MAPSI – Cours 1 : Rappels de probabilités et statistiques

Nicolas Thome & Pierre Henri Wuillemin

LIP6 / ISIR – Sorbonne Université, France

1. Fonctionnement de l'UE MAPSI
2. Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions
3. Description d'une population, d'un échantillon
4. Variables multiples, loi jointe, conditionnelle
5. Indépendance probabiliste
6. Conclusion

MAPSI : informations pratiques

- **MAPSI :** Méthodes et algorithmes de probabilité et statistique en informatique
  - **Code UE :** MU4IN601
- **Calendrier :**
  `https://cal.ufr-info-p6.jussieu.fr/master/`
  $\Rightarrow$ Cocher M1-IMA
- **Ressopurces sur moodle :**
  `https://moodle-sciences-23.sorbonne-universite.fr/login/index.php`
- Répartition dans les groupes quasi-figée
- Mail & nouvelles fraiches pour les informations de dernière minute
- **Mattermost** (=slack gratuit) pour échanger sur les problèmes scientifiques
  - `http://tiny.cc/M1DAC23` pour s'inscrire
  - Channel MAPSI

Règles de notation

Organisation :

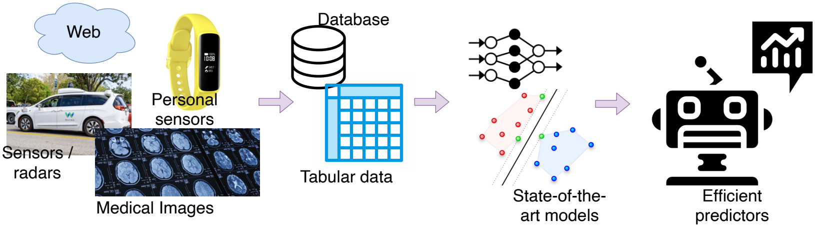
- Cours : théorie & concepts, exemples
- TD : applications & calculs sur feuille
- TME : mise en oeuvre des méthodes sur des exemples concrets

Notation :

- Examen final : 50%
  - $\approx$ 75% questions sur des formulations analytiques + calcul
  - $\approx$ 25% questions algo/code
- Partiel : 35%
- Notes de participation (contrôle continu, CC) : 15%
  - Attention : l'essentiel de la note est constitué du travail effectué **durant la séance**
  - **Soumission obligatoire** du code de TME en fin de séance...
  - ... Et **commentaires bienvenus** pour faciliter la correction
- session 2 : max(rattrapage, 15% CC + 85% rattrapage)

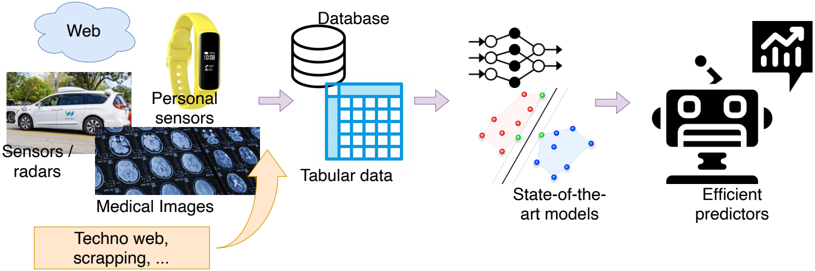
Pourquoi faire MAPSI ?

- Parce que c'est obligatoire
- Parce que c'est un bon rappel de statistiques pour...
  - Comprendre la littérature scientifique en générale
  - Comprendre comment fonctionne l'analyse de données
- Parce que c'est la porte d'entrée vers les sciences des données !

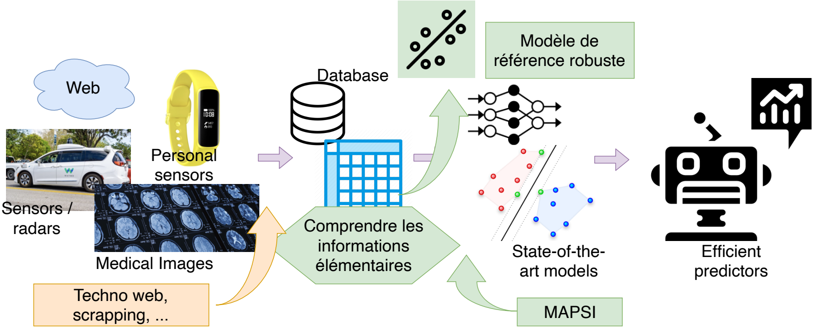


Pourquoi faire MAPSI ?

- Parce que c'est obligatoire
- Parce que c'est un bon rappel de statistiques pour...
  - Comprendre la littérature scientifique en générale
  - Comprendre comment fonctionne l'analyse de données
- Parce que c'est la porte d'entrée vers les sciences des données !



- Parce que c'est obligatoire
- Parce que c'est un bon rappel de statistiques pour...
  - Comprendre la littérature scientifique en générale
  - Comprendre comment fonctionne l'analyse de données
- Parce que c'est la porte d'entrée vers les sciences des données !



