Examen du 17/05/2022

Durée 2h

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (0,5+1+1+1,5+1+1=6 points)

Soit F la formule $(\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall x\, p(x)))$.

1. Déterminer l'ensemble Free(F).
2. Donner une formule F_1 logiquement équivalente à F qui utilise les symboles de variables x, y et z.
3. Soit $F_2 = F[x := f(x,y,z)]$. Calculer F_2.
4. Soit F_3 la formule $\forall y\, F_2$. Calculer $F_3[x := f(x,y,z)]$.
5. Donner deux formules (différentes) F' et F'' telles que $F = F'[z := x]$ et $F = F''[y := x]$.
6. Existe-t-il une formule F' telle que $F = F'[x := y]$? Si oui, donner F', sinon justifier.

Exercice 2 (8+5+7=20 points)

Le but de cet exercice est de prouver l'affirmation : « *Dans tout village, il ne peut pas exister de barbier qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là.* ». Les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

1. Prouver la formule $\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	montrons $\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_1

2. Soit r un prédicat binaire tel que $r(t_1, t_2)$ signifie que t_1 rase t_2. La formule F_t, qui exprime que t rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là, peut être définie à partir du prédicat r comme suit :

$$\text{formule } F_t \;:\; \forall y\; ((\underbrace{\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)}_{\text{si } y \text{ ne se rase pas lui-même alors } t \text{ rase } y}) \wedge (\underbrace{r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)}_{\text{si } t \text{ rase } y \text{ alors } y \text{ ne se rase pas lui-même}}))$$

Soit t un terme (ne contenant pas d'occurrence du symbole de variable y), prouver la formule $\neg F_t$. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $\neg\forall y\; ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)) \wedge (r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_2

Indication : on pourra utiliser la preuve B_1 de la question précédente en supposant que la formule A est la formule $r(t,t)$ et donc utiliser directement la boîte ci-dessous :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	montrons $\neg((\neg r(t,t) \Rightarrow r(t,t)) \wedge (r(t,t) \Rightarrow \neg r(t,t)))$	
	ne pas recopier le contenu la preuve B_1 sur votre copie	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD	**preuve** B_1

3. Prouver qu'il ne peut exister de personne qui rase tous ceux qui ne se rasent pas eux-mêmes et uniquement ceux-là. On note B_3 la preuve obtenue.

$\langle 1_{B_3} \rangle$	montrons $\neg\exists x\,\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_3} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_3

Indication : on pourra utiliser la preuve B_2 de la question précédente en remplaçant t par n'importe quel terme ne contenant pas d'occurrence du symbole de variable y, et donc utiliser directement la boîte ci-dessous (en remplaçant le ? par un terme) :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $\neg\forall y\ \Big(\big(\neg r(y,y) \Rightarrow r\big(\boxed{?}, y\big)\big) \wedge \big(r\big(\boxed{?}, y\big) \Rightarrow \neg r(y,y)\big)\Big)$	
	ne pas recopier le contenu la preuve B_2 sur votre copie	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD	**preuve** B_2

Exercice 3 (2+(2+1)=5 points)

Soit A une formule atomique, et $\mathbf{M}$ une structure (les deux questions sont indépendantes).

1. Donner une formule F, construite à partir de A telle que :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\left(\overline{\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}} + \mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)\right) \cdot \left(\overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)} + \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)}\right)}$$

sans simplification.

2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

Exercice 4 (1+1+4=6 points)

On considère un langage de termes avec un seul symbole de variable : $X = \{x\}$. L'ensemble des symboles de fonction de ce langage est $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ (f et g sont des symboles de fonctions unaires).

1. Particulariser la définition de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour X et $\mathcal{F}$.
2. Donner une définition inductive du nombre $\mathrm{nb}_f(t)$ de symboles f et du nombre $\mathrm{nb}_g(t)$ de symboles g apparaissant dans un terme t.
3. Soit $\mathbf{M}_1$ un structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs et telle que :

$$\begin{array}{ll} f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & \qquad g^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ f^{\mathbf{M}_1}(n) = n + 1 & \qquad g^{\mathbf{M}_1}(n) = n - 1 \end{array}$$

Montrer (par induction) que pour tout terme $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, $[t]_v^{\mathbf{M}_1} = v(x) + \mathrm{nb}_f(t) - \mathrm{nb}_g(t)$ pour toute valuation v.

Exercice 5 (0,5+0,5+2+(3+1)=7 points)

Soit l'ensemble de symbole de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$, l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2 = \{p, q\}$ et X un ensemble de symboles de variables. Soit $\mathbf{M}_2$ une structure dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}_2| = \{d\}$ contient un unique élément.

