SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

LU2IN024 Logique

Licence d'informatique
2020/2021

Examen 1ère session du 19/05/2021

Durée 1h30

Téléphones et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (1+(0,5+0,5+0,5)=2,5 points)

On considère les ensembles $X = \{w, x, y, z\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_2 = \{f\}$ et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$.

1. Soit F_0 la formule $(\exists z\, p(f(z, x))) \wedge (\exists x\, p(f(x, y)))$. Déterminer $\mathrm{Free}(F_0)$ et donner une clôture universelle de F_0.
2. Pour chacune des égalités suivantes, déterminer s'il existe une formule $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ qui vérifie l'égalité : donner la formule F si elle existe, sinon expliquer brièvement pourquoi cette formule n'existe pas.

   (a) $F[x := f(x, y)] = \exists z\, p(f(z, f(x, y)))$ (b) $F[x := f(x, y)] = \exists y\, p(f(x, y))$
   (c) $F[x := f(x, y)] = \exists x\, p(f(x, y))$

Exercice 2 (2+(2+1)=5 points)

Soit A et B deux formules atomiques, $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ une formule construite à partir de A et B, et $\mathbf{M}$ une structure (les deux questions sont indépendantes).

1. L'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ obtenue à partir de F sans effectuer de simplification est :

   $$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A) + \overline{\overline{\mathbf{I_M}(B)}}} + \overline{\overline{\mathbf{I_M}(A)} \cdot \mathbf{I_M}(B)}$$

   Déterminer une formule F possible.
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 1$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

Exercice 3 (2+4+3+2+1=12 points)

Le but de cet exercice est de prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ en utilisant la règle du Tiers Exclu : c'est la preuve demandée dans la question 4. Cette preuve s'obtient « directement » à partir des preuves des questions 1 et 3. Dans cet exercice les preuves demandées devront être obtenues en utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire. Si vous n'avez pas réussi à construire une preuve B_i vous pouvez quand même l'utiliser dans les questions qui suivent.

1. Prouver la formule $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse $h_1 : \forall y\, p(y)$. On note B_1 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_1

   Indication : on suppose que l'on dispose d'un nombre infini dénombrable de symboles de variable, et il est donc possible d'appliquer la règle $I_\exists$ en utilisant un « nouveau » symbole de variable.
2. Prouver la formule $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$. On note B_2 la preuve obtenue :

$\langle 1_{B_2} \rangle$	montrons $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$	
	preuve à compléter	
$\langle 1_{B_2} \rangle$	CQFD (***nom de la règle à compléter***)	**preuve** B_2

3. Compléter la preuve B_3 ci-dessous de la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir de l'hypothèse $h_2 : \neg\forall y\, p(y)$.

- $\langle 1_{B_3} \rangle$ supposons $h_2 : \neg\forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$
  - $\langle 2_{B_3} \rangle$ montrons $\exists y\, \neg p(y)$
    - $\langle 1_{B_2} \rangle$ montrons $(\neg\forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$
      - *ne pas recopier la preuve B_2 sur votre copie*
    - $\langle 1_{B_2} \rangle$ CQFD **preuve B_2**
    - $\langle 3_{B_3} \rangle$ montrons ***formule à compléter***
      - ***preuve à compléter***
    - $\langle 3_{B_3} \rangle$ CQFD ***nom de la règle à compléter***
  - $\langle 2_{B_3} \rangle$ CQFD $(E_{\Rightarrow})$
  - $\langle 3_{B_3} \rangle$ soit une nouvelle variable z, supposons h_3 : ***formule à compléter***
    - montrons ***formule à compléter***
    - ***preuve à compléter***
  - $\langle 3_{B_3} \rangle$ CQFD (***nom de la règle à compléter***)
- $\langle 1_{B_3} \rangle$ CQFD $(E_{\exists})$ **preuve B_3**

4. Construire une preuve de la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$ à partir des preuves B_1 et B_3 (ne pas recopier le contenu des preuves B_1 et B_3, indiquer seulement les hypothèses et les formules prouvées par ces boîtes).
5. On se place dans un bar quelconque et on interprète la formule atomique $p(x)$ par l'énoncé ≪ *x boit un verre* ≫. Décrire en langage naturel (en français par exemple) ce qu'exprime la formule $\exists x\,(p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$.