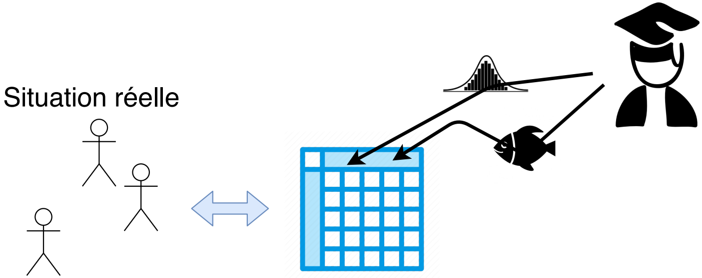
MAPSI, un peu plus concrètement

Faire le lien entre une situation réelle et un modèle Statistique

1. avec un modèle paramétrique

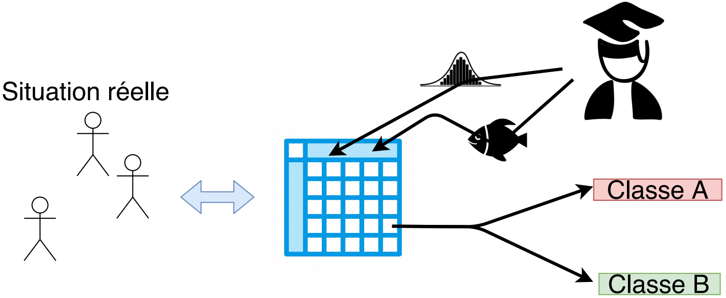
Faire le lien entre une situation réelle et un modèle Statistique

1. avec un modèle paramétrique



Faire le lien entre une situation réelle et un modèle Statistique

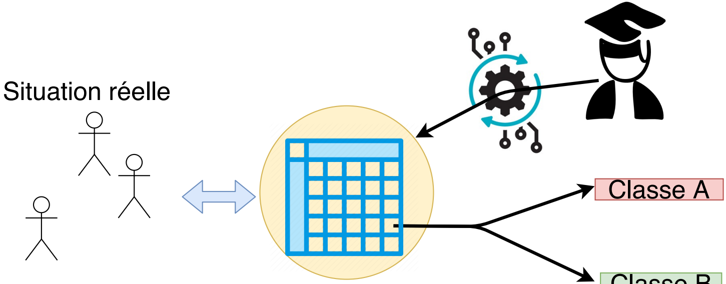
1. avec un modèle paramétrique



MAPSI, un peu plus concrètement

Faire le lien entre une situation réelle et un modèle Statistique

1. avec un modèle paramétrique
2. avec un modèle agnostique



1 Fonctionnement de l'UE MAPSI

2 Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions

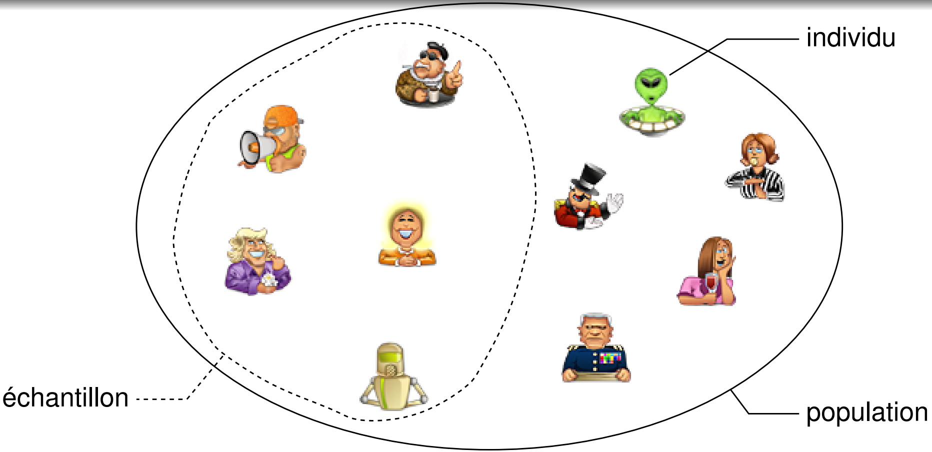
3 Description d'une population, d'un échantillon

4 Variables multiples, loi jointe, conditionnelle

5 Indépendance probabiliste

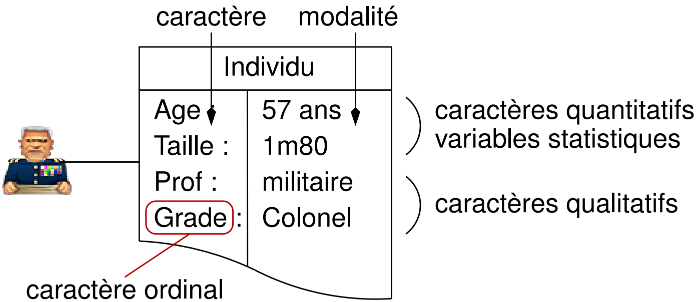
6 Conclusion

Vocabulaire (1/3)



Définitions

- population (statistique) : ensemble des objets (ou personnes) sur lesquels porte l'étude
- individu : chaque élément de la population



Définitions

- Caractères : critères d'étude de la population
- Modalités : les valeurs que peuvent prendre les caractères
- Caractère quantitatif ou Variable statistique : ensemble de modalités $=$ des nombres $+$ échelle mathématique
- Caractère qualitatif ou Variable catégorielle : caractère non quantitatif
- Caractère ordinal : les modalités sont ordonnées

Vocabulaire (3/3)

Individu	
Age :	57 ans — variable discrète
Taille :	1m80 — variable continue
Prof :	militaire
Grade :	Colonel

