

FEDERICO BIZZARRI

ELETROTECNICA

INGEGNERIA INFORMATICA – POLITECNICO DI MILANO

TWO THINGS ARE INFINITE, THE UNIVERSE AND HUMAN STUPIDITY, AND I
AM NOT YET COMPLETELY SURE ABOUT THE UNIVERSE.

ALBERT EINSTEIN



Copyright © 2014 Federico Bizzarri

Last printing, June 2014

Indice

1	<i>Capitolo 1</i>	11
1.1	<i>La carica elettrica e il principio di conservazione della carica</i>	11
1.2	<i>Il campo elettrico</i>	13
1.3	<i>La legge di Coulomb</i>	14
1.4	<i>Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto</i>	14
1.5	<i>Tensione elettrica</i>	15
1.6	<i>Legge di Kirchhoff per le tensioni</i>	19
1.7	<i>Flusso di un campo vettoriale</i>	20
1.8	<i>Legge di Gauss</i>	20
1.9	<i>Dielettrici (o isolanti)</i>	21
1.10	<i>La corrente elettrica</i>	21
1.11	<i>La formalizzazione del principio di conservazione della carica</i>	22
1.12	<i>Conduttori</i>	23
1.13	<i>La legge di Ohm</i>	25
1.14	<i>La legge di Kirchhoff per le correnti</i>	25
1.15	<i>Il primo circuito elettrico</i>	26
2	<i>Capitolo 2</i>	29
2.1	<i>Teoria dei circuiti - il modello circuitale</i>	29
2.2	<i>Componenti e variabili descrittive - Amperometro e Voltmetro ideali</i>	30
2.3	<i>Cenni di teoria dei grafi</i>	33
2.4	<i>Grafo di un componente e grafo di un circuito</i>	34

2.5 <i>Esercizio: circuito e grafo</i>	36
2.6 <i>Nota sulle equazioni algebriche</i>	37
2.7 <i>Le leggi di Kirchhoff</i>	38
2.8 <i>La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta</i>	43
2.9 <i>Equazioni di Tableau</i>	45
3 <i>Capitolo 3</i>	47
3.1 <i>Potenza ed energia elettrica</i>	47
3.1.1 <i>Bipoli attivi e passivi</i>	48
3.1.2 <i>Potenza assorbita da un n-terminali</i>	48
3.2 <i>Il teorema di Tellegen</i>	48
3.2.1 <i>Esempio 1</i>	49
3.2.2 <i>Esempio 2</i>	50
3.3 <i>Classificazione di un componente</i>	51
3.3.1 <i>Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici</i>	52
3.4 <i>Le basi di definizione</i>	53
3.5 <i>Bipoli notevoli</i>	54
3.5.1 <i>Il resistore lineare</i>	54
3.5.2 <i>Il corto circuito</i>	54
3.5.3 <i>Il circuito aperto</i>	55
3.5.4 <i>Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente</i>	55
3.6 <i>Esercizio: il primo circuito elementare</i>	56
3.7 <i>Il principio di equivalenza</i>	57
3.7.1 <i>Connessione in serie di bipoli</i>	57
3.7.2 <i>Il partitore di tensione</i>	59
3.7.3 <i>Connessione in parallelo di bipoli</i>	59
3.7.4 <i>Il partitore di corrente</i>	61
3.8 <i>Esercizio</i>	62
3.9 <i>Circuiti equivalenti di Thevénin e Norton</i>	62
3.10 <i>Esercizio</i>	64
3.11 <i>Esercizio</i>	65

4	Capitolo 4	67
4.1	<i>Le sorgenti pilotate</i>	67
4.2	<i>Esempi</i>	69
4.2.1	<i>Un resistore di resistenza negativa</i>	69
4.2.2	<i>Esercizio: risoluzione di una rete</i>	69
4.2.3	<i>Modello equivalente di Thevénin</i>	70
4.2.4	<i>Modello equivalente di Norton 1</i>	70
4.2.5	<i>Modello equivalente di Norton 2</i>	71
4.3	<i>L'analisi nodale</i>	71
4.4	<i>Un esempio guida</i>	72
4.5	<i>Un altro esempio</i>	73
4.6	<i>Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione</i>	75
4.6.1	<i>Il caso "a": connessione k – 0</i>	76
4.6.2	<i>Il caso "b": connessione k – h</i>	77
4.6.3	<i>Un caso più complesso</i>	79
4.6.4	<i>Sempre peggio</i>	80
5	Capitolo 5	83
5.1	<i>Teorema di esistenza e unicità</i>	83
5.2	<i>Il principio di sovrapposizione degli effetti</i>	85
5.2.1	<i>Esempio</i>	88
5.3	<i>Il teorema di Thevénin e Norton</i>	89
5.3.1	<i>Esempi di applicazione dei teoremi di Thevénin e Norton</i>	91
6	Capitolo 6	93
6.1	<i>I doppi bipoli</i>	93
6.2	<i>Le rappresentazioni cardinali</i>	94
6.2.1	<i>Forma esplicita con parametri R</i>	94
6.2.2	<i>Forma esplicita con parametri G</i>	95
6.2.3	<i>Forma esplicita con parametri H</i>	96
6.2.4	<i>Forma esplicita con parametri H'</i>	97

6	<i>Federico Bizzarri</i>	
6.3	<i>Matrice T di trasmissione diretta</i>	97
6.4	<i>Esempi</i>	98
6.4.1	<i>Esempio 1</i>	98
6.4.2	<i>Esempio 2</i>	99
6.4.3	<i>Esempio 3</i>	99
6.5	<i>Doppi bipoli lineari affini</i>	99
6.6	<i>Connessione di doppi bipoli</i>	102
6.6.1	<i>Collegamento in serie</i>	102
6.6.2	<i>Collegamento in parallelo</i>	103
6.6.3	<i>Connessione in cascata</i>	103
6.7	<i>Doppi bipoli notevoli</i>	103
6.7.1	<i>Il trasferitore ideale di potenza</i>	103
6.7.2	<i>L'amplificatore operazionale ideale</i>	105
6.7.3	<i>Un esercizio sul nullore</i>	107
7	<i>Capitolo 7</i>	109
7.1	<i>L'interazione magnetica</i>	109
7.2	<i>Forze magnetiche su cariche in moto - La forza di Lorenz</i>	110
7.3	<i>Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)</i>	111
7.4	<i>Forza magnetica su di una corrente elettrica</i>	112
7.5	<i>Legge di Ampère-Laplace</i>	113
7.6	<i>Campo magnetico di una spira di corrente circolare</i>	115
7.7	<i>La legge di Ampère</i>	116
7.8	<i>Flusso magnetico</i>	118
7.9	<i>Equazioni del campo elettromagnetostatico</i>	119
8	<i>Capitolo 8</i>	121
8.1	<i>Il campo elettromagnetico dipendente dal tempo</i>	121
8.2	<i>La legge di Faraday-Henry</i>	121
8.3	<i>La legge di Ampère-Maxwell</i>	124
8.4	<i>Equazioni di Maxwell (in forma integrale) del campo elettromagnetico</i>	126

9	<i>Capitolo 9</i>	127
	9.1 <i>La capacità elettrica - il condensatore</i>	127
	9.2 <i>L'autoinduzione - l'induttore</i>	129
10	<i>Capitolo 10</i>	133
	10.1 <i>Circuito RC del primo ordine non degenere</i>	133
	10.1.1 <i>Esempio</i>	137
	10.2 <i>Circuito RL del primo ordine non degenere</i>	138
	10.2.1 <i>Esempio</i>	138
11	<i>Capitolo 11</i>	141
	11.1 <i>Richiami di trigonometria</i>	141
	11.2 <i>Richiami sui numeri complessi</i>	142
	11.2.1 <i>Uguaglianza di due numeri complessi</i>	142
	11.2.2 <i>Il complesso coniugato</i>	143
	11.2.3 <i>Somma algebrica di due numeri complessi</i>	143
	11.2.4 <i>Prodotto e di due numeri complessi</i>	143
	11.2.5 <i>Razionalizzazione del rapporto di due numeri complessi</i>	143
	11.3 <i>Verso l'analisi fasoriale</i>	144
	11.4 <i>Una considerazione importante</i>	145
	11.5 <i>I fasori</i>	146
	11.6 <i>Impedenza e ammettenza</i>	151
	11.7 <i>Doppi-bipoli con matrice di rappresentazione complessa</i>	152
	11.8 <i>Adesso siamo pronti per ...</i>	153
	11.8.1 <i>Esempio: connessione in serie di impedenze e partitore di tensione</i>	154
	11.8.2 <i>Esempio: connessione in parallelo di ammettenze e partitore di corrente</i>	154
	11.8.3 <i>Esempio: un circuito con l'amplificatore operazionale ideale</i>	155
	11.8.4 <i>Esempio: circuiti equivalenti di Thevénin e Norton</i>	156
	11.8.5 <i>Esempio: sovrapposizione degli effetti (e di due regimi)</i>	157

<i>11.9 Il regime multi-frequenziale</i>	158
<i>11.10 Funzioni di rete</i>	160
<i>11.10.1 Un filtro passa-basso</i>	160
<i>11.10.2 Un filtro passa alto</i>	162
<i>11.11 La potenza in regime sinusoidale</i>	162
<i>11.11.1 Un primo esempio di calcolo della potenza complessa</i>	165
<i>11.12 Il teorema di Boucherot</i>	166
<i>11.12.1 Un esempio di applicazione</i>	167
<i>11.12.2 Un secondo esempio di applicazione</i>	168
<i>11.13 Il rifasamento</i>	168
<i>11.13.1 Un esempio di rifasamento</i>	170
<i>11.14 Condizione di massimo trasferimento di potenza attiva</i>	171
12 Capitolo 12	173
<i>12.1 Circuiti del primo ordine degeneri</i>	173
<i>12.2 Circuiti dinamici riducibili a circuiti del primo ordine</i>	175
<i>12.3 Circuiti del primo ordine con ingresso discontinuo</i>	177
<i>12.3.1 Sulla continuità delle variabili di stato</i>	178
<i>12.3.2 Un esempio non banale</i>	180
<i>12.4 Circuiti del primo ordine con tasti</i>	181
<i>12.4.1 Un esempio semplice</i>	182
<i>12.4.2 Un esempio avanzato</i>	183
13 Capitolo 13	185
<i>13.1 Il trasformatore: equazioni costitutive</i>	185
<i>13.2 Il trasformatore: potenza ed energia</i>	187
<i>13.2.1 Il trasformatore in accoppiamento critico</i>	188
<i>13.3 Un modello equivalente del trasformatore non in accoppiamento critico</i>	189
<i>13.3.1 Un esempio di applicazione</i>	190

Queste tracce sono il risultato della rielaborazione di appunti, dispense, libri di diversi autori. La loro stesura in formato elettronico è frutto anche del lavoro degli studenti Gloria Ficili, Enrico Fregnan, Gledian Kruja e Paola Muscato durante l'anno accademico 2012-2103. A loro va il mio ringraziamento. Un ringraziamento anche a tutti gli studenti che nel corso del tempo hanno segnalato e segnaleranno refusi o suggeriranno miglioramenti. Parte delle figure che hanno sostituito i miei schizzi fatti a mano sono frutto del lavoro di Gabriele Lo Castro (a.a. 2013/2014). Coloro che spinti dalla bruttezza dei miei disegni fossero interessati a contribuire possono contattarmi!

Gli studenti, ai quali raccomando di essere ora e sempre lettori critici, che trovassero imprecisioni, errori, lacune nelle tracce sono invitati a segnalarermeli.

1

1.1 La carica elettrica e il principio di conservazione della carica

TUTTA LA MATERIA di cui siamo formati e che ci circonda è composta da particelle elementari (elettroni, protoni, neutroni) che costituiscono atomi e molecole. Queste particelle contengono in sé la proprietà **carica elettrica**.

L'ESISTENZA DI FENOMENI ELETTRICI (**elettrificazione**) era nota già in antichità (in greco antico *ηλεκτρον* – elektron – significa ambra) tanto che Talete di Mileto (640-546 a.C.) riteneva che tali fenomeni — ad esempio l'elettrificazione ottenuta per strofinio dell'ambra che attirava così piccoli corpi — fossero dovuti ad una forza vitale (o "anima") contenuta nella materia stessa. Oggi è per noi esperienza comune che l'ambra, strofinata alla lana, attiri piccoli pezzetti di carta e che il vetro strofinato alla seta faccia lo stesso "attirando" inoltre l'ambra stessa. Diciamo allora che l'ambra e il vetro si "caricano" per strofinio in modo opposto. L'ambra si carica positivamente perché lo strofinio le sottrae alcune particelle cariche negativamente. Il vetro, invece, si carica negativamente perché è esso stesso a sottrarre cariche negative alla seta. Sia l'ambra sia il vetro sono, dopo essere stati "elettrificati", due *corpi carichi*, caratterizzati cioè da un eccesso di carica positiva e negativa, rispettivamente.

IN GENERALE, un corpo carico è un oggetto che non è "neutro" rispetto alla proprietà carica elettrica. Sempre in generale, corpi caratterizzati dal medesimo eccesso di carica si respingono e corpi caratterizzati da eccessi di tipo opposto si attraggono. Si osserva una forza orientata lungo la congiungente i due corpi carichi (figura 1.1), così come avviene per l'attrazione gravitazionale tra due masse.

Lo studente interessato ad approfondire i concetti presentati in questo primo capitolo può fare riferimento al libro "Campi e onde", Marcelo Alonso, Edward J. Finn, edizione italiana a cura di Emilio Gatti, traduzione di Mario Bertolaccini, Camillo Bussolati, Francesca Demichelis, - 2. ed. - Milano: Masson; Reading: Addison-Wesley, ©1991.

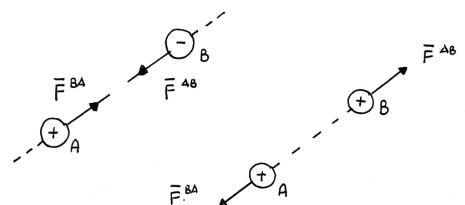


Figura 1.1: Due corpi carichi *A* e *B* esercitano l'uno sull'altro una forza orientata lungo la congiungente i due corpi. Le due forze \bar{F}^{AB} (esercitata da *A* su *B*) e \bar{F}^{BA} (esercitata da *B* su *A*) hanno il verso che dipende da come sono caricati i due corpi l'uno rispetto all'altro.

LA CARICA ELETTRICA è **quantizzata**, cioè non esiste una carica più piccola di quella dell'elettrone, che vale $q_E = -1.602564 \cdot 10^{-19}$ C (C sta per Coulomb dall'omonimo celebre fisico francese). Fu misurata in modo definitivo dal fisico Robert Millikan (1869-1953) ed è uguale ma di segno opposto a quella q_P del protone. Ogni corpo carico presenta una carica multipla di $|q_E|$. La **carica complessiva** di un corpo è data dalla somma algebrica delle sue cariche positive q^+ e negative q^- .

Una **carica puntiforme**, equivalente del *punto materiale* in meccanica, è una carica ideale, concentrata in un punto singolo dello spazio e priva di dimensioni.

LA CARICA ELETTRICA gode del principio fondamentale di **conservazione**. È infatti stato constatato sperimentalmente che in tutti i fenomeni naturali osservati la carica totale di un sistema **isolato** rimane costante. In altri termini,

la carica totale di un sistema isolato rimane invariata in qualsiasi fenomeno fisico¹.

Il principio di conservazione della carica, è considerato valido dalla fisica classica, dalla teoria della relatività e dalla meccanica quantistica. L'unico modo in cui la carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume V , può variare è in presenza di una **corrente elettrica** che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno. Approfondiremo questo argomento nel seguito (cfr. paragrafo 1.11).

PER DESCRIVERE COME LA CARICA ELETTRICA SI DISTRIBUISCE all'interno di un corpo e/o sulla superficie che lo delimita, introduciamo la **densità volumetrica** di carica ρ_V propria di un corpo di volume V e la **densità superficiale** di carica ρ_S associata ad una superficie S . In figura 1.2 la superficie S è stata suddivisa in tante areole dS_k ($k = 1, 2, \dots$) centrate nel punto (x_k, y_k) . La densità superficiale di carica $\rho_S(x, y)$ su ogni areola dS_k esprime la quantità di carica per unità di superficie che è possibile misurare muovendosi su S . Se si assume che tale densità sia costante e pari a $\rho_{S_k} = \rho_S(x_k, y_k)$ su ogni areola dS_k , allora la carica complessiva Q sulla superficie è, approssimativamente, data da

$$Q \approx \sum_k \rho_{S_k} dS_k . \quad (1.1)$$

Più precisamente, passando al limite in cui le singole areole dS_k si considerano infinitesime, possiamo scrivere,

$$Q = \iint_S \rho_S(x, y) dx dy = \int_S \rho_S dS . \quad (1.2)$$

¹ Un sistema isolato è un sistema che non scambia con l'ambiente circostante né massa, né calore, né lavoro. Da un punto di vista sperimentale, è un sistema che ha interazioni trascurabili con l'ambiente circostante (probabilmente il solo universo è considerabile un vero sistema isolato).

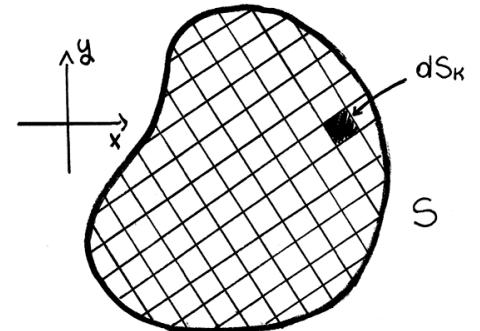


Figura 1.2: Una superficie S suddivisa in areole elementari dS_k .

Analogamente, se considerassimo un volume V , la carica Q in esso contenuta si otterrebbe, a partire dalla densità volumetrica di carica $\rho_V(x, y, z)$, come

$$Q = \iiint_V \rho_V(x, y, z) dx dy dz = \int_V \rho_V dV . \quad (1.3)$$

1.2 Il campo elettrico

INTRODUCIAMO IN PRIMIS il concetto generale di **campo**. Possiamo darne due definizioni:

1. campo è una regione dello spazio in cui si studia un fenomeno fisico;
2. campo è una grandezza fisica, qualunque, funzione dello spazio ed eventualmente del tempo.

Un campo può essere **scalare**, se descritto da una funzione scalare $f(x, y, z, t)$ dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la temperatura dell'aria in una stanza è un campo scalare), oppure **vettoriale** se descritto da una funzione vettoriale $\vec{A}(x, y, z, t)$ dello spazio ed eventualmente del tempo (ad esempio la velocità dell'acqua di un fiume è un campo vettoriale).

In figura 1.3, \vec{A} è rappresentato in una terna cartesiana destrorsa (cfr. figura 1.4), identificata dai versori \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} che indicano la direzione e il verso degli assi x , y , e z , rispettivamente. Il vettore \vec{A} può essere espresso in funzione delle sue proiezioni sugli assi coordinati scrivendo $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$. Il suo modulo, grandezza scalare che ne esprime l'intensità, è $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$.

PER POTER DEFINIRE OPERATIVAMENTE IL CAMPO ELETTRICO, introduciamo il concetto di **carica di prova**. Prendiamo una carica puntiforme q positiva e mettiamola in una regione dello spazio². Se q risente di una forza \vec{F} proporzionale a se stessa, allora *affermiamo* che in quella regione dello spazio è presente un **campo elettrico** $\vec{E} = \vec{F}/q$. \vec{E} è un campo vettoriale che ha direzione e verso dati da \vec{F} , q è infatti positiva per definizione, e modulo proporzionale al modulo di \vec{F} attraverso q^{-1} . Il campo elettrico si misura in NC^{-1} . Rifacendoci alla definizione "1" di campo, ogni regione in cui una carica è soggetta ad una forza proporzionale ad essa è detta campo elettrico.

In generale, se $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$, abbiamo a che fare con un campo elettrico tempo-variante. Si parla invece di campo stazionario (con-

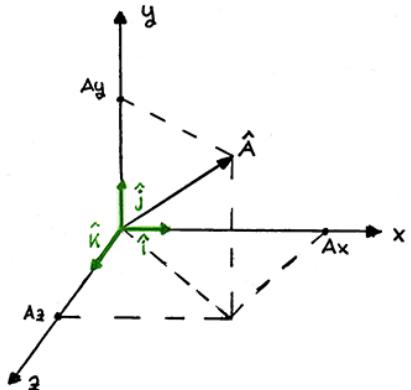


Figura 1.3: Rappresentazione di un vettore in \mathbb{R}^3 .

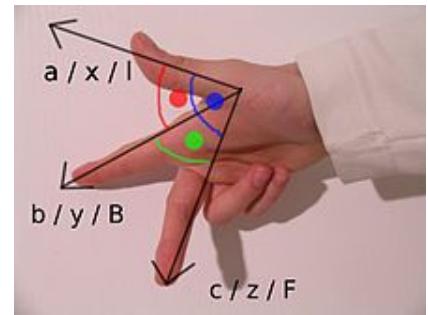


Figura 1.4: Un modo semplice per determinare l'orientazione degli assi di una terna destrorsa o normale è dato dalla *regola della mano destra* che è schematizzata in figura.

² La definiamo carica di prova nel senso che con la sua presenza non è in grado di alterare i fenomeni fisici (elettrici) presenti nella regione di spazio in cui la poniamo. In altre parole, dopo aver definito il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme, potremmo dire che il campo prodotto da q è trascurabile rispetto ai campi presenti nella regione di spazio che stiamo considerando. In questo senso possiamo vederla come una sonda che immagazziniamo nello spazio e che ci permette di misurare grandezze elettriche senza influenzarle.

dizione statica) se $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} = 0$ e di campo quasi-stazionario se $\frac{\partial \bar{E}(x, y, z, t)}{\partial t} \approx 0$.

Come è possibile generare un campo elettrico? Ad esempio con una carica puntiforme.

1.3 La legge di Coulomb

LA LEGGE DI COULOMB È UNA LEGGE STATICÀ. Prendiamo q_1 e q_2 cariche puntiformi, ferme rispetto ad un osservatore in un sistema inerziale nel vuoto³. L'interazione elettrostatica tra q_1 e q_2 (che si manifesta mediante una forza) è proporzionale alle loro cariche e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. La direzione della forza è quella della linea congiungente le cariche stesse. Il verso dipende dal segno delle cariche.

In figura 1.5 la forza esercitata da q_1 su q_2 è esprimibile come

$$\begin{aligned}\bar{F}_{q_1 q_2} &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^3} (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \\ &= k_e \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|^2} \hat{r}\end{aligned}, \quad (1.4)$$

dove ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto e vale $8.854 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$. Se $q_1 q_2 > 0$, allora $\bar{F}_{q_1 q_2}$ è orientata come \hat{r} altrimenti ha il verso opposto. $\bar{F}_{q_2 q_1}$ è applicata in q_1 e ha verso opposto a quello di $\bar{F}_{q_1 q_2}$ perché è opposto ad \hat{r} il verso di $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$.

1.4 Campo elettrico generato da una carica puntiforme nel vuoto

LA CARICA PUNTIFORME CHE GENERA IL CAMPO in figura 1.6 è $Q > 0$, ferma rispetto all'osservatore, in un sistema inerziale, nel vuoto. q è invece una carica di prova che ricordiamo essere positiva per definizione. Se posizioniamo q in P , in base a quanto detto a proposito della forza di Coulomb, rileviamo $\bar{F}_{Qq} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$ (esercitata da Q su q). Dalla definizione operativa di campo elettrico si ricava quindi

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (1.5)$$

Notiamo che se $P \rightarrow \infty$ l'intensità del campo $E(P) \rightarrow 0$. Viceversa, se $P \rightarrow 0$, l'intensità del campo $E(P) \rightarrow \infty$. Il campo elettrico generato

³ Un sistema inerziale è un sistema di riferimento tale per cui se un punto materiale libero, cioè non sottoposto a forze o ad una risultante di forze nulle, viene posto in condizione di quiete esso rimane in tale condizione.

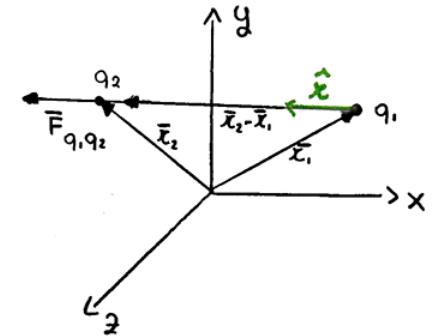


Figura 1.5: Due cariche nello spazio e la forza che esercitano l'una sull'altra.

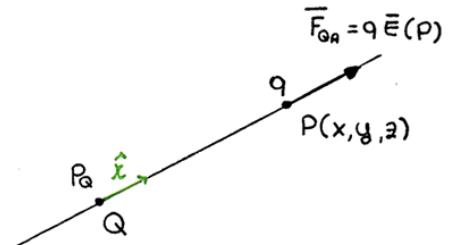


Figura 1.6: Campo elettrico generato da una carica puntiforme.

da una carica puntiforme è un **campo radiale**, cioè in ogni punto P dello spazio è diretto come un “raggio” che congiunge P alla carica puntiforme che genera il campo.

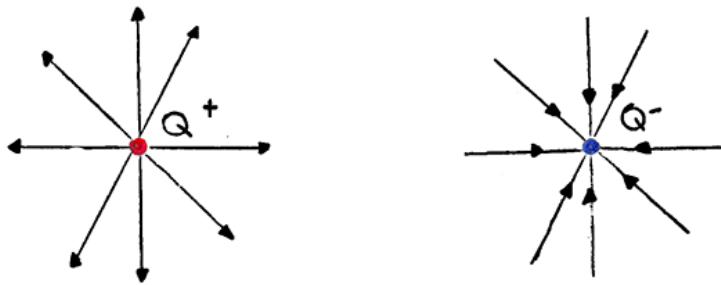


Figura 1.7: Linee di forza di un campo elettrico generato da una carica puntiforme Q .

SE CI FOSERO N CARICHE ELETTRICHE Q_k ($k = 1, 2, \dots, N$) posizionate in P_k (figura 1.8), potremmo definire un *campo elettrico risultante* nel punto P sovrapponendo gli effetti delle diverse cariche che distano r_k da P .

$$\bar{E} = \sum_{k=1}^N \bar{E}_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{Q_k}{r_k^2} \hat{r}_k . \quad (1.6)$$

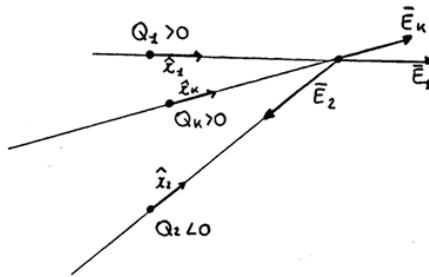


Figura 1.8: Campo elettrico risultante dalla sovrapposizione dei campi generati da più cariche puntiformi.

LE LINEE DI FIGURA 1.9 SI CHIAMANO **linee di forza** del campo e, in ogni loro punto, il campo elettrico è ad esse tangente. Si chiamano linee di forza perché definiscono la direzione in cui una carica positiva di prova tenderebbe a muoversi “spinta” dal campo.

Esempi di linee di forza per campi elettrici generati da cariche puntiformi poste su un piano sono riportati nelle figure 1.10 e 1.11. Un caso tridimensionale è esemplificato in figura 1.12.

1.5 Tensione elettrica

SE UNA CARICA VIENE LASCIATA LIBERA DI MUOVERSI in una regione in cui c’è campo elettrico, essa subisce una forza e quindi si

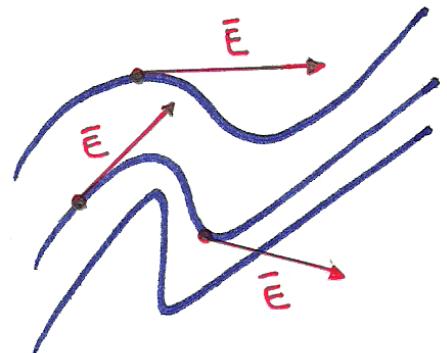


Figura 1.9: Linee di forza: in ogni punto il campo è ad esse tangente. Dove le linee di forza sono maggiormente concentrate il campo è più intenso.

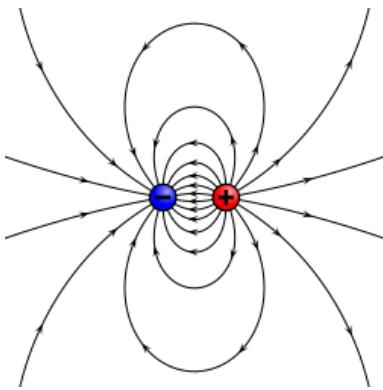


Figura 1.10: Linee di forza del campo elettrico planare generato da un *dipolo elettrico* costituito da due cariche uguali ma di segno opposto.

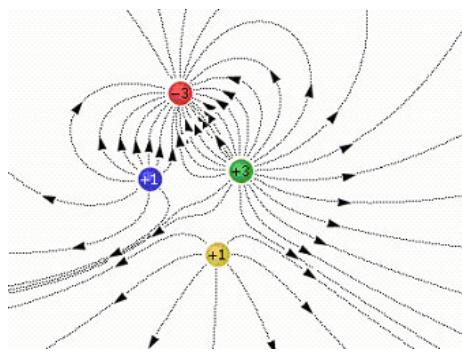


Figura 1.11: Linee di forza del campo elettrico planare generato da più cariche elettriche, di segno e valore diverse.

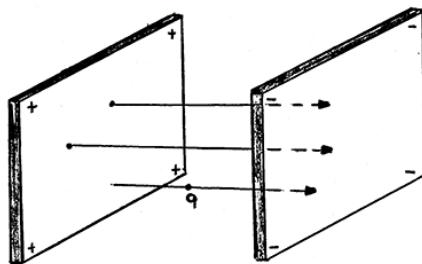


Figura 1.12: Due piastre caricate di segno opposto generano un campo elettrico uniforme che ha medesima intensità direzione e verso.

mette in moto. La forza prodotta dal campo elettrico tende a farla muovere lungo le linee di forza del campo stesso⁴. Nel muovere la carica nella regione di spazio in cui è presente il campo elettrico, esso stesso compie lavoro e quindi modifica l'energia della carica. Cosa accade se voglio muovere una carica da un punto A ad un punto B , ad esempio lungo il percorso γ_1 rappresentato in figura 1.13? In questo caso non sarà il campo a compiere lavoro, ma sono io che debbo oppormi alla forza generata dal campo elettrico.

SPEZZIAMO IL PERCORSO γ_1 in tanti piccoli tratti $d\bar{l}_k$ rettilinei, cioè approssimiamo la curva con una spezzata (figura 1.14). Il lavoro che devo compiere lungo il tratto $d\bar{l}_1$ è pari a⁵ $\mathcal{L}_1 = -q\bar{E}_1 \cdot d\bar{l}_1 = -qE_1 dl_1 \cos \alpha_1$ e quindi, sommando i contributi lungo tutto il percorso, ricavo l'approssimazione

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} \approx -q \sum_{k=1}^N E_k dl_k \cos \alpha_k . \quad (1.7)$$

Al limite in cui considero infinitesimi i singoli tratti $d\bar{l}_k$, la 1.7 può essere scritta in forma integrale

$$\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = -q \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} . \quad (1.8)$$

SE PRENDO UN ALTRO PERCORSO per andare da A a B e lo chiamo γ_2 , in generale si avrà $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} \neq \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1}$. Siamo interessati a quelle situazioni in cui il lavoro per portare una carica elettrica da A a B non dipende dal percorso. In quel caso il campo elettrico si dice **conservativo** e, come accade ad esempio per il campo gravitazionale, possiamo definire un'**energia potenziale** $W(P)$ che dipende dal generico punto P della regione di spazio in cui viene definita e in cui è presente il campo. Tale funzione consente di esprimere il lavoro che si deve compiere per muovere una carica dal A a B lungo un qualunque percorso come $\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} = \mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2} = W(B) - W(A)$.

NORMALIZZANDO LA FUNZIONE W RISPETTO ALLA CARICA q si definisce la funzione $V(P) = W(P)/q$ che chiamiamo **potenziale elettrico**. Inoltre definiamo **tensione elettrica** V_{BA} la differenza di potenziale $V_B - V_A$, cioè il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) che dobbiamo compiere per muovere una carica da A a B . La tensione elettrica si misura in Volt [V]. Una tensione di 1V è il lavoro necessario per spostare una carica di 1C lungo un percorso rettilineo di 1m in una regione in cui ci sia un campo elettrico, diretto come il percorso che voglio far compiere alla carica ma di verso opposto, di intensità pari a 1Nm^{-1} .

⁴ Da notare che siamo sempre nel vuoto.

⁵ Si noti il segno “-” che compare in \mathcal{L}_1 e quindi nella 1.7 e che tiene in conto il fatto che per muovere la carica debbo compiere un lavoro opponendomi alla forza $q\bar{E}$ esercitata dal campo sulla carica q .

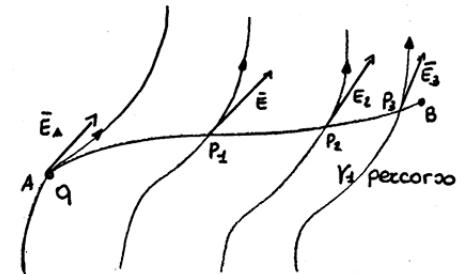


Figura 1.13: Il percorso γ_1 lungo il quale voglio muovere la carica q dal punto A al punto B .

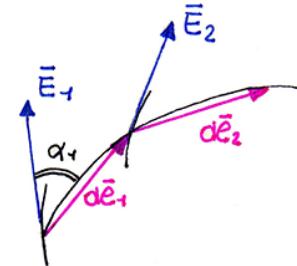


Figura 1.14: Suddivisione del percorso γ_1 in piccoli spostamenti rettilinei lunghi i quali il campo elettrico è assunto costante.

È IMPORTANTE NOTARE CHE se il campo elettrico è conservativo allora il lavoro fatto per spostare una carica lungo un percorso chiuso (figura 1.15) è identicamente nullo:

$$\begin{aligned} - \int_{\gamma_1} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1}}{q} = V_{BA} \\ - \int_{\gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \frac{\mathcal{L}_{BA}^{\gamma_2}}{q} = - \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_2}}{q} = -V_{BA} \\ \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \bar{E} \cdot d\bar{l} &= \oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \frac{\mathcal{L}_{AB}^{\gamma_1} + \mathcal{L}_{BA}^{\gamma_2}}{q} = V_{BA} - V_{BA} = 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

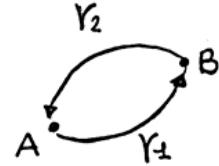


Figura 1.15: Percorso chiuso γ da A ad A passando per B : $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

VEDREMO IN SEGUITO introducendo le equazioni di Maxwell che *in condizioni statiche (stazionarietà) il campo elettrico è conservativo*. Ai fini della nostra trattazione, se non esplicitamente specificato, assumeremo la conservatività del campo elettrico nell'ipotesi più debole di quasi-stazionarietà. Torneremo su quest'ipotesi nell'introdurre il modello circuitale.

VERIFICHIAMO ADESSO CHE il campo elettrico generato da una carica puntiforme Q (figura 1.16) ammette un potenziale ovvero è conservativo. Suddividendo il percorso γ in figura 1.16 in tratti rettilinei $d\bar{l}$ rappresentati in figura 1.17, il lavoro necessario per muovere una carica q lungo ciascun tratto $d\bar{l}$ può essere scritto come

$$d\mathcal{L} = -q \bar{E} \cdot d\bar{l} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l}. \quad (1.10)$$

Facendo riferimento alla figura 1.17 notiamo come sia possibile scomporre il vettore $d\bar{l}$ nella somma di due contributi, uno ($d\bar{l}_{\parallel}$) diretto come il versore \hat{r} e uno ($d\bar{l}_{\perp}$) normale ad esso. Possiamo allora riscrivere la 1.10 come

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot (d\bar{l}_{\perp} + d\bar{l}_{\parallel}) = -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{l}_{\parallel} = \\ &= -q \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \underbrace{\hat{r} dr}_{d\bar{l}_{\parallel}} = -q \frac{1}{4\pi\epsilon r^2} \frac{Q}{r^2} dr \end{aligned} \quad (1.11)$$

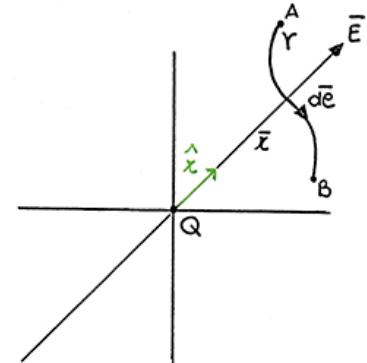


Figura 1.16: Un percorso γ immerso nel campo radiale generato da una carica puntiforme.

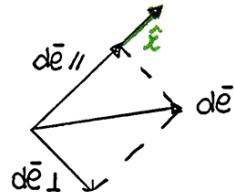


Figura 1.17: Scomposizione del passo infinitesimo $d\bar{l}$.

e quindi ottenere

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{AB}^\gamma &= - \int_A^B \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \\
 &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} q \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B} = -q \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right) \\
 &= -q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_B} \right) = -q(V_A - V_B) = -qV_{AB} = qV_{BA}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

che non dipende dal percorso ma solo da A e B . Il campo elettrico ammette quindi un potenziale $V(r) = \frac{Q}{(4\pi\epsilon_0 r)}$.

È IMPORTANTE SOTTOLINEARE come qualunque energia potenziale, e di conseguenza il potenziale elettrico, sia una grandezza definita a meno di una costante additiva. In altre parole, se scrivessimo a partire da $V(P)$ una nuova funzione potenziale $\tilde{V}(P) = V(P) + V_0$ con V_0 costante, il lavoro necessario per spostare un carica q da A a B (normalizzato rispetto alla carica) resterebbe invariato essendo $\frac{\tilde{\mathcal{L}}_{AB}}{q} = \tilde{V}(B) - \tilde{V}(A) = V(B) + V_0 - (V(A) + V_0) = \frac{\mathcal{L}_{AB}}{q}$. Per convenzione, si definisce $V(\infty) = 0$ e quindi si ottiene che

$$\frac{\mathcal{L}_{\infty,A}}{q} = - \int_{\infty}^A \bar{E} \cdot d\bar{l} = V_A - V(\infty) = V_A \tag{1.13}$$

e quindi qV_A è il lavoro necessario per portare una carica q dall'infinito al punto A nell'ipotesi che in tutto lo spazio ci sia il medesimo campo elettrico conservativo.

1.6 Legge di Kirchhoff per le tensioni

Possiamo quindi enunciare la legge di Kirchhoff per la tensione che, in regime quasi-stazionario, afferma che

lungo una qualunque linea chiusa, la somma algebrica delle tensioni, prese con il segno opportuno in base al verso di percorrenza della linea, è nulla.

A titolo di esempio, in figura 1.18 è rappresentata una linea chiusa γ , che immaginiamo di percorre dal punto A in senso antiorario, in una regione dello spazio in cui è presente un campo elettrico \bar{E} .

Dato che ipotizziamo di essere in regime quasi-stazionario, il campo \bar{E} ammette un potenziale ed è conservativo. Spostandomi dal punto A con l'idea di tornarci, posso immaginare di spezzare il percorso in "tappe": da A a B , da B a C , da C a D e da D in A , caratterizzate dalla tensione V_{BA} , V_{CB} , V_{DC} e V_{DA} , rispettivamente. Posso

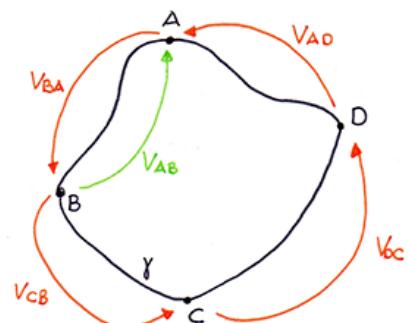


Figura 1.18: Legge di Kirchhoff per le tensioni: un esempio.

dunque scrivere

$$\left(\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \right) V_{BA} + V_{CB} + V_{DC} + V_{AD} = 0 , \quad (1.14)$$

dove le tensioni hanno tutte il segno “+” perché orientate come il percorso. Se avessi deciso di scegliere la tensione V_{AB} invece della tensione V_{BA} , avrei dovuto scrivere $-V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 0$, essendo V_{AB} orientata nel senso opposto rispetto al percorso.

1.7 Flusso di un campo vettoriale

DATA UNA SUPERFICIE APERTA S (figura 1.19), identifichiamo il suo bordo γ e decidiamo arbitrariamente di percorrerlo in senso antiorario. Il verso di percorrenza di γ fissa il verso del versore \hat{u}_N normale alla superficie S in ogni suo punto in base alla regola del cavatappi⁶.

Presi la generica areola piana dS come in figura 1.19, θ è l'angolo fra \hat{u}_N (versore perpendicolare a dS) e \vec{A} (il campo vettoriale di cui voglio definire il flusso $\Phi_S(\vec{A})$ attraverso S) sul piano individuato dai 2 vettori. In modo approssimato, considerando \vec{A} costante e pari a \vec{A}_k su tutte le areole piane dS_k ($k = 1, 2, \dots$) che possono essere individuate su S (ho quindi approssimato S con una superficie “piana a tratti”), si può scrivere $\Phi_S(\vec{A}) \approx \sum_k A_k \cos \theta_k dS_k$. Passando quindi al limite in cui le areole vengono assunte infinitesime possiamo scrivere

$$\Phi_S(\vec{A}) = \int_S \vec{A} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.15)$$

1.8 Legge di Gauss

PRENDIAMO UNA CARICA Q e posizioniamola nel vuoto al centro di una sfera S di raggio R . Il campo elettrico generato da Q è $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ diretto radialmente rispetto al centro della sfera. Si ottiene

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\oint_S dS}_{4\pi r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0} , \quad (1.16)$$

essendo $\hat{r} \cdot \hat{u}_N = 1$, poiché il raggio della sfera è orientato come la normale alla sfera in ogni suo punto.

In generale, la legge di Gauss per il campo elettrico afferma che, data una superficie chiusa S , il flusso del campo elettrico \vec{E} attraverso

⁶ La regola del cavatappi è esemplificata in figura 1.20 in cui la mano che con le dita segue il verso di percorrenza della linea è la mano destra.

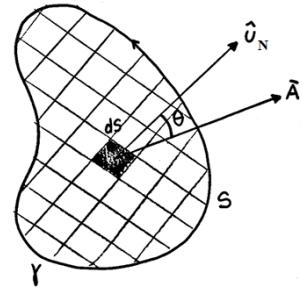


Figura 1.19: Flusso di un campo vettoriale.

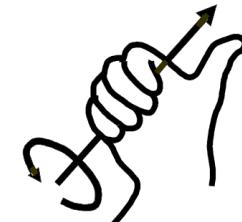


Figura 1.20: La regola del cavatappi.

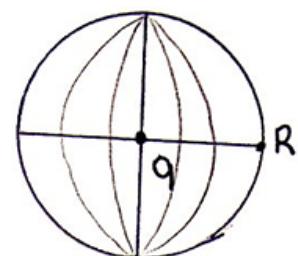


Figura 1.21: Legge di Gauss: un caso particolare.

di essa è proporzionale alla carica elettrica netta contenuta al suo interno (figura 1.22):

$$\Phi_S(\bar{E}) = \frac{\sum_k q_k}{\epsilon_0} . \quad (1.17)$$

Si noti che nella 1.17 la carica netta $\sum_k q_k$ all'interno di S potrebbe essere nulla qualora fosse nullo il bilancio tra le cariche positive e quelle negative.

1.9 Dielettrici (o isolanti)

IN UN DIELETTRICO NON CI SONO PARTICELLE LIBERE DI MUOVERSI ma in presenza di un campo elettrico gli atomi e le molecole che lo compongono si **polarizzano** cioè divengono dipoli elettrici orientati in base al campo elettrico locale (figura 1.23). La polarizzazione fa nascere una distribuzione netta di carica positiva e negativa sulle diverse facce del materiale. È il motivo per cui la carta si muove se la mettiamo vicino all'ambra "elettrificata": si polarizza a causa del campo elettrico generato dall'ambra elettrificata e, siccome è leggera, la forza esercitata sulle cariche la sposta vincendo gli attriti e la forza di gravità. Se spacchiamo un dielettrico polarizzato (figura 1.24) si ottengono due pezzi di materia con carica superficiale tanto positiva quanto negativa e potremmo andare avanti fino al livello atomico. Complessivamente, quindi, otterremmo per scissione sempre corpi a carica netta nulla.

1.10 La corrente elettrica

LA CORRENTE ELETTRICA I , misurata in Ampere ($A = Cs^{-1}$), è definita, in termini operativi, come la carica elettrica che fluisce, nell'unità di tempo, attraverso una superficie di controllo posta in una regione dello spazio. La possiamo introdurre facendo riferimento alla situazione semplice e semplificata riportata in figura 1.25. Immaginiamo un piccolo cilindretto di lunghezza $v\Delta t$ che contiene n cariche q che si muovono a velocità costante \bar{v} parallelamente al cilindretto stesso. Nell'intervallo di tempo Δt , tutte le n cariche attraversano la superficie di base dS del cilindretto.

Si rileva dunque una (intensità media di) corrente I attraverso dS pari a $nq/\Delta t = \Delta Q/\Delta t$. Se si assume $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta Q = Q(t) - Q(t_0)$, cioè la carica che attraversa dS in Δt viene espressa come l'incremento della carica che aveva attraversato la superficie fino a t_0 ,

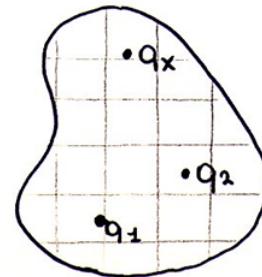


Figura 1.22: Legge di Gauss: un caso più generale.

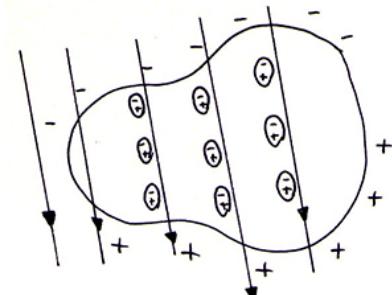


Figura 1.23: Un dielettrico immerso nelle linee di forza di un campo elettrico.

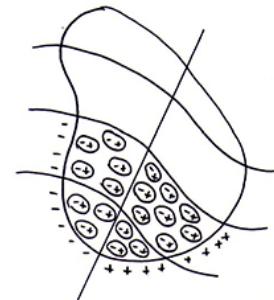


Figura 1.24: La linea di "taglio" separa il dielettrico in due porzioni a carica netta nulla.

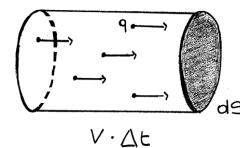


Figura 1.25: Cariche elettriche in moto.

passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene

$$I = \frac{dQ}{dt} . \quad (1.18)$$

È evidente che, in base alla sua definizione, la corrente I è una grandezza scalare. Tuttavia, nei circuiti elettrici che studieremo, indicheremo abitualmente la corrente con una freccia dotata di verso. In questa rappresentazione assumeremo, per convenzione, che una corrente I abbia il verso e la direzione delle cariche positive. In altre parole, quando indicheremo con una freccia il verso in cui fluisce una corrente I , indicheremo che in quel verso si stanno muovendo cariche positive o che cariche negative si stanno muovendo nel verso opposto.

PER INTRODURRE IL CONCETTO DI CORRENTE abbiamo fatto riferimento finora ad una situazione particolare, quella in cui particelle cariche con carica q si muovono con velocità costante \bar{v} , nella medesima direzione e con lo stesso verso. Più in generale, consideriamo una superficie di controllo infinitesima dS con versore normale \hat{u}_N , attraverso la quale sono in moto con velocità \bar{v} particelle cariche la cui densità per unità di volume sia ρ_V . La carica netta passante attraverso l'unità di area nell'unità di tempo è dunque

$$\rho_V \bar{v} \cdot \hat{u}_N dS = \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (1.19)$$

essendo $\bar{j} = \rho_V \bar{v}$ (misurato in Am^{-2}) il campo vettoriale che indica la **densità di corrente**. Se indichiamo adesso con S una superficie orientata (mediante il versore \hat{u}_N) che si trovi in una regione dello spazio in cui è presente il campo \bar{j} , la corrente elettrica I attraverso S è espressa come

$$I = \Phi_S(\bar{j}) = \int_S \bar{j} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (1.20)$$

Se S è in ogni suo punto perpendicolare a \bar{j} , la corrente è lo scalare $I = \rho_V v S$.

1.11 La formalizzazione del principio di conservazione della carica

NEL PARAGRAFO 1.1 È STATO PRESENTATO il principio di conservazione della carica elettrica e si è concluso che *l'unico modo in cui la carica interna ad un sistema, racchiuso in un volume V , può variare è in presenza di una corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie di separazione del volume stesso dal mondo esterno*. Avendo introdotto il concetto di corrente elettrica, possiamo adesso formalizzare il principio di conservazione della carica.

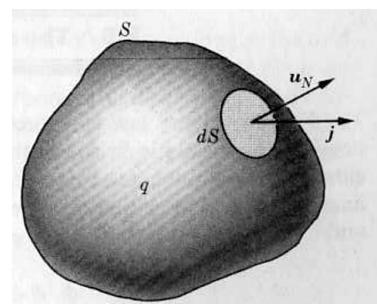


Figura 1.26: La superficie S chiusa racchiude la carica q .

CONSIDERIAMO IL VOLUME in figura 1.26 delimitato dalla superficie S e sia q la carica netta che è presente all'interno di esso in un dato istante di tempo t . Possiamo immaginare che ci sia un flusso di cariche, attraverso S , che entrano nel volume e/o che ne fuoriescono. Queste cariche in moto definiscono un campo densità di corrente \bar{J} e la corrente I attraverso S sarà pari a

$$I = \oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS . \quad (1.21)$$

La corrente I , in base alla 1.18, esprime la variazione della carica q rispetto al tempo ovvero $\oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS = I = -\frac{dq}{dt}$. Per giustificare la presenza del segno “-” possiamo ragionare nel modo seguente. Ipotizziamo che la carica netta q nel volume V sia positiva. Qualora si rilevi una corrente $I > 0$ (presa con il verso uscente dal volume V) allora o delle carica positiva sta uscendo attraverso S oppure della carica negativa sta entrando. In entrambi i casi, la carica netta interna al volume V sta diminuendo, cioè $\frac{dq}{dt} < 0$. Si procederebbe con un ragionamento analogo qualora la corrente I fosse negativa.

UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTRICO, $q = \epsilon_0 \oint_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N dS$ e quindi il principio di conservazione della carica può essere formalizzato come

$$\oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N dS = 0 , \quad (1.22)$$

dove il campo elettrico \bar{E} è quello sulla superficie S .

1.12 Conduttori

I CONDUTTORI SONO MATERIALI IN CUI CI SONO DEI PORTATORI DI CARICA (elettroni o ioni) in grado di muoversi più o meno liberamente attraverso il mezzo. In presenza di un campo elettrico i conduttori manifestano un comportamento detto **induzione elettrostatica**. Le cariche elettriche mobili si accumulano in superficie, disponendosi in modo tale da indurre all'interno del conduttore un campo elettrico che annulla gli effetti di quello esterno.

LE LINEE DI FORZA DI \bar{E} ALL'ESTERNO DEL CONDUTTORE sono perpendicolari alla sua superficie, altrimenti metterebbero in moto la carica superficiale rompendo l'equilibrio dovuto all'induzione elettrostatica. Se \bar{E} all'interno di un conduttore è nullo, $\int_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l}$ su qualunque percorso γ aperto all'interno del conduttore è nullo. Se ne deduce quindi che *un conduttore è equipotenziale*.

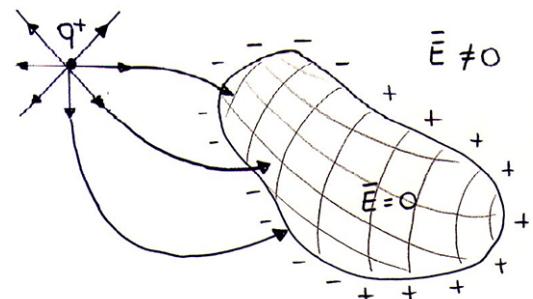


Figura 1.27: Un conduttore inserito in un campo elettrico ne deforma le linee di forza.

Inoltre, preso un volume V qualunque all'interno del conduttore delimitato da una superficie S , applicando il teorema di Gauss possiamo scrivere⁷

$$\Phi_S(\bar{E}) = \oint_S \bar{E} \cdot \hat{n}_N ds = 0 = \frac{Q}{\epsilon_r \epsilon_0}, \quad (1.23)$$

dove Q è la carica netta all'interno del volume V . Se ne deduce quindi che $Q = 0$ ma ciò non vuol dire che in V non ci sia carica elettrica, ma che è nullo il bilancio tra cariche positive e cariche negative. Il ragionamento può essere esteso a superfici chiuse che giacciono all'interno del conduttore e che si estendano fino allo spessore di alcuni strati atomici dalla sua superficie. Nell'intorno della superficie del conduttore, infatti, le cariche sono sbilanciate per generare il campo elettrico necessario a rendere nullo all'interno del volume il campo elettrico complessivo.

COME SI PUÒ generare e quali caratteristiche ha la corrente elettrica in un conduttore?

IN UN MATERIALE CONDUTTORE con portatori gli elettroni, esiste una struttura reticolare periodica nello spazio, costituita dagli atomi del conduttore privati degli elettroni mobili che sono in grado di spostarsi a causa del legame metallico che li lega debolmente al nucleo. Esso genera un campo elettrico interno, a livello microscopico, che mette in moto disordinato gli elettroni. Questo movimento non genera però un flusso netto di corrente. Presa infatti una superficie di controllo S (figura 1.28), in media nel tempo tanti elettroni la passano in un verso e altrettanti nel verso opposto e quindi si rileva, mediamente, un flusso netto nullo di carica attraverso S . Per avere corrente elettrica I mediamente non nulla, bisogna generare un campo elettrico all'interno del conduttore che generi un moto di deriva (*drift*) degli elettroni, rendendo ordinato il moto casuale che li caratterizza invece in assenza di campo imposto dall'esterno.

MUOVENDOSI, PERÒ, GLI ELETTRONI URTANO con il reticolo e gli perdono energia, quindi l'effetto del campo \bar{E} non sarà di accelerarli indefinitamente, come accadrebbe nel vuoto, ma di fare loro assumere una velocità di deriva costante che si sperimenta essere $\bar{v}_{drift} = -\mu \bar{E}$ con $\mu > 0$ mobilità delle cariche libere ($[\mu] = \text{mCs}^{-1}\text{N}^{-1}$). Questa relazione è valida per valori di \bar{E} relativamente bassi, tipici dei componenti elettrici ed elettronici.

⁷ Nella 1.23 la costante ϵ_r è la *permittività relativa*, chiamata anche *costante dielettrica*, che caratterizza il mezzo (materiale) che stiamo considerando. È un numero puro e per la maggior parte dei materiali è maggior di 1.

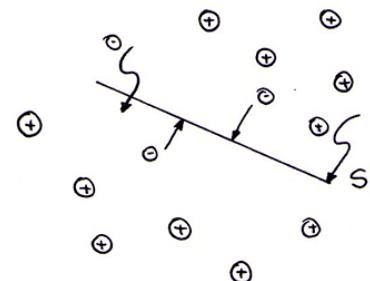


Figura 1.28: Flusso netto di cariche.

