COMPLEX
Cours 6 - Introduction aux algorithmes probabilistes

Damien Vergnaud

Sorbonne Université – CNRS

Table des matières

Aiguille de Buffon

- 1733 - Georges-Louis Leclerc de Buffon
- $\dfrac{2}{\pi} = 0.6366197724$

$$\frac{21}{36} = 0.685$$

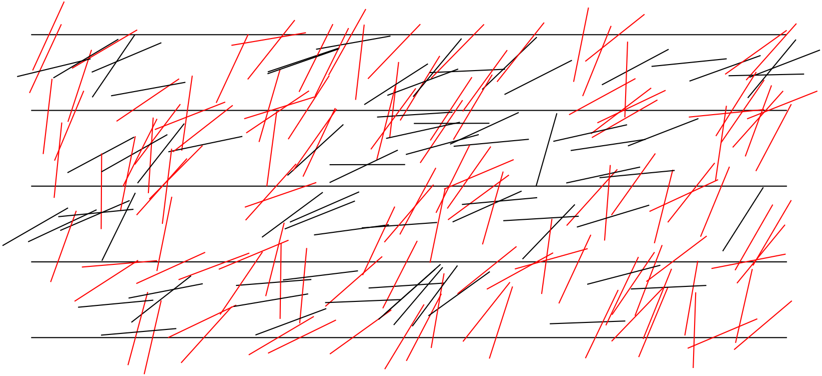
Aiguille de Buffon

- 1733 - Georges-Louis Leclerc de Buffon
- $\dfrac{2}{\pi} = 0.6366197724$

$$\frac{39}{60} = 0.65$$

Aiguille de Buffon

- 1733 - Georges-Louis Leclerc de Buffon
- $\dfrac{2}{\pi} = 0.6366197724$



$$\frac{127}{200} = 0.635$$

Racine carrée modulaire

Racine carrée modulaire

- Entrée : $n \geq 2$ un entier et a un entier premier avec n
- Sortie : b entier tel que $a \equiv b^2 \bmod n$ (ou Non_Carré)

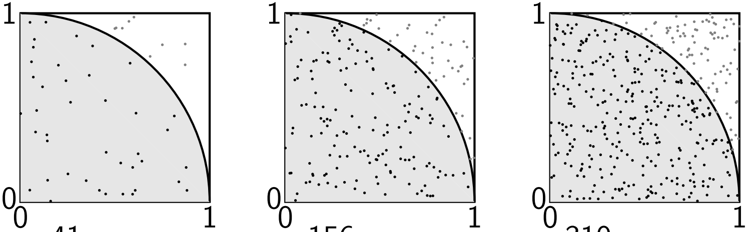
- 1917 – H. C. Pocklington
- Algorithme **probabiliste** efficace pour $n = p$ un nombre premier
- Problème ouvert : Algorithme déterministe polynomial ?

Pour le Cours 8 ...

Faire des révisions d'arithmétique
(*cf.* notes de cours indiquées sur le moodle du cours)

Méthodes de Monte-Carlo

- Calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires
- 1947 – N. Metropolis
- 1949 – S. Ulam et N. Metropolis



$\frac{41}{50} = 0.82$ $\frac{156}{200} = 0.78$ $\frac{310}{400} = 0.775$

Voisins les plus proches

Voisins les plus proches

- Entrée : $n \geq 2$ un entier et $(P_1, \ldots, P_n)$ n points de $\mathbb{R}^2$
- Sortie : $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$ tel que $\mathrm{d}(P_i, P_j)$ minimale

- 1976 – M. O. Rabin
- Algorithme probabiliste en temps $O(n)$!
- Le dernier à avoir « découvert » les algorithmes probabilistes !

https://rjlipton.wordpress.com/2009/03/01/rabin-flips-a-coin/

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse

- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes déterministes et probabilistes

- **Algorithme déterministe :**
  - termine toujours
  - efficace dans tous les cas
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Algorithme probabiliste :**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - efficace dans la plupart des cas
  - retourne
    - souvent la bonne réponse
    - toujours une réponse souvent proche de la bonne

Algorithmes de type Las Vegas / Monte-Carlo

- **Las Vegas**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - temps d'exécution = variable aléatoire
  - retourne toujours la bonne réponse

- **Monte Carlo**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - temps d'exécution connu *a priori*
  - retourne souvent la bonne réponse

Algorithmes de type Las Vegas / Monte-Carlo

- **Las Vegas**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - temps d'exécution = variable aléatoire
  - retourne toujours la bonne réponse
- **Monte Carlo**
  - termine toujours
  - utilise de l'aléa dans son exécution
  - temps d'exécution connu *a priori*
  - retourne souvent la bonne réponse

Élément majoritaire

Élément majoritaire

- Entrée : $n \geq 2$ un entier et T un tableau de n valeurs
- Sortie : $i \in \{1, \ldots, n\}$ tq $T[i]$ apparaît $> n/2$ fois dans T (ou Pas d'élément majoritaire)

(comparaison des valeurs par égalité)

Algorithme EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI si m est élément majoritaire de T et FAUX sinon

$c \leftarrow 0$
pour j de 1 à n **faire**
  si $m = T[j]$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin si
fin pour
si $c > n/2$ **alors**
  retourner VRAI
sinon
  retourner FAUX
fin si

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI si m est élément majoritaire de T et FAUX sinon

```
c ← 0
pour j de 1 à n faire
    si m = T[j] alors
        c ← c + 1
    fin si
fin pour
si c > n/2 alors
    retourner VRAI
sinon
    retourner FAUX
fin si
```

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI si m est élément majoritaire de T et FAUX sinon

$c \leftarrow 0$
pour j de 1 à n **faire**
  si $m = T[j]$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin si
fin pour
si $c > n/2$ **alors**
  retourner VRAI
sinon
  retourner FAUX
fin si

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI si m est élément majoritaire de T et FAUX sinon

```
c ← 0
pour j de 1 à n faire
    si m = T[j] alors
        c ← c + 1
    fin si
fin pour
si c > n/2 alors
    retourner VRAI
sinon
    retourner FAUX
fin si
```

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_NAÏF

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élém. maj. de T ou PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

```
pour i de 1 à n faire
    m ← T[i]
    si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) alors
        retourner m
    fin si
fin pour
retourner PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE
```

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_NAÏF

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élém. maj. de T ou PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

pour i de 1 à n **faire**
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin pour
retourner PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_NAÏF

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élém. maj. de T ou PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

pour i de 1 à n **faire**
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin pour
retourner PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme Élément_Majoritaire_Naïf

