

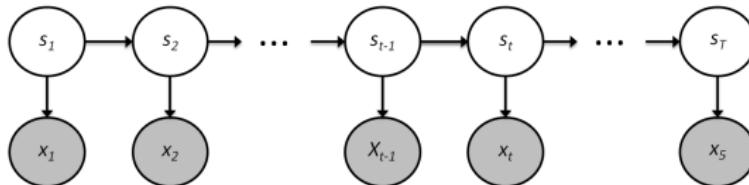
MAPSI — cours 7 : Chaîne de Markov Cachée

Nicolas Thome
nicolas.thome@isir.upmc.fr

LIP6 / ISIR – Sorbonne Université, France

- Transition simple... Parfois simpliste
 - Transition directe sur les observations \neq geste complexe
- Pas de caractérisation des états (limite applicative)
 - Analyse du texte
 - Analyse de l'état d'un véhicule
 - Diagnostic

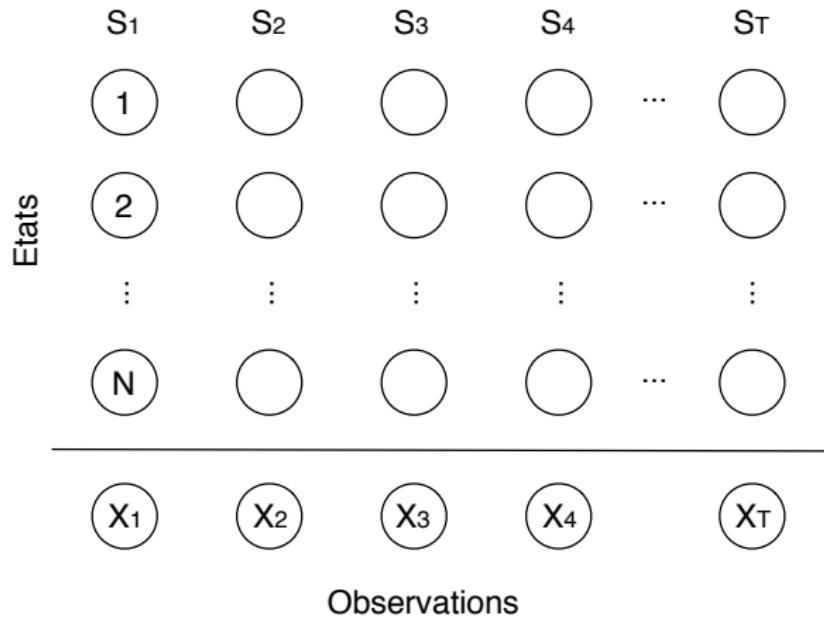
- Séparation des **observations** et des états
 - Une chaîne = une séquence d'observations...
 - ... chaque observation ayant été générée par un état
- 2 composantes
 - Chaine de Markov d'états finis
 - Ensemble de lois de probabilité d'émission
- 2 points de vues
 - Génératif : la chaîne génère des états qui entraînent des observations
 - Analytique : les observations fournissent de l'évidence sur la suite d'états (décodage) et sur le modèle (apprentissage)



- La chaîne de Markov est toujours composée de :
 - d'une séquence d'**états** $S = (s_1, \dots, s_T)$
 - dont les valeurs sont tirées dans un ensemble fini $Q = (q_1, \dots, q_N)$
 - Le modèle est toujours défini par $\{\Pi, A\}$
 - $\pi_i = P(s_1 = q_i)$
 - $a_{ij} = p(s_{t+1} = q_j | s_t = q_i)$
- Les **observations** sont modélisées à partir des s_t
 - séquence d'observation : $X = (x_1, \dots, x_T)$
 - loi de probabilité : $b_j(t) = p(x_t | s_t = q_j)$
 - B peut être discrète ou continue
- MMC : $\lambda = \{\Pi, A, B\}$

Structure (combinatoire) d'un MMC

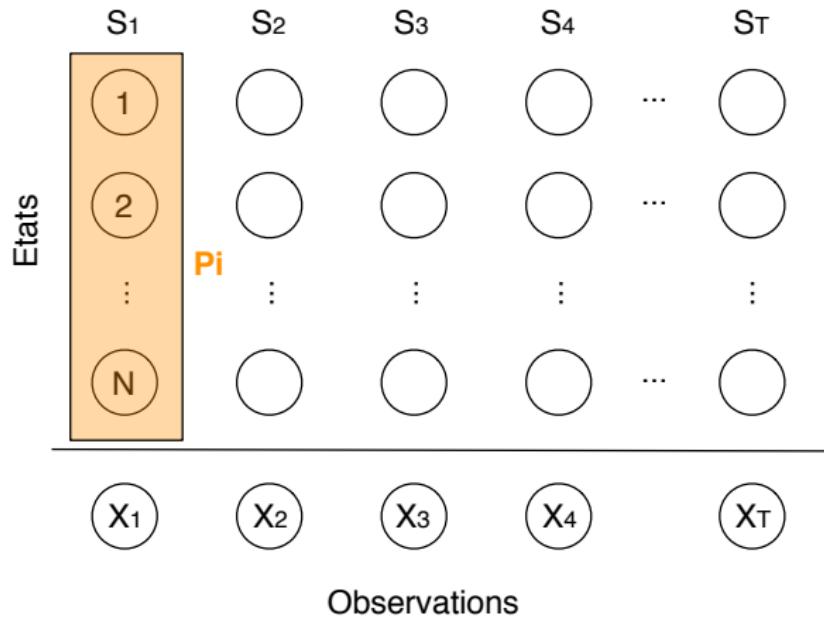
Constitution d'un MMC :



- Les états sont inconnus...

Structure (combinatoire) d'un MMC

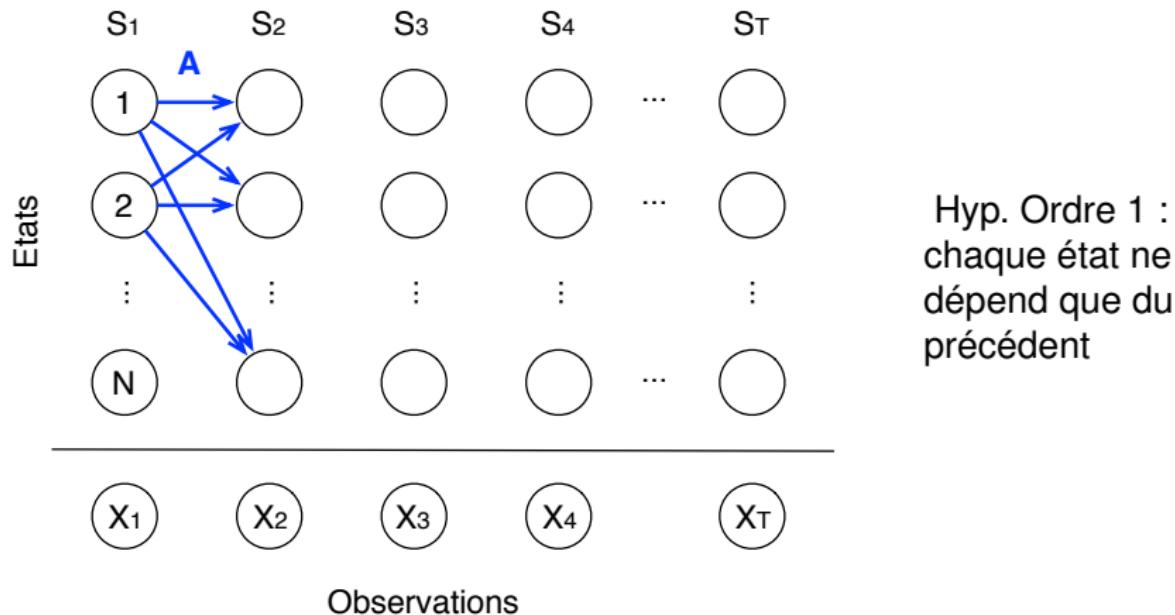
Constitution d'un MMC :



- Les états sont inconnus...

Structure (combinatoire) d'un MMC

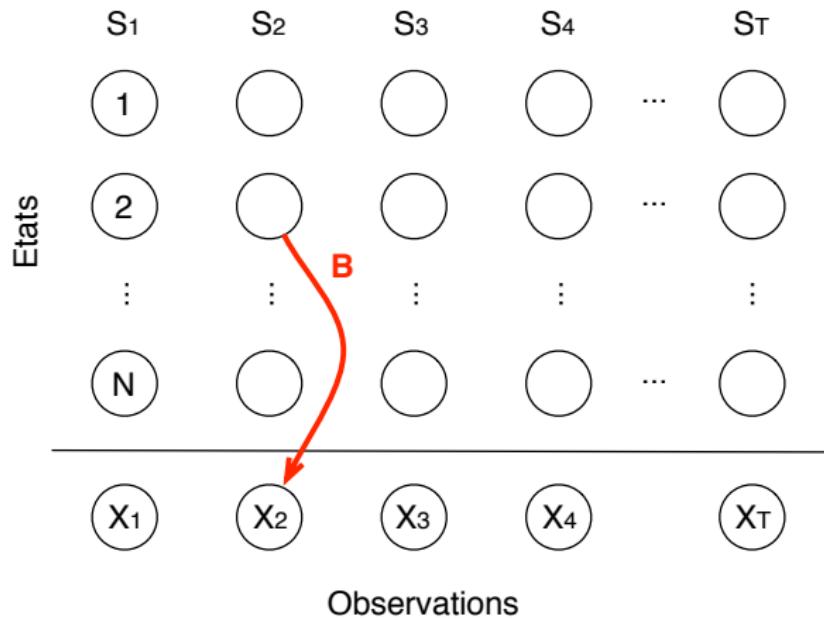
Constitution d'un MMC :



- Les états sont inconnus...
La combinatoire à envisager est problématique !

Structure (combinatoire) d'un MMC

Constitution d'un MMC :



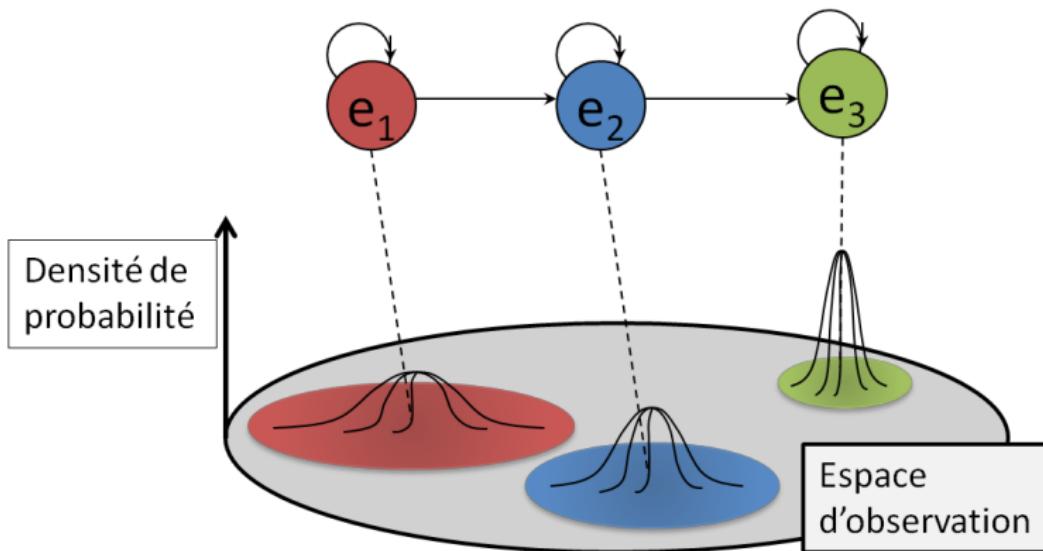
Hyp. Ordre 1 :
chaque état ne
dépend que du
précédent

Chaque obs. ne
dépend que de
l'état courant

- Les états sont inconnus...

