# Examen partiel du 15/03/2022

**Durée 1h30**

Téléphones, calculettes et ordinateurs interdits.
Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle.
Le barême sur 43 est donné à titre indicatif.
Inscrire votre nom et votre numéro d'étudiant sur votre copie.

**Exercice 1 (1,5+1+(1+1+1,5)=6 points)**

1. On considère l'ensemble de symboles de variable $X = \{s_0\}$, l'ensemble de symboles de fonction $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_1 = \{s_1\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{s_2\}$, et l'ensemble de symboles de prédicat $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{s_3\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{s_4\}$. Définir une formule logique $F_1$ syntaxiquement correcte en remplissant chaque case ci-dessous par un symbole de $X$, $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{P}$ (recopier la formule obtenue sur votre copie).

$$\forall \square \left(\square\left(\square\left(\square\right)\right) \wedge \square\left(\square\left(\square\left(\square\right), \square\right), \square\right)\right)$$

2. Soit $F_2$ la formule $(\exists y\, p(y)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall z\, p(z)))$. Peut-on renommer certains symboles de variable de $F_2$ pour obtenir une formule $F_2'$ telle que :
   - $F_2'$ est logiquement équivalente à $F_2$
   - le seul symbole de variable qui apparaît dans $F_2'$ est le symbole $x$

   Si oui, donner la formule $F_2'$, sinon justifier.
3. Soit $F_3$ la formule $(\forall y\, p(x, f(x, y))) \wedge (\exists x\, \exists y\, q(g(x), y, z))$.
   (a) Déterminer l'ensemble $\mathrm{Free}(F_3)$.
   (b) Donner une clôture universelle de $F_3$. Est-elle unique ? (justifier)
   (c) Calculer $F_3[x := f(y, z)]$.

**Exercice 2 (8+10=18 points)**
Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$(\neg(A \wedge B) \wedge A) \Rightarrow \neg B \qquad (((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

**Exercice 3 (1+(1,5+2,5+2+(1,5+1,5))=10 points)**

1. Soient $F_1$ et $F_2$ deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$. Donner la définition mathématique de $F_1 \models\!\mid F_2$.
2. Soit $F$ la formule $((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)$.
   (a) Etant donnée une structure $\mathbf{M}$, calculer l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ en fonction de $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(A)$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}}(B)$ (sans effectuer de simplification).
   (b) En utilisant un raisonnement équationnel, simplifier l'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). En déduire que $F \models\!\mid A \Rightarrow B$.
   (c) La formule $F$ est-elle satisfiable ? est-elle valide ? (justifier)
   (d) Soit $F'$ une formule quelconque.
      i. A-t-on $F \wedge (A \wedge \neg B) \models F'$ ? (justifier)
      ii. Quelle propriété doit vérifier $F'$ pour que $F \vee A \models F'$ ? (justifier)

**Exercice 4 (1+1+1,5+2+2+1,5=9 points)**
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ avec $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ et $\mathbf{M}$ une structure telle que $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$, $a^{\mathbf{M}} = 0$, $f^{\mathbf{M}}(n) = n + 1$ et $g^{\mathbf{M}}(n) = n + 2$.

1. Particulariser la définition de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour cet ensemble de symboles.
2. Calculer $[f(g(f(f(a))))]^{\mathbf{M}}$.
3. Montrer que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[f(g(t))]^{\mathbf{M}} = [g(f(t))]^{\mathbf{M}}$.
4. Montrer que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}} = [f^n(a)]^{\mathbf{M}}$.
   (notation : $f^0(t) = t$ et $f^{n+1}(t) = f(f^n(t))$.)
5. Montrer qu'il existe un terme $t$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[t]^{\mathbf{M}} \neq [g^n(a)]^{\mathbf{M}}$.
6. Proposer une structure $\mathbf{M}'$ telle que pour tout terme $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $[t]^{\mathbf{M}} = 7$.

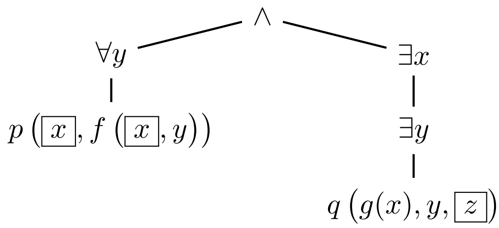
# Corrigé de l'examen partiel du 15/03/2022

▶ Corrigé de l'exercice 1.

(1). $\forall \boxed{s_0} \left( \boxed{s_3} \left( \boxed{s_1} \left( \boxed{s_0} \right) \right) \wedge \boxed{s_4} \left( \boxed{s_2} \left( \boxed{s_1} \left( \boxed{s_0} \right), \boxed{s_0} \right), \boxed{s_0} \right) \right)$

(2). On peut renommer l'occurrence liée de $y$ et l'occurrence liée de $z$ par $x$ puisque l'occurrence libre de $x$ ne se trouvera pas dans la portée des quantificateurs qui lient $y$ et $z$. La formule $F_2'$ équivalente à $F_2$ est donc $(\exists x\, p(x)) \Rightarrow (p(x) \vee (\forall x\, p(x)))$.