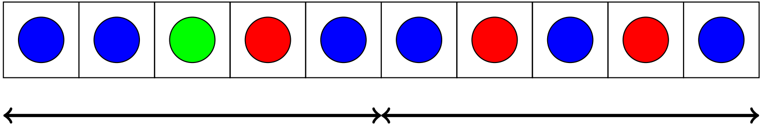
Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élém. maj. de T ou Pas d'élément majoritaire

pour i de 1 à n **faire**
    $m \leftarrow T[i]$
    si Est_Élément_Majoritaire ?(T, m) **alors**
        retourner m
    fin si
fin pour
retourner Pas d'élément majoritaire

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n^2)$

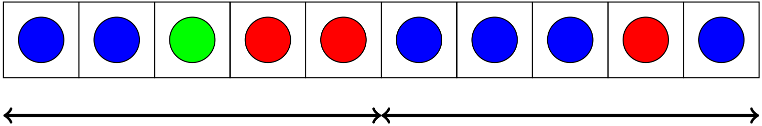
Algorithme « diviser pour régner »



Exemple 1

- m élément maj. de $T[1 \dots n]$
  $\rightsquigarrow$ m élém. maj. de $T[1 \dots n/2]$ ou m élém. maj. de $T[n/2 \dots n]$
- **Réciproque fausse !**

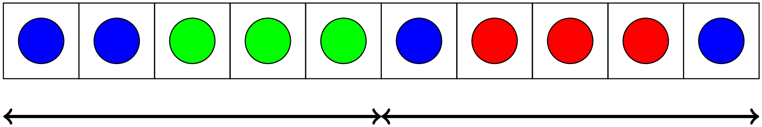
Algorithme « diviser pour régner »



Exemple 2

- m élément maj. de $T[1 \ldots n]$
  $\rightsquigarrow$ m élém. maj. de $T[1 \ldots n/2]$ ou m élém. maj. de $T[n/2 \ldots n]$
- **Réciproque fausse !**

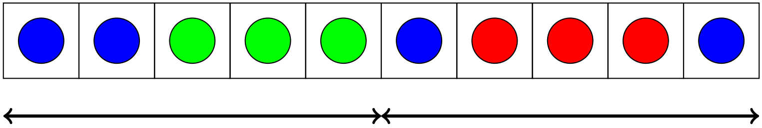
Algorithme « diviser pour régner »



Exemple 3

- m élément maj. de $T[1 \ldots n]$
  $\rightsquigarrow$ m élém. maj. de $T[1 \ldots n/2]$ ou m élém. maj. de $T[n/2 \ldots n]$
- **Réciproque fausse !**

Algorithme « diviser pour régner »



Exemple 3

- m élément maj. de $T[1 \dots n]$
  $\rightsquigarrow$ m élém. maj. de $T[1 \dots n/2]$ ou m élém. maj. de $T[n/2 \dots n]$
- **Réciproque fausse !**

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_DPR

Entrée: Un tableau T de longueur n, deux entiers $1 \leq d \leq f \leq n$
Sortie: m élém. maj. de $T[d \dots f]$ ou PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

si $(f = d)$ ou $(f = d + 1$ et $T[d] = T[f])$ **alors**
  retourner $T[d]$
fin si
$m_1 \leftarrow$ ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_2$(T, 1, n/2)$
$m_2 \leftarrow$ ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_2$(T, n/2 + 1, n)$
si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m_1) **alors**
  retourner m_1
sinon si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m_2) **alors**
  retourner m_2
sinon
  retourner PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE
fin si

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_DPR

Entrée: Un tableau T de longueur n, deux entiers $1 \leq d \leq f \leq n$
Sortie: m élém. maj. de $T[d \dots f]$ ou PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE

si $(f = d)$ ou $(f = d + 1$ et $T[d] = T[f])$ **alors**
  retourner $T[d]$
fin si
$m_1 \leftarrow$ ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_2$(T, 1, n/2)$
$m_2 \leftarrow$ ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_2$(T, n/2 + 1, n)$
si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m_1) **alors**
  retourner m_1
sinon si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m_2) **alors**
  retourner m_2
sinon
  retourner PAS D'ÉLÉMENT MAJORITAIRE
fin si

Algorithme ÉLÉMENT_MAJORITAIRE_DPR

Complexité

Nombres de comparaison : $C(n) = O(n \log n)$

$C(n) = 2C(n/2) + 2n$ ($\rightsquigarrow$ Récurrence du **tri fusion !**)

$$\begin{aligned} C(2^k) = 2C(2^{k-1}) + 2^{k+1} &= 2(2C(2^{k-2}) + 2^k) + 2^{k+1} \\ &= 2^2 C(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^{k+1} \\ &= \dots \\ &= 2^t C(2^{k-t}) + t \cdot 2^{k+1} \\ &= \dots \\ &= k \cdot 2^{k+1} = 2\log(n) \cdot n \end{aligned}$$

Algorithme Élément_Majoritaire_DPR

Complexité

Nombres de comparaison : $C(n) = O(n \log n)$

$$C(n) = 2C(n/2) + 2n \qquad (\rightsquigarrow \text{Récurrence du } \textbf{tri fusion !})$$

$$\begin{aligned}
C(2^k) = 2C(2^{k-1}) + 2^{k+1} &= 2(2C(2^{k-2}) + 2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^2 C(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^{k+1} \\
&= \ldots \\
&= 2^t C(2^{k-t}) + t \cdot 2^{k+1} \\
&= \ldots \\
&= k \cdot 2^{k+1} = 2 \log(n) \cdot n
\end{aligned}$$

Algorithme Élément_Majoritaire_DPR

Complexité

Nombres de comparaison : $C(n) = O(n \log n)$

$$C(n) = 2C(n/2) + 2n \qquad (\rightsquigarrow \text{ Récurrence du } \textbf{tri fusion !})$$

$$\begin{aligned}
C(2^k) = 2C(2^{k-1}) + 2^{k+1} &= 2(2C(2^{k-2}) + 2^k) + 2^{k+1} \\
&= 2^2 C(2^{k-2}) + 2 \cdot 2^{k+1} \\
&= \dots \\
&= 2^t C(2^{k-t}) + t \cdot 2^{k+1} \\
&= \dots \\
&= k \cdot 2^{k+1} = 2 \log(n) \cdot n
\end{aligned}$$

Élément majoritaire (avec promesse)

Élément majoritaire (avec promesse)

- Entrée : $n \geq 2$ un entier et T un tableau de n valeurs
  $\rightsquigarrow$ T contient un élément majoritaire !
- Sortie : $i \in \{1, \ldots, n\}$ tq $T[i]$ apparaît $> n/2$ fois dans T

(comparaison des valeurs par égalité)

- Les algorithmes déterministes précédents ne semblent pas améliorables
- $\rightsquigarrow$ algorithmes probabilistes !