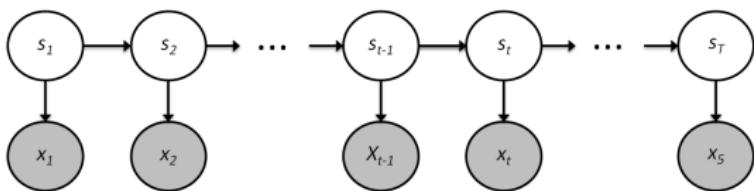
- Séquence d'observations
 - $X = (x_1, \dots, x_T)$
- Séquence d'états (**cachée = manquante**)
 - $S = (s_1, \dots, s_T)$

MMC à lois d'observation continues



- Les états doivent être discrets... Les observations par forcément !

Hypothèses MMC



- CM d'ordre 1 :

$$p(s_t | s_1, \dots, s_{t-1}) = p(s_t | s_{t-1})$$

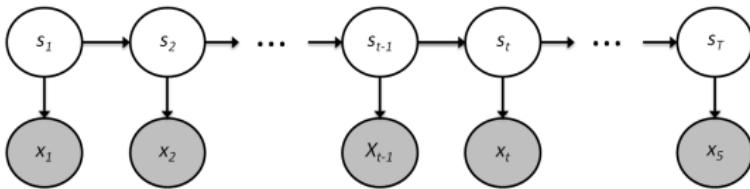
- Indépendance des observations :

$$p(x_t | x_{t-1}, s_t) = p(x_t | s_t)$$

i.e. : les observations successives sont indépendantes conditionnellement aux états !

Notations simplifiées (de a à b) :

$$\textcolor{blue}{s_1^t} = s_1, \dots, s_t, \quad x_1^t = x_1, \dots, x_t$$



Comment calculer probabilités suivantes ?

- Séquence d'états
- Séquence d'observations (connaissant les états)
- Séquences obs + états :

Algorithm 1: Génération d'une séquence $\{x_1, \dots, x_T\}$

Data: A, B, Π

Result: x_1^T, s_1^T

$S \leftarrow [];$

$X \leftarrow [];$

Tirer s_1 en fonction de Π ;

Tirer x_1 en fonction de B et s_1 ;

$s_t \leftarrow s_1, x_t \leftarrow x_1, t \leftarrow 1;$

$S \leftarrow [S, s_t], X \leftarrow [X, x_t];$

while s_t n'est pas l'état final **do**

$s_{t+1} \leftarrow$ tirage selon $(A(s_t, :))$;

$x_{t+1} \leftarrow$ tirage selon $(B(s_{t+1}, :))$;

$s_t \leftarrow s_1, x_t \leftarrow x_1;$

$S \leftarrow [S, s_t], X \leftarrow [X, x_t];$

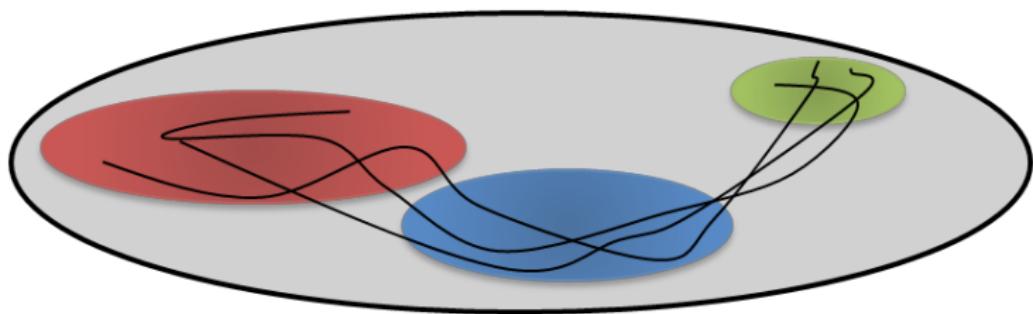
$t \leftarrow t + 1;$

Représentation d'une trajectoire

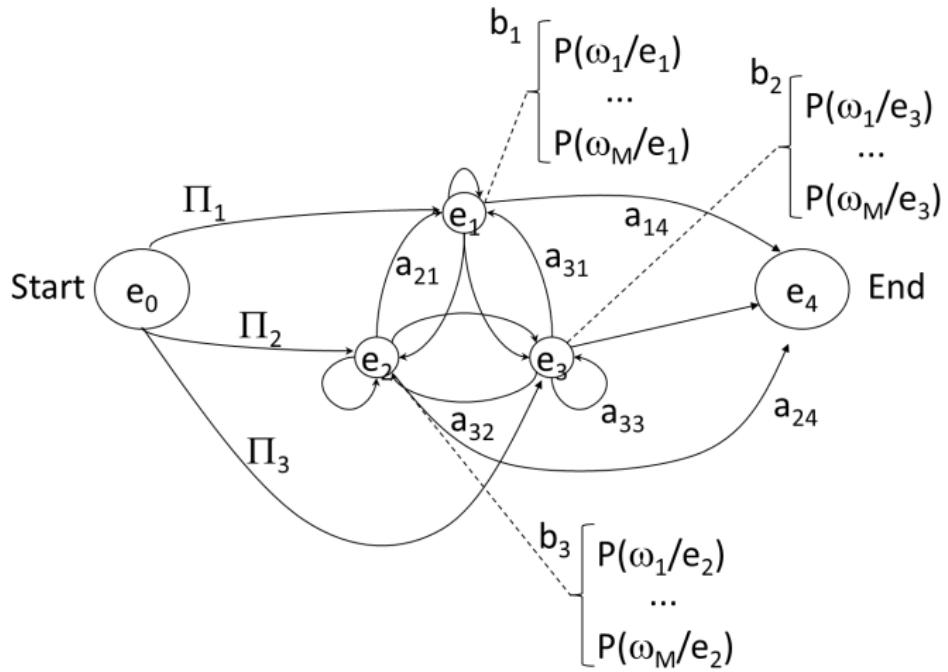
- trajectoire d'états



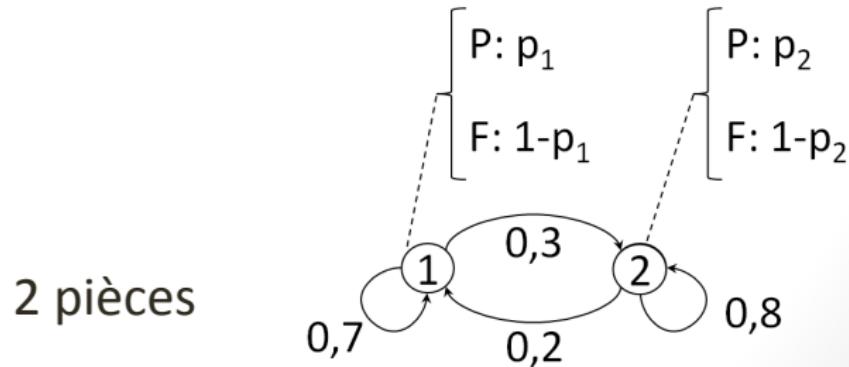
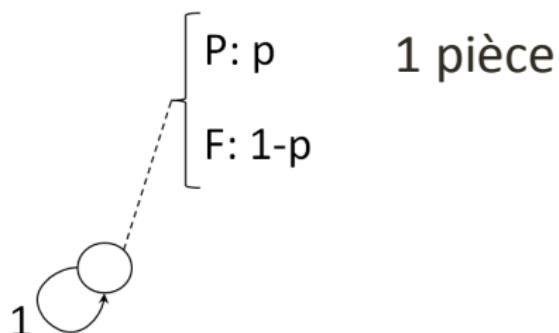
- trajectoire d'observations



Représentation d'un MMC



Modélisation des pièces...



Capacités d'expression CM, MMC

- N urnes (de Rabiner)
 - chaque urne = distribution spécifique des couleurs de boules
- On tire successivement des boules dans les différentes urnes et on note les couleurs des boules



$P(\text{red}) = b_1(1)$	$P(\text{red}) = b_2(1)$	$P(\text{red}) = b_N(1)$
$P(\text{green}) = b_1(2)$	$P(\text{green}) = b_2(2)$	$P(\text{green}) = b_N(2)$
$P(\text{yellow}) = b_1(3)$	$P(\text{yellow}) = b_2(3)$	$P(\text{yellow}) = b_N(3)$
$P(\text{black}) = b_1(4)$	$P(\text{black}) = b_2(4)$	$P(\text{black}) = b_N(4)$
...
$P(\text{orange}) = b_1(M)$	$P(\text{orange}) = b_2(M)$	$P(\text{orange}) = b_N(M)$

- Modélisation complexe
 - Tracé d'une ligne \Leftrightarrow prise en compte de la position du poignet
- Mixture de sources émettrices
 - Séparation de sources
- Problèmes de sécançage des signaux
 - Parole, écrit,...
 - ADN,
 - Image

- ① **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T | \lambda)$
- ② **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a générée les observations ?
- ③ **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver λ^*
Et les applications associées...

- ① **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T | \lambda)$
- ② **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a générée les observations ?

$$s_1^{T*} = \arg \max_{s_1^T} p(s_1^T | x_1^T, \lambda) = \arg \max_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

- ③ **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver λ^*
Et les applications associées...

Les trois problèmes des MMC (Fergusson - Rabiner)

- ① **Evaluation** : λ donné, calcul de $p(x_1^T | \lambda)$
- ② **Décodage** : λ donné, quelle séquence d'états a générée les observations ?

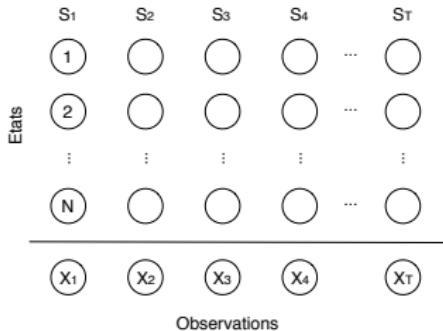
$$s_1^{T*} = \arg \max_{s_1^T} p(s_1^T | x_1^T, \lambda) = \arg \max_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

- ③ **Apprentissage** : à partir d'une série d'observations, trouver λ^*

$$\lambda^* = \{\Pi^*, A^*, B^*\} = \arg \max_{\lambda} p(x_1^T | \lambda)$$

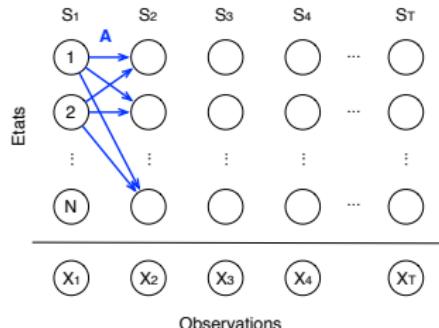
Et les applications associées...