(3.a). Les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre de syntaxe abstraite de la formule $F$ (les autres occurrences sont liées) :




On a donc $\mathrm{Free}(F) = \{x, z\}$.

(3.b). $\forall x\, \forall z\, F_3$ est une clôture universelle de $F_3$. Elle n'est pas unique : il existe une deuxième clôture universelle de $F_3$ qui est la formule $\forall z\, \forall x\, F_3$

(3.c). Pour pouvoir substituer $x$ par $f(y, z)$ dans la formule $F_3$, il faut renommer l'occurrence liée de $y$ (dans la portée du quantificateur $\forall$), pour obtenir la formule $(\forall w\, p(x, f(x, w))) \wedge (\exists x\, \exists y\, q(g(x), y, z))$ sur laquelle on peut appliquer la substitution $[x := f(y, z)]$ pour obtenir finalement :

$$(\forall w\, p(f(y, z), f(f(y, z), w))) \wedge (\exists x\, \exists y\, q(g(x), y, z))$$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

⟨1⟩ montrons $(\neg(A \wedge B) \wedge A) \Rightarrow \neg B$
  ⟨2⟩ supposons $h_1 : \neg(A \wedge B) \wedge A$, montrons $\neg B$
    ⟨3⟩ supposons $h_2 : B$, montrons $\mathsf{false}$
      ⟨4⟩ montrons $\neg(A \wedge B)$
      ⟨4⟩ CQFD ($D^g_\wedge$ avec $h_1$)
      ⟨5⟩ montrons $A \wedge B$
        ⟨6⟩ montrons $A$
        ⟨6⟩ CQFD ($D^d_\wedge$ avec $h_1$)
        ⟨7⟩ montrons $B$
        ⟨7⟩ CQFD (Ax avec $h_2$)
      ⟨5⟩ CQFD ($I_\wedge$)
    ⟨3⟩ CQFD ($E_\neg$)
  ⟨2⟩ CQFD ($I_\neg$)
⟨1⟩ CQFD ($I_\Rightarrow$)

- $\langle 1\rangle$ montrons $(((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
  - $\langle 2\rangle$ supposons $h_1 : ((\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)) \vee (A \wedge B)$, $h_2 : A$, montrons $B$
    - $\langle 3\rangle$ supposons $h_3 : (\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$, montrons $B$
      - $\langle 4\rangle$ supposons $h_4 : \neg A \wedge B$, montrons $B$
      - $\langle 4\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec $h_4$)
      - $\langle 5\rangle$ supposons $h_5 : \neg A \wedge \neg B$, montrons $B$
        - $\langle 6\rangle$ montrons $A$
        - $\langle 6\rangle$ CQFD (Ax avec $h_2$)
        - $\langle 7\rangle$ montrons $\neg A$
        - $\langle 7\rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec $h_5$)
      - $\langle 5\rangle$ CQFD ($D^2_\perp$)
    - $\langle 3\rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec $h_3$)
    - $\langle 4\rangle$ supposons $h_4 : A \wedge B$, montrons $B$
    - $\langle 4\rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec $h_4$)
  - $\langle 2\rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec $h_1$)
- $\langle 1\rangle$ CQFD ($I^2_\Rightarrow$)

▶ CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3.

(1). $F_1 \models\!\!\!\!\!\!\models F_2$ si et seulement si pour toute structure $\mathbf{M}$, $[F_1]^{\mathbf{M}} = [F_2]^{\mathbf{M}}$.

(2.a).

$$\begin{aligned}[F]^{\mathbf{M}} &= [(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)]^{\mathbf{M}} + [A \wedge B]^{\mathbf{M}} = ([\neg A \wedge B]^{\mathbf{M}} + [\neg A \wedge \neg B]^{\mathbf{M}}) + ([A]^{\mathbf{M}} \cdot [B]^{\mathbf{M}}) \\ &= (([\neg A]^{\mathbf{M}} \cdot [B]^{\mathbf{M}}) + ([\neg A]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg B]^{\mathbf{M}})) + ([A]^{\mathbf{M}} \cdot [B]^{\mathbf{M}}) \\ &= ((\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \mathbf{I_M}(B)) + (\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \overline{\mathbf{I_M}(B)})) + (\mathbf{I_M}(A) \cdot \mathbf{I_M}(B))\end{aligned}$$

(2.b). Posons $x = \mathbf{I_M}(A)$ et $y = \mathbf{I_M}(B)$.