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

i $\{1, \dots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\quad} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Monte-Carlo

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur : $\leq 1/2$

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \qquad \{1, \ldots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \xleftarrow{} \{1, \dots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \xleftarrow{} \{1, \dots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \longleftarrow \{1, \dots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur :

Algorithme de type Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \xleftarrow{} \{1, \dots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si EST_ÉLÉMENT_MAJORITAIRE ?(T, m) **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur : 0

Loi géométrique

- **Loi de Bernoulli** X

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi géométrique** Y = loi du nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes nécessaire pour obtenir le premier succès

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

Loi géométrique

- **Loi de Bernoulli** X

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi géométrique** Y = loi du nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes nécessaire pour obtenir le premier succès

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

Loi géométrique

- **Loi de Bernoulli** X

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1, \\ 1 - p & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- **Loi géométrique** Y = loi du nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes nécessaire pour obtenir le premier succès

$$\mathbb{P}(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p$$

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{p}$$

Loi géométrique (démonstration)

Pour tout x de $[0,1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En particulier :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Loi géométrique (démonstration)

Pour tout x de $[0, 1[$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

En particulier :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(Y = k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Algorithme de type Las Vegas

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

- Chaque **itération** de la bouche : n comparaisons
- **Nombre d'itérations** : en moyenne moins de 2 !
  Notons p la probabilité de tirer l'élément majoritaire m de T :

$$p = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} | T[i] = m\}}{n} > \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

  Nombre d'itérations espéré : $1/p \leq 2$
  (Espérance Loi géométrique)

Remarque

Il existe des algorithmes déterministes simples de complexité $O(n)$
(1981, R. S. Boyer, J. S. Moore – *cf.* Compléments du TD)

Algorithme de type Las Vegas

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

- Chaque **itération** de la bouche : n comparaisons
- **Nombre d'itérations** : en moyenne moins de 2 !
  Notons p la probabilité de tirer l'élément majoritaire m de T :

  $$p = \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} | T[i] = m\}}{n} > \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

  Nombre d'itérations espéré : $1/p \leq 2$
  (Espérance Loi géométrique)

Remarque

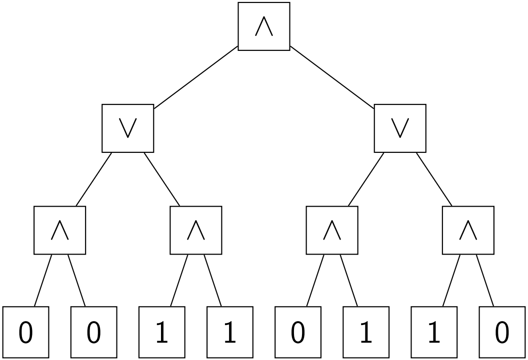
Il existe des algorithmes déterministes simples de complexité $O(n)$ (1981, R. S. Boyer, J. S. Moore – *cf.* Compléments du TD)

Table des matières

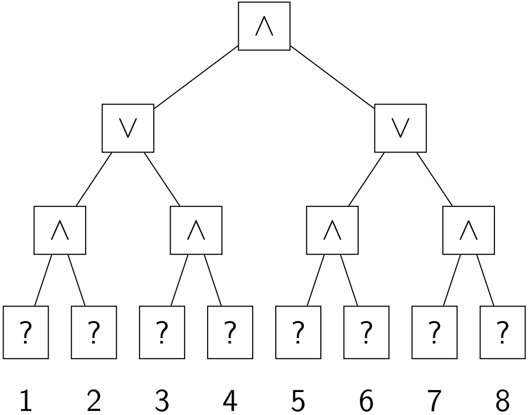
Arbre binaire ET-OU

arbre binaire complet de profondeur n – feuille étiquetée 0 ou 1 :

- la valeur d'une feuille (profondeur n) est son étiquette
- la valeur d'un nœud interne (profondeur i) :
  - « ou logique » ($\vee$) de la valeur de ces deux fils si $i \equiv n \bmod 2$
  - « et logique » ($\wedge$) de la valeur de ces deux fils si $i \not\equiv n \bmod 2$

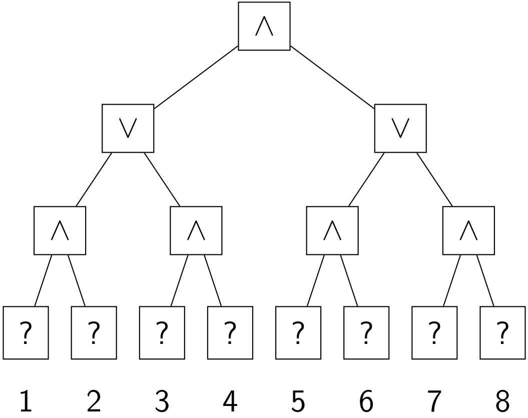


Algorithmes déterministes



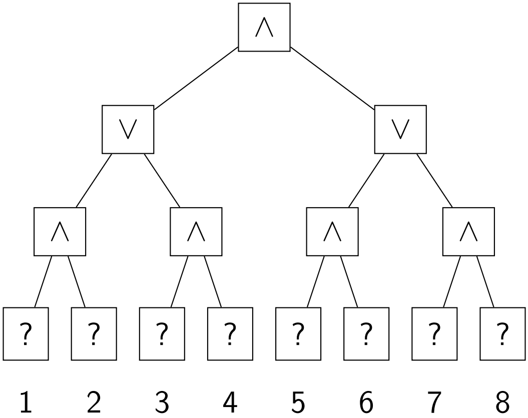
- Il existe un algorithme déterministe de complexité $O(2^n)$
- Tout algorithme déterministe a une complexité en $\Omega(2^n)$

Algorithmes déterministes



- Il existe un algorithme déterministe de complexité $O(2^n)$
- Tout algorithme déterministe a une complexité en $\Omega(2^n)$

