x, y, z)$ dans la formule F, il faut tout d'abord renommer l'occurrence de variable liée de x, par exemple par w, dans la sous-formule $\forall x\, p(x, y)$ pour obtenir la formule $(\forall w\, p(w, y)) \Rightarrow \exists y\, p(z, y)$ sur laquelle on peut effectuer la substitution :

$$F[y := f(z, y, z)] = (\forall w\, p(w, f(x, y, z))) \Rightarrow \exists y\, p(z, y)$$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

$\langle 1_{P_1} \rangle$ montrons $((\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow \neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$

> $\langle 2_{P_1} \rangle$ supposons $h_1 : (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$, montrons $\neg((\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A))$
>
> > $\langle 3_{P_1} \rangle$ supposons $h_2 : (\neg A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow \neg A)$, montrons false
> >
> > > $\langle 4_{P_1} \rangle$ supposons $h_3 : \neg A \wedge \neg B$, montrons false
> > >
> > > > $\langle 5_{P_1} \rangle$ montrons $\neg B$
> > > > $\langle 5_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_3)
> > >
> > > > $\langle 6_{P_1} \rangle$ montrons B
> > > >
> > > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ montrons $\neg A \Rightarrow B$
> > > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_2)
> > > >
> > > > > $\langle 8_{P_1} \rangle$ montrons $\neg A$
> > > > > $\langle 8_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_3)
> > > >
> > > > $\langle 6_{P_1} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)
> > >
> > > $\langle 4_{P_1} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
> >
> > > $\langle 5_{P_1} \rangle$ supposons $h_4 : A \wedge B$, montrons false
> > >
> > > > $\langle 6_{P_1} \rangle$ montrons $\neg A$
> > > >
> > > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ montrons $B \Rightarrow \neg A$
> > > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_2)
> > > >
> > > > > $\langle 8_{P_1} \rangle$ montrons B
> > > > > $\langle 8_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_4)
> > > >
> > > > $\langle 6_{P_1} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)
> > >
> > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ montrons A
> > > > $\langle 7_{P_1} \rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_4)
> > >
> > > $\langle 5_{P_1} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
> >
> > $\langle 3_{P_1} \rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec h_1)
>
> $\langle 2_{P_1} \rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 1_{P_1} \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** P_1

$\langle 1_{P_2}\rangle$ montrons $(\forall x\,\exists y\,((\neg r(y,y) \wedge \neg r(x,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(x,y))))$
$\Rightarrow (\neg\exists x\,\forall y\,((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y))))$

$\langle 2_{P_2}\rangle$ supposons $h_1 : \forall x\,\exists y\,((\neg r(y,y) \wedge \neg r(x,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(x,y)))$
montrons $\neg\exists x\,\forall y\,((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

$\langle 3_{P_2}\rangle$ supposons $h_2 : \exists x\,\forall y\,((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$
montrons false

$\langle 4_{P_2}\rangle$ soit une nouvelle variable z
supposons $h_3 : \forall y\,((\neg r(y,y) \Rightarrow r(z,y)) \wedge (r(z,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$
montrons false

$\langle 5_{P_2}\rangle$ montrons $(\exists y\,((\neg r(y,y) \wedge \neg r(z,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(z,y)))) \Rightarrow \mathsf{false}$

$\langle 6_{P_2}\rangle$ supposons $h_4 : \exists y\,((\neg r(y,y) \wedge \neg r(z,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(z,y)))$
montrons false

$\langle 7_{P_2}\rangle$ soit une nouvelle variable w
supposons $h_5 : (\neg r(w,w) \wedge \neg r(z,w)) \vee (r(w,w) \wedge r(z,w))$
montrons false

$\langle 8_{P_2}\rangle$ montrons $\neg((\neg r(w,w) \Rightarrow r(z,w)) \wedge (r(z,w) \Rightarrow \neg r(w,w)))$

$\langle 1_{P_1}\rangle$ montrons $((\neg r(w,w) \wedge \neg r(z,w)) \vee (r(w,w) \wedge r(z,w)))$
$\Rightarrow \neg((\neg r(w,w) \Rightarrow r(z,w)) \wedge (r(z,w) \Rightarrow \neg r(w,w)))$
...
$\langle 1_{P_1}\rangle$ CQFD **preuve** P_1