Exercice 4 (1+(2+3)=6 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, et X un ensemble de symboles de variable.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$ pour les ensembles $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ et X donnés.
2. Soit la structure $\mathbf{M}$ de domaine $|\mathbf{M}| = \{0, 1, 2\}$ définie par $a^{\mathbf{M}} = 0$ et $f^{\mathbf{M}}(n) = (n+1) \bmod 3$ où pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, $m \bmod 3$ désigne le reste de la division entière de m par 3. On rappelle qu'étant donnés deux entiers naturels quelconques q_1 et q_2, $((q_1 \bmod 3) + q_2) \bmod 3 = (q_1 + q_2) \bmod 3$. Pour tout terme t, on note $f^0(t) = t$ et $f^{m+1}(t) = f(f^m(t))$.
   (a) Pour quelle valeur de $v(x)$ a-t-on $[f^2(x)]_v^{\mathbf{M}} = 2$?
   (b) On admet sans démonstration que pour tout entier naturel m :
   (H_1) : pour toute valuation v, $[f^m(a)]_v^{\mathbf{M}} = m \bmod 3$
   (H_2) : pour tout symbole de variable $x \in X$, et toute valuation v, $[f^m(x)]_v^{\mathbf{M}} = (m + v(x)) \bmod 3$
   Montrer (par induction sur t) que pour tout terme t, $[f^m(t)]_v^{\mathbf{M}} = \left(m + [t]_v^{\mathbf{M}}\right) \bmod 3$ pour tout entier naturel m et toute valuation v.

Exercice 5 (2+4=6 points)

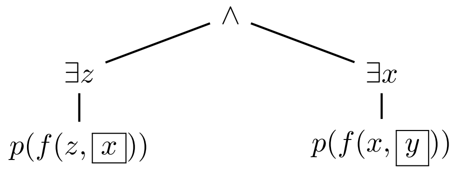
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, X un ensemble de symboles de variable et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \{p\}$ un ensemble contenant un unique symbole de prédicat p d'arité 1. Pour chacune des deux formules de $\mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ci-dessous, déterminer si la formule est valide (et dans ce cas en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle), ou si elle n'est pas valide (et dans ce cas construire une stucture $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide).

$$F_1 = (\forall x\ (p(x) \wedge \neg p(f(x)))) \Rightarrow \neg p(f(a)) \qquad F_2 = \forall x\ ((p(x) \wedge \neg p(f(x))) \Rightarrow \neg p(f(a)))$$

Corrigé de l'examen 1ère session du 19/05/2021

► Corrigé de l'exercice 1.

1. Arbre de syntaxe abstraite de F_0 :



Les occurrences de variable libre sont encadrées sur l'arbre et on a $\text{Free}(F_0) = \{x, y\}$. Une clôture universelle de F_0 est $\forall x \forall y\, F_0$.

2.a. Lorsque $F = \exists z\, p(f(z, x))$, on a $F[x := f(x, y)] = \exists z\, p(f(z, f(x, y)))$.

2.b. Il n'existe pas de formule F telle que $F[x := f(x, y)] = \exists y\, p(f(x, y))$ car l'occurrence de y dans la formule $\exists y\, p(f(x, y))$ est liée par le quantificateur $\exists$ et y apparaît dans le terme $f(x, y)$ que l'on doit substituer à x.

2.c. Lorsque $F = \exists x\, p(f(x, y))$, on a $F[x := f(x, y)] = \exists x\, p(f(x, y))$ car x n'admet pas d'occurrence libre dans la formule F.

► Corrigé de l'exercice 2.

1. La formule F peut être $(A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(\neg A \wedge B)$ ou $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B)$.

2. En posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ et $y = \mathbf{I_M}(B)$ il vient :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{x + \overline{y}} + \overline{\overline{x} \cdot y} \overset{E4.4}{\equiv} (\overline{x} \cdot \overline{\overline{y}}) + (\overline{\overline{x} \cdot y}) \overset{E1.2}{\equiv} (\overline{x} \cdot y) + (\overline{\overline{x} \cdot y}) \overset{E1.4}{\equiv} 1$$

La formule F est donc une formule valide.

► Corrigé de l'exercice 3.

1. Preuve B_1

$\langle 1_{B_1} \rangle$	supposons $h_1 : \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$		
	$\langle 2_{B_1} \rangle$	soit une nouvelle variable w, montrons $p(w) \Rightarrow \forall y\, p(y)$	
		$\langle 3_{B_1} \rangle$	supposons $h_{B_1} : p(w)$, montrons $\forall y\, p(y)$
		$\langle 3_{B_1} \rangle$	CQFD (Ax avec h_1)
	$\langle 2_{B_1} \rangle$	CQFD ($I_\Rightarrow$)	
$\langle 1_{B_1} \rangle$	CQFD ($I_\exists$)		**preuve** B_1

2. Preuve B_2

$\langle 1_{B_2} \rangle$ montrons $(\neg \forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$

$\langle 2_{B_2} \rangle$ supposons $h_{B_2} : \neg \forall y\, p(y)$, montrons $\exists y\, \neg p(y)$

$\langle 3_{B_2} \rangle$ supposons $h'_{B_2} : \neg \exists y\, \neg p(y)$, montrons false

