082742 – Elettrotecnica (E-O) Seconda prova in itinere, 3 Luglio 2012

Prof. F. Bizzarri

Cognome ______________________________ **Nome** ______________________________

Matricola ______________________________ **Firma** ______________________________

AVVERTENZE

- La prova dura **2 ore**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante; un punteggio complessivo inferiore a **8 punti** invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2.0 punti	E2a 3.0 punto	E2b 1.0 punti	E2c 1.0 punto	E2d 1.0 punto	E3a 4.0 punto	E3b 2.0 punto
Voto							

Voto Finale

Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

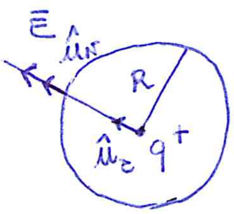
E1

Enunciare la formulazione generale del teorema di Gauss per il campo elettrico e verificarlo nel caso di una carica positiva e puntiforme q posta, nel vuoto, al centro di una sfera di raggio R.

Il flusso del campo elettrico $\bar{E}$ attraverso una superficie S chiusa che racchiude le q cariche $q_1, q_2, \dots q_N$ è

$$\Phi_E = \int_S \bar{E}\cdot\hat{u}_N \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

dove $q = \sum_{K=1}^{N} q_K$ e $\hat{u}_N$ è il versore normale ad S in ogni suo punto (x,y,z). $\hat{u}_N$ è orientato secondo la regola della mano dx dopo aver scelto l'orientamento del bordo della superficie.



$$\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot\hat{u}_r$$

$$\int_{Sfera} \bar{E}\cdot\hat{u}_n \, dS = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\hat{u}_r\cdot\hat{u}_n \, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\int\frac{dS}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = q/\varepsilon_0$$

E2a

Per il circuito in Figura 1, per il quale si assume $\alpha \neq 1$, si determini la rappresentazione con matrice [R] del doppio bipolo racchiuso nel box tratteggiato.

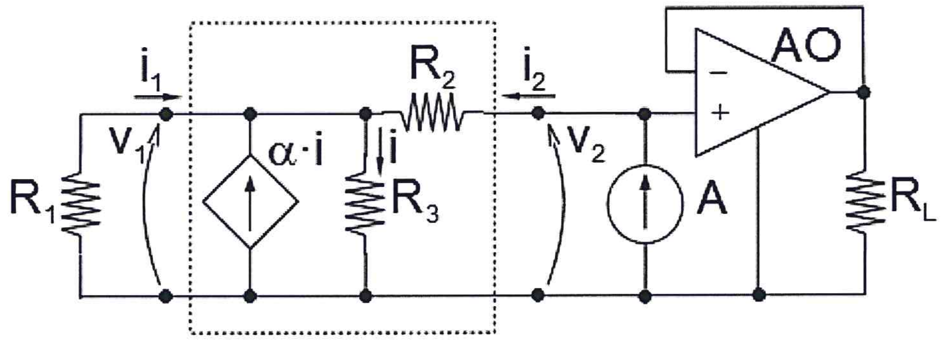


Figura 1

$$\begin{cases} V_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ V_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

- $i_1 = 0$
  $i_2 \neq 0$

$$i_2 = i - \alpha i = (1-\alpha) i \qquad i = \frac{i_2}{1-\alpha}$$

$$V_2 = R_{22} i_2 = R_2 i_2 + R_3 i = \left(R_2 + \frac{R_3}{1-\alpha}\right) i_2$$

$$R_{22} = \frac{R_3}{1-\alpha} + R_2$$

$$V_1 = R_{12} i_2 = R_3 i = \frac{R_3}{1-\alpha} i_2 \qquad R_{12} = \frac{R_3}{1-\alpha}$$

- $i_2 = 0$
  $i_1 \neq 0$

$$i_1 = i - \alpha i = (1-\alpha) i \qquad i = \frac{i_1}{1-\alpha}$$

$$V_1 = R_{11} i_1 = R_3 i = \frac{R_3}{1-\alpha} i_1 \qquad R_{11} = \frac{R_3}{1-\alpha}$$

$$V_2 = R_{21} i_1 = R_3 i \qquad R_{21} = \frac{R_3}{1-\alpha}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{R_3}{1-\alpha} & \frac{R_3}{1-\alpha} \\ \frac{R_3}{1-\alpha} & \frac{R_3}{1-\alpha} + R_2 \end{bmatrix}$$

E2b

Per quale valore di R_2 il doppio bipolo racchiuso nel box tratteggiato in Figura 1 non ammette la rappresentazione mediante matrice [G]? Giustificare la risposta.

[G], se esiste, è l'inversa di [R]

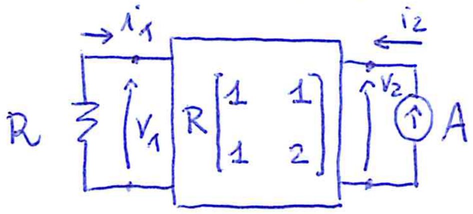
$[R]^{-1}$ esiste se $\det[R] \neq 0$ Nel caso $R_2 = 0 \rightarrow \det[R] = \emptyset$

Topologicamente: Se $R_2 = 0 \rightarrow V_1 = V_2 \rightarrow$

$\rightarrow$ non esiste base tensione $\rightarrow$ non esiste [G]

E2c

Per $\alpha = 0$ e $R_1 = R_2 = R_3 = R$, determinare il valore della tensione v_2.