1. Soit $v : X \to |\mathbf{M}_2|$ une valuation et $x \in X$ un symbole variable quelconque. Que vaut $v(x)$?
2. Que vaut $f^{\mathbf{M}_2}(d)$?
3. Combien d'interprétations $p^{\mathbf{M}_2}$ du symbole de prédicat p existe-t-il ? Donner ces interprétations.
4. Soit la formule $F_1 = p(x, f(x)) \Rightarrow q(f(x), x)$ (avec $x \in X$).
   (a) Quelles sont les interprétations $p^{\mathbf{M}_2}$ et $q^{\mathbf{M}_2}$ possibles des prédicats p et q pour que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = 1$?
   (b) Quelles sont les interprétations $p^{\mathbf{M}_2}$ et $q^{\mathbf{M}_2}$ possibles des prédicats p et q pour que $[F_1]_v^{\mathbf{M}_2} = 0$?

Exercice 6 (5 points)
Soit F_2 la formule $(\forall x\, p(x, f(x))) \Rightarrow (\exists x\, q(f(x), x))$. On considère la structure $\mathbf{M}_3$ dont le domaine d'interprétation $|\mathbf{M}_3| = \mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et telle que :

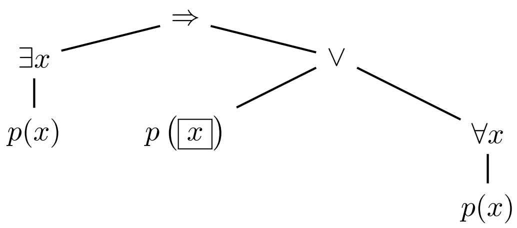
$$\begin{array}{lll} f^{\mathbf{M}_3} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} & q^{\mathbf{M}_3} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f^{\mathbf{M}_3}(n) = n + 2 & p^{\mathbf{M}_3} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 + n_2 \text{ est pair}\} & q^{\mathbf{M}_3} = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \leq n_2\} \end{array}$$

Montrer que $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$ pour toute valuation v.

Corrigé de l'examen du 17/05/2022

▶ Corrigé de l'exercice 1.

(1). Les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre de syntaxe abstraite de la formule F (les autres occurrences sont liées) :



On a donc $\mathrm{Free}(F) = \{x\}$.

(2). La formule F_1 peut être obtenue à partir de F en renommant les deux occurrences liées de x avec les symboles y et z :

$$F_1 = (\exists y\, p(y)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall z\, p(z)))$$

(autre solution possible $F_1 = (\exists z\, p(z)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall y\, p(y))))$

(3). $F_2 = F[x := f(x, y, z)] = (\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(f(x, y, z)) \vee (\forall x\, p(x)))$

(4). Pour pouvoir substituer x par $f(x, y, z)$ dans la formule $\forall y\, F_2$, il faut renommer l'occurrence liée de y (dans la portée du quantificateur $\forall$), pour obtenir la formule $\forall w\, ((\exists y\, p(y)) \Rightarrow (p(f(x, w, z)) \vee (\forall z\, p(z))))$ sur laquelle on peut appliquer la substitution $[x := f(x, y, z)]$ pour obtenir finalement :

$$\forall w\, ((\exists y\, p(y)) \Rightarrow (p(f(f(x, y, z), w, z)) \vee (\forall z\, p(z))))$$

(5). $F = F'[z := x]$ lorsque $F' = F$ et $F = F''[y := x]$ lorsque $F'' = (\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(y) \vee (\forall x\, p(x)))$.

(6). Pour que $F = F'[x := y]$ il faut que F' soit de la forme $(\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(?) \vee (\forall x\, p(x)))$ où ? désigne une occurrence libre de variable et dans ce cas :

— si $? = x$ alors $F \neq F'[x := y] = (\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(y) \vee (\forall x\, p(x)))$

— sinon, $? \neq x$ et $F \neq F'[x := y] = (\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(?) \vee (\forall x\, p(x)))$

Il n'existe donc pas de formule F' telle que $F = F'[x := y]$.

▶ Corrigé de l'exercice 2.

$\langle 1_{B_1}\rangle$ montrons $\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$

$\langle 2_{B_1}\rangle$ supposons $h_1 : (\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A)$, montrons false

$\langle 3_{B_1}\rangle$ supposons $h_2 : A$, montrons false

$\langle 4_{B_1}\rangle$ montrons A

$\langle 4_{B_1}\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5_{B_1}\rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 6_{B_1}\rangle$ montrons $A \Rightarrow \neg A$

$\langle 6_{B_1}\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_1)

$\langle 7_{B_1}\rangle$ montrons A

$\langle 7_{B_1}\rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 5_{B_1}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

$\langle 3_{B_1}\rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 4_{B_1}\rangle$ supposons $h_3 : \neg A$, montrons false

$\langle 5_{B_1}\rangle$ montrons A

$\langle 6_{B_1}\rangle$ montrons $\neg A \Rightarrow A$

$\langle 6_{B_1}\rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_1)