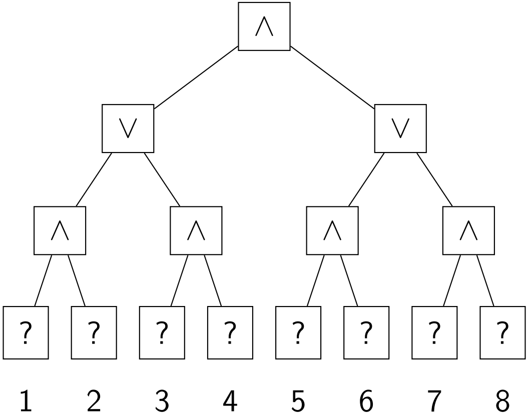
Algorithme probabiliste



Algorithme probabiliste ET-OU-PROBABILISTE

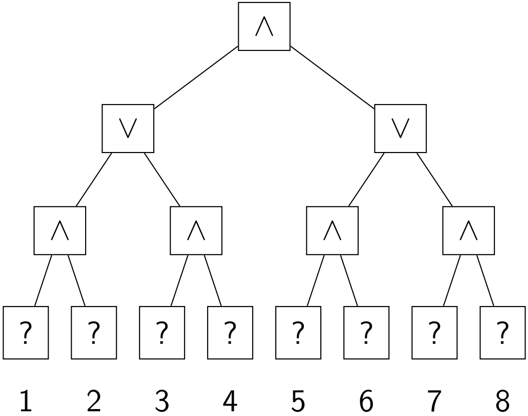
si $n = 1$ **alors**
  retourner valeur de la feuille
sinon si $n \geq 2$ et le racine de l'arbre est $\wedge$ **alors**
  $b \xleftarrow{} \{0, 1\}$
  si $b = 0$ **alors**
    $v \leftarrow$ ET-OU-PROBABILISTE(sous-arbre gauche)
  sinon
    $v \leftarrow$ ET-OU-PROBABILISTE(sous-arbre droit)
  fin si
  si $v = 0$ **alors**
    retourner 0
  sinon si $b = 0$ **alors**
    retourner ET-OU-PROBABILISTE(sous-arbre droit)
  sinon
    retourner ET-OU-PROBABILISTE(sous-arbre gauche)
  fin si
sinon si $n \geq 2$ et le racine de l'arbre est $\vee$ **alors**
  ...
fin si

Algorithme probabiliste



- Liste de choix aléatoires :

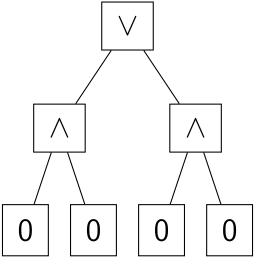
Algorithme probabiliste



- Liste de choix aléatoires : $\leftarrow\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow\rightarrow\leftarrow$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

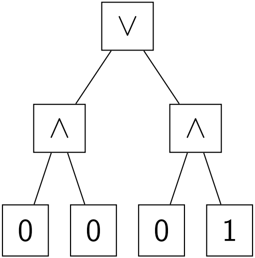


Nombre de feuilles examinées en moyenne

2

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

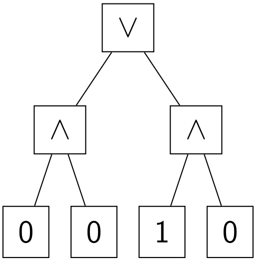


Nombre de feuilles examinées en moyenne

$$(2+3+2+3+2+2+3+3)/8 = 2.5$$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

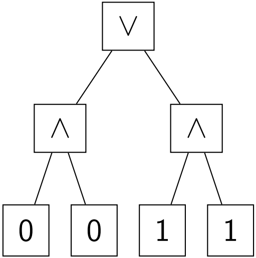


Nombre de feuilles examinées en moyenne

$$(2+3+2+3+3+3+2+2)/8 = 2.5$$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

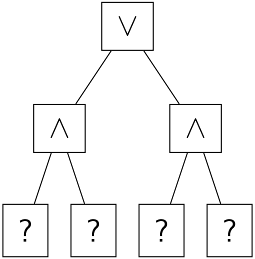


Nombre de feuilles examinées en moyenne

$$(3+3+3+3+2+2+2+2)/8 = 2.5$$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

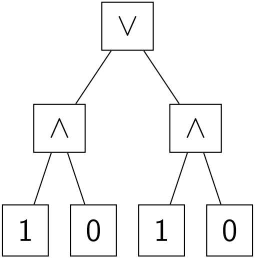


Nombre de feuilles examinées en moyenne

$$\ldots$$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

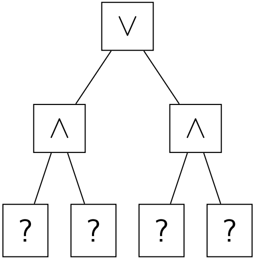


Nombre de feuilles examinées en moyenne

$$(4+3+3+2+4+3+3+2)/8 = 3$$

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

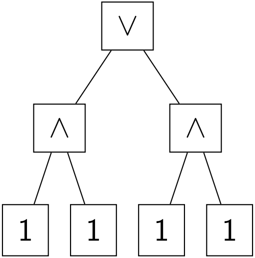


Nombre de feuilles examinées en moyenne

...

Algorithme probabiliste - Analyse

Nombre de feuilles examinées en moyenne (pour toutes les instances)

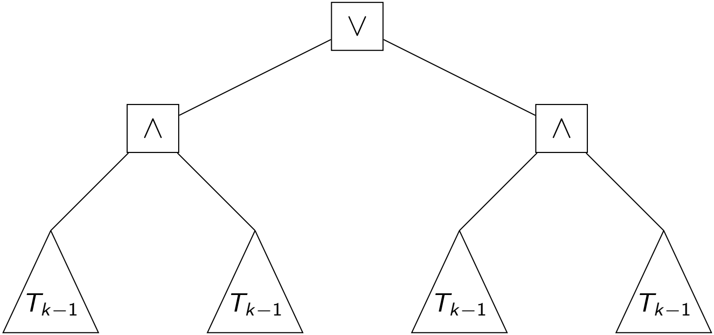


Nombre de feuilles examinées en moyenne

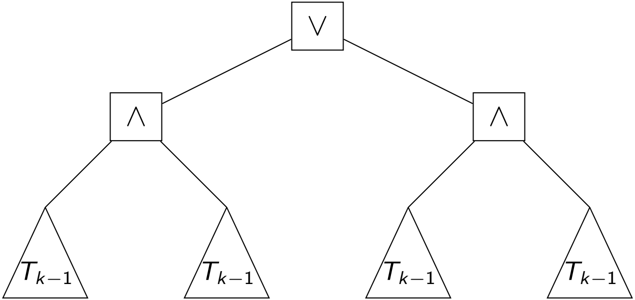
2

Algorithme probabiliste - Analyse

- Pour un arbre de profondeur 2, en moyenne, on regarde moins de 3 feuilles
- Par récurrence, on montre que pour un arbre de profondeur $2k \geq 2$, on regarde en moyenne moins de 3^{k-1} feuilles



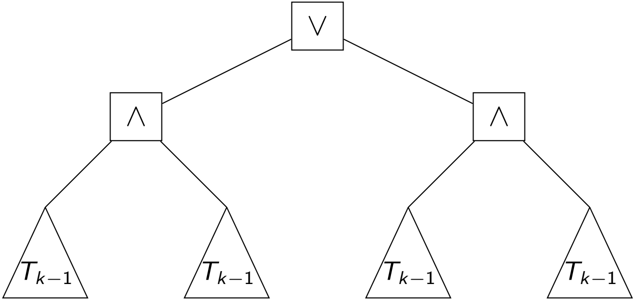
Algorithme probabiliste - Analyse



- $\wedge \rightsquigarrow 0$, un des sous-arbres $\rightsquigarrow 0$.