PB1 : évaluation $p(x_1^T | \lambda)$



- Quel point de départ ?
- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T | \lambda)$

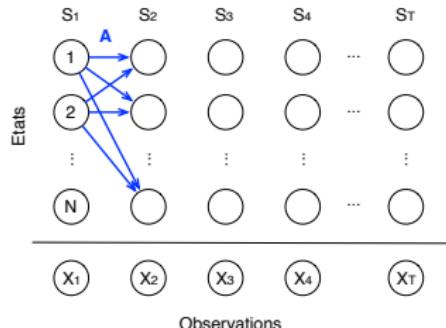


- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T | \lambda)$

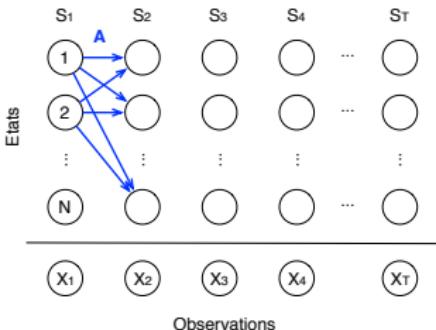


- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

- Simplifier la combinatoire...
- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T | \lambda)$



- Quel point de départ ? **Proba totales**

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

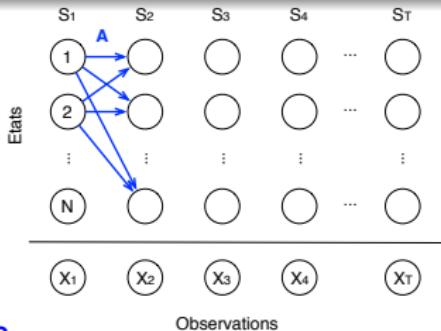
- Simplifier la combinatoire... **Hypothèse MMC ordre 1**

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} \prod_{t=1}^T p(s_t | s_{t-1}) p(x_t | s_t)$$

- Complexité ?

PB1 : évaluation $p(x_1^T | \lambda)$

A chaque pas de temps, envisager toutes les combinaisons d'états qui ont pu emmené ici...



- Quel point de départ ? Proba totales

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} p(x_1^T, s_1^T | \lambda)$$

- Simplifier la combinatoire... Hypothèse MMC ordre 1

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{s_1^T} \prod_{t=1}^T p(s_t | s_{t-1}) p(x_t | s_t)$$

- Complexité ? $\mathcal{O}(N^T)$

Calcul par récurrence :

- On pose :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda)$$

- Que vaut alors $p(x_1^T | \lambda)$?

Calcul par récurrence :

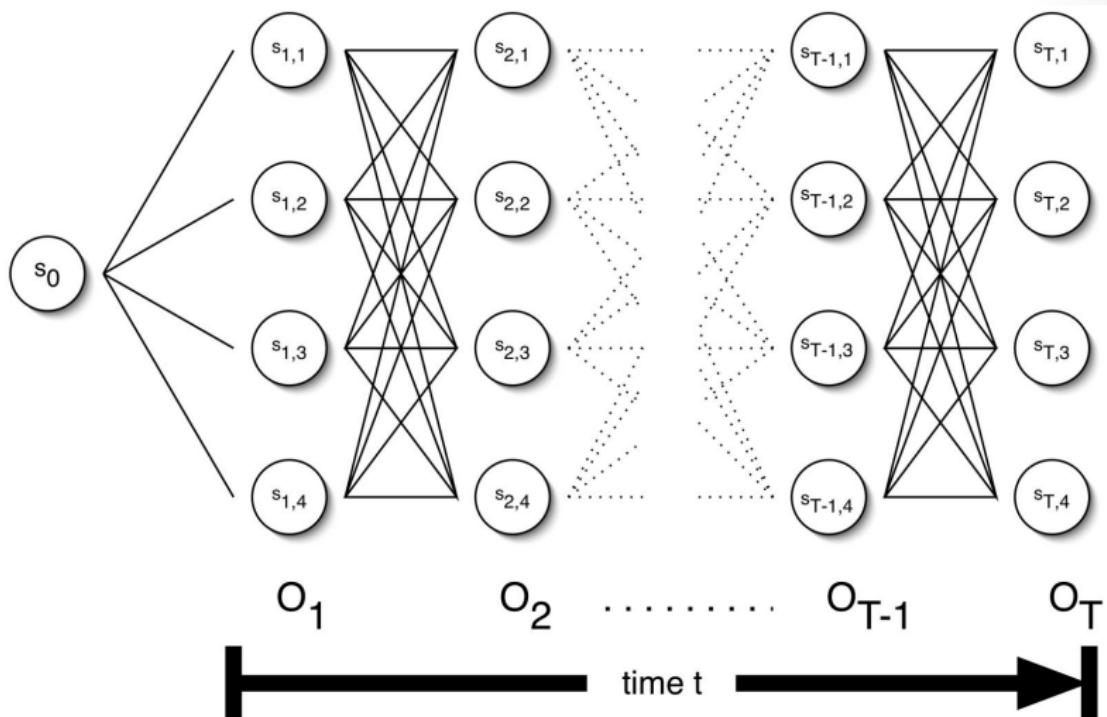
- On pose :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda)$$

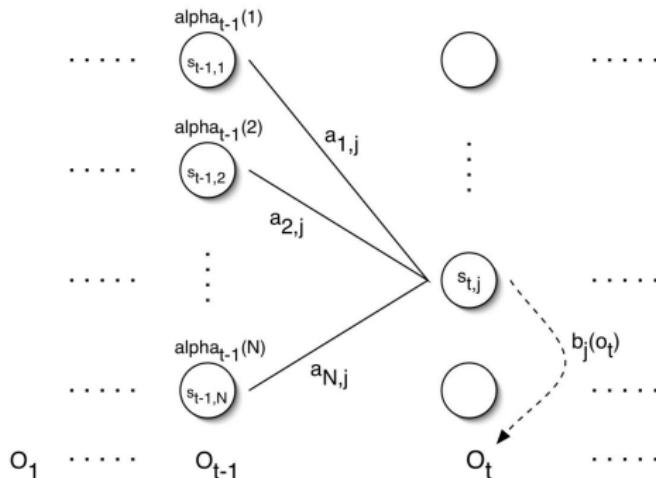
- Que vaut alors $p(x_1^T | \lambda)$?

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$$

Envisager tous les états à tous les pas de temps (+ transitions) = trellis d'hypothèses



PB1 : Algorithme forward

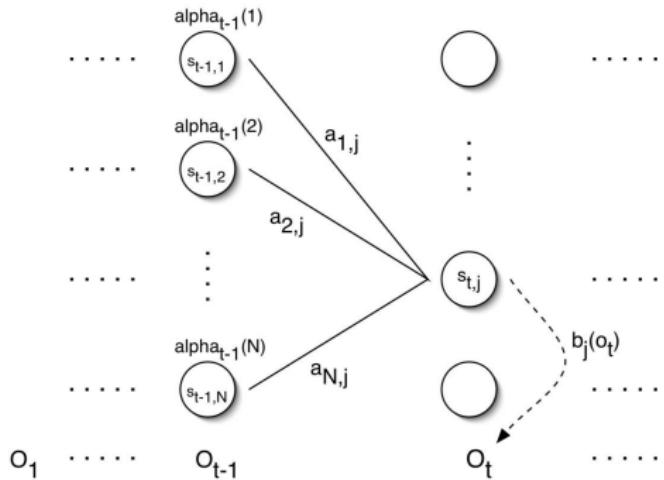


$$\alpha_t(j) = p(x_1^t, s_t = j | \lambda)$$

Exprimer en fonction des α_{t-1}

Formalisation récursive = briser la complexité

PB1 : Algorithme forward



$$\alpha_t(j) = p(x_1^t, s_t = j | \lambda)$$

$$\alpha_t(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_{t-1}(i) a_{ij} \right] b_j(x_t)$$

Formalisation récursive = briser la complexité

- Initialisation :

$$\alpha_{t=1}(i) = p(x_1^1, s_1 = i | \lambda) = \dots$$

PB1 : Algorithme *forward*

- Initialisation :

$$\alpha_{t=1}(i) = p(x_1^1, s_1 = i | \lambda) = \dots \\ = \pi_i b_i(x_1)$$

- Itération :

$$\alpha_t(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_{t-1}(i) a_{ij} \right] b_j(x_t)$$

- Terminaison :

$$p(x_1^T | \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$$

- Complexité linéaire en T

- Usuuellement : $T \gg N$

Programmation dynamique

[wikipedia]

En informatique, la **programmation dynamique** est une méthode algorithmique pour résoudre des problèmes d'optimisation.

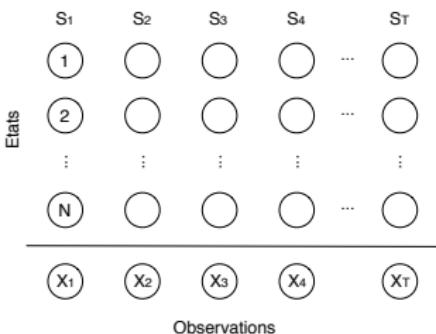
Le concept a été introduit au début des années **1950 par Richard Bellman**.

À l'époque, le terme programmation signifie planification et ordonnancement¹. La programmation dynamique consiste à **résoudre un problème en le décomposant en sous-problèmes**, puis à résoudre les sous-problèmes, des plus petits aux plus grands en **stockant les résultats intermédiaires**.

Elle a d'emblée connu un grand succès, car de nombreuses fonctions économiques de l'industrie étaient de ce type, comme la conduite et l'optimisation de procédés chimiques, ou la gestion de stocks

⇒ Vous allez implémenter un algorithme de programmation dynamique (un des plus connus de l'informatique !)

PB2 : décodage



$$s_1^{T*} = \arg \max_{s_1^T} p(x_1^T | \lambda)$$

Avec la formule précédente (hyp. MMC ordre 1) :

$$s_1^{T*} = \arg \max_{s_1^T} \prod_{t=1}^T p(s_t | s_{t-1}) p(x_t | s_t)$$

- Même schéma que précédemment = **algorithme de Viterbi**

- On pose :

Meilleur score pour un chemin au temps t , se terminant à l'état i :

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

A t , la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
- ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j

- On pose :

Meilleur score pour un chemin au temps t , se terminant à l'état i :

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

A t , la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
 - ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j
-
- Initialisation :
 - Récurrence :

- On pose :

Meilleur score pour un chemin au temps t , se terminant à l'état i :

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

A t , la probabilité du meilleur chemin est la combinaison :

- d'un des meilleurs chemins précédents...
- ... et de la transition vers s_j + observation de x_t à partir de s_j

- Initialisation :

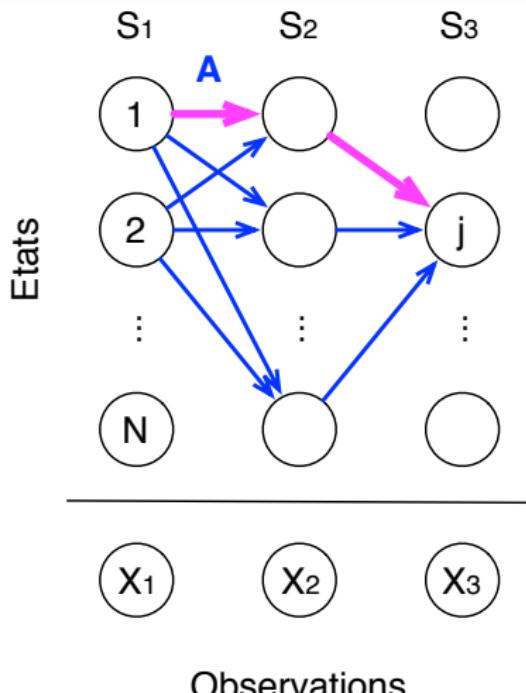
$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(x_1)$$

- Récurrence :

$$\delta_t(j) = \left[\max_i \delta_{t-1}(i) a_{ij} \right] b_j(x_t)$$

PB2 : Viterbi (suite)

- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée \Rightarrow stockage à prévoir



- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée \Rightarrow stockage à prévoir
- Stockage des indices des états dans un tableau Ψ

$$\Psi_t(j) = \arg \max_{i \in [1, N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij}$$

Pour arriver en j à t , quel était le meilleur état à $t - 1$???

