Examen 2ème session du 18/06/2021

Durée 1h30

Téléphones et ordinateurs interdits. Le seul document autorisé est le formulaire des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle. Inscrire votre numéro d'anonymat sur votre copie.

Exercice 1 (0,75+0,75+0,75+0,75=3 points)
Existe-t-il une substitution :

$$\begin{array}{cc} \textit{symbole de variable à compléter} & \textit{terme à compléter} \\ \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$\left[\boxed{?} \;:=\; \boxed{?}\right]$$

telle que :

1. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,y,z)$
2. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,f(z),z)$
3. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall x\, p(x,f(x),z)$
4. $\forall x\, p(x,y,z) \left[\boxed{?} := \boxed{?}\right] = \forall w\, p(w,f(x),z)$

Si cette substitution existe, compléter le symbole de variable et le terme, sinon expliquer brièvement pourquoi cette substitution n'existe pas.

Exercice 2 (2+(2+1)=5 points)
Soit A une formule atomique, $F \in \mathbb{F}_0(\mathcal{F},\mathcal{P})$ une formule construite à partir de A, et $\mathbf{M}$ une structure (les deux questions sont indépendantes).

1. L'expression booléenne $[F]^{\mathbf{M}}$ obtenue à partir de F **sans effectuer de simplification** est :
$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{\mathbf{I_M}(A) + \overline{\mathbf{I_M}(A)}} + \left(\mathbf{I_M}(A) \cdot \overline{\mathbf{I_M}(A)}\right)$$
Déterminer une formule F possible.
2. En utilisant un raisonnement équationnel, montrer que $[F]^{\mathbf{M}} = 0$ (indiquer à chaque étape le nom de l'équivalence utilisée). Que pouvez-vous en déduire sur la formule F ?

Exercice 3 (6+6=12 points)
En utilisant les règles de la déduction naturelle et les règles dérivées du formulaire prouver les deux formules suivantes :

$$F_1 = \neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B) \qquad F_2 = (\neg \forall x\, p(x)) \Rightarrow (\exists x\, \neg p(x))$$

Indication : pour prouver la formule F_1 il pourra être judicieux d'utiliser un raisonnement par Tiers Exclu sur la formule $\neg A \wedge B$ (d'autres façons de procéder sont bien sûr possibles).

Exercice 4 (0,5+(0,5+0,5+2)+(0,5+4)=8 points)
Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$ et $\mathcal{F}_1 = \{f_a, f_b\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1$ donné.

2. Soit la structure $\mathbf{M}_1$ dont le domaine $|\mathbf{M}_1| = \{A, B\}^\star$ est l'ensemble des mots de longueur finie constitués des lettres A et B, et définie par :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = A & f_a^{\mathbf{M}_1} : \{A,B\}^\star \to \{A,B\}^\star & f_b^{\mathbf{M}_1} : \{A,B\}^\star \to \{A,B\}^\star \\ b^{\mathbf{M}_1} = B & f_a^{\mathbf{M}_1}(w) = Aw & f_b^{\mathbf{M}_1}(w) = Bw \end{array}$$

   où Aw (resp. Bw) est le mot obtenu en ajoutant la lettre A (resp. la lettre B) au début du mot w.

   (a) Calculer $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_1}$.

   (b) Pour quel terme t a-t-on $[t]^{\mathbf{M}_1} = ABBA$?

   (c) Etant donné un mot $w \in \{A, B\}^\star$, on note $nb_A(w)$ (resp. $nb_B(w)$) le nombre d'occurrences de A (resp. de B) dans le mot w.

      i. Exprimer $nb_A(Aw)$ en fonction de $nb_A(w)$. En déduire une expression de $nb_A([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_A([t]^{\mathbf{M}_1})$.

      ii. Exprimer $nb_B(Aw)$ en fonction de $nb_B(w)$. En déduire une expression de $nb_B([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

      iii. Exprimer $nb_A(Bw)$ en fonction de $nb_A(w)$. En déduire une expression de $nb_A([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_A([t]^{\mathbf{M}_1})$.

      iv. Exprimer $nb_B(Bw)$ en fonction de $nb_B(w)$. En déduire une expression de $nb_B([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1})$ en fonction de $nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

3. Soit la structure $\mathbf{M}_2$ dont le domaine $|\mathbf{M}_2| = \mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, et définie par :

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_2} = 1 & f_a^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f_b^{\mathbf{M}_2} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ b^{\mathbf{M}_2} = -1 & f_a^{\mathbf{M}_2}(k) = k+1 & f_b^{\mathbf{M}_2}(k) = k-1 \end{array}$$

   (a) Calculer $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_2}$.