Définitions sur les variables statistiques

- Variable discrète : définie sur un espace discret (par exemple des entiers)
- Variable continue : définie sur un continuum (toutes les valeurs numériques d'un intervalle)

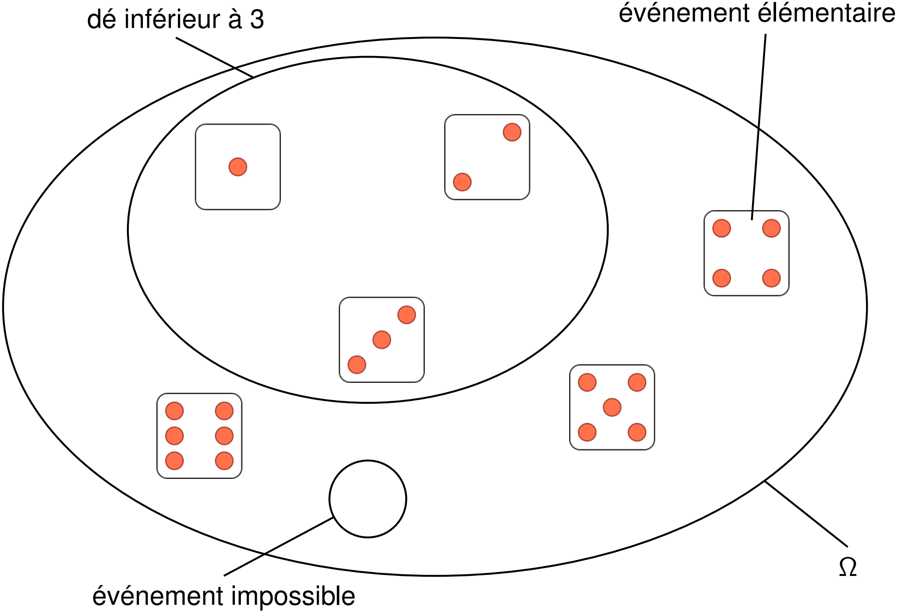
Effectifs, fréquences et distributions

Quelques définitions de statistiques

- X : caractère défini sur une population de N individus
- $\{x_1, \dots, x_I\}$ modalités de X
- N_i = effectif de x_i
  = nombre d'individus pour lesquels X a pris la valeur x_i
- fréquence ou effectif relatif : $f_i = \frac{N_i}{N}$
- distribution de X : ensemble des couples $\{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots\}$

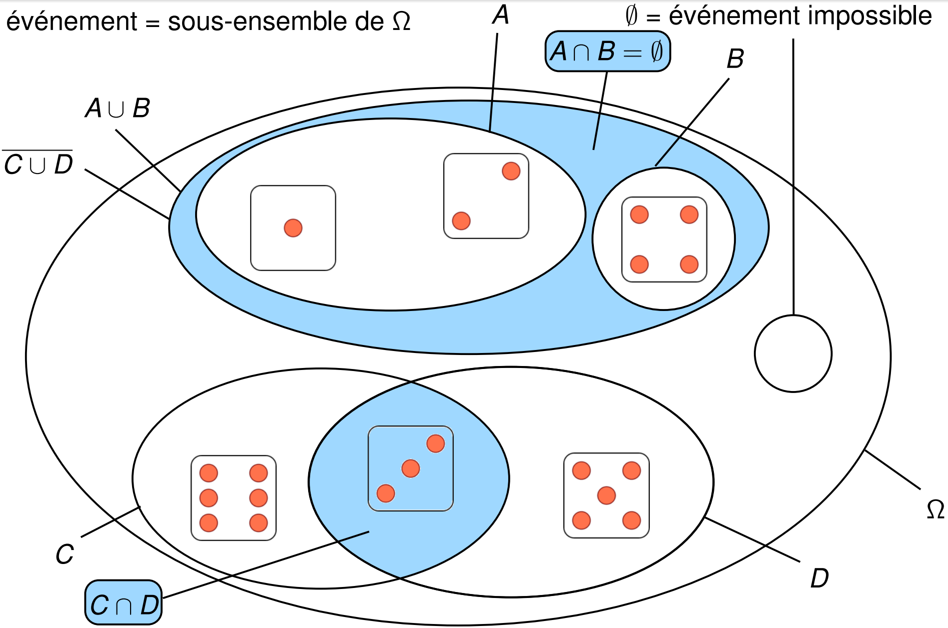
Représentation usuelle sous forme de tableau

Statistiques = description d'un échantillon
Probabilités = description d'une population.


dé inférieur à 3
événement élémentaire
Ω
événement impossible

Les événements : des ensembles (1/2)

événement = sous-ensemble de Ω



Notations ensemblistes :

- événements = sous-ensembles de Ω
- $\emptyset$ = événement impossible
- $A \cup B$ = événement qui est réalisé si A ou B est réalisé
- $C \cap D$ = événement qui est réalisé si C et D sont réalisés
- $\overline{C \cup D}$ = complémentaire de $C \cup D$ dans Ω

  = événement qui est réalisé ssi $C \cup D$ ne l'est pas
- $A \cap B = \emptyset$ = 2 événements qui ne peuvent se réaliser simultanément

Définition des probabilités : le cas discret

Définition des probabilités (Kolmogorov)

- Ω = ensemble fini ou dénombrable d'événements élémentaires e_k, $k \in K \subseteq \mathbb{N}$
- $\mathcal{A} = 2^{|\Omega|}$ = ensemble des événements
- Mesure de probabilité : $\forall A \in \mathcal{A}$, $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $A = \bigcup_{k \in L} A_k$, avec L ensemble dénombrable et, $\forall j, k \in L$, $j \neq k$, $A_j \cap A_k = \emptyset$, $P(A) = \sum_{k \in L} P(A_k)$.