- \Rightarrow A parcourir à l'envers pour retrouver le chemin optimal !

- δ = stockage de la probabilité de certaines situations...
- Ce qui nous intéresse c'est la séquence d'états associée \Rightarrow stockage à prévoir
- Stockage des indices des états dans un tableau Ψ

$$\Psi_t(j) = \arg \max_{i \in [1, N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij}$$

- Complexité en $\mathcal{O}(N^2 T)$

PB2 : Viterbi (récapitulatif)

$$\delta_t(i) = \max_{s_1^{t-1}} p(s_1^{t-1}, s_t = i, x_1^t | \lambda)$$

1 Initialisation

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(x_1)$$

$$\Psi_1(i) = 0$$

2 Récursion

$$\delta_t(j) = \left[\max_i \delta_{t-1}(i) a_{ij} \right] b_j(x_t)$$

$$\Psi_t(j) = \arg \max_{i \in [1, N]} \delta_{t-1}(i) a_{ij}$$

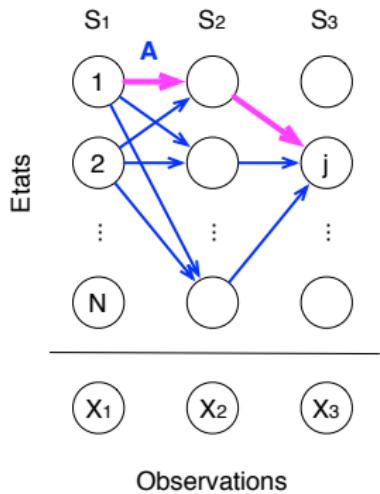
3 Terminaison

$$S^* = \max_i \delta_T(i)$$

4 Chemin

$$q_T^* = \arg \max_i \delta_T(i)$$

$$q_t^* = \Psi_{t+1}(q_{t+1}^*)$$



- **Version simplifiée** (*hard assignment*) : type k -means
- Nous disposons de :
 - **Evaluation** : $p(x_1^T | \lambda)$
 - **Décodage** : $s_1^{T*} = \arg \max_{s_1^T} p(x_1^T | \lambda)$
- Proposition :

Algorithm 2: Baum-Welch simplifié pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X , Structure= N, K

Result: $\tilde{\Pi}^*, \tilde{A}^*, \tilde{B}^*$

Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0;$

→ finement si possible;

$t = 0;$

while convergence non atteinte **do**

$S_{t+1} = \text{decodage}(X, \lambda_t);$

$\lambda_{t+1}^* = \Pi^{t+1}, A^{t+1}, B^{t+1}$ obtenus par comptage des transitions ;

$t = t + 1;$

You have all the elements to do it !

Algorithm 3: Baum-Welch simplifié pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X

Result: $\tilde{\Pi}^*$, \tilde{A}^* , \tilde{B}^*

Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0$;

→ finement si possible;

$t = 0$;

while convergence non atteinte **do**

Trouver les distributions de probabilité des variables manquantes (états);

Ré-estimer les paramètres λ_{t+1}^* ;

$t = t + 1$;

Affectation dure \Rightarrow estimation des distributions d'appartenance
Algorithme type EM

App. complet : avant propos (et révision)

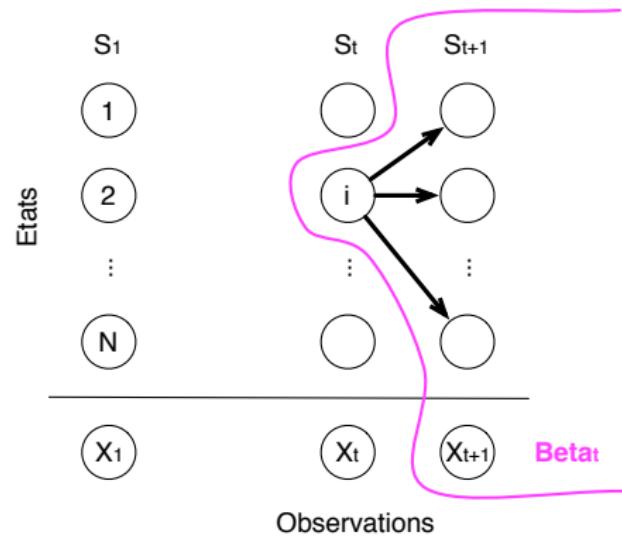
On a vu le calcul des α ... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \quad (\text{sym. des } \alpha)$$

- Initialisation (arbitraire) :

$$\forall i, \quad \beta_{t=1}(i) = 1$$

- Récursion :



App. complet : avant propos (et révision)

On a vu le calcul des α ... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \quad (\text{sym. des } \alpha)$$

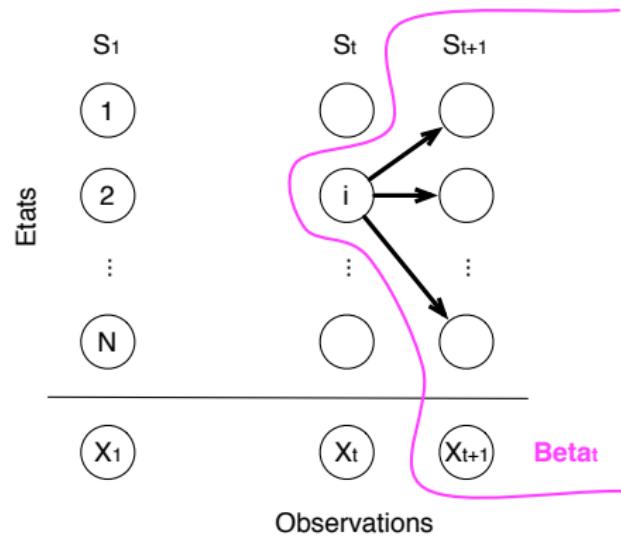
- Initialisation (arbitraire) :

$$\forall i, \quad \beta_{t=1}(i) = 1$$

- Récursion :

Comment puis partir de l'état i à t et observer la suite des x_{t+1}^T ?

- Transition de i vers n'importe quel j
- Observation de x_{t+1} (à partir de j)
- ... Puis on continue sur $\beta_{t+1}(j)$



App. complet : avant propos (et révision)

On a vu le calcul des α ... Définissons maintenant les β :

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda), \quad (\text{sym. des } \alpha)$$

- Initialisation (arbitraire) :

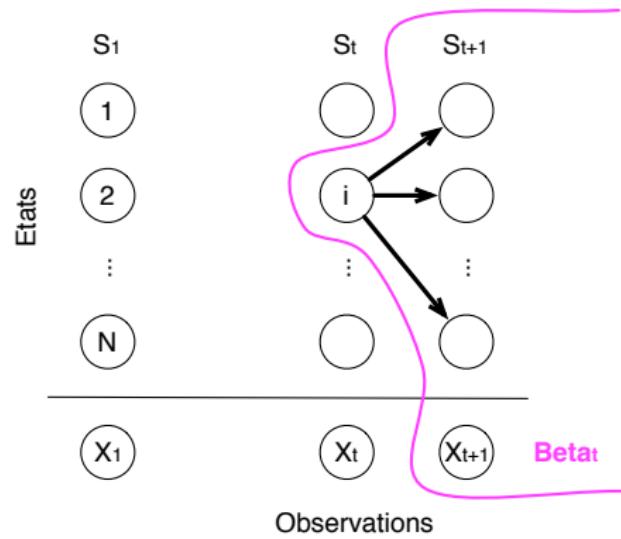
$$\forall i, \quad \beta_{t=1}(i) = 1$$

- Récursion :

Comment puis partir de l'état i à t et observer la suite des x_{t+1}^T ?

- Transition de i vers n'importe quel j
- Observation de x_{t+1} (à partir de j)
- ... Puis on continue sur $\beta_{t+1}(j)$

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(x_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$



Critère : max de vraisemblance sur les observations

- Baum-Welsch **simplifié** : affectation en dur des états :
+ comptage

$$s_t^* = \arg \max_i p(s_t = i | x_1^T)$$

- Pour la version **complète** :
⇒ distributions sur les variables manquantes
+ comptage pondéré par les probabilités d'appartenance

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

$$\gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Les γ se calculent à partir des :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda)$$

$$\beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$

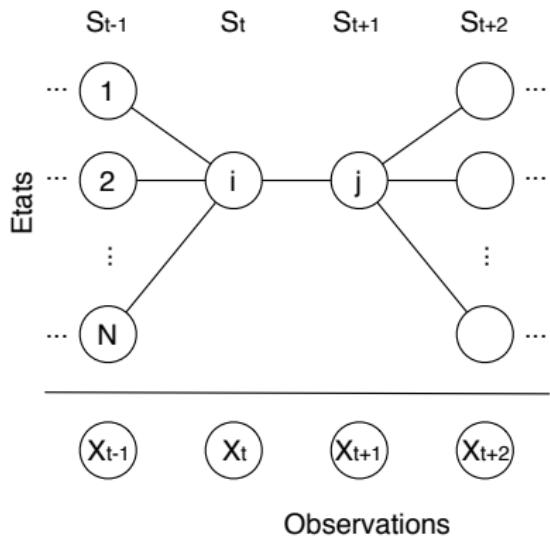
- Exprimer les γ en fonction des α et β ??

App. complet : Démo $\gamma(i, j)$

$$\gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

En fonction de :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda), \quad \beta_t(i) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$



App. complet : Démo $\gamma(i, j)$

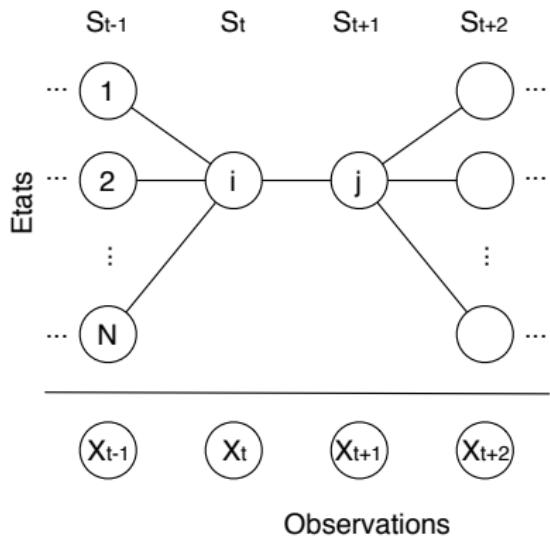
$$\gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

En fonction de :

$$\alpha_t(i) = p(x_1^t, s_t = i | \lambda), \quad \beta_t(j) = p(x_{t+1}^T | s_t = i, \lambda)$$

Début ($p(A|B) = \frac{p(A,B)}{p(B)}$) :

$$\begin{aligned}\gamma_t(i, j) &= p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda) \\ &= \frac{p(s_t = i, s_{t+1} = j, x_1^T | \lambda)}{p(x_1^T | \lambda)} \\ &= \frac{\alpha_t(i) \color{red}{a_{ij} b_j(x_{t+1})} \beta_{t+1}(j)}{p(x_1^T | \lambda)}\end{aligned}$$



$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- $\gamma_t(i)$ est une marginale par rapport à $\gamma_t(i, j)$!
- D'où :

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \gamma_t(i, j)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i, j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i, j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions de i à j

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

De γ aux paramètres du MMC

$$\gamma_t(i) = p(s_t = i | x_1^T, \lambda), \quad \gamma_t(i, j) = p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

- Quel est le lien entre γ et les paramètres du modèle ?
- Interprétation :

$$\sum_t \gamma_t(i, j) = \sum_t p(s_t = i, s_{t+1} = j | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions de i à j

$$\sum_t \gamma_t(i) = \sum_t p(s_t = i | x_1^T, \lambda)$$

Espérance du nombre de transitions issues de i

Mise à jour des paramètres de A

- Etant donné l'interprétation des γ :

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\sum_t \gamma_t(i,j)}{\sum_t \gamma_t(i)}$$

Il s'agit bien d'une sorte de comptage probabiliste des transitions

- Assez simple pour les π_i

$$\tilde{\pi}_i = \gamma_1(i), \quad (\text{naturellement normalisé})$$

- Un peu plus compliqué pour les probabilités d'émission :

$$\tilde{b}_j(k) = \frac{\sum_t \gamma_t(j) \text{ t.q. } x_t=k}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Comptage probabiliste quand on est dans l'état j de générer l'observation k .