   (b) Montrer (par induction sur t) que $[t]^{\mathbf{M}_2} = nb_A([t]^{\mathbf{M}_1}) - nb_B([t]^{\mathbf{M}_1})$.

Exercice 5 (4+2=6 points)

On considère les deux formules $F_1 = \forall x\, \exists y\, p(x, y)$ et $F_2 = \forall x\, p(x, f(x))$.

1. La formule $F_1 \Rightarrow F_2$ est-elle valide ? si cette formule est valide, en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle, sinon construire une structure $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide.
2. La formule $F_2 \Rightarrow F_1$ est-elle valide ? si cette formule est valide, en fournir une preuve en utilisant les règles de la déduction naturelle, sinon construire une structure $\mathbf{M}$ que vous utiliserez pour démontrer que la formule n'est pas valide.

Corrigé de l'examen 2ème session du 18/06/2021

▶ Corrigé de l'exercice 1.

1. $\forall x\, p(x, y, z)\,[x := f(z)] = \forall x\, p(x, y, z)$
Puisque x n'admet pas d'occurrence libre dans la formule $\forall x\, p(x, y, z)$, on peut appliquer une substitution de x par n'importe quel terme, $f(z)$ par exemple, sans changer la formule.

2. $\forall x\, p(x, y, z)\,[y := f(z)] = \forall x\, p(x, f(z), z)$

3. $\forall x\, p(x, y, z)\,[\square := \square] = \forall x\, p(x, f(x), z)$
Aucune substitution ne peut permettre de transformer la formule $\forall x\, p(x, y, z)$ pour obtenir la formule $\forall x\, p(x, f(x), z)$ car cela reviendrait à substituer la variable libre y par le terme $f(x)$ mais l'occurrence de x est liée par le quantificateur $\forall$.

4. $\forall x\, p(x, y, z)\,[y := f(x)] = \forall w\, p(w, f(x), z)$
L'occurrence de x qui est liée par le quantificateur $\forall$ est renommée en w car x apparaît dans le terme $f(x)$, puis la substitution est appliquée.

▶ Corrigé de l'exercice 2.

1. La formule F peut être $(A \vee \neg A) \Rightarrow (A \wedge \neg A)$ ou $\neg(A \vee \neg A) \vee (A \wedge \neg A)$.
2. En posant $x = \mathbf{I_M}(A)$ il vient :

$$[F]^{\mathbf{M}} = \overline{x + \overline{x}} + (x \cdot \overline{x}) \overset{E1.4}{\equiv} \overline{1} + (x \cdot \overline{x}) \overset{E1.3}{\equiv} \overline{1} + 0 \overset{E1.1}{\equiv} \overline{\overline{0}} + 0 \overset{E1.2}{\equiv} 0 + 0 \overset{E3.2}{\equiv} 0$$

La formule F est donc une formule insatisfiable.

▶ Corrigé de l'exercice 3.

> $\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B)$
>> $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg A \wedge B$, montrons $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B)$
>>> $\langle 3 \rangle$ montrons $\neg(A \vee \neg B)$
>>>> $\langle 4 \rangle$ supposons $h'_1 : A \vee \neg B$, montrons false
>>>>> $\langle 5 \rangle$ supposons $h'_2 : A$, montrons false
>>>>>> $\langle 6 \rangle$ montrons $\neg A$
>>>>>> $\langle 6 \rangle$ CQFD ($D^g_\wedge$ avec h_1)
>>>>>>
>>>>>> $\langle 7 \rangle$ montrons A
>>>>>> $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h'_2)
>>>>>
>>>>> $\langle 5 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
>>>>
>>>>> $\langle 6 \rangle$ supposons $h'_3 : \neg B$, montrons false
>>>>>> $\langle 7 \rangle$ montrons $\neg B$
>>>>>> $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h'_3)
>>>>>>
>>>>>> $\langle 8 \rangle$ montrons B
>>>>>> $\langle 8 \rangle$ CQFD ($D^d_\wedge$ avec h_1)
>>>>>
>>>>> $\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
>>>>
>>>> $\langle 4 \rangle$ CQFD ($D_\vee$ avec h'_1)
>>>
>>> $\langle 3 \rangle$ CQFD ($I_\neg$)
>>
>> $\langle 2 \rangle$ CQFD ($I^g_\vee$)
>
>> $\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \neg(\neg A \wedge B)$, montrons $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(\neg A \wedge B)$
>>> $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg(\neg A \wedge B)$
>>> $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
>>
>> $\langle 3 \rangle$ CQFD ($I^d_\vee$)
>
> $\langle 1 \rangle$ CQFD (D_{TE})

