Épreuve du 12/11/2021

Durée 1h30

Tout appareil électronique interdit.
Les seuls documents autorisés sont les formulaires des équivalences sur les expressions booléennes et des règles de la Déduction Naturelle.
Inscrire votre nom et votre numéro d'étudiant sur votre copie.

Exercice 1 ((1+0,5+0,5+2)+2=6 points)

1. A partir de l'ensemble de symboles de variable $X = \{x, y, z\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a\}$ on définit les formules F_1 et $F_2 \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ suivantes $F_1 = \exists x(p(x, y) \wedge \forall x\, q(x)) \Rightarrow \exists y\, p(y, a)$ et $F_2 = \forall y(p(x, z) \vee q(y))$.

   (a) Donner les ensembles $\mathrm{Free}(F_1)$ et $\mathrm{Free}(F_2)$.

   (b) Soit la formule $F = \exists x(F_1 \vee F_2)$, donner l'ensemble $\mathrm{Free}(F)$.

   (c) Déterminer une clôture universelle de la formule F.

   (d) Renommer certains symboles de variable de F pour obtenir une formule F' logiquement équivalente à F et dans laquelle les quantificateurs portent sur des symboles de variable différents.

2. Soit $F \in \mathbb{F}(X, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ la formule représentée par :

$$\Big(\square\square\Big(\square\Big(\square,\square\Big(\square\Big)\Big) \Rightarrow \square\Big(\square\Big)\Big)\Big) \vee \Big(\square\square\square\square\Big(\square\Big(\square\Big(\square,\square\Big)\Big) \Rightarrow \square\Big(\square\Big)\Big)\Big)$$

   où chaque case peut contenir un unique symbole : soit un quantificateur, soit un symbole de l'ensemble $X = \{x, y, z\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ avec $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{f\}$ et $\mathcal{F}_2 = \{g\}$, soit un symbole de l'ensemble $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ avec $\mathcal{P}_1 = \{p\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{q\}$. On souhaite que F vérifie les contraintes suivantes :

   - x admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ dans F,
   - y admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\forall$ et une occurrence libre dans F,
   - z admet uniquement une occurrence liée par le quantificateur $\exists$ dans F.

   Compléter la formule F en respectant les contraintes.

Exercice 2 (6+6=12 points)
Avec les règles de la déduction naturelle prouver les deux formules ci-dessous (on pourra utiliser les règles dérivées du formulaire).

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)) \Rightarrow B \qquad\qquad \neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$$

Exercice 3 (4 + 3 = 7 points)

Soient F_1 et F_2 deux formules de $\mathbb{F}_0(\mathcal{F},\mathcal{P})$ ni valides ni non satisfiables telles que $F_1 \models F_2$ et $F_2 \not\models F_1$.

1. Pour chacune des conditions suivantes, dire s'il existe une structure $\mathbf{M}$ la vérifiant. Justifier vos réponses.

   (a) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

   (b) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

   (c) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

   (d) $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$

2. Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est valide, non satisfiable ou ni l'un ni l'autre. Justifier vos réponses.

   (a) $F_1 \Rightarrow F_2$

   (b) $F_1 \wedge F_2$

   (c) $F_1 \wedge \neg F_2$

Exercice 4 (1+(1+3)+(3+3)=11 points)

Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ un ensemble de symboles de fonction où $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$ et $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$.

1. Particulariser la définition de l'ensemble de termes $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$ pour l'ensemble $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
2. Soit la structure $\mathbf{M}_1$ suivante définie sur $\mathbb{N}$, $|\mathbf{M}_1| = \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} a^{\mathbf{M}_1} = 1 & g^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f^{\mathbf{M}_1} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ b^{\mathbf{M}_1} = 3 & g^{\mathbf{M}_1}(n) = 2n + 1 & f^{\mathbf{M}_1}(n_1, n_2) = n_1 * n_2 \end{array}$$

   (a) Calculer $[g(f(a, g(b)))]^{\mathbf{M}_1}$.

   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $[t]^{\mathbf{M}_1} = 2k + 1$.

3. On considère maintenant l'ensemble des symboles de prédicat $\mathcal{P} = \{\mathrm{p}\}$ contenant l'unique prédicat unaire p et la formule F=$(\mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)) \Rightarrow (\mathrm{p}(f(g(a), g(b))) \vee \mathrm{p}(g(a)))$.