$\Longrightarrow$ Les probabilités des événements élémentaires déterminent entièrement P

conséquence : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Univers, Evènements et Variable Aléatoire (1/5)

Quelques définitions de probabilités

- **Univers** Ω : un ensemble dénombrable (fini ou infini)
- **Evènement** : un sous-ensemble de l'univers Ω
- **Mesure de probabilité** :
  une fonction qui associe à chaque évènement une valeur entre 0 et 1, la probabilité de Ω est 1, et la probabilité d'une union dénombrable d'évènements incompatibles (ensembles disjoints) est la somme de leurs probabilités.
- **Espace probabilisé** :
  un couple (Ω, P) où P est une mesure de probabilité sur Ω.
- **Variable aléatoire**

Univers, Evènements et Variable Aléatoire (2/5)

Variable aléatoire

Lorsqu'on est face à une expérience aléatoire, on s'intéresse plus souvent à une *valeur* attribuée au résultat qu'au résultat lui-même.

Exemples

- Lorsque l'on joue à un jeu de hasard on s'intéresse plus au gain que l'on peut obtenir qu'au résultat du jeu.
- Nombre de pannes dans un ensemble de systèmes plutôt que l'état exact des systèmes

- Solution : "traduire" l'univers en évènements "compréhensibles".

$\Rightarrow$ variable aléatoire : application de l'univers Ω vers un autre ensemble.

Exemple du lancer de dé

On lance un dé après avoir misé 1*EUR*. Si le résultat est un 5 ou un 6 on double la mise, sinon perd la mise. Dans ce cas :

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Card $\Omega = 6$, et $\forall e \in \Omega, P(e) = \frac{1}{6}$
- Soit X la *v.a.* qui associe à tout résultat du dé un *gain* :
  $X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = -1$ et $X(5) = X(6) = (2 - 1) = 1$
  X est à valeur dans l'ensemble noté $\mathcal{X} = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$,
  $X : \Omega \to \mathcal{X}$
- Question :
  Comment calculer la probabilité de gagner 1*EUR* ?
- Réponse : Définir une probabilité sur $\mathcal{X}$, notée $\mathbb{P}$, en retournant dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
  i.e. utiliser P(*résultat du dé* =5 *ou* 6) pour estimer $\mathbb{P}(\{1\})$.

Variable aléatoire à valeurs discrètes (4/5)

Définition Variable aléatoire à valeurs discrètes

Soit Ω un ensemble dénombrable, et P une mesure de probabilité sur Ω.
Soit Ω', un ensemble discret. Une variable aléatoire est une fonction X de Ω muni de la mesure P vers Ω'.

Exemples

- Lancer d'un dé :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : i \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{0, 1\}$.
- Lancer de deux dés :
  Soit $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$ muni de la probabilité uniforme P.
  $X : (i, j) \mapsto i + j$
  est une variable aléatoire de (Ω, P) vers $\Omega' = \{2, ..., 12\}$

Variable aléatoire à valeurs discrètes (5/5)

Définitions : Loi de probabilité

Soit (Ω, P) un espace probabilisé où Ω est dénombrable.
Soit Ω' un ensemble discret, et X une v.a. de (Ω, P) vers Ω'.

- P_X définit une mesure de probabilité sur Ω' :

$$\forall E' \subset \Omega', \quad P_X(E') = P\big(X^{-1}(E')\big)$$

  avec $X^{-1}(E') = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in E'\}$
- L'ensemble des valeurs $P_X\big(\{\omega'\}\big)$ pour $\omega' \in \Omega'$ s'appelle la *loi de probabilité* de X.

Notations

- L'événement $X \in]-\infty, a]$ sera noté par $X \leq a$
- L'événement $X \in]a, b]$ sera noté par $a < X \leq b$
- L'événement $X \in \{a\}$ sera noté par $X = a$
- On a donc $P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B)$

1 Fonctionnement de l'UE MAPSI

2 Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions

3 Description d'une population, d'un échantillon

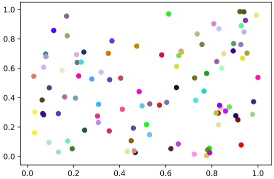
4 Variables multiples, loi jointe, conditionnelle

5 Indépendance probabiliste

6 Conclusion

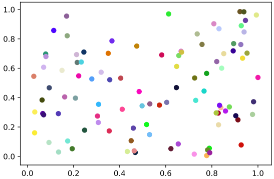
Description d'une population

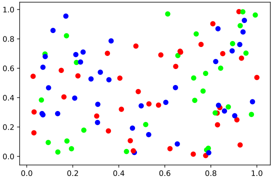
- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...



Description d'une population

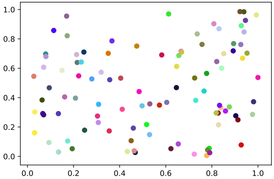
- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...

