082742 – Elettrotecnica (E-O)

Prof. F. Bizzarri

Esame, 23 Luglio 2012

Cognome ______________________ **Nome** ______________________

Matricola ______________________ **Firma** ______________________

AVVERTENZE

- La prova dura **3 ore.**
- I punteggi massimi per ogni quesito sono indicati nella tabella sottostante. Un punteggio inferiore a 16 invalida la prova.

Quesito o Esercizio	E1 2 punti	E2a 2 punti	E2b 2 punti	E2c 3 punti	E2d 1 punto	E3a 6 punti	E3b 2 punti	E4a 7 punti	E4b 3 punti	Voto Finale
Voto										

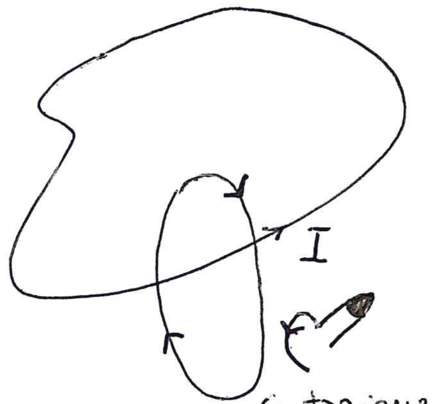
Riportare i risultati e i passaggi salienti nel riquadro relativo ad ogni esercizio

E1

Enunciare e discutere (anche graficamente) la legge di Ampere-Laplace.

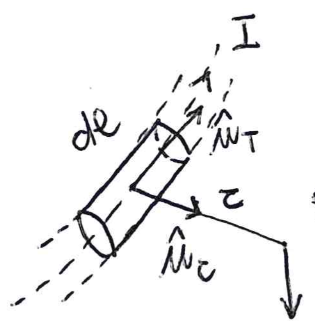
Il campo magnetico $\bar{B}$ generato da una spira percorsa da corrente costante I, di forma qualunque e nel vuoto è dato da

$$\bar{B} = \oint d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2}\, dl$$



Le linee di forza di $\bar{B}$ sono chiuse attorno alla spira e orientate secondo la regola della mano dx

$\hat{u}_T$ versore tangente all'asse della spira.



$$d\bar{B} = K_m I\, \hat{u}_T \times \hat{u}_r \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I\, \hat{u}_T \times \hat{u}_r \frac{dl}{r^2}$$

E2a

Per il circuito in Figura 1, per il quale si assume l'evoluzione in regime sinusoidale con $a(t)=A\cos(\omega t)$, si determini il fasore corrispondente alla corrente $i_L(t)$.

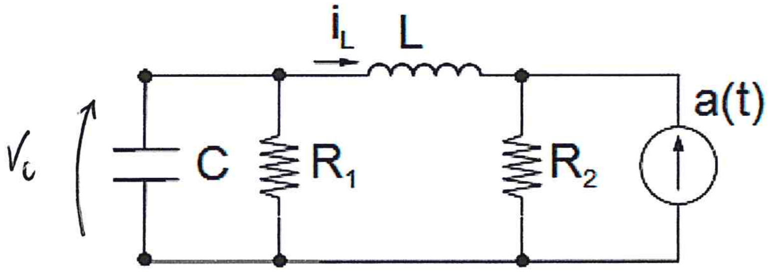


Figura 1

$$\begin{cases} \bar{V}_c - j\omega L \bar{I}_L - (\bar{I}_L + A) R_2 = 0 \\ j\omega C \bar{V}_c + \bar{I}_L + \bar{V}_c / R_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \bar{V}_c \left(\frac{1 + j\omega C R_1}{R_1} \right) = -\bar{I}_L$$

$$\left[-\left(\frac{1 + j\omega C R_1}{R_1} \right)^{-1} - j\omega L - R_2 \right] \bar{I}_L = A R_2$$

$$\bar{I}_L = - \frac{A R_2 \, (1 + j\omega C R_1)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 L C + j\omega R_1 R_2 C + j\omega L} =$$

$$= - \frac{A R_2 (1 + j\omega R_1 C)}{R_1 + R_2 - \omega^2 R_1 L C + j\omega (R_1 R_2 C + L)}$$