Si noti il segno “-” nell'espressione della \bar{v}_{drift} dovuto al fatto che l'orientamento di \bar{E} , per definizione (cfr. paragrafo 1.2) riferito ad una carica di prova positiva mentre l'elettrone ha carica negativa.

1.13 La legge di Ohm

CONSIDERIAMO UN CILINDRETTO dV di materiale conduttore (figura 1.29) caratterizzato da una densità volumetrica di carica ρ_V costante e applichiamo una differenza di potenziale $\Delta V = V_A - V_B > 0$ tra i punti A e B che identificano due sezioni dS . Essa genera un campo elettrico costante \bar{E} , all'interno del conduttore, che diretto da A verso B , cioè dalla sezione a potenziale maggiore a quella a potenziale minore. Data la lunghezza $dl = \underbrace{\mu E}_{|\vec{v}_{drift}|} \Delta t$ del cilindretto, la quantità di

$$|\vec{v}_{drift}|$$

carica libera contenuta nella regione delimitata da A e B , che in Δt è in grado di oltrepassare la sezione dS in B , è pari a $\Delta Q = \rho_V \underbrace{\mu E \Delta t dS}_{dV}$.

Il lavoro (normalizzato rispetto alla carica) compiuto dal campo \bar{E} (diretto come \vec{v}) per portare le cariche libere da B e A è pari a

$$\int_B^A \bar{E} \cdot d\bar{l}_{BA} = \int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{l}_{AB} = V_B - V_A = -\Delta V . \quad (1.24)$$

Dall'equazione precedente, essendo E costante in dV , si ottiene $V_B - V_A = Edl_{AB}$ da cui di ricava banalmente $E = -\frac{\Delta V}{dl}$. La corrente media nel cilindretto è dunque data dalla relazione

$$\Delta I = -\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mu \rho_V \frac{dS}{dl_{AB}} \Delta V = \gamma \frac{dS}{dl_{AB}} \Delta V , \quad (1.25)$$

dove γ è la *conducibilità* del materiale. Portando la 1.25 al limite per Δt che tende a zero possiamo scrivere $V = RI$ (legge di Ohm) con $R = \rho \frac{dl_{AB}}{dS}$ che chiamiamo **resistenza** ($\rho = \gamma^{-1}$ è la *resistività* del materiale).

1.14 La legge di Kirchhoff per le correnti

RECUPERIAMO IL PRINCIPIO di conservazione della carica per enunciare la legge di Kirchhoff per le correnti. In condizioni (quasi-)stazionarie, ovvero in presenza di campi (pressoché) costanti, l'equazione 1.22 diventa

$$I = \oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS = 0 , \quad (1.26)$$

ovvero possiamo affermare che

in regime (quasi-)stazionario il bilancio delle correnti entranti e delle correnti uscenti da una superficie chiusa è nullo.

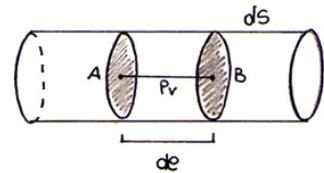


Figura 1.29: Un cilindretto di materiale conduttore.

Si noti il segno “-” che precede $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Come nel caso del principio di conservazione della carica (cfr. paragrafo 1.11), la corrente I esprime la variazione della carica all'interno del cilindretto.

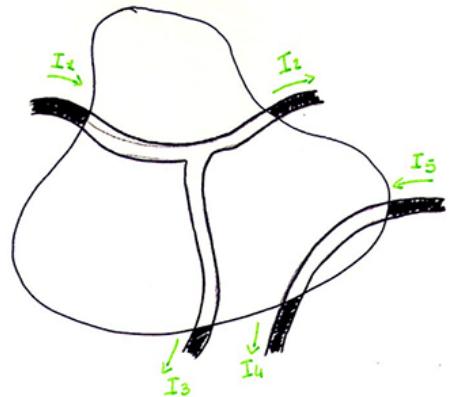


Figura 1.30: La legge di Kirchhoff per le correnti.

A TITOLO DI ESEMPIO, in figura 1.30, sono riportati alcuni corpi conduttori tagliati da una superficie di controllo S e sono indicate le correnti che fluiscono in essi. Alcune di queste correnti (I_1 e I_5) sono entranti nella superficie di controllo e altre uscenti (I_2 , I_3 , I_4). La somma di queste correnti costituisce la corrente I complessiva che attraversa S , cioè

$$\sum_{k=1}^5 a_k I_k = I = 0 , \quad (1.27)$$

con $a_k = 1$ se la corrente I_k è uscente da S e $a_k = -1$ altrimenti (è evidente che questa scelta è assolutamente arbitraria, la scelta duale lascerebbe inalterato il risultato).

1.15 Il primo circuito elettrico

COSTRUIAMO UN PICCOLO FILO SOTTILE di materiale conduttore (spira conduttrice), di lunghezza l e sezione S , che identifica un percorso chiuso γ (figura 1.31). Esso sarà caratterizzato da una resistenza R che dipende da l , S e dal tipo di materiale.

SUPPONIAMO DI POTER generare un campo elettrico \bar{E} , stazionario, all'interno del conduttore. Tale campo è conservativo e quindi $\oint_{\gamma} \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$. Se ne deduce che il campo \bar{E} non è in grado di generare

una corrente costante I all'interno della spira conduttrice dal momento che, in base alla legge di Ohm, è necessaria una differenza di potenziale $V = RI$ per permettere alle cariche libere di percorrere un tragitto γ che, da un punto di partenza all'interno della spira, si snoda all'interno di essa per richiudersi nel punto di partenza stesso. In altre parole, il campo nel compiere il suo lavoro lungo il tragitto γ cede energia alle cariche ma queste la perdono urtando tra loro e contro il reticolo fisso. Quindi, se non viene fornita una quantità netta di energia agli elettroni, essi non possono muoversi continuamente lungo un percorso chiuso.

È STATO POSSIBILE L'UTILIZZO di correnti elettriche solo dopo che Alessandro Volta nel 1799 inventò la **pila**, un convertitore di energia chimica in energia elettrica. All'interno della pila si genera un campo elettrico non conservativo che è in grado di produrre una differenza di potenziale costante V tra i poli + e - della pila stessa. L'effetto che questo produce, quando un filamento di materiale conduttore con resistenza R viene collegato tra i due morsetti, è di mettere in movimento le cariche, generando una corrente I , le quali, nel tragitto

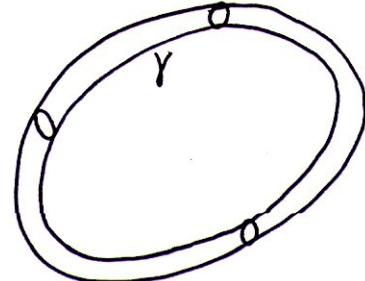


Figura 1.31: Una spira conduttrice.

lungo il filamento, vedono la loro energia diminuire di una quantità $V = RI$ che viene “ripristinata” quando attraversano la pila.

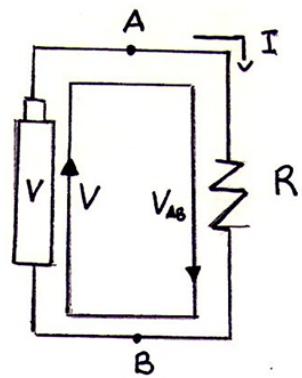


Figura 1.32: Un circuito elementare

2

2.1 Teoria dei circuiti - il modello circuitale

LA TEORIA DEI CIRCUITI è una disciplina fondamentale, che pervade tutta l'ingegneria elettrica, e trova applicazione in modo significativo anche nell'ambito dell'ingegneria elettronica.

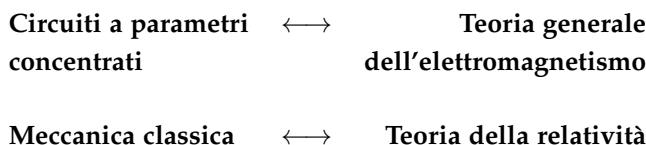
LA TEORIA DEI CIRCUITI si occupa dello studio di **circuiti ideali**, che sono *modelli* di circuiti fisici. Un circuito fisico è il risultato dell'interconnessione di componenti fisici (dispositivi). La teoria dei circuiti, invece, studia l'interconnessione di **componenti ideali** che modellano, in modo più o meno dettagliato in base alle esigenze specifiche, i componenti fisici. Il suo scopo è quello di predire il comportamento di un corrispondente circuito fisico (con diversi gradi di approssimazione) in termini di correnti e tensioni (ai terminali) e non si occupa dei fenomeni elettromagnetici, meccanici, termici o chimici che si manifestano nei componenti fisici e che sono, eventualmente, alla base del loro funzionamento.

$$\begin{array}{ccc} \text{Componenti fisici} & \longleftrightarrow & \text{Componenti ideali} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Circuiti fisici} & \longleftrightarrow & \text{Circuiti ideali} \end{array}$$

IN QUESTO CORSO considereremo solo circuiti elettrici a **parametri concentrati** (lumped circuit), cioè circuiti con dimensioni tali da fare sì che la propagazione elettromagnetica tra due punti qualunque del circuito sia pressoché istantanea. I circuiti non a parametri concentrati si dicono a parametri distribuiti. Ne sono un esempio le linee di trasmissione e le antenne. In un circuito a parametri concentrati, data l'ipotesi di propagazione istantanea, la posizione reciproca dei componenti non altera il comportamento del circuito. In queste ipotesi, quindi, come avremo modo di sperimentare nel seguito, la geometria del circuito non è discriminante per il suo funzionamento mentre

fondamentale è il modo in cui i componenti sono interconnessi. In altre parole, avendo cura di preservare le connessioni tra i componenti, saremo liberi, quando occorre, di "ridisegnare" il circuito senza per questo alterarne il comportamento.

NELLO SCHEMA SEGUENTE è evidenziato come, in termini qualitativi, la teoria dei circuiti, che si occupa di circuiti a parametri concentrati, sta alla teoria generale dell'elettromagnetismo come la meccanica classica sta alla teoria della relatività. Questo accostamento vuole solo evidenziare come la teoria dei circuiti, che utilizza modelli semplificati dei componenti fisici (che costituiscono i componenti o elementi circuitali), sia in grado di descrivere con ottima approssimazione il comportamento dei circuiti reali che potrebbero, in modo assai più complesso, essere studiati mediante le leggi generali dell'elettromagnetismo. Allo stesso modo, la meccanica classica è in grado di descrivere fenomeni fisici di interesse applicativo in modo più semplice di quanto non si dovrebbe fare ricorrendo alla più completa teoria della relatività. È comunque opportuno avere ben presente che, tanto la teoria dei circuiti quanto la meccanica classica, si basano su modelli (più) semplificati della realtà e che, al cadere delle ipotesi sulla quale si basano, non sono in grado di descrivere e/o predire in modo corretto i fenomeni fisici di nostro interesse.



2.2 Componenti e variabili descrittive - Amperometro e Voltmetro ideali

IL **componente** è un oggetto limitato da una superficie chiusa, detta **superficie limite del componente** da cui escono almeno 2 **terminali** alle estremità dei quali si trovano i **morsetti** (figura 2.1).

ATTRaverso i **terminali** possiamo raggiungere altri componenti ai quali collegarci con i morsetti (figura 2.2) per formare così circuiti elettrici o meglio reti elettriche. Per essere rigorosi, si definisce circuito la semplice interconnessione di componenti (anche più di due) che formino una sola maglia (il concetto sarà chiaro in seguito) come in figura 2.2. Interconnessioni più complesse, che formino cioè più maglie, si definiscono reti elettriche. Per semplicità, utilizzeremo indifferentemente le parole circuito e rete.

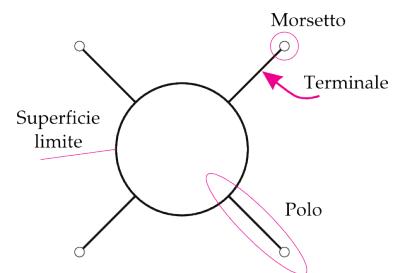


Figura 2.1: Il componente, i suoi terminali e i suoi morsetti.

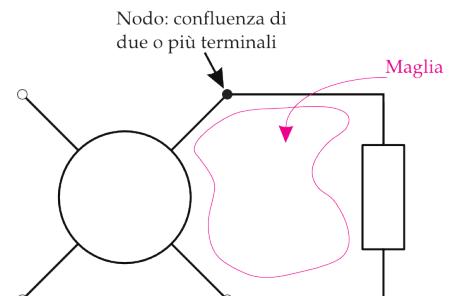


Figura 2.2: Una connessione elementare tra componenti

IN BASE AL NUMERO DI TERMINALI un componente si chiamerà

- 2-terminali \rightarrow bipolo
- 3-terminali \rightarrow tripolo
- 4-terminali \rightarrow quadripolo
- :
- n -terminali \rightarrow n -polo

In generale non si è interessati a ciò che “accade” all’interno della superficie limite del componente (cioè ai fenomeni elettromagnetici, ma anche meccanici, chimici o termici, che sono responsabili del suo funzionamento specifico), ma si è interessati alle grandezze elettriche misurabili ai morsetti (cioè dall’esterno) che sono in grado di caratterizzare il comportamento del componente. Tali grandezze possono essere corrente o tensione ma andrebbero bene anche la carica elettrica o il flusso magnetico. Tuttavia, queste ultime sono più difficili da misurare e quindi ci limiteremo all’uso della corrente e della tensione in qualità di **variabili descrittive**.

MISUREREMO LE CORRENTI mediante l'**amperometro** e la tensione mediante il **voltmetro**. Questi due bipoli particolari si rappresentano a terminali collassati mettendo in evidenza solo i loro morsetti identificati dai simboli + e -. Sono componenti ideali nel senso che non alterano il comportamento del circuito nel quale sono inseriti. L’amperometro (figura 2.3), attraversato dalla corrente che si vuole misurare dal morsetto + al morsetto -, non manifesta caduta di tensione tra di essi, nel senso che non è necessario compiere lavoro per portare le cariche elettriche da un morsetto all’altro attraversando la sua superficie limite.

IL VOLTMETRO, invece, collegato con i morsetti + e - ai morsetti tra i quali si vuole misurare la tensione (figura 2.4), non “preleva” corrente dal circuito.

CIASCUN COMPONENTE è caratterizzato da un’**equazione descrittiva** o **costitutiva** che può essere costituita da più relazioni che legano tra loro le variabili descrittive del componente. Quante correnti e quante tensioni servono, dato un n -terminali, per descrivere in modo esauritivo il suo comportamento? In altre parole, quante correnti e quante tensioni descrittive servono per costituire un insieme completo di tali variabili? È facile infatti convincersi, facendo ad esempio riferimento a figura 2.5, che per ciascun terminale è possibile misurare due diverse correnti, una entrante e una uscente dalla superficie limite del

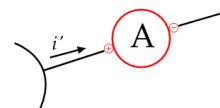


Figura 2.3: Un amperometro ideale rappresentato con i terminali collassati. La corrente che si vuole misurare lo attraversa dal morsetto + al morsetto -.

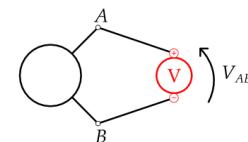


Figura 2.4: La tensione (cioè la differenza di potenziale tra due morsetti) si misura con il voltmetro (bipolo con terminali collassati), che non lascia fluire corrente al suo interno.

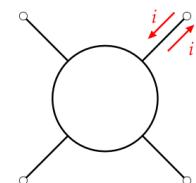


Figura 2.5: La corrente i e la corrente i' non sono indipendenti: $i = -i'$.

componente. Tuttavia è altrettanto facile convincersi che queste due “diverse” correnti non portano informazioni diverse sul comportamento del componente essendo, di fatto, l’una l’opposta dell’altra (la verifica a partire per dalla legge di Kirchhoff per le correnti è semplice e lasciata allo studente).

CONCENTRIAMOCI SUL BIPOLO rappresentato in figura 2.6. Utilizzando le leggi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni possiamo scrivere

$$\text{KCL} \rightarrow \begin{cases} i_A = -i'_A \\ i_B = -i'_B \\ i_A = i_B \end{cases} . \quad (2.1)$$

$$\text{KVL} \rightarrow V_{AB} = -V_{BA}$$

Sono sufficienti quindi solo due variabili descrittive, ad esempio la corrente i_A e la tensione V_{AB} .

QUESTO RISULTATO può essere esteso ad un n -terminali per il quale sono necessarie e sufficienti $n - 1$ correnti e $n - 1$ tensioni descrittive. Un modo possibile per selezionare un insieme completo di tali variabili nel caso di un n -terminali è esemplificato in figura 2.7. In particolare, si sceglie un morsetto di riferimento rispetto al quale misurare le tensioni dei restanti $n - 1$ morsetti, ai quali si misura anche la corrente di terminale. È evidente che la corrente al terminale corrispondente al morsetto di riferimento è banalmente deducibile dalle altre $n - 1$ correnti misurate.

Nel caso di un tripolo, in figura 2.8 è evidenziata una possibile scelta alternativa a quella finora illustrata. In particolare, nella parte sinistra della figura, si vede come l’insieme alternativo di variabili descrittive scelte (V_{BA}, V_{CB}) e (\hat{i}_B, \hat{i}_C), può essere ricavato a partire da quello canonico riportato a destra. È facile infatti convincersi che $\hat{i}_C = -i_C$ e che $V_{CB} = V_{CA} - V_{BA}$.

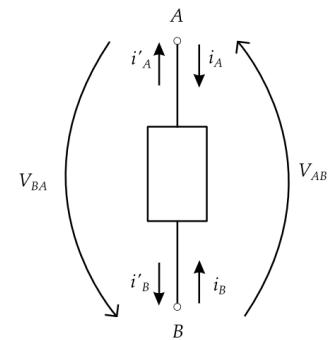


Figura 2.6: Le possibili correnti e tensioni descrittive per un bipolo.

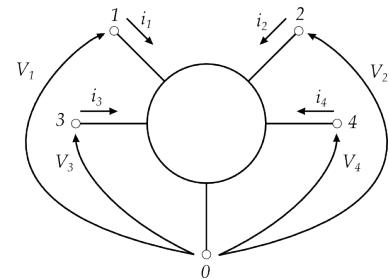


Figura 2.7: Tensioni e correnti descrittive per un n -terminali scelti sulla base di un arbitrario morsetto (e terminale) di riferimento.

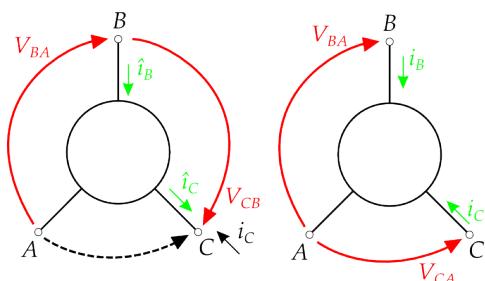


Figura 2.8: Le variabili descrittive per un tripolo: alcune scelte possibili.

2.3 Cenni di teoria dei grafi

MOLTI RISULTATI legati alla topologia delle reti elettriche (cioè, su come i componenti sono interconnessi tra loro e non su come si comportano) si basano sulla **teoria dei grafi**. La introduciamo in modo molto superficiale nonostante sia uno strumento concettuale importante, ampiamente utilizzato in molti settori, con ricadute anche nel campo informatico.

UN **grafo** è SPECIFICATO DA un insieme di n **nodi** e un insieme di l **lati**. Se i lati hanno un specifico orientamento, allora si parla di **grafo orientato**. Usiamo l'esempio riportato in figura 2.9 per introdurre alcuni concetti chiave.

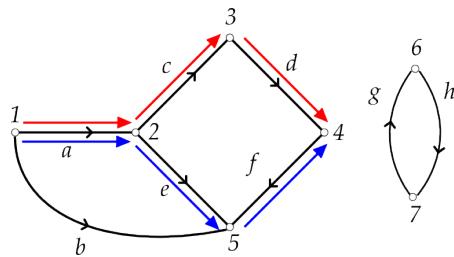


Figura 2.9: $n = 7$ nodi e $l = 8$ lati. I lati orientati del grafo sono rappresentati in nero e sono etichettati con una lettera. I nodi sono etichettati invece con un numero. La scelta delle etichette è assolutamente arbitraria. In rosso e in blu sono evidenziati due diversi percorsi che si possono identificare sul grafo.

Percorso Catena di lati che congiunge due nodi, gli estremi del percorso. Nel percorso ogni nodo e ogni lato si incontra una sola volta. In figura 2.9 sono riportati due esempi di percorso in rosso ed in blu. Nella definizione di un percorso, l'orientamento relativo dei lati che lo costituiscono rispetto al senso di percorrenza del percorso non è discriminante. Ad esempio il lato f in figura 2.9 è orientato in modo discorde al percorso.

Maglia Percorso in cui ciascun nodo ha un solo lato che entra e uno solo che esce (nodi di ordine due). In figura 2.9 il percorso dal nodo 6 al nodo 6 ($6 \rightarrow 7 \rightarrow 6$), che comprende il lati g ed h e i nodi 6 e 7, è una maglia così come, ad esempio, il percorso da 2 a 2 ($2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$) che comprende i lati c , d , f ed e e i nodi 2, 3, 4 e 5.

Sottografo Un sottoinsieme di nodi e lati di un grafo. Ad esempio, in figura 2.10 è mostrato un sottografo del grafo in figura 2.9 che si riduce all'insieme di nodi $\{1, 6, 7\}$ e all'insieme di lati $\{g, h\}$.

Grafo connesso Un grafo si dice connesso se esiste sempre un percorso che unisce due suoi nodi qualsiasi.

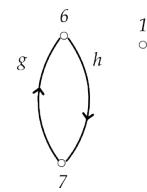


Figura 2.10: Un sottografo del grafo in figura 2.9. Da notare il nodo 1 che, non raggiunto da nessun lato del sottografo, rimane *appeso*

Albero Un grafo in cui ogni coppia di nodi è unita da uno e un solo percorso. Dato un grafo connesso, è possibile definire un albero ad esso associato prendendo un suo sottografo che contenga tutti ed n i suoi nodi e gli $n - 1$ lati che li connettono formando un percorso che rispetti la definizione di albero. Un esempio di albero è mostrato in figura 2.11.

Grafo incernierato È un grafo che contiene nodi *cerniera*. Un nodo si dice cerniera se, eliminando tutti i lati incidenti in esso, il sottografo risultante è composto da un nodo appeso (il nodo cerniera) e due sottografi tra loro non connessi (figura 2.12).

2.4 Grafo di un componente e grafo di un circuito

SE PER OGNI COMPONENTE definiamo un grafo e poi interconnettiamo i grafi tra loro otteniamo il grafo di un circuito. Il grafo di un circuito dipende solo dalla topologia della rete (cioè da come i componenti sono tra loro interconnessi) e non dalla natura (equazioni caratteristiche) dei componenti.

PER DEFINIRE IL GRAFO DI UN COMPONENTE a n terminali possiamo prendere un nodo di riferimento e costruire un grafo che ha come nodi gli n morsetti e come $n - 1$ lati le tensioni descrittive del componente prese tra $n - 1$ morsetti e il morsetto di riferimento.

Un esempio è mostrato in figura 2.13. Per come sono state scelte le tensioni e le correnti descrittive del tripolo in 2.13, è evidente che il grafo del componente potrà essere *orientato come le tensioni o come le correnti descrittive*. Nell'orientamento secondo le tensioni, ciascun lato ha una freccia orientata come la tensione descrittiva identificata tra i due morsetti nei quali incide il lato stesso. Nel grafo orientato come le correnti, i lati sono orientati con una freccia nella direzione fissata dalla corrente presa sul terminale che non identifica il morsetto di riferimento.

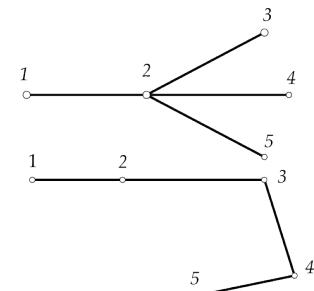
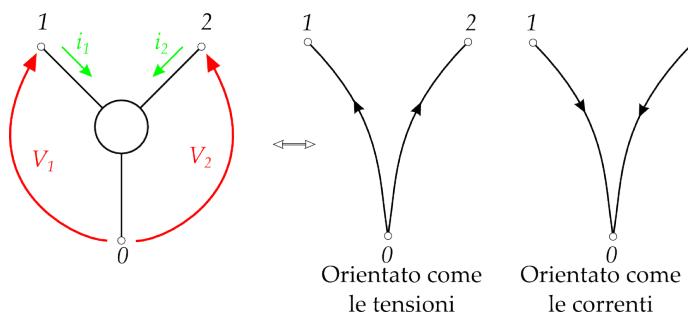


Figura 2.11: Del grafo in figura 2.9 non è possibile ottenere l'albero associato perché si tratta di un grafo non connesso. Se ci limitiamo però a considerare il sottografo composto dai nodi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e dai lati $\{a, b, c, d, e, f\}$ è possibile identificare i due alberi evidenziati in questa figura che hanno 5 nodi e 4 lati.

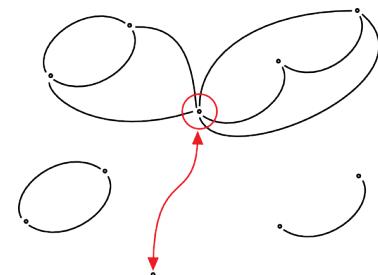


Figura 2.12: Un esempio di grafo incernierato e di nodo cerniera che rimane appeso dopo aver eliminato i lati che in esso confluiscono.

Figura 2.13: Tripolo: grafo a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

ESISTONO PERÒ ALTRE SCELTE possibili per definire il grafo di un componente che non siano quella descritta la quale fornisce un *grafo (albero) a stella*. Un esempio è mostrato in figura 2.14. In questo caso le tensioni e le correnti descrittive del tripolo sono state scelte diversamente e il grafo è costituito dai 3 morsetti del componente e dai 2 lati identificati dalle tensione descrittive. Anche in questo caso è possibile orientare il grafo come le tensioni (il che è immediato) oppure come le correnti. In quest'ultima soluzione, si prenderà per ogni lato l'orientamento fissato dalla corrente del terminale che corrisponde al morsetto su cui insiste la freccia della tensione che identifica il lato stesso.

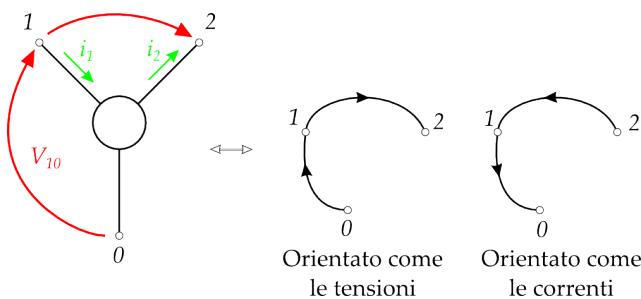


Figura 2.14: Tripolo: grafo non a stella orientato come le tensioni o come le correnti.

È EVIDENTE CHE se non si adotta un modo sistematico per scegliere le tensioni e le correnti descrittive, l'informazione contenuta nel grafo di un circuito orientato come le tensioni non permette di ricavare l'orientamento delle correnti e viceversa. A questo proposito si possono adottare due diverse convenzioni: la **convenzione normale** o degli **utilizzatori** e la **convenzione dei generatori**. Sceglieremo tipicamente la prima per la quale, dato un lato del grafo di un componente orientato come le tensioni, si fissa il verso della corrente in quel lato in modo che scorra nel verso opposto a quello indicato dalla tensione (figura 2.15). Analogamente se il grafo fosse orientato come le correnti. La convenzione dei generatori orienta tensioni e correnti in modo concorde.

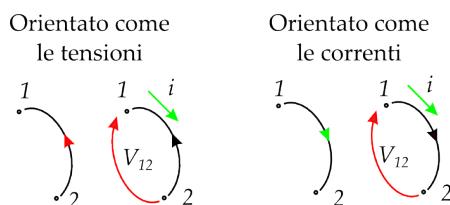


Figura 2.15: Lato di un grafo orientato come la tensione o come la corrente nell'ipotesi di convenzione normale o degli utilizzatori.

2.5 Esercizio: circuito e grafo

PER ESERCIZIO si provi a disegnare il grafo del circuito, orientato come le tensioni con convenzione normale del circuito in figura 2.16. Quanti nodi n e quanti lati l ha il grafo del circuito?

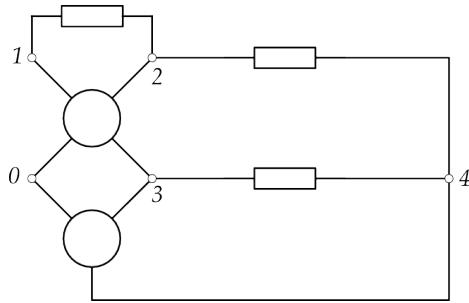


Figura 2.16: Schema di un circuito di cui si vuole disegnare il grafo corrispondente

Il grafo ha $n = 5$ nodi e $l = 8$ lati dato che il quadripolo contribuisce con 3 lati, il tripolo con 2, e ciascuno dei tre bipoli con un lato. Per ciascun componente sceglieremo le tensioni descrittive e quindi il loro orientamento. Le correnti vanno scelte in modo da rispettare la convenzione degli utilizzatori (figura 2.17). Il grafo del circuito è mostrato in figura 2.18

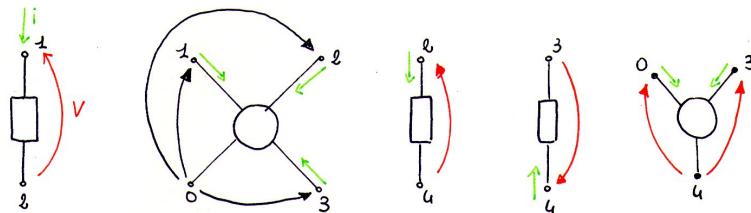


Figura 2.17: Grafo dei componenti che costituiscono il circuito in figura 2.16.

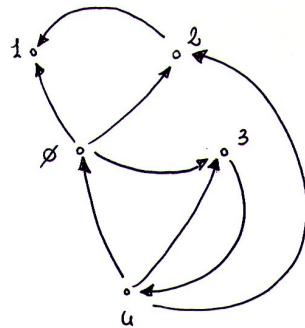


Figura 2.18: Grafo del circuito in figura 2.16.

2.6 Nota sulle equazioni algebriche

DATA UNA FUNZIONE f definita su di un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e che assume valori reali¹, l'espressione

$$f(x) = b , \quad (2.2)$$

con $b \in \mathbb{R}$ costante che non dipende da x , è un'equazione **algebrica** nella variabile x e le sue soluzioni (ammesso che esistano) sono l'insieme dei valori assumibili da x tale che la 2.2 sia identicamente soddisfatta.

L'equazione 2.2 si dice **lineare** se la funzione f è lineare in x ovvero se, presi due valori $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ appartenenti a D e due costanti reali α_1 ed α_2 non nulle,

$$f(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 f(x^{(1)}) + \alpha_2 f(x^{(2)}) . \quad (2.3)$$

Una funzione g di più variabili, cioè $g(x_1, x_2, \dots, x_N) : D_N \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, definisce un'equazione algebrica in N incognite del tipo

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = b , \quad (2.4)$$

con $b \in \mathbb{R}$ costante che non dipende da (x_1, x_2, \dots, x_N) . La 2.4 si dice lineare se g è una funzione lineare in (x_1, x_2, \dots, x_N) ovvero se, prese due N -ple $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)})$ e $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)})$ appartenenti a D_N e due costanti reali α_1 ed α_2 non nulle,

$$\begin{aligned} g\left(\alpha_1\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right)\right) &= \\ &= \alpha_1 g\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_N^{(1)}\right) + \alpha_2 g\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_N^{(2)}\right) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Prese M equazioni del tipo 2.4, possiamo definire il **sistema** di M equazioni algebriche in N incognite ($M \geq 2$ e, in generale, $N \neq M$)

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_1 \\ \vdots \\ g_M(x_1, x_2, \dots, x_N) = b_M \end{cases} , \quad (2.6)$$

di cui i sistemi lineari sono un caso particolare.

Le M equazioni del sistema 2.6 sono **linearmente dipendenti** se esiste almeno un insieme di M costanti (k_1, \dots, k_M) , di cui almeno 2 non nulle, tali che

$$\sum_{j=1}^M k_j [g_j(x_1, x_2, \dots, x_N) - b_j] = 0 \quad (2.7)$$

per qualunque N -pla $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Le M equazioni algebriche sono linearmente indipendenti se e solo se non sono linearmente dipendenti.

¹ Le definizioni che daremo in questo paragrafo sono limitate a funzioni reali di variabile reale ma possono essere estese in modo del tutto naturale al campo complesso \mathbb{C} .

2.7 Le leggi di Kirchhoff

AVENDO INTRODOTTO gli strumenti basilari per studiare la topologia di un circuito possiamo introdurre le leggi di Kirchhoff per le correnti (KCL) e per le tensioni (KVL) non come un prodotto delle leggi dell'elettromagnetismo ma come se fossero assiomi della teoria dei circuiti.

KVL-I: dato un circuito a parametri concentrati con n nodi e il cui grafo sia connesso, prendiamo uno dei suoi nodi come riferimento u_0 per misurare il potenziale elettrico e indichiamo con u_1, \dots, u_{n-1} i rimanenti potenziali di nodo². Ad ogni istante di tempo t , la tensione V_{kj} misurata tra il nodo k e il nodo j è pari a $u_k - u_j$.

KVL-II: dato un circuito a parametri concentrati con n nodi e il cui grafo sia connesso, preso un percorso chiuso che passi per m nodi del grafo, ad ogni istante di tempo t , la somma algebrica delle tensioni fra i nodi consecutivi che si incontrano lungo il percorso è nulla. La somma si intende algebrica poiché le tensioni che si incontrano lungo il percorso e che sono orientate come il verso di percorrenza del percorso stesso vengono prese con il segno "+". Quelle orientate invece nel senso opposto vengono prese con il segno "-".

È FACILE VERIFICARE che i due enunciati della legge di Kirchhoff per le tensioni sono equivalenti. A titolo di esempio, consideriamo il circuito in figura 2.19 del quale, dopo aver indicato le tensioni descrittive dei componenti che lo costituiscono, abbiamo ricavato il grafo orientato come le tensioni. Utilizzando le KVL-I e scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico, possiamo scrivere $V_{21} = u_2 - u_1$, $V_{32} = u_3 - u_2$, $V_{31} = u_3 - u_1$, $V_{10} = V_1 = u_1$, $V_{20} = V_2 = u_2$ e $V_{30} = u_3$. Utilizzando poi le KVL-II lungo il percorso segnato in verde e percorso in senso orario possiamo scrivere $V_{10} + V_{21} - V_{23} - V_{30} = 0$. Sostituendo le relazioni dedotte dalle KVL-I al primo membro della KVL-II, si ottiene $u_1 + u_2 - u_1 - (u_2 - u_3) - u_3$ che è identicamente nullo come richiesto da quest'ultima.

KCL: Prendiamo una superficie orientata che tagli solo terminali e che non attraversi superfici limite dei componenti. Per un circuito a parametri concentrati, in ogni istante di tempo t , la somma algebrica di tutte le correnti uscenti e entranti dalla superficie orientata sopra definita è nulla. La somma si intende algebrica nel senso che, avendo ad esempio scelto di orientare la superficie

² Senza perdere generalità possiamo assumere $u_0 = 0$.

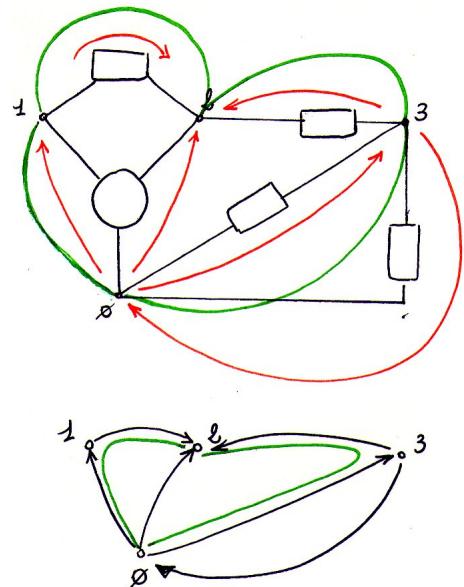


Figura 2.19: Equivalenza tra KVL-I e KVL-II.

positivamente dall'interno verso l'esterno, le correnti uscenti da essa saranno prese con segno “+” e quelle entranti con segno “−”. Viceversa se si fosse scelto di orientare la superficie positivamente dall'esterno verso l'interno.

A titolo di esempio si consideri il circuito in figura 2.20 del quale si è ricavato il grafo orientato come le tensioni. Entrambe le due superfici rappresentate in figura sono state orientate positivamente dall'esterno verso l'interno. In questo caso il bilancio delle correnti alla superficie più piccola tracciata intorno ad uno dei nodi del grafo è pari a $i_1 - i_2 + i_3 = 0$ mentre il bilancio alla superficie più grande è $i_3 - i_4 - i_5 = 0$. Notiamo che le equazioni di Kirchhoff per le tensioni e per le correnti sono equazioni lineari algebriche.

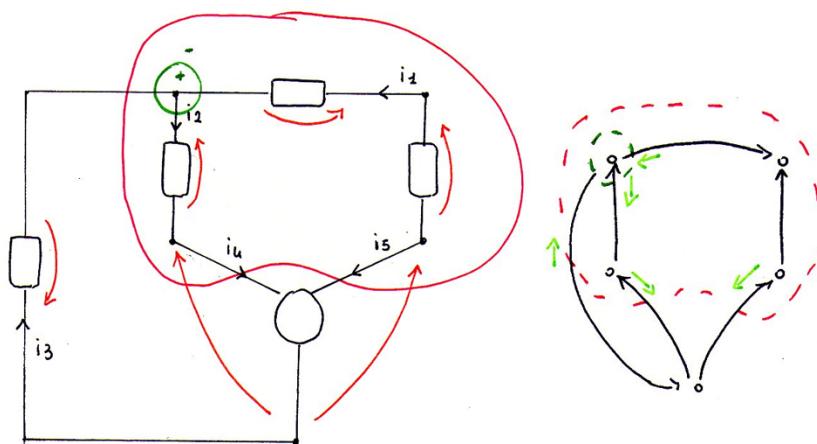


Figura 2.20: Un esempio di superfici chiuse da impiegare per scrivere i bilanci in corrente di tipo KCL.

UNA DOMANDA che è necessario porsi è la seguente: *dato un circuito a parametri concentrati il cui grafo sia connesso, quante equazioni KCL e quante KVL-II è possibile scrivere affinché siano tutte e sole quelle che servono per esprimere la topologia della rete?* In linea di principio, se il grafo del circuito avesse l lati, avremmo bisogno di conoscere $2l$ grandezze (l tensioni descrittive e l correnti descrittive) per risolvere la rete. Le equazioni descrittive dei componenti forniscono l relazioni in $2l$ incognite che legano le variabili descrittive tra loro³ e la topologia dovrebbe fornire le informazioni mancanti per riuscire a scrivere, complessivamente, $2l$ relazioni in $2l$ incognite. Utilizzando la teoria dei grafi è possibile dimostrare che dal grafo di un circuito con n nodi ed l lati, è possibile ricavare **$n - 1$ KCL linearmente indipendenti e $l - n + 1$ KVL-II linearmente indipendenti**, ovvero complessivamente l equazioni di tipo topologico.

³ Ogni m -polo ha un grafo composto da $m - 1$ lati che contribuiscono al grafo complessivo del circuito. Inoltre ogni m -polo ha un'equazione costitutiva composta da $m - 1$ relazioni che legano le sue $m - 1$ correnti descrittive e le sue $m - 1$ tensioni descrittive.

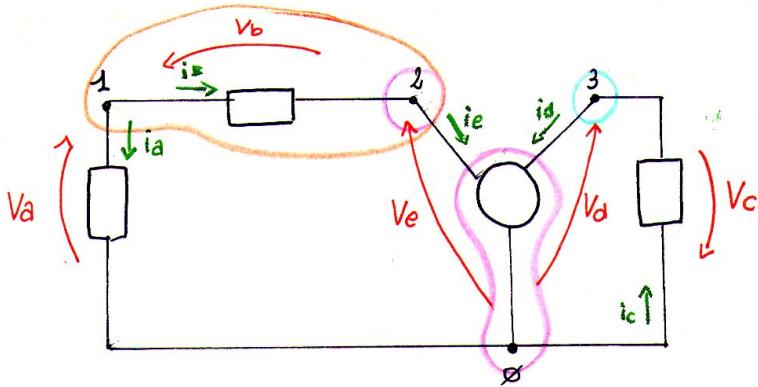


Figura 2.21: KCL: un esempio.

FACENDO RIFERIMENTO AL CIRCUITO in figura 2.21 proviamo a scrivere un insieme di equazioni KCL linearmente indipendenti. Il circuito ha $n = 4$ nodi e quindi dobbiamo aspettarci al più 3 KCL linearmente indipendenti. Possiamo prendere, orientandole tutte positivamente dall'interno verso l'esterno, la superficie A che racchiude il bipolo descritto da i_b e v_b , la superficie B che racchiude il nodo 3, e la superficie C che racchiude il tripolo e il nodo di riferimento. I bilanci delle correnti sono i seguenti

$$\begin{aligned} A : i_a + i_e &= 0 \\ B : i_d - i_c &= 0 \\ C : i_c - i_e - i_d - i_a &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (2.8)$$

TUTTAVIA, sommando membro a membro i bilanci alle superfici A e B, si ottiene il bilancio alla superficie C cambiato di segno il che vuol dire che la scelta fatta non ha prodotto 3 equazioni linearmente indipendenti (cfr. paragrafo 2.6). È quindi necessario scegliere un'altra superficie, ad esempio quella che chiameremo D e che racchiude il nodo 2, orientata anch'essa positivamente all'interno verso l'esterno, scrivendo così il bilancio

$$D : i_e - i_b = 0 . \quad (2.9)$$

È immediato verificare che il bilanci alle superfici A, B e D sono linearmente indipendenti ad esempio osservando che la corrente i_b non è presente in A e B e la corrente i_a non è presente in B e D.

IN GENERALE, si dimostra che prendere i bilanci alle $n - 1$ superfici, che racchiudono ciascuna soltanto uno dei nodi del circuito il cui grafo ha n nodi (tipicamente non viene scelto il bilancio al nodo di riferimento), garantisce la scelta di $n - 1$ equazioni KCL linearmente indipendenti⁴. Nell'esempio considerato si scriverebbero dunque i

⁴ Non sempre è la scelta migliore dal punto di vista della complessità del sistema di equazioni lineari algebriche che ne deriva, ma è un'ottima scelta algoritmica per codificare una procedura di risoluzione automatica di un circuito con il calcolatore.

seguenti bilanci:

$$\begin{aligned} 1 : i_a + i_b &= 0 \\ 2 : i_e - i_b &= 0 \\ 3 : i_d - i_c &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

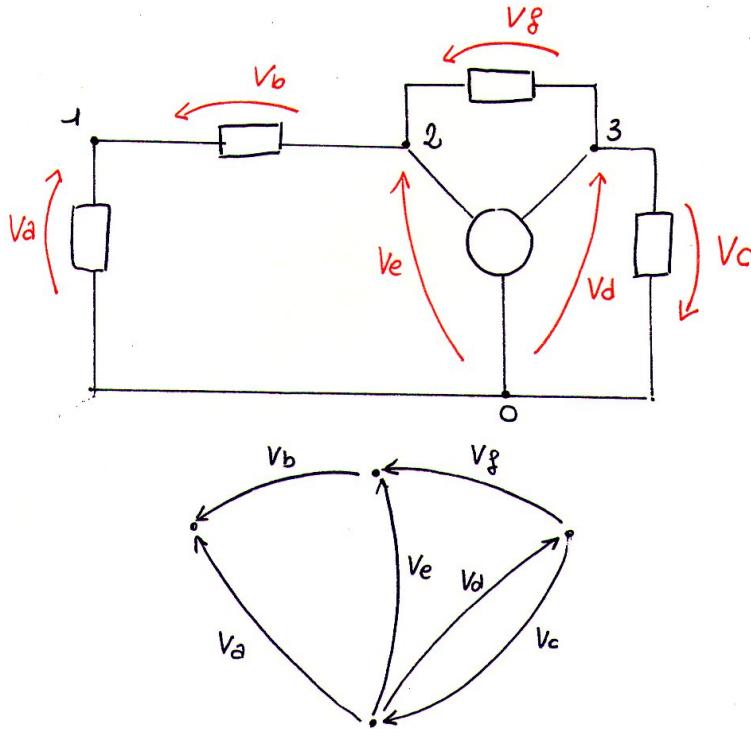


Figura 2.22: KVL-II: un esempio.

ANALOGAMENTE SI PUÒ PROCEDERE, facendo riferimento alla figura 2.22, per verificare che avendo un grafo connesso con l lati ed n nodi, è possibile trovare $l - n + 1$ maglie che producono altrettante equazioni KVL-II linearmente indipendenti. Nell'esempio in questione $l = 6$ e $n = 4$ e quindi ci aspettiamo $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ KVL-II linearmente indipendenti. Iniziamo col considerare la maglia I che interessa il percorso $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2$

$$I : V_b - V_a + V_e = 0 , \quad (2.11)$$

la maglia II, che interessa il percorso $2 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2$

$$II : -V_g + V_c + V_a - V_b = 0 , \quad (2.12)$$

la maglia III, che interessa il percorso $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

$$III : V_e - V_g + V_c = 0 . \quad (2.13)$$

Facendo la somma delle KVL-II alle maglie I e II si ottiene

$$(V_b - V_a + V_e) + (-V_g + V_c + V_a - V_b) = V_e - V_g + V_c = 0 , \quad (2.14)$$

e si deduce quindi che le tre equazioni non sono linearmente indipendenti. Prendiamo invece la maglia IV che interessa il percorso $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$:

$$IV : V_d + V_c = 0 , \quad (2.15)$$

è facile verificare che I , II e IV sono linearmente indipendenti dato che V_d compare solo nella IV e V_g solo nella II .

Anche nel caso delle KVL-II esiste una procedura sistematica che permette di selezionare $l - n + 1$ maglie linearmente indipendenti. Si basa su una costruzione che richiede la scelta di un albero e di un co-albero⁵ associati al grafo del circuito e non verrà affrontata in questo corso.

LA TOPOLOGIA DEL CIRCUITO riportato in figura 2.23 può essere riassunta dal grafo di figura 2.24 (orientato come le tensioni) caratterizzato da $n = 4$ nodi e da $l = 6$ lati. Conseguentemente ci aspettiamo $n - 1 = 3$ equazioni KCL linearmente indipendenti e $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$ equazioni KVL-II linearmente indipendenti.

Per quanto riguarda le KCL possiamo scrivere (orientando le superfici di controllo dall'interno verso l'esterno)

$$\begin{aligned} A &: i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ B &: -i_1 + i_3 - i_5 - i_6 = 0 \\ C &: i_1 - i_1 - i_2 + i_5 + i_6 = -i_2 + i_5 + i_6 = 0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ma $A + B : (i_1 + i_2 - i_3) + (-i_1 + i_3 - i_5 - i_6) = -i_2 + i_5 + i_6 = 0$ ovvero $A - B \rightarrow C$. Possiamo allora scegliere il bilancio alla superficie $D : -i_1 - i_4 - i_5 = 0$ che è linearmente indipendente da A e B che non contengono i_4 .

Per quanto riguarda le KVL-II, con riferimento alla figura 2.25 possiamo scrivere il bilancio seguenti maglie:

$$\begin{aligned} I &: V_{13} + V_{41} - V_{43} = 0 \\ II &: V_{12} + V_{41} + V_{24} = 0 \\ III &: V_{13} - V_{12} - V_{23} = 0 \\ IV &: V_{23} - V_{24} - V_{43} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sappiamo però che almeno uno dei quattro bilanci deve essere linearmente dipendente dagli altri ed infatti $II + III + IV : V_{12} + V_{41} + V_{24} + V_{12} - V_{12} - V_{23} + V_{23} - V_{24} - V_{43} = V_{41} + V_{13} - V_{43} = 0$ ovvero $II + III + IV \rightarrow I$. È altrettanto facile verificare che II , III e IV sono linearmente indipendenti.

COME ULTERIORE ESEMPIO possiamo considerare il circuito in figura 2.26 per il quale, noti $i_A = 2A$, $i_C = 3A$ e $i_E = 1A$, si richiede di calcolare i_F , i_D e i_B .

⁵ Un co-albero è il sottografo rimanente dopo aver eliminato da un grafo tutti i lati che costituiscono un possibile albero ad esso associato.

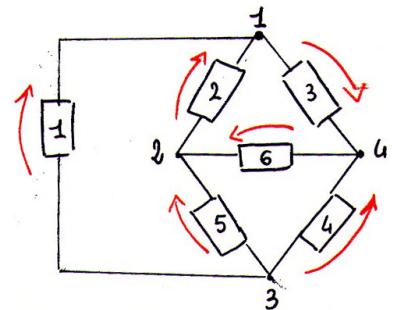


Figura 2.23: Un altro esempio

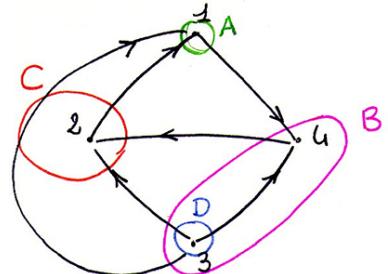


Figura 2.24: KCL. Il grafo è orientato come le tensioni.

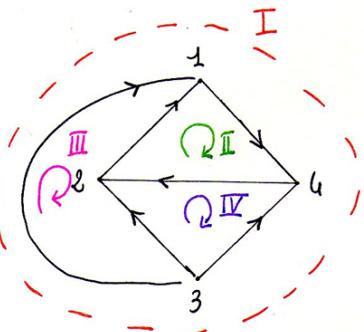


Figura 2.25: KVL-II. Il grafo è orientato come le tensioni.

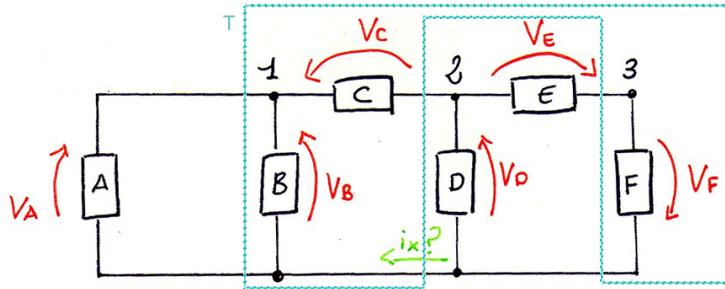


Figura 2.26: Ancora un altro esempio.

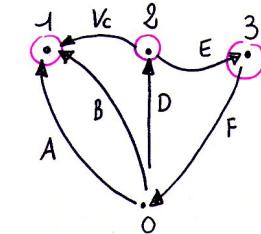
Prendendo il nodo 0 come riferimento, $n - 1$ KCL linearmente indipendenti possono essere certamente scritte prendendo il bilancio delle correnti alle tre superfici che racchiudono ciascuna uno dei restanti 3 nodi del grafo.

$$\begin{aligned} i_A + i_B + i_C &= 0 \rightarrow i_B = -i_A - i_C = -2A - 3A = -5A \\ -i_C - i_E + i_D &= 0 \rightarrow i_D = i_C + i_E = 3A + 1A = 4A \\ i_E - i_F &= 0 \rightarrow i_E = i_F \rightarrow i_F = 1A \end{aligned} \quad . \quad (2.18)$$

SE FOSSIMO INVECE INTERESSATI alla corrente i_x in figura 2.26 potremmo scrivere il bilancio alla superficie T riportata nella figura stessa: $i_A - i_B - i_F + i_E + i_C - i_x = 0$ da cui $i_x = i_D - i_F = 4A - 1A = 3A$. È importante notare come la corrente i_x non compare sul grafo del circuito in quanto è prelevata su di una parte della rete che di fatto è stata fatta collassare nel nodo 0. La superficie T che è stata tracciata sul circuito non può essere infatti tracciata sul grafo. Il tratto di circuito che è stata fatto collassare in 0 e sul quale misuriamo la corrente i_x è un bipolo particolare che è stato aggiunto per completezza in figura 2.28. Si chiama, come vedremo nel seguito, *corto circuito* (cfr. paragrafo 3.5.2) ed ha la caratteristica di poter essere attraversato da qualunque corrente mostrando una tensione nulla tra i suoi due morsetti. Data questa sua caratteristica può essere fatto collassare nel nodo 0 senza perdere nessuna informazione dal punto di vista delle tensioni della rete ma, se interessati alla corrente che lo attraversa (i_x nell'esempio), deve invece essere considerato nel grafo del circuito che avrà così un lato in più e, nell'esempio in questione, anche un nodo in più.

2.8 La matrice di incidenza e la matrice di incidenza ridotta

SI CONSIDERI UN GRAFO ORIENTATO costituito da n nodi ed l lati⁶. È possibile assegnare la *relazione di incidenza* tra i lati e i nodi del grafo utilizzando una tabella ordinata e costituita da n righe e l colonne,

Figura 2.27: Grafo orientato come le tensioni con $n = 4$, $l = 6$. KCL: $n - 1 = 3$. KVL-II: $l - n + 1 = 6 - 4 + 1 = 3$.

⁶ Prenderemo arbitrariamente un grafo orientato come le correnti e adotteremo la convenzione normale degli utilizzatori.

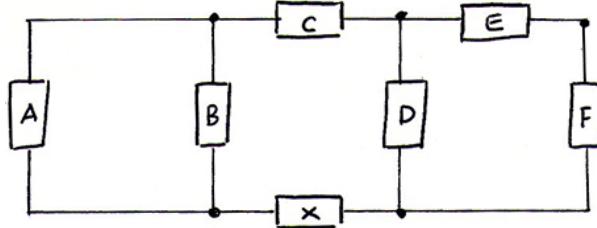


Figura 2.28: Lo schema del circuito in figura 2.27 con l'aggiunta del corto circuito (il bipolo x) per prelevare la corrente i_x .

cioè una **matrice di incidenza** rettangolare $n \times l$ denominata A_a ⁷. C'è corrispondenza biunivoca tra un grafo e la sua matrice di incidenza. Rappresentazione geometrica del grafo e matrice di incidenza sono una diversa rappresentazione della relazione di incidenza del grafo.

⁷ Se il grafo è connesso $l \geq n - 1$.

PER SCRIVERE LA MATRICE A_a , prendiamo gli n nodi del grafo e assegniamo un numero naturale ad ognuno di essi e lo stesso facciamo con gli l lati. La k -esima riga di A_a rappresenta il nodo k e la j -esima colonna di A_a il lato j . Il valore del generico elemento a_{kj} della matrice A_a sarà scelto in base alla regola seguente

$$a_{kj} = \begin{cases} +1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è uscente} \\ -1 & \text{il lato } j \text{ incide nel nodo } k \text{ ed è entrante} \\ 0 & \text{il lato } j \text{ non incide nel nodo } k \end{cases} . \quad (2.19)$$

Notiamo come ogni colonna di A_a abbia *sempre* due soli elementi non nulli, uno $+1$ e uno -1 , dato che ciascun lato è uscente da un solo nodo ed entrante in un solo nodo. Quindi, la somma di tutte le righe R_k di A_a ($k = 1, \dots, n$) restituisce un vettore riga nullo. Da ciò si deduce che le righe di A_a non sono linearmente indipendenti. Inoltre, dal momento che le colonne C_j di A_a ($j = 1, \dots, l$) sono dei vettori di \mathbb{R}^n possiamo aspettarci al più n colonne linearmente indipendenti della matrice A_a .