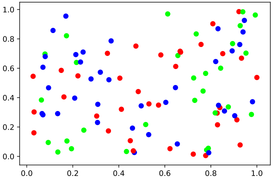


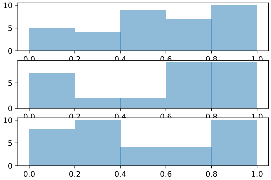


Description d'une population

- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...

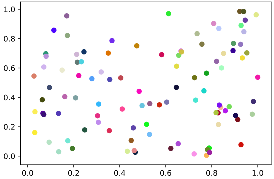


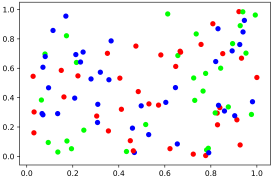


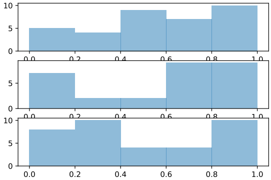


Description d'une population

- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...



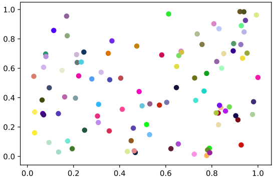


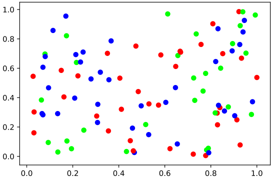


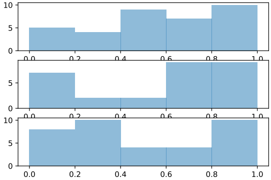
Moyennes : 0.56 0.59 0.47

Description d'une population

- A partir d'un échantillon
- En simplifiant les données continues
- Simplifiant les différentes dimensions, ...







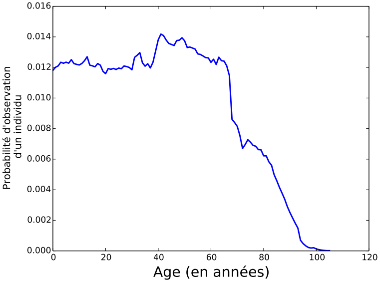
Moyennes : 0.56   0.59   0.47

Ou même une moyenne générale : 0.54

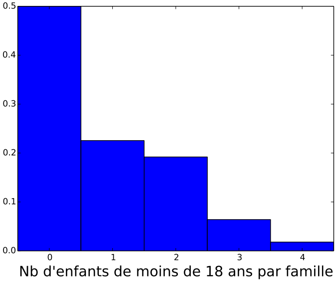
Décrire parfaitement une population = connaitre sa loi de probabilité

Exemples selon la nature des variables :

en continu :



en discret :



Description d'une population

Décrire parfaitement une population = connaitre sa loi de probabilité

Problème général :

Comment déduire la loi sur la population si on ne connait qu'un échantillon ?
Réponse dans les cours suivants...

Propriétés

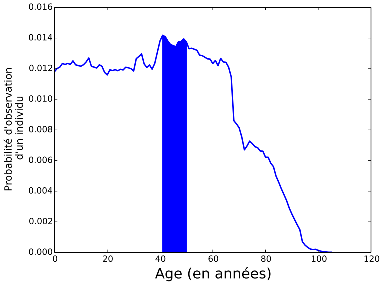
Cas général :

- Une distribution somme à 1
- Une probabilité est toujours ≥ 0

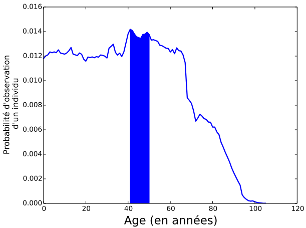
Cas Continu :

- Chaque événement élémentaire a une proba = 0
  (eg : proba d'avoir 40 ans)
- Mais proba d'être dans un intervalle ≥ 0
  (eg : proba d'avoir entre 40 et 50 ans)

$P(A)$ = surface délimitée par la **fonction de densité** dans la zone où les événements sont inclus dans A



Probabilités : les détails dans le cas continu



$$P(X \in I) = \int_I p(x)dx$$

avec P = proba et p = fonction de densité

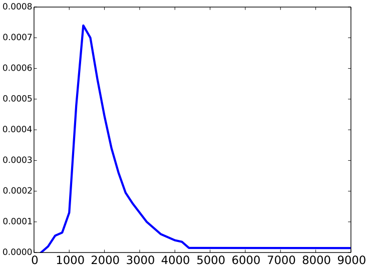
$\Longrightarrow$ connaître p = connaître P

intervalles $]-\infty, x[$ $\Longrightarrow$ fonction de répartition :

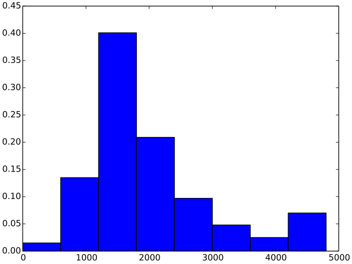
$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy$$

Continu $\rightarrow$ Discret

Possibilité de discrétisation = regroupement par tranches
Modélisation approximative, mais manipulation plus facile



Distribution des salaires en France



Distribution des salaires en France **discrétisée**

Caractéristiques d'une loi de probabilités (1/2)