E2b

Per C=1F, L=2H, R_1=1Ω, R_2=2Ω, si determini l'espressione della corrente $i_L(t)$ il cui fasore è stato calcolato al punto E2a

$$\bar{I}_L = -\frac{A\cdot 2\,(1+J\omega)}{3-\omega^2 2+J\omega\,(2+2)} = -\frac{2A\,(1+J\omega)}{3+J4\omega-2\omega^2}$$

$$i_L(t) = Re\left\{-\frac{2A(1+J\omega)}{3-2\omega^2+J4\omega}\,e^{J\omega t}\right\} =$$

$$= -2A\,Re\left\{\frac{(1+J\omega)(3-2\omega^2-J4\omega)}{(3-2\omega^2)^2+16\omega^2}\,e^{J\omega t}\right\} =$$

$$= -2A\,Re\left\{\frac{3-2\omega^2+4\omega^2+J(3\omega-2\omega^3-4\omega)}{(3-2\omega^2)^2+16\omega^2}\,e^{J\omega t}\right\} =$$

$$= -\frac{2A}{(3-2\omega^2)^2+16\omega^2}\left[(3+2\omega^2)\cos\omega t+(2\omega^3+\omega)\operatorname{sen}\omega t\right]$$

E2

Per il circuito in Figura 2, per il quale si assume l'evoluzione in regime sinusoidale con a(t)=Acos(ωt), ω=2 rad/s, C=1F, L=2H, R_1=1Ω, R_2=2Ω, si calcoli il valore della capacità C_{RIF} tale da rendere nulla la potenza reattiva erogata dal generatore di corrente.

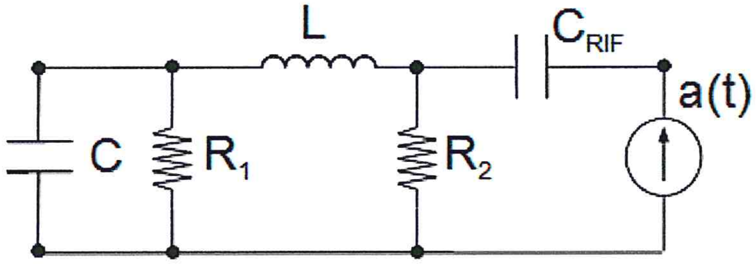
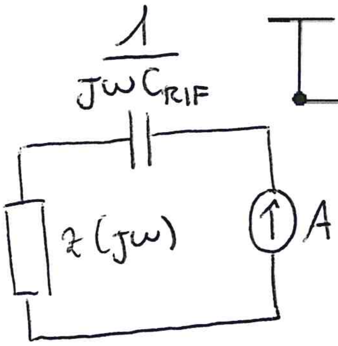


Figura 2



$$z(J\omega) = \left(\frac{1}{1+J\omega}+J2\omega\right)//R_2 =$$

$$= \frac{1-2\omega^2+J2\omega}{1+J\omega}//R_2 = \frac{1}{\frac{1+J\omega}{1-2\omega^2+J2\omega}+\frac{1}{2}} =$$