UNA PROPRIETÀ INTERESSANTE della matrice di incidenza è la seguente: $n - 1$ lati corrispondenti a $n - 1$ colonne di A_a linearmente indipendenti identificano un albero associato al grafo descritto da A_a . Questa proprietà può servire per realizzare procedure automatiche (al calcolatore) per localizzare un albero associato ad un grafo dato.

CONSIDERIAMO A TITOLO DI ESEMPIO il grafo in figura 2.29 e pensiamolo orientato come le correnti descrittive di un circuito ad esso abbinato.

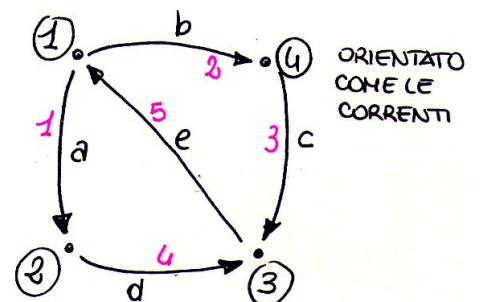


Figura 2.29: $n = 4$ e $l = 5$.

La matrice di incidenza risulta essere

$$A_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Osservando la matrice A_a di quest'esempio possiamo notare che,

come previsto, $\sum_{k=1}^4 R_k = 0$. Inoltre $C_5 = [-1, 0, 1, 0]^T = -C_3 - C_2$.

DAL FATTO CHE LE RIGHE DI A_a siano linearmente dipendenti, si intuisce che A_a contiene "troppe informazioni". Del resto, se pensiamo all'esempio considerato, ci accorgiamo facilmente come le righe di A_a altro non sono se non i bilanci (KCL), a ciascuno degli n nodi del grafo, delle correnti entranti e uscenti dai nodi stessi. Dal momento che sappiamo che un grafo ad n nodi ammette al più $n - 1$ equazioni KCL linearmente indipendenti, una delle righe di A_a è senz'altro ridondante. Possiamo allora prendere delle n righe di A_a , solo le $n - 1$ righe che corrispondono agli $n - 1$ nodi ai quali vogliamo considerare le KCL. Otteniamo così una **matrice di incidenza ridotta** A con $n - 1$ righe ed l colonne. Nell'esempio possiamo scartare arbitrariamente il nodo 4 e ottenerne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Organizzando in un vettore i ciascuna delle correnti i_j abbinata al lato j -esimo, possiamo scrivere le $n - 1$ KCL linearmente indipendenti in forma vettoriale come $Ai = 0$. Nell'esempio:

$$Ai = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

2.9 Equazioni di Tableau

DATO UN CIRCUITO IL CUI GRAFO SIA CONNESSO, con n nodi ed l lati, fissiamo per ogni nodo k il potenziale di nodo u_k avendo scelto un nodo di riferimento per il potenziale elettrico. Per la legge di Kirchhoff per le tensioni di tipo I, dati due nodi j e k del grafo, $V_{jk} =$

$u_j - u_k$. Riprendiamo l'esempio in figura 2.29 e scriviamo

$$\begin{aligned} V_{12} &= u_1 - u_2 \\ V_{14} &= u_1 - u_4 \\ V_{31} &= u_3 - u_1 \\ V_{23} &= u_2 - u_3 \\ V_{43} &= u_4 - u_3 \end{aligned} \quad . \quad (2.23)$$

È facile verificare che, definiti i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_a &= [u_1, u_2, u_3, u_4]^T \\ \mathbf{v} &= [V_{12}, V_{14}, V_{43}, V_{23}, V_{31}]^T \end{aligned} \quad , \quad (2.24)$$

le equazioni in 2.23 possono essere scritte in forma matriciale come

$$A_a^T \mathbf{u}_a = \mathbf{v} \quad . \quad (2.25)$$

SE PRENDIAMO ADESSO LO STESSO NODO di riferimento preso per introdurre la matrice di incidenza A e definiamo il vettore dei potenziali ridotto \mathbf{u} (cioè il vettore u_a dal quale si elimina l'elemento corrispondente al nodo che scegliamo come riferimento), possiamo introdurre le Equazioni di Tableau⁸

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad . \quad (2.26)$$

NOTIAMO CHE LE EQUAZIONI della 2.26 sono $n - 1$ equazioni di tipo KCL e l equazioni di tipo KVL I: in totale $l + n - 1$ equazioni in $2l + n - 1$ incognite. Se confrontiamo questi numeri con quelli in gioco utilizzando le KCL e le KVL-II, che introducono complessivamente $(n - 1) + (l - n + 1) = l$ equazioni in $2l$ incognite, le equazioni di Tableau risultano essere più onerose in termini computazionali. È necessario però sottolineare come questo approccio necessiti solo della matrice A e come, tipicamente, $l \gg n$. Quest'ultima considerazione implica che, in generale, per le reti di interesse pratico, $l + n - 1 \approx l$, il che non rende penalizzante l'uso delle equazioni di Tableau.

⁸ Notiamo che, scegliere il nodo 4 come riferimento per il potenziale elettrico, significa di fatto scegliere $u_4 = 0V$. Ciò è assolutamente corretto essendo il potenziale elettrico definito, come tutti i potenziali, a meno di una costante additiva.

3

3.1 Potenza ed energia elettrica

CONSIDERIAMO UN GENERICO BIPOLO e supponiamo che sia attraversato dalla carica $\Delta Q > 0$ nell'intervallo di tempo Δt in base al verso della freccia indicata in figura 3.1. Se supponiamo $V_{AB} = v > 0$ (ovvero il campo elettrico all'interno del bipolo compie un lavoro positivo per muovere la carica ΔQ) la carica perde una quantità di energia pari a $\Delta w_a = v\Delta Q$ nell'attraversare il bipolo. Se definiamo $p_a = \frac{\Delta w_a}{\Delta t}$ l'energia perduta per unità di tempo. Passando al limite possiamo scrivere

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta w_a}{\Delta t} = \frac{dw_a}{dt} . \quad (3.1)$$

L'equazione 3.1 può essere riscritta come (cfr. equazione 1.18)

$$p_a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v\Delta Q}{\Delta t} = v \frac{dQ}{dt} = vi . \quad (3.2)$$

$p_a(t)$ è la **potenza istantanea assorbita** dal bipolo e si misura in Watt [W].

PER IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA¹, l'energia perduta dalla carica che attraversa il bipolo sarà assorbita dal bipolo stesso che, in generale, è libero di trasformarla (si pensi l'energia assorbita da una lampadina che si trasforma in energia termica e luminosa). La potenza assorbita può essere positiva o negativa. Nel caso sia positiva, all'istante t , il bipolo sta effettivamente incamerando energia, altrimenti la sta *erogando*. Si può quindi definire la **potenza istantanea erogata** $p_e(t) = -p_a(t)$. Si noti che, qualora il bipolo fosse descritto con la convenzione dei generatori, si avrebbe $p_e(t) = vi$.

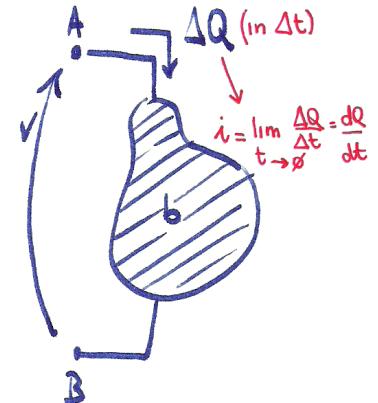


Figura 3.1: Definizione della potenza assorbita da un generico bipolo.

¹ In fisica, la legge di conservazione dell'energia è una delle più importanti leggi di conservazione osservata nella natura. Nella sua forma più intuitiva questa legge afferma che, sebbene l'energia possa essere trasformata e convertita da una forma all'altra, la quantità totale di essa in un sistema isolato non varia nel tempo.

3.1.1 Bipoli attivi e passivi

ASSUNTA LA CONVENZIONE NORMALE O DEGLI UTILIZZATORI, i bipoli per i quali la potenza assorbita $p_a(t)$ è positiva sempre (cioè in qualunque condizione di funzionamento) vengono detti **passivi**. Questa definizione implica che, se $t > t_0$,

$$w_a(t) = w_a(t_0) + \int_{t_0}^t p_a(\tau) d\tau > w_a(t_0) . \quad (3.3)$$

DAL PUNTO DI VISTA DELL'ENERGIA $w_a(t)$ assorbita da un bipolo in un dato intervallo di tempo, si definiscono passivi anche quei bipoli che non sono in grado di erogare più energia di quella che abbiano incamerato precedentemente. In altre parole, nell'equazione 3.3, $w_a(t) \geq 0$. Questo aspetto sarà esemplificato chiaramente quando introdurremo il condensatore e l'induttore.

GLI UNICI BIPOLI NON PASSIVI, ovvero **attivi**, sono quelli in grado di erogare energia elettrica senza limitazioni e per quest'ultimi $w_a(t)$ potrà essere negativa.

3.1.2 Potenza assorbita da un n -terminali

COME GENERALIZZAZIONE della potenza assorbita da un bipolo è possibile ricavare l'espressione della potenza assorbita da un generico n -terminali. In particolare, se si assume di associare ad esso un grafo costituito da $n - 1$ lati e di scegliere la convenzione degli utilizzatori, essendo $v_k(t)$ e $i_k(t)$ la tensione e la corrente descrittiva associate al lato k -esimo all'istante t , la potenza istantanea assorbita dall' n -terminali è pari a

$$p_a(t) = \sum_{k=1}^n v_k(t)i_k(t) . \quad (3.4)$$

3.2 Il teorema di Tellegen

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO ARBITRARIO il cui grafo connesso ad n nodi sia stato orientato come le correnti degli l lati, rispettando la convenzione normale o degli utilizzatori per le tensioni. Siano $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_l)^T$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_l)^T$ due insiemi qualunque di correnti e tensioni di lato che soddisfano le equazioni di Kirchhoff per il grafo (e quindi per il circuito). \mathbf{i} e \mathbf{v} si dicono **compatibili** con il

grafo. Il teorema di Tellegen afferma che

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = \mathbf{i}^T \mathbf{v} = \sum_{k=1}^l v_k i_k = 0 . \quad (3.5)$$

PER DIMOSTRARE IL TEOREMA utilizziamo le equazioni di Tableau introdotte nel paragrafo 2.9, cioè $A\mathbf{i} = 0$ e $\mathbf{v} = A^T \mathbf{u}$ essendo \mathbf{u} il vettore dei potenziali di nodo ridotto. Possiamo quindi scrivere

$$\mathbf{v}^T \mathbf{i} = (A^T \mathbf{u})^T \mathbf{i} = \mathbf{u}^T A\mathbf{i} = \mathbf{u}^T 0 = 0 . \quad (3.6)$$

SI NOTI che i vettori \mathbf{i} e \mathbf{v} sono compatibili con il grafo ma non hanno alcuna relazione particolare tra loro. Non sono infatti legate alle equazioni descrittive dei componenti che compongono il circuito e delle quali non si è detto nulla. Se prendessimo quindi due insiemi di tensioni \mathbf{v}' e \mathbf{v}'' compatibili con il grafo e due insiemi di correnti \mathbf{i}' e \mathbf{i}'' , anch'esse compatibili con il grafo, potremmo scrivere

$$\mathbf{v}'^T \mathbf{i}' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}'^T \mathbf{i}'' = \mathbf{v}''^T \mathbf{i}' = 0 . \quad (3.7)$$

IL TEOREMA DI TELLEGGEN racchiude in sè il **teorema di conservazione dell'energia**. Infatti, se considerassimo un circuito e *miserissimo* ad ogni istante t la tensione e la corrente di ogni suo lato k ($k = 1, \dots, l$) secondo la convenzione degli utilizzatori osserveremmo che $\sum_{k=1}^l v_k(t)i_k(t) = 0$ dove $v_k(t)i_k(t)$ è la potenza assorbita in t dal lato k -esimo. Per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è conseguenza diretta delle leggi di Kirchhoff.

LE "POTENZE" $v_k i_k$ tirate in gioco dal teorema di Tellegen si definiscono **potenze virtuali** dato che non necessariamente rappresentano un flusso reale di energia.

3.2.1 Esempio 1

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 3.2. Vogliamo verificare per questo circuito il teorema di Tellegen prendendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale elettrico. Scegliamo un insieme di correnti di lato e di tensioni di lato compatibili con il grafo del circuito (lo studente lo verifichi per esercizio). Si noti che il grafo del circuito è stato orientato come le correnti.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (i_1, i_2, i_3, i_4)^T = (3, 1, 3, -4)^T \\ \mathbf{v} &= (V_1, V_2, V_3, V_4)^T = (1, 5, 4, 5)^T \end{aligned} \quad (3.8)$$

Per verificare il teorema di Tellegen è sufficiente calcolare $\mathbf{v}^T \mathbf{i}$ ovvero $1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot (-4) = 0$. Proviamo a scegliere un altro vettore

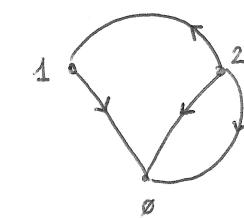
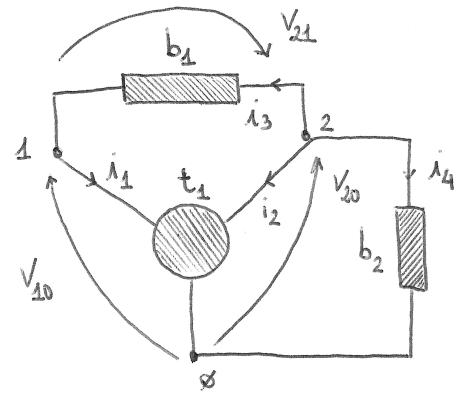


Figura 3.2: Un circuito e il suo grafo orientato come le correnti.

di correnti $\mathbf{i} = (10, -8, 10, -2)^T$ compatibili con il grafo. Questa volta dovremo valutare $1 \cdot 10 + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot 10 + 5 \cdot (-2) = 0$.

3.2.2 Esempio 2

SIANO DATI I DUE CIRCUITI in figura 3.3 e si supponga di conoscere un insieme v'' di tensioni compatibili con il grafo del secondo circuito (quello sulla destra della figura) e le corrente i'_4 del primo circuito (quello sulla sinistra della figura). Ricavare la corrente i'_1 .

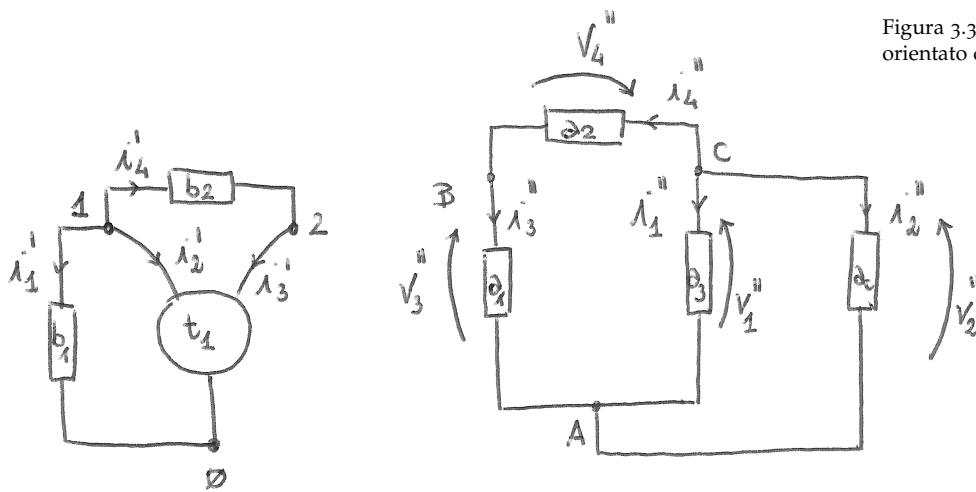
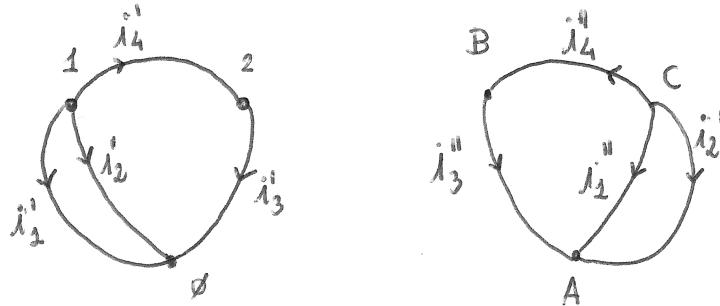


Figura 3.3: Un circuito e il suo grafo orientato come le correnti.



PER RISOLVERE L'ESERCIZIO ricaviamo come prima cosa i grafi dei due circuiti e orientiamoli come le correnti. Analizzando quindi i grafi ottenuti e riportati in figura, ci rendiamo conto che se $0 \equiv A$, $2 \equiv B$ e $1 \equiv C$, essi sono identici anche come orientamento dei lati. Questo vuol dire che l'insieme di tensioni v'' è compatibile anche con il grafo del primo circuito. Inoltre si noti che, applicando la KCL ai nodi 1 e 2, si ottiene, rispettivamente, $i'_2 = -i'_1 - i'_4$ e $i'_3 = i'_4$.

Applicando il teorema di Tellegen possiamo scrivere

$$v_1''i_1' + v_2''i_2' + v_3''i_3' + v_4''i_3' = v_1''i_1' - v_2''(i_1' + i_4') + v_3''i_4' + v_4''i_4' = 0 . \quad (3.9)$$

Nella precedente equazione l'unica incognita è i_1' e quindi possiamo ricavare

$$i_1' = \frac{v_2'' - v_3'' - v_4''}{v_1'' - v_2''} i_4' . \quad (3.10)$$

3.3 Classificazione di un componente

SUDDIVIDIAMO LA CLASSE dei componenti generici nel modo seguente

- Un componente si dice **adinamico** se la sua relazione costitutiva non contiene derivate e/o integrali delle variabili descrittive rispetto al tempo. Viceversa si dice **dinamico**.
- Un componente si dice **tempo-invariante** se la sua relazione costitutiva non cambia nel tempo. Le variabili descrittive dipendono (in generale) dal tempo, ma il modo in cui sono legate tra loro no. Viceversa si dice **tempo-variante**.
- Un componente si dice **lineare** se, dati due vettori ammissibili (compatibili con il grafo) di variabili descrittive, anche una loro combinazione lineare è un vettore ammissibile. Viceversa si dice **non lineare**.

Consideriamo ad esempio il bipolo la cui tensione descrittiva v sia legata alla corrente descrittiva i nel modo seguente

$$i + \alpha v + \beta \frac{di}{dt} + \delta v^2 + \epsilon t = 0 , \quad (3.11)$$

con $[\alpha] = \text{AV}^{-1}$ $[\beta] = \text{s}$, $[\delta] = \text{AV}^{-2}$ e $[\epsilon] = \text{As}^{-1}$.

In base alla classificazione proposta il bipolo è dinamico, tempo-variante e non lineare. Verifichiamo quest'ultima proprietà dato che le prime due derivano banalmente dalla loro stessa definizione. Per farlo iniziamo da un caso particolare, quello in cui $\delta = 0$ e $\epsilon = 0$. Siano i_1 e v_1 compatibili con l'equazione del componente, cioè $i_1 + \alpha v_1 \beta + \frac{d}{dt} i_1$ e analogamente i_2 e v_2 . Affinché il componente si dica lineare è necessario che, prese due costanti a e b generiche, anche $ai_1 + bi_2$ e $av_1 + bv_2$ siano compatibili con l'equazione del

Si noti che un bipolo, in generale tempo-variante, avente come equazione caratteristica $v + b(t)i + c(t) = 0$, con $b(t)$ e $c(t)$ non identicamente nulli, (oppure $a(t)v + i + c(t) = 0$, con $a(t)$ e $c(t)$ non identicamente nulli) è un bipolo non lineare o, più specificamente, è un bipolo **lineare affine**. Lo studente verifichi per esercizio la non linearità.

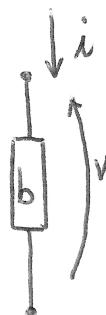


Figura 3.4: Generico bipolo b con v e i variabili descrittive.

componente. Proviamo dunque a valutare

$$\begin{aligned}
 & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) \\
 &= a \left(i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 \right) + b \left(i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 \right) \quad . \quad (3.12) \\
 &= a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

In questo caso il bipolo è lineare. Nel caso più generale dovremmo scrivere

$$\begin{aligned}
 & ai_1 + bi_2 + \alpha(av_1 + bv_2) + \beta \frac{d}{dt}(ai_1 + bi_2) + \delta(av_1 + bv_2)^2 + \epsilon t \\
 &= a \left(i_1 + \alpha v_1 + \beta \frac{d}{dt} i_1 + \delta v_1^2 + \epsilon t \right) - a\epsilon t + \delta a(a-1)v_1^2 \\
 &+ b \left(i_2 + \alpha v_2 + \beta \frac{d}{dt} i_2 + \delta v_2^2 + \epsilon t \right) - b\epsilon t + \delta b(b-1)v_2^2 \\
 &+ 2\delta abv_1 v_2 + \epsilon t \\
 &= \epsilon t(1-a-b) + \delta a(a-1)v_1^2 + \delta b(b-1)v_2^2 + 2\delta abv_1 v_2 \neq 0 \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

e quindi il bipolo è non-lineare. Sarebbe tempo-invariante con $\delta = 0$ e adinamico con $\beta = 0$.

3.3.1 Classificazione dei bipoli adinamici in termini energetici

LA CLASSIFICAZIONE PER I COMPONENTI GENERICI presentata nel paragrafo precedente può essere ulteriormente dettagliata qualora ci si riferisca a **bipoli adinamici**.

Tali componenti sono rappresentati da un'equazione costitutiva che, in forma implicita, è del tipo $f(i, v) = 0$, dove i e v sono le variabili descrittive del bipolo che si assumono scelte in base alla convenzione normale o degli utilizzatori. L'equazione costitutiva del componente individua sul piano (i, v) un *luogo di punti* che, in generale giace in uno o più quadranti del piano stesso. Tale luogo di punti viene visitato dalla coppia $(i(t), v(t))$ al variare del tempo e ciascun punto corrisponde ad un valore di potenza $p_a(t) = i(t)v(t)$ assorbita dal componente. Si introduce quindi la seguente classificazione:

- il bipolo si dice **inerte** se $p_a(t) = i(t)v(t) \equiv 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica (ovvero la proprietà non dipende da *come è collegato* il componente e *a che cosa è collegato* ma solo dal componente stesso). Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ appartiene agli assi coordinati $i = 0, v = 0$ (cfr. figura 3.5).

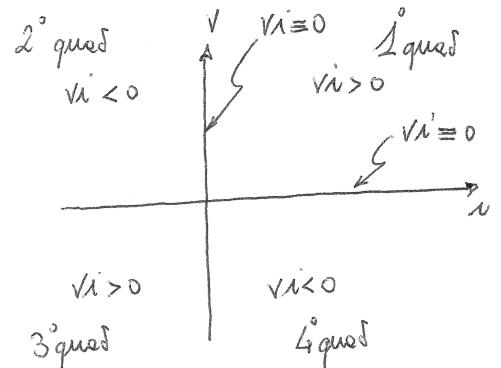


Figura 3.5: Il piano (i, v) e la suddivisione in quadranti.

- il bipolo si dice **dissipativo** o **passivo** se se $p_a(t) = i(t)v(t) \geq 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ giace nel primo e/o nel terzo quadrante (cfr. figura 3.5).
- il bipolo si dice **strettamente attivo** se se $p_a(t) = i(t)v(t) \leq 0$ per ogni valore di t e per ogni possibile situazione elettrica. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ giace nel secondo e/o nel quarto quadrante (cfr. figura 3.5).
- il bipolo si dice **attivo** se se $p_a(t) = i(t)v(t)$ può essere negativa, nulla o positiva. Ciò equivale a dire che il luogo dei punti tali che $f(i, v) = 0$ appartiene almeno ad un quadrante pari e uno dispari (cfr. figura 3.5).

3.4 Le basi di definizione

DATO UN n -terminali esso si dice **controllabile in tensione** o **definito su base tensione** se, assegnate $n - 1$ tensioni descrittive, è possibile ricavare in modo univoco le corrispondenti $n - 1$ correnti descrittive².

NEL CASO DUALE, cioè quello in cui dato un n -terminali è possibile assegnare $n - 1$ correnti descrittive e ricavare in modo univoco le corrispondenti $n - 1$ tensioni descrittive, il componente si dice **controllabile in corrente** o **definito su base corrente**.

UN n -TERMINALI si dice **definito su base mista** se assegnate $n - 1$ delle sue variabili descrittive (un insieme di tensioni e correnti) è possibile ricavare le restanti $n - 1$ (un insieme di correnti e tensioni).

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il tripolo descritto dall'equazione costitutiva

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ v_2 = \beta i_1 + \gamma i_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$.

Dalla sua equazione costitutiva è evidente che ammette la base corrente (i_1, i_2). Inoltre, dato che l'equazione 3.14 può essere riscritta come

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

il tripolo ammette anche la base tensione. Dalla 3.15, infatti, si deduce banalmente che, assegnate v_1 e v_2 , è possibile ricavare univocamente i_1 e i_2 .

² Per corrente descrittiva \bar{i} , corrispondente ad una data tensione descrittiva \bar{v} (e viceversa), si intende la corrente individuata sul lato del grafo del componente sul quale si indica la tensione \bar{v} .

Per assegnare la tensione o la corrente ad un lato del grafo di un componente si utilizzano sorgenti impressive di tensione o di corrente che verranno introdotte nel seguito (cfr. paragrafo 3.5.4). In quella sede sarà evidenziato come, con tali sorgenti, non sia possibile impostare contemporaneamente la tensione e la corrente al medesimo lato.

Analogamente si ricava che sono ammissibili la base (i_1, v_2)

$$\begin{cases} v_1 = \alpha i_1 \\ i_2 = \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{\beta}{\alpha} v_1 + v_2 \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

e la base (i_2, v_1)

$$\begin{cases} i_1 = \frac{v_1}{\alpha} \\ v_2 = \frac{\beta}{\alpha} v_1 + \gamma i_2 \end{cases} . \quad (3.17)$$

Nel caso in cui, ad esempio, $\alpha = 0$ e $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$, il tripolo ammette solo le basi (i_1, i_2) e (v_2, i_2) .

SI PROVI PER ESERCIZIO a verificare cosa accade se $\beta = 0$ e $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$, $\gamma = 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

3.5 Bipoli notevoli

3.5.1 Il resistore lineare

IL RESISTORE LINEARE è un componente la cui tensione descrittiva v e corrente descrittiva i sono legate dalla relazioni lineari (equazione caratteristica - cfr. figura 3.6)

$$v = Ri , \quad (3.18)$$

dove il parametro $R > 0$ si chiama **resistenza** e si misura in Ohm [Ω]. Il resistore è un componente lineare, adinamico, tempo-invariante. È definito su base corrente, come si deduce immediatamente dall'equazione 3.18, e su base tensione essendo $i = vR^{-1}$. La grandezza $R^{-1} = G$ si chiama **conduttanza** e si misura in Siemens [S]. Si noti come la caratteristica del resistore sia simmetrica rispetto all'origine degli assi coordinati, il che implica che invertire i morsetti del resistore non provoca alcuna variazione nel suo funzionamento.

DA UN PUNTO DI VISTA ENERGETICO il resistore è un bipolo passivo essendo

$$p = vi = Ri^2 = \frac{v^2}{R} > 0 , \quad (3.19)$$

per qualunque valore di i e v .

3.5.2 Il corto circuito

IL CORTO CIRCUITO può essere visto come un caso limite di resistore lineare nel senso che la sua equazione caratteristica è

$$v = Ri|_{R=0} = 0 . \quad (3.20)$$

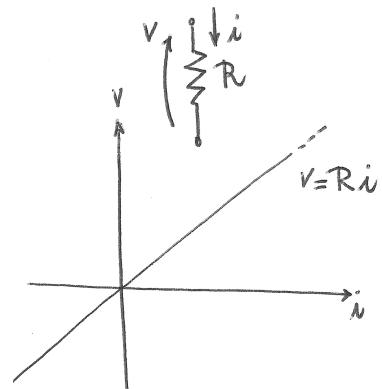


Figura 3.6: Il resistore lineare: simbolo e caratteristica sul piano (i, v) .

Vedremo nel seguito che il corto circuito e il circuito aperto possono essere visti anche come casi particolari del generatore indipendente di tensione e di corrente, rispettivamente.

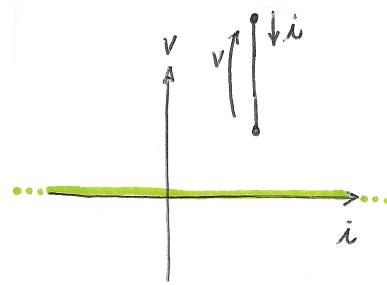


Figura 3.7: Il corto circuito.

Il corto circuito è un componente adinamico e tempo-invariante.

Dal punto di vista energetico è un componente chiaramente inerte dato che $p = vi = 0$ per qualunque i . È un bipolo definito su base corrente dato che non è possibile scegliere liberamente la tensione tra i suoi morsetti. Per quanto riguarda l'essere lineare o non lineare applichiamo la definizione. Se si impongono i_1 o i_2 la tensione ai capi del bipolo sarà v_1 o v_2 , entrambi nulle. Prese due costanti arbitrarie α_1 e α_2 e imponendo $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$ si ottiene ai capi la tensione 0 ovvero $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Il bipolo è dunque lineare.

3.5.3 Il circuito aperto

IL CIRCUITO APERTO è il componente duale del corto circuito:

$$i = \frac{v}{R} \Big|_{R \rightarrow +\infty} = 0 . \quad (3.21)$$

È un bipolo adinamico, tempo-invariante, lineare e passivo. È definito solo su base tensione dato che non è consentito assegnare liberamente la corrente che lo attraversa in quanto essa, a prescindere dalla tensione ai capi del bipolo, è sempre nulla.

3.5.4 Le sorgenti impressive: generatori indipendenti di tensione e di corrente

IL GENERATORE INDIPENDENTE DI TENSIONE ha come equazione caratteristica

$$v = e(t) . \quad (3.22)$$

In generale $e(t)$ è una funzione del tempo t e quindi il bipolo è tempo variante. Tipici esempi sono il generatore di tensione sinusoidale $e(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ o il generatore a gradino $e(t) = V_0 u(t - t_0)$ con $u(t - t_0) = 0$ se $t < t_0$ e $u(t - t_0) = 1$ se $t > t_0$ ($t_0 \geq 0$).

Il generatore indipendente di tensione è adinamico dato che la sua equazione caratteristica non contiene derivate o integrali rispetto al tempo delle sue variabili descrittive. Nel caso in cui $e(t) \equiv 0$ per ogni valore di t il componente degenera in un corto circuito e solo in quel caso è lineare. Più in generale è un componente non lineare. Definito solo su base corrente, infatti, se si impongono i_1 o i_2 la tensione ai capi del bipolo sarà v_1 o v_2 , entrambi pari a $e(t)$. Prese due costanti arbitrarie α_1 e α_2 e imponendo $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2$ si ottiene ai capi la tensione $e(t) \neq \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)e(t)$.

Da un punto di vista energetico il bipolo è attivo dato che la sua caratteristica giace in quadrante pari e uno dispari del piano (i, v) .

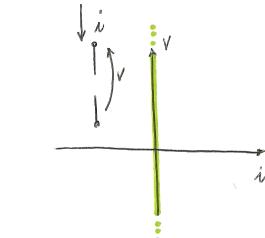


Figura 3.8: Il circuito aperto.

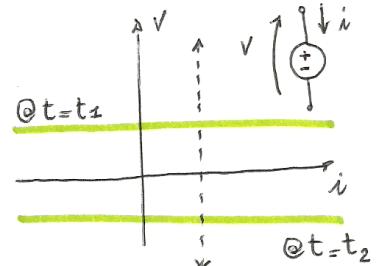


Figura 3.9: Il generatore di tensione.

Bisogna infatti pensare che in tale piano la caratteristica del generatore è una retta parallela all'asse i che, al variare del tempo, eventualmente trasla verso l'alto e/o verso il basso. Ad un dato istante di tempo giace quindi nel primo o secondo quadrante, oppure nel terzo o nel quarto.

IL GENERATORE INDEPENDENTE DI CORRENTE ha come equazione caratteristica

$$i = -a(t) . \quad (3.23)$$

Il segno “-” nell'equazione 3.23 non deve trarre in inganno. Si noti infatti come in figura 3.10 la corrente i , presa con la convenzione normale o degli utilizzatori, punta nel verso opposto alla freccia che si trova all'interno del simbolo proprio del generatore. Questo vuol dire che, scelta la forma d'onda $a(t)$ impressa dal generatore, la corrente i ha semplicemente il segno opposto ad essa. Se invece scegliessimo la convenzione dei generatori, la corrente $i' = -i$ sarebbe concorde con $a(t)$. Quello che conta, quindi, per definire in modo non ambiguo il componente sono la scelta di $a(t)$ e la convenzione con cui descrivere il componente. Ad esempio, scelta $a(t) = A_0 u(t - t_0)$, con $u(t - t_0) = 0$ se $t < t_0$ e $u(t - t_0) = 1$ se $t > t_0$ ($t_0 \geq 0$), con la convenzione degli utilizzatori usata in figura 3.10, $i = -A_0 u(t - t_0)$.

Come il generatore indipendente di tensione, il generatore indipendente di corrente è non lineare (salvo il caso $a(t) \equiv 0$ per ogni t , cioè degenera in un circuito aperto), adinamico, tempo-variante e attivo. È un bipolo definito solo su base tensione.

3.6 Esercizio: il primo circuito elementare

SIA DATO IL CIRCUITO in figura 3.11: si determinino v_1 e i_2 .

COME PRIMA COSA ricaviamo il grafo del circuito (cfr. figura 3.12). Il circuito è costituito da 3 componenti a due terminali ovvero da $2 \cdot 3 = 6$ variabili descrittive. Si verifica banalmente che il grafo del circuito è caratterizzato da $n = 3$ nodi e $l = 3$ lati. Sappiamo quindi (cfr. paragrafo 2.7) che è possibile scrivere $n - 1 = 2$ KCL linearmente indipendenti e $l - n + 1 = 1$ equazioni KVL-II. Ogni bipolo ha un'equazione costitutiva, per un totale di 3 equazioni, e quindi possiamo scrivere

$$\underbrace{3}_{\text{eq.ni costitutive}} + \underbrace{3}_{\text{eq.ni topologiche}} = 6 \quad (3.24)$$

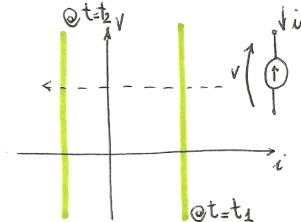


Figura 3.10: Il generatore di tensione.

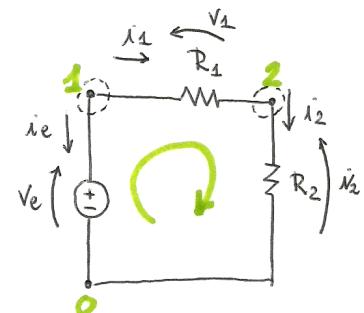


Figura 3.11: Un primo esempio di circuito da risolvere.

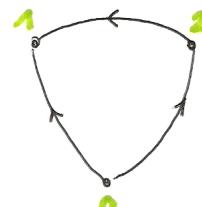


Figura 3.12: Il grafo del circuito in figura 3.11 orientato come le tensioni.

equazioni in 6 incognite.

Iniziamo con le KCL. Facendo riferimento alla figura 3.11 scriviamo i bilanci di corrente ai nodi 1 e 2 (assumendo arbitrariamente positive le correnti uscenti dalle linee chiuse tracciate attorno ai nodi):

$$\begin{aligned} i_e + i_1 &= 0 \\ i_2 - i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Possiamo poi scrivere l'equazione KVL-II per l'unica maglia del circuito, scegliendo come verso di percorrenza quello orario

$$v_e - v_1 - v_2 = 0 \quad (3.26)$$

Le equazioni dei componenti sono infine

$$\begin{aligned} v_e &= e(t) \\ v_1 &= R_1 i_1 \\ v_2 &= R_2 i_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Possiamo quindi riscrivere la 3.26 come

$$e(t) - v_1 - R_2 i_2 = e(t) - v_1 - R_2 i_1 = e(t) - v_1 - R_2 \frac{v_1}{R_1} = 0 \quad (3.28)$$

Si ricava dunque $v_1 = \frac{R_1 e(t)}{R_1 + R_2}$ e $i_2 = i_1 = \frac{v_1}{R_1} = \frac{e(t)}{R_1 + R_2}$.

3.7 Il principio di equivalenza

Due bipoli di diversa costituzione si dicono equivalenti quando le loro relazioni caratteristiche coincidono.

DATO UN CIRCUITO GENERICO è quindi possibile sostituire un bipolo con un suo equivalente senza produrre cambiamenti nel funzionamento del circuito stesso. Il principio di equivalenza lo useremo, ad esempio, ogni qualvolta si farà riferimento alla connessione *in serie* o *in parallelo* di due o più bipoli, quando useremo gli equivalenti di Thevenin e Norton.

3.7.1 Connessione in serie di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in serie se sono attraversati dalla stessa corrente. Quando ciò avviene è possibile ridisegnare il circuito in modo tale che i due bipoli siano collegati in modo esclusivo ad uno dei nodi del circuito, ovvero siano gli unici bipoli incidenti in quel nodo.

POSSENO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

In generale quando si debbano determinare una o più grandezze incognite in un dato circuito, la scelta di scrivere tutte le equazioni possibili non è sempre la migliore. In generale impareremo a scrivere molti risultati intermedii direttamente sullo schema del circuito e a selezionare solo le equazioni indispensabili per risolvere il problema. Sapere però che, a partire dalla topologia e dalle equazioni dei componenti, è possibile scrivere sempre tutte in modo sistematico permette di concepire metodi automatici (al calcolatore) per analizzare reti anche molto complesse.

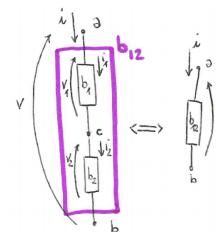


Figura 3.13: Due bipoli connessi in serie hanno un nodo (c in figura) al quale sono connessi in modo esclusivo.

La connessione in serie b_{12} di due bipoli b_1 e b_2 si indica con il simbolo $+$. Ovvero si scrive che $b_{12} = b_1 + b_2$.

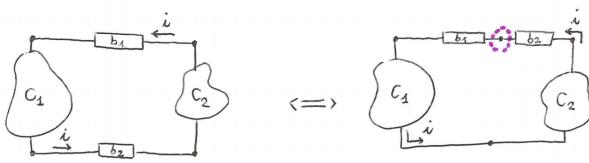


Figura 3.14: Due bipoli b_1 e b_2 sono attraversati dalla stessa corrente i . Dato che compongono un maglia insieme a C_1 e C_2 , è possibile “spostarli” senza alterare il funzionamento del circuito e ridisegnarli in modo che abbiano in comune un nodo in modo esclusivo.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie che ammettono entrambi la base di definizione corrente. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono $v_1 = f_1(i_1)$ e $v_2 = f_2(i_2)$, la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in serie sarà $v = f_1(i) + f_2(i)$. Ciò si ricava osservando che i due bipoli sono per definizione attraversati dalla medesima corrente (cioè $i_1 = i_2$) e la tensione v è fissata a $v_1 + v_2$ da una KVL-II. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in serie e definiti su base corrente si ottiene sul piano (i, v) sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.
- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie e solo b_1 ammetta la base di definizione corrente. In questo caso il bipolo equivalente coincide con b_2 dato che la tensione ai suoi capi non è vincolata ed è esso stesso ad imporre la corrente nella serie.

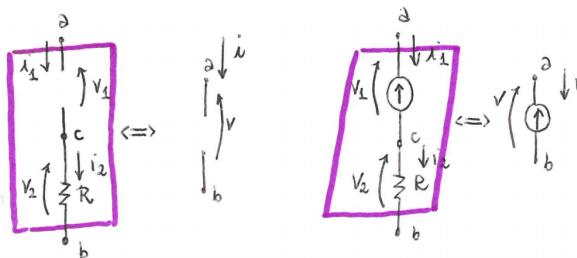


Figura 3.15: Due esempi in cui la connessione serie di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base corrente.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in serie e nessuno dei due ammetta la base corrente. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la tensione ai capi dei singoli bipoli che costituiscono la serie rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in serie due circuiti aperti) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le correnti (si pensi alla connessione in serie di due generatori indipendenti di corrente che imprimono correnti arbitrarie).

IL RAGIONAMENTO SVILUPPATO per una coppia di bipoli connessi in serie si applica in modo ricorsivo qualora i bipoli siano più di due. Se fossero tre, ad esempio b_1 , b_2 e b_3 , ad essere attraversati dalla medesima corrente, dovrebbe essere possibile ridisegnare il circuito

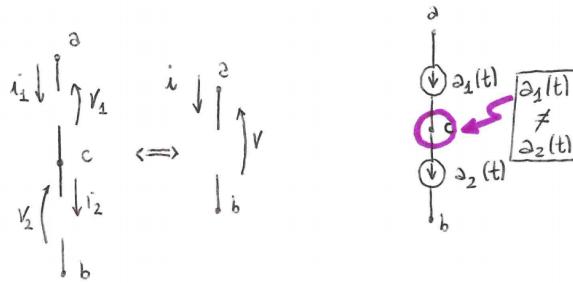


Figura 3.16: Nel caso di sinistra la connessione in serie equivale ad un circuito aperto ma le tensioni v_1 e v_2 , data la v , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KCL al nodo evidenziato.

in modo tale che i bipoli, a due a due, siano collegati in modo esclusivo ad un nodo del circuito. A questo punto, per trovare il bipolo equivalente, si applicano i criteri esposti trovando, ad esempio, prima l'equivalente b_{12} di b_1 e b_2 e poi l'equivalente b_{123} di b_{12} e b_3 .

SI RICAVA QUINDI FACILMENTE l'equivalente di M resistori lineari connessi in serie ciascuno con equazioni caratteristica $v_k = R_k i_k$ ($k = 1, \dots, M$). Possiamo infatti scrivere

$$v = v_1 + \dots + v_M = R_1 i_1 + \dots + R_M i_M = (R_1 + \dots + R_M) i = R_{eq} i , \quad (3.29)$$

con $R_{eq} = \sum_{k=1}^M R_k$.

3.7.2 Il partitore di tensione

IL PARTITORE DI TENSIONE è una regola che si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in serie. Si immagini di voler calcolare la tensione ai capi del generico resistore j -esimo che appartiene a M resistori connessi in serie.

Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è $v = (\sum_{k=1}^M R_k) i$, la corrente i che attraversa il generico resistore j -esimo è pari a $i = \frac{v}{\sum_{k=1}^M R_k}$ e quindi

$$v_j = \frac{v R_j}{\sum_{k=1}^M R_k} . \quad (3.30)$$

Si nota quindi come la caduta di tensione maggiore sia ai capi del resistore caratterizzato da resistenza maggiore.

3.7.3 Connessione in parallelo di bipoli

DUE BIPOLI SI DICONO connessi in parallelo se sono collegati alla medesima coppia di nodi e quindi hanno ai loro capi la medesima tensione.

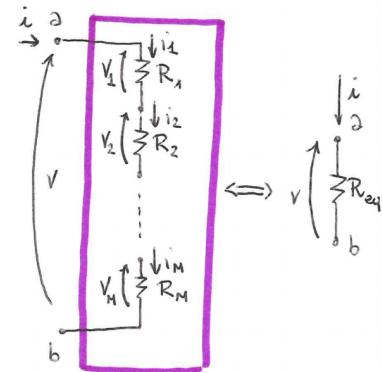


Figura 3.17: Connessione in serie di M resistori lineari.

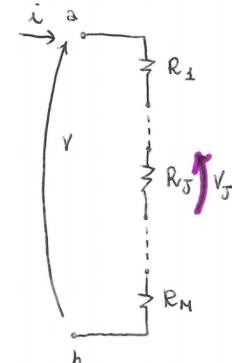


Figura 3.18: La regola del partitore di tensione permette di ricavare facilmente v_j in funzione di R_1, \dots, R_M e v .

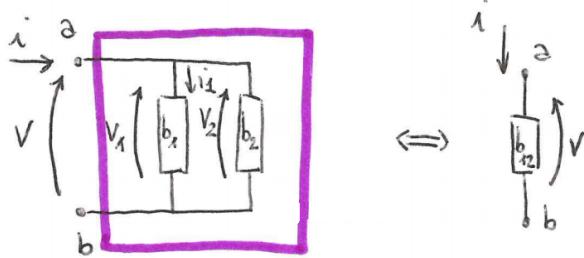


Figura 3.19: Due bipoli connessi in parallelo.

POSSONO VERIFICARSI DIVERSE situazioni che vanno prese in considerazione con cura.

- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo che ammettono entrambi la base di definizione tensione. Se le equazioni costitutive dei due bipoli sono $i_1 = g_1(v_1)$ e $i_2 = g_2(v_2)$, la caratteristica del bipolo equivalente alla loro connessione in parallelo sarà $i = g_1(v) + g_2(v)$. Ciò si ricava osservando che i due bipoli condividono per definizione la medesima tensione, ovvero $v = v_1 = v_2$, la corrente i è fissata ad $i_1 + i_2$ da una KCL. Da un punto di vista grafico, la caratteristica equivalente di due bipoli connessi in parallelo e definiti su base tensione si ottiene sul piano (v, i) sommando punto a punto le caratteristiche dei due bipoli.
- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo e solo b_1 ammetta la base di definizione tensione. In questo caso il bipolo equivalente coincide con b_2 dato che la corrente che lo attraversa non è vincolata ed è esso stesso ad imporre la tensione del parallelo (cfr. figura 3.20).
- Siano b_1 e b_2 due bipoli connessi in parallelo e nessuno dei due ammetta la base tensione. In questo caso si possono produrre situazioni in cui la corrente nei singoli bipoli connessi in parallelo rimane indeterminata (ad esempio se si connettono in parallelo due corti circuiti, figura 3.21) e situazioni in cui la connessione non è possibile perché viola la legge di Kirchhoff per le tensioni (si pensi alla connessione in parallelo di due generatori indipendenti di tensione che impongono tensioni arbitrarie, figura 3.21).

COME PER IL COLLEGAMENTO IN SERIE di più di due bipoli si è mostrato come si può procedere in modo ricorsivo per ottenere il bipolo equivalente, analogamente si agisce per la connessione in parallelo.

IN PARTICOLARE l'equivalente di M resistori lineari connessi in parallelo, ciascuno con equazione caratteristica $v_k = R_k i_k$ ($k = 1, \dots, M$)

La connessione in parallelo b_{eq} di due bipoli b_1 e b_2 si indica con il simbolo \parallel . Ovvero si scrive che $b_{eq} = b_1 \parallel b_2$.

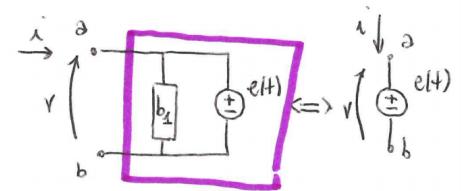


Figura 3.20: Un esempio in cui la connessione parallelo di bipoli corrisponde al bipolo non definito su base tensione.

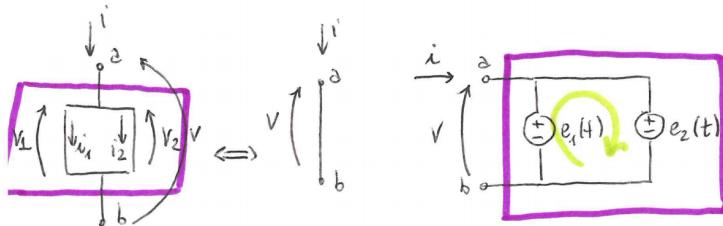


Figura 3.21: Nel caso di sinistra la connessione in parallelo equivale ad un corto circuito ma le correnti i_1 e i_2 , data la i , sono indeterminate. Nel caso di destra la connessione non è lecita dato che, in generale, viola la KVL-II per la maglia evidenziata.

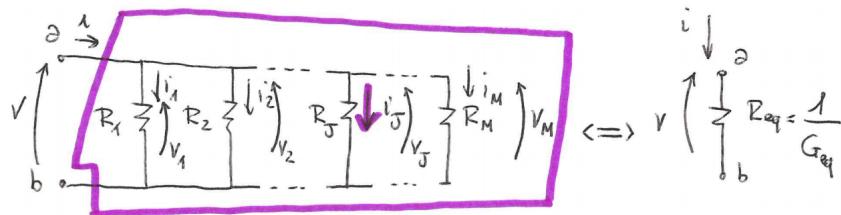


Figura 3.22: Connessione in parallelo di M resistori lineari. La regola del partitore di corrente permette di ricavare facilmente i_j in funzione di $G_1 = R_1^{-1}, \dots, G_M = R_M^{-1}$ e i .

ovvero $i_k = R_k^{-1}v_k = G_kv_k$ è scrivibile come

$$i = i_1 + \dots + i_M = G_1v_1 + \dots + G_Mv_M = (G_1 + \dots + G_M)v = G_{eq}v , \quad (3.31)$$

con $G_{eq} = \sum_{k=1}^M G_k$ la conduttanza equivalente al parallelo.

La resistenza equivalente al parallelo è $R_{eq} = \frac{1}{\sum_{k=1}^M G_k}$. Nel caso di due resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} , \quad (3.32)$$

e nel caso di tre resistori collegati in parallelo si ottiene

$$R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} . \quad (3.33)$$

3.7.4 Il partitore di corrente

IL PARTITORE DI CORRENTE è il duale del partitore di tensione e si applica *esclusivamente* a resistori lineari connessi in parallelo.

Si immagini di voler calcolare la corrente che scorre nel generico resistore j -esimo che appartiene a M resistori connessi in parallelo (cfr. figura 3.22). Dal momento che l'equazione costitutiva del bipolo equivalente alla serie è $i = (\sum_{k=1}^M G_k)v$, la tensione v ai capi del generico resistore j -esimo è pari a $v = \frac{i}{\sum_{k=1}^M G_k}$ e quindi

$$i_j = \frac{iG_j}{\sum_{k=1}^M G_k} . \quad (3.34)$$

Si nota quindi come la corrente maggiore scorra nel resistore caratterizzato da conduttanza maggiore ovvero da resistenza minore.

NEL CASO SEMPLICE di due soli resistori R_1 ed R_2 connessi in parallelo, la formula 3.34 può essere facilmente riscritta in termini delle resistenze (lo si verifichi per esercizio)

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{iR_2}{R_1 + R_2} \\ i_2 &= \frac{iR_1}{R_1 + R_2} \end{aligned} \quad . \quad (3.35)$$

3.8 Esercizio

CHE VALORE DEVE AVERE R_1 (cfr. figura 3.23) affinché il voltmetro ai connesso in parallelo ad R_2 legga la tensione $E/4$? Si assumano $R_k = r$ per $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

PER RISOLVERE IL PROBLEMA è necessario calcolare la corrente i in funzione di R_1 e poi risolvere, sempre in funzione di R_1 , l'equazione $R_2i(R_1) = E/4$. Si noti che R_2 ed R_3 , così come R_4 ed R_5 , sono collegate in serie e possiamo quindi ricavare $R_{23} = R_2 + R_3 = 2r$ e $R_{45} = R_4 + R_5 = 2r$. Del resto R_{23} e R_{45} sono collegate in parallelo ($R_{23} \parallel R_{45} = r$) e il bipolo ad esse equivalente è in serie ad R_1 .

LA TENSIONE AI CAPI di $R_{23} \parallel R_{45}$ è quindi pari a $\frac{Er}{R_1+r}$ e la corrente che scorre in R_{23} è pari a

$$i(R_1) = \frac{Er}{2r(R_1+r)} = \frac{E}{2(R_1+r)} \quad . \quad (3.36)$$

Per risolvere il problema occorre dunque risolvere in funzione di R_1

$$\frac{Er}{2(R_1+r)} = \frac{E}{4} \quad , \quad (3.37)$$

che ammette l'unica soluzione $R_1 = r$.

3.9 Circuiti equivalenti di Thevenin e Norton

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 3.24 di cui vogliamo calcolare la tensione v tra i morsetti A e B in funzione dei suoi parametri R_k ed E_k per $k \in \{1, 2, 3\}$. La corrente i_k può essere ottenuta come

$$i_k = \frac{v - E_k}{R_k} \quad . \quad (3.38)$$

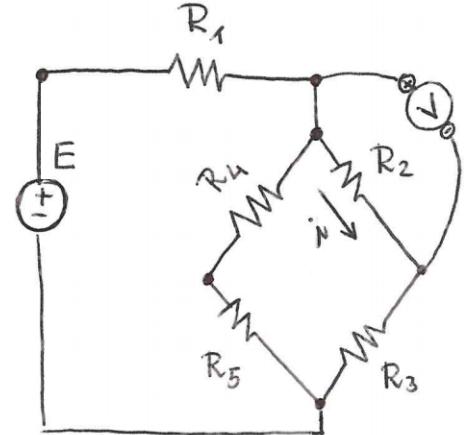


Figura 3.23: Esercizio: connessione serie, parallelo, partitore di tensione.

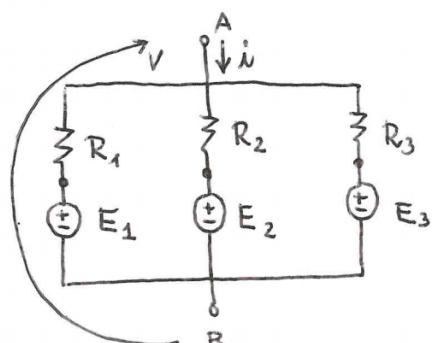


Figura 3.24: Esercizio: determinare la tensione tra i morsetti A e B .

Osservando che $\sum_{k=1}^3 i_k = 0$, dato che la corrente i è nulla perché il morsetto A è appeso, la tensione v può essere ricavata risolvendo l'equazione lineare

$$\frac{v - E_1}{R_1} + \frac{v - E_2}{R_2} + \frac{v - E_3}{R_3} = 0 , \quad (3.39)$$

ottenendo così

$$v = \frac{R_2 R_3 E_1 + R_1 R_3 E_2 + R_1 R_2 E_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} . \quad (3.40)$$

SE CONOSCESSI una regola che permette di ridisegnare il circuito in figura 3.24 come in figura 3.25, cioè se sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore lineare in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo, potrei risolvere il problema scrivendo

$$v = -(r_1 || r_2 || r_3)(A_1 + A_2 + A_3) = -\frac{A_1 + A_2 + A_3}{g_1 + g_2 + g_3} , \quad (3.41)$$

essendo $g_k = r_k^{-1}$ per $k \in \{1, 2, 3\}$.