Caractéristiques

- Espérance mathématique ou moyenne : $E(X)$

  X discrète : $E(X) = \sum x_k p_k$

  X continue : $E(X) = \displaystyle\int x\, p(x) dx$

⚠ l'espérance mathématique n'existe pas toujours

- Mode : Mo de P (pas toujours unique) :

  X discrète : $p(Mo) = \max_k p(x_k)$

  X continue : $p(Mo) = \max_x p(x)$

Propriétés de l'espérance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$
- $\forall X, Y,\ E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Caractéristiques d'une loi de probabilités (2/2)

- variance : $V(X)$ ou σ^2 :

  X discrète : $\sigma^2 = \sum [x_k - E(X)]^2 p_k$

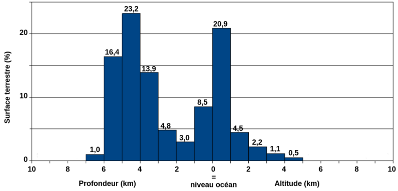
  X continue : $\sigma^2 = \displaystyle\int [x - E(X)]^2 \, p(x) dx$

- moyenne des carrés des écarts entre les valeurs prises par X et son espérance $E(X)$
- écart-type : σ = racine carrée de la variance
- variance et donc écart-type n'existent pas toujours
- **Prop :** $Y = aX + b$, où a et b sont des nombres réels
  $V(Y) = a^2 V(X)$
- **Prop :** $V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

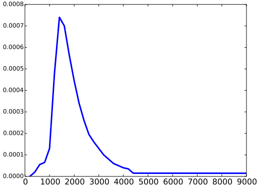
Idées :

1. Caractériser rapidement une distribution
2. Donner en quelques chiffres une idée approchée de l'ensemble de la distribution de probabilité.

- Espérance, variance + moments statistiques



Niveau du sol sur la planète



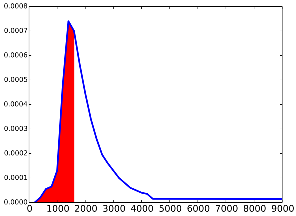
Médiane = 1650, Moyenne = 2000

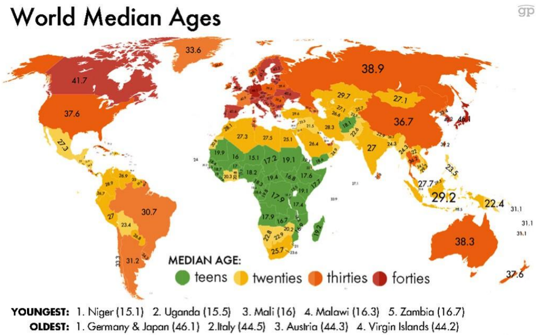
- Quantiles (médianes, ...)

Médiane d’une variable statistique continue

- X : variable statistique continue
- Médiane $=$ le nombre δ tel que les aires situées de part et d’autre de ce nombre dans l’histogramme représentant X sont égales

Médiane M : $P(X \leq M) \geq \frac{1}{2}$ et $P(X \geq M) \geq \frac{1}{2}$





Les quantiles

Quantile d'une variable discrète

- X : variable statistique discrète, modalités $\{x_1, \ldots, x_I\}$
- population de N individus (N_i = effectif de x_i)
- quantile d'ordre $\alpha = \delta$ tel que :

$$\sum_{i \in \{j : x_j < \delta\}} N_i \leq \alpha N \quad \textit{et} \quad \sum_{i \in \{j : x_j > \delta\}} N_i \leq (1 - \alpha) N$$

Quantile d'une variable continue

- X : variable statistique continue
- quantile d'ordre α = le nombre δ tel que les aires situées de part et d'autre de ce nombre dans l'histogramme représentant X sont égales respectivement à $\alpha \times$ aire totale et $(1 - \alpha) \times$ aire totale

1. Fonctionnement de l'UE MAPSI
2. Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions
3. Description d'une population, d'un échantillon
4. Variables multiples, loi jointe, conditionnelle
5. Indépendance probabiliste
6. Conclusion

- Chaque individu de la population est décrit sur plusieurs caractères
  Exemples :
  - Carte à jouer : Couleur (Trefle, Carreau, Coeur, Pique), Valeur (7, ..., Roi)
  - Sportifs : Age ($<$ 20, ..., $>$ 50), Sport pratiqué (Natation...)

Loi jointe $P(A, B)$: décrire toutes les intersections possibles
Exemple :

Sport $\setminus$ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03

NB : l'ensemble de l'univers Ω somme toujours à 1

Loi marginale

Définition

La marginalisation consiste à projeter une loi jointe sur l'une des variables aléatoires.
Par exemple, extraire $P(A)$ à partir de $P(A, B)$.

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i)$$

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50	Marginale
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08	0.32
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05	0.47
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03	0.21
						1

La marginale extraite ici correspond à $P(Sport)$. La nouvelle loi somme toujours à 1.

Loi marginale

Définition

La marginalisation consiste à projeter une loi jointe sur l'une des variables aléatoires.
Par exemple, extraire $P(A)$ à partir de $P(A, B)$.

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i)$$

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.02	0.05	0.09	0.08	0.08
Jogging	0.10	0.15	0.10	0.07	0.05
Tennis	0.02	0.03	0.06	0.07	0.03
Marginale	0.14	0.23	0.25	0.22	0.16

Probabilités conditionnelles (1/5)

Définition

la probabilité d'un événement A conditionnellement à un événement B, que l'on note $P(A|B)$, est la probabilité que A se produise sachant que B s'est ou va se produire.