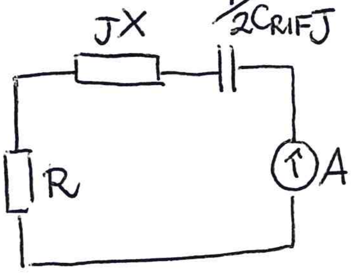
$$= \frac{2(1-2\omega^2+J2\omega)}{2+J2\omega+1-2\omega^2+J2\omega} =$$

$$\frac{2\,(1-2\omega^2+j2\omega)}{3+4j\omega-2\omega^2} \quad \text{con} \quad \omega = 2\ \text{rad/sec} \quad Z(2j) = \frac{2\,(1-8+4j)}{3+8j-8} =$$

$$= \frac{2\,(4j-7)}{8j-5}$$

$$Z(2j) = \frac{2\,(4j-7)(-8j-5)}{64+25} = \frac{2}{89}\,(-32j^2-20j+56j+35) =$$

$$= \frac{2}{89}\cdot(36j+67)$$



$$\mathrm{Im}\{Z(2j)\} = X(2j) = \frac{72}{89}$$

$$\mathrm{Re}\{Z(2j)\} = R(2j) = \frac{134}{89}$$

$$jX + \frac{1}{2jC_{RIF}} = 0 \qquad j\left(X - \frac{1}{2C_{RIF}}\right) = 0 \qquad C_{RIF} = \frac{89}{72}\cdot\frac{1}{2}\ F$$

E2c

Nelle ipotesi al punto E2b e per il valore di C_{RIF} calcolato al passo precedente, quanto vale la potenza complessa erogata dal generatore di corrente?

$$P+jQ \equiv P = \frac{1}{2}A^2\cdot R = \frac{1}{2}A^2\cdot\frac{134}{89} = \frac{67}{89}A^2$$

E3a

Il circuito in Figura 3 evolve in regime stazionario immediatamente prima dell'istante t = 0 in cui l'interruttore si chiude e il generatore di tensione presenta una discontinuità. Determinare i(t) per t>0 sapendo che $V_{C2}(-\infty)=0$, $e(t)=E_1$ per t<0, $e(t)=E_2$ per t>0. $R_1+R_2-r>0$

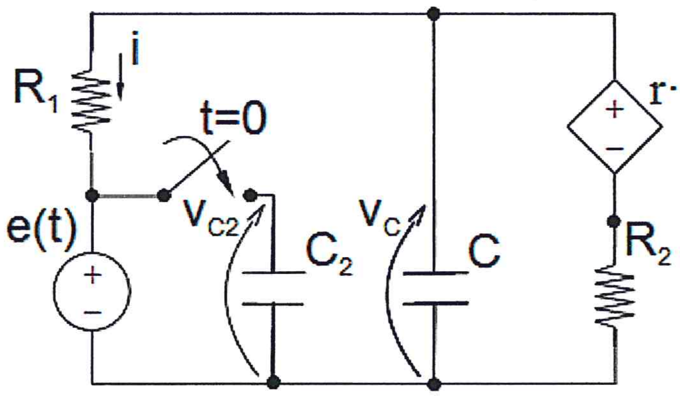


Figura 3

in $t=0^-$ $\quad C\frac{dV_C}{dt}\equiv\emptyset$

$e(t)\big|_{t=0^-}=E_1 \qquad E_1+R_1 i(0^-)-r\,i(0^-)+R_2\, i(0^-)=0$

$$i(0^-)=-\frac{E_1}{R_1+R_2-r}$$

$$V_c(0^-)=r\,i(0^-)-R_2\, i(0^-)=\frac{E_1(R_2-r)}{R_1+R_2-r}$$

in $t=0$ $e(t)$ è discontinua di prima specie e quindi (poiché la variabile di stato è più continua degli ingressi) $V_c(0^-)=V_c(0^+)$

$$i(0^+)R_1+E_2=V_c(0^+)=V_c(0^-)$$

$$i(0^+)=\frac{1}{R_1}\left[\frac{E_1(R_2-r)}{R_1+R_2-r}-E_2\right]$$

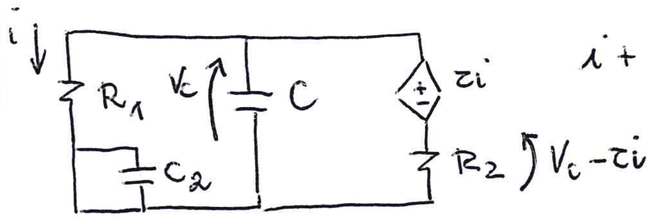
V_{C2} non è variabile di stato perché $V_{C2}=e(t)$