$\langle 7_{B_1}\rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 7_{B_1}\rangle$ CQFD (Ax avec h_3)

$\langle 5_{B_1}\rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

$\langle 6_{B_1}\rangle$ montrons $\neg A$

$\langle 6_{B_1}\rangle$ CQFD (Ax avec h_3)

$\langle 4_{B_1}\rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 2_{B_1}\rangle$ CQFD (D_{TE})

$\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD ($I_\neg$) **preuve B_1**

$\langle 1_{B_2}\rangle$ montrons $\neg\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)) \wedge (r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

$\langle 2_{B_2}\rangle$ supposons $h'_1 : \forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)) \wedge (r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$, montrons false

$\langle 1_{B_1}\rangle$ montrons $\neg((\neg r(t,t) \Rightarrow r(t,t)) \wedge (r(t,t) \Rightarrow \neg r(t,t)))$

...

$\langle 1_{B_1}\rangle$ CQFD **preuve B_1**

$\langle 3_{B_2}\rangle$ montrons $(\neg r(t,t) \Rightarrow r(t,t)) \wedge (r(t,t) \Rightarrow \neg r(t,t))$

$\langle 4_{B_2}\rangle$ montrons $\forall y\,((\neg r(y,y) \Rightarrow r(t,y)) \wedge (r(t,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

$\langle 4_{B_2}\rangle$ CQFD (Ax avec h'_1)

$\langle 3_{B_2}\rangle$ CQFD ($E_\forall$)

$\langle 2_{B_2}\rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD ($I_\neg$) **preuve B_2**

$\langle 1_{B_3}\rangle$ montrons $\neg\exists x\,\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

$\langle 2_{B_3}\rangle$ supposons $h''_1 : \exists x\,\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(x,y)) \wedge (r(x,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$, montrons false

$\langle 3_{B_3}\rangle$ soit une nouvelle variable z
supposons $h''_2 : \forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r(z,y)) \wedge (r(z,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$, montrons false

$\langle 1_{B_2}\rangle$ montrons $\neg\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r\,(z,y)) \wedge (r\,(z,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

...

$\langle 1_{B_2}\rangle$ CQFD **preuve B_2**

$\langle 5_{B_3}\rangle$ montrons $\forall y\ ((\neg r(y,y) \Rightarrow r\,(z,y)) \wedge (r\,(z,y) \Rightarrow \neg r(y,y)))$

$\langle 5_{B_3}\rangle$ CQFD Ax avec h''_2

$\langle 3_{B_3}\rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 2_{B_3}\rangle$ CQFD ($D_\exists$ avec h''_1)

$\langle 1_{B_3}\rangle$ CQFD ($I_\neg$) **preuve B_3**

▶ CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

1. La formule F peut être une des quatre formules ci-dessous :

$$\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (A \Rightarrow \neg A)) \quad \neg((\neg\neg A \vee A) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$
$$\neg((\neg A \Rightarrow A) \wedge (\neg A \vee \neg A)) \quad \neg((\neg\neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A))$$

2. En posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ il vient :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{(\overline{\overline{x}} + x) \cdot (\overline{x} + \overline{x})} \overset{E1.2}{\equiv} \overline{(x + x) \cdot (\overline{x} + \overline{x})} \overset{E3.5\times 2}{\equiv} \overline{x \cdot \overline{x}} \overset{E1.3}{\equiv} \overline{0} \overset{E1.1}{\equiv} 1$$

La formule F est donc une formule valide.

▶ Corrigé de l'exercice 4.

(1). Définition inductive de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$:

- $x \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
- si $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ et $g(t) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$

(2).

$$\mathrm{nb}_f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 + \mathrm{nb}_f(t') & \text{si } t = f(t') \\ \mathrm{nb}_f(t') & \text{si } t = g(t') \end{cases} \qquad \mathrm{nb}_g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ \mathrm{nb}_g(t') & \text{si } t = f(t') \\ 1 + \mathrm{nb}_g(t') & \text{si } t = g(t') \end{cases}$$

(3). Par induction sur t.