$$\leq \frac{1}{2}3^{k-1} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^{k-1} = \frac{3}{2}3^{k-1} \text{ nœuds}$$

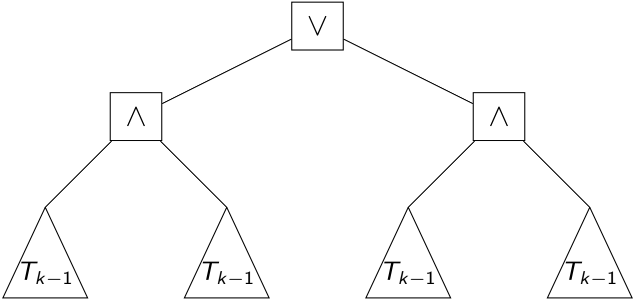
Algorithme probabiliste - Analyse



- $\wedge \rightsquigarrow 0 : \leq 1.5 \cdot 3^{k-1}$
- $\wedge \rightsquigarrow 1 : \leq 2 \cdot 3^{k-1}$
- $\vee \rightsquigarrow 0 : \leq 2 \cdot 1.5 \cdot 3^{k-1} = 3^k$
- $\vee \rightsquigarrow 1 :$

$$\leq \frac{1}{2} 2 \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{2}(1.5 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}) \leq 2.75 \cdot 3^{k-1} \leq 3^k$$

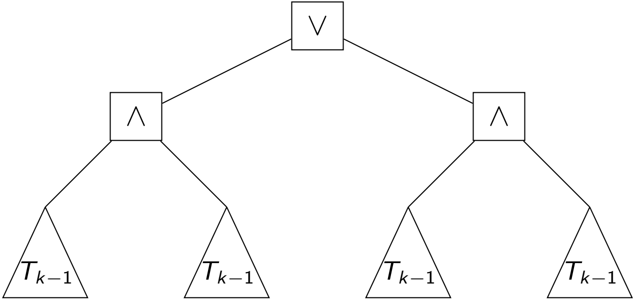
Algorithme probabiliste - Analyse



- $\wedge \rightsquigarrow 0 : \leq 1.5 \cdot 3^{k-1}$
- $\wedge \rightsquigarrow 1 : \leq 2 \cdot 3^{k-1}$
- $\vee \rightsquigarrow 0 : \leq 2 \cdot 1.5 \cdot 3^{k-1} = 3^k$
- $\vee \rightsquigarrow 1 :$

$$\leq \frac{1}{2} 2 \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{2}(1.5 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}) \leq 2.75 \cdot 3^{k-1} \leq 3^k$$

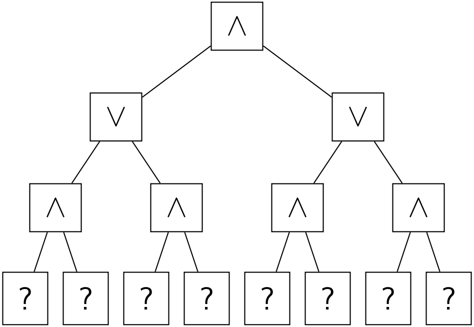
Algorithme probabiliste - Analyse



- $\wedge \rightsquigarrow 0 \,:\, \leq 1.5 \cdot 3^{k-1}$
- $\wedge \rightsquigarrow 1 \,:\, \leq 2 \cdot 3^{k-1}$
- $\vee \rightsquigarrow 0 \,:\, \leq 2 \cdot 1.5 \cdot 3^{k-1} = 3^k$
- $\vee \rightsquigarrow 1 \,:$

$$\leq \frac{1}{2} 2 \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{2}(1.5 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1}) \leq 2.75 \cdot 3^{k-1} \leq 3^k$$

Algorithme probabiliste - Conclusion



Conclusion

- Pour arbre binaire ET-OU de profondeur n, complexité en

$$O(3^{n/2}) = O(\sqrt{3}^n) = O(2^{0.793n})$$

- Gain exponentiel grâce à l'aléa !

Table des matières

Tri rapide

Tri

- Entrée : $n \geq 2$ et T un tableau de n valeurs distinctes
- Sortie : T tableau trié (c.à.d. $T[i] < T[i+1]$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$)

- 1961 - C. A. R. Hoare
- « diviser pour régner »

- **Principe :**
  - sélectionner un pivot
  - le placer à sa place définitive avec
    - éléments inférieurs à gauche
    - éléments supérieurs à droite
  - répéter pour les sous-tableaux jusqu'à ce que le tableau soit trié

Tri rapide

Tri

- Entrée : $n \geq 2$ et T un tableau de n valeurs distinctes
- Sortie : T tableau trié (c.à.d. $T[i] < T[i+1]$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$)

- 1961 - C. A. R. Hoare
- « diviser pour régner »

- **Principe :**
  - sélectionner un pivot
  - le placer à sa place définitive avec
    - éléments inférieurs à gauche
    - éléments supérieurs à droite
  - répéter pour les sous-tableaux jusqu'à ce que le tableau soit trié

Algorithme Partitionner

Entrée: Un tableau T de longueur n, trois entiers d, f, p avec $1 \leq d \leq p \leq f \leq n$

Sortie: $j \in [d, f]$, Tableau réordonné avec $T[i] < T[j]$ pour $d \leq i < j$; $T[i] > T[j]$ pour $f \geq i > j$

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

Algorithme Partitionner (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	3	1	7

Algorithme Partitionner (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

5	8	4	2	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	8	4	5	6	7	1	3

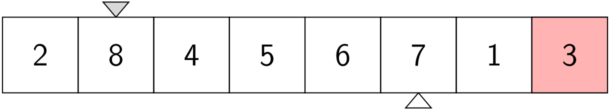
Algorithme Partitionner (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	8	4	5	6	7	1	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j



Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	8	4	5	6	7	1	3

Algorithme Partitionner (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f-1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j+1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	1	4	5	6	7	8	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
    si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
        Échanger $T[i]$ et $T[j]$
        $j \leftarrow j + 1$
    fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	1	4	5	6	7	8	3

Algorithme PARTITIONNER (Exemple)

Échanger $T[p]$ et $T[f]$
$j \leftarrow d$
pour i de d à $f - 1$ **faire**
  si $T[i] \leq T[f]$ **alors**
    Échanger $T[i]$ et $T[j]$
    $j \leftarrow j + 1$
  fin si
fin pour
Échanger $T[j]$ et $T[f]$
retourner j

2	1	3	5	6	7	8	4

Algorithme TRIRAPIDE

Entrée: Un tableau T de longueur n, deux entiers d, f avec $1 \leq d \leq f \leq n$