QUESTO ESEMPIO è solo un pretesto per introdurre un risultato molto importante della teoria dei circuiti. È comunque istruttivo, facendo riferimento alla figura 3.26, provare a vedere come sono legati E_{th} ed R_{th} (parametri del circuito di Thévenin) con A_{nr} e G_{nr} (parametri del circuito di Norton). Analizzando i due circuiti possiamo ricavare facilmente

$$\begin{aligned} v_1 &= R_{th} i_1 + E_{th} \\ i_2 &= G_{nr} v_2 + A_{nr} \end{aligned} . \quad (3.42)$$

Se ricaviamo $v_2 = \frac{i_2}{G_{nr}} - \frac{A_{nr}}{G_{nr}}$ e $i_1 = \frac{v_1}{R_{th}} - \frac{E_{th}}{R_{th}}$ possiamo dunque affermare, utilizzando il principio di equivalenza (cfr. paragrafo 3.7), che i due bipoli composti sono equivalenti (funzionano cioè allo stesso modo in termini della tensione e della corrente descrittiva) rispettivamente se

$$R_{th} = \frac{1}{G_{nr}} \text{ e } E_{th} = -\frac{A_{nr}}{G_{nr}} , \quad (3.43)$$

ovvero

$$G_{nr} = \frac{1}{R_{th}} \text{ e } A_{nr} = -\frac{E_{th}}{R_{th}} . \quad (3.44)$$

PER QUANTO RIGUARDA l'esempio di partenza, allora, $A_k = -\frac{E_k}{R_k}$ e $G_k = \frac{1}{R_k}$ (ovvero $r_k = R_k$) per $k \in \{1, 2, 3\}$. Si verifichi per esercizio che il valore di v che si ottiene è ovviamente lo stesso!

ENUNCIAMO ADESSO il risultato generale

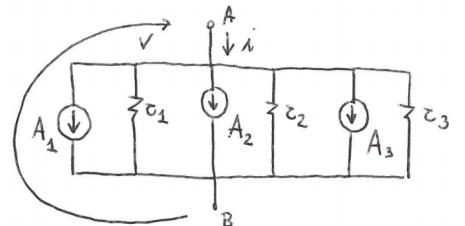


Figura 3.25: Il bipolo composito collegato ai morsetti A e B potrebbe essere equivalente a quello in figura 3.24 se e sapessi trasformare un generatore indipendente di tensione con in serie un resistore lineare in un generatore di corrente con un resistore lineare in parallelo.

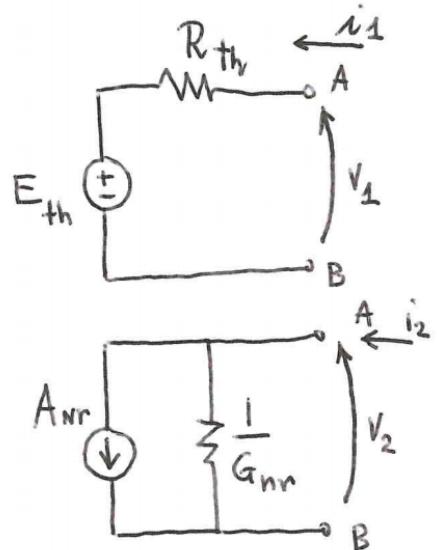


Figura 3.26: Il circuito equivalente di Thévenin, in alto, e il circuito equivalente di Norton, in basso.

Si noti che i segni nelle equazioni 3.43 e 3.44 dipendono dal come sono stati connessi i generatori E_{th} e A_{nr} . Si verifichi, ad esempio, che invertendo il verso di A_{nr} si ottiene $E_{th} = \frac{A_{nr}}{G_{nr}}$. Questo deve quindi stimolare lo studente a non imparare a memoria le formule senza aver capito lo schema da cui derivano, ma l'invito è a saper ricavare le formule una volta disegnato lo schema elettrico.

Dato un bipolo adinamico, non impressivo, lineare affine, se ammette la base di definizione tensione lo si definisce circuito di Norton (cfr. figura 3.26). Se ammette la base corrente lo si definisce circuito di Thévenin (cfr. figura 3.26)³.

È possibile passare da un modello all'altro, quando esistono entrambi, usando le formule 3.43 e 3.44 avendo cura di scegliere con coerenza il modo in cui si connettono E_{th} e A_{nr} .

IN GENERALE l'interconnessione di bipoli lineari adinamici e bipoli impressivi (generatori indipendenti) dà origine ad un bipolo composito lineare affine e adinamico che può essere rappresentato con un modello equivalente di Thévenin e/o di Norton in base alle caratteristiche di controllabilità del bipolo stesso.

3.10 Esercizio

PER IL CIRCUITO in figura 3.27, ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti A e B.

PER DETERMINARE I PARAMETRI R_{th} ed E_{th} , possiamo impostare tra i morsetti A e B una corrente i e ricavare $V_{AB}(i)$. Se riusciremo a ricavare $V_{AB}(i) = \alpha i + \beta$ potremo allora identificare $\alpha = R_{th}$ e $\beta = E_{th}$.

PROVIAMO PER LA PRIMA VOLTA a risolvere il circuito in figura 3.27 scrivendo sul suo schema le informazioni che si possono facilmente dedurre applicando le equazioni di Kirchhoff (cfr. figura 3.28) e sfruttando le equazioni costitutive dei componenti. Si può subito scrivere che (in base a come sono stati arbitrariamente scelti i loro versi)

- la corrente in R_2 vale $i + A_2$;
- la corrente in R_1 vale $i + A_2 - A_1$;
- la corrente in R_3 vale $i + A_2$.

³ Se ammette entrambe le basi sono definiti entrambi i circuiti, Norton e Thévenin.

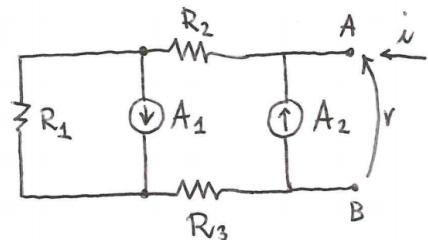


Figura 3.27: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti A e B.

Si noti che si è scelto di impostare una corrente i perché il modello equivalente di Thévenin richiede che il bipolo composito sia controllabile in corrente. Se fosse stato richiesto il modello equivalente di Norton avremmo dovuto impostare la tensione V_{AB} e ricavare la corrente i .

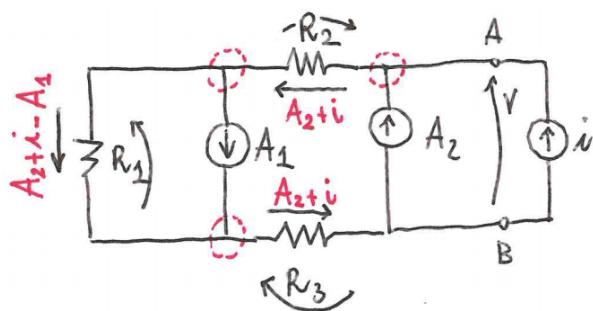


Figura 3.28: Ai morsetti A e B è stato connesso un generatore di corrente i e si vuole ricavare $v(i) = R_{th}i + E_{th}$.

Dalla maglia esterna percorsa in senso antiorario si può scrivere

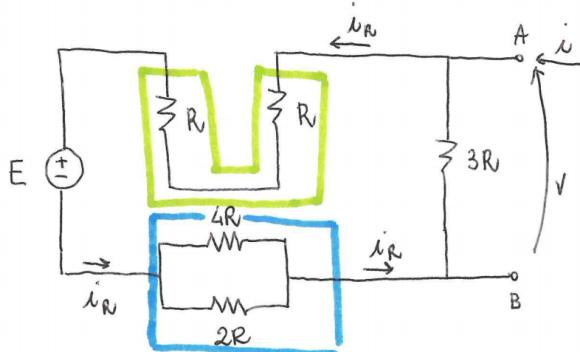
$$\begin{aligned} V_{AB} &= R_2(i + A_2) + R_1(i + A_2 - A_1) + R_3(i + A_2) \\ &= (R_1 + R_2 + R_3)i - R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2 \end{aligned} \quad (3.45)$$

e quindi $R_{th} = R_1 + R_2 + R_3$ e $E_{th} = -R_1A_1 + (R_1 + R_2 + R_3)A_2$.

SI LASCIA ALLO STUDENTE ricavare il valore di A_1 tale da far sì che il bipolo composito si comporti ai morsetti A e B come un resistore.

SI NOTI ANCORA, vedremo poi che è in realtà un risultato generale, che se $A_1 = 0$ e $A_2 = 0$ allora $E_{th} = 0$. La rete con i generatori indipendenti spenti si dice **passivata**, i generatori di tensione diventano dei cortocircuiti e quelli di corrente dei circuiti aperti.

3.11 Esercizio



SI DETERMININO i parametri del circuito di Norton equivalente, ai morsetti A e B , al bipolo composito in figura 3.29.

Poichè i resistori di resistenza R (cfr. figura 3.29, nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza $2R$ e $4R$, nel box blu, sono in parallelo, il circuito in esame può essere ridisegnato come in figura 3.30. La corrente i sarà dunque

$$i(v) = \frac{v}{3R} + \frac{v - E}{R_{eq}} = \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R_{eq}} \right) v - \frac{E}{R_{eq}} . \quad (3.46)$$

Essendo $R_{eq} = \frac{10}{3}R$, si ricava $G_{nr} = \frac{19}{30R}$ e $A_{nr} = -\frac{3E}{10R}$.

Figura 3.29: Esercizio: ricavare, se esiste, il circuito equivalente di Norton ai morsetti A e B . Si noti che i resistori di resistenza R , nel box verde, sono in serie e quelli di resistenza $2R$ e $4R$, nel box blu, sono in parallelo.

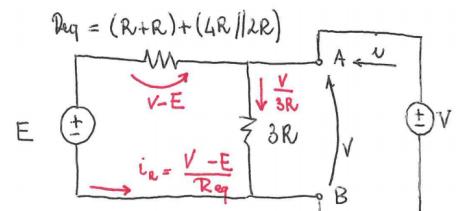


Figura 3.30: Ai morsetti A e B è stato connesso un generatore di tensione v e si vuole ricavare $i(v) = G_{nr}v + A_{nr}$.

4

4.1 Le sorgenti pilotate

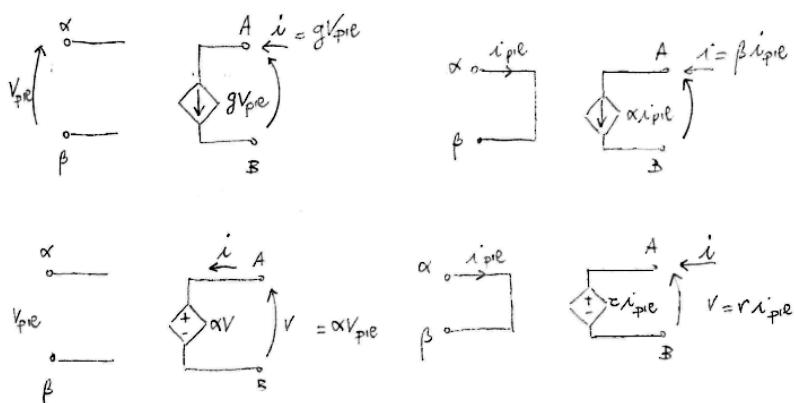


Figura 4.1: Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso: Voltage controlled current source (VCCS) è il generatore di corrente controllato in tensione ($[g] = \Omega^{-1}$). Voltage controlled voltage source (VCVS) è il generatore di tensione controllato in tensione. Current controlled current source (CCCS) è il generatore di corrente controllato in corrente. Current controlled voltage source (CCVS) è il generatore di tensione controllato in corrente ($[r] = \Omega$).

LE SORGENTI PILOTATE o controllate o generatori pilotati sono dei componenti *lineari*¹ a 4 terminali (cfr. figura 4.2) e modellano il comportamento di componenti fisici (o di più componenti fisici connessi per formare un 4 terminali) in opportune condizioni di funzionamento. Ce ne sono 4 tipi possibili e sono rappresentati in figura 4.1.

Prima di tutto è necessario soffermarci sulla loro struttura dal momento che le sorgenti pilotate sono dei 4-terminali ma si nota facilmente come siano costituiti da 2 bipoli. In generale, quindi, necessiterebbero di 3 tensioni descrittive e 3 correnti descrittive ma per come sono realizzati si ha che $i_1 = -i_0$ e $i_3 = -i_2$ (cfr. figure 4.1 e 4.2). Questo fa sì che il grafo del componente sia quello in figura 4.3 e che quindi siano sufficienti 2 correnti descrittive e 2 tensioni. Si noti che il grafo del componente è non connesso il che implica che il grafo

¹ La linearità delle sorgenti pilotate sarà evidente dopo aver introdotto i doppi bipoli (cfr. paragrafo 6.1).

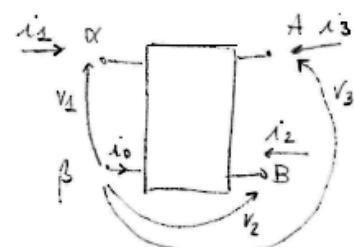


Figura 4.2: Un generico 4-terminali le cui tensioni descrittive sono state riferite al morsetto β .

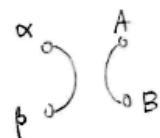
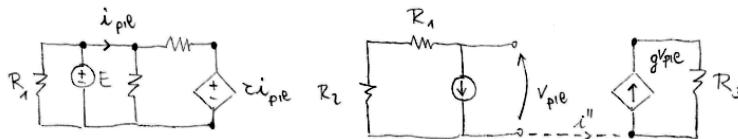


Figura 4.3: Il grafo di un generatore pilotato.

di un eventuale circuito in cui venga inserito potrà essere connesso o non connesso (cfr. figura 4.4).



VEDREMO MEGLIO come trattare questa situazione quando parleremo di doppi bipoli, ampia famiglia di componenti alla quale i generatori pilotati di fatto appartengono. Per il momento, se servisse, potremmo rendere il grafo del circuito connesso come è stato fatto per il circuito di destra in figura 4.4: si aggiunge un lato di connessione (che crea un nodo cerniera) che non altera il funzionamento del circuito dato che è facile convincersi che è percorso da corrente nulla.

PER QUANDO RIGUARDA le basi di definizione, le sorgenti pilotate ammettono ciascuna una sola base, dato che impongono la tensione o la corrente alle loro due coppie di morsetti.

VCCS: base tensione (v_{pil}, v)

VCVS: base mista (v_{pil}, i)

CCCS: base mista (i_{pil}, v)

CCVS: base tensione (i_{pil}, i)

LA POTENZA ASSORBITA da un generatore pilotato, facendo riferimento alla formulazione generale della potenza assorbita da un n -terminali (cfr. paragrafo 3.1.2), può essere ricavata a partire dalla relazione (cfr. figura 4.5)

$$p_a = v_{\alpha\beta}i_\alpha + v_{B\beta}i_B + v_{A\beta}i_A \quad (4.1)$$

Tuttavia, ricordando che nel caso specifico $i_B = -i_A$, l'equazione 4.1 può essere riscritta come

$$p_a = v_{\alpha\beta}i_\alpha + (v_{A\beta} - v_{B\beta})i_A = v_{\alpha\beta}i_\alpha + v_{AB}i_A \quad (4.2)$$

che per le quattro sorgenti pilotate diventa (cfr. figura 4.1)

VCCS: $p_a = v_{\text{pil}} \cdot 0 + v \cdot g v_{\text{pil}} = v \cdot g v_{\text{pil}}$

VCVS: $p_a = v_{\text{pil}} \cdot 0 + i \cdot \beta v_{\text{pil}} = i \cdot \beta v_{\text{pil}}$

CCCS: $p_a = i_{\text{pil}} \cdot 0 + v \cdot \alpha i_{\text{pil}} = v \cdot \alpha i_{\text{pil}}$

Figura 4.4: Il circuito di sinistra, dove è inserito un generatore di tensione pilotato in corrente ha un grafo connesso. Il circuito di destra, dove è inserito un generatore di corrente pilotato in tensione ha invece un grafo non connesso. Per renderlo connesso si è inserito un lato di connessione (creando un nodo cerniera) che non altera il funzionamento del circuito dato che $i'' = 0$.

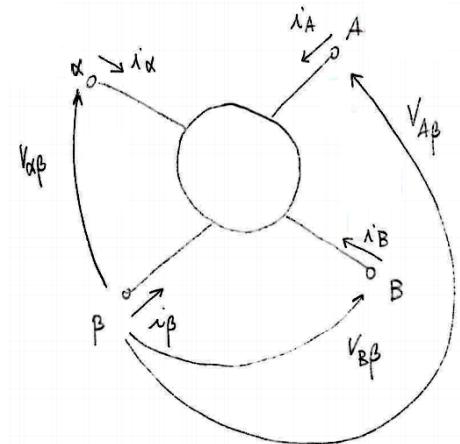


Figura 4.5: $v_{AB} = v_{A\beta} - v_{B\beta}$.

$$\text{CCVS: } p_a = i_{\text{pil}} \cdot 0 + i \cdot r i_{\text{pil}} = i \cdot r i_{\text{pil}}$$

SPESSO LE SORGENTI PILOTATE vengono inserite nei circuiti elettrici senza avere cura di specificare la coppia di morsetti che identifica il lato pilotante (cfr. figura 4.6), ma si evidenzia solo la porzione del 4-terminali che corrisponde alla sorgente di tensione o corrente. Questo tipo di approccio, che ha come unico scopo quello di semplificare ove possibile la struttura delle reti che interessano, verrà spesso adottato anche in questo corso. Si invita tuttavia lo studente a tenere ben presente la natura a 4 terminali di questi componenti. Infatti, dato che i generatori pilotati sono solo modelli di circuiti che in opportune condizioni possono essere descritti come tali, la coppia di morsetti che corrisponde al lato da cui si preleva la grandezza pilotante ha un significato fisico ben preciso.

PER QUANTO RIGUARDA i modelli equivalenti di Thevénin e Norton (cfr. paragrafo 3.9), essi possono essere definiti anche per bipoli composti che comprendono anche sorgenti pilotate. La dimostrazione di questa affermazione sarà presentata in paragrafi successivi.

4.2 Esempi

4.2.1 Un resistore di resistenza negativa

ANALIZZANDO LA FIGURA 4.7 si ricava banalmente che $v = Ri_1$ e $i = -i_1$ da cui si può scrivere la caratteristica ai morsetti A e B, $v = -Ri$. Si ottiene così un bipolo strettamente attivo.

4.2.2 Esercizio: risoluzione di una rete

PER LA RETE IN FIGURA 4.8 si ricavino tutte le variabili elettriche di lato evidenziate in rosso.

IL GRAFO DEL CIRCUITO è composto da $n = 4$ nodi e $l = 5$ lati il che implica che si potranno scrivere al più $n - 1 = 3$ KCL e $l - n + 1 = 2$ KVL-II linearmente indipendenti. Si noti che il lato pilotante che preleva la corrente i_1 è stato omesso e la corrente viene indicata come quella che attraversa il resistore R_2 . Utilizzando le prime si può ricavare semplicemente $i_e = -i_1$, $i_2 = -\alpha i_1$ e $i_0 = (1 + \alpha)i_1$. Le equazioni di Kirchhoff per le tensioni alle maglie evidenziate in figura e percorse in senso orario permettono di scrivere $E - v_1 - v_0 = 0$ e $v_g - v_2 + v_0 = 0$ che, utilizzando le equazioni costitutive dei bipoli

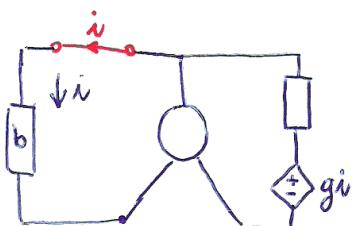
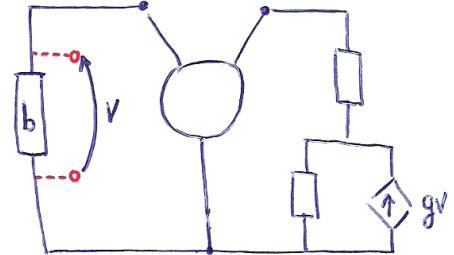


Figura 4.6: Nel circuito in alto si omette tipicamente il circuito aperto, in parallelo al bipolo b , che preleva la tensione v . Nel circuito in basso, il corto circuito in serie a b viene omesso: diventa a tutti gli effetti un “pezzo di filo” e la corrente pilotante i si indica nel bipolo b .

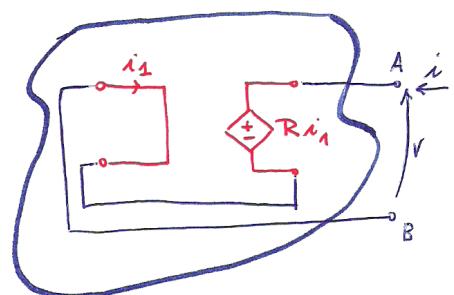


Figura 4.7: $R > 0$.

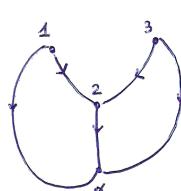
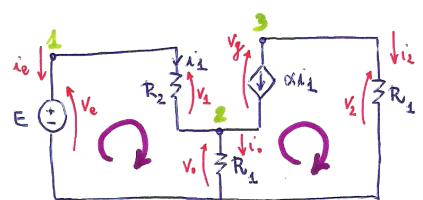


Figura 4.8: Per il circuito in figura sono state evidenziate anche le due maglie che verranno utilizzate per scrivere le KVL-II e il grafo che è stato orientato come le correnti.

della rete e il risultato delle 2 KCL, diventano

$$\begin{aligned} E - R_2 i_1 - R_1(1 + \alpha) i_1 &= 0 \\ v_g - R_1(-\alpha i_1) + R_1(1 + \alpha) i_1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

da cui $i_1 = \frac{E}{R_2 + R_1(1 + \alpha)}$ e $v_g = -\frac{R_1(1 + 2\alpha)}{R_2 + R_1(1 + \alpha)} E$.

Il calcolo delle rimanenti grandezze di lato è immediato e si lascia allo studente.

4.2.3 Modello equivalente di Thevénin

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.9 si ricavino i parametri del modello equivalente di Thevénin ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione v tra i morsetti A e B e la tensione v_2 ai capi di R_2 sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario permette quindi di scrivere

$$v + \alpha v - R_1 \left(A_0 + i - \frac{v}{R_2} \right) = 0 \quad (4.4)$$

da cui

$$v = \underbrace{\frac{R_2 R_1}{R_1 + R_2(1 + \alpha)} i}_{R_{th}} + \underbrace{\frac{R_2 R_1 A_0}{R_1 + R_2(1 + \alpha)}}_{E_{th}} \quad (4.5)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Thevénin è verificata a posteriori se sono definite E_{th} ed R_{th} . A questo proposito è necessario che $R_1 + R_2(1 + \alpha) \neq 0$, ovvero $\alpha \neq -\frac{R_1}{R_2} - 1$.

INFINE NOTIAMO CHE (i) se passivassimo la sorgente indipendente A_0 il termine E_{th} si annulla e (ii), nonostante si passivi A_0 , R_{th} dipende da α dato che per ricavare R_{th} si deve inserire il generatore i . Questa ultima considerazione si estende facendo notare che, in generale, il termine R_{th} dipende da eventuali generatori pilotati che non è lecito passivare!

4.2.4 Modello equivalente di Norton 1

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.10 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti A e B (se esiste).

SI NOTI CHE la tensione v tra i morsetti A e B e la tensione ai capi di R_3 sono identiche. La maglia esterna percorsa in senso antiorario

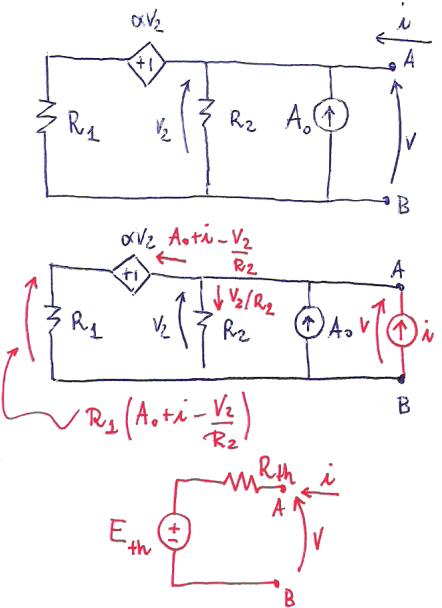


Figura 4.9: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Thevénin del quale si vogliono determinare i parametri E_{th} ed R_{th} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

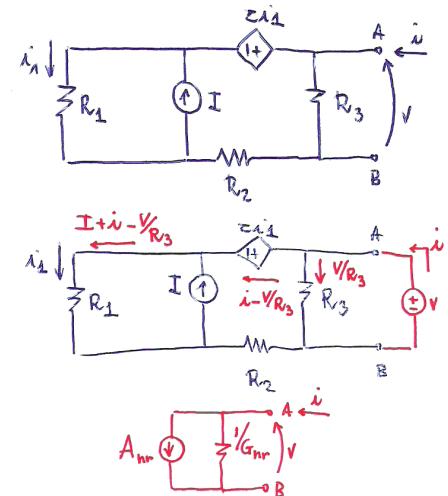


Figura 4.10: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri A_{nr} ed G_{nr} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema.

permette quindi di scrivere

$$v - r(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_1(I + i - \frac{v}{R_3}) - R_2(i - \frac{v}{R_3}) = 0 , \quad (4.6)$$

da cui

$$i = \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3 + r}{R_3(R_1 + R_2 + r)} v}_{G_{nr}} - \underbrace{\frac{R_1 + r}{R_1 + R_2 + r} I}_{A_{nr}} . \quad (4.7)$$

L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è verificata a posteriori se sono definite A_{nr} ed G_{nr} . A questo proposito è necessario che $R_1 + r \neq 0$, ovvero $r \neq -R_1$, e $R_3 \neq 0$. Nuovamente, se passivassimo I otterremmo $A_{nr} = 0$.

4.2.5 Modello equivalente di Norton 2

PER IL BIPOLO COMPOSITO in figura 4.11 si ricavino i parametri del modello equivalente di Norton ai morsetti A e B (se esiste).

CON UN PROCEDIMENTO ANALOGO a quello usato negli esercizi precedenti si ricava

$$i = \underbrace{\frac{1}{R_2} v + gE}_{G_{nr}} . \quad (4.8)$$

PER L'ESISTENZA del modello equivalente di Norton è necessario che $R_2 \neq 0$. Nuovamente, se passivassimo E otterremmo $A_{nr} = 0$. Si noti però che, in questo caso specifico, passivare E corrisponde a passivare anche gv_1 , inoltre, se si passiva E , ri_2 non viene passivato ma non assorbe e non eroga potenza dato che è percorso da corrente nulla.

4.3 L'analisi nodale

INTRODUCIAMO IN QUESTO PARAGRAFO una procedura sistematica per risolvere i circuiti (cioè per ricavare univocamente il valore delle variabili elettriche) che si basa sulle equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.9). Nell'introdurre queste ultime per un circuito con un grafo connesso, con n nodi ed l lati, abbiamo scritto un sistema del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{array} \right. , \quad (4.9)$$

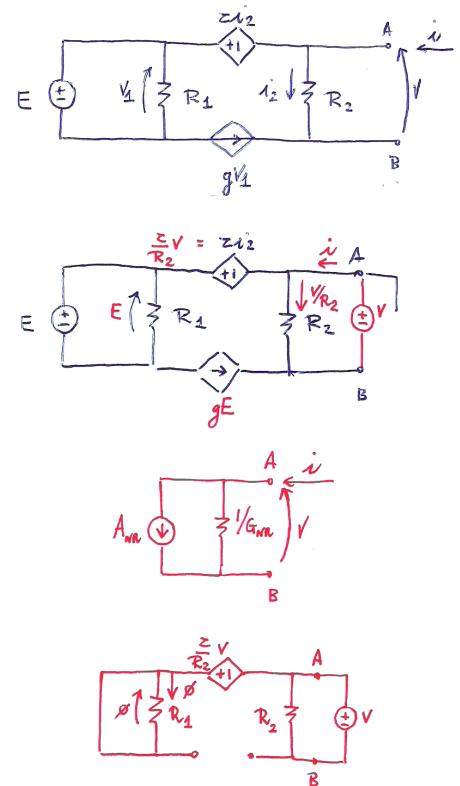


Figura 4.11: Si è evidenziato in rosso il circuito equivalente di Norton del quale si vogliono determinare i parametri A_{nr} ed G_{nr} . Inoltre, sempre in rosso, sono stati evidenziati sullo schema del circuito i risultati parziali dell'analisi della rete che si possono ricavare semplicemente osservandone lo schema. L'ultima schema circuitale in basso rappresenta il circuito equivalente che si ottiene passivando la sorgente impressiva E nel calcolo dei parametri A_{nr} ed G_{nr} .

in $l + n - 1$ equazioni e $2l + n - 1$ incognite. A tale sistema è necessario aggiungere le l equazioni costitutive dei componenti che permettono di avere complessivamente tante incognite quante equazioni. Ci occuperemo nel seguito di formalizzare questo aspetto, ottenendo anche un teorema di esistenza ed unicità della soluzione, per adesso introduciamo un metodo che consente di ridurre le equazioni di Tableau e ricavare tutti gli $n - 1$ potenziali di nodo del circuito in esame (da qui il nome di **analisi nodale**) e da essi ricavare le tensioni e le correnti di lato incognite. Per fare ciò fissiamo un'ipotesi di lavoro che poi andremo a rimuovere

il circuito contiene solo componenti definiti su base tensione.

Passo 0: Si sceglie, tra gli n nodi del circuito, un nodo di riferimento per il potenziale. Lo chiameremo nodo 0 e il suo potenziale u_0 può essere scelto arbitrariamente nullo.

Passo 1: Tutte le tensioni di lato del circuito sono ricavate in funzione dei potenziali di nodo usando le KVL-I. Di fatto si utilizza l'equazione $v - A^T u = \mathbf{0}$.

Passo 2: Mediante le equazioni costitutive dei componenti, che sono stati assunti controllabili in tensione (cioè $i = i(v)$), si ricavano le correnti di lato in funzione dei potenziali nodi (cioè $i = i(A^T u)$).

Passo 3: Si risolvono le KCL in funzione dei potenziali di nodo, cioè $Ai = Ai(A^T u) = \mathbf{0}$.

L'ULTIMO PASSO DEL METODO comporta la risoluzione di un sistema di $n - 1$ equazioni (le KCL) in $n - 1$ incognite (i potenziali di nodo). Una volta determinati i potenziali di nodo, è possibile ripercorre i passi a ritroso e ricavare le correnti e le tensioni di lato.

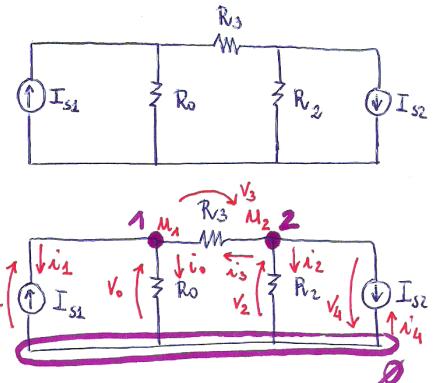
APPARENTEMENTE, per come abbiamo risolto i circuiti finora, si potrebbe erroneamente pensare che mediante l'analisi nodale non si utilizzino le KVL ma solo le KCL. Ciò è ovviamente falso: si usano le KVL-I al "Passo 1", che sappiamo corrispondere alle KVL-II (cfr. paragrafo 2.7), quelle che abbiamo sempre usato e che sembrano mancare all'appello.

4.4 Un esempio guida

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.12. Il "Passo 0" del metodo è stato applicato direttamente sullo schema del circuito in analisi scegliendo il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando $u_0 = 0$.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_1 \\ v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_1 \\ v_4 &= -u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.10)$$



Passo 2:

$$\begin{aligned} i_0 &= \frac{v_0}{R_0} = \frac{u_1}{R_0} \\ i_1 &= -I_{s1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_2 - u_1}{R_3} \\ i_4 &= -I_{s2} \end{aligned} \quad . \quad (4.11)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } i_1 + i_0 - i_3 &= -I_{s1} + \frac{u_1}{R_0} - \frac{u_2 - u_1}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_2 + i_3 - i_4 &= \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_2 - u_1}{R_3} + I_{s2} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.12)$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 2 equazioni in 2 incognite che può essere riscritto evidenziandone incognite e termini noti

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_3} \right) u_1 - \frac{u_2}{R_3} = I_{s1} \\ -\frac{u_1}{R_3} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) u_2 = -I_{s2} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

e risolto ottenendo

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{I_{s1}R_0(R_2 + R_3) - I_{s2}R_0R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \\ u_2 &= -\frac{I_{s2}R_2(R_0 + R_3) - I_{s1}R_0R_2}{R_0 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad . \quad (4.14)$$

4.5 Un altro esempio

UTILIZZANDO L'ANALISI NODALE si vuole risolvere il circuito in figura 4.13 per il quale si è scelto ("Passo 0") il nodo 0 come riferimento per il potenziale fissando $u_0 = 0$. Il circuito ha 3 nodi e quindi l'analisi nodale dovrà fornire un sistema di 3 equazioni lineari avente come incognite i tre potenziali di nodo u_1 , u_2 e u_3 .

Figura 4.12: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

Si noti che le correnti i_1 e i_4 non dipendono dai potenziali di noto dato che corrispondono a generatori indipendenti di corrente.

Si noti come nell'espressione dei potenziali 4.14 di nodo sia evidente il contributo distinto dei due generatori indipendenti.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ \bar{v} &= u_2 \\ v_3 &= u_3 \\ v_g &= u_2 - u_3 \\ v_a &= u_1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= \frac{\bar{v}}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_3}{R_3} \\ i_g &= g\bar{v} = gu_2 \\ i_a &= -A \end{aligned} \quad (4.16)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } -i_a - i_1 &= A - \frac{u_1 - u_2}{R_1} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_1 - i_g - i_2 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - gu_2 - \frac{u_2}{R_2} = 0 \quad . \quad (4.17) \\ \text{KCL nodo 3: } i_g - i_3 &= gu_2 - \frac{u_3}{R_3} = 0 \end{aligned}$$

L'ULTIMO PASSO del metodo restituisce 3 equazioni in 3 incognite che può essere risolto

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 A + u_2 \\ (R_1 A + u_2 - u_2)R_2 - R_1(gR_2 + R_1)u_2 &= R_1 [R_2 A - (gR_2 + R_1)u_2] = 0 \quad , \\ u_3 &= gR_3 u_2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

per ottenere

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(R_1 + \frac{R_2}{gR_2 + R_1} \right) A \\ u_2 &= \frac{R_2}{gR_2 + R_1} A \\ u_3 &= \frac{gR_3 R_2}{gR_2 + R_1} A \end{aligned} \quad (4.19)$$

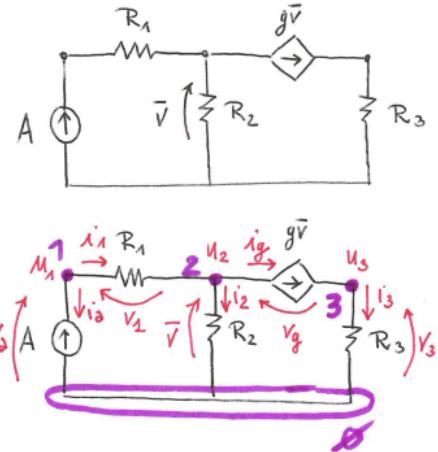


Figura 4.13: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2 e 3 con i potenziali u_1 , u_2 e u_3 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori.

4.6 Analisi nodale con componenti non controllabili in tensione

IN QUESTO PARAGRAFO, con l'ausilio di alcuni esempi, si discuterà come l'analisi nodale possa essere estesa a quei circuiti che contengano componenti non controllabili in tensione.

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 4.14 e si applichi l'analisi nodale per ricavare i potenziali di nodo u_1 e u_2 .

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_3 &= u_1 - u_2 \quad . \\ v_a &= -u_2 \\ v_E &= u_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_2}{R_2} \\ i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_1 - u_2}{R_3} \quad . \\ i_a &= -A_0 \\ i_E &= \dots \end{aligned} \quad (4.21)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1: } i_E + i_1 + i_3 &= i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ \text{KCL nodo 2: } i_2 - i_3 - i_a &= \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

DALL'ESEMPIO PROPOSTO si nota come la presenza di un componente non controllabile in tensione² lascia una corrente incognita, i_E , nelle equazioni dei potenziali di nodo dato che tale corrente non può essere espressa in funzione dei potenziali stessi.

TUTTAVIA È POSSIBILE estendere il sistema dell'analisi nodale aggiungendo l'equazione del componente non controllabile in tensione, cioè $v_E = u_1 = E$, ripristinando così un numero di equazioni pari al numero di incognite³

$$\left\{ \begin{array}{l} i_E + i_1 + i_3 = i_E + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_3} = 0 \\ i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{array} \right. \quad (4.23)$$

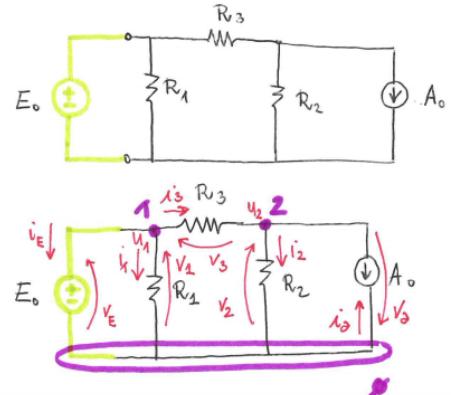


Figura 4.14: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente E_0 non è definito su base tensione.

² Nel caso di un bipolo esso corrisponde direttamente ad un lato non controllabile in tensione. Più in generale potrebbe essere anche un n -terminali, che ammette come base la n -upla costituita da m correnti ($m \leq n$) e $n - m$ tensioni, che comporta m lati non controllabili in tensione.

³ Nel caso in cui ci fossero m lati non controllabili in tensione per un circuito con $n - 1$ nodi, si avrebbe un sistema finale in $n - 1 + m$ equazioni e $n - 1 + m$ incognite.

LA SOLUZIONE PROPOSTA è quella che potrebbe essere codificata in modo sistematico in un calcolatore. Tuttavia noi, per risolvere i circuiti con "carta e matita", useremo un ulteriore passo che permette di riportarci nuovamente nella condizione di avere $n - 1$ equazioni in $n - 1$ incognite. Per fare ciò distinguiamo due casi possibili

- a: il lato non controllabile in tensione è connesso tra un generico nodo k e il nodo 0;
- b: il lato non controllabile in tensione è connesso tra due generici nodi k e h .

Ipotiziamo che al nodo k , nel caso "a" e "b", e al nodo h , nel caso "b", non siano connessi altri lati non controllabili in tensione.

EVIDENTEMENTE, in generale, ci troveremo nella situazione di avere contemporaneamente alcuni lati non controllabili in tensione nel caso "a" ed altri nel caso "b". Per ciascuno di essi si dovrà applicare la procedura corrispondente.

4.6.1 Il caso "a": connessione $k - 0$

QUESTO CASO È QUELLO che abbiamo incontrato in figura 4.14 ed è facile convincersi che porterà sempre ad avere una KCL al nodo k in cui il lato non controllabile incide (uscente o entrante non è rilevante). Inoltre ci sarà un'equazione del componente del tipo $u_k = u_k(\mathbf{i}, \mathbf{v})$, dove \mathbf{i} e \mathbf{v} sono i vettori delle correnti e delle tensioni di lato del circuito.

LA TECNICA DI RIDUZIONE delle equazioni, in questo caso, prevede la rimozione della KCL al nodo k , che contiene la corrente nel lato non controllabile in tensione, e l'aggiunta tra le KCL dell'equazione descrittiva del componente.

Facendo riferimento al circuito in figura 4.14, il sistema di equazioni 4.23 diventerebbe

$$\begin{cases} i_2 - i_3 - i_a = \frac{u_2}{R_2} - \frac{u_1 - u_2}{R_3} + A_0 \\ u_1 - E = 0 \end{cases}, \quad (4.24)$$

cioè un sistema di 2 equazioni in 2 incognite (i soli potenziali di nodo). Risolto il sistema 4.24, sarà poi possibile percorre a ritroso i passi compiuti e ricavare la i_E dall'equazione rimossa, in cui ormai tutto sarà noto tranne la i_E stessa, e poi ricavare come al solito tutte le grandezze di lato incognite.

UN ESEMPIO ULTERIORE del caso discusso è rappresentato in figura 4.15: Applicheremo direttamente l'analisi nodale *modificata* per risolverlo.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 - u_2 \\ v_2 &= -u_2 \\ v_{g1} &= u_1 \\ v_{g2} &= -u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.25)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= -\frac{u_2}{R_2} \\ i_{g2} &= -gu_1 \end{aligned} \quad . \quad (4.26)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 2: } i_1 + i_2 + i_{g2} &= \frac{u_1 - u_2}{R_1} - \frac{u_2}{R_2} - g(u_1 - u_2) = 0 \\ \text{Eq. cost. VCVS: } v_{g1} - \beta v_2 &= u_1 - \beta(-u_2) = u_1 + \beta u_2 = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.27)$$

Si ottiene quindi $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$, risultato che non deve sorprendere dato che la rete contiene solo elementi non impressivi, tempo-invarianti e adinamici.

SI NOTI CHE non è possibile avere in un circuito ben posto più lati di tipo $k - 0$ che incidano nel medesimo nodo k . Questa situazione degenera, infatti, violerebbe in generale le equazioni di Kirchhoff per le tensioni dato che si avrebbero componenti non definiti su base tensione connessi in parallelo tra i nodi k e 0.

4.6.2 Il caso "b": connessione $k - h$

INTRODUCIAMO QUESTO caso con un esempio. Consideriamo il circuito in figura 4.16 per il quale sceglieremo il nodo 0 di riferimento per il potenziale.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 \\ v_{A_0} &= u_1 \\ v_{A_1} &= -u_2 \\ v_E &= u_1 - u_2 \end{aligned} \quad . \quad (4.28)$$

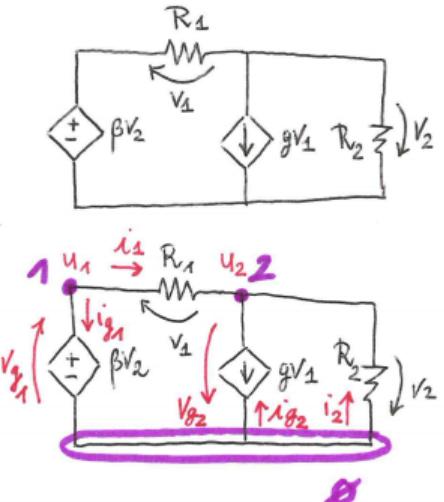


Figura 4.15: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione pilotato βv_2 , di cui non è stato riportato il lato pilotante, non è definito su base tensione.

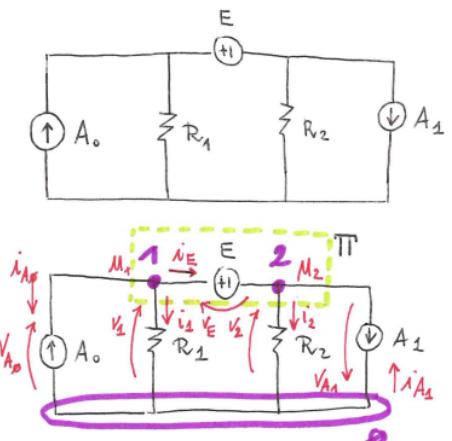


Figura 4.16: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il generatore di tensione indipendente E non è definito su base tensione.

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2}{R_2} \\ i_{A_0} &= -A_0 \\ i_{A_1} &= -A_1 \end{aligned} \quad . \quad (4.29)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_{A_0} + i_1 + i_E &= -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + i_E = 0 \\ \text{KCL nodo 2 } i_2 - i_{A_1} - i_E &= \frac{u_2}{R_2} + A_1 + \frac{u_1}{R_1} - i_E = 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.30)$$

IN QUESTO CASO si nota come le due KCL contengono entrambe la corrente i_E del lato non controllabile in tensione. Ciò non sorprende dato che il lato non è incidente nel nodo 0 e, dato che il grafo è connesso, deve quindi entrare ed uscire, rispettivamente, da altri due nodi del circuito. Non possiamo procedere eliminando le due equazioni dato che, in questo modo, ci troveremmo solo con l'equazione del componente non controllabile in tensione, $v_E = u_1 - u_2 = E$. Non possiamo neppure toglierne una delle due perché avremmo 2 equazioni e 3 incognite.

DATO CHE il lato non controllabile in tensione entra in 2 ed esce da 1, nelle due KCL la i_E appare con segno opposto. Questo fa sì che, sommandole, si elimini la corrente i_E

$$i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} = 0 . \quad (4.31)$$

Di fatto questa nuova equazione è la KCL alla superficie Π evidenziato in figura 4.16. Tale superficie prende il nome di **supernodo** dal momento che racchiude entrambi i nodi ai quali è connesso il lato non controllato in tensione.

A LIVELLO SISTEMATICO, questo tipo di situazione è trattabile evidenziando il componente non controllato in tensione, connesso da due generici nodi k e h , disegnando il supernodo Π_{kh} corrispondente e scrivendo al "Passo 3" la KCL al supernodo, utilizzando infine l'equazione costitutiva del componente non controllato in tensione. Per l'esempio considerato, il "Passo 3" diventa quindi

$$\begin{aligned} \text{KCL supernodo } \Pi_{12} : \quad i_{A_0} + i_1 + i_2 - i_{A_1} &= -A_0 + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = 0 \\ \text{Eq. cost. Gen : } u_1 - u_2 - E &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (4.32)$$

Risolvendo si ottiene $u_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(A_0 - \frac{E}{R_1} \right)$ e $u_1 = E + u_2$.

IN QUESTO CASO, se avessimo considerato il nodo 1 o il nodo 2 come riferimento per la tensione, il generatore di tensione sarebbe ricaduto nel caso "a" precedentemente discusso. Si lascia allo studente verificare che si sarebbe trovata una soluzione del circuito coerente con quella proposta.

4.6.3 Un caso più complesso

UN ESEMPIO PIÙ COMPLESSO in cui, se si sceglie 0 come nodo di riferimento, si ha a che fare con i casi " $k - 0$ " e " $k - h$ " contemporaneamente è riportato in figura 4.17. Evidentemente se avessimo scelto 1 come nodo di riferimento avremmo avuto due lati non controllabili in tensione del tipo " $k - 0$ " e si lascia allo studente verificare la coerenza dei risultati che si sarebbero ottenuti.

NEL CIRCUITO SCELTO possiamo notare che al nodo 1 sono connessi due lati non controllabili in tensione e questo richiederà un approccio leggermente diverso da quelli precedentemente descritti.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 \\ v_E &= u_1 \\ v_2 &= u_1 - u_3 \\ v_g &= u_1 - u_2 \\ v_3 &= u_2 - u_3 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_3}{R_1} \\ \bar{i} &= \frac{u_1 - u_3}{R_2} \\ i_3 &= \frac{u_2 - u_3}{R_3} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Passo 3:

$$\text{KCL nodo 3 : } \bar{i} + i_3 - i_1 = \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0$$

$$\text{KCL supernodo } \Pi_{12} : i_E + \bar{i} + i_3 = i_E + \frac{u_1 - u_3}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} = 0$$

$$\text{Eq. cost. Gen : } u_1 - E = 0$$

$$\text{Eq. cost. CCVS : } u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \quad (4.35)$$

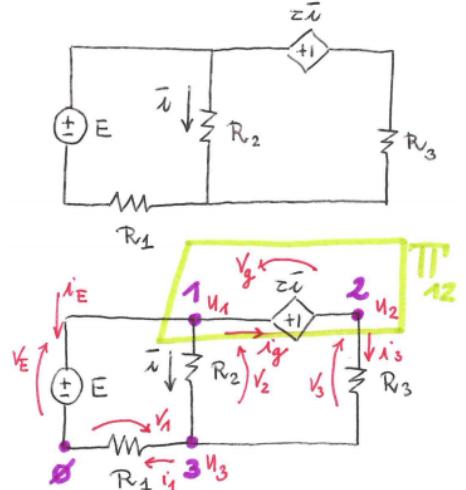


Figura 4.17: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1 e 2 con i potenziali u_1 e u_2 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Sono due gli elementi non controllabili in tensione: il generatore di tensione indipendente E e il CCVS $r\bar{i}$ (di cui non si è evidenziato il lato pilotante).

ANALIZZANDO LE ultime equazioni scritte al Passo "3", si evince che compare ancora la corrente i_E . Il sistema ottenuto è di 4 equazioni in 4 incognite, ovvero una in più rispetto a quelle dell'analisi nodale, dato che il circuito ha 4 nodi. Il sistema può essere ridotto dato che eliminando la KCL al supernodo Π_{12} . Questo può essere fatto perché al supernodo incide il anche generatore indipendente E che fissa il potenziale u_1 . Il nodo 1, infatti, è chiamato in causa dal una lato di tipo $k - 0$ e da uno di tipo $k - h$.

$$\begin{cases} \frac{u_1}{R_2} + \frac{u_2 - u_3}{R_3} - \frac{u_3}{R_1} = 0 \\ u_1 - E = 0 \\ u_1 - u_2 - r \frac{u_1 - u_3}{R_2} = 0 \end{cases} . \quad (4.36)$$

Risolvendole si ricava

$$\begin{aligned} u_1 &= E \\ u_3 &= \frac{R_1(R_3 + R_2 - r)}{R_2 R_3 + R_1 R_2 - r R_1} E \\ u_2 &= \left(1 - \frac{r}{R_2}\right) E + \frac{r}{R_2} u_2 \end{aligned} . \quad (4.37)$$

4.6.4 Sempre peggio

UN CASO ANCORA PIÙ COMPLESSO di quelli trattati precedentemente è riportato in figura 4.18. Il circuito contiene 3 bipoli non controllabili in tensione e saremmo tentati di dire che servono i supernodi Π_{21} e Π_{24} . Si noti tuttavia che al nodo 2 sono connessi due lati non controllabili in tensione.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_3 - u_2 \\ v_{E_1} &= u_3 \\ v_{E_2} &= u_2 - u_4 \\ v_2 &= u_4 \\ v_g &= u_2 - u_1 \\ v_a &= u_1 \end{aligned} . \quad (4.38)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_3 - u_2}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_4}{R_2} \\ i_a &= -A \end{aligned} . \quad (4.39)$$

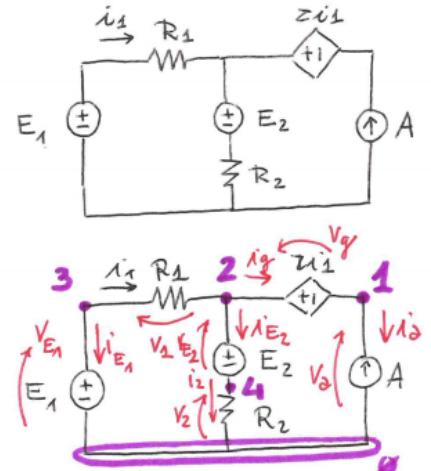


Figura 4.18: Per il circuito in alto si è ridisegnato lo schema evidenziando il nodo 0 scelto come riferimento per il potenziale, i nodi 1, 2, 3 e 4, con i potenziali u_1, u_2, u_3 e u_4 , le grandezze elettriche di ogni lato prese con la convenzione degli utilizzatori. Da notare che il circuito contiene 3 bipoli non definiti su base tensione.

Passo 3:

$$\begin{aligned}
 \text{KCL supernodo } \Pi_{21} : \quad & i_a + i_{E_2} - i_1 = -A + i_{E_2} - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\
 \text{KCL supernodo } \Pi_{24} : \quad & i_1 + i_g - i_2 = \frac{u_3 - u_2}{R_1} - i_g - \frac{u_4}{R_2} = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_1 : \quad & u_3 - E_1 = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_2 : \quad & u_2 - u_4 - E_2 = 0 \\
 \text{Eq. cost. CCVS : } & u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

SEGUENDO LA PROCEDURA descritta in precedenza, cioè,

- eliminando la KCL al nodo 3 e inserendo l'equazione costitutiva del generatore E_1 (connessione $k - 0$),
- usando la KCL al supernodo Π_{21} e inserendo l'equazione costitutiva del generatore pilotato,
- usando la KCL al supernodo Π_{24} e inserendo l'equazione costitutiva del generatore E_2 ,

si ottiene un sistema di 5 equazioni in 6 incognite contro le 4 in 4 incognite che ci saremmo aspettati. Questo si deve al fatto che al nodo 2 sono connessi 2 lati non controllabili in tensione di tipo $k - h$.

SI RICHIEDE di utilizzare il supernodo Π_{124} che racchiude completamente 2 lati non controllati in tensione di tipo $k - h$, e nasconde quindi le correnti i_{E_2} e i_g , e tagli solo lati controllabili in tensione (quelli dei componenti R_1 , R_2 ed A). Le equazioni del "Passo 3" modificato diventano quindi

$$\begin{aligned}
 \text{KCL supernodo } \Pi_{124} : \quad & i_2 + i_a - i_1 = \frac{u_4}{R_2} - A - \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_1 : \quad & u_3 - E_1 = 0 \\
 \text{Eq. cost. } E_2 : \quad & u_2 - u_4 - E_2 = 0 \\
 \text{Eq. cost. CCVS : } & u_2 - u_1 - r \frac{u_3 - u_2}{R_1} = 0
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Risolvendo si ottiene

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{R_1(E_2 + AR_2 + E_1R_2)}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{r}{R_1} \right) - \frac{r}{R_1} E_1 \\
 u_2 &= \frac{R_1(E_2 + AR_2 + E_1R_2)}{R_1 + R_2} \\
 u_3 &= E_1 \\
 u_4 &= \frac{R_2(AR_1 - E_2 + E_1R_1)}{R_1 + R_2}
 \end{aligned} \quad . \quad (4.42)$$

TANTO IN QUESTO ULTIMO ESEMPIO quanto in quello precedente qualora si fosse scelto come nodo di riferimento il nodo 3, il circuito contiene un nodo (il nodo 2 in questo caso e il nodo 1 nel precedente) in cui incidono due lati del grafo non controllabili in tensione di tipo $k - h$. In questo tipo di situazione, anche quando siano più di due i lati incidenti, si interviene individuando delle superfici di controllo più complesse del supernodo che **racchiudono completamente solo lati non controllabili in tensione e tagliano solo lati controllabili in tensione**.

5

5.1 Teorema di esistenza e unicità

SI CONSIDERI UN CIRCUITO LINEARE costituito da N –terminali, adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, che corrisponda ad un grafo connesso con n nodi e l lati. Facendo riferimento al formalismo usato introducendo le equazioni di Tableau (cfr. paragrafo 2.9), si considerino i vettori $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^l$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^l$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$, delle correnti e delle tensioni di lato, e dei potenziali di nodo ridotti (cioè non si considera il nodo scelto come riferimento per il potenziale) e si scrivano le equazioni

$$\begin{cases} A\mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v} - A^T\mathbf{u} = \mathbf{0} \end{cases} . \quad (5.1)$$

COME POSSIAMO ASPETTARCI che siano formulabili le equazioni costitutive dei componenti nelle ipotesi di lavoro (linearità, adinamicità e tempo-varianza)? Verificheremo con alcuni esempi che è possibile scrivere la relazione matriciale

$$M(t)\mathbf{v}(t) + N(t)\mathbf{i}(t) = \mathbf{z}(t) , \quad (5.2)$$

con $M(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $N(t) \in \mathbb{R}^{l \times l}$ e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^l$, che introduce l equazioni lineari in $2l$ incognite.