Rem : $P(A|\Omega) = P(A)$ puisqu'on sait que Ω sera réalisé

Problème : comment calculer $P(A|B)$?

Probabilités conditionnelles (2/5)

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

Probabilités conditionnelles (2/5)

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\qquad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

- $\Omega' = B = \textit{coeur}$ (8 cartes)
- $P(A|B) =$ un roi parmi les coeur...

Exemple

- Tirer une carte parmi un jeu de 32 cartes
- $\Omega = \{32 \text{ cartes}\}$
- événements : $A =$ tirer un roi $\quad B =$ tirer un cœur
- $P(A|B) = ?$

Interprétation de $P(A|B)$

Dans l'univers réduit B ($\Omega' = B$), quelle est la probabilité de A ?

- $\Omega' = B =$ *coeur* (8 cartes)
- $P(A|B) =$ un roi parmi les coeur...

$P(A|B) = \frac{1}{8}$

Théorème des probabilités totales :

En partant de la loi jointe

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \text{ ou } P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Interprétation : l'observation conjointe de A et B ($P(A,B)$) correspond à l'observation de B ET à l'observation de A dans l'univers restreint B.

Théorème des probabilités totales :

En partant de la loi jointe

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} \text{ ou } P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

Interprétation : l'observation conjointe de A et B ($P(A,B)$) correspond à l'observation de B ET à l'observation de A dans l'univers restreint B.

Exemple : Roi de coeur = Observer un coeur ET observer un roi dans l'univers des coeurs

Probabilités conditionnelles (4/5)

Propriétés

- Réversible : $P(A, B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
- Théorème de Bayes :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- Intégration des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_i P(A, B = b_i) = \sum_i P(A|B = b_i)P(B_i)$$

Tableau de probabilité conditionnelle :

- Sport : $P(S)$ =

Natation	0.32
Jogging	0.47
Tennis	0.21

- Répartition des ages pour chaque sport :
  $P(A|S)$ =

Sport \ Age	< 20	$[20, 30[$	$[30, 40[,$	$[40, 50[$	≥ 50
Natation	0.06	0.16	0.28	0.25	0.25
Jogging	0.21	0.32	0.21	0.15	0.11
Tennis	0.10	0.14	0.29	0.33	0.14

- **Propriété :** chaque ligne somme à 1 (=chaque ligne est un univers à part)
- **Questions :** comment extraire la distribution des ages ? Comment obtenir la distribution jointe ?

1 Fonctionnement de l'UE MAPSI

2 Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions

3 Description d'une population, d'un échantillon

4 Variables multiples, loi jointe, conditionnelle

5 Indépendance probabiliste

6 Conclusion

Indépendance probabiliste (1/3)

Définition de l'indépendance

deux événements A et B sont indépendants si :

$$P(A, B) = P(A) \times P(B)$$

Corrolaire : deux événements A et B sont indépendants si :
$P(A|B) = P(A)$ (avec $P(B) > 0$)

l'indépendance n'est pas une propriété du couple (A, B) mais du couple $(\{A, A^c\}, \{B, B^c\})$:

$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ sont indépendants} &\Longrightarrow A \text{ et } B^c \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B \text{ indépendants} \\ &\Longrightarrow A^c \text{ et } B^c \text{ indépendants} \end{aligned}$$

Indépendance probabiliste (2/3)

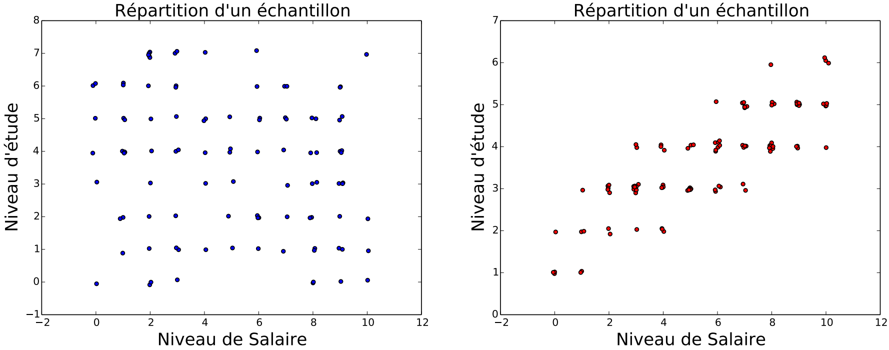
Démonstration :

A et B sont indépendants $\Longrightarrow P(A, B) = P(A) \times P(B)$

$P(A) = P(A, B) + P(A, B^c)$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow P(A, B^c) &= P(A) - P(A, B) \\ &= P(A) - P(A) \times P(B) \\ &= P(A) \times [1 - P(B)] \\ &= P(A) \times P(B^c)\end{aligned}$$

Exemple



Qu'est ce qui est dépendant ou indépendant ?

Indépendance (exemple)

Indépendance ou pas entre X et Y ?