Algorithm 4: Baum-Welch pour l'apprentissage d'un MMC

Data: Observations : X , Structure= N, K

Result: $\tilde{\Pi}^*, \tilde{A}^*, \tilde{B}^*$

Initialiser $\lambda_0 = \Pi^0, A^0, B^0;$

 → finement si possible;

$t = 0;$

while convergence non atteinte **do**

Etape E

 Forward/Backward : calcul des α, β ;

 [OPT] Calcul des γ ;

Etape M

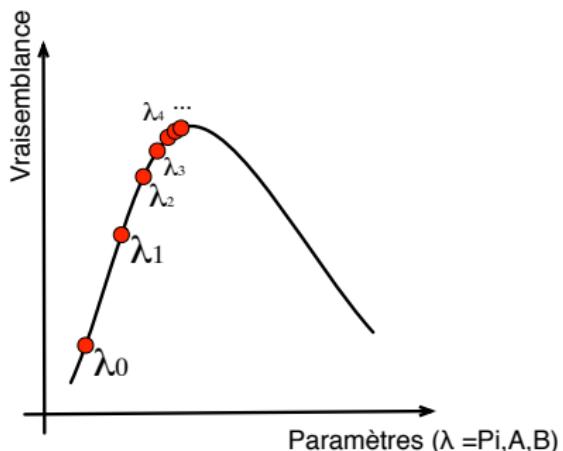
 Mise à jour de Π^t, A^t, B^t ;

$t = t + 1;$

Convergence de la vraisemblance

Objectif de EM

Maximiser la vraisemblance
ie : faire coller un modèle à des observations



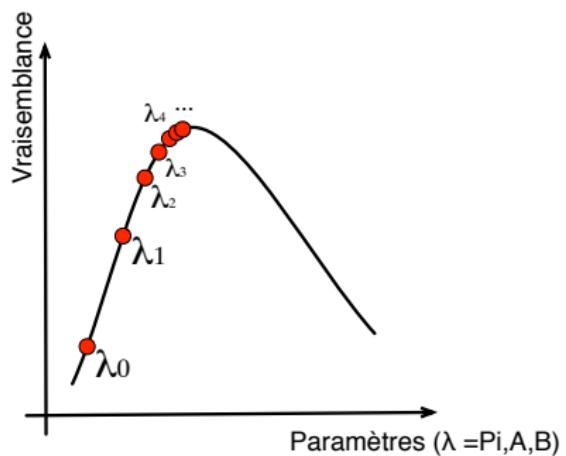
Critère de convergence : maximisation de la vraisemblance
Soit ensemble de séquence d'observations : $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1,\dots,n}$

$$\log \mathcal{L}(X, \lambda) = \sum_{i=1}^n \log(p(\mathbf{x}_i | \lambda))$$

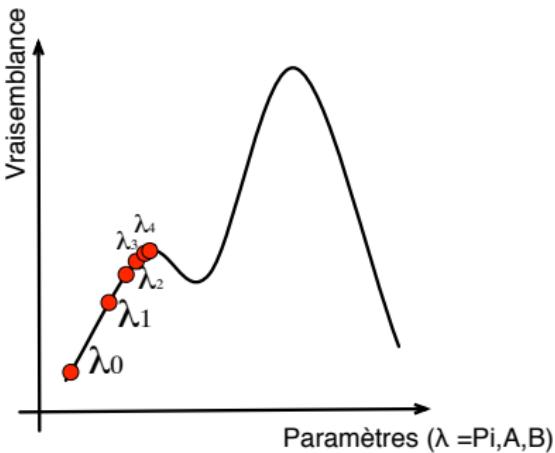
Note : les $\log(p(\mathbf{x}_i | \lambda))$ sont calculés par Viterbi ou la méthode des α , selon la stratégie d'optimisation choisie.

Convexité... Ou pas

Optimisation convexe :



Optimisation non-convexe :

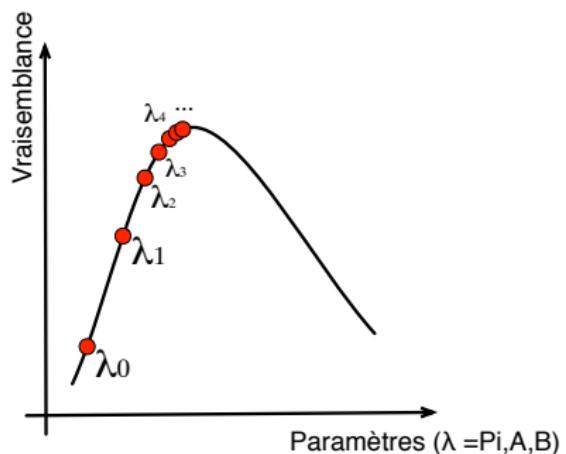


EM

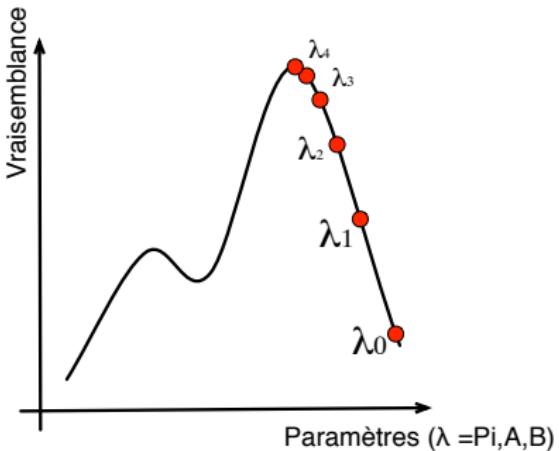
Pas de garantie sur un optimum global dans le cas non-convexe...
MMC = problème non convexe en général

Convexité... Ou pas

Optimisation convexe :



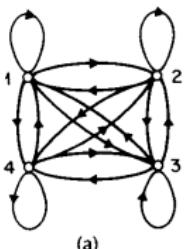
Optimisation non-convexe :



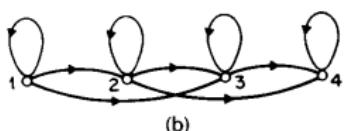
EM

Pas de garantie sur un optimum global dans le cas non-convexe...
MMC = problème non convexe en général \Rightarrow **Bien choisir λ_0 !**

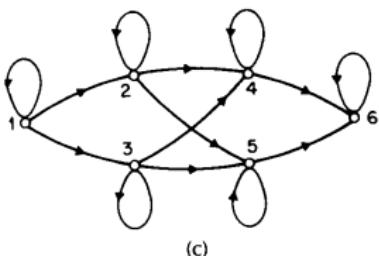
Types de MMC (et importance de l'init.)



(a)



(b)



(c)

- (a) Modèle ergodique
 (= complètement connecté)
- Modèle gauche-droite
 - exhaustif (cf TME)
 - (b) avec saut possible

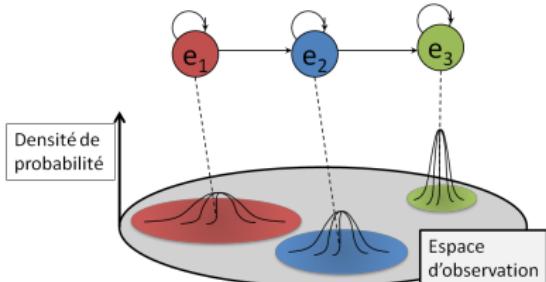
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- (c) chemins parallèles
 - Modèle cyclique
- Initialisation aléatoire + connaissance *a priori* sur le problème

Variante : MMC à observations continues

Cas le plus simple :

- 1 état $j = 1$ gaussienne $\mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j)$
- Pas de changement pour Π, A



Une observation x_t appartient à toute les gaussiennes (avec une pondération) :

$$\tilde{\mu}_j = \frac{\sum_t \gamma_t(j) \mathbf{x}_t}{\sum_t \gamma_t(j)} \quad \sigma_j^2 = \frac{\sum_t \gamma_t(j) (\mathbf{x}_t - \mu_j)^2}{\sum_t \gamma_t(j)}$$

Facilement extensible à une mixture de gaussiennes par état
(cf Rabiner)

- Distribution des observations multi-variée = plusieurs observations à chaque pas de temps.

$$x_1^T \Rightarrow \mathbf{x}_1^T, \quad \mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^d$$

⇒ Il suffit de prendre une distribution multi-variée pour les émissions (eg : une gaussienne à D dimensions)

- Ca ne change rien au reste de la résolution

Exemple : étiquetage morpho-syntaxique par des modèles markoviens

- Etape de traitement intermédiaire pour des applications en **langage naturel** et en **recherche d'information**.
- But :
 - Associer à chaque terme d'une phrase une **étiquette morpho-syntaxique**
 - **Exemple** : *article, préposition, adjetif, nom commun singulier, nom propre, nom commun pluriel, pronom personnel, adverbe, verbe infinitif, verbe au présent ou au passé, etc.* (entre 30 et 150 étiquettes)
 - L'étiquetage doit déterminer les catégories syntaxiques des mots dans la phrase et doit en ce sens résoudre des problèmes d'ambiguïté.
 - **Performances** : autour de 95 % en anglais

Exemple : étiquetage morpho-syntaxique par des modèles markoviens

Stanford Parser

Please enter a sentence to be parsed:

My dog also likes eating sausage.

Language: English

Sample Sentence

Parse

Your query

My dog also likes eating sausage.

Tagging

My/PRP\$ dog/NN also/RB likes/VBZ eating/VBG sausage/NN ./

Démo online : <http://nlp.stanford.edu:8080/parser/>

Historique : étiquetage morpho-syntaxique

- Information syntagmatique : utiliser les séquences d'étiquettes non ambiguës pour désambiguer : 1ers étiqueteurs (1971) 77% étiquettes correctes

Exemple wikipedia :

"Papa aime Maman" et "Le boulanger fait son pain" ont le même axe syntagmatique. "Papa" et "le boulanger" sont des paradigmes du sujet, "aime" et "fait" sont des paradigmes du verbe, "Maman" et "son pain" sont des paradigmes du complément.