COME PRIMO ESEMPIO consideriamo il circuito in figura 5.1. Possiamo scrivere banalmente $v_1 = R_1 i_1$, $v_2 = R_2 i_2$ e $v_E = e(t)$. Queste tre equazioni costitutive possono essere riorganizzate in forma matriciale nel modo seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_1 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e(t) \end{bmatrix} . \quad (5.3)$$

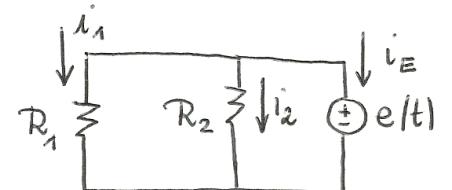


Figura 5.1: Per questo circuito le matrici M ed N sono diagonali.

UN ALTRO ESEMPIO lo costruiamo a partire dal circuito in figura 5.2 in cui è stato evidenziato anche il lato pilotante del CCVS, cioè il cortocircuito tra i nodi 3 e 0. Le equazioni costitutive dei componenti sono $v_1 - R_1 i_1 = 0$ e $v_2 - R_2 i_2 = 0$ per i due resistori lineari, $v_G - r\bar{t} = 0$ e $\bar{v} = 0$ per il generatore pilotato, $i_a = a(t)$ per il generatore indipendente di corrente. In questo caso l'equazione 5.2 diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_G \\ v_1 \\ v_a \\ v_2 \\ \bar{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r \\ 0 & -R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_G \\ i_1 \\ i_a \\ i_2 \\ \bar{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Si noti che la presenza del generatore pilotato fa sì che la matrice N presenti un termine fuori dalla diagonale. Infatti il CCVS ha un'equazione costitutiva che lega la sua tensione di lato alla corrente di un altro lato del circuito.

In tutti e due gli esempi scelti, $M(t)$ ed $N(t)$ sono matrici costanti dato che i componenti non sono tempo-varianti.

INTRODUCIAMO ADESSO IL VETTORE $w(t)$ così organizzato

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

grazie al quale possiamo riscrivere le equazioni 5.1 e 5.2 nel modo seguente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n-1 \times (n-1)} & \mathbb{O}_{(n-1) \times l} & A \\ -A^T & \mathbb{1}_l & \mathbb{O}_{l \times l} \\ \mathbb{O}_{l \times (n-1)} & M(t) & N(t) \end{bmatrix}}_{T(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \\ i(t) \end{bmatrix}}_{w(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{O}_{l \times 1} \\ \mathbb{O}_{l \times 1} \\ z(t) \end{bmatrix}}_{y(t)}, \quad (5.6)$$

dove $\mathbb{O}_{m \times n}$ è una matrice di 0 con m righe e n colonne e $\mathbb{1}_l$ è la matrice identità di taglia $l \times l$.

Un circuito lineare, composto da N -terminali adinamici e eventualmente tempo-varianti, e sorgenti impressive, ammette quindi una ed una sola soluzione in $t = \hat{t}$ se e solo se $\det(T(\hat{t})) \neq 0$. Tale soluzione unica è pari a $w(\hat{t}) = T(\hat{t})^{-1}y(\hat{t})$.

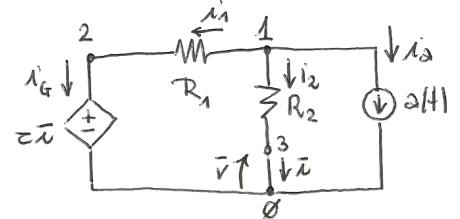


Figura 5.2: Per questo circuito la matrice N non è diagonale a causa della presenza del generatore pilotato. Si noti il lato pilotante (corto circuito) tra i nodi 3 e 0.

LA CONDIZIONE DI ESISTENZA ED UNICITÀ che è stata ricavata, nonostante la sua valenza teorica, è di scarsa utilità pratica e di difficile applicazione. Esistono metodi di analisi che possono essere applicati a grandi classi di circuiti lineari e non lineari che contengono elementi resistivi (incluse le sorgenti pilotate) che consentono di determinare, spesso per ispezione, se il circuito ammette soluzione unica.

5.2 Il principio di sovrapposizione degli effetti

INTRODUCIAMO IL PRINCIPIO o teorema di sovrapposizione degli effetti mediante un esempio. Risolviamo, in particolare, il circuito in figura 5.3 con il metodo dell'analisi nodale modificata per determinarne il potenziale ai nodi 1 e 2.

Passo 1:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \\ v_2 &= u_2 - u_1 \\ v_3 &= u_1 \\ v_4 &= u_1 \\ v_E &= u_2 \end{aligned} \quad . \quad (5.7)$$

Passo 2:

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{u_1}{R_1} \\ i_2 &= \frac{u_2 - u_1}{R_2} \\ i_3 &= g v_2 = g(u_2 - u_1) \\ i_4 &= -I \end{aligned} \quad . \quad (5.8)$$

Passo 3:

$$\begin{aligned} \text{KCL nodo 1 : } i_4 + i_3 + i_1 - i_2 &= -I + \frac{u_1}{R_1} + g(u_2 - u_1) - \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0 \\ \text{Eq. cost. Gen : } v_E &= u_2 = E \end{aligned} \quad . \quad (5.9)$$

Svolgendo i conti è possibile ricavare agilmente

$$u_1 = \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{h_1} I + \underbrace{\frac{R_1(1 - g R_2)}{R_2 - g R_1 R_2 + R_1}}_{k_1} E \quad (5.10)$$

e si noti come h_1 e k_1 non dipendono dai generatori indipendenti ma solo dalle grandezze "non impressive" del circuito. h_1 rappresenta l'effetto di I su u_1 e k_1 l'effetto di E . Passivando uno alla volta i due

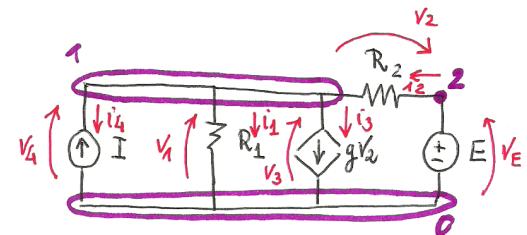


Figura 5.3: Il generatore indipendente di tensione E non è controllabile in tensione ed è connesso al nodo di riferimento 0. Il potenziale al nodo 2 è quindi pari ad E .

generatori, il potenziale u_1 è esprimibile come uno dei due effetti preso singolarmente. Inoltre, se i generatori venissero passivati contemporaneamente il circuito sarebbe in quiete e u_1 sarebbe nullo. Analogamente si ricava $u_2 = 0 \cdot I + 1 \cdot E$. Tuttavia, affinché, il circuito in figura 5.3 abbia una soluzione, è necessario che $R_2 - gR_1R_2 + R_1 \neq 0$. Il circuito deve quindi essere *ben posto*.

DALL'ESEMPIO CONSIDERATO si nota come i potenziali di nodo siano una combinazione lineare degli ingressi del circuito. Dato che tensioni di lato e correnti di lato sono esprimibili come combinazioni lineari dei potenziali di nodo, anche quest'ultime sono scrivibili come combinazione lineare degli ingressi del circuito.

PER GENERALIZZARE L'ESEMPIO proposto, consideriamo un circuito elettrico costituito da multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti e da sorgenti impressive di tensione e di corrente, che ammetta una sola soluzione. Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma che

l'intensità di corrente e la tensione associata a ciascun lato del grafo corrispondente al circuito sono pari, rispettivamente, alla somma delle intensità di corrente e delle tensioni che ciascuno dei generatori indipendenti produrrebbe se agisse da solo con tutti gli altri generatori spenti.

La situazione è rappresentata graficamente in figura 5.4 dove il generico il lato a cui ci si riferisce nell'enunciato del principio di sovrapposizione degli effetti è indicato dal bipolo b (lineare, adinamico e non impressivo).

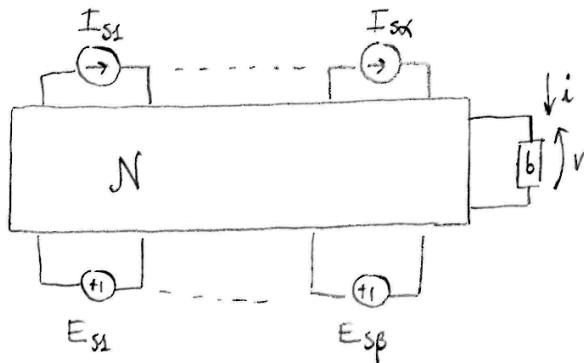


Figura 5.4: La figura evidenzia un generico circuito dal quale sono state messe in evidenza tutte le sorgenti impressive e un lato al quale è connesso un generico bipolo b (lineare, adinamico e non impressivo). N contiene solo multi-terminali lineari, adinamici, eventualmente tempo-varianti.

Il principio di sovrapposizione degli effetti afferma quindi che

$$\begin{aligned} v &= h_1(t)I_{S1} + \cdots + h_\alpha(t)I_{S\alpha} + k_1(t)E_{S1} + \cdots + k_\beta(t)E_{S\beta}, \\ i &= \hat{h}_1(t)I_{S1} + \cdots + \hat{h}_\alpha(t)I_{S\alpha} + \hat{k}_1(t)E_{S1} + \cdots + \hat{k}_\beta(t)E_{S\beta} \end{aligned} \quad (5.11)$$

dove $\{h_1(t), \dots, h_\alpha(t)\}$, $\{k_1(t), \dots, k_\beta(t)\}$, $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_\alpha(t)\}$ e $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_\beta(t)\}$ non dipendono dai generatori indipendenti e si

può quindi calcolare l'effetto complessivo ad esempio su v delle sorgenti impressive "accendendole" una alla volta.

Dopo aver introdotto il principio di sovrapposizione degli effetti, se ne propone una dimostrazione nel caso in cui il circuito in esame sia costituito, eccezion fatta per le sorgenti impressive, da N -terminali controllabili in tensione e ammetta, come richiesto dal principio stesso, una ed una sola soluzione. Si considerino quindi le equazioni di 5.1 e 5.2 e si ricavino le correnti di lato i in funzione delle tensioni di lato v e degli ingressi $z(t)$.

$$i = N^{-1} (z(t) - Mv) . \quad (5.12)$$

In base alla seconda delle equazioni 5.1, si ottiene ancora

$$i = N^{-1} (z(t) - MA^T u) \quad (5.13)$$

che, sostituita nella prima delle 5.1 ci consente di scrivere

$$AN^{-1} (z(t) - MA^T u) = 0 , \quad (5.14)$$

ovvero

$$\underbrace{AN^{-1} MA^T}_{a \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}} \underbrace{u}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} = \underbrace{AN^{-1}}_{b \in \mathbb{R}^{(n-1) \times l}} z(t) . \quad (5.15)$$

I potenziali di nodo si ottengono quindi come $u = a^{-1} b z(t)$, le tensioni di lato come

$$v = \underbrace{A^T a^{-1} b}_{d \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) \quad (5.16)$$

e le correnti di lato come

$$\begin{aligned} i &= N^{-1} (z(t) - MA^T a^{-1} b z(t)) \\ &= \underbrace{N^{-1} (1_l - MA^T a^{-1} b)}_{f \in \mathbb{R}^{l \times l}} z(t) . \end{aligned} \quad (5.17)$$

A questo punto, se ci focalizziamo per esempio sulle correnti di lato e ne consideriamo la j -esima ($j = 1, \dots, l$), l'equazione 5.17 ci consente di scrivere

$$i_j = \sum_{k=1}^l f_{jk} z_k(t) \quad (5.18)$$

in cui si evidenziano i singoli *effetti* delle sorgenti z sulla corrente i_j . Lo stesso può essere fatto per le tensioni di lato e per i potenziali di nodo.

Se \mathcal{N} non contenesse componenti tempo-varianti i coefficienti $\{h_1(t), \dots, h_\alpha(t)\}$, $\{k_1(t), \dots, k_\beta(t)\}$, $\{\hat{h}_1(t), \dots, \hat{h}_\alpha(t)\}$ e $\{\hat{k}_1(t), \dots, \hat{k}_\beta(t)\}$ sarebbero costanti e non dipenderebbero quindi dal tempo t .

5.2.1 Esempio

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 5.5 e si calcoli la potenza assorbita dal resistore R_1 . Possiamo risolvere il problema considerando uno alla volta l'effetto dei generatori I ed E e poi sommare i risultati. Passivando il generatore E lo dobbiamo sostituire con un corto circuito e si ottiene il circuito in figura 5.6.

Si ricava facilmente

$$i_3^I = -\frac{R_4 I}{(R_1||R_2) + R_3 + R_4} = -6A \quad (5.19)$$

e

$$i_1^I = \frac{R_2 i_3^I}{R_1 + R_2} = -3A \quad (5.20)$$

La potenza assorbita da R_1 inserendo solo I dunque pari a $p_a^I = R_1(i_1^I)^2 = 9W$.

Passivando adesso I ed inserendo E si ottiene il circuito in figura 5.7.

$$v_1^E = -\frac{R_1 E}{R_1 + [R_2||(R_3 + R_4)]} = -10V \quad (5.21)$$

La potenza assorbita da R_1 inserendo solo E dunque pari a $p_a^E = \frac{(v_1^E)^2}{R_1} = 100W$. La potenza assorbita dal resistore R_1 in figura 5.5 è quindi $p_a^I + p_a^E = 109W$.

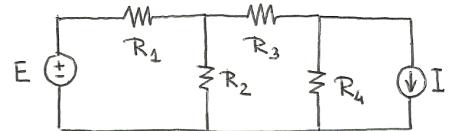


Figura 5.5: $E = 15V$, $I = 18A$, $R_1 = R_2 = 1\Omega$, $R_3 = R_4 = 0.5\Omega$.

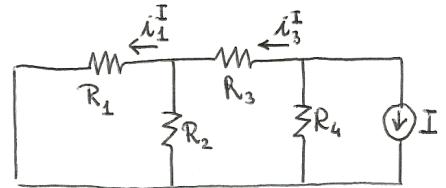


Figura 5.6: La corrente i_3^I può essere ricavata applicando la regola del partitore di corrente tra R_4 e $(R_1||R_2) + R_3$.

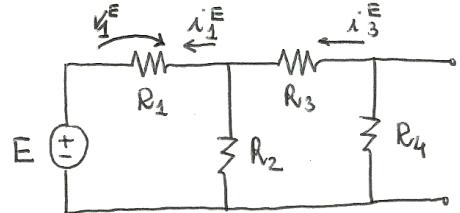


Figura 5.7: La tensione v_1^E può essere ricavata applicando la regola del partitore di tensione tra R_1 e $R_2||(R_3 + R_4)$.

5.3 Il teorema di Thevénin e Norton

SIA DATO UN BIPOLO composito \mathcal{N} costituito da elementi lineari adinamici, eventualmente tempo-varianti, e da sorgenti imperative di corrente e/o di tensione. Il suo comportamento ai morsetti A e B è equivalente (cfr. il principio di equivalenza al paragrafo 3.7) a quello di un bipolo equivalente \mathcal{N}_{eq} del tipo **Thevénin** se ammette una ed una sola soluzione, per ogni i , il circuito che si ottiene collegando ai morsetti A e B un generatore di corrente i come in figura 5.9. Il bipolo \mathcal{N} deve quindi essere **controllabile in corrente**.

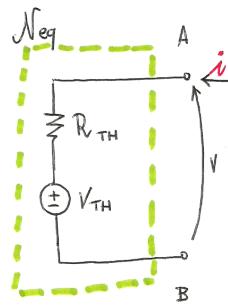
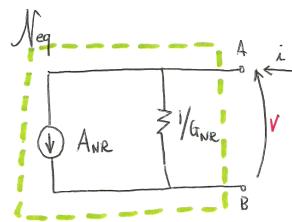


Figura 5.8: Il circuito equivalente di Thevénin.

Il comportamento ai morsetti A e B di \mathcal{N} è invece equivalente a quello di un bipolo equivalente \mathcal{N}_{eq} del tipo **Norton** se ammette una ed una sola soluzione, per ogni v , il circuito che si ottiene collegando ai morsetti A e B un generatore di tensione v come in figura 5.11. Il bipolo \mathcal{N} deve quindi essere **controllabile in tensione**.



Qualora \mathcal{N} ammetta sia la base corrente sia la base tensione, sono definiti entrambi i bipoli equivalenti.

FORNIAMO LA DEMOSTRAZIONE nel caso del circuito equivalente di Thevénin. Si consideri il circuito in figura 5.9: se per ogni i ammette una ed una sola soluzione, allora è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2) e scrivere la tensione di lato v tra i morsetti A e B come

$$v = ri(t) + \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{Sj} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{Si} , \quad (5.22)$$

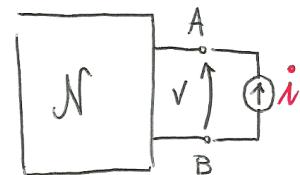


Figura 5.9: Il composito \mathcal{N} collegato al generatore di prova i .

Figura 5.10: Il circuito equivalente di Norton.

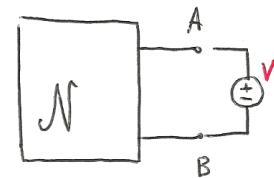


Figura 5.11: Il composito \mathcal{N} collegato al generatore di prova v .

dove I_{s_j} e E_{s_i} sono i generatori indipendenti di corrente e tensione eventualmente presenti in \mathcal{N} .

La tensione v , quando si passivino tutte le sorgenti indipendenti interne è pari a

$$\left. \begin{aligned} v &|_{I_{s_j}=0, \forall j} = ri(t) \\ &E_{s_i}=0, \forall i \end{aligned} \right. , \quad (5.23)$$

e si definisce

$$\left. \begin{aligned} \frac{v}{i} &|_{I_{s_j}=0, \forall j} = R_{th} \\ &E_{s_i}=0, \forall i \end{aligned} \right. . \quad (5.24)$$

Analogamente, se $i \equiv 0$, se cioè si lavora in condizioni di **circuito aperto** (c.a.),

$$v|_{c.a.} = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{s_j} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{s_i} = E_{th} . \quad (5.25)$$

Si lascia allo studente la dimostrazione del caso Norton che equivale a

$$\left. \begin{aligned} \frac{i}{v} &|_{I_{s_j}=0, \forall j} = G_{nr} \\ &E_{s_i}=0, \forall i \end{aligned} \right. \quad (5.26)$$

e

$$i|_{c.c.} = \sum_{j=1}^{\alpha} h_j I_{s_j} + \sum_{i=1}^{\beta} k_i E_{s_i} = A_{nr} , \quad (5.27)$$

dove il pedice "c.c" sta per **corto circuito**.

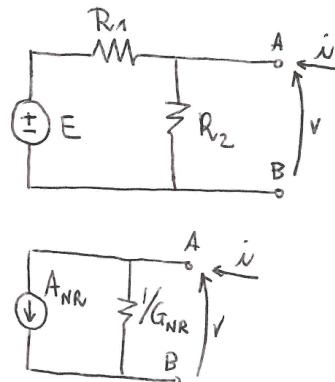
LA DEMOSTRAZIONE DEL TEOREMA è di tipo costruttivo, nel senso che fornisce un'indicazione precisa su come poter ricavare i parametri dei circuiti equivalenti. Per ricavare R_{th} si passivano tutti i generatori interni alla rete e si impone una corrente i ai morsetti A e B e si misura il rapporto tra la tensione v ai morsetti A e B e la corrente i stessa. Nel caso Norton, cioè per ricavare G_{nr} , si impone una tensione v , si misura una corrente i , si valuta il loro rapporto $i/v = G_{nr}$. Per ricavare invece E_{th} e A_{nr} , si considerano la tensione di circuito aperto e la corrente di cortocircuito, rispettivamente. Ovvero, si lasciano appesi A e B e si misura E_{th} ai morsetti, oppure si impone un cortocircuito tra A e B e si misura la corrente A_{nr} che attraversa il cortocircuito stesso.

L'**APPROCCIO DESCRITTO SOPRA**, che prende il nome di **prove semplici**, non è l'unico e neppure il meno laborioso. A volte è più conveniente impostare la corrente i o la tensione v , a seconda del modello che si sta cercando, e ricavare la tensione v o la corrente i corrispondenti esattamente come si è fatto introducendo i circuiti equivalenti

di Thevénin e Norton nel paragrafo 3.9. Da un punto di vista sperimentale, però, è il modo più semplice per ricavare i parametri dei circuiti equivalenti.

5.3.1 Esempi di applicazione dei teoremi di Thevénin e Norton

PER IL BIPOLO composito in figura 5.12 si ricavi, ai morsetti A e B , il circuito equivalente di Norton descritto dall'equazione costitutiva $i = G_{nr}v + A_{nr}$.



Si ricorda che $G_{nr} = \frac{i}{v}|_{A_{nr}=0}$ e che $A_{nr} = i|_{v=0}$.

Imporre $A_{nr} = 0$ equivale a passivare il generatore indipendente di tensione E (cfr. figura 5.13). Ai morsetti A e B rimangono quindi, connessi in parallelo, R_1 ed R_2 . Possiamo quindi ricavare $G_{nr} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, ovvero il rapporto tra la corrente i entrante al morsetto A qualora si colleghi un generatore di prova v tra i morsetti A e B .

Collegando invece un cortocircuito ai morsetti A e B (cfr. figura 5.14), il resistore R_2 non ha alcun effetto nella rete avendo ai suoi capi una tensione nulla. La corrente i di corto circuito sarà dunque $i = -\frac{E}{R_1} = A_{nr}$.

Figura 5.12: Per il bipolo composito connesso ai morsetti A e B si vogliono ricavare i parametri del circuito equivalente di Norton.

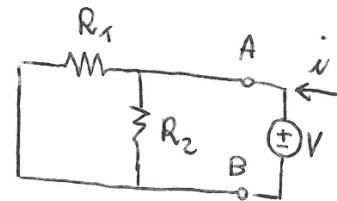


Figura 5.13: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di G_{nr} .

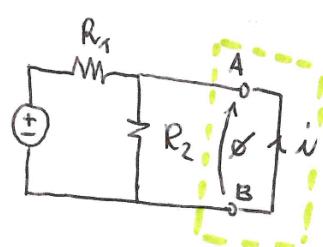


Figura 5.14: Prove semplici per il circuito in figura 5.12: calcolo di A_{nr} .

L'equazione costitutiva del circuito equivalente di Norton è dunque

$$i = \frac{v}{R_1} + \frac{v}{R_2} - \frac{E}{R_1} = \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} v}_{G_{nr}} - \underbrace{\frac{E}{R_1}}_{A_{nr}} . \quad (5.28)$$

A questo risultato si poteva arrivare collegando il generatore v ai morsetti A e B ricavando poi la corrente i . Si sarebbe scritto $i_{R_1} = \frac{E-v}{R_1}$ e $i = \frac{v}{R_2} - \frac{E-v}{R_1}$ che equivale all'equazione 5.28.

SI CALCOLI ADESSO per i circuito in figura 5.15, la resistenza equivalente R_{eq} "sentita" tra A e B .

Per risolvere il problema possiamo come prima cosa calcolare il circuito equivalente di Thevenin tra i morsetti C e D , rimuovendo R_C , e poi ricollegare come in figura 5.16 il circuito equivalente ad R_C . A questo punto, passivando E_{th} , la resistenza sentita ai morsetti A e B è $R_{eq} = R_{th} \parallel R_C$.

Si ricorda che, in figura 5.16, $v = R_{th}i + E_{th}$ e che, se $E_{th} = 0$ (ovvero $E = 0$), $\frac{v}{i} = R_{th}$. In particolare, $v_B = R_B i$, $v_A = R_A i$ e $v_{GS} = -v_A$. Quindi $v - iR_B - \mu R_A i - R_A i = 0$ e cioè $R_{th} = R_B + (1 + \mu)R_A$.

La resistenza cercata è quindi pari a $R_{eq} = R_C \parallel (R_B + (1 + \mu)R_A)$.

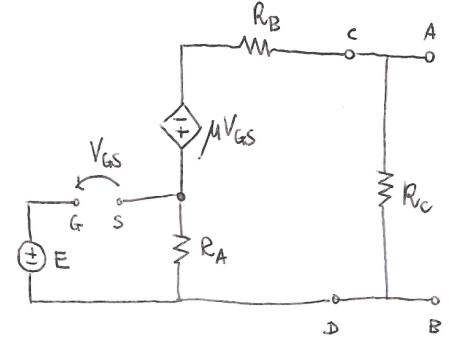


Figura 5.15: Quanto vale la resistenza equivalente R_{eq} "sentita" tra A e B ?

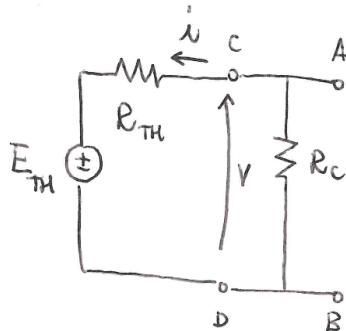


Figura 5.16: Dopo aver ricavato il circuito equivalente di Thevenin riconnetto R_C .

6

6.1 I doppi bipoli

IN QUESTA SEZIONE DEL CORSO ci dedicheremo allo studio di una particolare famiglia di 4-terminali, i **doppi bipoli** (adinamici e tempo-invarianti). Abbiamo visto introducendo i generatori pilotati (cfr. paragrafo 4.1), come alcuni 4-terminali godono di una particolare proprietà tale per cui non necessitano di 3 correnti e 3 tensioni descrittive ma sono pienamente caratterizzati da solo 2 tensioni e 2 correnti.

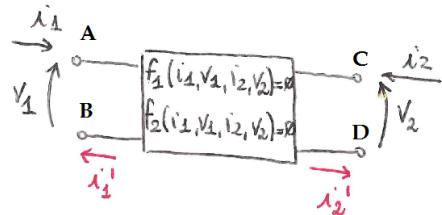


Figura 6.1: Un generico doppio bipolo.

In particolare, se per il 4-terminali in figura 6.1, le proprietà $i'_1 = i_1$ e $i'_2 = i_2$ non dipendono dal circuito cui il componente è collegato, allora si parla di **doppio bipolo proprio**, altrimenti di **doppio bipolo improprio**. Le sorgenti pilotate sono esempi di doppi bipoli propri.

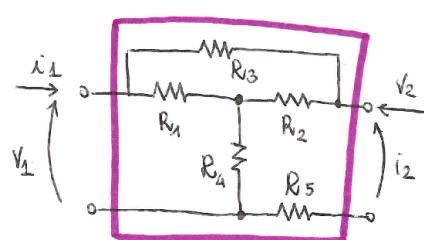


Figura 6.2: Un particolare 4-terminali che non è un doppio bipolo proprio.

Il 4-terminali in figura 6.2, invece, è un doppio bipolo improrio dato che, se collegato come in figura 6.3, si comporta come un doppio bipolo, ma, se collegato come in figura 6.4, invece no.

Le coppie di morsetti (A, B) e (C, D) in figura 6.1, si definiscono **porte** e il doppio bipolo si chiama anche 2-porte. Quando un 4-terminali si comporta come un doppio bipolo, il suo grafo si riduce a due lati disgiunti, come accadeva per i generatori pilotati (cfr. figura 4.3).

SE LE EQUAZIONI 2 COSTITUTIVE

$$\begin{cases} f_1(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \\ f_2(i_1, i_2, v_1, v_2) = 0 \end{cases} . \quad (6.1)$$

necessarie e sufficienti per descrivere il comportamento del generico doppio bipolo, sono lineari, allora il doppio bipolo si dice lineare¹. Ci limiteremo allo studio di doppi bipoli **lineari affini**:

$$\begin{cases} m_{11}v_1 + m_{12}v_2 + n_{11}i_1 + n_{12}i_2 + c_1 = 0 \\ m_{21}v_1 + m_{22}v_2 + n_{21}i_1 + n_{22}i_2 + c_2 = 0 \end{cases} . \quad (6.3)$$

PARTIAMO DAL CASO **omogeneo**, con $c_1 = c_2 = 0$ nell'equazione 6.3. Omogeneo equivale a dire che all'interno del doppio bipolo non ci sono sorgenti impressive indipendenti. Ciò deriva direttamente da principio di sovrapposizione degli effetti (cfr. paragrafo 5.2). Possiamo infatti pensare alle due porte del doppio bipolo come a due lati per i quali Ad esempio, se il componente è controllabile in tensione ad entrambe le porte, le correnti di porta si potranno esprimere come somma di contributi dovuti ai generatori di controllo imposti alle porte e delle sorgenti interne. Nel caso omogeneo, restando solo i contributi alle porte, di fatto non sono presenti sorgenti impressive interne.

6.2 Le rappresentazioni cardinali

IN GENERALE, UN DOPPIO BIPOLO ammette 4 possibili basi di definizione che implicano altrettante **rappresentazioni cardinali**. Le basi possibili sono la base tensione (v_1, v_2), la base corrente (i_1, i_2) e le due basi miste (v_1, i_2) e (i_1, v_2).

6.2.1 Forma esplicita con parametri R

SE È POSSIBILE ASSEGNAME alle due porte le correnti i_1 e i_2 e ricavare univocamente le tensioni v_1 e v_2 , allora il doppio bipolo ammette

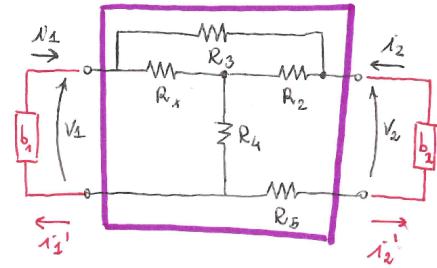


Figura 6.3: Il 4-terminali di figura 6.2, collegato a due generici bipoli b_1 e b_2 , si comporta come doppio bipolo per come è realizzata la connessione.

¹ I generatori pilotati sono dunque lineari dato che, considerando ad esempio un CCCS (cfr. figura 4.1), l'equazione 6.1 diventa

$$\begin{cases} v_{\alpha\beta} = 0 \\ i_A - \gamma i_\alpha = 0 \end{cases} . \quad (6.2)$$

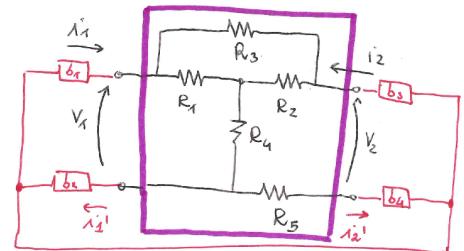


Figura 6.4: Il 4-terminali di figura 6.2, in questa configurazione, non si comporta come doppio bipolo dato che $i'_1 \neq i_1$ e $i'_2 \neq i_2$.

la base di definizione corrente ed è possibile risolvere il sistema di equazioni 6.3 con $c_1 = c_2 = 0$ e scrivere

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}, \quad (6.4)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.5)$$

COME SI RICAVANO I PARAMETRI della matrice di resistenze \mathcal{R} dato un 4-terminali che si comporta come un doppio bipolo? Usiamo la sovrapposizione degli effetti. In base all'equazione 6.4, infatti, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{i_2=0} & R_{21} &= \frac{v_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \\ R_{12} &= \frac{v_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} & R_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (6.6)$$

La prima riga di equazioni nella 6.6 equivale, dal punto di vista operativo, a lasciare aperta la porta 2 del doppio bipolo e a collegare un generatore indipendente di corrente i_1 alla porta 1 (cfr. figura 6.5).

Si misurano quindi le tensioni v_1 e v_2 e si ricavano i parametri R_{11} e R_{21} . Analogamente, per la seconda riga di equazioni, si lascia aperta la porta 1 del doppio bipolo e si collega un generatore indipendente di corrente i_2 alla porta 2 (cfr. figura 6.5). Si misurano ancora le tensioni v_1 e v_2 e si ricavano i parametri R_{12} e R_{22} .

Questo approccio, detto delle **prove semplici**, è fondamentale per **misurare** praticamente i parametri della matrice \mathcal{R} distinguendo i contributi e gli effetti alle porte delle sorgenti di controllo. Quando invece si debbono **ricavare simbolicamente** i parametri della matrice \mathcal{R} per un 4-terminali di cui si conosce la struttura interna, questo approccio non è sempre più vantaggioso, in termini di complessità, rispetto a quello diretto nel quale si impongono contemporaneamente le correnti i_1 ed i_2 e si misurano le tensioni v_1 e v_2 . Dopo di che, per ispezione diretta si identificano i parametri R_{jk} ($j = 1, 2$ e $k = 1, 2$).

6.2.2 Forma esplicita con parametri G

QUESTA È LA RAPPRESENTAZIONE duale di quella con parametri R . Il doppio bipolo deve ammettere la base di definizione tensione e

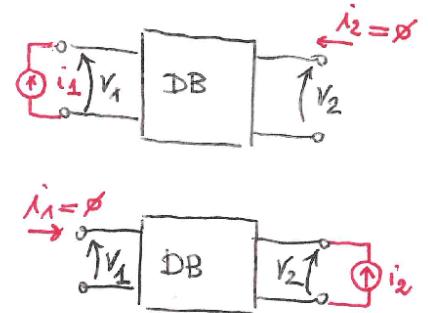


Figura 6.5: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice \mathcal{R} .

quindi possiamo scrivere

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.7)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (6.8)$$

Anche in questo caso, per ricavare i parametri della matrice di conduttanze \mathcal{G} possiamo scrivere

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{v_2=0} & G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} \Big|_{v_2=0} \\ G_{12} &= \frac{i_1}{v_2} \Big|_{v_1=0} & G_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le prove semplici per ricavare i parametri della matrice \mathcal{G} sono illustrate graficamente in figura 6.6.

SE UN DOPPIO BIPOLO è controllabile in tensione e in corrente, allora ammette la rappresentazione mediante matrici \mathcal{R} e \mathcal{G} . Condizione necessaria e sufficiente affinché ciò avvenga è che $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{G}$ e quindi le due matrici non sono singolari o, in modo equivalente, il loro determinante è non nullo.

6.2.3 Forma esplicita con parametri H

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 1 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista (i_1, v_2) .

$$\begin{cases} v_1 = H_{11}i_1 + H_{12}v_2 \\ i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}v_2 \end{cases}, \quad (6.10)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{H} possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H_{11} &= \frac{v_1}{i_1} \Big|_{v_2=0} & H_{21} &= \frac{i_2}{i_1} \Big|_{v_2=0} \\ H_{12} &= \frac{v_1}{v_2} \Big|_{i_1=0} & H_{22} &= \frac{i_2}{v_2} \Big|_{i_1=0} \end{aligned} \quad (6.12)$$

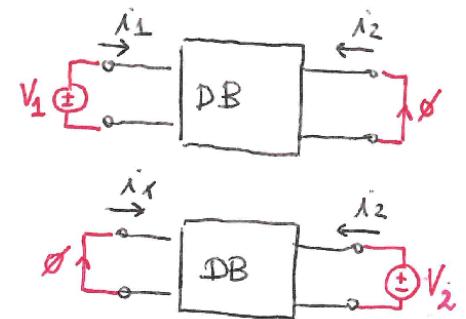


Figura 6.6: Le prove semplici per determinare i parametri della matrice \mathcal{G} .

6.2.4 Forma esplicita con parametri H'

QUESTA RAPPRESENTAZIONE SI DICE ibrida di tipo 2 e per essere ammessa il doppio bipolo deve essere controllabile almeno con la base mista (v_1, i_2) .

$$\begin{cases} i_1 = H'_{11}v_1 + H'_{12}i_2 \\ v_2 = H'_{21}v_1 + H'_{22}i_2 \end{cases} . \quad (6.13)$$

In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{H}' possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H'_{11} &= \frac{i_1}{v_1} \Big|_{i_2=0} & H'_{21} &= \frac{v_2}{v_1} \Big|_{i_2=0} \\ H'_{12} &= \frac{i_1}{i_2} \Big|_{v_1=0} & H'_{22} &= \frac{v_2}{i_2} \Big|_{v_1=0} \end{aligned} . \quad (6.15)$$

6.3 Matrice T di trasmissione diretta

IN QUESTO CASO non si parla di basa di definizione perché imporre alla stessa coppia di morsetti tensione e corrente non è fattibile mediante il solo utilizzo di sorgenti impressive. Diciamo che deve essere possibile algebricamente ricavare (v_1, i_1) date (v_2, i_2) .

$$\begin{cases} v_1 = T_{11}v_2 + T_{12}(-i_2) \\ i_1 = T_{21}v_2 + T_{22}(-i_2) \end{cases} . \quad (6.16)$$

Nell'equazione 6.16 si noti la presenza di $-i_2$. Con questa rappresentazione, infatti, si considera la corrente che esce dalla porta 2 (ovvero $-i_2$). Da qui il nome *trasmissione*: se si collegasse alla porta 2 un altro doppio bipolo, la corrente $-i_2$ sarebbe la corrente in ingresso alla porta 1 del nuovo elemento. La potremmo quindi vedere come la corrente *trasmessa* da un doppio bipolo all'altro. In forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Per ricavare i parametri della matrice \mathcal{T} non si possono effettuare direttamente le prove semplici, dato che non possiamo assegnare

contemporaneamente v_2 e i_2 . Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{11}} &= \left. \frac{v_2}{v_1} \right|_{i_2=0} & \frac{1}{T_{21}} &= \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \\ \frac{1}{T_{12}} &= -\left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} & \frac{1}{T_{22}} &= -\left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} \end{aligned} \quad . \quad (6.18)$$

Si noti quindi che per ricavare T_{11} si assegnano v_1 e i_2 ; per ricavare T_{21} si assegnano i_1 e i_2 ; per ricavare T_{12} si assegnano v_1 e v_2 ; per ricavare T_{22} si assegnano i_1 e i_2 . Di fatto, quindi si sfruttano tutte e quattro le rappresentazioni cardinali per ricavare i parametri della matrice \mathcal{T} .

6.4 Esempi

6.4.1 Esempio 1

PER IL DOPPIO BIPOLÒ in figura 6.7 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{G} .

In base alla richiesta dell'esercizio, dobbiamo quindi assumere che il doppio bipolo sia almeno controllabile in tensione da v_1 e v_2 . Possiamo procedere impiegando le prove semplici e impostare $v_2 = 0$, cioè mettendo in corto circuito la porta 2, e impostare v_1 alla porta 1 con un generatore indipendente di tensione (cfr. figura 6.8). Così facendo si ottiene

$$v_1 = (R_1 \parallel R_3)i_1 \text{ e } i_2 = -\frac{v_1}{R_3}. \text{ Quindi}$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{i_1}{v_1} = \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} \\ G_{21} &= \frac{i_2}{v_1} = -\frac{1}{R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.19)$$

Analogamente (cfr. figura 6.9), cortocircuitando la porta 1 e imponendo v_2 si ricava $v_2 = (R_2 \parallel R_3)i_2$ e $i_1 = -\frac{v_2}{R_3}$ da cui

$$\begin{aligned} G_{12} &= -\frac{1}{R_3} \\ G_{22} &= \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{aligned} \quad . \quad (6.20)$$

In forma matriciale quindi

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3} \end{bmatrix} \quad . \quad (6.21)$$

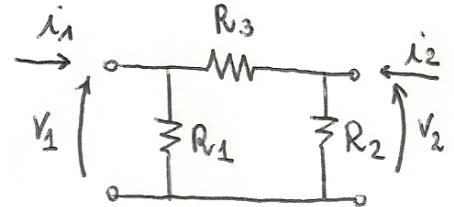


Figura 6.7: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice \mathcal{G} .

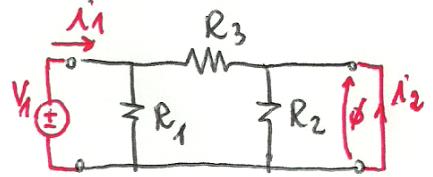


Figura 6.8: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare \mathcal{G} : la porta 2 viene cortocircuitata e si impone v_1 alla porta 1.

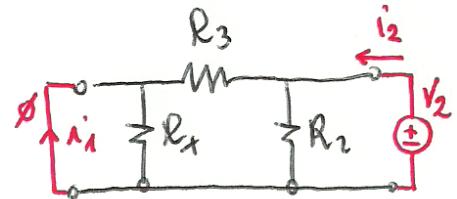


Figura 6.9: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare \mathcal{G} : la porta 1 viene cortocircuitata e si impone v_2 alla porta 2.

6.4.2 Esempio 2

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.10 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{R} .

Proviamo a farlo senza utilizzare le prove semplici ma collegando i generatori i_1 e i_2 alle porte 1 e 2, rispettivamente, e ricavando $v_1(i_1, i_2)$ e $v_2(i_1, i_2)$. Dalla maglia più esterna al circuito e da quella di sinistra si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 + v - \alpha v + 3Ri_2 - v_2 &= 0 \\ v_1 + v - R(i_1 + i_2) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (6.22)$$

Dato che la grandezza pilotante v è pari a $-2Ri_1$ si ricava

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 3R & R \\ R(1+2\alpha) & 4R \end{bmatrix} \quad . \quad (6.23)$$

6.4.3 Esempio 3

PER IL DOPPIO BIPOLO in figura 6.7 si ricavi la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{R}^2 .

Procediamo questa volta imponendo la corrente i_1 alla porta 1 e lasciamo aperta la porta 2 (cfr. figura 6.11 in alto). Si ricava, impiegando ad esempio il partitore di corrente tra R_1 e $R_3 + R_2$, che

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \end{aligned} \quad . \quad (6.24)$$

Procedendo con la prova duale (cfr. figura 6.11 in basso) si ottiene

$$\begin{aligned} v_1 &= R_1 i_{R_1} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} i_2 \\ v_2 &= R_2 i_{R_2} = R_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} i_1 \end{aligned} \quad . \quad (6.25)$$

In forma matriciale

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} R_1(R_2 + R_3) & R_1 R_2 \\ R_1 + R_2 + R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \\ R_2 R_1 & R_2(R_1 + R_3) \\ R_1 + R_2 + R_3 & R_1 + R_2 + R_3 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.26)$$

6.5 Doppii bipoli lineari affini

QUANDO LE EQUAZIONI COSTITUTIVE 6.3 contengono le costanti c_1 e c_2 non entrambi nulle, il doppio bipolo è adinamico, tempo-invariante, lineare affine.

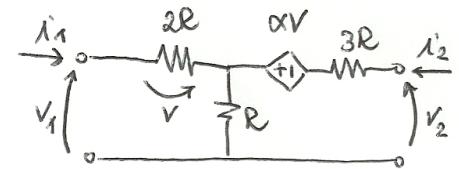


Figura 6.10: Un doppio bipolo di cui si vuole ricavare la matrice \mathcal{R} .

² Dato che se ne è calcolata la matrice \mathcal{G} si potrebbe ricavare $\mathcal{R} = \mathcal{G}^{-1}$ assicurandosi che \mathcal{G} sia non singolare.

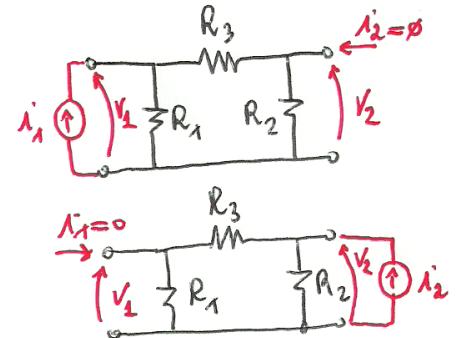


Figura 6.11: Prove semplici per il doppio bipolo in figura 6.7 di cui si vuole ricavare \mathcal{R} .

Nel caso in cui ammetta la base di definizione corrente, possiamo riscrivere le sue equazioni costitutive nella forma

$$\begin{cases} v_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + E_1 \\ v_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + E_2 \end{cases}, \quad (6.27)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}. \quad (6.28)$$

Possiamo quindi rappresentare il componente come in figura 6.12 in cui si nota la presenza di un doppio bipolo lineare definito dalla matrice \mathcal{R} e due generatori di tensione *opportunamente* connessi. Si noti infatti il verso delle tensioni E_1 ed E_2 scelto in modo coerente con il segno + nell'equazione 6.28.

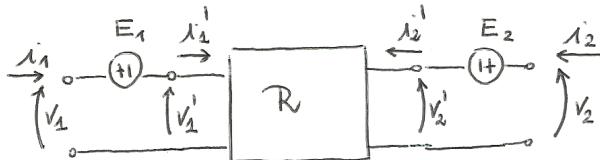


Figura 6.12: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base corrente (i_1, i_2).

POSSIAMO PENSARE un doppio bipolo lineare affine come una generalizzazione per i doppi bipoli del circuito equivalente di Thévenin (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). Il doppio bipolo descritto da \mathcal{R} equivale a R_{th} e i due generatori E_1 ed E_2 sono l'analogo di E_{th} . Dato un circuito che contiene elementi lineari e adinamici e generatori indipendenti di corrente e/o tensione, nel quale individuiamo una coppia di porte, è possibile ricavarne un modello come quello dell'equazione 6.28

- passivando tutti i generatori indipendenti (il cui effetto si *riassume* in E_1 ed E_2) per ottenere un doppio bipolo descritto da \mathcal{R} in cui parametri si ricavano come descritto per i doppi bipoli lineari;
- determinare E_1 ed E_2 come le tensioni a vuoto (con le porte aperte) alle porte 1 e 2, rispettivamente.

PER ESEMPLIFICARE QUANTO DETTO consideriamo il circuito in figura 6.13. Si cerca il modello equivalente alle porte 1 e 2 nella forma 6.28. Le tensioni v_1 e v_2 risentono dell'effetto del generatore di corrente A . Se si procede passivandolo, i generatori E_1 ed E_2 impongono tensione nulla ed in questa condizione possiamo ricavare \mathcal{R} . Il circuito con le sorgenti passivate è lo stesso dell'esercizio al paragrafo 6.4.3

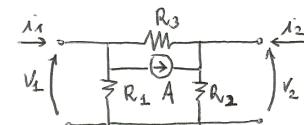


Figura 6.13: Un doppio bipolo lineare affine di cui si vuole ricavare la rappresentazione di tipo 6.28.

figura 6.7 e pertanto

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Lasciando invece aperte le porte 1 e 2, cioè $i_1 = 0$ e $i_2 = 0$, dall'equazione 6.28 si deduce $v_1 = E_1$ e $v_2 = E_2$. Nel caso specifico

$$E_1 = -\frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}A \text{ e } E_2 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}A.$$

Complessivamente quindi

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_1}{R_1 + R_2 + R_3} & \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{R_1R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \\ \frac{R_2R_3A}{R_1 + R_2 + R_3} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

QUALORA IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE ammetta la base tensione, lo possiamo pensare come un'estensione ai doppi bipoli del circuito equivalente di Norton (cfr. paragrafi 3.9 e 5.3). La sua schematizzazione è quella in figura 6.14 e corrisponde alle equazioni descrittive

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2 \end{cases}, \quad (6.31)$$

che in forma matriciale possiamo riscrivere come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

NEL CASO IN CUI IL DOPPIO BIPOLO LINEARE AFFINE ammetta la base mista (i_1, v_2) o (v_1, i_2) , sono possibili rappresentazioni mediante matrici \mathcal{H} ed \mathcal{H}' , rispettivamente. I due casi sono riportati in figura 6.15 e le corrispondenti equazioni costitutive in forma matriciale diventano

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

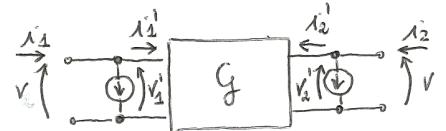


Figura 6.14: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base tensione (v_1, v_2) .

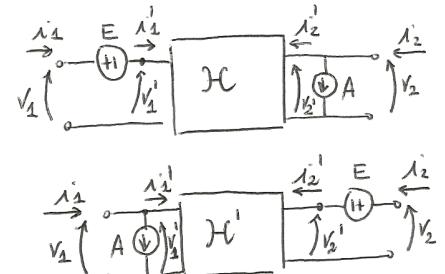


Figura 6.15: Rappresentazione di un doppio bipolo lineare affine che ammette la base mista (i_1, v_2) (in alto) e (v_1, i_2) (in basso). Si notino i versi dei generatori di corrente e di tensione che sono scelti in modo da essere coerenti con le equazioni costitutive del doppio bipolo (cfr. equazioni 6.33 e 6.34).

e

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} . \quad (6.34)$$

ANCHE ALLA MATRICE DI TRASMISSIONE \mathcal{T} è possibile associare un bipolo lineare affine che ha la struttura riportata in 6.16. Le sue equazioni costitutive sono

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E \\ A \end{bmatrix} . \quad (6.35)$$

6.6 Connessione di doppi bipoli

AFFINCHÉ ABbia UN SENSO interconnettere doppi bipoli, è necessario che le porte che si collegano tra loro ammettano basi di definizione compatibili. Inoltre, le regole valgono solo per doppi bipoli propri.

6.6.1 Collegamento in serie

IL COLLEGAMENTO IN SERIE DI DUE DOPPI BIPOLI è schematizzato in figura 6.17.

Affinché la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base corrente. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in serie tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.1) che richiede la definizione su base corrente dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice \mathcal{R}_1 ed \mathcal{R}_2 , la connessione equivale ad una matrice equivalente $\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2$. Infatti, facendo riferimento alla figura 6.17, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_1 \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

e

$$\begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} . \quad (6.37)$$

Ma $i_1 = i'_1 = i''_1$ e $i_2 = i'_2 = i''_2$ da cui

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}_{\mathcal{R}_{eq}}) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} . \quad (6.38)$$

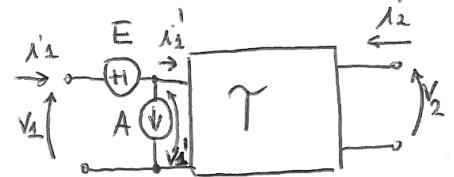


Figura 6.16: Un doppio bipolo lineare affine rappresentato con la matrice di trasmissione \mathcal{T} .

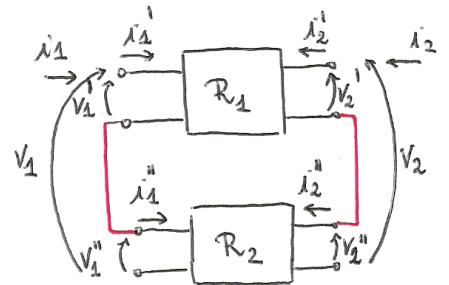


Figura 6.17: Collegamento in serie di due doppi bipoli. Da notare che $i'_1 = i''_1$ e $i'_2 = i''_2$.

6.6.2 Collegamento in parallelo

IL COLLEGAMENTO IN PARALLELO DI DUE DOPPI BIPOLI è schematizzato in figura 6.18.

Affinché la connessione sia possibile, i doppi bipoli devono ammettere entrambi almeno base tensione. Del resto si tratta di una generalizzazione del collegamento in parallelo tra bipoli (cfr. paragrafo 3.7.3) che richiede la definizione su base tensione dei componenti coinvolti.

Si verifica facilmente che, se i doppi bipoli ammettano, rispettivamente, rappresentazione mediante matrice \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , la connessione equivale ad una matrice equivalente $\mathcal{G}_{eq} = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$. Infatti, facendo riferimento alla figura 6.18, possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_1 \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

e

$$\begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = \mathcal{G}_2 \begin{bmatrix} v''_1 \\ v''_2 \end{bmatrix}. \quad (6.40)$$

Ma $v_1 = v'_1 = v''_1$ e $v_2 = v'_2 = v''_2$ da cui

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i''_1 \\ i''_2 \end{bmatrix} = (\underbrace{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}_{\mathcal{G}_{eq}}) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}. \quad (6.41)$$

6.6.3 Connessione in cascata

LA CONNESSIONE IN CASCATA (o a catena) sfrutta la rappresentazione mediante la matrice \mathcal{T} . In particolare, con riferimento alla figura 6.19, due doppi bipoli, che ammettono rispettivamente matrice \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 , connessi in modo tale che i morsetti della porta 2 del primo coincidano con i morsetti della porta 1 del secondo, danno origine ad un doppio bipolo che ammette una $\mathcal{T}_{eq} = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$ tale che

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2}_{\mathcal{T}_{eq}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

6.7 Doppii bipoli notevoli

6.7.1 Il trasferitore ideale di potenza

IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA, talvolta chiamato anche trasformatore ideale, è un *doppio bipolo inerte*. La potenza che quindi as-

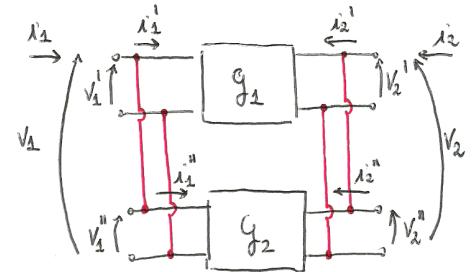


Figura 6.18: Collegamento in parallelo di due doppi bipoli. Da notare che $v'_1 = v''_1$ e $v'_2 = v''_2$.

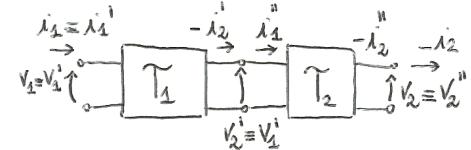


Figura 6.19: Collegamento a catena di due doppi bipoli. Da notare che $-i'_2 = i''_1$.

sorbe istante per istante è sempre nulla, in qualunque condizione di funzionamento. In formule possiamo scrivere che $p_a(t) = i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \equiv 0$ per ogni t . Dato che, essendo inerte, di fatto *trasferisce* dalla porta 1 alla porta 2 la potenza $i_1(t)v_1(t) = -i_2(t)v_2(t)$, proviamo a ricavarne le equazioni costitutive usando la rappresentazione mediante matrice di trasmissione \mathcal{T} :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

Così facendo possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p_a(t) &= i_1(t)v_1(t) + i_2(t)v_2(t) \\ &= (T_{21}v_2(t) - T_{22}i_2(t))(T_{11}v_2(t) - T_{12}i_2(t)) + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v_2^2(t) - (T_{11}T_{22} + T_{12}T_{21})v_2(t)i_2(t) + T_{12}T_{22}i_2^2(t) + i_2(t)v_2(t) \\ &= T_{11}T_{21}v_2^2(t) + (1 - T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21})i_2(t)v_2(t) + T_{12}T_{22}i_2^2(t) \end{aligned} \quad (6.44)$$

e, affinchè $p_a(t)$ sia nulla per ogni t è necessario imporre

$$\begin{cases} T_{11}T_{21} = 0 \\ 1 - T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 0 \\ T_{12}T_{22} = 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

Il sistema 6.45 è non lineare, in 3 equazioni e 4 incognite. Non stupisce quindi che ammetta più di una soluzione. Sono infatti soluzioni ammissibili

$$\begin{cases} T_{11} = 0 \\ T_{12}T_{21} = 1 \\ T_{22} = 0 \end{cases}, \quad (6.46)$$

oppure

$$\begin{cases} T_{12} = 0 \\ T_{21} = 0 \\ T_{11}T_{22} = 1 \end{cases}. \quad (6.47)$$

Entrambe le soluzioni rappresentano un insieme infinito di possibilità e, tra le due, scegliamo la 6.47 che porta ad avere un componente *reciproco*³. Una matrice \mathcal{T} che soddisfa la 6.47 è

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{bmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

che equivale alle equazioni costitutive

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}. \quad (6.49)$$

³ Il concetto di *reciprocità* non verrà affrontato in questo corso. Lo studente interessato può fare riferimento alla letteratura inerente la teoria dei circuiti lineari per approfondire l'argomento.