Sortie: Tableau trié

$p \longleftarrow \{d, \ldots, f\}$

$p \leftarrow \text{PARTITIONNER}(T, d, f, p)$

$\text{TRIRAPIDE}(T, d, p-1)$

$\text{TRIRAPIDE}(T, p, f)$

$\triangleright \quad \text{TRIRAPIDE}(T, 1, n)$

Complexité

Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas :
- En moyenne :

Algorithme TriRapide

Entrée: Un tableau T de longueur n, deux entiers d, f avec $1 \leq d \leq f \leq n$

Sortie: Tableau trié

$p \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{d, \ldots, f\}$

$p \leftarrow \textsc{Partitionner}(T, d, f, p)$

$\textsc{TriRapide}(T, d, p-1)$

$\textsc{TriRapide}(T, p, f)$

$\triangleright \quad \textsc{TriRapide}(T, 1, n)$

Complexité

Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas : $O(n^2)$
- En moyenne :

Algorithme TriRapide

Entrée: Un tableau T de longueur n, deux entiers d, f avec $1 \leq d \leq f \leq n$

Sortie: Tableau trié

$p \longleftarrow \{d, \ldots, f\}$

$p \leftarrow \textsc{Partitionner}(T, d, f, p)$

$\textsc{TriRapide}(T, d, p-1)$

$\textsc{TriRapide}(T, p, f)$

▷ $\textsc{TriRapide}(T, 1, n)$

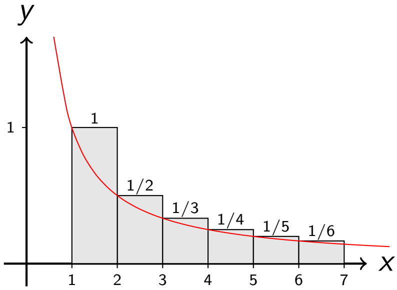
Complexité

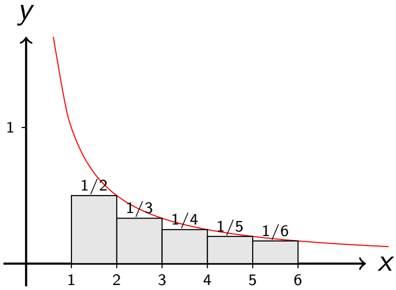
Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas : $O(n^2)$
- En moyenne : $O(n \log n)$

Nombres harmoniques (par l'image)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$





$$H_n \sim \ln n.$$

Nombres harmoniques (plus formel)

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

- Nous avons
$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
- En sommant de 1 à n :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq H_n \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
- Donc :
$$\ln(n+1)t \leq H_n \leq \ln(n) + 1 \text{ et } H_n \sim \ln n.$$

Tri rapide - Analyse (1/2)

- $z_1, \ldots, z_n =$ éléments du tableau par ordre croissant.
- $X =$ nombre total de comparaison dans une exécution (variable aléatoire)
- $X_{ij} =$ v.a. qui vaut 1 si z_i est comparé à z_j et 0 sinon
  Nous avons
  $$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$
- On cherche à calculer $\mathbb{E}[X]$
  Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}[X_{ij}]$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}\left(\{\text{L'algorithme compare } z_i \text{ et } z_j\}\right)$$

Tri rapide - Analyse (2/2)

- z_i est comparé à z_j sssi le premier élément de $(z_i, \ldots, z_j)$ choisi comme pivot est soit z_i soit z_j.
(sinon z_i et z_j sont envoyés dans deux sous-tableaux différents de la partition)
- Donc

$$\mathbb{P}\left(\{\text{L'algorithme compare } z_i \text{ et } z_j\}\right) = \frac{2}{j-i+1}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} &\leq 2 \cdot n \cdot H_n \\ &= 2n \ln n + O(n) \\ &= O(n \log n)\end{aligned}$$

Sélection rapide

Sélection

- Entrée : T un tableau de n valeurs distinctes, $k \in \{1, \ldots, n\}$
- Sortie : m élément de T de rang k)

- 1961 - C. A. R. Hoare
- « diviser pour régner »

- **Principe :**
  - sélectionner un pivot
  - le placer à sa place définitive avec
    - éléments inférieurs à gauche
    - éléments supérieurs à droite
  - chercher l'élément dans le sous-tableau adéquat

Sélection rapide

Sélection

- Entrée : T un tableau de n valeurs distinctes, $k \in \{1, \dots, n\}$
- Sortie : m élément de T de rang k)

- 1961 - C. A. R. Hoare
- « diviser pour régner »

- **Principe :**
  - sélectionner un pivot
  - le placer à sa place définitive avec
    - éléments inférieurs à gauche
    - éléments supérieurs à droite
  - chercher l'élément dans le sous-tableau adéquat

Algorithme SÉLECTIONRAPIDE

$p \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{d, \ldots, f\}$

$p \leftarrow$ PARTITIONNER(T, d, f, p)

si $k = p$ **alors**

  retourner $T[p]$

sinon si $k < p$ **alors**

  SÉLECTIONRAPIDE$(T, d, p - 1, k)$

sinon

  SÉLECTIONRAPIDE$(T, p + 1, f, k - p + d - 1)$

fin si

$\triangleright$ SÉLECTIONRAPIDE$(T, 1, n, k)$

Complexité

Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas :
- En moyenne :

Algorithme SÉLECTIONRAPIDE

$p \xleftarrow{⚂⚃} \{d, \ldots, f\}$
$p \leftarrow \text{PARTITIONNER}(T, d, f, p)$
si $k = p$ **alors**
  retourner $T[p]$
sinon si $k < p$ **alors**
  $\text{SÉLECTIONRAPIDE}(T, d, p-1, k)$
sinon
  $\text{SÉLECTIONRAPIDE}(T, p+1, f, k-p+d-1)$
fin si

$\triangleright$ $\text{SÉLECTIONRAPIDE}(T, 1, n, k)$

Complexité

Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas : $O(n^2)$
- En moyenne :

Algorithme $\textsc{SélectionRapide}$

$p \longleftarrow \{d, \ldots, f\}$

$p \leftarrow \textsc{Partitionner}(T, d, f, p)$

si $k = p$ **alors**

  retourner $T[p]$

sinon si $k < p$ **alors**

  $\textsc{SélectionRapide}(T, d, p-1, k)$

sinon

  $\textsc{SélectionRapide}(T, p+1, f, k-p+d-1)$

fin si

$\triangleright \quad \textsc{SélectionRapide}(T, 1, n, k)$

Complexité

Nombres de comparaison :