$\langle 4_{B_2} \rangle$ montrons $\neg \forall y\, p(y)$

$\langle 4_{B_2} \rangle$ CQFD (Ax avec h_{B_2})

$\langle 5_{B_2} \rangle$ montrons $\forall y\, p(y)$

$\langle 6_{B_2} \rangle$ soit une nouvelle variable z, montrons $p(z)$

$\langle 7_{B_2} \rangle$ supposons $h''_{B_2} : \neg p(z)$, montrons false

$\langle 8_{B_2} \rangle$ montrons $\neg \exists y\, \neg p(y)$

$\langle 8_{B_2} \rangle$ CQFD (Ax avec h'_{B_2})

$\langle 9_{B_2} \rangle$ montrons $\exists y\, \neg p(y)$

$\langle 10_{B_2} \rangle$ montrons $\neg p(z)$

$\langle 10_{B_2} \rangle$ CQFD (Ax avec h''_{B_2})

$\langle 9_{B_2} \rangle$ CQFD ($I_\exists$)

$\langle 7_{B_2} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 6_{B_2} \rangle$ CQFD (Abs)

$\langle 5_{B_2} \rangle$ CQFD ($I_\forall$)

$\langle 3_{B_2} \rangle$ CQFD ($E_\neg$)

$\langle 2_{B_2} \rangle$ CQFD (Abs)

$\langle 1_{B_2} \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** B_2

3. Preuve B_3

$\langle 1_{B_3} \rangle$ supposons $h_2 : \neg \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

$\langle 2_{B_3} \rangle$ montrons $\exists y\, \neg p(y)$

$\langle 1_{B_2} \rangle$ montrons $(\neg \forall y\, p(y)) \Rightarrow (\exists y\, \neg p(y))$

...

$\langle 1_{B_2} \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$) **preuve** B_2

$\langle 3_{B_3} \rangle$ montrons $\neg \forall y\, p(y)$

$\langle 3_{B_3} \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)

$\langle 2_{B_3} \rangle$ CQFD ($E_\Rightarrow$)

$\langle 3_{B_3} \rangle$ soit une nouvelle variable z, supposons $h_3 : \neg p(z)$
montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

$\langle 4_{B_3} \rangle$ montrons $p(z) \Rightarrow \forall y\, p(y)$

$\langle 5_{B_3} \rangle$ supposons $h'_{B_4} : p(z)$, montrons $\forall y\, p(y)$

$\langle 5_{B_3} \rangle$ CQFD ($D^1_\perp$ avec h'_{B_4}, h_3)

$\langle 4_{B_3} \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

$\langle 3_{B_3} \rangle$ CQFD ($I_\exists$)

$\langle 1_{B_3} \rangle$ CQFD ($E_\exists$) **preuve** B_4

4. Preuve de $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

$\langle 1_{B_4} \rangle$ montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

$\langle 1_{B_1} \rangle$ supposons $h_1 : \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

...

$\langle 1_{B_1} \rangle$ CQFD ($I_\exists$) **preuve** B_1

$\langle 1_{B_3} \rangle$ supposons $h_2 : \neg \forall y\, p(y)$, montrons $\exists x\, (p(x) \Rightarrow \forall y\, p(y))$

...

$\langle 1_{B_3} \rangle$ CQFD ($E_\exists$) **preuve** B_3

$\langle 1_{B_4} \rangle$ CQFD (D_{TE})

6. *Dans un bar quelconque, il existe une personne qui si elle boit un verre, alors tout le monde boit un verre.*

► Corrigé de l'exercice 4.

1. Définition inductive de $\mathcal{T}(X, \mathcal{F})$:

Si $x \in X$, alors $x \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.
$a \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$
Si $t \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$, alors $f(t) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{F})$.

2.a. Par définition on a :

$$[f^2(x)]^{\mathbf{M}}_v = f^{\mathbf{M}}(f^{\mathbf{M}}(v(x))) = (((v(x)+1) \bmod 3) + 1) \bmod 3 = (v(x)+2) \bmod 3$$

et donc pour que $(v(x)+2) \bmod 3 = 2$ il faut que $v(x) = 0$ car $v(x) \in \{0, 1, 2\}$.