Il parametro n è il *rapporto di trasformazione* del trasferitore ideale di potenza il cui simbolo è rappresentato in figura 6.20.

IN TERMINI DI RAPPRESENTAZIONI CARDINALI, il trasferitore ideale di potenza ammette la rappresentazione mediante matrici \mathcal{H} ed \mathcal{H}' dato che, a partire dalla 6.49, è facile convincersi che ammette solo le basi miste (i_1, v_2) e (v_1, i_2) .

LA SINTESI DEL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA mediante generatori pilotati è riportata in figura 6.21. Si verifica facilmente che le due soluzioni proposte corrispondono alle due basi miste ammesse dal doppio bipolo e che equivalgono entrambe alle equazioni costitutive 6.49.

6.7.2 L'amplificatore operazionale ideale

PER POTER PRESENTARE e discutere il modello circuitale dell'amplificatore operazionale ideale o *nullore* è necessario introdurre due bipoli *patologici*: il *nullatore* e il *noratore*.

IL NULLATORE, il cui simbolo è riportato in figura 6.22, ha le equazioni costitutive $i = 0$ e $v = 0$. La sua caratteristica è quindi un solo punto sul piano (v, i) : il punto $(0, 0)$. Il fatto che sia un bipolo e che necessiti di due equazioni costitutive rende il nullatore un bipolo patologico.

IL NORATORE fa coppia con il nullatore: il suo simbolo è riportato in figura 6.23 ed è un altro bipolo patologico dato che ammette qualsiasi coppia (v, i) e la sua equazione caratteristica è quindi tutto il piano (v, i) .

SE SI UTILIZZANO CONTEMPORANEAMENTE nullatore e noratore come i due bipoli che costituiscono il doppio bipolo *nullore* (cfr. figura 6.24) si ottiene un componente le cui equazioni costitutive sono

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_1 = 0 \end{cases} . \quad (6.50)$$

Il nullore non ammette rappresentazioni cardinali ma solo la matrice \mathcal{T} tutta nulla.

IL NULLORE È IL MODELLO dell'amplificatore operazionale *ideale* ovvero un amplificatore operazionale in opportune condizioni di funzionamento e caratteristiche costruttive.

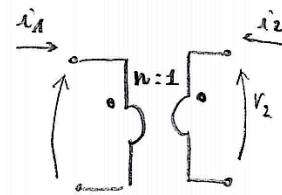


Figura 6.20: Il trasferitore ideale di potenza. Si noti la presenza dei due "pallini" alle porte del doppio bipolo. La posizione del pallino indica, alla porta corrispondente, il morsetto al quale è riferita la punta della freccia che indica la tensione di porta.

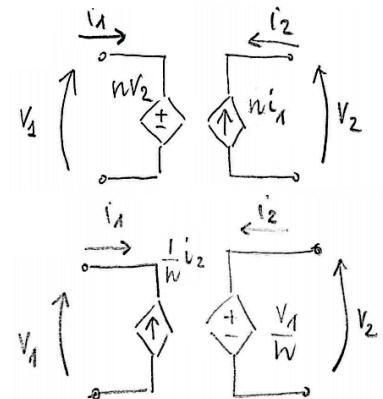


Figura 6.21: Il trasferitore ideale di potenza sintetizzato mediante generatori pilotati.



Figura 6.22: Il simbolo del bipolo patologico nullatore.



Figura 6.23: Il simbolo del bipolo patologico noratore.

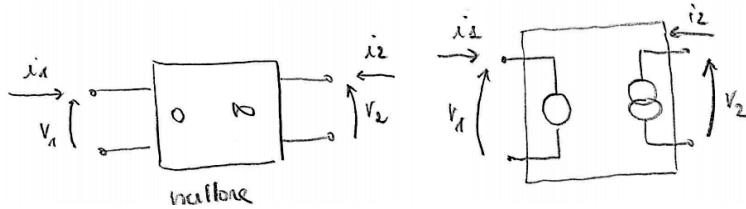


Figura 6.24: Il doppio bipolo nullo ottenuto combinando un nullatore e un noratore.

L'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE è un quadripolo (cfr. figura 6.25) caratterizzato dalle relazioni $i_- = I_-$, $i_+ = I_+$ e (cfr. figura 6.26)

$$v_o = \begin{cases} E_{sat}, & v_i > \epsilon \\ \frac{E_{sat}}{\epsilon} v_i, & v_i \in [-\epsilon, \epsilon] \\ -E_{sat}, & -v_i < -\epsilon \end{cases} . \quad (6.51)$$

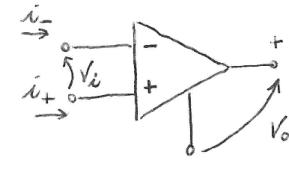


Figura 6.25: Il simbolo dell'amplificatore operazionale.

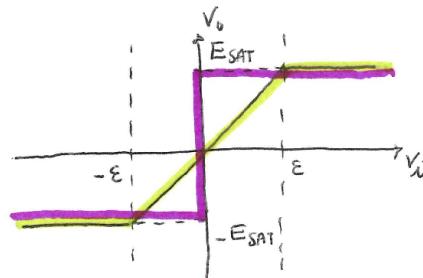


Figura 6.26: In verde il legame $v_o(v_i)$ che tende alla spezzata viola quando il guadagno in tensione $A_v = E_{sat}/\epsilon \rightarrow +\infty$.

Valori tipici di I_- e I_+ sono dell'ordine dei μA , se non dei nA . Si è quindi soliti fare l'approssimazione $I_- = I_+ = 0$. Si noti che, avendo assunto $I_- = I_+ = 0$, l'amplificatore operazionale diventa un doppio bipolo.

La tensione E_{sat} è tipicamente dell'ordine dei 10-15V e, nella regione lineare $v_i \in [-\epsilon, \epsilon]$, il guadagno in tensione $A_v = E_{sat}/\epsilon$ è dell'ordine di $10^5 - 10^6$. Si può quindi ragionevolmente approssimare la caratteristica lineare a tratti riportata nella 6.51, con la curva viola in figura 6.26 in cui il tratto lineare viene assunto verticale e per $v_i = 0$ il valore di v_o può assumere qualunque valore nell'intervallo $[-E_{sat}, E_{sat}]$. Le equazioni caratteristiche dell'amplificatore operazionale, in queste ipotesi di funzionamento, denominando $I_- = i_1$ e $v_i = v_1$, sono quindi quelle di un nullo.⁴

⁴ Si noti che affinché l'amplificatore operazionale possa essere modellato con il doppio bipolo nullo, è necessario che nei circuiti in cui viene inserito ne sia garantito il funzionamento nella regione lineare. La condizione $v_i = 0$ (o di *massa virtuale*) non è infatti conseguenza della tecnologia con la quale il quadripolo è realizzato, come invece è il caso per la condizione $I_- = I_+ = 0$, ma dipende dal funzionamento del componente. Nei circuiti che affronteremo, si farà sempre l'ipotesi che ciò avvenga e non vedremo in questo corso le tecniche che vengono tipicamente adottate per verificare questa ipotesi. Lo studente interessato può consultare a questo proposito un qualunque testo di elettronica di base.

6.7.3 Un esercizio sul nullore

IL CIRCUITO IN FIGURA 6.27 (in alto) rappresenta un doppio bipolo realizzato connetendo opportunamente un amplificatore operazionale, che si assume ideale ovvero un nullore, con due resistori. Si richiede di determinare le equazioni costitutive del doppio bipolo risultante.

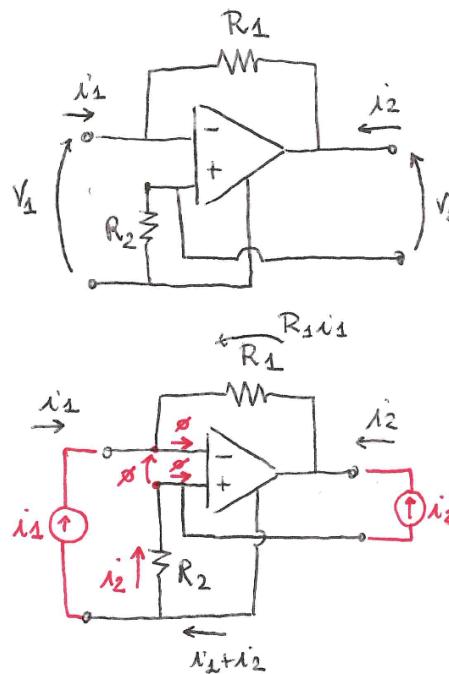


Figura 6.27: .

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO, dal momento che non è stato specificato diversamente, assumiamo che sia ammissibile la base corrente (i_1, i_2) e collegiamo quindi due generatori indipendenti alle porte 1 e 2 (cfr. figura 6.27 in basso). Dato che il morsetto – del nullore non assorbe corrente, la corrente i_1 scorre interamente in R_1 e con i_2 entra nel nullore nel morsetto + alla porta 2 per poi uscirne. La corrente in R_2 è dunque pari a i_2 . Dato che la tensione alla porta di ingresso del nullore è nulla, $v_1 = -R_2 i_2$ e $v_2 = -R_1 i_1$. Se ad esempio si scegliesse $R_2 = 0$, il doppio bipolo si comporterebbe da generatore di tensione alla porta 2 pilotato in corrente alla porta 1.

7.1 L'interazione magnetica

SECOLI PRIMA DI CRISTO, si osservò che alcuni minerali di ferro, come la *magnetite*, avevano la proprietà di attrarre piccoli pezzetti di ferro. Questa proprietà non è in relazione alla gravitazione. Non tutti i corpi, infatti, la presentano e appare concentrata solo in “certi punti” del minerale di ferro. Chiaramente, inoltre, non è in relazione all’interazione elettrica: né pezzetti di carta né palline di sughero sono attratti da questi minerali per polarizzazione. A questa nuova proprietà fisica venne dato il nome **magnetismo**, dalla antica città di Magnesia, in Asia Minore, dove, secondo la tradizione il fenomeno fu osservato per la prima volta.

LE REGIONI DI UN CORPO, dove il magnetismo sembra essere concentrato, sono detti **poli magnetici** e un corpo magnetizzato si dice **magnete**. Gli esperimenti dimostrano che ci sono due poli magnetici, “+” e “-” o *NORD* e *SUD*, e che poli diversi si attraggono mentre poli uguali si respingono. È importante notare che, mentre la carica elettrica positiva e quella negativa sono state *isolate*, non si è ancora riusciti a fare altrettanto con i poli magnetici, che viaggiano sempre in coppia. Neppure è stata identificata alcuna particella elementare che manifesti “un solo tipo” di magnetismo. Del resto, dal punto di vista teorico, si è giunti alla conclusione che non è necessario definire la *massa magnetica* o il *monopolio magnetico* perché, come vedremo, **il magnetismo è in realtà manifestazione di cariche elettriche in movimento**¹.

¹ A livello microscopico questa affermazione necessiterebbe di dettagliate spiegazioni, analoghe qualitativamente a quelle inerenti la polarizzazione dei dielettrici, che non troveranno spazio in questo corso.

7.2 Forze magnetiche su cariche in moto - La forza di Lorenz

LE INTERAZIONI (forze) tra corpi magnetizzati (come tra corpi elettrificati e masse) possono essere descritte a partire dall'assunzione che un corpo magnetizzato produce un **campo magnetico** nello spazio circostante.

L'effetto della presenza di un campo magnetico si rileva osservando la forza a cui viene sottoposta una carica (di prova) in moto nella regione in cui si vuole misurare il campo:

la forza magnetica esercitata da un campo magnetico su una carica in moto è proporzionale alla carica elettrica ed alla sua velocità ed è orientata perpendicolarmente alla velocità con cui si muove la carica.

Detta q la carica in moto con velocità \bar{v} , la forza \bar{F} su di essa esercitata dal campo magnetico \bar{B} è dunque

$$\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B} , \quad (7.1)$$

dove il simbolo “ \times ” indica il prodotto vettoriale e l'intensità B del campo \bar{B} si misura in Tesla (T). Data la direzione e il verso dei vettori \bar{v} e \bar{B} , la direzione di \bar{F} è data dalla normale al piano identificato da \bar{v} e \bar{B} (figura 7.1) e il verso di \bar{F} si ottiene in base alla regola della mano destra schematizzata in figura 1.4. L'intensità di \bar{F} è pari a

$$F = qvB \sin \alpha , \quad (7.2)$$

dove l'angolo α è mostrato in figura 7.1.

Da notare che se \bar{v} e \bar{B} sono paralleli, la forza \bar{F} ha intensità nulla dato che $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$. Viceversa, se \bar{v} e \bar{B} sono perpendicolari, F è massima in modulo dato che $\alpha = \pm \pi/2$.

Poiché \bar{F} e \bar{v} sono sempre perpendicolari, il campo magnetico è associato ad un lavoro nullo quindi il campo magnetico, o meglio la forza magnetica, non produce variazione dell'energia cinetica della carica in moto sulla quale si manifesta.

Quando una carica (di prova) si muove in una regione dello spazio in cui sono presenti sia un campo elettrico \bar{E} sia un campo magnetico \bar{B} , si osserva su di essa l'azione di una forza, risultante dalla presenza dei due campi, detta **forza di Lorenz**

$$F = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) . \quad (7.3)$$

LA FORZA MAGNETICA NON È CONSERVATIVA, cioè non è associata a nessuna energia potenziale magnetica. Ciò nonostante, quando una carica si muove in una regione dello spazio in cui sono presenti campi elettrici e magnetici combinati, la sua energia totale rimane costante. Energia totale significa la sua energia cinetica più l'energia potenziale dovuta alle sue differenti interazioni.

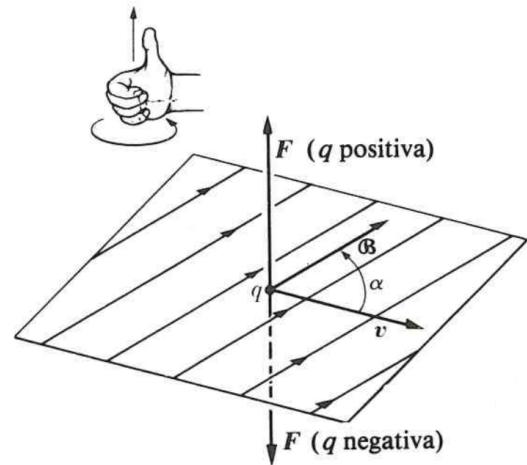


Figura 7.1: Data la direzione e il verso dei vettori \bar{v} , velocità con la quale si muove la carica q e \bar{B} , il campo magnetico, la direzione di \bar{F} sentita da q è data dalla normale al piano identificato da \bar{v} e \bar{B} e il verso di \bar{F} si ottiene in base alla regola della mano destra.

7.3 Campo magnetico di una carica in moto (non relativistico)

FINO A QUESTO PUNTO IL CAMPO MAGNETICO è stato discusso senza alcun riferimento a come vengono generati i campi magnetici; è stato solo fatto cenno a certe sostanze, chiamate magneti, che nel loro stato naturale producono campi magnetici. Un passo avanti fondamentale per la comprensione dell'origine del magnetismo venne compiuto nel 1819, quando il fisico danese Hans Christian Oersted fortuitamente scoprì che una bussola magnetica, quando veniva posta sotto un lungo filo percorso da corrente, si orientava perpendicolarmente alla direzione del filo stesso. Poiché una corrente elettrica consiste in un flusso di cariche elettriche in moto, sembra ragionevole ipotizzare che i campi magnetici non solo sono sentiti da cariche in moto, ma anche sono prodotti da cariche in moto.

LA VALIDITÀ DI QUESTA IPOTESI è stata ampiamente verificata analizzando il moto di particelle cariche. In accordo con tale ipotesi, mentre una carica elettrica a riposo rispetto ad un osservatore produce soltanto un campo elettrico, una particella carica in moto relativamente ad un osservatore produce sia un campo elettrico che un campo magnetico.

Il campo elettrico e il campo magnetico sono semplicemente due diversi aspetti di un'unica proprietà fondamentale della materia, ed il termine campo elettromagnetico descrive più adeguatamente la situazione fisica coinvolgente cariche in moto.

Si consideri una carica q (figura 7.2) che si muove con velocità \bar{v} rispetto ad un osservatore². Il campo elettrico della carica è radiale ed è dato dalla stessa espressione fornita al paragrafo 1.4 per una particella a riposo, e cioè

$$\bar{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r . \quad (7.4)$$

Misure del campo magnetico effettuate in diversi punti mostrano che il campo magnetico è dato dall'espressione

$$\bar{B} = K_m q \frac{\bar{v} \times \hat{u}_r}{r^2} , \quad (7.5)$$

con $K_m = 10^{-7} \text{ mkgC}^{-2}$. Introducendo la **permittività magnetica del vuoto** $\mu_0 = 4\pi K_m \approx 1.3566 \cdot 10^{-6} \text{ mkgC}^{-2}$, la 7.5 diventa

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \times \hat{u}_r}{r^2} . \quad (7.6)$$

Perciò, in qualsiasi punto dello spazio, come A in figura 7.2, vi è un campo elettrico \bar{E} nella direzione radiale ed un campo magnetico \bar{B} in direzione perpendicolare sia a \hat{u}_r che a \bar{v} .

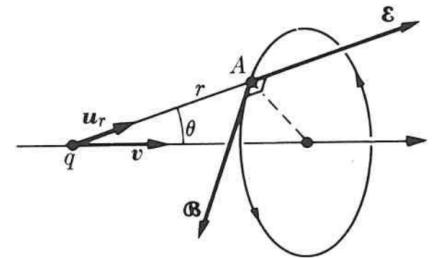


Figura 7.2: La carica q si muove con velocità \bar{v} e produce in ogni punto A un campo elettrico nella direzione radiale \hat{u}_r ed un campo magnetico \bar{B} in direzione perpendicolare sia a \hat{u}_r che a \bar{v} .

² Si ammetta che questa velocità sia piccola rispetto alla velocità della luce, così che non occorra tener conto di effetti relativistici nei calcoli.

I FATTI Sperimentali mostrano che il campo magnetico della carica in moto può essere rappresentato da linee di forza magnetiche che sono cerchi con i centri sulla linea di moto della carica. Quando la carica è positiva, il senso delle linee di forza magnetiche è diretto come le dita della mano destra quando il pollice punta in direzione del moto della carica. Si noti in particolare che \bar{B} non ha componente lungo la direzione del moto della carica.

Utilizzando la 7.4, è possibile riscrivere la 7.6 come

$$\bar{B} = \frac{1}{c^2} (\bar{v} \times \bar{E}) , \quad (7.7)$$

dove $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ e $[c] = \text{ms}^{-1}$. Sostituendo i valori di μ_0 ed ϵ_0 si ottiene $c \approx 2.9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ ovvero c è la velocità della luce (o di qualsiasi segnale elettromagnetico) nel vuoto. Questa relazione non verrà discussa in questo corso così come non si dimostrerà l'importante proprietà della 7.7 che, nonostante la 7.4 e la 7.6 debbano essere modificate quando \bar{v} diventa prossima a c , rimane invece valida anche per velocità prossime alla velocità della luce.

7.4 Forza magnetica su di una corrente elettrica

SUPPONIAMO ORA CHE UN CONDUTTORE, in cui si presente un campo densità di corrente elettrica \bar{j} , sia immerso in un campo magnetico. La forza su ogni carica in moto è pari a $\bar{F} = q(\bar{v} \times \bar{B})$, se vi sono n particelle per unità di volume, e la forza \bar{f} per unità di volume è³

$$\bar{f} = nq(\bar{v} \times \bar{B}) . \quad (7.8)$$

La forza totale su un piccolo volume dV del mezzo sarà

$$d\bar{F} = \bar{f}dV = \bar{j} \times \bar{B}dV , \quad (7.9)$$

e la forza totale su un volume finito V si ottiene integrando questa espressione su tutto il volume. Cioè,

$$\bar{F} = \int_V \bar{j} \times \bar{B}dV . \quad (7.10)$$

CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI vi sia corrente lungo un filo o un filamento di lunghezza L . Un elemento di volume dV è dato da Sdl (figura 7.3) e il vettore densità di corrente \bar{j} ha la direzione del versore \hat{u}_T tangente all'asse del filamento. Pertanto, assumendo l'intensità di corrente I lungo il filo uguale in tutti i punti del conduttore, l'equazione 7.10 dà

$$\bar{F} = \int_V j\hat{u}_T \times \bar{B}Sdl = \int_V \underbrace{jS}_{I} \hat{u}_T \times \bar{B}dl = I \int_L \hat{u}_T \times \bar{B}dl . \quad (7.11)$$

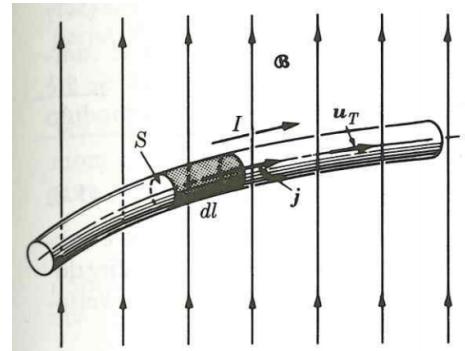


Figura 7.3: Un filamento di materiale conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico.

³ Si noti che nq è una densità volumetrica di carica, perciò, coerentemente alla definizione di campo di densità di corrente elettrica (cfr. paragrafo 1.10), $\bar{j} = nq\bar{v}$.

Questo risultato può essere verificato ponendo conduttori di forme diverse in un campo magnetico e misurando nei vari casi la forza sul conduttore.

Consideriamo, come esempio, il caso di un conduttore rettilineo posto in un campo magnetico uniforme \bar{B} (figura 7.4). Allora, sia \hat{u}_T sia \bar{B} sono costanti (in direzione e modulo) lungo il conduttore e l'equazione 7.11 diviene $\bar{F} = IL\hat{u}_T \times \bar{B}$. La forza alla quale è sottoposto il filo è dunque perpendicolare al piano definito da \hat{u}_T e \bar{B} e la sua intensità è pari a $F = ILB \sin \theta$.

QUESTO È IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO dei motori elettrici che hanno avvolgimenti costituiti da spire simili a quella in figura 7.5 che, per semplicità, consideriamo di forma rettangolare. Consideriamo la corrente che scorre in un circuito rettangolare, disposto in modo che la normale \hat{u}_N al suo piano (normale orientata nel senso definito con la regola della mano destra a partire dal senso della corrente) faccia un angolo θ col campo \bar{B} , e che due lati del circuito siano perpendicolari al campo.

Le forze \bar{F}' agenti sui lati L' hanno lo stesso modulo (uguale a $IBL' \sin(\pi/2 - \theta) = IBL' \cos \theta$), ma hanno eguale direzione e versi opposti. Le forze \bar{F}' tendono a deformare il circuito, ma non producono nessuna coppia. Le forze \bar{F} sui lati L hanno modulo $F = IBL (\bar{B} e \hat{u}_T)$ sono perpendicolari per costruzione lungo i lati L) e costituiscono una coppia il cui braccio di leva è $L' \sin \theta$. Le forze \bar{F} producono sul circuito un momento $\tau = IBLL' \sin \theta$ che tende ad orientare la spira perpendicolarmente al campo \bar{B} .

7.5 Legge di Ampère-Laplace

LA PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO è riconoscibile dalla forza che il campo produce su una carica in moto. Inoltre, come già visto nel paragrafo 7.3, una carica in moto produce un campo magnetico.

Dopo molti esperimenti fatti durante un periodo di vari anni si ottenne un'espressione generale per calcolare il campo magnetico prodotto da una spira di corrente chiusa di forma qualsiasi. Questa espressione è detta legge di Ampère-Laplace. Con riferimento alla figura 7.6, il piccolo segmento dl della spira di corrente contribuisce al campo magnetico nel punto P con un termine infinitesimo pari a

$$d\bar{B} = K_m I \frac{dl}{r^2} \hat{u}_T \times \hat{u}_r , \quad (7.12)$$

e l'integrale è esteso all'intero circuito chiuso (ragione per cui si usa il simbolo \oint) fornisce il campo \bar{B} nel punto P come risultante di tutti i

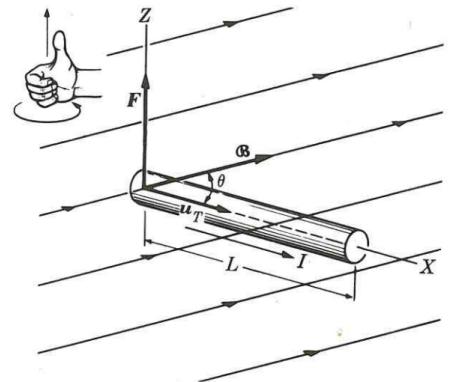


Figura 7.4: Un caso particolare: un filamento *rettilineo* di materiale conduttore percorso da corrente è immerso in un campo magnetico *uniforme*.

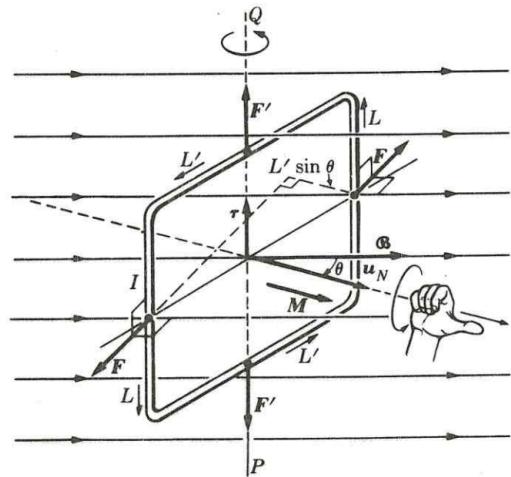


Figura 7.5: Forza che agisce su una spira rettangolare percorsa da corrente.

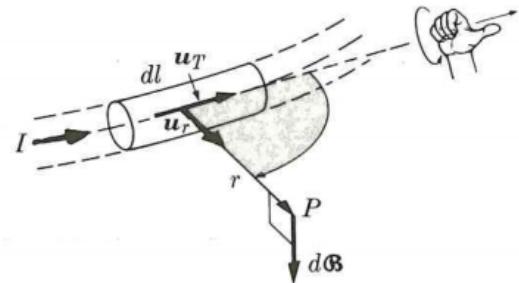


Figura 7.6: Schema illustrante la definizione dei termini impiegati nella legge di Ampère-Laplace. Il piccolo segmento dl della spira di corrente contribuisce al campo magnetico nel punto P . Il suo contributo è perpendicolare al piano definito da \hat{u}_T e \hat{u}_r .

contributi infinitesimi di tipo 7.12:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\hat{u}_T \times \hat{u}_r}{r^2} dl . \quad (7.13)$$

Come caso particolare della legge di Ampère-Laplace si studia il caso del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita (figura 7.7).

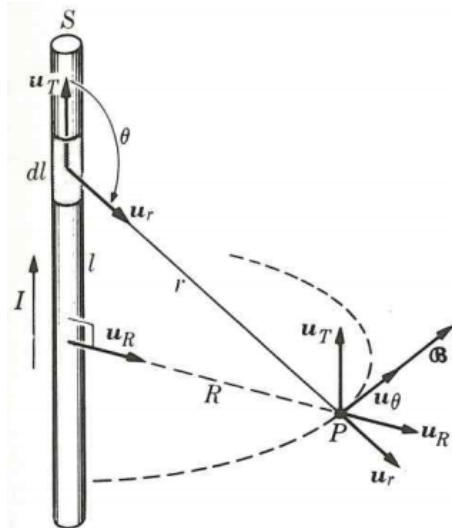


Figura 7.7: Il campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita.

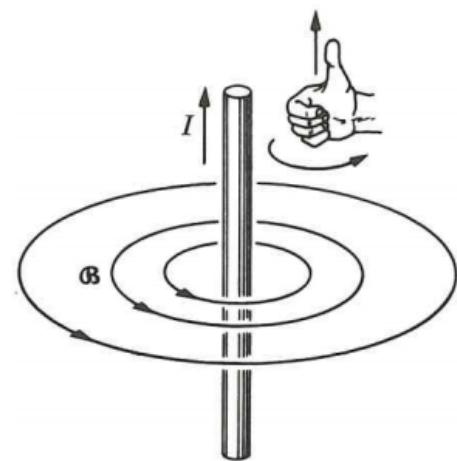


Figura 7.8: Le linee di forza chiuse del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea lungo un conduttore di lunghezza infinita. Un campo con linee di forza chiuse si dice solenoidale.

Per ogni punto P ed ogni elemento dl della corrente, il vettore $\hat{u}_T \times \hat{u}_r$ è perpendicolare al piano determinato da P e dalla corrente, e perciò la sua direzione è quella del versore \hat{u}_θ . In P il campo magnetico prodotto da dl è quindi tangente al cerchio di raggio R che passa attraverso P , ha il centro sulla corrente ed è in un piano perpendicolare alla corrente. Perciò, quando facciamo l'integrazione nell'equazione 7.13, i contributi di tutti i termini nell'integrale hanno la stessa direzione \hat{u}_θ e il campo magnetico risultante \bar{B} è pure tangente al cerchio. Così è necessario soltanto trovare il modulo di \bar{B} . Il modulo di $\hat{u}_T \times \hat{u}_r$ è $\sin \theta$, poiché \hat{u}_T e \hat{u}_r sono vettori unitari. Quindi, per una corrente rettilinea, l'equazione 7.13 in modulo è

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \theta}{r^2} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} . \quad (7.14)$$

Le linee di forza di \bar{B} sono cerchi concentrici con la corrente e perpendicolari ad essa, come illustrato nella figura 7.8. La regola della mano destra per determinare la direzione del campo magnetico relativa alla direzione della corrente è pure indicata nella figura. In forma vettoriale si ottiene quindi la formula di Biot-Savart:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{u}_\theta . \quad (7.15)$$

Le linee di forza del campo magnetico prodotto da una corrente rettilinea sono chiuse. Questo è vero per qualunque campo \vec{B} dato che non esiste il monopolo magnetico. Un campo con queste caratteristiche si dice *solenoidale*.

7.6 Campo magnetico di una spira di corrente circolare

USARE LA LEGGE DI AMPÈRE-LAPLACE per calcolare il campo magnetico in un punto arbitrario è un problema matematico alquanto complicato, ma nei punti lungo l'asse del cerchio (figura 7.9) il calcolo è un compito piuttosto semplice. In primo luogo, si noti che l'equazione 7.13 può essere interpretata matematicamente come affermazione che in P il campo magnetico risultante \vec{B} prodotto dalla corrente è la somma di un grande numero di piccolissimi contributi elementari $d\vec{B}$ dovuti ad ognuno dei segmenti o elementi di lunghezza dl componenti la spira. Ogni contributo elementare $d\vec{B}$ ha modulo

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{r^2}, \quad (7.16)$$

dato che per costruzione $\hat{u}_T \times \hat{u}_r = 1$, e direzione perpendicolare al piano PAA' .

Tuttavia il campo è obliquo rispetto all'asse X . Decomponendo $d\vec{B}$ in un componente $d\vec{B}_{||}$, parallelo all'asse X ed in un componente $d\vec{B}_{\perp}$ perpendicolare ad esso, si nota che, quando integriamo lungo la circonferenza, per ogni $d\vec{B}_{\perp}$, ve ne è un altro in verso opposto da parte dell'elemento di lunghezza direttamente opposto a dl , e perciò tutti i vettori $d\vec{B}_{\perp}$, sommati danno zero. La risultante \vec{B} sarà la somma di tutti i vettori $d\vec{B}$ ed è quindi parallelo all'asse X . Ora poiché $\cos \alpha = a/r$,

$$dB_{||} = dB \cos \alpha = dB \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} dl, \quad (7.17)$$

e quindi

$$B = \oint B_{||} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}. \quad (7.18)$$

Definendo $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ si ottiene $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$. Rispetto alla coordinata x presa lungo l'asse X , il campo magnetico è massimo per $x = 0$, ovvero al centro della spira e $B|_{x=0} = \frac{\mu_0 I}{2a}$. Le linee di forza del campo magnetico (solenoidale) di una spira di corrente circolare è rappresentato nella figura 7.10.

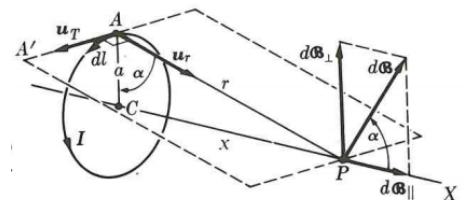


Figura 7.9: Il campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa da corrente.

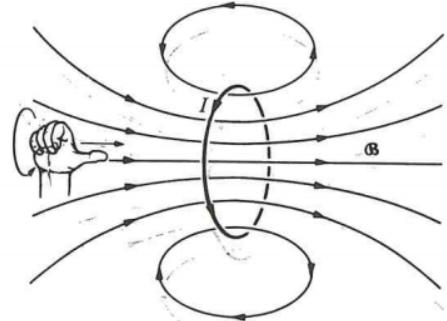


Figura 7.10: Le linee di forza del campo magnetico generato da una spira circolare percorsa da corrente.

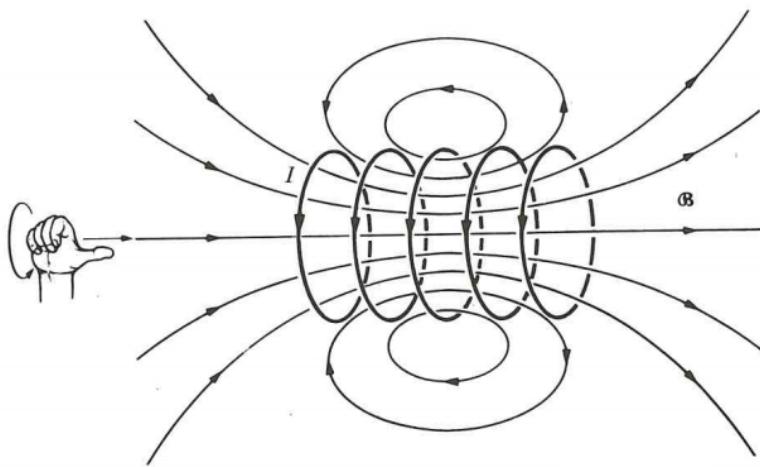


Figura 7.11: Le linee di forza del campo magnetico generato da un solenoide ideale: N spire dello stesso raggio e disposte in modo coassiale sono percorse dalla medesima corrente.

AVENDO A DISPOSIZIONE N spire dello stesso raggio e disponendole in modo coassiale come in figura 7.11 si realizza un *solenoido* (o circuito solenoidale) di lunghezza l . Si dimostra, utilizzando la legge di Ampère-Laplace, che, se il solenoide è abbastanza lungo, il campo magnetico \bar{B} prodotto dalla corrente I che circola nelle spire è pressoché costante all'interno del solenoide ed è pari a $\frac{\mu_0 NI}{l}$. L'orientamento del campo è dato dalla regola della mano destra in base al verso della corrente I (figura 7.11) e le sue linee di forza chiuse sono estremamente concentrate all'interno del solenoide e si diradano molto al suo esterno. Al di fuori del solenoide, quindi, il campo magnetico è circa nullo.⁴ I solenoidi vengono utilizzati per creare campi magnetici (piuttosto) uniformi in regioni limitate nella prossimità del suo centro.

In figura 7.12 si mostra come di fatto si realizza un solenoide: non mediante tante spire ravvicinate e coassiali ma tramite gli avvolgimenti di un filo conduttore percorso dalla corrente I .

7.7 La legge di Ampère

LA LEGGE DI AMPÈRE afferma che, data una linea chiusa L (di cui si sceglie arbitrariamente il verso di percorrenza), la risultante I delle correnti con essa concatenate determina la circuitazione Λ_B del campo magnetico \bar{B} prodotto dalle correnti stesse

$$\Lambda_B = \oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 I . \quad (7.19)$$

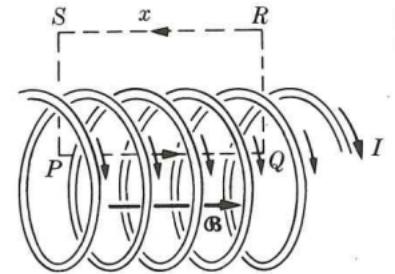


Figura 7.12: Un solenoide reale.

⁴ Si ricordi infatti che un campo vettoriale, in una regione dello spazio, è tanto più intenso quanto più le sue linee di forza sono "dense".

Facendo riferimento alla figura 7.13 e orientando L , ad esempio, in senso antiorario, la direzione del pollice della mano destra, che con le altre dita avvolge L in base al suo orientamento, determina quali delle correnti concatenate con L contribuiscano positivamente o negativamente alla corrente complessiva I . Quando applichiamo l'equazione 7.19, quindi, prendiamo una corrente come positiva se "trapassa" una superficie avente L come bordo, nel senso di avanzamento indicato dal pollice della mano destra e negativa se nel senso opposto. Così, nella figura 7.13, le correnti I_1 e I_3 sono considerate positive e I_2 negativa.

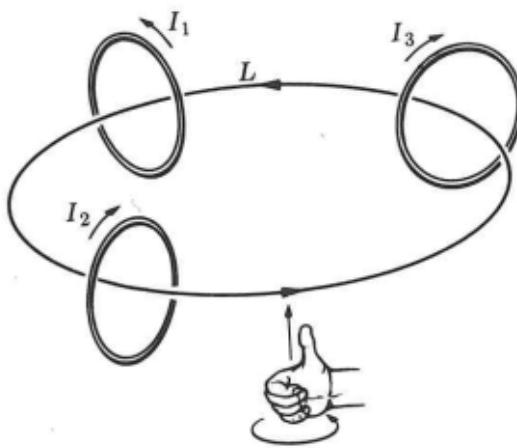


Figura 7.13: Un esempio di applicazione della legge di Ampère.

Ricordando che la corrente elettrica può essere espressa come il flusso di una densità di corrente (cfr. paragrafo 1.10)

$$I = \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.20)$$

cioè possiamo esprimere la legge di Ampère, equazione 7.19, anche nella forma

$$\Lambda_B = \oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.21)$$

dove S è una qualsiasi superficie delimitata da L . Si noti che il versore \hat{u}_N , che indica l'orientamento di S , lo si deve orientare in base alla direzione che fissa il verso positivo delle correnti concatenate con L .

Il fatto che la circolazione del campo magnetico generalmente non è nulla, indica che *il campo magnetico non ammette un potenziale magnetico nello stesso senso in cui il campo elettrico ammette un potenziale elettrico*.

LA LEGGE DI AMPÈRE è particolarmente utile quando vogliamo calcolare il campo magnetico prodotto da distribuzioni di correnti aventi

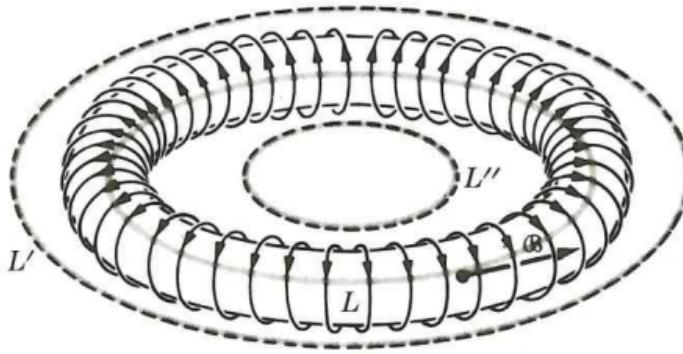


Figura 7.14: Applicazione della legge di Ampère per il calcolo del campo magnetico generato da un avvolgimento toroidale percorso da corrente.

certe simmetrie geometriche. Un esempio di importanza pratica è costituito dall'avvolgimento toroidale di figura 7.14. Un avvolgimento toroidale consiste in un filo avvolto uniformemente su un toro, o superficie a forma di ciambella.

Sia N il numero di spire, tutte ugualmente distanziate, ed I sia la corrente elettrica che le percorre. La simmetria del problema suggerisce che le linee di forza del campo magnetico \bar{B} sono cerchi concentrici al toro. Prendiamo dapprima come percorso di integrazione un cerchio L entro il toro. La circolazione magnetica è allora $\Lambda_B = BL$. Il percorso L concatena tutte le spire attorno al toro e perciò la corrente totale che lo attraversa è NI . Perciò, applicando la legge di Ampère, otteniamo $BL = \mu_0 NI$. Se il raggio della sezione dei toro è piccolo rispetto al suo raggio, possiamo considerare L uguale per tutti i percorsi interni. Dato che $n = N/L$ è il numero di spire per unità di lunghezza, concludiamo che il campo magnetico entro il toro è uniforme e ha il valore costante $B = \mu_0 nI$.

Per un qualsiasi percorso che giace al di fuori del toro, come L' o L'' , la corrente totale che lo concatena vale zero. Quindi otteniamo $B = 0$. In altre parole, il campo magnetico di un avvolgimento toroidale è totalmente confinato nel suo interno. Questa situazione è applicabile solo al caso di avvolgimenti toroidali in cui le spire sono assai poco spaziate fra loro.

7.8 Flusso magnetico

IL FLUSSO MAGNETICO ATTRAVERSO una qualsiasi superficie S , chiusa o no, è

$$\Phi_B = \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (7.22)$$

dove il versore \hat{u}_N indica la direzione normale ad S in ogni suo punto.

Il concetto di flusso magnetico attraverso una superficie arbitraria è di grande importanza, specialmente quando la superficie non è chiusa. Il flusso magnetico, che dimensionalmente è il campo magnetico moltiplicato per un'area, è espresso in Tm^2 , un'unità chiamata weber (Wb) in onore del fisico tedesco Wilhelm E. Weber.

Poiché non vi sono masse o poli magnetici (per lo meno non sono ancora stati osservati), le linee di forza del campo magnetico \bar{B} sono chiuse, come indicato negli esempi discussi finora. Concludiamo che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è sempre nullo. Cioè, il flusso entrante attraverso una superficie chiusa è uguale al flusso uscente. Perciò

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (7.23)$$

Tralasciamo la dimostrazione. Il risultato costituisce la **legge di Gauss per il campo magnetico**.

7.9 Equazioni del campo elettromagnetostatico

POSSIAMO RIASSUMERE LE EQUAZIONI PRINCIPALI che caratterizzano il campo elettromagnetostatico che abbiamo visto in questo paragrafo (per la parte magnetica) e nel capitolo 1 per la parte elettrica. Le quattro equazioni che andiamo a scrivere sono le **leggi di Maxwell per il campo magnetostatico**.

- Legge di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8)

$$\oint_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (7.24)$$

- Legge di Gauss per il campo magnetico (paragrafo 7.8)

$$\oint_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS = 0 . \quad (7.25)$$

- Circuitazione per il campo elettrico (paragrafo 1.5)⁵

$$\int_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 . \quad (7.26)$$

- Circuitazione per il campo magnetico (paragrafo 7.7)

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (7.27)$$

⁵ Per uniformità con la legge 7.27 ricavata al paragrafo 7.7 inherente la circuitazione del campo magnetico, la linea chiusa denominata γ nell'intero paragrafo paragrafo 1.5 è stata rinominata L nella 7.26.

8.1 Il campo elettromagnetico dipendente dal tempo

NEI CAPITOLI [1](#) E [7](#), abbiamo preso in considerazione i campi elettrici e magnetici non dipendenti dal tempo o, in altre parole, statici. In questo paragrafo considereremo campi dipendenti dal tempo; cioè *in un punto assegnato dello spazio i campi possono variare con il tempo*. In questo caso, valgono nuove relazioni. Vedremo che un campo magnetico variabile comporta l'esistenza di un campo elettrico E , viceversa, che un campo elettrico variabile comporta l'esistenza di un campo magnetico. Le leggi che descrivono queste due situazioni sono chiamate legge di Faraday-Henry e legge di Ampere-Maxwell.

8.2 La legge di Faraday-Henry

L'**INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** è il principio di funzionamento del generatore elettrico, del trasformatore e di molti altri apparecchi di uso quotidiano. Supponiamo che un conduttore elettrico formante un circuito chiuso sia posto in una regione nella quale esista un campo magnetico \vec{B} . Se il flusso magnetico Φ_B , concatenato con il circuito varia con il tempo, si può osservare una corrente nel circuito mentre il flusso sta variando. La presenza di una corrente elettrica indica l'esistenza, o l'induzione, di una forza elettromotrice (fem) agente nel circuito e quindi di un campo elettrico \vec{E} . Misure di questa fem indotta mostrano che essa dipende dalla rapidità di variazione del flusso magnetico $d\Phi_B/dt$. Per esempio, se un magnete è posto vicino ad un circuito conduttore chiuso si osserva una fem del circuito se esso (o il circuito) viene mosso in modo tale che il flusso magnetico concatenato cambi. L'entità della fem indotta dipende dal fatto che il magnete (o il circuito) venga mosso rapidamente o lentamente. La fem indotta è tanto maggiore, quanto maggiore è la derivata del flusso rispetto al

tempo. La direzione lungo la quale agisce la fem indotta dipende dal fatto che il flusso del campo magnetico aumenta o diminuisce.

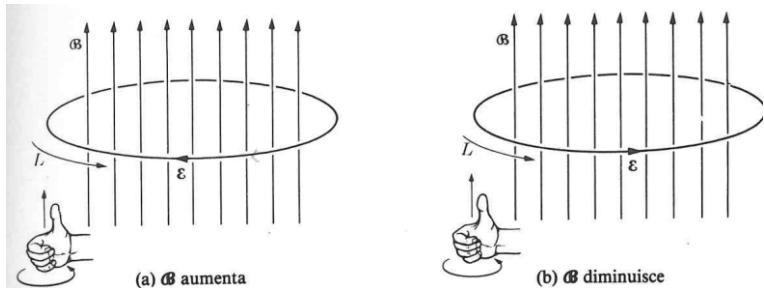


Figura 8.1:

PER ESSERE PIÙ PRECISI, riferiamoci alla figura 8.1 nella quale la linea L è orientata come le dita della mano destra con il pollice nella direzione e verso del campo magnetico \vec{B} . Supponiamo che la geometria rimanga invariata ma che si osservi una variazione dell'intensità B del campo. Quando il flusso magnetico aumenta (cioè $d\Phi_B/dt > 0$) la fem indotta V agisce nel senso negativo; mentre se il flusso magnetico diminuisce (cioè $d\Phi_B/dt < 0$), V agisce in senso positivo.¹ Quindi il segno della fem indotta è sempre opposto a quello di $d\Phi_B/dt$. Misure minuziose mostrano che il valore della fem indotta, espresso in volt, è uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico. Quindi possiamo scrivere

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt} , \quad (8.1)$$

formula che esprime la **legge di Faraday-Henry** dell'induzione elettromagnetica. Possiamo esprimere in parole in questo modo:

in un campo magnetico variabile, in ogni circuito viene indotta una fem uguale alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso il circuito col segno cambiato.

Notiamo come, nell'ipotesi di partenza in cui la linea chiusa L di fatto costituisce una piccola spira di materiale conduttore, l'induzione di una fem lungo la linea genera una corrente I che circola nella spira in base al verso della fem. Questa corrente genera a sua volta un campo magnetico \vec{B}_{ind} (legge di Biot-Savart 7.15 per una spira circolare percorsa da corrente) che, in base al verso di I , è diretto in modo da opporsi alle variazioni del flusso Φ_B (in questo caso, dato che la geometria è fissata, si oppone direttamente alle variazioni di B). L'opporarsi alla variazione del flusso magnetico da parte di \vec{B}_{ind} esprime il segno “-” nella 8.1 che può essere spiegato in termini di conservazione dell'energia. In effetti se il segno della fem fosse lo stesso di quello di $d\Phi_B/dt$, il campo magnetico \vec{B}_{ind} prodotto dalla corrente

¹ Da notare che “senso positivo” e “senso negativo” si intendo relativi all'orientamento di L che è conseguenza della direzione di \vec{B} .

I generata da V tenderebbe a cambiare nello stesso verso e quindi contribuirebbe ad aumentare \bar{B} e così via. Quindi una piccola variazione di Φ_B sarebbe l'inizio di un cambiamento continuo cosicché una piccola quantità d'energia impiegata inizialmente per cambiare Φ_B darebbe luogo ad un grande cambiamento dell'energia magnetica del sistema.

FACENDO RIFERIMENTO ALLA FIGURA 8.1, ipotizziamo di scegliere la superficie piana S di cui L è il contorno, ipotizziamo che $B = B_0 \sin(\omega t)$ e che \bar{B} sia parallelo al versore \hat{u}_N normale ad S in ogni suo punto. In queste ipotesi si ricava

$$V = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -SB_0\omega \cos(\omega t) , \quad (8.2)$$

e si intuisce quindi come l'effetto della V sia tanto maggiore quanto più la pulsazione ω è grande.

Ricordando che $V = \oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l}$, la 8.1 può essere riscritta come

$$\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (8.3)$$

dalla quale si deduce che *in condizioni non stazionarie il campo elettrico \bar{E} non ammette un potenziale e quindi non è valida la legge di Kirchhoff per le tensioni*.

Infine si evidenzia come la legge di Faraday-Henry ha validità ancor più generale di quanto già non mostrato. Non è necessario infatti che il percorso L coincida con un conduttore quale un circuito chiuso; consideriamo invece una regione dello spazio nella quale esiste un campo magnetico variabile nel tempo.

Allora l'equazione 8.3 equivale a dire che

un campo magnetico dipendente dal tempo comporta l'esistenza di un campo elettrico, tale che la circuitazione del campo elettrico lungo un percorso chiuso arbitrario è uguale ed opposta alla derivata rispetto al tempo del flusso magnetico attraverso una superficie avente per contorno quel percorso.

Questa è un'altra maniera di enunciare la legge di Faraday-Henry dell'induzione elettromagnetica. Essa ci fornisce una visione più approfondita del contenuto fisico del fenomeno dell'induzione elettromagnetica; ci mostra cioè il fatto che un campo elettrico deve esistere tutte le volte che un campo magnetico varia nel tempo e che i due campi sono in relazione tra loro, secondo l'equazione 8.3. Il campo elettrico può essere determinato misurando la forza agente su una carica in quiete nella regione nella quale il campo magnetico sta variando.

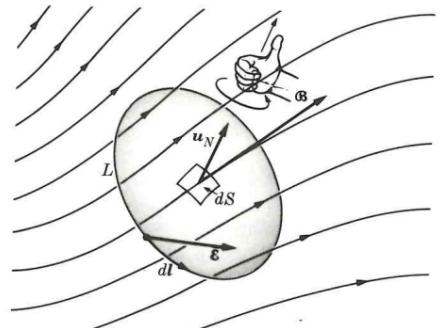


Figura 8.2:

8.3 La legge di Ampère-Maxwell

LA LEGGE DI FARADAY-HENRY, discussa nel precedente paragrafo, stabilisce una relazione tra il campo magnetico ed il campo elettrico in una medesima regione dello spazio. La stretta connessione che esiste tra i campi elettrico e magnetico suggerisce che una relazione analoga debba esistere tra la rapidità di variazione di un campo elettrico ed un campo magnetico nello stesso luogo. Di fatto, la legge di Faraday-Henry, formalizzata dall'equazione 8.3, lega la circuitazione del campo elettrico alle variazioni rispetto al tempo del flusso del campo magnetico. Viene spontaneo cercare l'analogo di questa legge nella legge di Ampere 7.27 che interessa direttamente la circuitazione del campo magnetico

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS . \quad (8.4)$$

Si noti però come la 8.4 non contenga alcuna variazione rispetto al tempo del flusso del campo elettrico. Del resto questo non deve stupire dato che è stata definita in condizioni statiche. La legge di Ampère deve essere rivista per poter essere applicata a campi dipendenti dal tempo.

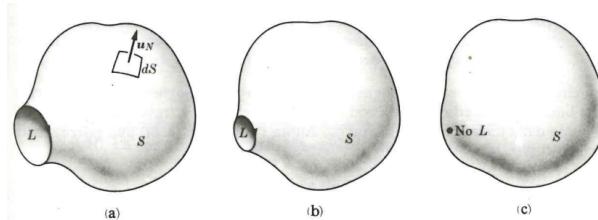


Figura 8.3:

LA LEGGE DI AMPÈRE nella forma 8.4 si applica alla superficie S il cui contorno è la linea L . La superficie S è arbitraria, col solo vincolo di essere delimitata dalla linea L . Se la linea L si restringe (figura 8.3), il valore di $\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l}$ diminuisce e questo valore diviene nullo quando L si riduce ad un punto e la superficie S diviene una superficie chiusa. In queste ipotesi quindi la legge di Ampère richiede quindi che

$$\oint_S \bar{J} \cdot \hat{n}_N dS = 0 . \quad (8.5)$$

L'equazione 8.5 è in accordo con le leggi di conservazione della carica 1.22 dato che siamo in condizioni stazionarie.

LA LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL si ottiene modificando la legge di Ampère considerando il principio di conservazione della carica nella

sua formulazione più generale che tiene conto dei fenomeni legati alla tempo-varianza:

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \int_S \bar{J} \cdot \hat{u}_N dS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS . \quad (8.6)$$

Si noti come la presenza del termine $\mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS$ nella 8.6 implichi il cessare della validità della legge di Kirchhoff per le correnti in regime tempovariante.

UN NECESSARIO PASSO SUCCESSIVO è costituito dalla verifica sperimentale della correttezza dell'equazione 8.6 e del fatto che questa descrive la situazione reale che si riscontra in natura. La miglior prova di questo fatto è costituita dall'esistenza delle onde elettromagnetiche, argomento questo non sarà trattato in questa dispensa. Il ricercatore che per primo suggerì la legge di Ampère nella maniera suddetta è stato il fisico inglese James Clerk Maxwell verso la fine del secolo scorso e pertanto l'equazione 8.6 è chiamata legge di Ampère-Maxwell. La modifica dovuta a Maxwell fu originata più dal bisogno di dare una coerenza matematica alla teoria che da fatti sperimentali. Infatti gli esperimenti che confermarono le idee di Maxwell furono eseguiti solo dopo alcuni anni.

LA LEGGE DI AMPÈRE pone in relazione una corrente stazionaria con il campo magnetico. La legge di Ampère-Maxwell si spinge oltre e mostra che anche un campo elettrico dipendente dal tempo contribuisce al campo magnetico. Per esempio, in assenza di correnti, abbiamo dall'equazione 8.6

$$\oint_L \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \bar{E} \cdot \hat{u}_N dS , \quad (8.7)$$

che mostra più chiaramente la relazione tra un campo elettrico dipendente dal tempo ed il campo magnetico associato. In altre parole,

un campo elettrico dipendente dal tempo comporta l'esistenza, nel medesimo luogo, di un campo magnetico.