- Dans le pire des cas : $O(n^2)$
- En moyenne : $O(n)$

Sélection rapide - Analyse

- Si PARTITIONNER découpe le tableau à chaque étape avec un tableau de taille maximale αn (avec $\alpha < 1$), nous avons :

$$C(n) \leq C(\alpha n) + n \qquad \rightsquigarrow \qquad C(n) = O(n)$$

- L'analyse exacte (plus difficile) donne $C(n) \leq 2n + o(n)$

Remarque

Nous verrons en TD une analyse formelle de $C(n) \leq 4n + o(n)$

- Il existe un algorithme **déterministe** pour le problème de sélection de complexité $O(n)$
(1973 – M. Blum *et al.* – médian des médians)

Remarque

Cet algorithme sera proposé dans les compléments du TD

Sélection rapide - Analyse

- Si PARTITIONNER découpe le tableau à chaque étape avec un tableau de taille maximale αn (avec $\alpha < 1$), nous avons :

$$C(n) \leq C(\alpha n) + n \qquad \rightsquigarrow \qquad C(n) = O(n)$$

- L'analyse exacte (plus difficile) donne $C(n) \leq 2n + o(n)$

Remarque

Nous verrons en TD une analyse formelle de $C(n) \leq 4n + o(n)$

- Il existe un algorithme **déterministe** pour le problème de sélection de complexité $O(n)$
(1973 – M. Blum *et al.* – médian des médians)

Remarque

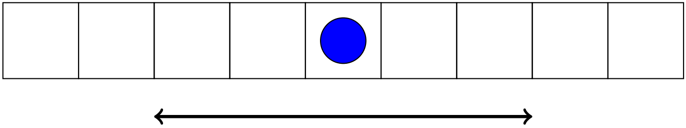
Cet algorithme sera proposé dans les compléments du TD

Médian approché

Médian approché

- Entrée : T un tableau de n valeurs distinctes, $k \in \{1, \ldots, n\}$
- Sortie : m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

- $m =$ **presque médian**



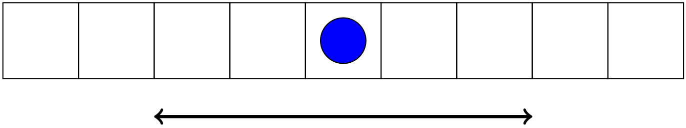
- plus facile que Sélection $\rightsquigarrow$ Complexité $O(n)$
- Peut-on faire mieux ?
  - Las Vegas ?
  - Monte-Carlo ?

Médian approché

Médian approché

- Entrée : T un tableau de n valeurs distinctes, $k \in \{1, \dots, n\}$
- Sortie : m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

- $m =$ **presque médian**



- plus facile que Sélection $\rightsquigarrow$ Complexité $O(n)$
- Peut-on faire mieux ?
  - Las Vegas ?
  - Monte-Carlo ?

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

i $\{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \dots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur :

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\quad} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur :

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \dots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur :

Médian approché - Monte-Carlo (I)

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

$i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
retourner T[i]

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur : $\simeq 1/2$

Algorithme EST_PRESQUE_MÉDIAN ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m
Sortie: VRAI sssi m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

$c \leftarrow 0$
pour j de 1 à n **faire**
  si $m < T[j]$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin si
fin pour
si $3n/4 \geq c \geq n/4$ **alors**
  retourner VRAI
sinon
  retourner FAUX
fin si

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_PRESQUE_MÉDIAN ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m
Sortie: VRAI sssi m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

$c \leftarrow 0$
pour j de 1 à n **faire**
  si $m < T[j]$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin si
fin pour
si $3n/4 \geq c \geq n/4$ **alors**
  retourner VRAI
sinon
  retourner FAUX
fin si

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_PRESQUE_MÉDIAN ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI sssi m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

$c \leftarrow 0$
pour j de 1 à n **faire**
  si $m < T[j]$ **alors**
    $c \leftarrow c + 1$
  fin si
fin pour
si $3n/4 \geq c \geq n/4$ **alors**
  retourner VRAI
sinon
  retourner FAUX
fin si

Complexité

Nombres de comparaison :

Algorithme EST_PRESQUE_MÉDIAN ?

Entrée: Un tableau T de longueur n, m

Sortie: VRAI sssi m est un élément de rang $k \in [n/4, 3n/4]$ de T

```
c ← 0
pour j de 1 à n faire
    si m < T[j] alors
        c ← c + 1
    fin si
fin pour
si 3n/4 ≥ c ≥ n/4 alors
    retourner VRAI
sinon
    retourner FAUX
fin si
```

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

```
tant que VRAI faire
    i        {1, ..., n}
    m ← T[i]
    si EST_PRESQUE_MÉDIAN ?(T, m) alors
        retourner m
    fin si
fin tant que
```

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur :

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \longleftarrow \{1, \dots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si $\textsc{Est\_Presque\_Médian?}(T, m)$ **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
  $i \xleftarrow{\quad} \{1, \ldots, n\}$
  $m \leftarrow T[i]$
  si $\textsc{Est\_Presque\_Médian?}(T, m)$ **alors**
    retourner m
  fin si
fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur :

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

tant que VRAI **faire**
- $i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \dots, n\}$
- $m \leftarrow T[i]$
- **si** EST_PRESQUE_MÉDIAN ?(T, m) **alors**
  - **retourner** m
- **fin si**

fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur :

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

    tant que VRAI **faire**
        $i \xleftarrow{\quad} \{1, \ldots, n\}$
        $m \leftarrow T[i]$
        si EST_PRESQUE_MÉDIAN ?(T, m) **alors**
            retourner m
        fin si
    fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur :

Sélection approchée - Las Vegas

Entrée: Un tableau T de longueur n
Sortie: m élément de T

  tant que VRAI **faire**
    $i \longleftarrow \{1, \dots, n\}$
    $m \leftarrow T[i]$
    si EST_PRESQUE_MÉDIAN ?(T, m) **alors**
      retourner m
    fin si
  fin tant que

Complexité

Nombres de comparaison : $O(n)$ en moyenne

Validité

Probabilité d'erreur : 0

Sélection approchée - Monte-Carlo (II)

Entrée: Un tableau T de longueur n, $k \in \mathbb{N}$ (paramètre)
Sortie: m élément de T

$S \leftarrow \emptyset$
pour j de 1 à k **faire**
  $i \xleftarrow{⚁⚃} \{1, \ldots, n\}$
  $S \leftarrow S \cup \{i\}$
fin pour
Trier S ▷ en temps $O(k \log k)$
retourner S[k/2] ▷ le médian de S

Complexité

Nombres de comparaison :

Validité

Probabilité d'erreur : ???