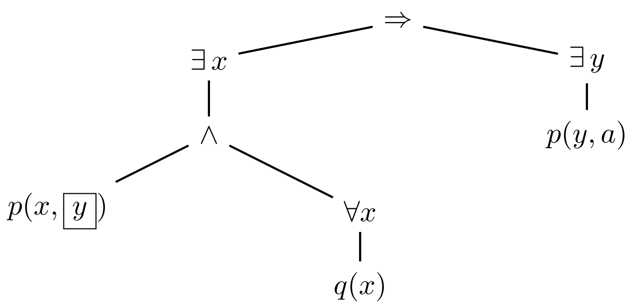
   (a) Définir une structure $\mathbf{M}_2$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_2} = 1$. (justifier)

   (b) Définir une structure $\mathbf{M}_3$ telle que $[F]^{\mathbf{M}_3} = 0$. (justifier)

Corrigé de l'épreuve du 12/11/2021

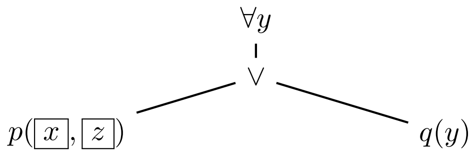
► Corrigé de l'exercice 1.

(1.a). L'arbre de syntaxe abstraite de la formule F_1 est (les occurrences libres de variable sont encadrées, les autres occurrences sont liées) :



On a donc $\mathrm{Free}(F_1) = \{y\}$.

L'arbre de syntaxe abstraite de la formule F_2 est (les occurrences libres de variable sont encadrées, les autres occurrences sont liées) :



On a donc $\mathrm{Free}(F_2) = \{x, z\}$.

(1.b). $\mathrm{Free}(F) = (\mathrm{Free}(F_1) \cup \mathrm{Free}(F_2)) \setminus \{x\} = \{y, z\}$ puisque les occurrences libres de la variable x dans F_1 et F_1 sont maintenant quantifiées existentiellement.

(1.c). Clôture universelle de F : $\forall y \forall z\, F$

(1.d). $F' = \exists x_1((\exists x_2(p(x_2, y) \wedge \forall x_3\, q(x_3)) \Rightarrow \exists y_1\, p(y_1, a)) \vee (\forall y_2(p(x_1, z) \vee q(y_2))))$

(2). $F = (\forall x(q(x, f(y)) \Rightarrow p(b))) \vee (\forall y\, \exists z(p(g(y, a)) \Rightarrow p(z)))$

▶ Corrigé de l'exercice 2.

- $\langle 1 \rangle$ montrons $((A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)) \Rightarrow B$
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : (A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)$, montrons B
    - $\langle 3 \rangle$ montrons $B \vee A$
      - $\langle 4 \rangle$ montrons $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)$
      - $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD ($\mathrm{E}^{\mathrm{d}}_{\wedge}$)
    - $\langle 4 \rangle$ supposons $h_2 : B$, montrons B
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD (Ax avec h_2))
    - $\langle 5 \rangle$ supposons $h_3 : A$, montrons B
      - $\langle 6 \rangle$ montrons $A \Rightarrow B$
        - $\langle 7 \rangle$ montrons $(A \Rightarrow B) \wedge (B \vee A)$
        - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
      - $\langle 6 \rangle$ CQFD ($\mathrm{E}^{\mathrm{g}}_{\wedge}$)
      - $\langle 7 \rangle$ montrons A
      - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
    - $\langle 5 \rangle$ CQFD ($\mathrm{E}_{\Rightarrow}$)
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD ($E_{\vee}$)
- $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

- $\langle 1 \rangle$ montrons $\neg(A \wedge \neg B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$
  - $\langle 2 \rangle$ supposons $h_1 : \neg(A \wedge \neg B)$, montrons $(\neg A \vee B)$
    - $\langle 3 \rangle$ supposons $h_2 : \neg A$, montrons $(\neg A \vee B)$
      - $\langle 4 \rangle$ montrons $\neg A$
      - $\langle 4 \rangle$ CQFD Ax avec h_2)
    - $\langle 3 \rangle$ CQFD ($I^g_{\vee}$)
    - $\langle 4 \rangle$ supposons $h_3 : A$, montrons $(\neg A \vee B)$
      - $\langle 5 \rangle$ montrons B
        - $\langle 6 \rangle$ supposons $h_4 : \neg B$, montrons $false$
          - $\langle 7 \rangle$ montrons $\neg(A \wedge \neg B)$
          - $\langle 7 \rangle$ CQFD (Ax avec h_1)
          - $\langle 8 \rangle$ montrons $A \wedge \neg B$
            - $\langle 9 \rangle$ montrons A
            - $\langle 9 \rangle$ CQFD (Ax avec h_3)
            - $\langle 10 \rangle$ montrons $\neg B$
            - $\langle 10 \rangle$ CQFD (Ax avec h_4)
          - $\langle 8 \rangle$ CQFD (Ax avec $I_{\wedge}$)
        - $\langle 6 \rangle$ CQFD ($E_{\neg}$)
      - $\langle 5 \rangle$ CQFD (Abs)
    - $\langle 4 \rangle$ CQFD ($I^d_{\vee}$)
  - $\langle 2 \rangle$ CQFD (D_{TE})
- $\langle 1 \rangle$ CQFD ($I_{\Rightarrow}$)

▶ Corrigé de l'exercice 3.