- Information lexicale statistique : attribuer à un mot son étiquette la plus fréquente (1987) : 90 %
- Premiers étiqueteurs performants sont basés sur des modèles markoviens (1990)
- Actuellement bon étiqueteurs statistiques ou/et à base de règles : utiliser à la fois l'information lexicale et l'information sur les séquences d'étiquettes.

w_i	i ème mot de la séquence
t_i	étiquette associée à w_i
$t(i)$	i ème étiquette parmi l'ensemble d'étiquettes
$w(i)$	i ème mot du corpus
$C(w(i))$	# occurrences de $w(i)$ dans le corpus
$C(t(i))$	# occurrences de $t(i)$ dans le corpus
$C(t(i), t(k))$	# occurrences du couple $t(i) - t(k)$ dans le corpus
$C(w(i), t(k))$	# occurrences de $w(i)$ étiquetées $t(k)$ dans le corpus
w_i^j, t_i^j	séquences de mots (étiquettes) $w_i \dots w_j (t_i \dots t_j)$

- On retrouve les notations markoviennes classiques.
- Subtilité : projection dans la séquence d'une part et sur un dictionnaire d'autre part.
- Questions :
 - Quels sont les états, les observations ?
 - Quelle hypothèse faire sur l'automate ?

- On peut partir d'un modèle ergodique (complètement connecté)
- Modèle MMC (d'ordre 1)
 - Etats : étiquettes

$$p(t_{i+1}|t_1^i) = p(t_{i+1}|t_i), \quad p(t_i|t_j) = \frac{C(t_i, t_j)}{C(t_j)}$$

- Observation : mots (par rapport aux états=étiquettes)

$$p(w(i)|t(j)) = \frac{C(w(i), t(j))}{C(t(j))}$$

- Etiquetage optimal (= étiquettes les plus vraisemblables)

$$\begin{aligned} \arg \max_{t_1^n} p(t_1^n | w_1^n) &= \arg \max_{t_1^n} p(w_1^n | t_1^n) p(t_1^n) \\ &= \arg \max_{t_1^n} \prod_{i=1}^n p(w_i | t_i) p(t_i | t_{i-1}) \end{aligned}$$

Différences avec les MMC classiques

- Différences :

- ici, on utilisera des corpus étiquetés au niveau mot
- ce sont donc des modèles de markov « visibles »
- on peut également mixer des données non étiquetées et des données étiquetées : apprentissage semi-supervisé

- Algorithme d'apprentissage

- pour tous les tags $t(i), t(j)$, pour tous les mots $w(i)$:

$$p(t_i|t_j) = \frac{C(t_i, t_j)}{C(t_j)}, \quad p(w(i)|t(j)) = \frac{C(w(i), t(j))}{C(t(j))}$$

- Intérêt principal : le décodage

- Utilisation de Viterbi, estimation des :

$$\delta_i(j) = \max_{t_1^{i-1}} p(t_1^{i-1}, t_i = j, w_1^i | \lambda), \quad \text{Init : } \delta_i(.) = 1, \delta_i(x \neq .) = 0$$

Quelle est la probabilité de l'étiquette j et de l'ensemble du passé (mots + étiquetage)

Reconnaissance de paroles / écrits

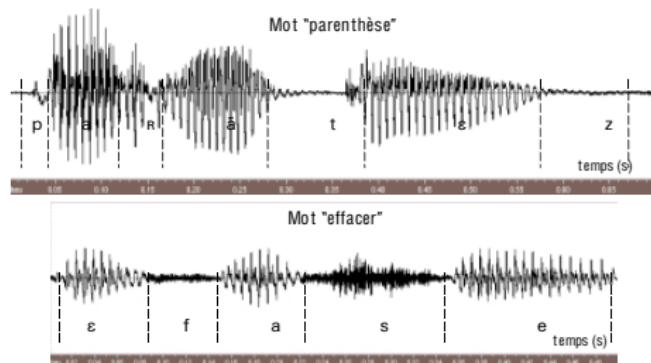
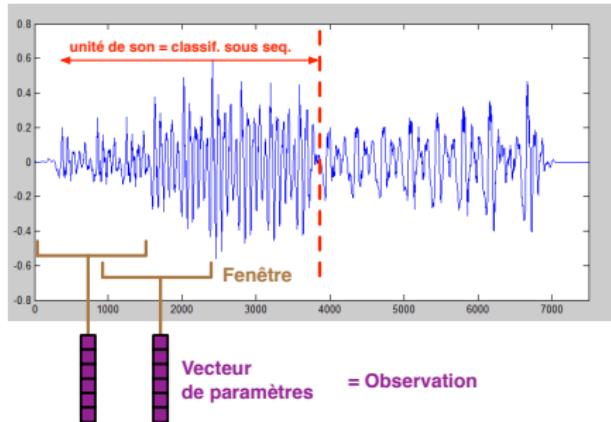


Fig. 1.2 Audiogramme de signaux de parole.

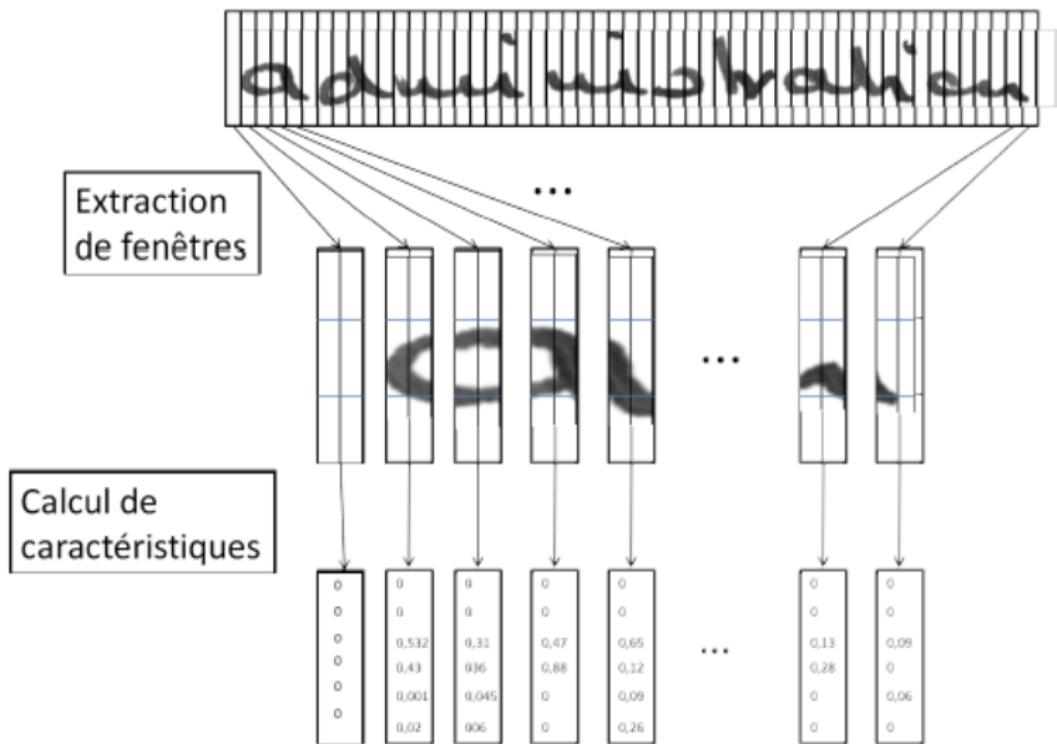
Crédit : Thierry Dutoit (Univ. Mons)

Pré-traitements et mise en forme

- Caractéristiques fréquentielles
- Puissance
- ...

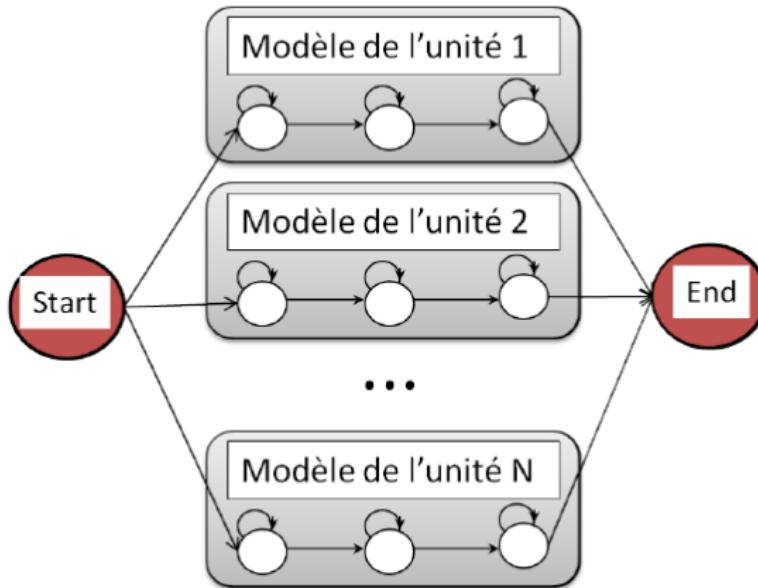


Reconnaissance de paroles / écrits

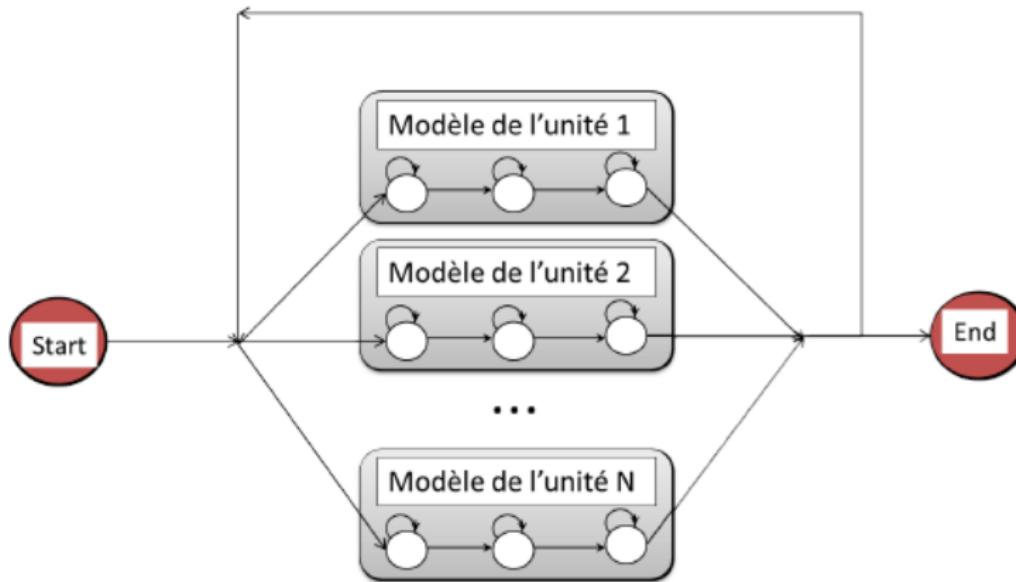


Architecture

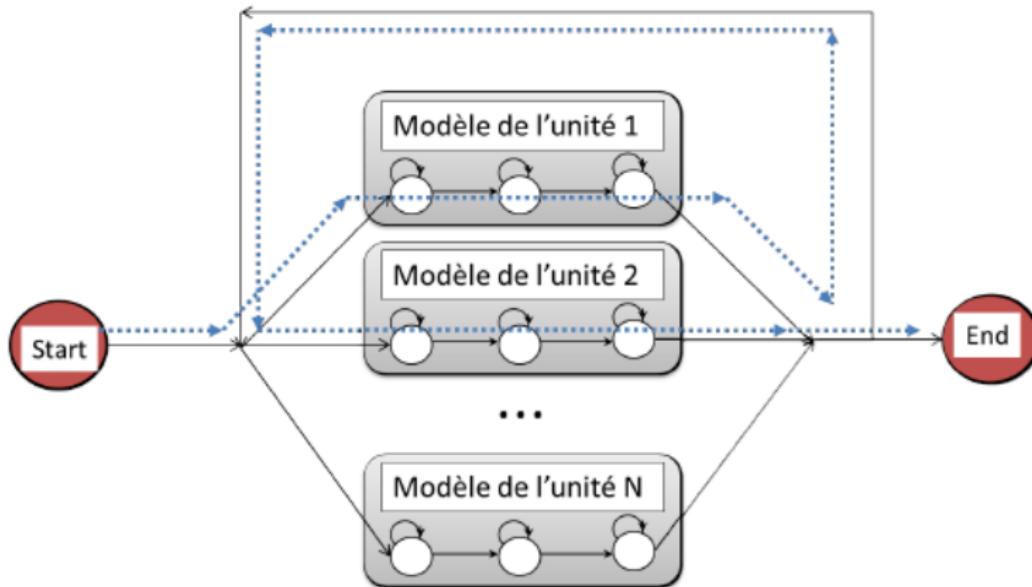
- 1 modèle par unité de son (e.g. dictionnaire phonétique)