$$\frac{dV_{C2}}{dt}\Big|_{t>0}=0 \longrightarrow i_{C2}\Big|_{t>0}=0$$

$i(\infty) = -\dfrac{E_2}{R_1+R_2-r}$ infatti si raggiunge il regime stazionario e C_2 in parallelo ad $e(t)$ non ha alcun effetto su $i(t)$

$$t>0 \quad i(t) = -\frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} + \left(i(0^+) - i(\infty) \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per trovare τ posso passivare $e(t)$:



$$i + C\frac{dV_c}{dt} + \frac{V_c - \tau i}{R_2} = 0$$

$$V_c = R_1 i$$

$$i + R_1 C \frac{di}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} - \frac{\tau}{R_2} \right) i = 0 \qquad \frac{di}{dt} = \frac{1}{R_1 C} \cdot \left(\frac{\tau}{R_2} - \frac{R_1}{R_2} - 1 \right) i$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{R_1 C} \left(\frac{\tau - R_1 - R_2}{R_2} \right) i = - \frac{1}{\frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2-\tau}} i$$

$$\tau = + \frac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2 - \tau} > \emptyset$$

E3b

Calcolare la potenza istantanea $p_E(t)$ erogata dal generatore di tensione in Figura 3 per t>0.

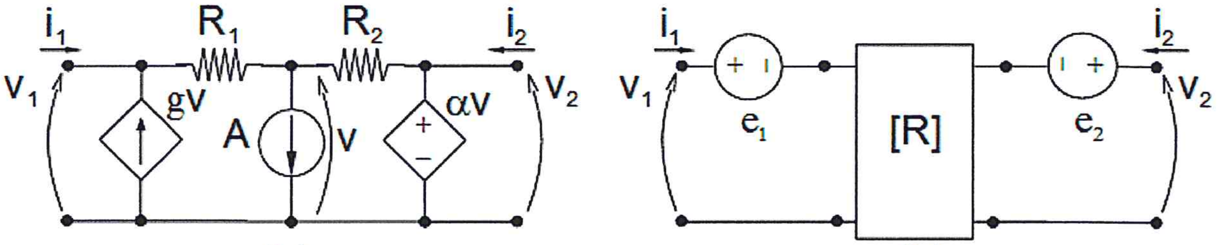
$$\text{Per } t>0 \quad i_{C2} = C_2 \frac{dV_{C2}}{dt} \equiv \emptyset$$

$$P_E(t)\Big|_{t>0} = - E_2 \cdot i(t) =$$

$$- E_2 \left[- \frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} + \left(\frac{1}{R_1} \left(\frac{E_1(R_2-\tau)}{R_1+R_2-\tau} - E_2 \right) + \frac{E_2}{R_1+R_2-\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right]$$

E4a

Per il doppiobipolo di Figura 4a, si calcoli la rappresentazione equivalente alla Thevenin di Figura 4b. Ipotesi: $R_2 g+\alpha-1\neq 0$, $g>0$.



(a) (b)

$$\begin{cases} i_1 + gv = (v_1 - v)/R_1 \\ A = (v_1 - v)/R_1 + (v_2 - v)/R_2 \\ v_2 = \alpha v \end{cases}$$

$$\left(g + \frac{1}{R_1}\right) v = \frac{v_1}{R_1} - i_1 \qquad v = \frac{v_1 - R_1 i_1}{1 + gR_1}$$

$$v_2 = \frac{\alpha}{1+gR_1}(v_1 - R_1 i_1)$$

$$A = \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_2}{\alpha R_1} + \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_2}{\alpha R_2} = \frac{v_1}{R_1} + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{\alpha R_2} - \frac{1}{\alpha R_1}\right)\frac{\alpha}{1+gR_1}(v_1 - R_1 i_1)$$