F_1 ni valide ni non satisfiable donc il existe deux structures $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$ telles que $[F_1]^{\mathbf{M}_1} = 1$ et $[F_1]^{\mathbf{M}_2} = 0$.
F_2 ni valide ni non satisfiable donc il existe deux structures $\mathbf{M}_3$ et $\mathbf{M}_4$ telles que $[F_2]^{\mathbf{M}_3} = 1$ et $[F_2]^{\mathbf{M}_4} = 0$.
$F_1 \models F_2$ donc si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$.
$F_2 \not\models F_1$ donc il existe une structure $\mathbf{M}_5$ telle que $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ et $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$.

(1.a). Considérons la structure $\mathbf{M}_4$,$[F_2]^{\mathbf{M}_4} = 0$. Si $[F_1]^{\mathbf{M}_4} = 1$ alors comme $F_1 \models F_2$, on a obligatoirement $[F_2]^{\mathbf{M}_4} = 1$, donc $[F_1]^{\mathbf{M}_4} = 0$ et $\mathbf{M}_4$ vérifie les conditions.
(1.b). La structure $\mathbf{M}_5$ vérifie les conditions.
(1.c). Une telle structure ne peut pas exister puisque $F_1 \models F_2$ donc si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$.
(1.d). La structure $\mathbf{M}_1$ vérifie les conditions puisque $[F_1]^{\mathbf{M}_1} = 1$ et comme $F_1 \models F_2$ donc $[F_2]^{\mathbf{M}_1} = 1$.
(2.a) La formule est valide puisque $F_1 \models F_2$.

(2.b). La formule n'est ni valide ni insatisfiable, $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}_1} = 1$ et $[F_1 \wedge F_2]^{\mathbf{M}_5} = 0$.
(2.c). La formule est non satisfiable car :

1. si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[F_2]^{\mathbf{M}} = 1$, car $F_1 \models F_2$, donc
   si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[\neg F_2]^{\mathbf{M}} = \overline{[F_2]^{\mathbf{M}}} = \overline{1}$=0, donc
   si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 1$ alors $[F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}} = [F_1]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg F_2]^{\mathbf{M}} = 1 \cdot 0 = 0$

2. si $[F_1]^{\mathbf{M}} = 0$ alors $[F_1 \wedge \neg F_2]^{\mathbf{M}} = [F_1]^{\mathbf{M}} \cdot [\neg F_2]^{\mathbf{M}} = 0 \cdot [\neg F_2]^{\mathbf{M}} = 0$

► Corrigé de l'exercice 4.
(1). Définition inductive de $\mathcal{T}_0(\mathcal{F})$:

- $\{a, b\} \subseteq \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
- Si $t \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $g(t) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.
- Si $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$, alors $f(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_0(\mathcal{F})$.

(2.a). $[g(f(a,g(b)))]^{\mathbf{M}_1}$=$g^{\mathbf{M}_1}([f(a,g(b))]^{\mathbf{M}_1})$=$g^{\mathbf{M}_1}(f^{\mathbf{M}_1}([a]^{\mathbf{M}_1},[g(b)]^{\mathbf{M}_1}))$=$g^{\mathbf{M}_1}(f^{\mathbf{M}_1}(1,g^{\mathbf{M}_1}([b]^{\mathbf{M}_1})))$= $g^{\mathbf{M}_1}(f^{\mathbf{M}_1}(1,g^{\mathbf{M}_1}(3)))$=$g^{\mathbf{M}_1}(f^{\mathbf{M}_1}(1,7))$=$g^{\mathbf{M}_1}(7)$=15
(2.b). Raisonnement par induction sur t.
(B) Si $t = a$ alors $[a]^{\mathbf{M}_1} = 1 = 2*0+1$ et si $t = b$, alors $[b]^{\mathbf{M}_1} = 3 = 2*1+1$.
(I) Supposons $[t']^{\mathbf{M}_1} = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, et $t = g(t')$.