- Si $t = x \in$, alors $[x]_v^{\mathbf{M}_1} = v(x) = v(x) + 0 - 0 = v(x) + \mathrm{nb}_f(x) - \mathrm{nb}_g(x)$.
- Si $t = f(t')$, alors, par hypothèse d'induction on a $[t']_v^{\mathbf{M}_1} = v(x) + \mathrm{nb}_f(t') - \mathrm{nb}_g(t')$, et il vient :

$$\begin{aligned} [f(t')]_v^{\mathbf{M}_1} &= f^{\mathbf{M}_1}\left([t']_v^{\mathbf{M}_1}\right) = [t']_v^{\mathbf{M}_1} + 1 = v(x) + \mathrm{nb}_f(t') - \mathrm{nb}_g(t') + 1 \\ &= v(x) + 1 + \mathrm{nb}_f(t') - \mathrm{nb}_g(t') = v(x) + \mathrm{nb}_f(f(t')) - \mathrm{nb}_g(f(t')) \end{aligned}$$

- Si $t = g(t')$, alors, par hypothèse d'induction on a $[t']_v^{\mathbf{M}_1} = v(x) + \mathrm{nb}_f(t') - \mathrm{nb}_g(t')$, et il vient :

$$\begin{aligned} [g(t')]_v^{\mathbf{M}_1} &= g^{\mathbf{M}_1}\left([t']_v^{\mathbf{M}_1}\right) = [t']_v^{\mathbf{M}_1} - 1 = v(x) + \mathrm{nb}_f(t') - \mathrm{nb}_g(t') - 1 \\ &= v(x) + \mathrm{nb}_f(t') - (1 + \mathrm{nb}_g(t')) = v(x) + \mathrm{nb}_f(g(t')) - \mathrm{nb}_g(g(t')) \end{aligned}$$

▶ Corrigé de l'exercice 5.

(1). Puisque $|\mathbf{M}_2| = \{d\}$, on a $v(x) = d$.

(2). Puisque $|\mathbf{M}_2| = \{d\}$, $f^{\mathbf{M}_2}(d) = d$.

(3). Puisque $|\mathbf{M}_2| = \{d\}$, il y a seulement deux interprétations possibles pour tout symbole de prédicat binaire p : $p^{\mathbf{M}_2} = \emptyset$ et $p^{\mathbf{M}_2} = \{(d, d)\}$.

(4). On a : $[F_1]^{\mathbf{M}_2} = [p(x, f(x)) \Rightarrow q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2} = \overline{[p(x, f(x))]^{\mathbf{M}_2}} + [q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2}$

(4.a) On a $[F_1]^{\mathbf{M}_2} = 1$ dans les 3 cas suivants :

1. $\overline{[p(x, f(x))]^{\mathbf{M}_2}} = 0$ et $[q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2} = 1$ c-à-d $p^{\mathbf{M}_2} = q^{\mathbf{M}_2} = \{(d, d)\}$
2. $\overline{[p(x, f(x))]^{\mathbf{M}_2}} = 1$ et $[q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2} = 1$ c-à-d $p^{\mathbf{M}_2} = \emptyset$ et $q^{\mathbf{M}_2} = \{(d, d)\}$
3. $\overline{[p(x, f(x))]^{\mathbf{M}_2}} = 1$ et $[q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2} = 0$ c-à-d $p^{\mathbf{M}_2} = q^{\mathbf{M}_2} = \emptyset$

(4.b) On a $[F_1]^{\mathbf{M}_2} = 0$ lorsque $\overline{[p(x, f(x))]^{\mathbf{M}_2}} = 0$ et $[q(f(x), x)]^{\mathbf{M}_2} = 0$. c-à-d $p^{\mathbf{M}_2} = \{(d, d)\}$ et $q^{\mathbf{M}_2} = \emptyset$.

▶ Corrigé de l'exercice 6.

Soit v une valuation quelconque. Pour montrer que $[F_2]_v^{\mathbf{M}_3} = \overline{[\forall x\, p(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}_3}} + [\exists x\, q(f(x), x)]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$, on montre que $\overline{[\forall x\, p(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}_3}} = 0$ et $[\exists x\, q(f(x), x)]_v^{\mathbf{M}_3} = 0$.

$$\begin{array}{ll} & \overline{[\forall x\, p(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}_3}} = 0 \\ \text{car} & [\forall x\, p(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}_3} = 1 \\ \text{car} & [p(x, f(x))]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3} = 1 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ \text{car} & \left([x]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3}, [f(x)]_{v[x \leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3}\right) = \left(m, f^{\mathbf{M}_3}(m)\right) = (m, m+2) \in p^{\mathbf{M}_3} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ \text{car} & \text{si } m \text{ est pair alors } m+2 \text{ est pair et la somme de deux entiers pairs est paire} \\ & \text{si } m \text{ est impair alors } m+2 \text{ est impair et la somme de deux entiers impairs est paire} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & [\exists x\, q(f(x),x)]_v^{\mathbf{M}_3} = 0 \\
\text{car} & [q(f(x),x)]_{v[x\leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3} = 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\
\text{car} & \left([f(x)]_{v[x\leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3}, [x]_{v[x\leftarrow m]}^{\mathbf{M}_3}\right) = \left(f^{\mathbf{M}_3}(m), m\right) = (m+2, m) \notin q^{\mathbf{M}_3} \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\
\text{car} & m+2 \not\leq m \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}
\end{array}
$$