La circuitazione del campo magnetico è chiamata *forza magneto-motrice* applicata alla linea chiusa L ed è indicata con Λ_B . Il flusso elettrico attraverso la superficie S limitata dalla linea L è indicato con Φ_E . Allora l'equazione 8.7 può essere scritta nella forma

$$\Lambda_B = \mu_0 \epsilon_0 \Phi_E . \quad (8.8)$$

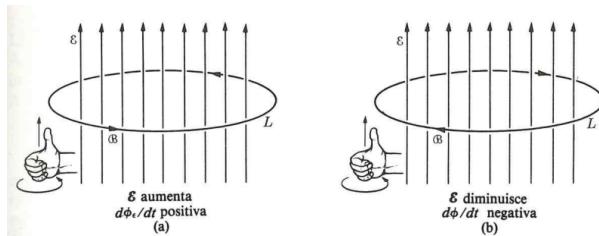


Figura 8.4:

L'ORIENTAMENTO RELATIVO DEI CAMPI ELETTRICO E MAGNETICO è mostrato nella figura 8.4 in corrispondenza ad un campo elettrico uniforme dipendente dal tempo. Se il campo elettrico aumenta (o diminuisce) l'orientamento delle linee di forza del campo magnetico è il medesimo (od opposto) del senso di rotazione di una vite destra che avanza nella direzione del campo elettrico. Si lascia allo studente il compito di confrontare questo risultato con la figura 8.3. La legge di Ampère-Maxwell, nella forma data dall'equazione 8.6, differisce per molti aspetti dalla legge di Faraday-Henry nella forma 8.3. In primo luogo nell'equazione 8.6 abbiamo un termine corrispondente ad una corrente elettrica, mentre nell'equazione 8.3 non esiste un termine corrispondente ad una corrente magnetica. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che non esistono in natura poli magnetici liberi. In secondo luogo, la derivata rispetto al tempo del flusso del campo elettrico compare con il segno positivo nell'equazione 8.6, mentre il flusso del campo magnetico compare con il segno negativo nell'equazione 8.3.

8.4 Equazioni di Maxwell (in forma integrale) del campo elettromagnetico

- Legge di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8)

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}_N dS = \frac{Q}{\epsilon_0} . \quad (8.9)$$

- Legge di Gauss per il campo magnetico (paragrafo 7.8)

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}_N dS = 0 . \quad (8.10)$$

- Circuitazione per il campo elettrico (paragrafo 8.2)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}_N dS . \quad (8.11)$$

- Circuitazione per il campo magnetico (paragrafo 8.3)

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \hat{n}_N dS + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}_N dS . \quad (8.12)$$

9

IN QUESTO BREVE CAPITOLO, partendo dalle nozioni elementari di elettrostatica ed elettromagnetismo introdotte nei capitoli 1, 7, e 8, si definiscono il condensatore lineare e l'induttore lineare, due bipoli dinamici, tempo-invarianti, di fondamentale importanza.

9.1 La capacità elettrica - il condensatore

SI CONSIDERI LA SFERA di raggio R rappresentata in figura 9.1 e si assuma la presenza di una carica Q , uniformemente distribuita sulla sua superficie. Utilizzando il teorema di Gauss per il campo elettrico (paragrafo 1.8) e ragionando sulla simmetria centrale (rispetto al centro C della sfera) della geometria, si ricava facilmente che il campo elettrico generato dalla carica Q è diretto radialmente rispetto a C ed ha intensità (per $r \geq R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} . \quad (9.1)$$

Il campo elettrico \bar{E} , essendo in regime stazionario, ammette un potenziale $V(r)$ che, se la sfera è immersa in un dielettrico di permittività relativa ϵ_r , sulla sua superficie è pari a

$$V(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{R} , \quad (9.2)$$

da cui si nota come il rapporto $Q/V(R)$ è una quantità costante, indipendente dalla carica Q . Questo è comprensibile poiché, se il potenziale è proporzionale alla carica che lo produce, il rapporto dei due deve essere una costante. Questa ultima affermazione è valida per qualsiasi conduttore carico di qualsiasi forma geometrica. Di conseguenza, la **capacità elettrica** C di un conduttore isolato è definita

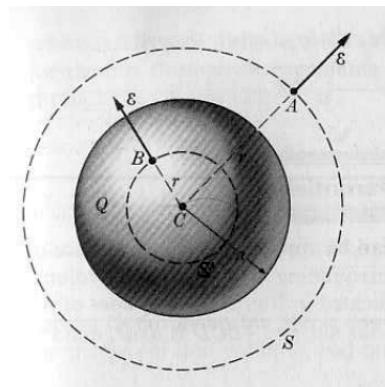


Figura 9.1: Una sfera di raggio R la cui superficie sia uniformemente carica genera un campo radiale rispetto a centro C della sfera stessa.

come il rapporto fra la sua carica Q e il suo potenziale V . L'equazione $Q = CV$ mostra quanta carica viene immagazzinata su un conduttore per un assegnato valore del potenziale.

LA CAPACITÀ DI UN CONDUTTORE SFERICO è $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R$. Se la sfera è circondata dal vuoto, invece che da un dielettrico, la sua capacità è $C_0 = 4\pi\epsilon_0 R$. Dunque il circondare una sfera, e in generale un conduttore qualsiasi, con un dielettrico aumenta la sua capacità elettrica di un fattore ϵ_r . Ciò è dovuto all'effetto schermante delle cariche di segno opposto che sono state indotte sulla superficie del dielettrico adiacente al conduttore. Queste cariche riducono la carica efficace del conduttore e diminuiscono il potenziale del conduttore secondo lo stesso fattore (in altre parole, a parità di carica Q il potenziale V risulta essere inferiore).

La capacità di un conduttore è espressa in CV^{-1} , un'unità chiamata farad (F) in onore di Michele Faraday. Il farad è definito come la capacità di un conduttore isolato il cui potenziale elettrico, avendo esso ricevuto la carica di 1C, vale un 1V.

IL CONCETTO DI CAPACITÀ ELETTRICA può essere esteso a un sistema di conduttori. Consideriamo il caso di due conduttori aventi cariche Q^+ e Q^- (figura 9.2). Se V_1 e V_2 sono i rispettivi potenziali, sicché $V = V_1 - V_2$ è la loro differenza di potenziale, la capacità del sistema è definita come

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} . \quad (9.3)$$

Questa disposizione costituisce ciò che si chiama un condensatore.

I CONDENSATORI HANNO AMPIA APPLICAZIONE nei circuiti elettrici ed elettronici. Un tipico condensatore è formato da due conduttori piani (armature) paralleli di superficie S separati da una distanza d , con lo spazio fra l'uno e l'altro riempito da un dielettrico di permittività relativa ϵ_r (figura 9.3). Si dimostra che la capacità di questa configurazione è

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r S}{d} . \quad (9.4)$$

Un condensatore per il quale C è costante si dice **condensatore lineare**. Se immaginiamo di collegare alle due armature del condensatore piano due terminali, otteniamo un bipolo all'interno della cui superficie limite racchiudiamo la struttura "fisica" del condensatore. Possiamo scegliere così, rispettivamente, $V = V_1 - V_2$ ed I (presa con la convenzione normale rispetto a V) come la tensione e la corrente descrittiva del bipolo. La sua equazione costitutiva si ottiene derivando rispetto al tempo il legame $Q = CV$ tra la carica e la differenza di

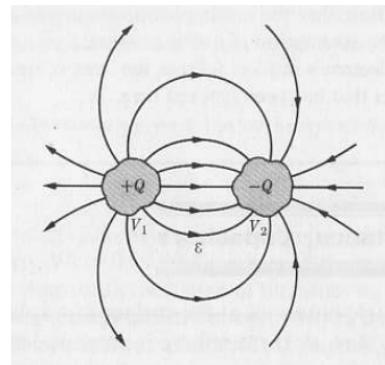


Figura 9.2: Un sistema di due conduttori aventi cariche Q^+ e Q^- .

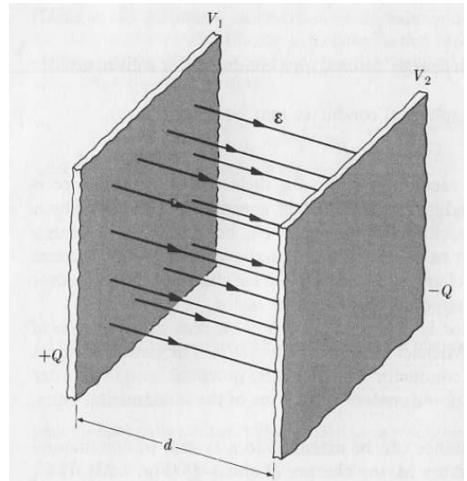


Figura 9.3: Il condensatore a facce parallele.

potenziale

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} . \quad (9.5)$$

Il simbolo che rappresenta il condensatore lineare è riportato in figura 9.4.

Dall'equazione costitutiva del condensatore 9.5, oltre a notare che, se V è costante, questo componente si comporta come un circuito aperto, è possibile derivare

$$V(t) = \int_{t_0}^t C^{-1} I(\tau) d\tau + V(t_0) , \quad (9.6)$$

da cui si evince che la tensione $V(t)$ ai capi del condensatore per $t > t_0$ dipende dalla corrente $I(t)$ ma anche dalla tensione $V(t_0) = V_0$, che fornisce la carica accumulata dal condensatore all'istante t_0 . Conoscere la tensione V_0 non ci dice come si sia arrivati a caricare il condensatore (in quanto tempo, con che velocità, etc.) ci dice solo lo **stato** del componente all'istante t_0 . In qualche modo possiamo pensare che V_0 racchiuda la "storia" del condensatore che si è svolta, per $t < t_0$, con una dinamica non ricostruibile.

In termini energetici, la tensione descrittiva V gioca un ruolo significativo per il condensatore. La *potenza istantanea assorbita* dal condensatore è infatti pari a

$$p_a(t) = V(t)I(t) = CV(t) \frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{CV^2(t)}{2} \right) = \frac{dw_a^E}{dt} , \quad (9.7)$$

dove $w_a^E(t) = \frac{1}{2}CV^2(t)$ è l'**energia elettrica** immagazzinata dal bipolo. Si noti come la variazione dell'energia tra due istanti di tempo t_1 e $t_2 > t_1$, non dipende dall'andamento di $V(t)$ tra t_1 e t_2 ma solo da $V(t_1)$ e $V(t_2)$. La tensione $V(t)$ è la **variabile di stato** del condensatore e conoscerne il valore permette di conoscerne l'energia immagazzinata.

Il condensatore è un componente *conservativo*: è in grado di immagazzinare energia e poi di erogarla. È quindi un componente attivo nel senso che la sua potenza istantanea assorbita può essere negativa ma dal punto di vista energetico è passivo nel senso che non è in grado di erogare più potenza di quella che ha immagazzinato.

9.2 L'autoinduzione - l'induttore

CONSIDERIAMO UNA SPIRA DI CORRENTE (che interpretiamo come un generico circuito elementare) nella quale fluisce una corrente costante I (figura 9.4). Secondo la legge di Ampère-Laplace (equazione

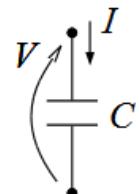


Figura 9.4: Il simbolo del condensatore lineare tempo-invariante. $I = C \frac{dV}{dt}$.

7.13) la corrente I produce un campo magnetico \vec{B} che, in ogni punto, è proporzionale ad I stessa.

Possiamo calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il circuito dovuto al campo generato dal circuito stesso, flusso ϕ_m che chiameremo **flusso auto-concatenato**. Questo flusso, è quindi proporzionale alla corrente I e possiamo scrivere

$$\phi_m = LI . \quad (9.8)$$

Il coefficiente L dipende dalla forma del conduttore ed è chiamato **autoinduttanza** del circuito. Il coefficiente è espresso in WbA^{-1} , unità chiamata henry, in omaggio a Joseph Henry e abbreviata con H.

SUPPONIAMO ADESSO CHE la corrente elettrica I nel circuito non sia costante. Quando la corrente I cambia nel tempo, il flusso del campo magnetico attraverso la spira cambia e, secondo la legge dell'induzione elettromagnetica, nel circuito viene indotta una fem. Questo caso speciale di induzione elettromagnetica è chiamato **autoinduzione**.

Combinando le equazioni 8.1 e 9.8 abbiamo, per la fem autoindotta,

$$V_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} . \quad (9.9)$$

Il segno meno indica che V_L , è opposta alla variazione di corrente. Così, se la corrente aumenta, dI/dt è positiva e V_L è opposta alla variazione di corrente (figura 9.6). Se la corrente diminuisce, dI/dt è negativa e V_L è positiva (figura 9.7). Quindi V_L , agisce sempre in modo da opporsi al cambiamento della corrente. Quando abbiamo scritto l'equazione 9.9, abbiamo supposto il circuito rigido, e perciò, calcolando la derivata rispetto al tempo, abbiamo considerato L costante. Se la forma del circuito è variabile, L non è costante e dobbiamo scrivere, in luogo dell'equazione 9.9,

$$V_L = -\frac{d(LI)}{dt} . \quad (9.10)$$

IL PRINCIPIO DELL'AUTOINDUZIONE viene utilizzato per realizzare il bipolo **induttore**. Tipicamente un induttore si ottiene a partire da più avvolgimenti di tipo solenoidale caratterizzati da un'induttanza complessiva L^1 . Se l'induttanza L è una costante, si ottiene un **induttore lineare** tempo-invariante le cui variabili descrittive sono la corrente I che percorre gli avvolgimenti e la tensione $V = -V_L$, cioè la tensione presa secondo la convenzione degli utilizzatori rispetto alla corrente indotta da V_L per contrastare la variazione del flusso magnetico. L'equazione costitutiva dell'induttore risulta essere

$$V = L \frac{dI}{dt} . \quad (9.11)$$

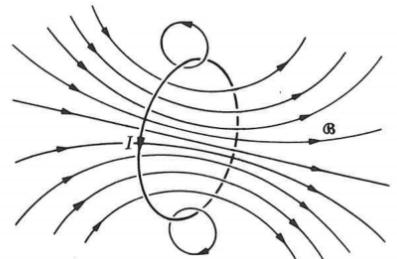


Figura 9.5: Una spira nella quale fluisce una corrente I e le linee di forza del campo magnetico che essa produce.



Figura 9.6: Se la corrente I aumenta, si origina una tensione V_L che, positiva con il verso in figura, spinge le cariche a muoversi nel verso opposto ad I e quindi tende a contrastare l'aumento di I stessa.

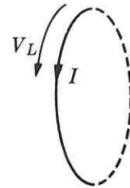


Figura 9.7: Se la corrente I diminuisce, si origina una tensione V_L che, positiva con il verso in figura, spinge le cariche a muoversi nello stesso verso di I e quindi tende a contrastare la diminuzione di I stessa.

¹ Non ricaveremo l'espressione dell'induttanza in funzione della geometria degli avvolgimenti ma si sottolinea comunque che l'induttanza L è funzione anche della permittività magnetica che si ottiene, a partire dal suo valore di riferimento nel vuoto μ_0 , moltiplicandola per un fattore μ_r (permittività magnetica relativa) che tiene conto del mezzo nel quale si considera il campo magnetico. In particolare gli avvolgimenti che realizzano un induttore possono essere fatti in aria o attorno a materiali metallici che hanno la funzione di modificare la permittività magnetica in modo significativo.

Il simbolo che rappresenta il condensatore lineare è riportato in figura 9.8.

Dall'equazione costitutiva dell'induttore 9.11, oltre a notare che in regime stazionario questo componente si comporta come un cortocircuito, è possibile derivare

$$I(t) = \int_{t_0}^t L^{-1}V(\tau)d\tau + I(t_0) , \quad (9.12)$$

da cui si evince che la corrente $I(t)$ che fluisce nell'induttore per $t > t_0$ dipende dalla tensione $V(t)$ ma anche dalla corrente $I(t_0) = I_0$, che fornisce il flusso magnetico accumulato dall'induttore all'istante t_0 . La corrente I gioca lo stesso ruolo della tensione V per il condensatore ed è la **variabile di stato** dell'induttore.

In termini energetici, la corrente descrittiva I , a partire dalla *potenza istantanea assorbita* dall'induttore

$$p_a(t) = V(t)I(t) = LI(t)\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2(t)}{2}\right) = \frac{dw_a^M}{dt} , \quad (9.13)$$

permette di ricavare $w_a^M(t) = \frac{1}{2}LI^2(t)$ cioè l'**energia magnetica immagazzinata** dal bipolo. Si noti come la variazione dell'energia tra due istanti di tempo t_1 e $t_2 > t_1$, non dipende dall'andamento di $I(t)$ tra t_1 e t_2 ma solo da $I(t_1)$ e $I(t_2)$.

L'induttore, come il condensatore, è un componente *conservativo*: è in grado di immagazzinare energia e poi di erogarla. È quindi un componente attivo nel senso che la sua potenza istantanea assorbita può essere negativa ma dal punto di vista energetico è passivo nel senso che non è in grado di erogare più potenza di quella che ha immagazzinato.

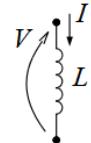


Figura 9.8: Il simbolo dell'induttore lineare tempo-invariante. $V = L\frac{dI}{dt}$

10

10.1 Circuito RC del primo ordine non degenero

SI CONSIDERI IL CIRCUITO in figura 10.1 in cui è stato evidenziato un bipolo composito \mathcal{N}_R che al suo interno è costituito da multi-terminali lineari, adinamici e tempo-invarianti e da generatori indipendenti di tensione e/o corrente. Si ipotizza che \mathcal{N}_R possa essere rappresentato con un modello equivalente di Thévenin, di cui $E_{th}(t)$ e R_{th} sono, rispettivamente, il generatore di tensione e il resistore lineare, e che quindi il circuito in esame diventi quello in figura 10.2.

Possiamo scrivere l'equazione che governa la dinamica del circuito scrivendo l'equazione di maglia

$$E_{th}(t) - R_{th}i_C(t) - v_C(t) = E_{th}(t) - R_{th} \underbrace{C \frac{d}{dt} v_C(t)}_{i_C(t)} - v_C(t) = 0 , \quad (10.1)$$

che può essere riscritta in *forma canonica* come

$$\frac{d}{dt}v_C(t) = -\frac{1}{R_{th}C}v_C(t) + \frac{E_{th}(t)}{R_{th}C} = \lambda v_C(t) + u(t) . \quad (10.2)$$

DAL MOMENTO CHE l'equazione 10.2 coinvolge la variabile di stato $v_C(t)$ del condensatore come unica *funzione incognita*, tale equazione prende il nome di **equazione di stato**.

Si tratta di un'*equazione differenziale ordinaria lineare* che ha come soluzione non un valore numerico dell'incognita ma una funzione della variabile indipendente t . La soluzione della 10.2, infatti, è una qualunque funzione la cui derivata rispetto a t sia la somma di un contributo proporzionale alla funzione stessa e di una funzione $u(t)$ che dipende dal problema ed è nota.

NON È SCOPO DI QUESTO CORSO discutere i teoremi e le tecniche di soluzione inerenti le equazioni differenziali ordinarie lineari e ci

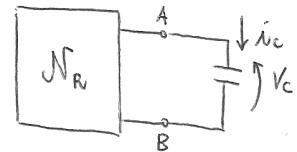


Figura 10.1: Un generico circuito dinamico elementare ottenuto collegando un condensatore lineare ad un bipolo composito, adinamico, che ammette modello equivalente di Thévenin.

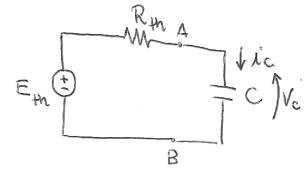


Figura 10.2: Circuito equivalente a quello di figura 10.1.

limiteremo pertanto ad esporre i concetti utili per la soluzione dei circuiti di nostro interesse, lasciando ai corsi di analisi matematica l'approfondimento di questi argomenti.

TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI DI UN'EQUAZIONE come la 10.2,

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) + u(t) , \quad (10.3)$$

si ottengono, in generale, come somma di due contributi: una famiglia di funzioni $x_{OA}(t; k, t_0)$, funzioni del tempo e parametrizzate dai due parametri k e t_0 , che risolvono l'equazione *omogenea associata*

$$\frac{d}{dt}x_{OA}(t; k, t_0) = \lambda x_{OA}(t; k, t_0) , \quad (10.4)$$

e una ulteriore funzione $x_{IP}(t)$, chiamata *integrale particolare*, che risolve la 10.3.

Si dimostra per sostituzione che la famiglia di funzioni $x_{OA}(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)}$ risolve la 10.4, infatti

$$\frac{d}{dt}\left(ke^{\lambda(t-t_0)}\right) = \lambda\left(ke^{\lambda(t-t_0)}\right) . \quad (10.5)$$

La soluzione dell'equazione completa 10.3 sarà dunque del tipo

$$x(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)} + x_{IP}(t) . \quad (10.6)$$

LA DETERMINAZIONE DELLA FUNZIONE $x_{IP}(t)$ è in generale più complessa e esistono tavole di integrali particolari che corrispondono a diversi termini noti $u(t)$. Per i nostri scopi è sufficiente avere presenti le seguenti corrispondenze

$$\begin{array}{ccc} u(t) & \rightarrow & x_{IP}(t) \\ ae^{\beta(t-\bar{t})} & \rightarrow & \gamma e^{\beta(t-\bar{t})} \\ \sum_{k=0}^N \alpha_k(t-\bar{t})^k & \rightarrow & \sum_{k=0}^N \gamma_k(t-\bar{t})^k \\ \alpha \cos(\omega t + \varphi) & \rightarrow & \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t) \end{array} . \quad (10.7)$$

A titolo di esempio, si scelga $u(t) = U$ nella 10.3. In base alla tabella si tratta di ingresso di tipo polinomiale con $N = 0$ e quindi l'integrale particolare sarà una costante γ_0 che sostituita nella 10.3 la risolva. Si ottiene per sostituzione

$$\frac{d}{dt}\gamma_0 = 0 = \lambda\gamma_0 + U , \quad (10.8)$$

da cui si deriva che $x_{IP}(t) = \gamma_0 = -\frac{U}{\lambda}$.

NEL SEGUITO AVREMO MODO di verificare altre corrispondenze della tabella fornita ma torniamo adesso alla nostra equazione di stato 10.2 ipotizzando $E_{th}(t) = E$. La sua soluzione sarà la famiglia di funzioni

$$v_C(t; k, t_0) = ke^{-\frac{t-t_0}{R_{th}C}} + E \quad . \quad (10.9)$$

Si verifica infatti facilmente che in questo caso l'integrale particolare è la costante E pari al generatore di Thevénin.

LA COSTANTE $\lambda = -\frac{1}{R_{th}C}$ si chiama **frequenza libera o pulsazione naturale** della rete. Le sue dimensioni fisiche sono s^{-1} e quindi la costante $\tau = |\frac{1}{\lambda}| = R_{th}C$ prende il nome di **costante di tempo**. λ non dipende da $E_{th}(t)$, ovvero è una *caratteristica della rete passivata*. Per calcolarla, quindi, in alternativa al derivarla dall'equazione di stato, si può procedere passivando i generatori indipendenti contenuti all'interno del bipolo composito $\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$, il cui modello equivalente di Thevénin si riduce così alla sola resistenza R_{th} .

SI NOTI CHE SE λ è negativa il termine legato alla soluzione dell'omogenea associata tende a zero per t che tende all'infinito e la soluzione dell'equazione di stato tende al solo integrale particolare. Nell'esempio specifico, in cui $e(t) = E_{th}$, la soluzione di regime è di tipo stazionario e quindi il condensatore si comporta a regime come un circuito aperto. Infatti, poiché in regime stazionario le derivate rispetto al tempo sono nulle per definizione, la corrente $i_C(t)$, a regime, diventa nulla. Si annulla quindi anche la caduta di tensione ai capi del resistore R_{th} e la tensione $v_C(t)$, a regime, diventa quindi pari a E . Nel caso di ingressi costanti (e frequenza libera negativa, cioè circuito asintoticamente stabile) possiamo quindi ricavare il valore di regime della variabile di stato risolvendo un circuito resistivo in cui il condensatore viene sostituito dal suo equivalente in regime stazionario. Ciò non è possibile se $E_{th}(t)$ non è costante.

QUALORA PER IL CONDENSATORE si specifichi una condizione iniziale v_{C_0} all'istante t_0 , la famiglia di soluzioni $v_C(t; k, t_0)$ della 10.2 si riduce ad una sola funzione. Infatti, è necessario identificare il parametro k in modo tale che $v_C(t_0; k, t_0) = v_{C_0}$. Concentriamoci sul caso in cui $E_{th}(t) = E$ e quindi la famiglia di soluzioni sia la 10.9, possiamo scrivere

$$v_C(t_0; k, t_0) = ke^{-\frac{t_0-t_0}{R_{th}C}} + E = k + E = v_{C_0} \quad , \quad (10.10)$$

da cui si ottiene $k = v_{C_0} - E$. La soluzione dell'equazione di stato con

condizioni iniziali, nel caso $E_{th}(t) = E$ è dunque

$$v_C(t) = \underbrace{(v_{C_0} - E)e^{-\frac{t-t_0}{R_{th}C}}}_{\text{transitorio}} + \underbrace{E}_{\text{regime}} . \quad (10.11)$$

Nel caso più generale in cui sia l'ingresso $E_{th}(t)$ non sia costante, si avrà infatti un integrale particolare $v_{C_{IP}}(t)$ e la costante k si determinerà scrivendo

$$v_C(t_0; k, t_0) = ke^{-\frac{t_0-t_0}{R_{th}C}} + v_{C_{IP}}(t) = k + v_{C_{IP}}(t_0) = v_{C_0} , \quad (10.12)$$

da cui $k = v_{C_0} - v_{C_{IP}}(t_0)$.

In figura 10.3 è riportato l'andamento della funzione 10.11. Si ricava facilmente che la rete tangente alla soluzione in t_0 è

$$r(t) : \frac{(E - v_{C_0})(t - t_0)}{\tau} + v_{C_0} = 0 \quad (10.13)$$

e che tale retta interseca l'asintoto orizzontale $v_C = E$ per $t = t_0 + \tau$. La costante di tempo τ dà l'indicazione di quanto rapidamente la tensione $v_C(t)$ raggiunge il suo valore asintotico: maggiore è τ e più lenta è la dinamica del circuito, minore è τ e più veloce è la dinamica del circuito

LA SOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA, con $E_{th}(t)$ qualunque, può essere riorganizzata evidenziando i contributi dovuti all'ingresso (**risposta forzata**) e quelli dovuti alla condizione iniziale (**risposta libera**)

$$v_C(t) = \underbrace{v_{C_0}e^{-\frac{t-t_0}{R_{th}C}}}_{\text{risposta libera}} + \underbrace{v_{C_{IP}}(t) - v_{C_{IP}}(t_0)e^{-\frac{t-t_0}{R_{th}C}}}_{\text{risposta forzata}} . \quad (10.14)$$

Si nota quindi che, con ingresso nullo, il condensatore evolve scaricandosi (se $\lambda < 0$). Con condizione iniziale nulla, invece, il circuito presenta comunque una fase transitoria che porta al regime per t che tende all'infinito.

NEL CASO IN CUI il bipolo composito \mathcal{N}_R in figura 10.1 ammetta anche la base tensione, ovvero il modello di Thevenin non sia degenere con $R_{th} = 0$, è possibile risolvere il circuito di partenza trasformandolo come in figura 10.4. Si lascia allo studente il compito di ricavare la corrispondente equazione di stato confrontandola poi con la 10.2.

SI ANALIZZERÀ NEL SEGUITO il caso *degenero* in cui $R_{th} = 0$ che comporta $|\lambda| \rightarrow \infty$.

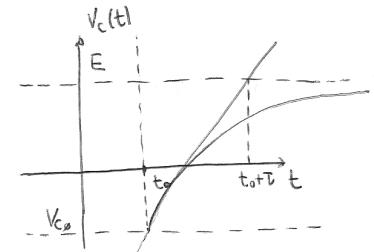


Figura 10.3: Andamento della 10.11 con $v_{C_0} < 0 < E$ e $t_0 > 0$.

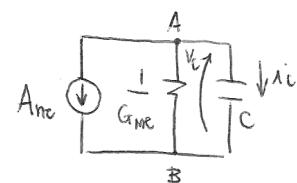


Figura 10.4: Circuito equivalente a quello di figura 10.1 se \mathcal{N}_R ammette anche la base tensione.

10.1.1 Esempio

SI RICAVI L'ANDAMENTO DELLA TENSIONE $v_C(t)$ per il circuito in figura 10.5 sapendo che $v_C(0) = V_0$ e $e(t) = E$.

Possiamo seguire due strade diverse. La prima prevede di scollegare il condensatore dal circuito, calcolare il modello equivalente di Thévenin per il bipolo composito collegato ai morsetti α e β e riportarci quindi nella condizione di figura 10.2. Alternativamente possiamo ricavare direttamente l'equazione di stato che governa la dinamica della rete.

Nel primo caso si ricava facilmente che $R_{th} = R_1||R_2$ e $E_{th} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$. Da qui è quindi possibile ricavare la soluzione del problema usando la 10.11

$$v_C(t) = (V_0 - E_{th})e^{-\frac{t}{R_{th}C}} + E_{th} . \quad (10.15)$$

Impariamo però a risolvere il circuito senza ricavare il modello equivalente di Thévenin. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} i_{R_2} &= \frac{v_C}{R_2} \\ i_{R_1} &= \frac{E - v_C}{R_1} \end{aligned} , \quad (10.16)$$

da cui

$$i_{R_1} - i_{R_2} - C \frac{dv_C}{dt} = \frac{E - v_C}{R_1} - \frac{v_C}{R_2} - C \frac{dv_C}{dt} = 0 . \quad (10.17)$$

Riorganizzando quest'ultima equazione si ricava

$$\frac{dv_C}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}}_{\lambda = -\frac{1}{R_{th}C}} v_C + \frac{E}{R_1 C} . \quad (10.18)$$

La soluzione dell'equazione differenziale così ottenuta è quindi

$$v_C(t) = ke^{\lambda t} + H , \quad (10.19)$$

con H tale che

$$0 = -\frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C} H + \frac{E}{R_1 C} , \quad (10.20)$$

ovvero $H = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = E_{th}$. La costante k , invece, deve essere tale da garantire che $V_0 = k + H$, ovvero $k = V_0 - H = V_0 - E_{th}$.

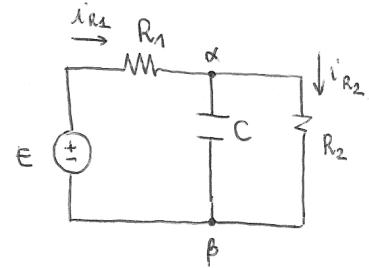


Figura 10.5: Il bipolo composito \mathcal{N}_R è costituito dal circuito connesso ai morsetti α e β una volta scollegato il condensatore C .

10.2 Circuito RL del primo ordine non degenere

IL CASO DUALE DI QUELLO analizzato nel paragrafo precedente è rappresentato dal circuito in figura 10.6. In questo caso, il bipolo composito \mathcal{N}_R (che al suo interno è costituito da multi-terminali lineari, adinamici e tempo-invarianti e da generatori indipendenti di tensione e/o corrente) si ipotizza possa essere rappresentato con un modello equivalente di Norton, di cui $A_{nr}(t)$ e G_{nr} sono, rispettivamente, il generatore di corrente e la conduttanza lineare. Il circuito in esame diventa quindi quello in figura 10.7.

L'equazione di stato che regola la dinamica del circuito si può ricavare a partire dal bilancio di correnti al nodo A

$$A_{nr}(t) + G_{nr}v_L(t) + i_L(t) = A_{nr}(t) + G_{nr} \underbrace{L \frac{d}{dt} i_L(t)}_{v_L(t)} + i_L(t) = 0 , \quad (10.21)$$

che può essere riscritta in *forma canonica* come

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = -\frac{1}{G_{nr}L} i_L(t) - \frac{A_{nr}(t)}{G_{nr}L} = \lambda i_L(t) + u(t) , \quad (10.22)$$

dove $\lambda = -\frac{1}{G_{nr}L} = -\frac{R_{nr}}{L}$ e $[\lambda] = s^{-1}$. La costante di tempo del circuito è $\tau = \frac{1}{|\lambda|} = G_{nr}L = \frac{L}{R_{nr}}$.

Come per il caso RC, qualora il bipolo composito \mathcal{N}_R ammetta anche la base corrente, ovvero il modello di Norton sia non degenere con $G_{nr} \neq 0$, il circuito in figura 10.5 poteva essere analizzato anche impiegando un circuito equivalente di Thevenin. Studieremo nel seguito il caso *degenero* in cui $G_{nr} = 0$ che comporta $|\lambda| \rightarrow \infty$ e $\tau \rightarrow 0^+$.

La soluzione dell'equazione 10.22 si costruisce in modo assolutamente analogo a quello presentato nel paragrafo precedente e per questo vedremo direttamente un esempio di analisi circuitale.

10.2.1 Esempio

SI RICAVI L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE $i_L(t)$ per il circuito in figura 10.8 sapendo che $i_L(0) = I_0$ e $a(t) = A$.

Si potrebbe procedere ricavando il circuito equivalente di Norton ai morsetti α e β e riportarsi nella situazione standard descritta dall'equazione 10.22. Sceglieremo invece di ricavare l'equazione di stato analizzando direttamente il circuito. Il bilancio delle correnti al nodo

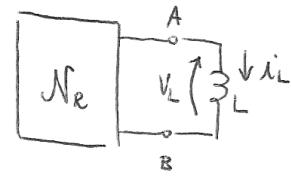


Figura 10.6: Un generico circuito dinamico elementare ottenuto collegando un induttore lineare ad un bipolo composito, adinamico, che ammette modello equivalente di Norton.

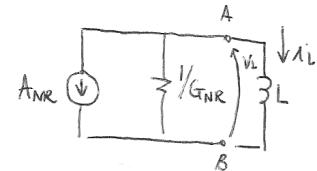


Figura 10.7: Circuito equivalente a quello di figura 10.6.

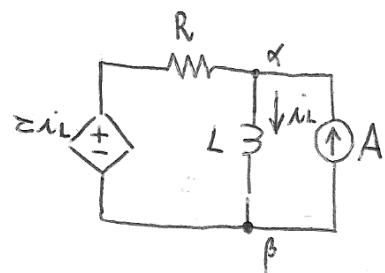


Figura 10.8: Il bipolo composito \mathcal{N}_R è costituito dal circuito connesso ai morsetti α e β una volta scollegato l'induttore L .

α è il seguente

$$A + \frac{ri_L(t) - v_L}{R} - i_L(t) = A + \left(\frac{r}{R} - 1 \right) i_L(t) - \frac{L}{R} \frac{d}{dt} i_L(t) = 0 , \quad (10.23)$$

che possiamo riscrivere

$$\frac{d}{dt} i_L(t) = \frac{r-R}{L} i_L(t) + \frac{AR}{L} . \quad (10.24)$$

Si noti che $\lambda = \frac{r-R}{L}$ e che affinché sia negativa, per garantire che il transitorio del circuito si esaurisca al tendere di t all'infinito, si deve avere $r - R < 0$ ovvero $r < R$.

La soluzione della 10.24 sarà del tipo $i_L(t, k, t_0) = ke^{\frac{r-R}{L}(t-t_0)} + i_{L_{IP}}(t)$. Dato che $a(t)$ è costante, l'integrale particolare sarà un'opportuna costante H tale che $\frac{r-R}{L}H + \frac{AR}{L} = 0$. Si ricava quindi $H = -\frac{AR}{r-R}$.

La costante H poteva essere ricavata risolvendo il circuito in figura 10.8 in regime stazionario ovvero sostituendo l'induttore con un corto circuito ($v_L = 0$). Questo è il circuito che si ottiene a regime (con un ingresso costante) quando il transitorio si è esaurito e quindi la $i_L(t)$ è costante come l'ingresso.¹ Dalla 10.23 con $v_L = 0$ si avrebbe $A + \frac{ri_L-0}{R} - i_L = A + \frac{r}{R}i_L - i_L = 0$ da cui $i_L = -\frac{AR}{r-R}$.

La soluzione del problema tenendo conto della condizione iniziale $i_L(0) = I_0$, ottenuta imponendo $i_L(0, k, 0) = k - \frac{AR}{r-R} = I_0$ per ricavare $k = I_0 + \frac{AR}{r-R}$, sarà quindi $i_L(t) = \left(I_0 + \frac{AR}{r-R} \right) e^{\frac{r-R}{L}t} - \frac{AR}{r-R}$.

¹ Si noti che se $a(t)$ non fosse costante, l'integrale particolare non si potrebbe ottenere dalla risoluzione del circuito in regime stazionario dato che, in questo caso, il comportamento a regime della $i_L(t)$ non sarebbe costante.

11

11.1 Richiami di trigonometria

- $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\alpha - \pi/2) = \sin(\alpha)$
- $\frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] = \cos(\alpha)\cos(\beta)$

La funzione $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, in virtù delle formule sopra elencate, può essere riscritta come $X_m \cos \varphi \cos(\omega t) - X_m \sin \varphi \sin(\omega t)$. Data la funzione $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ come è possibile riscriverla nella forma $X_m \cos(\omega t + \varphi)$, ricavando i valori di X_m e φ corrispondenti? Innanzitutto possiamo scrivere che

$$(X_m \cos \varphi)^2 + (-X_m \sin \varphi)^2 = X_m^2 = A^2 + B^2 , \quad (11.1)$$

ovvero $X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Inoltre

$$\frac{-X_m \sin \varphi}{X_m \cos \varphi} = -\tan \varphi = \frac{B}{A} , \quad (11.2)$$

da cui

$$\begin{aligned} \varphi &= -\text{atan} \frac{B}{A} & A > 0 \\ \varphi &= -\text{atan} \frac{B}{A} \pm \pi & A < 0 \end{aligned} . \quad (11.3)$$

11.2 Richiami sui numeri complessi

Il numero $z = a + jb$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e j l'unità immaginaria tale che $j^2 = -1$, si definisce **numero complesso**. L'insieme dei numeri complessi lo indichiamo con la lettera \mathbb{C} . Il numero reale a si definisce *parte reale* di z e si scrive $a = \operatorname{Re}\{z\}$. Analogamente, il numero reale b si definisce *parte immaginaria* di z e si scrive $b = \operatorname{Im}\{z\}$. Possiamo quindi scrivere $z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\}$. Per rappresentare graficamente i numeri complessi si usa il piano cartesiano. Sull'asse orizzontale del piano si rappresenta la parte reale di un dato numero z e sull'asse verticale la sua parte immaginaria. Questa è la rappresentazione di Argand-Gauss. Il punto $(\operatorname{Re}\{z\}, \operatorname{Im}\{z\})$ identifica univocamente z sul piano complesso (cfr. figura 11.1). La scrittura $z = a + jb$ si avvale della rappresentazione *cartesiana o rettangolare* ed è possibile introdurre anche la rappresentazione *olare* del punto z sul piano complesso utilizzando il *modulo* $|z|$ di z e la sua *fase* o *argomento* φ e si indica con $\operatorname{arg}(z)$. Si può quindi scrivere

$$z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi \quad (11.4)$$

da cui

$$|z| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}} \quad (11.5)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} & \operatorname{Re}\{z\} > 0 \\ \varphi &= \operatorname{atan} \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\operatorname{Re}\{z\}} \pm \pi & \operatorname{Re}\{z\} < 0 \end{aligned} \quad . \quad (11.6)$$

Inoltre utilizzando la *formula di Eulero*

$$\cos \varphi + j \sin \varphi = e^{j\varphi}, \quad (11.7)$$

possiamo scrivere

$$z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z| \cos \varphi + j|z| \sin \varphi = |z| e^{j\varphi}. \quad (11.8)$$

Vediamo alcuni numeri complessi notevoli

$$\begin{aligned} e^{j2\pi k} &= 1, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(\pi/2+2\pi k)} &= j, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(\pi+2\pi k)} &= -1, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ e^{j(3\pi/2+2\pi k)} &= -j, & k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad . \quad (11.9)$$

11.2.1 Uguaglianza di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 , essi sono uguali se e solo se

$\operatorname{Re}\{z_1\} = \operatorname{Re}\{z_2\}$ e $\operatorname{Im}\{z_1\} = \operatorname{Im}\{z_2\}$. Un numero complesso z è quindi nullo se $\operatorname{Re}\{z\} = 0$ e $\operatorname{Im}\{z\} = 0$.

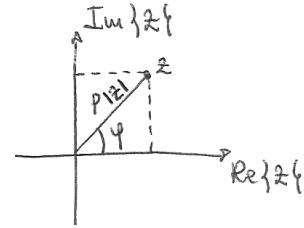


Figura 11.1: Il piano complesso: la rappresentazione di Argand-Gauss

Invece di utilizzare la 11.6 che può portare ad una determinazione sbagliata dell'argomento qualora non si tenga opportunamente conto del quadrante del piano cartesiano in cui si trova z , è possibile ricorrere alle relazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}\{z\}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}}} \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}\{z\}}{\sqrt{\operatorname{Re}^2\{z\} + \operatorname{Im}^2\{z\}}} \end{array} \right.$$

11.2.2 Il complesso coniugato

DATO UN NUMERO COMPLESSO $z = \operatorname{Re}\{z\} + j\operatorname{Im}\{z\} = |z|e^{j\varphi}$ si definisce $z^* = \operatorname{Re}\{z\} - j\operatorname{Im}\{z\} = |z|e^{-j\varphi}$ il suo coniugato. La rappresentazione geometrica sul piano complesso è fornita in figura 11.2. I due numeri z e z^* hanno lo stesso modulo e fase opposta (si ricordi che gli angoli si misurano da 0 a 2π in senso antiorario e da 0 a -2π in senso orario, partendo dall'asse orizzontale come riferimento). Si noti che $zz^* = |z|e^{j\varphi}|z|e^{-j\varphi} = |z|^2$.

11.2.3 Somma algebrica di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 si definisce la loro somma algebrica il numero complesso $z = z_1 + z_2 = \operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}$,

$$z = \operatorname{Re}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} + j(\operatorname{Im}\{z_1\} + \operatorname{Im}\{z_2\}) \quad (11.10)$$

11.2.4 Prodotto e di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 si definisce il loro prodotto il numero complesso $z = z_1z_2 = (\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\})(\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\})$ che può essere riscritto come

$$z = \operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\} - \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + j(\operatorname{Re}\{z_1\}\operatorname{Im}\{z_2\} + \operatorname{Im}\{z_1\}\operatorname{Re}\{z_2\}) . \quad (11.11)$$

Nel caso del prodotto, la notazione esponenziale facilita molto la scrittura. Infatti

$$z = z_1z_2 = |z_1|e^{j\varphi_1}|z_2|e^{j\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} . \quad (11.12)$$

11.2.5 Razionalizzazione del rapporto di due numeri complessi

DATI DUE NUMERI COMPLESSI z_1 e z_2 , il loro rapporto $z = \frac{z_1}{z_2}$ può essere scritto agevolmente in forma esponenziale ottenendo

$$z = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} . \quad (11.13)$$

Se si usa invece la rappresentazione con parte reale e parte immaginaria

$$z = \frac{\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\}}{\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}} , \quad (11.14)$$

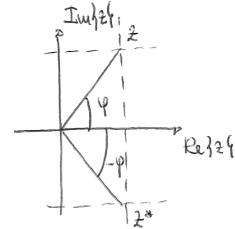


Figura 11.2: Un numero complesso z e il suo complesso coniugato z^* .

per essere semplificato necessita prima la rimozione del numero complesso al denominatore. Si procede *razionalizzando* in questo modo

$$z = \frac{\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\}}{\operatorname{Re}\{z_2\} + j\operatorname{Im}\{z_2\}} \frac{z_2^*}{z_2^*}, \quad (11.15)$$

che restituisce

$$z = \frac{(\operatorname{Re}\{z_1\} + j\operatorname{Im}\{z_1\})(\operatorname{Re}\{z_2\} - j\operatorname{Im}\{z_2\})}{\operatorname{Re}^2\{z_2\} + \operatorname{Im}^2\{z_2\}}. \quad (11.16)$$

A questo punto è possibile calcolare il prodotto tra complessi al numeratore dividendo poi parte reale e parte immaginaria del risultato per il denominatore che è adesso reale.

Ad esempio

$$z = \frac{1+2j}{1-j} = \frac{(1+2j)(1+j)}{2} = \frac{-1+3j}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j. \quad (11.17)$$

11.3 Verso l'analisi fasoriale

PER INTRODURRE L'UTILITÀ DELL'ANALISI FASORIALE, proviamo a vedere come si dovrebbe calcolare l'integrale particolare $x_{IP}(t)$ per l'equazione 10.3 qualora si avesse $u(t) = \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ con $\varphi = 0$. Questo caso è di notevole importanza dato che i sistemi di alimentazione di quasi tutti gli utilizzatori della nostra vita quotidiana (e non) sono in *continua* o in *alternata*. Nel primo caso si studiano quindi circuiti dinamici con ingressi costanti (*regime stazionario*), nel secondo caso si studiano circuiti con ingressi sinusoidali alla pulsazione ω (*regime sinusoidale permanente*) ¹.

In base alla 10.6 e alla tabella 10.7 sappiamo che ci dobbiamo aspettare

$$x(t; k, t_0) = ke^{\lambda(t-t_0)} + \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t) \quad (11.18)$$

ed è necessario identificare il valore di β e γ . Per farlo dobbiamo sostituire $x_{IP}(t) = \beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)$ nella 10.3 ottenendo così

$$\frac{d}{dt} [\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)] = \lambda[\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)] + \alpha \cos(\omega t). \quad (11.19)$$

Calcolando la derivata rispetto al tempo si ottiene

$$-\beta\omega \sin(\omega t) + \gamma\omega \cos(\omega t) = \lambda\beta \cos(\omega t) + \lambda\gamma \sin(\omega t) + \alpha \cos(\omega t). \quad (11.20)$$

Dato che l'identità deve essere verificata per ogni istante di tempo t , si deve avere

$$\begin{cases} \beta\omega + \lambda\gamma = 0 \\ \gamma\omega - \lambda\beta - \alpha = 0 \end{cases} \quad (11.21)$$

¹ Si noti che affinché un circuito ammetta una soluzione di regime stazionario o di regime sinusoidale è necessario che sia *asintoticamente stabile* ovvero che la sua soluzione transitoria si esaurisca al tendere del tempo all'infinito. Finora (cfr. capitolo 10) abbiamo verificato che ciò avviene quando la frequenza libera λ è negativa. In circuiti che contengono però più elementi dinamici, e che quindi non siano in generale caratterizzati dalla presenza di una sola variabile di stato, la stabilità è garantita se la parte reale di tutte le variabili di stato (in generale complesse) presenti è negativa. Nell'ambito di questo corso non avremo modo di studiare come queste frequenze libere si calcolano e ci limiteremo ad assumere che, quando verrà specificata l'ipotesi di *circuito che evolve in regime sinusoidale*, tale ipotesi sia coerente con l'esistenza di un regime, ovvero con la stabilità del circuito.

da cui $\gamma = -\frac{\omega}{\lambda}\beta$ che, sostituito nella seconda equazione, fornisce
 $-\left(\frac{\omega^2}{\lambda} + \lambda\right)\beta = \alpha$ ovvero

$$\begin{cases} \beta = -\frac{\alpha\lambda}{\omega^2 + \lambda^2} \\ \gamma = \frac{\alpha\omega}{\omega^2 + \lambda^2} \end{cases} \quad (11.22)$$

e quindi

$$x_{IP}(t) = [\omega \sin(\omega t) - \lambda \cos(\omega t)] \frac{\alpha}{\omega^2 + \lambda^2} . \quad (11.23)$$

La soluzione della 10.3 quindi, se $\lambda < 0$ e $u(t) = \alpha \cos(\omega t)$, tende alla 11.23 per t che tende all'infinito (ovvero quando il transitorio si sarà esaurito).

Considerazioni di base di carattere trigonometrico permettono di riscrivere la 11.23 come

$$x_{IP}(t) = \rho(\lambda, \omega, \alpha) \cos(\omega t + \psi(\lambda, \omega, \alpha)) . \quad (11.24)$$

Inoltre, se si scegliesse $\varphi \neq 0$, si avrebbe

$$x_{IP}(t) = \rho(\lambda, \omega, \alpha, \varphi) \cos(\omega t + \psi(\lambda, \omega, \alpha, \varphi)) . \quad (11.25)$$

Se pensiamo alla 10.3 come all'equazione di stato di una circuito RC o RL del primo ordine non degenere, l'integrale particolare dipende quindi dai parametri che specificano l'ingresso (ω, α e φ) del circuito e dalla struttura di \mathcal{N}_R attraverso λ .

L'analisi fasoriale ci fornirà un metodo efficace per ricavare la soluzione di regime di circuiti in cui gli ingressi (sorgenti impressive di corrente e/o tensione) possono essere $M \geq 1$ e hanno tutti la medesima pulsazione ω e una struttura del tipo $\alpha_k \cos(\omega t + \varphi_k)$ per $k = 1, \dots, M$. I circuiti in questione, oltre che dalle sorgenti impressive, saranno per noi costituiti da N -terminali lineari, dinamici e adinamici, tempo-invarianti. I circuiti dinamici visti finora ne sono un caso particolare con un'unica sorgente e un unico bipolo dinamico lineare.

11.4 Una considerazione importante

SENZA ESSERSI FATTE TROPPE DOMANDE, nei precedenti paragrafi (10 e 11.3) abbiamo incluso, all'interno del nostro modello circuitale, componenti dinamici e ingressi tempo-varianti. In realtà, quando abbiamo introdotto le leggi di Kirchhoff per le correnti e le tensioni (cfr. paragrafi 1.14 e 1.6), abbiamo supposto di lavorare in condizioni stazionarie (e non è questo il caso) o in condizioni quasi-stazionarie. Affinché quest'ultima ipotesi sia verificata, è necessario che le dimensioni fisiche dei circuiti che studiamo siano molto più grandi della

più piccola lunghezza d'onda l_{min} associata alle grandezze elettriche del circuito stesso. Dal momento che $l_{min} = \frac{c}{f_{max}}$, dove $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$ è la velocità della luce (nel vuoto) e f_{max} è la frequenza più alta presente nello spettro dei segnali di interesse, possiamo verificare, caso per caso, in che misura l'ipotesi di quasi-stazionarietà è soddisfatta.

Se consideriamo ad esempio un calcolatore dei primi anni '90, che funzionava con frequenza massima del processore pari a 25MHz, scopriamo che $l_{min} = 3 \cdot 10^8 / 25 \cdot 10^6 = 12\text{m}$, dimensione sicuramente molto più grande del calcolatore in esame. Per questo tipo di circuito complesso, quindi, le leggi di Kirchhoff possono essere utilizzate in modo sicuro. I processori di oggi, invece, con frequenze massime di 4GHz hanno una $l_{min} = 0.075\text{m}$. Queste velocità, quindi, non possono essere raggiunte dai segnali sulla scheda madre dei nostri calcolatori, a causa delle loro dimensioni. Non varrebbe per questi circuiti l'ipotesi di quasi-stazionarietà e verrebbe quindi meno il modello a parametri concentrati. Anche i processori, comunque, più piccoli dei package da $0.0375\text{m} \times 0.0375\text{m}$ in cui sono alloggiati, vanno trattati con molta cura perché il limite di validità dell'ipotesi di quasi-stazionarietà è per essi molto vicino.

11.5 I fasori

LA GENERICA FUNZIONE $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ è rappresentata in figura 11.3. $T [\text{s}]$ è il periodo della funzione, $\omega = \frac{2\pi}{T} [\text{rad s}^{-1}]$ è la pulsazione, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} [\text{Hz}]$ è la frequenza, $\varphi [\text{rad}]$ è la fase e X_m è l'ampiezza.

Dato che è possibile scrivere

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right) \quad (11.26)$$

la fase φ rappresenta una traslazione della funzione $x(t)$ sull'asse t . Se $\varphi < 0$ la funzione $x(t)$ si dice in *ritardo* e se $\varphi > 0$ la funzione $x(t)$ si dice in *anticipo*.

Ad esempio, se $\varphi = -\pi/2$, $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{-\pi/2}{2\pi/T} = -\frac{T}{4}$ e infatti la funzione $\cos(\omega t - \pi/2) = \sin(\omega t)$ è in ritardo di $T/4$ rispetto a $\cos(\omega t)$. Analogamente, se $\varphi = \pi/2$, $\cos(\omega t + \pi/2) = -\sin(\omega t)$ è in anticipo di $T/4$ rispetto a $\cos(\omega t)$.

QUELLO CHE FAREMO INTRODUCENDO IL CONCETTO di **fasore** è stabilire un *corrispondenza biunivoca* tra una funzione del tipo $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ e un numero complesso \bar{x} . Cercheremo quindi una relazione biunivoca tra un insieme di funzioni della variabile t (dominio del tempo) e i numeri complessi.

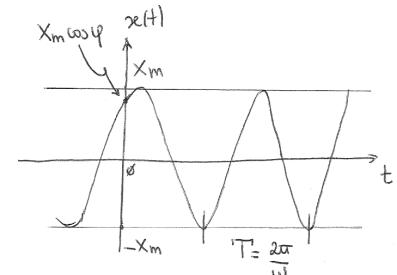


Figura 11.3: Andamento nel tempo della generica funzione $X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

SI CONSIDERI IL NUMERO COMPLESSO

$$X_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underbrace{X_m e^{j\varphi}}_{\bar{x}} e^{j\omega t} = X_m \cos(\omega t + \varphi) + j X_m \sin(\omega t + \varphi) . \quad (11.27)$$

Risulta evidente che

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{\bar{x} e^{j\omega t}\} \quad (11.28)$$

e definiamo quindi la relazione tra dominio del tempo e dominio dei numeri complessi nel modo seguente

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) \Leftrightarrow X_m e^{j\varphi} = \bar{x} . \quad (11.29)$$

Data una funzione $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ le associamo dunque il numero complesso (*fasore*) $X_m e^{j\varphi}$ e per passare da quest'ultimo alla funzione originaria è sufficiente l'operazione 11.28.

PER APPROFONDIRE LA RELAZIONE tra un fasore e la funzione sinusoidale ad esso associata, consideriamo il numero complesso $X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. Sul piano complesso esso corrisponde ad un punto che ruota attorno all'origine $(0,0)$ con velocità angolare ω (cfr. figura 11.4). Ad ogni istante di tempo t , la sua parte reale (ovvero la sua proiezione sull'asse orizzontale) è corrispondente al punto $(X_m \cos(\omega t + \varphi), 0)$ la cui ascissa si muove quindi sinusoidalmente nell'intervallo $[-X_m, X_m]$. Per $t = 0$ è pari a $|\bar{x}| \cos(\varphi)$.

LA CORRISPONDENZA TRA FUNZIONI SINUSOIDALI E FASORI gode di tre importanti proprietà

- **unicità**,
- **linearità**,
- **derivazione**.

La proprietà di *unicità* afferma che date due funzioni $x_1(t) = X_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ e $x_2(t) = X_{m_2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ esse sono uguali se e solo se $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Da qui si stabilisce che la corrispondenza tra funzioni sinusoidali e fasori è *biunivoca*.

La proprietà di *linearità* afferma che date due funzioni $x_1(t) = X_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ e $x_2(t) = X_{m_2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ e due costanti reali a_1 ed a_2 , il fasore \bar{x} associato alla funzione $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ è pari a $a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2$. La proprietà derivata dalla linearità degli operatori $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ e $\operatorname{Im}\{\cdot\}$.