2.b. Raisonnement par induction sur t.
Si $t = x \in X$, alors on admet que $[f^m(x)]^{\mathbf{M}}_v = (m+v(x)) \bmod 3$ et donc $[f^m(x)]^{\mathbf{M}}_v = (m+[x]^{\mathbf{M}}_v) \bmod 3$.
Si $t = a \in \mathcal{F}_0$, alors on admet que $[f^m(a)]^{\mathbf{M}}_v = m \bmod 3 = (m+0) \bmod 3$ et donc $[f^m(a)]^{\mathbf{M}}_v = (m + [a]^{\mathbf{M}}_v) \bmod 3$.
Sinon, $t = f(t')$ et on obtient [1] :

$$\begin{array}{lll}
[f^m(f(t'))]^{\mathbf{M}}_v & = [f^{m+1}(t')]^{\mathbf{M}}_v & \text{(par définition)} \\
& = \big((m+1) + [t']^{\mathbf{M}}_v\big) \bmod 3 & \text{(par hypothèse d'induction)} \\
& = \big(m + \big([t']^{\mathbf{M}}_v + 1\big)\big) \bmod 3 & \\
& = \big(m + \big(\big([t']^{\mathbf{M}}_v + 1\big) \bmod 3\big)\big) \bmod 3 & \text{(car } ((q_1 \bmod 3) + q_2) \bmod 3 = (q_1 + q_2) \bmod 3) \\
& = \big(m + f^{\mathbf{M}}\big([t']^{\mathbf{M}}_v\big)\big) \bmod 3 & \text{(par définition de } f^{\mathbf{M}}) \\
& = \big(m + [f(t')]^{\mathbf{M}}_v\big) \bmod 3 & \text{(par définition)}
\end{array}$$

► Corrigé de l'exercice 5.

F_1 est une formule valide.

⟨1⟩ montrons $(\forall x\ (p(x) \wedge \neg p(f(x)))) \Rightarrow \neg p(f(a))$
  ⟨2⟩ supposons $h_1 : \forall x\ (p(x) \wedge \neg p(f(x)))$, montrons $\neg p(f(a))$
    ⟨3⟩ montrons $p(a) \wedge \neg p(f(a))$
    ⟨3⟩ cqfd ($D_\forall$ avec h_1)
  ⟨2⟩ cqfd ($E^d_\wedge$)
⟨1⟩ cqfd ($I_\Rightarrow$)

F_2 n'est pas une formule valide. En effet, considérons par exemple la structure $\mathbf{M}$ dont le domaine d'interprétation est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et telle que :

$$\begin{array}{lll}
a^{\mathbf{M}} = 1 & f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbb{N} \\
& f(n) = n + 1 & p^{\mathbf{M}} = \{n \mid n \text{ est pair}\}
\end{array}$$

Pour toute valuation v, on a alors $[F_2]^{\mathbf{M}}_v = 0$ car $[(p(x) \wedge \neg p(f(x))) \Rightarrow \neg p(f(a))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = 0$. En effet :

$$\begin{array}{ll}
& [(p(x) \wedge \neg p(f(x))) \Rightarrow \neg p(f(a))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = \overline{[p(x) \wedge \neg p(f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]}} + [\neg p(f(a))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} \\
= & \overline{[p(x)]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} \cdot \overline{[p(f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]}}} + \overline{[p(f(a))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]}} = \overline{1.\overline{0}} + \overline{1} = 0
\end{array}$$

car $[p(x)]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = 1$ puisque $[x]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = 0 \in p^{\mathbf{M}}$, $[p(f(x))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = 0$ puisque $[f(x)]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = f^{\mathbf{M}}(0) = 1 \notin p^{\mathbf{M}}$ et $[p(f(a))]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = 1$ puisque $[f(a)]^{\mathbf{M}}_{v[x\leftarrow 0]} = f^{\mathbf{M}}(a^{\mathbf{M}}) = f^{\mathbf{M}}(1) = 2 \in p^{\mathbf{M}}$.

---

1. En fait, la première égalité s'obtient à partir de la définition en montrant par récurrence sur m que $[f^{m+1}(t)]^{\mathbf{M}} = [f^m(f(t))]^{\mathbf{M}}$. En effet, si $m = 0$, alors $[f^{0+1}(t)]^{\mathbf{M}} = [f(t)]^{\mathbf{M}} = [f^0(f(t))]^{\mathbf{M}}$. Sinon ($m > 0$), par hypothèse de récurrence on a $[f^{m+1}(t)]^{\mathbf{M}} = [f^m(f(t))]^{\mathbf{M}}$ et on obtient :

$$\begin{array}{lll}
[f^{(m+1)+1}(t)]^{\mathbf{M}} & = [f(f^{m+1}(t))]^{\mathbf{M}} = f^{\mathbf{M}}\big([f^{m+1}(t)]^{\mathbf{M}}\big) & \text{(par définition)} \\
& = f^{\mathbf{M}}\big([f^m(f(t))]^{\mathbf{M}}\big) & \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
& = [f(f^m(f(t)))]^{\mathbf{M}} = [f^{m+1}(f(t))]^{\mathbf{M}} & \text{(par définition)}
\end{array}$$

Cette preuve n'était pas demandée.