$$\begin{aligned}[F]^{\mathbf{M}} &= ((\overline{x} \cdot y) + (\overline{x} \cdot \overline{y})) + (x \cdot y) \overset{E4.1}{\equiv} (\overline{x} \cdot (y + \overline{y})) + (x \cdot y) \overset{E1.4}{\equiv} (\overline{x} \cdot 1) + (x \cdot y) \overset{E2.6}{\equiv} \overline{x} + (x \cdot y) \\ &\overset{E4.2}{\equiv} (\overline{x} + x) \cdot (\overline{x} + y) \overset{E3.1}{\equiv} (x + \overline{x}) \cdot (\overline{x} + y) \overset{E1.4}{\equiv} 1 \cdot (\overline{x} + y) \overset{E2.2}{\equiv} \overline{x} + y = \overline{\mathbf{I_M}(A)} + \mathbf{I_M}(B) \\ &= [A \Rightarrow B]^{\mathbf{M}}\end{aligned}$$

(2.c). La formule $F$ est satisfiable car si $\mathbf{M}_1$ est une structure telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(B) = 1$ on a $[F]^{\mathbf{M}_1} = \overline{\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(A)} + 1 = 1$, mais elle n'est pas valide car si l'on considère la structure $\mathbf{M}_2$ telle que $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_2}(A) = 1$ et $\mathbf{I}_{\mathbf{M}_1}(B) = 0$ on a $[F]^{\mathbf{M}_2} = \overline{1} + 0 = 0 + 0 = 0$.

(2.d). La formule $F \wedge (A \wedge \neg B)$ est logiquement équivalente à $(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$ qui est une formule insatisfiable puisque, en posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ et $y = \mathbf{I_M}(B)$, on a :

$$[(A \Rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)]^{\mathbf{M}} = (\overline{x} + y) \cdot (x \cdot \overline{y}) = (\overline{x} \cdot x \cdot \overline{y}) + (y \cdot x \cdot \overline{y}) = 0 + 0 = 0$$

Pour toute formule $F'$, on a donc bien $F \wedge (A \wedge \neg B) \models F'$.

La formule $F \vee A$ est logiquement équivalente à $(A \Rightarrow B) \vee A$ qui est une formule valide puisque, en posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ et $y = \mathbf{I_M}(B)$, on a $[(A \Rightarrow B) \vee A]^{\mathbf{M}} = (\overline{x} + y) + x = 1$. Pour que $F \vee A \models F'$, il faut donc que $F'$ soit également une formule valide.

▶ CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4.

(1.) Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ :

- $a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$;
- Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ et $g(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2.)
$[f(g(f(f(a))))]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}([a]^{\mathbf{M}})))) = f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(0)))) = (((0 + 1) + 1) + 2) + 1 = 5$

(3.) $[f(g(t))]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}([t]^{\mathbf{M}})) = [t]^{\mathbf{M}} + 2 + 1 = [t]^{\mathbf{M}} + 1 + 2 = g^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}([t]^{\mathbf{M}})) = [g(f(t))]^{\mathbf{M}}$

(4.) Induction sur $t$ :

– si $t = a$ alors $t = f^0(a)$ et donc $[t]^{\mathbf{M}} = [f^0(a)]^{\mathbf{M}}$

– si $t = f(t')$, par hypothèse d'induction il existe un entier $n$ tel que $[t']^{\mathbf{M}} = [f^n(a)]^{\mathbf{M}}$, et donc $[t]^{\mathbf{M}} = [f(t')]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}([t']^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}([f^n(a)]^{\mathbf{M}}) = [f^{n+1}(a)]^{\mathbf{M}}$

– si $t = g(t')$, on remarque que $[g(t')]^{\mathbf{M}} = [f(f(t'))]^{\mathbf{M}}$; par hypothèse d'induction il existe un entier $n$ tel que $[t']^{\mathbf{M}} = [f^n(a)]^{\mathbf{M}}$ et donc $[t]^{\mathbf{M}} = [g(t')]^{\mathbf{M}} = [f(f(t'))]^{\mathbf{M}} = [f^{n+2}(a)]^{\mathbf{M}}$

(5.) Pour tout $n$, $[f(a)]^{\mathbf{M}} \neq [g^n(a)]^{\mathbf{M}}$ :

– si $n = 0$, $[f(a)]^{\mathbf{M}} = 1 \neq [g^0(a)]^{\mathbf{M}} = 0$

– si $n > 0$ $[f(a)]^{\mathbf{M}} = 1 < [g^{n-1}(a)]^{\mathbf{M}} + 2$, donc $[f(a)]^{\mathbf{M}} \neq [g^n(a)]^{\mathbf{M}}$

(6.) On peut choisir la structure $\mathbf{M}'$ telle que $|\mathbf{M}'| = \mathbb{N}$ , $a^{\mathbf{M}'} = 7$ et $f^{\mathbf{M}'}(n) = g^{\mathbf{M}'}(n) = n$.