$$\begin{aligned}
[t]^{\mathbf{M}_1} &= [g(t')]^{\mathbf{M}_1} \\
&= g^{\mathbf{M}_1}([t']^{\mathbf{M}_1}) \\
&= g^{\mathbf{M}_1}(2k+1) \text{ par hyp. d'induction} \\
&= 2*(2k+1)+1 = 2k'+1 \text{ avec } k' = 2k+1 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Supposons $[t_1]^{\mathbf{M}_1} = 2k_1+1$, $k_1 \in \mathbb{N}$, $[t_2]^{\mathbf{M}_1} = 2k_2+1$, $k_2 \in \mathbb{N}$ et $t = f(t_1, t_2)$.

$$\begin{aligned}
[t]^{\mathbf{M}_1} &= [(f(t_1,t_2))]^{\mathbf{M}_1} \\
&= f^{\mathbf{M}_1}([t_1]^{\mathbf{M}_1},[t_2]^{\mathbf{M}_1}) \\
&= f^{\mathbf{M}_1}(2k_1+1, 2k_2+1) \text{ par hyp. d'induction} \\
&= (2k_1+1)*(2k_2+1) \\
&= 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1 \\
&= 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1 = 2k'+1 \text{ avec } k' = 2k_1k_2 + k_1 + k_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

(3.a) Définissons la structure $\mathbf{M}_2$ comme étant égale à $\mathbf{M}_1$ enrichie par l'interprétation suivante du prédicat p : $\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est impair}\}$.

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}_2} &= [\underline{(\mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)) \Rightarrow} (\mathrm{p}(f(g(a),g(b))) \vee \mathrm{p}(g(a)))]^{\mathbf{M}_2} \\
&= \overline{[\mathrm{p}(a) \wedge \mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}} + [\mathrm{p}(f(g(a),g(b))) \vee \mathrm{p}(g(a))]^{\mathbf{M}_2} \\
&= \overline{[\mathrm{p}(a)]^{\mathbf{M}_2}.[\mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}} + ([\mathrm{p}(f(g(a),g(b)))]^{\mathbf{M}_2} + [\mathrm{p}(g(a))]^{\mathbf{M}_2}) \\
&= (\overline{[\mathrm{p}(a)]^{\mathbf{M}_2}} + \overline{[\mathrm{p}(b)]^{\mathbf{M}_2}}) + ([\mathrm{p}(f(g(a),g(b)))]^{\mathbf{M}_2} + [\mathrm{p}(g(a))]^{\mathbf{M}_2}) \\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(a)^{\mathbf{M}_2}} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2})}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(f^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}), g^{\mathbf{M}_2}(b^{\mathbf{M}_2}))) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(a^{\mathbf{M}_2}))) \\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(1)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(3)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(f^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(1), g^{\mathbf{M}_2}(3))) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(g^{\mathbf{M}_2}(1))) \\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(1)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(3)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(f^{\mathbf{M}_2}(3,7)) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(3)) \\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(1)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(3)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(21) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_2}(3)) \\
&= (\overline{1} + \overline{1}) + (1+1) = (0+0) + (1+1) = 0+1
\end{aligned}$$

(3.b) Définissons la structure $\mathbf{M}_2$ comme étant égale à $\mathbf{M}_1$ enrichie par l'interprétation suivante du prédicat p : $\mathrm{p}^{\mathbf{M}_2} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \text{ est pair}\}$ et en modifiant l'interprétation des constantes de la façon suivante : $a^{\mathbf{M}_3} = 2$ et $b^{\mathbf{M}_3} = 4$.

En reprenant le calcul de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
[F]^{\mathbf{M}_3} &= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(a^{\mathbf{M}_3}} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(b^{\mathbf{M}_3}))} + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(f^{\mathbf{M}_3}(g^{\mathbf{M}_3}(a^{\mathbf{M}_3}), g^{\mathbf{M}_3}(b^{\mathbf{M}_3}))) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(g^{\mathbf{M}_3}(a^{\mathbf{M}_3})))\\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(2)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(4)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(f^{\mathbf{M}_3}(g^{\mathbf{M}_3}(2), g^{\mathbf{M}_3}(4))) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(g^{\mathbf{M}_3}(2)))\\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(2)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(4)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(f^{\mathbf{M}_3}(5,9)) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(5))\\
&= (\overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(2)} + \overline{\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(4)}) + (\mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(45) + \mathrm{p}^{\mathbf{M}_3}(5))\\
&= (\overline{1} + \overline{1}) + (0+0) = (0+0) + 0 = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$