$\langle 9_{P_2}\rangle$ montrons $((\neg r(w,w) \wedge \neg r(z,w)) \vee (r(w,w) \wedge r(z,w)))$
$\langle 9_{P_2}\rangle$ CQFD (Ax avec h_5)

$\langle 8_{P_2}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

$\langle 9_{P_2}\rangle$ montrons $(\neg r(w,w) \Rightarrow r(z,w)) \wedge (r(z,w) \Rightarrow \neg r(w,w))$
$\langle 9_{P_2}\rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_3)

$\langle 7_{P_2}\rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 6_{P_2}\rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h_4)

$\langle 1_{P_4}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

$\langle 6_{P_2}\rangle$ montrons $\exists y\,((\neg r(y,y) \wedge \neg r(z,y)) \vee (r(y,y) \wedge r(z,y)))$
$\langle 6_{P_2}\rangle$ CQFD ($D_\forall$ avec h_1)

$\langle 4_{P_2}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

$\langle 3_{P_2}\rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h_2)

$\langle 2_{P_2}\rangle$ CQFD ($I_\neg$)

$\langle 1_{P_2}\rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** P_2

▶ Corrigé de l'exercice 3.

1. $F_1 \models F_2$ si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$ telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$, on a $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$.

2. $[F_1]^{\mathbf{M}} = \left(\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I_M}(B)}\right) + (\mathbf{I_M}(A) \cdot \mathbf{I_M}(B))$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B)$.

3. Soit $\mathbf{M}$ une structure telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = \left(\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I_M}(B)}\right) + (\mathbf{I_M}(A) \cdot \mathbf{I_M}(B)) = 1$. Un des deux termes (au moins) de cette somme booléenne vaut 1. Si $\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I_M}(B)} = 1$ alors nécessairement $\overline{\mathbf{I_M}(A)} = 1$ et donc $[F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B) = 1 + \mathbf{I_M}(B) = 1$. Si $\mathbf{I_M}(A) \cdot \mathbf{I_M}(B) = 1$ alors nécessairement $\mathbf{I_M}(B) = 1$ et donc $[F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B) = \overline{\mathbf{I_M}(A)} + 1 = 1$.

4. Puisque $F_1 \models F_2$, la formule $F_1 \Rightarrow F_2$ est une formule valide.

▶ Corrigé de l'exercice 4.

(1). Définition inductive de $\mathcal{T}(X,\mathcal{F})$:
- $x \in \mathcal{T}(X,\mathcal{F})$
- si $t \in \mathcal{T}(X,\mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}(X,\mathcal{F})$ et $g(t) \in \mathcal{T}(X,\mathcal{F})$

(2).

$$\mathrm{nbf}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 + \mathrm{nbf}(t') & \text{si } t = f(t') \\ \mathrm{nbf}(t') & \text{si } t = g(t') \end{cases} \qquad \mathrm{nbg}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ \mathrm{nbg}(t') & \text{si } t = f(t') \\ 1 + \mathrm{nbg}(t') & \text{si } t = g(t') \end{cases}$$

(3). Par induction sur t.
- Si $t = x \in$, alors $[x]_v^{\mathbf{M}} = v(x) = 1 \times v(x) \times 1 = 2^0 \times v(x) \times (-1)^0 = 2^{\mathrm{nbf}(x)} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(x)}$.

– Si $t = f(t')$, alors, par hypothèse d'induction on a $[t']_v^{\mathbf{M}} = 2^{\mathrm{nbf}(t')} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')}$, et il vient :

$$\begin{aligned}[f(t')]_v^{\mathbf{M}} &= f^{\mathbf{M}}\left([t']_v^{\mathbf{M}}\right) = 2 \times [t']_v^{\mathbf{M}} = 2 \times 2^{\mathrm{nbf}(t')} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')} \\ &= 2^{\mathrm{nbf}(t')+1} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')} = 2^{\mathrm{nbf}(t)} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t)}\end{aligned}$$

– Si $t = g(t')$, alors, par hypothèse d'induction on a $[t']_v^{\mathbf{M}} = 2^{\mathrm{nbf}(t')} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')}$, et il vient :

$$\begin{aligned}[g(t')]_v^{\mathbf{M}} &= g^{\mathbf{M}}\left([t']_v^{\mathbf{M}}\right) = -[t']_v^{\mathbf{M}} = (-1) \times [t']_v^{\mathbf{M}} = (-1) \times 2^{\mathrm{nbf}(t')} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')} \\ &= 2^{\mathrm{nbf}(t')} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t')+1} = 2^{\mathrm{nbf}(t)} \times v(x) \times (-1)^{\mathrm{nbg}(t)}\end{aligned}$$

► Corrigé de l'exercice 5.