Sélection approchée - Monte-Carlo (II)

Entrée: Un tableau T de longueur n, $k \in \mathbb{N}$ (paramètre)
Sortie: m élément de T

$S \leftarrow \emptyset$
pour j de 1 à k **faire**
  $i \longleftarrow \{1, \dots, n\}$
  $S \leftarrow S \cup \{i\}$
fin pour
Trier S $\triangleright$ en temps $O(k \log k)$
retourner S[k/2] $\triangleright$ le médian de S

Complexité

Nombres de comparaison : $O(k \log k)$ ou $O(k)$

Validité

Probabilité d'erreur : ? ? ?

Sélection approchée - Monte-Carlo (II)

Entrée: Un tableau T de longueur n, $k \in \mathbb{N}$ (paramètre)
Sortie: m élément de T

$S \leftarrow \emptyset$
pour j de 1 à k **faire**
  $i \xleftarrow{} \{1, \ldots, n\}$
  $S \leftarrow S \cup \{i\}$
fin pour
Trier S ▷ en temps $O(k \log k)$
retourner S[k/2] ▷ le médian de S

Complexité

Nombres de comparaison : $O(k \log k)$ ou $O(k)$

Validité

Probabilité d'erreur : ? ? ?

Sélection approchée - Monte-Carlo (II)

Entrée: Un tableau T de longueur n, $k \in \mathbb{N}$ (paramètre)
Sortie: m élément de T

$S \leftarrow \emptyset$
pour j de 1 à k **faire**
    $i \xleftarrow{\text{⚂⚃}} \{1, \ldots, n\}$
    $S \leftarrow S \cup \{i\}$
fin pour
Trier S ▷ en temps $O(k \log k)$
retourner S[k/2] ▷ le médian de S

Complexité

Nombres de comparaison : $O(k \log k)$ ou $O(k)$

Validité

Probabilité d'erreur : ? ? ?

Sélection approchée - Monte-Carlo (II)

Entrée: Un tableau T de longueur n, $k \in \mathbb{N}$ (paramètre)
Sortie: m élément de T

$S \leftarrow \emptyset$
pour j de 1 à k **faire**
  $i \xleftarrow{⚁⚃} \{1, \ldots, n\}$
  $S \leftarrow S \cup \{i\}$
fin pour
Trier S ▷ en temps $O(k \log k)$
retourner S[k/2] ▷ le médian de S

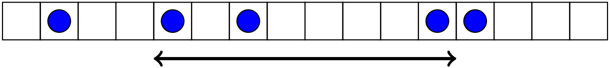
Complexité

Nombres de comparaison : $O(k \log k)$ ou $O(k)$

Validité

Probabilité d'erreur : ? ? ?

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)

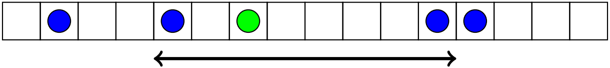


+

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i)$ = probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)

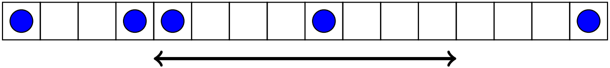


+

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

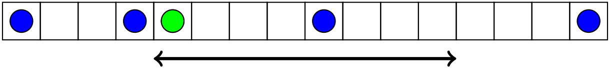
Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)



- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)

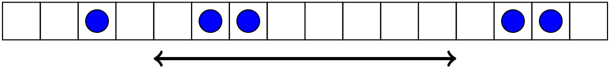


+

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)

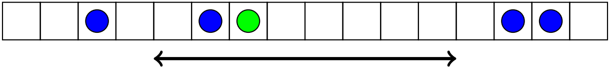


+

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)

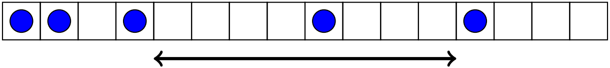


+

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

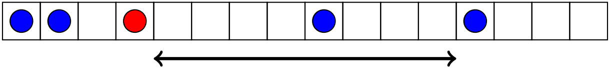
Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)



- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i)$ = probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (1/3)



$+$

- L'algorithme est correct sauf si S contient
  1. $\geq k/2$ éléments dans le premier quart (E_1), ou
  2. $\geq k/2$ éléments dans le dernier quart (E_2)

- $\mathbb{P}(E_i) =$ probabilité qu'une répétition de k épreuves de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$ obtienne $\geq k/2$ succès.

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (2/3)

$$(n \equiv 0 \bmod 4 \text{ et } k \equiv 0 \bmod 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=k/2}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} &\leq \binom{k}{k/2} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \\
&= \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \\
&\leq \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&\leq 4^{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \leq (1/2)^{k/5}
\end{aligned}$$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (2/3)

$$(n \equiv 0 \bmod 4 \text{ et } k \equiv 0 \bmod 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=k/2}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} &\leq \binom{k}{k/2} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \\
&= \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \\
&\leq \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&\leq 4^{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \leq (1/2)^{k/5}
\end{aligned}$$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (2/3)

$$(n \equiv 0 \bmod 4 \text{ et } k \equiv 0 \bmod 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=k/2}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} &\leq \binom{k}{k/2} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \\
&= \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^k \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&\leq \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&\leq 4^{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \leq (1/2)^{k/5}
\end{aligned}$$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (2/3)

$$(n \equiv 0 \bmod 4 \text{ et } k \equiv 0 \bmod 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=k/2}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} &\leq \binom{k}{k/2} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \\
&= \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \\
&\leq \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&\leq 4^{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \leq (1/2)^{k/5}
\end{aligned}$$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (2/3)

$$(n \equiv 0 \bmod 4 \text{ et } k \equiv 0 \bmod 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=k/2}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} &\leq \binom{k}{k/2} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{i} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-i} \\
&= \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \sum_{i=k/2}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{i} \\
&\leq \binom{k}{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&\leq 4^{k/2} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} \frac{3}{2} \leq (1/2)^{k/5}
\end{aligned}$$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (3/3)

- $k = 5(t+1) \rightsquigarrow \mathbb{P}(E_i) \leq 2^{-(t+1)}$
- $k = 5(t+1) \rightsquigarrow \mathbb{P}(\text{erreur}) \leq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) \leq 2^{-t}$

$$k = 1500$$

Complexité

Nombres de comparaison : $O(1)$

Validité

Probabilité d'erreur : $\leq 10^{-80}$

Sélection approchée - Monte-Carlo - Analyse (3/3)

- $k = 5(t+1) \rightsquigarrow \mathbb{P}(E_i) \leq 2^{-(t+1)}$
- $k = 5(t+1) \rightsquigarrow \mathbb{P}(\text{erreur}) \leq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) \leq 2^{-t}$

$$k = 5(T \log(n) + 1) \qquad (T \text{ constant})$$

Complexité

Nombres de comparaison : $O(\log n \log \log n)$

Validité

Probabilité d'erreur : $\leq n^{-T}$