> $\langle 1 \rangle$ montrons $(\neg\forall x\, p(x)) \Rightarrow (\exists x\, \neg p(x))$
>
> > $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg\forall x\, p(x)$, montrons $\exists x\, \neg p(x)$
> >
> > > $\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \neg\exists x\, \neg p(x)$, montrons false
> > >
> > > > $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg\forall x\, p(x)$
> > > > $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
> > >
> > > > $\langle 5 \rangle$ montrons $\forall x\, p(x)$
> > > >
> > > > > $\langle 6 \rangle$ soit une nouvelle variable y, montrons $p(y)$
> > > > >
> > > > > > $\langle 7 \rangle$ supposons $h_3 : \neg p(y)$, montrons false
> > > > > >
> > > > > > > $\langle 8 \rangle$ montrons $\neg\exists x\, \neg p(x)$
> > > > > > > $\langle 8 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2)
> > > > > >
> > > > > > > $\langle 9 \rangle$ montrons $\exists x\, \neg p(x)$
> > > > > > >
> > > > > > > > $\langle 10 \rangle$ montrons $\neg p(y)$
> > > > > > > > $\langle 10 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
> > > > > > >
> > > > > > > $\langle 9 \rangle$ CQFD ($I_\exists$)
> > > > > >
> > > > > > $\langle 7 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
> > > > >
> > > > > $\langle 6 \rangle$ CQFD (Abs)
> > > >
> > > > $\langle 5 \rangle$ CQFD ($I_\forall$)
> > >
> > > $\langle 3 \rangle$ CQFD ($E_\neg$)
> >
> > $\langle 2 \rangle$ CQFD (Abs)
>
> $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_\Rightarrow$)

▶ Corrigé de l'exercice 4.

1. Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:
$a \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, $b \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$
Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f_a(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ et $f_b(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

2.a. $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_1} = f_a^{\mathbf{M}_1}([f_b(b)]^{\mathbf{M}_1}) = f_a^{\mathbf{M}_1}(f_b^{\mathbf{M}_1}([b]^{\mathbf{M}_1})) = f_a^{\mathbf{M}_1}(f_b^{\mathbf{M}_1}(b^{\mathbf{M}_1})) = f_a^{\mathbf{M}_1}(f_b^{\mathbf{M}_1}(B)) = f_a^{\mathbf{M}_1}(BB) = ABB$

2.b. Le terme t tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = ABBA$ est le terme $t = f_a(f_b(f_b(a)))$.

2.c.

$$\begin{array}{ll}
nb_A(Aw) = nb_A(w) + 1 & nb_A([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1}) = nb_A([t]^{\mathbf{M}_1}) + 1 \\
nb_B(Aw) = nb_B(w) & nb_B([f_a(t)]^{\mathbf{M}_1}) = nb_B([t]^{\mathbf{M}_1}) \\
nb_A(Bw) = nb_A(w) & nb_A([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1}) = nb_A([t]^{\mathbf{M}_1}) \\
nb_B(Bw) = nb_B(w) + 1 & nb_B([f_b(t)]^{\mathbf{M}_1}) = nb_B([t]^{\mathbf{M}_1}) + 1
\end{array}$$

3.a. $[f_a(f_b(b))]^{\mathbf{M}_2} = f_a^{\mathbf{M}_2}(f_b^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2})) = f_a^{\mathbf{M}_2}(f_b^{\mathbf{M}_2}(-1)) = f_a^{\mathbf{M}_2}(-1-1) = -1-1+1 = -1$

3.b. Raisonnement par induction sur t.
Si $t = a$ alors $[a]^{\mathbf{M}_1} = A$ et $[a]^{\mathbf{M}_2} = 1 = 1 - 0 = nb_A(A) - nb_B(A)$.
Si $t = b$ alors $[b]^{\mathbf{M}_1} = B$ et $[b]^{\mathbf{M}_2} = -1 = 0 - 1 = nb_A(B) - nb_B(B)$.
Si $t = f_a(t')$, alors $[f_a(t')]^{\mathbf{M}_1} = f_a^{\mathbf{M}_1}([t']^{\mathbf{M}_1}) = A[t']^{\mathbf{M}_1}$ et on obtient :