(1). Puisque $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$, on a $v(x) = d_1$ ou $v(x) = d_2$.

(2). Puisque $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$, il existe quatre interprétations $f^{\mathbf{M}}$ distinctes du symbole de fonction f. Notons $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ et $\mathbf{f_4}$ ces interprétations.

$\mathbf{f_1}$	$\mathbf{f_2}$	$\mathbf{f_3}$	$\mathbf{f_4}$
$\mathbf{f_1}(d_1) = d_1$	$\mathbf{f_2}(d_1) = d_1$	$\mathbf{f_3}(d_1) = d_2$	$\mathbf{f_4}(d_1) = d_2$
$\mathbf{f_1}(d_2) = d_1$	$\mathbf{f_2}(d_2) = d_2$	$\mathbf{f_3}(d_2) = d_1$	$\mathbf{f_4}(d_2) = d_2$

(3). Puisque $|\mathbf{M}| = \{d_1, d_2\}$ et $p^{\mathbf{M}} \subseteq |\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}|$, il existe $2^4 = 16$ interprétations possibles du symbole de prédicat p (il y a 4 éléments dans le produit cartésien $|\mathbf{M}| \times |\mathbf{M}|$ et il existe 2^4 parties d'un ensemble de 4 éléments).

(4.a). On a :

$$\begin{aligned}& [F]_v^{\mathbf{M}} \\ = & \prod_{d \in \{d_1,d_2\}} [p(x, f(x)) \Rightarrow p(f(x), x)]_{v[x\leftarrow d]}^{\mathbf{M}} \\ = & \prod_{d \in \{d_1,d_2\}} \left(\overline{[p(x, f(x))]_{v[x\leftarrow d]}^{\mathbf{M}}} + [p(f(x), x)]_{v[x\leftarrow d]}^{\mathbf{M}}\right) \\ = & \left(\overline{[p(x, f(x))]_{v[x\leftarrow d_1]}^{\mathbf{M}}} + [p(f(x), x)]_{v[x\leftarrow d_1]}^{\mathbf{M}}\right) \cdot \left(\overline{[p(x, f(x))]_{v[x\leftarrow d_2]}^{\mathbf{M}}} + [p(f(x), x)]_{v[x\leftarrow d_2]}^{\mathbf{M}}\right)\end{aligned}$$

(4.b). On a $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$ si et seulement si :

$$\left((d_1, f^{\mathbf{M}}(d_1)) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } \left(f^{\mathbf{M}}(d_1), d_1\right) \in p^{\mathbf{M}}\right) \text{ et } \left((d_2, f^{\mathbf{M}}(d_2)) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } \left(f^{\mathbf{M}}(d_2), d_2\right) \in p^{\mathbf{M}}\right)$$

Considérons les interprétations $\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$, $\mathbf{f_3}$ et $\mathbf{f_4}$ de la question 2. Pour chacune de ces interprétations, $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$ si et seulement si :

$\mathbf{f_1}$	$\left((d_1, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$
$\mathbf{f_2}$	$\left((d_1, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$
$\mathbf{f_3}$	$\left((d_1, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$
$\mathbf{f_4}$	$\left((d_1, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$

On peut constater sur ce tableau que seule l'interprétation $f^{\mathbf{M}} = \mathbf{f_2}$ est telle que $[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$ quelle que soit l'interprétation $p^{\mathbf{M}}$ de p.

(4.c). Lorsque $p^{\mathbf{M}} = \{(d_1, d_2)\}$, on a :

$\mathbf{f_1}$	$\left((d_1, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$	$[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$
$\mathbf{f_2}$	$\left((d_1, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$	$[F]_v^{\mathbf{M}} = 1$
$\mathbf{f_3}$	$\left((d_1, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_1) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_1, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$	$[F]_v^{\mathbf{M}} = 0$
$\mathbf{f_4}$	$\left((d_1, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_1) \in p^{\mathbf{M}}\right)$ et $\left((d_2, d_2) \notin p^{\mathbf{M}} \text{ ou } (d_2, d_2) \in p^{\mathbf{M}}\right)$	$[F]_v^{\mathbf{M}} = 0$