$-Ri_1 = V_1 = R(i_1 + i_2)$

$i_1 = -\frac{i_2}{2} = -\frac{A}{2}$

$V_2 = R(i_1 + 2i_2) = R\left(-\frac{1}{2} + 2\right) i_2 = \frac{3}{2} RA$

E2d

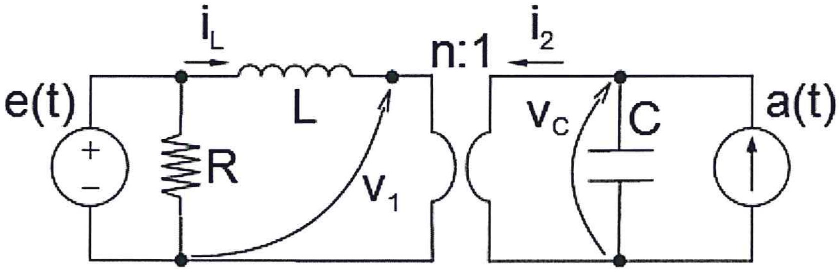
L'amplificatore operazionale AO può essere considerato ideale se eroga complessivamente una potenza istantanea $P \leq 1W$. Si assumano $\alpha = 0$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$ e $A = (2/3)mA$. Quale valore minimo può assumere R_L affinché AO possa essere considerato ideale?

$P^{(e)} = \frac{V_2^2}{R_L} = \frac{1}{R_L}\left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot 1k\Omega \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} mA\right)^2 = \frac{1}{R_L} \cdot 1V^2 \leq 1W$

$R_L \geq 1\Omega$

E3a

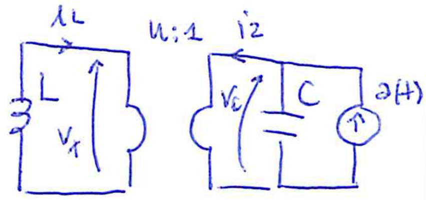
Il circuito in Figura 2 evolve in regime PERIODICO **con $e(t)=E\cdot sen(\omega t)$ ed $a(t)=A\cdot cos(2\omega t)$. Si assuma $n^2 \neq 4\omega^2 LC$ e $n^2 \neq \omega^2 LC$. Determinare $i_L(t)$.**



- $e(t) \equiv 0$

Figura 2

$\bar{V}_1 = n\bar{V}_c$ e $\bar{I}_L = -\frac{1}{n}\bar{I}_2$ $\quad \bar{I}_2 = -n\bar{I}_L$



$$-j2\omega L\bar{I}_L = \bar{V}_1 = n\bar{V}_c = n\frac{1}{j2\omega C}\left(A - \bar{I}_2\right)$$

$$-j2\omega L\bar{I}_L = \frac{n}{j2\omega C}\left(A + n\bar{I}_L\right) \qquad \left(\frac{4\omega^2 LC - n}{n}\right)\bar{I}_L = A$$

$$\bar{I}_L = \frac{n}{4\omega^2 LC - n^2}A \qquad i_L(t) = \frac{nA}{4\omega^2 LC - n^2}\cdot\cos(2\omega t)$$

- $a(t) \equiv 0$ $\qquad \bar{E} = -jE$

$$\bar{V}_c = -\frac{1}{j\omega C}\bar{I}_2 \qquad \bar{I}_2 = -j\omega C\bar{V}_c \qquad \bar{I}_L = -\frac{1}{n}\bar{I}_2 \qquad \bar{V}_1 = n\bar{V}_c$$

$$\bar{E} - j\omega L\bar{I}_L - \bar{V}_1 = 0 \qquad \bar{E} - j\omega L\bar{I}_L - n\left(-\frac{1}{j\omega C}\cdot(-n)\bar{I}_L\right) = 0$$

$$\left(j\omega L + \frac{n^2}{j\omega C}\right)\bar{I}_L = \bar{E} \qquad \left(\frac{n^2 - \omega^2 LC}{j\omega C}\right)\bar{I}_L = \bar{E}$$

$$\bar{I}_L = \frac{-jE\cdot j\omega C}{n^2 - \omega^2 LC} = \frac{\omega CE}{n^2 - \omega^2 LC} \qquad i_L(t) = \frac{\omega CE}{n^2 - \omega^2 LC}\cos\omega t$$

E3b

Per il circuito di Figura 2, assumendo a(t)=0, $n^2-\omega^2 LC=1$ e il regime sinusoidale raggiunto, si calcolino le potenze REATTIVE **Q_L e Q_C** ASSORBITE **da L e C, rispettivamente.**

$\bar{I}_L = \omega C E$

$Q_L = \text{Im}\left\{ \frac{1}{2} \bar{V}_L \bar{I}_L^* \right\} = \text{Im}\left\{ \frac{1}{2} j\omega L |\bar{I}_L|^2 \right\} =$

$= \frac{\omega L}{2} \cdot (\omega C E)^2 = \frac{\omega^3 L C^2 E^2}{2}$

$Q_C = \text{Im}\left\{ \frac{1}{2} \bar{V}_C \bar{I}_C^* \right\} = \text{Im}\left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{j\omega C} |\bar{I}_C|^2 \right\} =$

$= -\frac{1}{2\omega C} \cdot |\bar{I}_C|^2$

$\bar{I}_C = +\bar{I}_L n = n\omega C E$

$Q_C = -\frac{1}{2\omega C} \cdot n^2 \omega^2 C^2 E^2 = -\frac{n^2 \omega C E^2}{2}$