$$A = v_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\cancel{\alpha}}{1+gR_1}\,\frac{R_1(\alpha-1)-R_2}{\cancel{\alpha} R_1 R_2}\right) - \frac{\cancel{R_1 \alpha}}{1+gR_1}\,\frac{R_1(\alpha-1)-R_2}{\cancel{\alpha R_1} R_2}\, i_1$$

$$A = \frac{(1+gR_1)R_2 + R_1(\alpha-1) - R_2}{R_1 R_2 (1+gR_1)} v_1 - \frac{R_1(\alpha-1)-R_2}{R_2(1+gR_1)} i_1$$

$$A = \frac{\cancel{R_1}(R_2 g + \alpha - 1)}{\cancel{R_1} R_2 (1+gR_1)} v_1 - \frac{R_1(\alpha-1)-R_2}{R_2(1+gR_1)} i_1$$

$$v_1 = \frac{1}{R_2 g + \alpha - 1}\left[(R_1(\alpha-1) - R_2) i_1 + R_2(1+gR_1) A \right]$$

$$v_1 = \underbrace{\frac{R_1(\alpha-1) - R_2}{R_2 g + \alpha - 1}}_{R_{11}} i_1 + \underbrace{\frac{R_2(1+gR_1)}{R_2 g + \alpha - 1}A}_{e_1} \qquad R_{12} \equiv \emptyset$$

$$V_2 = \frac{\alpha}{1+gR_1}\left(V_1 - R_1 i_1\right) = \frac{\alpha}{1+gR_1}\left[\left(\frac{R_1(\alpha-1)-R_2}{R_2 g+\alpha-1} - R_1\right) i_1 + \frac{R_2(1+gR_1)}{R_2 g+\alpha-1} A\right]$$

$$V_2 = \frac{\alpha}{1+gR_1}\,\frac{\cancel{R_1(\alpha-1)} - R_2 - R_1R_2 g - \cancel{R_1(\alpha-1)}}{R_2 g+\alpha-1}\, i_1 + \frac{\alpha R_2}{R_2 g+\alpha-1} A$$

$$V_2 = -\frac{\alpha}{\cancel{1+gR_1}}\,\frac{R_2\cancel{(1+gR_1)}}{R_2 g+\alpha-1}\, i_1 + \frac{\alpha R_2}{R_2 g+\alpha-1} A$$

$$V_2 = \underbrace{-\frac{\alpha R_2}{R_2 g+\alpha-1}}_{R_{21}} i_1 + \underbrace{\frac{\alpha R_2}{R_2 g+\alpha-1}}_{e_2} A$$

$$R_{22} = 0$$

E4b

Per il doppiobipolo di Figura 4a, assumendo A=0, discutere l'esistenza delle matrici [G], [H] ed [H'] in funzione di α.

- poichè $R_{12} = R_{22} = 0$ $\quad \det(R) = 0 \longrightarrow \nexists\, [G]\ \forall\alpha$

- $\begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$ fissato V_2 ed i_1 non è possibile ricavare univocamente i_2! $\longrightarrow \nexists\, [H]\ \forall\alpha$

- $\begin{bmatrix} i_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

$$V_1 = R_{11} i_1 \longrightarrow i_1 = \frac{1}{R_{11}} V_1$$

$$V_2 = R_{21} i_1 = \frac{R_{21}}{R_{11}} V_1$$

$$[H'] = \begin{bmatrix} 1/R_{11} & \emptyset \\ R_{21}/R_{11} & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$\exists\, [H'] \iff R_{11}(\alpha) \neq 0$$

$$R_1(\alpha-1) - R_2 \neq 0 \qquad \alpha \neq \frac{R_2}{R_1} + 1$$