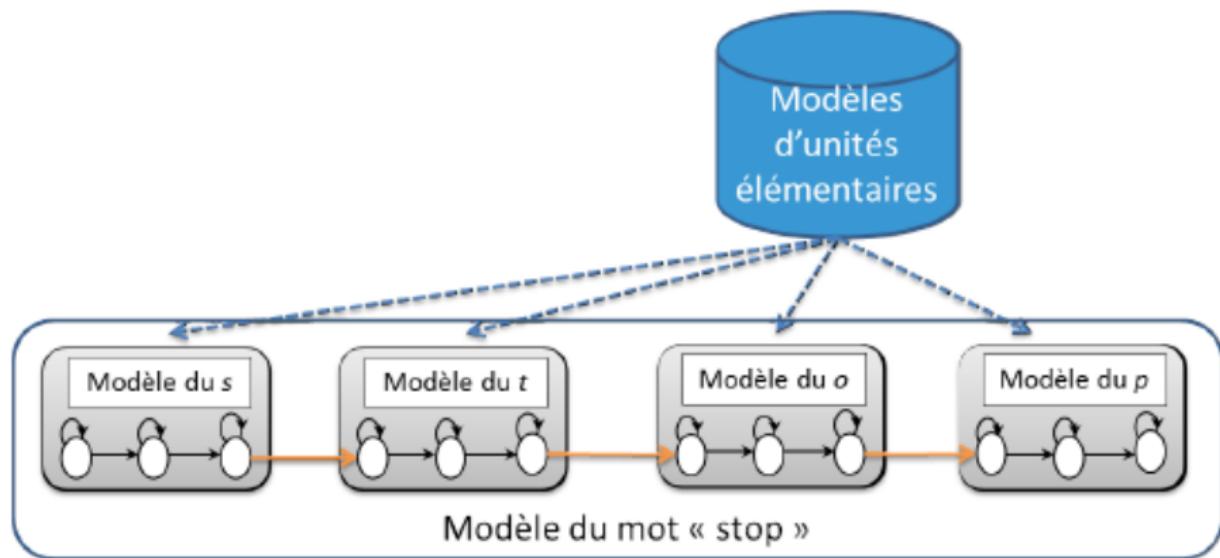
- ... Et re-bouclage après détection



- ... Modèle cyclique

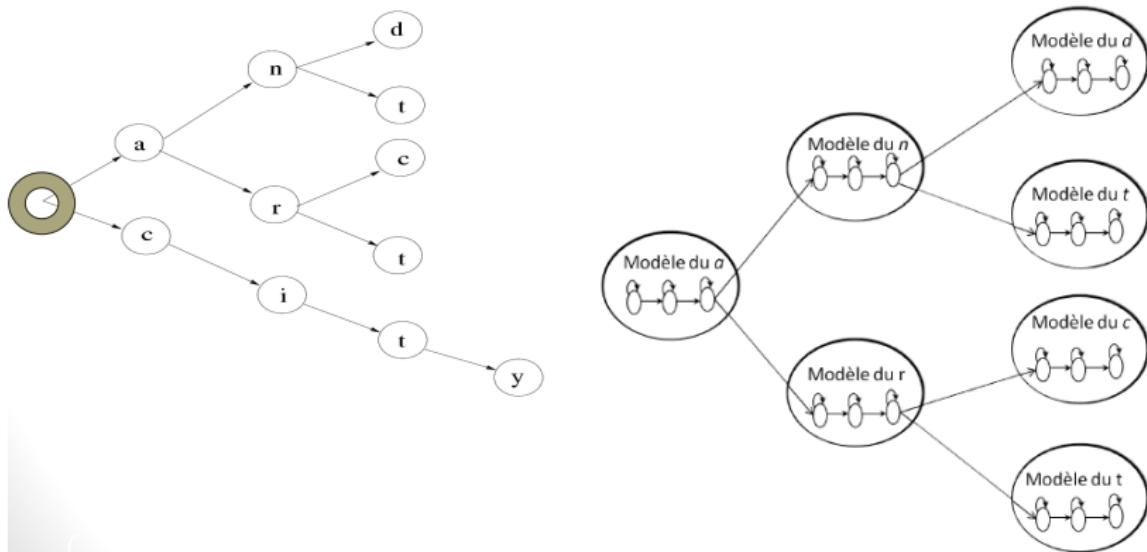


- Apprentissage classique :



Post-processing (affinage)

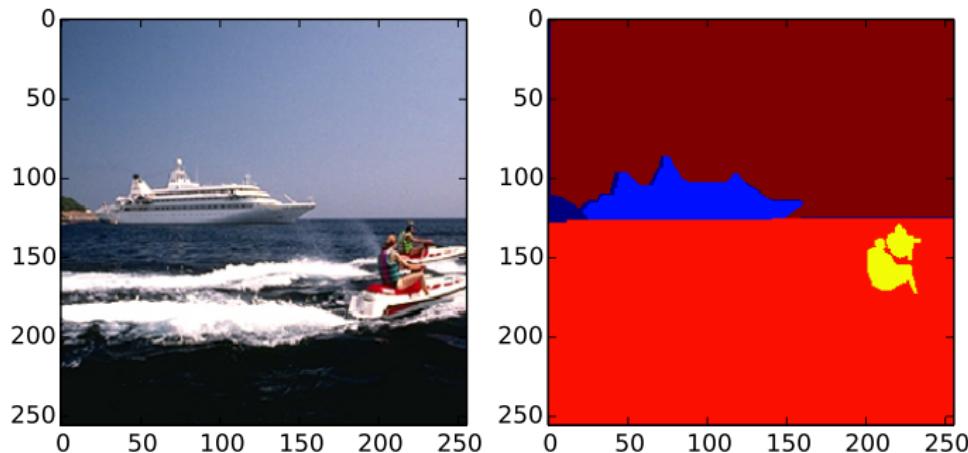
- Soft
 - Stats d'enchainements de caractères (bi-trigrams)
- Hard
 - Utilisation d'une structure d'arbre préfixé
 - + Stratégie d'élagage Beam-search (autour du meilleur)
 - la valeur du beam (nb de faisceaux),
 - le nombre maximal d'hypothèses actives



Segmentation d'images

- Bases étiquetées : exemple Sift flow

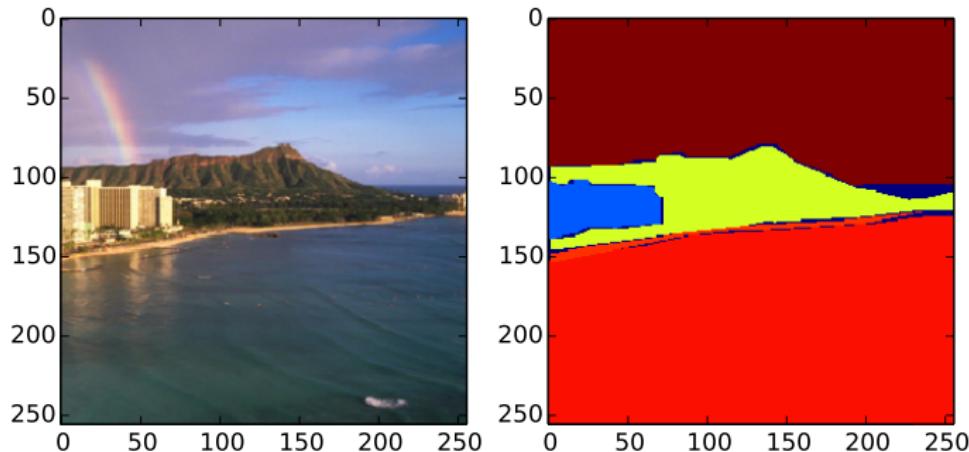
<http://www.cs.unc.edu/~jtighe/Papers/ECCV10/>



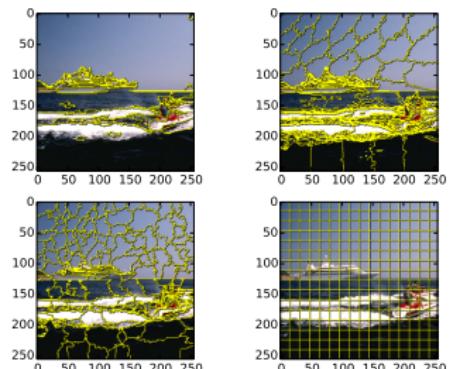
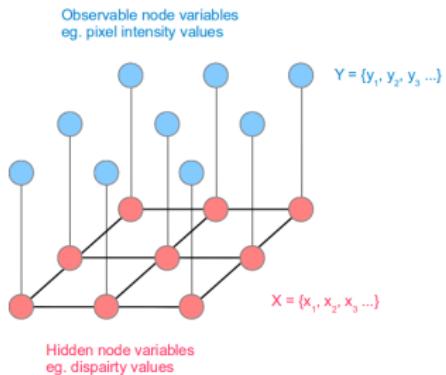
Segmentation d'images

- Bases étiquetées : exemple Sift flow

<http://www.cs.unc.edu/~jtighe/Papers/ECCV10/>

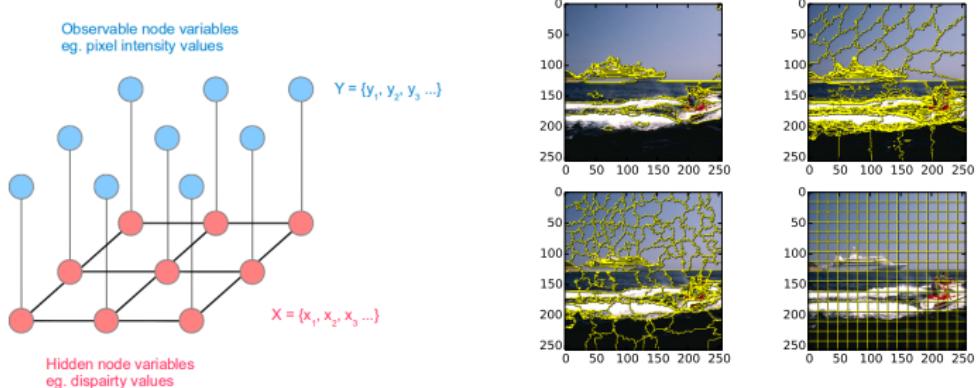


Réseau de Markov (chaine 2D)



Est-il possible de définir un modèle de markov 2D ?