Cas 1 :

	y_1	y_2
x_1	0.04	0.06
x_2	0.36	0.54

Cas 2 :

	y_1	y_2
x_1	0.1	0.2
x_2	0.3	0.4

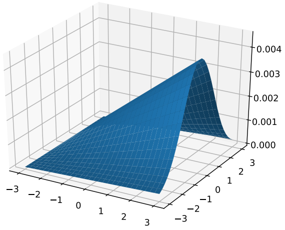
Cas 3 :

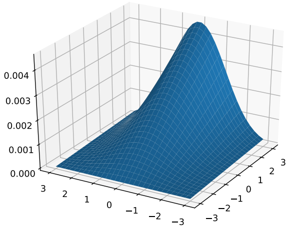
	y_1	y_2	y_3
x_1	0.07	0.24	0.16
x_2	0.07	0.30	0.16

Cas 4 :

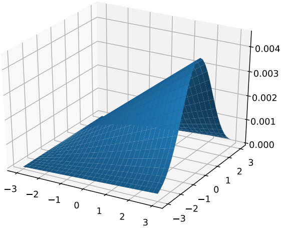
	y_1	y_2	y_3
x_1	0.01	0.02	0.07
x_2	0.09	0.18	0.63

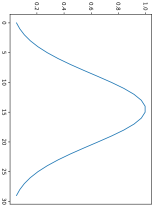
Représentation d'une loi jointe $P(X_1, X_2)$

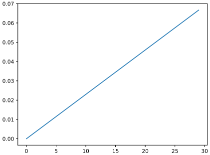




Représentation d'une loi jointe $P(X_1, X_2)$

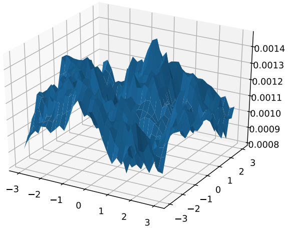


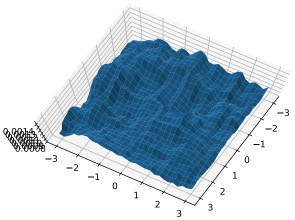




Indépendance (exemple graphique)

Représentation d'une loi jointe $P(X_1, X_2)$





Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ?
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)

Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)

Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)
- Combien de variable pour modéliser les probabilités de tirage de 3 dés (cumul) ?

Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)
- Combien de variable pour modéliser les probabilités de tirage de 3 dés (cumul) ?
  - Indépendance ! Dés identiques = 6 valeurs
  - Dés différents = $3 \times 6 = 18$ valeurs
  - Dés non indépendants (?) $6 \times 6 \times 6 = 216$ valeurs

Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)
- Combien de variable pour modéliser les probabilités de tirage de 3 dés (cumul) ?
  - Indépendance ! Dés identiques = 6 valeurs
  - Dés différents = $3 \times 6 = 18$ valeurs
  - Dés non indépendants (?) $6 \times 6 \times 6 = 216$ valeurs
- Combien de variables pour modéliser les probabilités d'apparition de groupes de 3 mots (tri-grammes) ? -Vocabulaire réduit à 10k mots-

Indépendance : pourquoi c'est important

- Combien de variable pour modéliser la probabilité de voir son toit s'envoler ? $12 \times 6 \times 10 = 720$
  - Mois de l'année (12)
  - Catégorie des ouragans (6)
  - Type de construction (10)
- Combien de variable pour modéliser les probabilités de tirage de 3 dés (cumul) ?
  - Indépendance ! Dés identiques = 6 valeurs
  - Dés différents = $3 \times 6 = 18$ valeurs
  - Dés non indépendants (?) $6 \times 6 \times 6 = 216$ valeurs
- Combien de variables pour modéliser les probabilités d'apparition de groupes de 3 mots (tri-grammes) ? -Vocabulaire réduit à 10k mots-
  - $10k^3 = 10^{12}$ valeurs (=4000 Go)

Caractéristiques d'une loi de probabilités

Propriétés de la variance

- $\forall X, Y,\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$ où :
  - $cov(X,Y)$ = covariance de X et Y

$$COV(X,Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])\,(Y - \mathrm{E}[Y])]$$

  - si X et Y discrètes

$$COV(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i - \mathrm{E}[X])(y_j - \mathrm{E}[Y])P(X = x_i, \cap Y = y_j)$$

  - si X et Y continues, de densité $p(x,y)$,

$$cov(X,Y) = \iint [x - E(X)][y - E(Y)]p(x,y)dxdy$$

Estimateur sur un échantillon : $\{(x_1,y_1),\ldots,(x_k,y_k),\ldots,(x_N,y_N)\}$

$$cov(X,Y) = \frac{1}{N}\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

Quantifier la dépendance entre X et Y

Définition : Coefficient de corrélation linéaire

Soit X, Y deux variables. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est :

$$r = \frac{\text{cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où σ_X et σ_Y sont les écart-types des variables X et Y.

1. Fonctionnement de l'UE MAPSI
2. Variables aléatoires & probabilités : vocabulaire, définitions
3. Description d'une population, d'un échantillon
4. Variables multiples, loi jointe, conditionnelle
5. Indépendance probabiliste
6. Conclusion

Les 4 règles qui vont vous sauver la vie.

- Probabilité :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad 0 \leq P(x) \leq 1 \text{ et } \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) = 1$$

- Marginalisation

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2, \ldots, x_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots)$$

- Conditionnement :

$$P(X_1, X_2) = P(X_1 | X_2) P(X_2) \text{ (et vice versa)}$$

- Indépendance :
  Si X_1 et X_2 sont indépendantes : $P(X_1, X_2) = P(X_1)P(X_2)$