$$\begin{array}{ll}
[f_a(t')]^{\mathbf{M}_2} & = f_a^{\mathbf{M}_2}([t']^{\mathbf{M}_2}) = [t']^{\mathbf{M}_2} + 1 \\
& = nb_A([t']^{\mathbf{M}_1}) - nb_B([t']^{\mathbf{M}_1}) + 1 \qquad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
& = nb_A([t']^{\mathbf{M}_1}) + 1 - nb_B([t']^{\mathbf{M}_1}) = nb_A(A[t']^{\mathbf{M}_1}) - nb_B(A[t']^{\mathbf{M}_1}) \\
& = nb_A([f_a(t')]^{\mathbf{M}_1}) - nb_B(f_a([t']^{\mathbf{M}_1}))
\end{array}$$

Si $t = f_b(t')$, alors $[f_b(t')]^{\mathbf{M}_1} = f_b^{\mathbf{M}_1}([t']^{\mathbf{M}_1}) = B[t']^{\mathbf{M}_1}$ et on obtient :

$$\begin{array}{ll}
[f_b(t')]^{\mathbf{M}_2} & = f_b^{\mathbf{M}_2}([t']^{\mathbf{M}_2}) = [t']^{\mathbf{M}_2} - 1 \\
& = nb_A([t']^{\mathbf{M}_1}) - nb_B([t']^{\mathbf{M}_1}) - 1 \qquad \text{(par hypothèse d'induction)} \\
& = nb_A(B[t']^{\mathbf{M}_1}) - (nb_B([t']^{\mathbf{M}_1}) + 1) = nb_A(B[t']^{\mathbf{M}_1}) - nb_B(B[t']^{\mathbf{M}_1}) \\
& = nb_A([f_b(t')]^{\mathbf{M}_1}) - nb_B(f_b([t']^{\mathbf{M}_1}))
\end{array}$$

► Corrigé de l'exercice 5.

1. $F_1 \Rightarrow F_2$ n'est pas une formule valide. En effet, soit $\mathbf{M}$ la structure de domaine $|\mathbf{M}| = \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{array}{ll} f^{\mathbf{M}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & p^{\mathbf{M}} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ f^{\mathbf{M}}(n) = n+1 & p^{\mathbf{M}} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

On a alors $[F_1 \Rightarrow F_2]_v^{\mathbf{M}} = \overline{[F_1]_v^{\mathbf{M}}} + [F_2]_v^{\mathbf{M}} = \overline{1} + 0 = 0$ puisque :

$$\begin{array}{ll} & [F_1]_v^{\mathbf{M}} = [\forall x\, \exists y\, p(x,y)]_v^{\mathbf{M}} = 1 \\ \text{car} & [\exists y\, p(x,y)]_{v[x\leftarrow m]}^{\mathbf{M}} = 1 \ \text{ pour tout élément } m \in \mathbb{N} \\ \text{car} & [p(x,y)]_{v[x\leftarrow m][y\leftarrow m+2]}^{\mathbf{M}} = 1 \ \text{ pour tout élément } m \in \mathbb{N} \\ \text{car} & ([x]_{v[x\leftarrow m][y\leftarrow m+2]}^{\mathbf{M}}, [y]_{v[x\leftarrow m][y\leftarrow m+2]}^{\mathbf{M}}) = (m, m+2) \in p^{\mathbf{M}} \ \text{ pour tout élément } m \in \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & [F_2]_v^{\mathbf{M}} = [\forall x\, p(x, f(x))]_v^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car} & [p(x, f(x))]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}} = 0 \\ \text{car} & ([x]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}}, [f(x)]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}}) = ([x]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}}, f^{\mathbf{M}}([x]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}})) = ([x]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}}, [x]_{v[x\leftarrow 0]}^{\mathbf{M}} + 1) = (0,1) \notin p^{\mathbf{M}} \end{array}$$

2. $F_2 \Rightarrow F_1$ est une formule valide.

```
⟨1⟩ montrons (∀x p(x, f(x))) ⇒ ∀x ∃y p(x, y)
    ⟨2⟩ supposons h : ∀x p(x, f(x)), montrons ∀x ∃y p(x, y)
        ⟨3⟩ soit une nouvelle variable z, montrons ∃y p(z, y)
            ⟨4⟩ montrons p(z, f(z))
            ⟨4⟩ CQFD (D∀ avec h)
        ⟨3⟩ CQFD (I∃)
    ⟨2⟩ CQFD (I∀)
⟨1⟩ CQFD (I⇒)
```