Réseau de Markov (chaine 2D)



Est-il possible de définir un modèle de markov 2D ?

- Problèmes classiques intractables (même avec e.g. Markov d'ordre 1)
 - Calcul de la vraisemblance des états pour l'ensemble des pixels
 - Calcul de la séquence d'état décodante optimale
- Pourquoi ? Structure du graphe générale (\neq chaîne, arbre)
⇒ coincé pour la programmation dynamique (Viterbi) !

Proposition 1 : vraisemblances approximées

- Utilisation de l'échantillonnage de Gibbs (cas particulier de MCMC, cf semaine prochaine)

1. Initialise $x_{0,1:n}$.
2. For $i = 0$ to $N - 1$
 - Sample $x_1^{(i+1)} \sim p(x_1|x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$.
 - Sample $x_2^{(i+1)} \sim p(x_2|x_1^{(i+1)}, x_3^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$.
 - ⋮
 - Sample $x_j^{(i+1)} \sim p(x_j|x_1^{(i+1)}, \dots, x_{j-1}^{(i+1)}, x_{j+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$.
 - ⋮
 - Sample $x_n^{(i+1)} \sim p(x_n|x_1^{(i+1)}, x_2^{(i+1)}, \dots, x_{n-1}^{(i+1)})$.

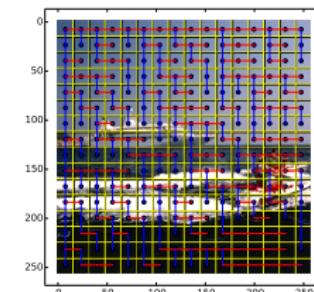
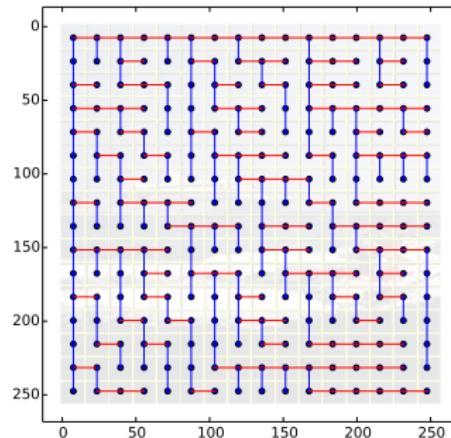
- Générer des points selon une distribution jointe complexe

- Génération d'une population
- Statistique sur les états (avec une hypothèse d'indépendance pour relâcher les contraintes)

An Introduction to MCMC for Machine Learning
Andrieu, De Freitas, Doucet, Jordan

Proposition 2 : simplifier la structure

- Définir un arbre aléatoire dans l'image



Variante discriminative : Conditional Random Fields

- Séquence/champs de mots/pixels $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_T\}$
- Séquence/champ d'étiquettes \mathbf{s}

Introduction de fonctions de scoring basées sur des descripteurs structurés :

$$score(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \sum_{j \in \mathcal{C}} \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1})$$

Si on préfère des probabilités (comme pour la régression logistique) :

$$p(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{1}{Z} \exp(score(\mathbf{s}, \mathbf{x})) \text{ et } p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{\exp(score(\mathbf{s}, \mathbf{x}))}{\sum_{\mathbf{s}'} \exp(score(\mathbf{s}', \mathbf{x}))}$$

Mc callum <http://people.cs.umass.edu/~mccallum/papers/crf-tutorial.pdf>
<http://pages.cs.wisc.edu/~jerryzhu/cs838/CRF.pdf>

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp \left\{ \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1}) \right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n | \mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp \left\{ \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1}) \right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n | \mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?

Montée de gradient $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j}$

$$\lambda_j \leftarrow \lambda_j + \sum_{n,t} f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_{n,t} \sum_{s'_t, s'_{t-1}} f_j(\mathbf{x}^n, t, s'_t, s'_{t-1}) p(s'_t, s'_{t-1} | \mathbf{x}^n)$$

Critère à optimiser : vraisemblance conditionnelle (cf regression logistique)

$$p(\mathbf{s}|\mathbf{x}) = \frac{1}{Z(\mathbf{x})} \exp \left\{ \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}, t, s_t, s_{t-1}) \right\}$$

$$\mathcal{L}_{cond} = \sum_n \log p(\mathbf{s}^n | \mathbf{x}^n) = \sum_n \sum_j \sum_{t=1}^T \lambda_j f_j(\mathbf{x}^n, t, s_t^n, s_{t-1}^n) - \sum_n \log(Z(\mathbf{x}_n))$$

Comment optimiser ?

- La difficulté réside essentiellement dans le facteur de normalisation
- Même difficulté qu'avec les MMC

Procédure(s) d'évaluation

Nicolas Thome
nicolas.thome@isir.upmc.fr

LIP6 / ISIR – Sorbonne Université, France

Impossible d'évaluer les modèles sur les données qui ont servi à l'apprentissage !!!

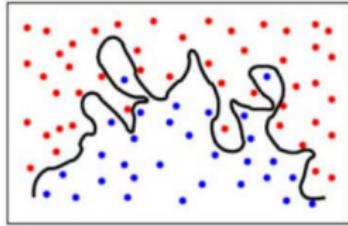
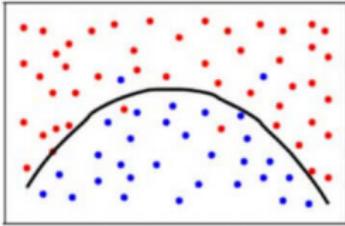
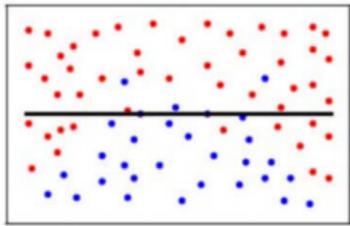
⇒ Biais dans l'évaluation

- Pourtant : l'évaluation est aussi importante que le modèle lui-même
- ⇒ il faut faire les deux, c'est à dire diviser les données
 - beaucoup de données en apprentissage... Evaluation pauvre !
 - beaucoup de données en test... Modèle pauvre !

Underfitting



Overfitting



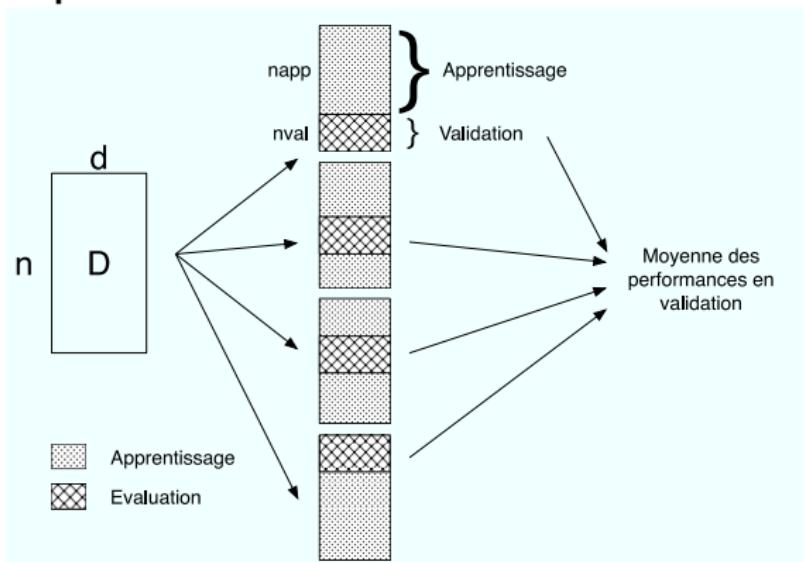
Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :
 - **Beaucoup de données** (ou peu de temps) : Apprentissage/test

Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :

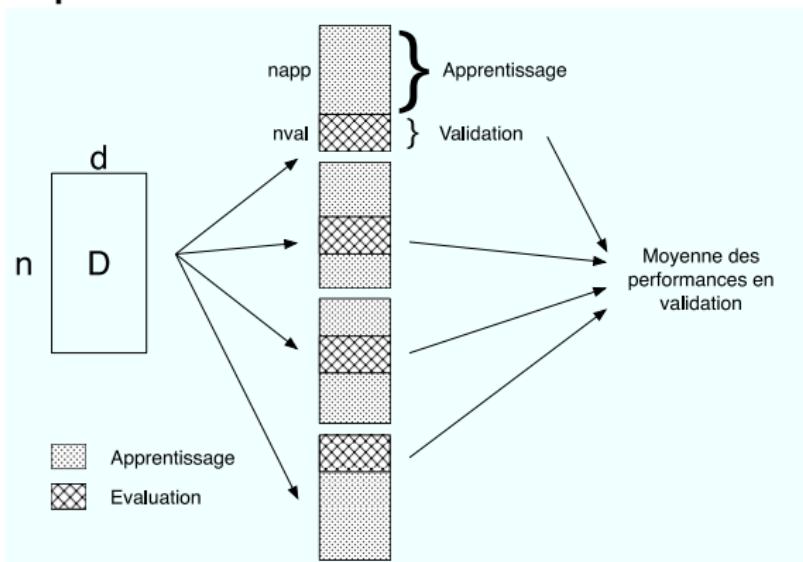
- Beaucoup de données (ou peu de temps) : Apprentissage/test
- Le plus souvent Validation croisée



Comment évaluer les performances efficacement ?

- 3 Procédures :

- Beaucoup de données (ou peu de temps) : Apprentissage/test
- Le plus souvent Validation croisée



- Peu de données Leave-one-out

Définition

Le sur-apprentissage consiste à extraire des règles qui sont efficaces en apprentissage mais pas en test...

⇒ *apprentissage par cœur*

Ex :

- Transitions erronées (transitions étranges, erreurs de mesure...)
 - **Bonne règle** en apprentissage (cette transition n'existe nulle part ailleurs)
 - **Mauvaise règle** en test
 - Proposition : dans le codage des N-grams, on ne prend pas en compte les mots qui apparaissent très peu et on élimine les transitions associées.

Beaucoup de paramètres appris pour peu d'exemples en apprentissage...

⇒ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiables

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\dots, q_1, q_1, \dots\}$?

Beaucoup de paramètres appris pour peu d'exemples en apprentissage...

⇒ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiables

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\dots, q_1, q_1, \dots\}$?
- ⇒ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ?

Beaucoup de paramètres appris pour peu d'exemples en apprentissage...

⇒ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiables

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\dots, q_1, q_1, \dots\}$?
- ⇒ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ? ⇒ **Ca dépend !**
- Possibilité :

Beaucoup de paramètres appris pour peu d'exemples en apprentissage...

⇒ Les *règles* apprises ne sont pas complètement fiables

Ex :

- La matrice de transition contient : $a_{11} = 0$
- Quelle est la vraisemblance de $S = \{\dots, q_1, q_1, \dots\}$?
- ⇒ 0 même si le reste de la séquence ressemble...
- Est-ce le comportement attendu ? ⇒ **Ca dépend !**
- Possibilité : ajouter 1 dans la phase de comptage sur toutes les cases de A pour que toutes les transitions soient possibles

Sous-apprentissage

Définition

Le sous-apprentissage consiste à extraire des règles qui ne sont efficaces ni d'apprentissage... ni en test...

⇒ apprentissage *insufisant* et/ou *inadapté*

Peu de paramètres à apprendre dans le modèle pour **beaucoup d'exemples complexes** en apprentissage...

⇒ Le *modèle* n'est pas suffisamment expressif, ou alors pas adapté à la tâche

NB : conclusion inverse du transparent précédent... Il reste de la place pour les experts