La proprietà di *derivazione* afferma che il fasore \bar{y} associato alla funzione $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$, con $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, è pari a $j\omega \bar{x}$. Infatti, possiamo scrivere,

$$y(t) = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi) = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) . \quad (11.30)$$

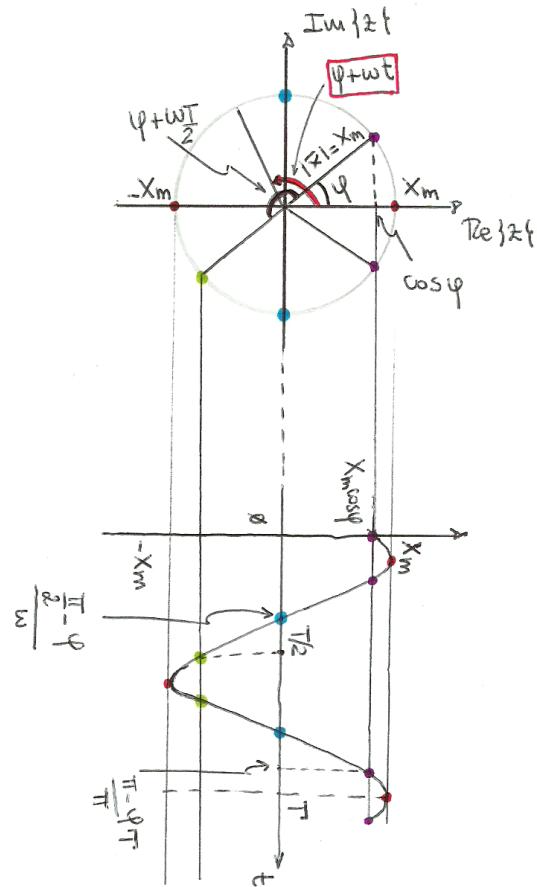


Figura 11.4: La relazione grafica tra il vettore rotante $X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ e al funzione $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Il fasore associato a $y(t)$ sarà dunque $\omega X_m e^{\text{j}(\varphi + \pi/2)} = \omega X_m e^{\text{j}\varphi} e^{\text{j}\pi/2} = \text{j}\omega X_m e^{\text{j}\varphi}$, ovvero $\text{j}\omega \bar{x}$.

LE PROPRIETÀ DI CUI GODONO I FASORI CI PERMETTONO di enunciare il **metodo dei fasori** o **metodo simbolico** per risolvere un circuito costituito da N -terminali lineari e sorgenti impressive di tipo sinusoidale, isofrequenziali (stessa ω), che ammetta il regime sinusoidale permanente:

*tutte le tensioni e le correnti del circuito vengono rappresentate mediante un opportuno fasore e l'analisi del circuito dinamico si riduce all'analisi di un equivalente circuito adinamico a parametri complessi. Quindi non si risolvono più equazioni differenziali lineari, ma equazioni lineari algebriche a coefficienti complessi le cui incognite sono i fasori corrispondenti alle tensioni e alle correnti incognite. Tali equazioni derivano dalla topologia del circuito (KCL e KVL) e dalle equazioni costitutive (riscritte nel dominio dei fasori) dei componenti che lo costituiscono.*²

PER ESEMPLIFICARE COME PROCEDERE si consideri dunque il circuito in figura 11.5 con $e(t) = E \cos \omega t$ che evolve in regime sinusoidale. L'equazione di stato che regola la sua dinamica è

$$L \frac{di}{dt} = e(t) - Ri , \quad (11.31)$$

che riscriviamo come

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t) . \quad (11.32)$$

Se ad ogni variabile elettrica associamo il corrispondente fasore possiamo riscrivere l'equazione di stato come un'equazione algebrica a coefficienti complessi. Infatti, introducendo

$$\begin{aligned} e(t) &\leftrightarrow \bar{e} = E_m \\ i(t) &\leftrightarrow \bar{i} \\ L \frac{di}{dt} &\leftrightarrow \text{j}\omega \bar{i} \end{aligned} , \quad (11.33)$$

L'equazione di stato diventa

$$(\text{j}\omega L + R)\bar{i} = E_m , \quad (11.34)$$

da cui

$$\bar{i} = \frac{E_m}{R + \text{j}\omega L} = \frac{E_m(R - \text{j}\omega L)}{\omega^2 L^2 + R^2} . \quad (11.35)$$

Per ricavare la corrente $i(t)$ è necessario calcolare

$$\text{Re}\{\bar{i}e^{\text{j}\omega t}\} = \text{Re} \left\{ \frac{E_m(R - \text{j}\omega L)}{\omega^2 L^2 + R^2} (\cos \omega t + \text{j} \sin \omega t) \right\} , \quad (11.36)$$

² Supponiamo che il circuito in esame sia costituito da l lati e che le sue tensioni e correnti di lato siano tutte del tipo $(k=1, \dots, l) v_k(t) = V_k \cos(\omega t + \varphi_{v_k})$ e $i_k(t) = I_k \cos(\omega t + \varphi_{i_k})$, rispettivamente. Allora ad ogni lato associamo una coppia di fasori \bar{v}_k e \bar{i}_k . Le KCL ad ogni nodo saranno del tipo $\sum_h \pm i_h(t)$ e le KVL per ogni maglia del tipo $\sum_h \pm v_h(t)$. Sfruttando le proprietà di unicità e linearità dei fasori esse corrisponderanno alle equazioni lineari complesse $\sum_h \pm \bar{i}_k$ e $\sum_h \pm \bar{v}_k$.

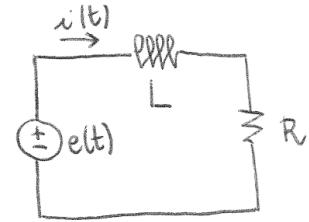


Figura 11.5: La frequenza libera del circuito è $\lambda = -R/L$ quindi il transitorio si esaurisce ed è ammesso un regime.

che restituisce

$$i(t) = \frac{E_m}{\omega^2 L^2 + R^2} (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) . \quad (11.37)$$

Analogamente, riscrivendo $\bar{i} = |\bar{i}| e^{j\varphi_{\bar{i}}}$, con $|\bar{i}| = \frac{E_m}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ e $\varphi_{\bar{i}} = -\text{atan} \frac{\omega L}{R}$,

$$i(t) = \text{Re}\{|\bar{i}| e^{j\varphi_{\bar{i}}} e^{j\omega t}\} = |\bar{i}| \cos(\omega t + \varphi_{\bar{i}}) . \quad (11.38)$$

Dalla 11.37 alla 11.38, e viceversa, si passa in ogni caso attraverso opportune semplificazioni trigonometriche.

IN GENERALE, NON È TUTTAVIA NECESSARIO scrivere l'equazione di stato e poi trasformarla nel dominio dei fasori ma si possono scrivere direttamente le equazioni algebriche complesse che descrivono il funzionamento del circuito. Per fare ciò vediamo come si trasformano, nel dominio dei fasori, le equazioni dei componenti che conosciamo.

Per quanto riguarda il **resistore** (cfr. paragrafo 3.5.1) la relazione costitutiva $v = Ri$ diventa

$$\bar{v} = R\bar{i} . \quad (11.39)$$

Il componente è adinamico e quindi non presenta sfasamento tra la tensione e la corrente descrittiva infatti $|\bar{v}| e^{j\varphi_{\bar{v}}} = R|\bar{i}| e^{j\varphi_{\bar{i}}}$ e $|\bar{v}| = R|\bar{i}|$ e $\varphi_{\bar{v}} = \varphi_{\bar{i}}$.

Il **condensatore** (cfr. paragrafo 9.1), invece, è descritto dall'equazione costitutiva $i = C \frac{dv}{dt}$ che, nel dominio dei fasori, usando la proprietà di derivazione, diventa

$$\bar{i} = j\omega C\bar{v} , \quad (11.40)$$

da cui $|\bar{i}| e^{j\varphi_{\bar{i}}} = \omega C |\bar{v}| e^{j\varphi_{\bar{v}}} = \omega C |\bar{v}| e^{j(\varphi_{\bar{v}} + \pi/2)}$. Il modulo del fasore \bar{i} varia dunque con la pulsazione ω e la sua fase è in *anticipo* di $\pi/2$ rispetto a quella del fasore della tensione v . Per ω che tende a zero, il condensatore si comporta come un cortocircuito dato che $|\bar{i}|$ tende a zero. Viceversa, per ω che tende all'infinito, $|\bar{v}| = |\bar{i}|/\omega$ tende a zero e quindi il condensatore si comporta come un cortocircuito.

L'**induttore** (cfr. paragrafo 9.2), è descritto dall'equazione costitutiva $v = L \frac{di}{dt}$ che, nel dominio dei fasori, diventa

$$\bar{v} = j\omega L\bar{i} , \quad (11.41)$$

da cui $|\bar{v}| e^{j\varphi_{\bar{v}}} = \omega L |\bar{i}| e^{j\varphi_{\bar{i}}} = \omega L |\bar{i}| e^{j(\varphi_{\bar{i}} + \pi/2)}$. Il modulo del fasore \bar{v} varia dunque con la pulsazione ω e la sua fase è in *anticipo* di $\pi/2$ rispetto a quella del fasore della corrente \bar{i} . Per ω che tende a zero e all'infinito il comportamento dell'induttore è il duale di quello del condensatore: si comporta, rispettivamente, come un cortocircuito ($|\bar{v}|$ tende a zero) e come un circuito aperto ($|\bar{i}| = |\bar{v}|/\omega$ tende a zero).

Per quanto riguarda i **doppi bipoli lineari** (cfr. paragrafo 6.1) descritti mediante matrice \mathcal{R} , \mathcal{G}, \mathcal{H} e \mathcal{H}' , l'equivalente descrizione nel dominio dei fasori si ottiene semplicemente sostituendo alle grandezze elettriche alle porte $v_1(t)$, $v_2(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$ i fasori corrispondenti e ricordando la proprietà di linearità dei fasori. Così facendo, ad esempio per la rappresentazione con matrice \mathcal{R} , si ottiene

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix}. \quad (11.42)$$

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO IN FIGURA 11.6, se ne vuole calcolare l'andamento della tensione $v_C(t)$ assumendo che esso stia funzionando in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

Il bilancio delle correnti al nodo 1 si traduce in termini fasoriali nell'equazione

$$\bar{i}_1 + \bar{i}_L = A, \quad (11.43)$$

essendo $A \in \mathbb{R}$ il fasore dell'ingresso $a(t)$. Analogamente, al nodo 2 possiamo scrivere

$$\bar{i}_L = \frac{\bar{v}_C}{R_2} + \bar{i}_C = \frac{\bar{v}_C}{R_2} + j\omega C \bar{v}_C = \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) \bar{v}_C. \quad (11.44)$$

Dalla KVL esterna possiamo scrivere

$$R_1 \bar{i}_1 - \bar{v}_L - \bar{v}_C = R_1(A - \bar{i}_L) - j\omega L \bar{i}_L - \bar{v}_C = 0, \quad (11.45)$$

ovvero

$$\left((R_1 + j\omega L) \left(\frac{1}{R_2} + j\omega C \right) + 1 \right) \bar{v}_C = R_1 A. \quad (11.46)$$

Si può quindi ricavare il fasore della tensione $v_C(t)$ come

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= \frac{R_1 R_2 A}{R_2 + (R_1 + j\omega L)(1 + j\omega C R_2)} \\ &= \frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) + j\omega(L + C R_1 R_2)} \end{aligned} \quad (11.47)$$

Razionalizzando il risultato possiamo riscrivere come

$$\bar{v}_C = \frac{R_1 R_2 A [(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) - j\omega(L + C R_1 R_2)]}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2)^2 + \omega^2(L + C R_1 R_2)^2}. \quad (11.48)$$

L'andamento cercato per la tensione ai capi del condensatore è quindi

$$\begin{aligned} \bar{v}_C(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_C e^{j\omega t}\} \\ &= \chi [(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2) \cos \omega t + \omega(L + C R_1 R_2) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (11.49)$$

dove $\chi = \frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2 - \omega^2 L C R_2)^2 + \omega^2(L + C R_1 R_2)^2}$.

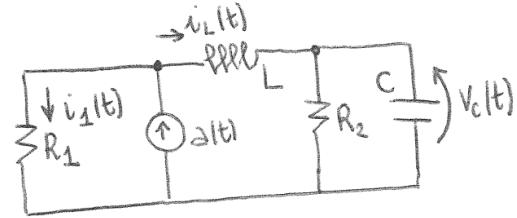


Figura 11.6: Il circuito con un generatore indipendente di corrente di tipo sinusoidale $a(t) = A \cos \omega t$, contiene due elementi dinamici e quindi, in generale, è caratterizzato da due frequenze libere λ_1 e λ_2 . Assumiamo che ammetta il regime sinusoidale, ovvero che entrambe le frequenze libere appartengano al semipiano sinistro del piano complesso, in altre parole $\operatorname{Re}\{\lambda_1 < 0\}$ e $\operatorname{Re}\{\lambda_2 < 0\}$.

11.6 Impedenza e ammettenza

NEL PARAGRAFO PRECEDENTE, dopo aver introdotto il concetto di fasore, abbiamo visto come le equazioni costitutive di alcuni componenti di base vengono trasformate dal dominio del tempo al dominio dei fasori. Fondamentalmente abbiamo fatto ciò per i bipoli lineari impressivi e non impressivi. Per i primi, semplicemente dobbiamo convertire la forma d'onda sinusoidale che li caratterizza nel corrispondente fasore, per i secondi, invece, si è trovato un legame di proporzionalità attraverso una grandezza, in generale complessa, tra il fasore della tensione e quello della corrente descrittive del bipolo stesso.

Ricapitolando, nel caso del resistore, del condensatore e dell'induttore, abbiamo scritto, rispettivamente,

$$\begin{aligned}\bar{v}_R &= R\bar{i}_R \\ \bar{v}_C &= \frac{1}{j\omega C} \bar{i}_C \quad , \\ \bar{v}_L &= j\omega L \bar{i}_L\end{aligned}\tag{11.50}$$

dove è facile verificare che le dimensioni fisiche di R , $\frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$ e $j\omega L$ sono Ω . A ciascuno dei tre bipoli suddetti possiamo quindi assegnare, in regime sinusoidale, una grandezza complessa che rappresenta il rapporto tra il fasore della tensione descrittiva e quello della corrente descrittiva e che prende il nome di **impedenza**. Tale grandezza si indica tipicamente con $Z(j\omega)$ e³

$$\begin{aligned}Z_R(j\omega) &= R \in \mathbb{R} \\ Z_C(j\omega) &= \frac{1}{j\omega C} \quad . \\ Z_L(j\omega) &= j\omega L\end{aligned}\tag{11.51}$$

Se si considerasse invece il rapporto tra il fasore della corrente descrittiva e quello della tensione descrittiva si definirebbe l'**ammettenza** $Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$, misurata in Ω^{-1} ,

$$\begin{aligned}Y_R(j\omega) &= \frac{1}{R} \in \mathbb{R} \\ Y_C(j\omega) &= j\omega C \quad . \\ Y_L(j\omega) &= \frac{1}{j\omega L}\end{aligned}\tag{11.52}$$

³ Si noti che $Z(j\omega)$ non è un fasore e quindi lo indicheremo senza la barra. Non esiste infatti il suo corrispettivo nel dominio del tempo e quindi non c'è ambiguità nella notazione.

IL CONCETTO DI IMPEDENZA E DI AMMETTENZA PUÒ ESSERE NATURALMENTE ESTESO a bipoli composti costituiti dall'interconnessione

di N -terminali lineari tempo-invarianti, che, definiti ai morsetti su base tensione o su base corrente, sono tali da ammettere il regime sinusoidale.⁴ In altre parole, supponendo che un bipolo composito sia definito su base tensione, il circuito che si ottiene connettendo ai suoi morsetti un corto circuito deve essere caratterizzato da frequenze libere tutte con parte reale negativa. Analogamente per la base corrente, deve accadere lo stesso per il bipolo composito i cui morsetti vengano lasciati appesi, ovvero siano connessi ad un circuito aperto.

Nelle ipotesi suddette si definiscono impedenza e ammettenza il rapporto tra il fasore della tensione e della corrente o della corrente e della tensione, rispettivamente, ai morsetti del bipolo composito. Se il bipolo è definito solo su base corrente è possibile definire solo la sua impedenza $Z(j\omega)$. Viceversa, se è definito solo su base tensione possiamo definire solo la sua ammettenza $Y(j\omega)$. Qualora esistano entrambe le basi è possibile definire sia l'impedenza sia l'ammettenza e varrà $Z(j\omega) = 1/Y(j\omega)$.

Impedenza ed ammettenza sono, in generale, due numeri complessi e, come tali, sono caratterizzati da una parte reale e da una parte immaginaria. In particolare

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) , \quad (11.53)$$

dove $R(\omega)$ e $X(\omega)$ sono, rispettivamente, la **resistenza** e la **reattanza**, e

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) , \quad (11.54)$$

dove $G(j\omega)$ e $B(j\omega)$ sono, rispettivamente, la **conduttanza** e la **suscettanza**.

IN BASE AL SEGNO DELLA REATTANZA, valutato per un particolare valore di $\omega = \hat{\omega}$, si classificano le impedenze nel modo seguente

- $X(\hat{\omega}) < 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **capacitivo**, come il condensatore per il quale $X_C(\omega) = -\frac{1}{\omega C} < 0$ per ogni ω ;
- $X(\hat{\omega}) = 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **resistivo**, come il resistore per il quale $X_R(\omega) = 0$ per ogni ω ;
- $X(\hat{\omega}) > 0$, l'impedenza, per $\omega = \hat{\omega}$, si dice di tipo **induttivo**, come l'induttore per il quale $X_L(\hat{\omega}) = \omega L > 0$ per ogni ω .

11.7 Doppi-bipoli con matrice di rappresentazione complessa

INTRODUCENDO IL MODELLO DEI COMPONENTI ELEMENTARI in regime fasoriale (cfr. paragrafo 11.5) si è accennato anche al modello dei doppi-bipoli lineari e statici introdotti nel capitolo 6. Tuttavia, in

⁴ Si noti che i bipoli composti per cui si definisce l'ammettenza e l'impedenza non contengono generatori indipendenti di tensione e corrente.

regime sinusoidale, risulta semplice trattare anche doppi-bipoli lineari dinamici, ovvero doppi-bipoli le cui equazioni costitutive contengano derivate rispetto al tempo (tralasciamo per semplicità il caso in cui siamo presenti integrali) delle loro variabili descrittive. Ovviamente, affinché ciò sia fattibile, dobbiamo supporre che tali doppi-bipoli dinamici, siano inseriti all'interno di un circuito il cui comportamento complessivo (doppi-bipoli inclusi) sia tale da garantire l'esistenza del regime sinusoidale.

Tali doppi bipoli saranno descritti mediante matrici \mathcal{Z} (equivalente della matrice \mathcal{R}), \mathcal{Y} (equivalente della matrice \mathcal{G}), \mathcal{H} , \mathcal{H}' e \mathcal{T} i cui elementi saranno in generale numeri complessi funzione della ω di riferimento.

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il doppio-bipolo in figura 11.7. Se assumiamo che sia definito su base corrente, possiamo ricavare le sue equazioni costitutive nel dominio del tempo nella forma

$$\begin{aligned} v_1(t) - L \frac{d}{dt} i_1(t) - R(i_1(t) + i_2(t)) &= 0 \\ i_2(t) - C \frac{d}{dt} [v_2(t) - R(i_1(t) + i_2(t))] &= 0 \end{aligned} \quad (11.55)$$

Passando ai fasori

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 - j\omega L \bar{i}_1 - R(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) &= 0 \\ \bar{i}_2 - j\omega C [\bar{v}_2 - R(\bar{i}_1 + \bar{i}_2)] &= 0 \end{aligned} \quad , \quad (11.56)$$

in forma matriciale possiamo scrivere

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R + j\omega L & R \\ R & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Z}} \begin{bmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \end{bmatrix} . \quad (11.57)$$

11.8 Adesso siamo pronti per ...

... ESTENDERE AI CIRCUITI IN REGIME SINUSOIDALE, descritti con il metodo fasoriale, molti risultati che abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti per l'analisi di circuiti il cui grafo sia connesso e siano composti da N -terminali lineari, tempo-invarianti e adinamici, e generatori indipendenti di corrente e tensione. Poichè nell'ipotesi di regime sinusoidale isofrequenziale si è visto che il modello matematico dei circuiti, il cui grafo sia connesso, composti da N -terminali lineari, tempo-invarianti, adinamici e dinamici, e generatori indipendenti di corrente e tensione (sinusoidali e isofrequenziali) è lo stesso di quello usato per descrivere la classe sopracitata di circuiti

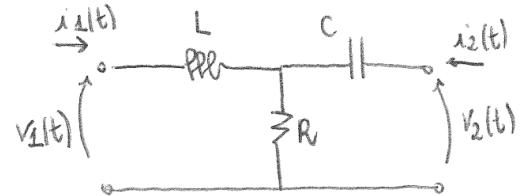


Figura 11.7: Il doppio bipolo è dinamico e ipotizziamo che ammetta la base corrente ($i_1(t), i_2(t)$).

(solo avremo a che fare adesso con coefficienti in generale complessi), possiamo naturalmente estendere i seguenti risultati

- analisi topologica del circuito in termine di tensioni e correnti associate ad ogni lato, potenziali di nodo, maglie e tagli linearmente indipendenti, matrice di incidenza, analisi nodale, etc. Si noti che correnti, tensioni e potenziali sono adesso fasori, cioè numeri complessi;
- connessione in serie e parallelo di impedenze e ammettenze con relativi partitori di corrente e tensione;
- sovrapposizione degli effetti;
- teoremi di Thevénin e Norton.

11.8.1 Esempio: connessione in serie di impedenze e partitore di tensione

CONSIDERIAMO IL BIPOLO COMPOSITO IN FIGURA 11.8. Si ricava banalmente che $\bar{v} = \bar{v}_R + \bar{v}_C + \bar{v}_L$ e

$$\bar{v} = R\bar{i} + \frac{1}{j\omega C}\bar{i} + j\omega L\bar{i} = \underbrace{\left(R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)}_{Z_{eq}(j\omega)} \bar{i} . \quad (11.58)$$

Come nel caso dei resistori, quindi, l'impedenza equivalente ad M impedenze $Z_k(j\omega)$ connesse in serie è pari alla somma delle impedenze, cioè $Z_{eq}(j\omega) = \sum_{k=1}^M Z_k(j\omega)$.

Analogamente al risultato presentato per i resistori (cfr. paragrafo 3.7.2), il fasore \bar{v}_j , riferito alla j -esima impedenza che costituisce la serie, è pari a

$$\bar{v}_j = \frac{Z_j(j\omega)}{\sum_{k=1}^M Z_k(j\omega)} \bar{v} . \quad (11.59)$$

11.8.2 Esempio: connessione in parallelo di ammettenze e partitore di corrente

CONSIDERIAMO IL BIPOLO COMPOSITO IN FIGURA 11.9. Si ricava banalmente che $\bar{i} = \bar{i}_R + \bar{i}_C$ e

$$\bar{i} = G\bar{v} + j\omega C\bar{v} = \underbrace{(G + j\omega C)}_{Y_{eq}(j\omega)} \bar{v} . \quad (11.60)$$

Come nel caso dei resistori, quindi, l'ammettenza equivalente ad M ammettenze $Y_k(j\omega)$ connesse in parallelo è pari alla somma delle ammettenze, cioè $Y_{eq}(j\omega) = \sum_{k=1}^M Y_k(j\omega)$.

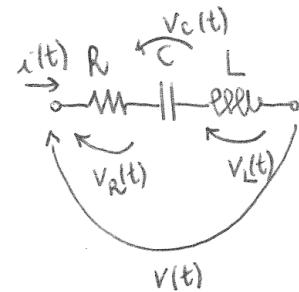


Figura 11.8: Resistore, condensatore e induttore sono connessi in serie poiché attraversati dalla stessa corrente (cfr. paragrafo 3.7.1).

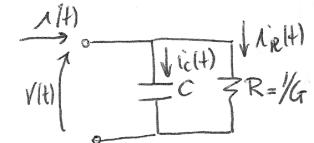


Figura 11.9: Resistore e condensatore sono connessi in parallelo poiché hanno ai morsetti la medesima tensione (cfr. paragrafo 3.7.3).

Analogamente al risultato presentato per i resistori (cfr. paragrafo 3.7.4), il fasore \bar{i}_j , riferito alla j -esima ammettenza che costituisce il parallelo, è pari a

$$\bar{i}_j = \frac{Y_j(j\omega)}{\sum_{k=1}^M Y_k(j\omega)} \bar{i} . \quad (11.61)$$

Nel caso di due sole ammettenze $Y_1(j\omega) = \frac{1}{Z_1(j\omega)}$ e $Y_2(j\omega) = \frac{1}{Z_2(j\omega)}$ connesse in parallelo, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \bar{i}_1 &= \frac{Z_2(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \bar{i} \\ \bar{i}_2 &= \frac{Z_1(j\omega)}{Z_1(j\omega) + Z_2(j\omega)} \bar{i} \end{aligned} . \quad (11.62)$$

11.8.3 Esempio: un circuito con l'amplificatore operazionale ideale

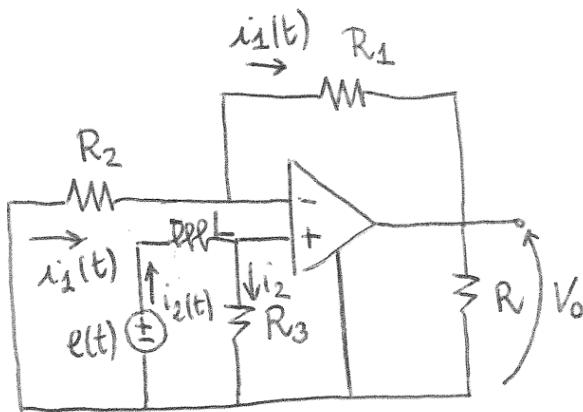


Figura 11.10: L'amplificatore operazionale è assunto ideale e funziona come un nullore (cfr. paragrafo 6.7.2).

IL CIRCUITO IN FIGURA 11.10 FUNZIONA IN REGIME SINUSOIDALE, $e(t) = E \cos(\omega t)$ e l'amplificatore operazionale è assunto ideale. Determinare la tensione $v_o(t)$.

Il fasore associato al generatore $e(t)$ è il numero reale E . Utilizzando la KLV esterna che interessa R_1 , R_2 , ed R possiamo scrivere $\bar{v}_o = -R_1 \bar{i}_1 - R_2 \bar{i}_1$, dato che la corrente in R_1 è uguale a quella in R_2 (si ricordi che i terminali dell'amplificatore operazionale ideale non fanno passare corrente). Ricaviamo quindi

$$\bar{v}_o = -(R_1 + R_2) \bar{i}_1 . \quad (11.63)$$

Dalla maglia che interessa R_2 , R_3 , e la caduta (nulla) tra i morsetti $-$ e $+$ dell'amplificatore operazionale ideale, possiamo scrivere $R_3 \bar{i}_2 + R_2 \bar{i}_1 = 0$, ovvero

$$\bar{i}_2 = -\frac{R_2}{R_3} \bar{i}_1 . \quad (11.64)$$

Se consideriamo adesso la maglia composta dal generatore di tensione, l'induttore, la caduta (nulla) tra i morsetti α + e β dell'amplificatore operazionale ideale e R_2 , possiamo scrivere $E - j\omega L\bar{t}_2 + R_2\bar{t}_1 = 0$ ovvero

$$E + j\omega L \frac{R_2}{R_3} \bar{t}_1 + R_2 \bar{t}_1 = E - \left(R_2 + j\omega L \frac{R_2}{R_3} \right) \frac{\bar{v}_o}{R_1 + R_2} = 0 . \quad (11.65)$$

Il fasore della tensione $v_o(t)$ sarà dunque

$$\bar{v}_o = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2(R_3 + j\omega L)} E . \quad (11.66)$$

Per ricavare la forma d'onda cercata si deve da ultimo valutare

$$v_o(t) = \operatorname{Re}\{\bar{v}_o e^{j\omega t}\} :$$

$$\begin{aligned} v_o(t) &= \frac{R_3(R_1 + R_2)E}{R_2(R_3^2 + \omega^2 L^2)} \operatorname{Re}\{(R_3 - j\omega L)(\cos \omega t + j \sin \omega t)\} \\ &= \frac{R_3(R_1 + R_2)E}{R_2(R_3^2 + \omega^2 L^2)} (R_3 \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) \end{aligned} . \quad (11.67)$$

11.8.4 Esempio: circuiti equivalenti di Thevénin e Norton

I REGIME SINUSOIDALE, utilizzando i fasori, le equazioni costitutive dei circuiti equivalenti di Thevénin e Norton introdotte nel paragrafo 3.9, diventano, rispettivamente,

$$\bar{v} = Z_{th}(j\omega)\bar{t} + \bar{E}_{th}(j\omega) \quad (11.68)$$

e

$$\bar{t} = G_{nr}(j\omega)\bar{v} + \bar{A}_{nr}(j\omega) . \quad (11.69)$$

I due circuiti equivalenti necessitano, al solito, dell'opportuna controllabilità del bipolo composito a cui si riferiscono: base corrente per il circuito di Thevénin e base tensione per il circuito di Norton. Sarà quindi possibile ricavare i parametri di tali circuiti direttamente imponendo i fasori \bar{t} e \bar{v} , per ricavare \bar{v} e \bar{t} , oppure si potranno applicare le prove semplici introdotte nel paragrafo 5.3.

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il bipolo composito in figura 11.11 di cui si vuole ricavare il modello equivalente di Thevénin in regime sinusoidale. L'ipotesi di lavoro sarà quindi che, connesso un generatore di corrente sinusoidale alla pulsazione ω tra i morsetti α e β , il circuito risultante ammetta il regime sinusoidale. Al generatore di corrente abbineremo quindi il fasore \bar{t} . Si ricava facilmente che

$$\bar{t} = j\omega C \bar{v} + \frac{\bar{v}}{R_2} + \frac{\bar{v} - \bar{E}}{R_1} , \quad (11.70)$$

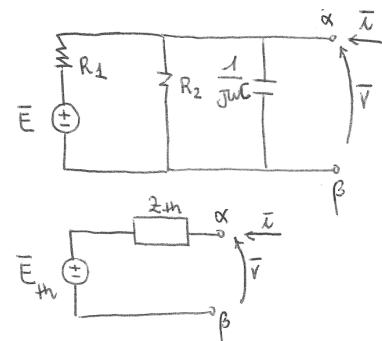


Figura 11.11: Circuito in regime sinusoidale in cui al generatore indipendente di tensione è assegnato un generico fasore \bar{E} .

da cui

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}}_{Z_{th}(j\omega)} \bar{i} + \underbrace{\frac{R_2 \bar{E}}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}}_{E_{th}(j\omega)}, \quad (11.71)$$

SI NOTI COME I FASORI \bar{E}_{th} e \bar{A}_{nr} , che rappresentano i generatori sinusoidali equivalenti di Thevénin e Norton, rispettivamente, abbiano in generale ampiezza e fase che dipendono da ω . Questa considerazione suggerisce che un modo più generale di quello scelto per introdurre una relazione tra funzioni sinusoidali a ω fissata e numeri complessi sarebbe

$$x(t) = X_m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \leftrightarrow X_m(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \bar{x}(\omega). \quad (11.72)$$

11.8.5 Esempio: sovrapposizione degli effetti (e di due regimi)

L'ESEMPIO PROPOSTO TRATTA IL CASO in cui, in un circuito che ammette un regime (cioè le sue frequenze libere si trovano tutte nel semipiano sinistro del piano complesso, ovvero hanno tutte parte reale negativa), sono presenti due ingressi di natura diversa: un generatore di tensione costante $e(t) = E$ e un generatore di corrente sinusoidale $a(t) = A \sin(\omega t)$. Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, e assumendo che l'evoluzione transitoria del circuito sia esaurita, risolveremo quindi un circuito in regime stazionario, in cui i condensatori e gli induttori si comportano come circuiti aperti e corto circuiti, rispettivamente, e un circuito in regime sinusoidale. Si determini l'andamento a regime della tensione $v_1(t)$ in figura 11.12.

Iniziamo passivando $a(t)$: il condensatore C_2 rimane appeso e il con-

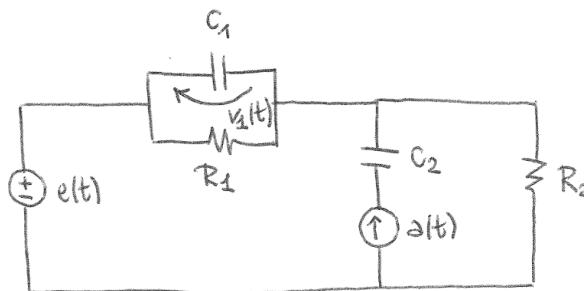


Figura 11.12: Il circuito, a regime, verrà risolto sovrapponendo gli effetti dei due generatori.

densatore C_1 si comporta come un circuito aperto dato che $e(t) = E$ e siamo a regime stazionario. Il circuito equivalente è riportato in figura 11.13. Si ricava banalmente $v_1^e(t) = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$.

Il caso in cui si passivi $e(t)$, che viene dunque sostituito da un corto circuito, dà origine al circuito in figura 11.14.

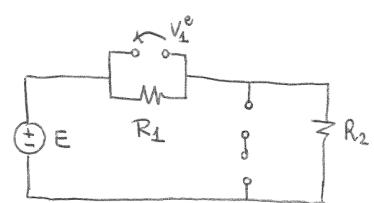


Figura 11.13: Circuito in regime stazionario.

Come prima cosa si ricava il fasore \bar{a} che corrisponde a $a(t) = A \sin \omega t$. Dalle relazioni trigonometriche di base sappiamo che $A \sin \omega t = A \cos(\omega t - \pi/2)$ e quindi $\bar{a} = Ae^{-j\pi/2} = -jA$. L'impedenza equivalente al parallelo di C_1 , R_1 ed R_2 è

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} , \quad (11.73)$$

conseguentemente

$$\bar{v}_1 = -\frac{R_1 R_2 (-jA)}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} = \frac{jR_1 R_2 A}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1} . \quad (11.74)$$

La forma d'onda cercata sarà dunque

$$\begin{aligned} v_1^a(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_1 e^{j\omega t}\} = \\ &= \underbrace{\frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C_1)^2}}_{I_a} \operatorname{Re}\{j(R_1 + R_2 - j\omega R_1 R_2 C_1)e^{j\omega t}\} \\ &= I_a \operatorname{Re}\{[j(R_1 + R_2) + \omega R_1 R_2 C_1](\cos \omega t + j \sin \omega t)\} \\ &= I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega t - (R_1 + R_2) \sin \omega t) \end{aligned} . \quad (11.75)$$

Complessivamente, quindi,

$$v_1(t) = v_1^e(t) + v_1^a(t) = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} + I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega t - (R_1 + R_2) \sin \omega t) . \quad (11.76)$$

11.9 Il regime multi-frequenziale

L'ESEMPIO PROPOSTO nel paragrafo 11.8.5 è un caso particolare di circuito che evolve in regime multi-frequenziale in cui una delle frequenze coinvolte è nulla, ovvero contribuisce con termini costanti che comportano il regime stazionario. Più in generale, però, possiamo pensare ad un circuito costituito da N -terminali lineari, tempo-invarianti dinamici e adinamici, che ammette un regime e che contenga generatori indipendenti di tipo sinusoidale ma a pulsazioni diverse. In questo caso, proprio come si è fatto nell'esempio del paragrafo 11.8.5, si agisce applicando la sovrapposizione degli effetti nel dominio del tempo e risolvendo, con una tecnica opportuna, tanti circuiti, ciascuno per ogni ingresso o per ogni famiglia di ingressi simili (ad esempio tutti quelli costanti o tutti quelli alla medesima pulsazione). Nel caso di più pulsazioni ω_k , se ne ipotizzino M , si risolverà un circuito con il metodo dei fasori per ogni pulsazione. È assolutamente importante notare che i componenti la cui impedenza, ad esempio, dipende dalla pulsazione, avranno equazioni costitutive

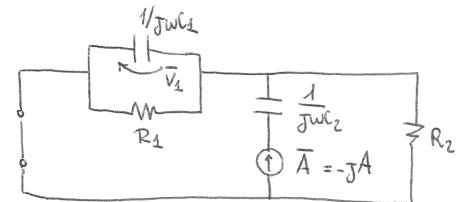


Figura 11.14: Circuito in regime sinusoidale. Le grandezze elettriche sono state evidenziate mediante i fasori corrispondenti.

diverse per pulsazioni diverse. Un condensatore, ad esempio, la cui equazione costitutiva nel dominio del tempo sia $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$, avrà nel dominio dei fasori impedenza $j\omega_k C$. Allo stesso modo, quando si passerà dal dominio dei fasori al dominio del tempo, sarà necessario farlo con cura, utilizzando la pulsazione corrispondente alla famiglia di generatori sinusoidali che si stanno considerando.

PER ESEMPLIFICARE IL CONCETTO si consideri il circuito in figura 11.12 dove però il generatore di corrente sia $a(t) = A \sin(\omega_1 t)$ e quello di tensione sia $e(t) = E \cos(\omega_2 t)$. Il calcolo di $v_1^a(t)$, ovvero la componente di $v_1(t)$ dovuta all'ingresso $a(t)$ procederà in modo analogo a quello proposto nell'esercizio e si otterrà

$$\begin{aligned} v_1^a(t) &= \operatorname{Re}\{\bar{v}_1 e^{j\omega_1 t}\} = \\ &= \underbrace{\frac{R_1 R_2 A}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_1 R_1 R_2 C_1)^2}}_{I^a} \operatorname{Re}\{j(R_1 + R_2 - j\omega_1 R_1 R_2 C_1) e^{j\omega_1 t}\} \\ &= I_a \operatorname{Re}\{[j(R_1 + R_2) + \omega_1 R_1 R_2 C_1](\cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t)\} \\ &= I_a (\omega R_1 R_2 C_1 \cos \omega_1 t - (R_1 + R_2) \sin \omega_1 t) \end{aligned} \quad (11.77)$$

Si noti che la pulsazione utilizzata per definire le impedenze e per "ritornare" nel dominio del tempo è ω_1 , ovvero la pulsazione di $a(t)$.

Qualora invece si voglia calcolare $v_1^e(t)$, ovvero la componente di $v_1(t)$ dovuta all'ingresso $e(t)$, si dovrà utilizzare la pulsazione ω_2 per ottenere, utilizzando un partitore di tensione,

$$\bar{v}_1^e = \frac{\frac{R_1}{1+j\omega_2 C_1 R_1}}{\frac{R_1}{1+j\omega_2 C_1 R_1} + R_2} E = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + j\omega_2 C_1 R_1 R_2} E \quad (11.78)$$

Per ottenere $v_1^e(t)$ si dovrà dunque valutare

$$\begin{aligned} v_1^e(t) &= \operatorname{Re}\left\{\frac{R_1 E}{R_1 + R_2 + j\omega_2 C_1 R_1 R_2} e^{j\omega_2 t}\right\} \\ &= \frac{R_1 E}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_2 R_1 R_2 C_1)^2} \operatorname{Re}\{(R_1 + R_2 - j\omega_2 R_1 R_2 C_1) e^{j\omega_2 t}\} \\ &= \frac{R_1 E}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega_2 R_1 R_2 C_1)^2} [(R_1 + R_2) \cos \omega_2 t + \omega_2 R_1 R_2 C_1 \sin \omega_2 t] \end{aligned} \quad (11.79)$$

Si faccia attenzione al fatto che non è possibile sommare i fasori \bar{v}_1^a e \bar{v}_1^e dato che sono riferiti a pulsazioni diverse. Sommiamo invece le funzioni ottenute nel dominio del tempo per esprimere $v_1(t) = v_1^a(t) + v_1^e(t)$.

11.10 Funzioni di rete

ABBIAMO VISTO CHE in regime sinusoidale, dato un bipolo caratterizzato dalla tensione descrittiva $v(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{v}) e la corrente $i(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{i}), se ammette la base di definizione corrente, è possibile definire l'impedenza $Z(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$ (cfr paragrafo 11.6). In modo completamente duale è possibile definire l'ammettenza $Y(j\omega) = \frac{\bar{v}}{\bar{i}}$ se il bipolo ammette la base di definizione tensione.

SI PUÒ PENSARE DI GENERALIZZARE questo concetto introducendo le **funzioni di rete** come rapporto tra due fasori qualunque di un circuito che evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Se considereremo il rapporto tra i fasori di due tensioni o due correnti otterremo un numero complesso, in generale funzione di ω , che non avrà dimensioni fisiche. Altrimenti, dal rapporto di un fasore di una tensione e di una corrente, o viceversa, potremmo ottenere un numero complesso, ancora in generale funzione di ω , che avrà le dimensioni fisiche di un'impedenza (Ω) o di un'ammettenza (Ω^{-1}). In generale si usa la notazione $H(j\omega)$ per indicare un'impedenza di rete.

SI CONSIDERI, AD ESEMPIO, un circuito che contenga M_E generatori di tensione e M_A generatori di corrente alla pulsazione ω . Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, sappiamo che la generica tensione $v(t)$ (rappresentata mediante il fasore \bar{v}) sarà esprimibile come somma di contributi dovuti ciascuno ad uno degli $M_E + M_A$ generatori presenti. I contributi saranno ottenuti pesando opportunamente i fasori associati a ciascun ingresso e potremo scrivere

$$\bar{v} = H_1^A(j\omega)\bar{A}_1 + \cdots + H_{M_A}^A(j\omega)\bar{A}_{M_A} + H_1^E(j\omega)\bar{E}_1 + \cdots + H_{M_E}^E(j\omega)\bar{E}_{M_E}. \quad (11.80)$$

Ciascuno dei coefficienti complessi $H_k^A(j\omega)$ ($k = 1, \dots, M_A$) e $H_h^E(j\omega)$ ($h = 1, \dots, M_E$) è una funzione di rete. Ciascuna di queste funzioni di ω rappresenta la **risposta in frequenza** che lega \bar{v} all'ingresso corrispondente. Vediamo con un paio di esempi da cosa deriva il termine "risposta in frequenza".

11.10.1 Un filtro passa-basso

CONSIDERIAMO IL SEMPLICE circuito RC in figura 11.15 in cui interpretiamo la tensione $e(t) = \cos \omega t$ come **ingresso** della rete e la

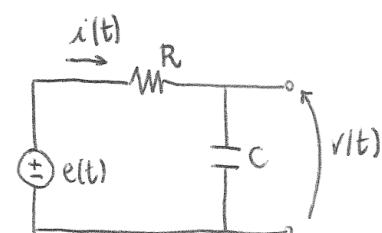


Figura 11.15: Circuito in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

tensione $v(t)$ del condensatore C come **uscita**. Si ricava molto facilmente la funzione di rete (adimensionale) che lega nel dominio dei fasori le due grandezze

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{1}{1 + j\omega RC}}_{H(j\omega)} E = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}}_{|H(j\omega)|} e^{j \overbrace{(-\text{atan}(\omega RC))}^{\arg(H(j\omega))}} E \quad (11.81)$$

Se si analizza adesso l'andamento del modulo $|H(j\omega)|$ della funzione di rete, si ricava che $|H(0)|=1$ e che $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = 0$. Per $\omega_t = \frac{1}{RC}$, che è definita **pulsazione di taglio** del filtro passa basso, $|H(j\omega_t)| = \sqrt{2}/2$. Per quanto riguarda la fase della funzione di rete, invece, $\arg(H(0)) = 0$, $\arg(H(j\omega_t)) = -\pi/4$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\arg(H(j\omega))| = -\pi/2$.

L'andamento del modulo e della fase della funzione di trasferimento $H(j\omega)$ è riportato in figura 11.16. Dall'andamento di $|H(j\omega)|$, in particolare, si capisce perché questo circuito, di cui $e(t)$ è l'ingresso e $v(t)$ l'uscita, prende il nome di passa basso. Qualora la pulsazione ω sia "bassa", infatti, l'ampiezza dell'uscita del circuito risulta molto meno attenuata rispetto a E di quanto non avvenga ad alte frequenze, per le quali, al limite, l'ampiezza dell'uscita tende a zero. Ad esempio, dato che $|H(j\omega_t/10)| \approx 0.995$, in un intervallo di pulsazioni pari a $[0, \omega_t/10]$, l'ingresso viene attenuato del 5%. Si nota anche come per basse frequenze l'uscita sia un versione pressoché non sfasata dell'ingresso, dato che la funzione arcotangente è sufficientemente piatta per valori piccoli del suo argomento. In particolare, $-\text{atan}(0.1) \approx -5^\circ$ e quindi in un intervallo di pulsazioni pari a $[0, \omega_t/10]$ l'uscita risulta sfasata di al più -5° .

Se ci mettessimo invece nell'intervallo di pulsazioni $[10\omega_t, 100\omega_t]$, l'uscita sarebbe attenuata da circa il 90% all'99% e sfasata da circa -84° a -89° .

Possiamo allora immaginare di sostituire $e(t)$ mono-frequenziale con $e(t) = \sum_{k=1}^K E_k \cos \omega_k t$. Per ciascuna pulsazione ω_k potremo applicare il metodo fasoriale e ritornando da ultimo nel dominio del tempo, ottenere $v(t)$ sommando tutti i contributi a pulsazioni diverse. L'uscita $v(t)$ sarà la sovrapposizione di K termini dei quali quelli per alti valori di ω_k risulteranno sempre più attenuati. Ovviamente "basso" e "alto" di per sé non hanno alcun significato ma è lo specificare la pulsazione di taglio del filtro, attraverso R e C , che ci consente di selezionare quali pulsazioni "basse" rispetto a ω_t preservare e quali, "alte" rispetto a ω_t , tagliare.

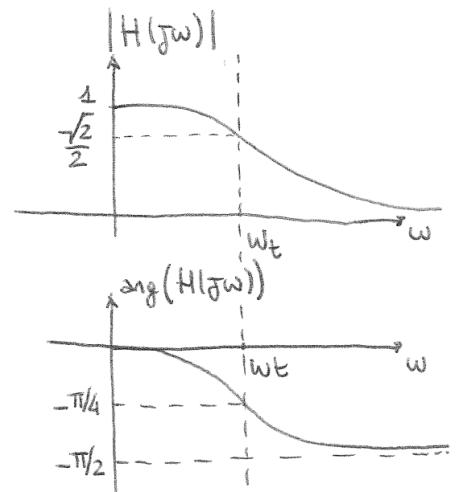


Figura 11.16: Il modulo (in alto) e la fase (in basso) della funzione di rete $\frac{1}{1+j\omega RC}$.

11.10.2 Un filtro passa alto

IL CIRCUITO RAPPRESENTATO IN figura 11.15, rappresenta un filtro di tipo passa alto qualora l'uscita considerata sia la corrente $i(t)$ rappresentata mediante il fasore \bar{i} . Possiamo infatti scrivere

$$\bar{i} = \frac{E - \frac{\bar{i}}{j\omega C}}{R}, \quad (11.82)$$

da cui

$$\left(1 + \frac{1}{j\omega RC}\right) \bar{i} = \frac{E}{R} \quad (11.83)$$

e quindi

$$\bar{i} = \underbrace{\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}}_{H(j\omega)} E = \underbrace{\frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}}_{|H(j\omega)|} e^{\overbrace{j(\pi/2 - \text{atan}(\omega RC))}^{\arg(H(j\omega))}} E. \quad (11.84)$$

Se si studia l'andamento del modulo e della fase della funzione di rete $H(j\omega)$ si ricava che $|H(0)| = 1$, $|H(j\omega_t)| = 2/\sqrt{2}R$ ($\omega_t = 1/RC$) e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H(j\omega)| = 1/R$. Per quanto riguarda la fase della funzione di rete, $\arg(H(0)) = \pi/2$, $\arg(H(j\omega_t)) = \pi/4$ e $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\arg(H(j\omega))| = 0$. Il comportamento del filtro, il cui andamento di modulo e fase è riportato in figura 11.17, è il duale del filtro passa basso.

11.11 La potenza in regime sinusoidale

CONSIDERIAMO UN CIRCUITO LINEARE, tempo-invariante, dinamico, che ammetta il funzionamento in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Identificando uno qualunque dei lati del suo grafo, possiamo certamente scrivere la tensione e la corrente descrittiva di quel lato, prese con la convenzione degli utilizzatori, come

$$\begin{aligned} v(t) &= V \cos(\omega t + \varphi_V) \\ i(t) &= I \cos(\omega t + \varphi_I) \end{aligned}, \quad (11.85)$$

che sarà poi rappresentata mediante i fasori $\bar{v} = Ve^{j\varphi_V}$ e $\bar{i} = Ie^{j\varphi_I}$, rispettivamente.

LA POTENZA ISTANTANEA assorbita dal lato di grafo che stiamo considerando è pari a⁵

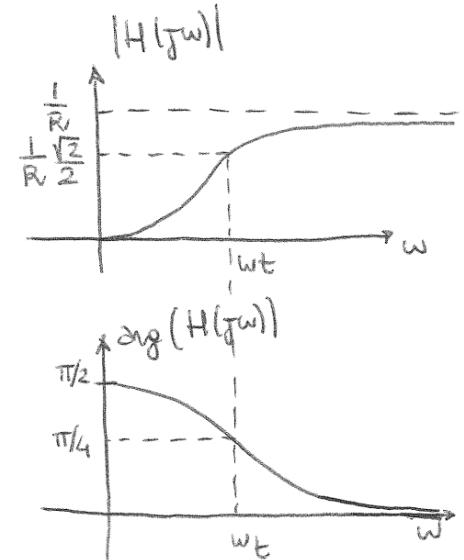


Figura 11.17: Il modulo (in alto) e la fase (in basso) della funzione di rete $\frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}$.

⁵ Si ricordi che

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

e

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

$$\begin{aligned}
p_a(t) &= v(t)i(t) = V \cos(\omega t + \varphi_V) I \cos(\omega t + \varphi_I) \\
&= \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{VI}{2} \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) \\
&= \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + \frac{VI}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi_I) \cos(\varphi_V - \varphi_I) \\
&\quad - \frac{VI}{2} \sin(2\omega t + 2\varphi_I) \sin(\varphi_V - \varphi_I) \\
&= \underbrace{\frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_I))}_{{p_a^{\text{attiva istantanea}}}(t)}, \\
&\quad - \underbrace{\frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \sin(2\omega t + 2\varphi_I)}_{{p_a^{\text{reattiva istantanea}}}(t)}
\end{aligned} \tag{11.86}$$

dove i termini P e Q prendono il nome di **potenza attiva** e **potenza reattiva**, rispettivamente. Possiamo quindi notare come la potenza assorbita istantanea sia somma di due contributi. Il primo contributo, $p_a^{\text{a.i.}}(t)$, ha media sul periodo $T = 2\pi/\omega$ pari a

$$\langle p_a^{\text{a.i.}}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I)(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_I)) dt = \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) = P , \tag{11.87}$$

mentre il secondo, $p_a^{\text{r.i.}}(t)$, ha media nulla. Infatti,

$$\langle p_a^{\text{r.i.}}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) \sin(2\omega t + 2\varphi_I) dt = 0 . \tag{11.88}$$

Si noti, inoltre, come i suddetti contributi alla potenza assorbita istantanea abbiano pulsazione doppia rispetto alla pulsazione di riferimento ω .

$p_a^{\text{a.i.}}(t)$ è la potenza che istante per istante viene assorbita dal lato del circuito che stiamo considerando e complessivamente, nonostante le sue fluttuazioni, ha un valore medio non nullo. Ciò ad indicare che *lati del circuito in cui $\cos(\varphi_V - \varphi_I) \neq 0$ dissipano, in media sul periodo, una potenza pari a P* .

$p_a^{\text{r.i.}}(t)$ è la potenza che istante per istante viene scambiata dal lato in questione con gli elementi del circuito in grado di immagazzinare ed erogare energia. La si osserva solo se $\sin(\varphi_V - \varphi_I) \neq 0$. Tuttavia, in media, il suo valore sul periodo è nullo ad indicare che *nei lati del circuito in cui $\sin(\varphi_V - \varphi_I) \neq 0$ i contributi assorbiti ed erogati di potenze reattive si bilanciano in media nel periodo*.

Si noti che per i lati del circuito che ammettono un'impedenza $Z(j\omega) = \bar{v}/i = |Z|e^{j\varphi_Z}$ (sono quindi esclusi i generatori indipendenti di tensione e corrente), $\varphi_V - \varphi_I = \varphi_Z$. Se l'impedenza fosse puramente immaginaria (cioè di tipo capacitivo o induttivo) la potenza

media assorbita nel periodo sarebbe nulla, dato che $\cos \varphi_Z = 0$ e $\langle p_a^{\text{r.i.}}(t) \rangle = 0$.

Per i lati che ammettono rappresentazione mediante impedenza $Z(j\omega)$ questo implica che la potenza reattiva istantanea si osserva solo se l'impedenza non è resistiva ($\sin(\varphi_Z) \neq 0$).

PER QUANTO RIGUARDA il resistore, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = R\bar{i}$ e quindi $\varphi_Z = 0$. Di conseguenza

$$P = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \cos 0 = \frac{R|\bar{i}|^2}{2} = \frac{|\bar{v}|^2}{2R} \quad (11.89)$$

e $Q = 0$. Se ne deduce che il resistore non immagazzina energia che "scambia" con gli altri componenti del circuito ma semplicemente dissipà tutto ciò che assorbe.

Per il condensatore, invece, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = -\frac{j}{\omega C}\bar{i}$ e $\varphi_Z = -\frac{\pi}{2}$. Si ricava

$$P = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \cos(-\pi/2) = 0 \quad (11.90)$$

e

$$Q = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\frac{|\bar{i}|^2}{2\omega C} = -\frac{|\bar{v}|^2\omega C}{2} . \quad (11.91)$$

Se ne deduce che il condensatore non dissipà la potenza che assorbe ma la "scambia".

Infine, per l'induttore, $\bar{v} = Z(j\omega)\bar{i} = j\omega L\bar{i}$ e $\varphi_Z = \frac{\pi}{2}$. Quindi

$$P = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \cos(\pi/2) = 0 \quad (11.92)$$

e

$$Q = \frac{|\bar{v}||\bar{i}|}{2} \sin(\pi/2) = \frac{\omega L|\bar{i}|^2}{2} = \frac{|\bar{v}|^2}{2\omega L} . \quad (11.93)$$

Anche l'induttore come il condensatore non dissipà la potenza che assorbe ma la "scambia".

UNA GENERICA IMPEDENZA $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = |Z(j\omega)|e^{j\varphi_Z}$ di tipo capacitivo (cfr. paragrafo 11.6), caratterizzata cioè da un reattanza negativa, comporta una Q negativa; del resto, se $X(\omega) < 0$, $\varphi_Z \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$. Viceversa, un'impedenza di tipo induttivo, avrà $X(\omega) > 0$ e quindi $\varphi_Z \in [0, \pi/2]$. Si noti che l'angolo $\varphi_Z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dato se consideriamo impedenze con parte resistiva $R(\omega) \geq 0$.

INTRODUCIAMO ADESSO LA POTENZA COMPLESSA come il numero complesso

$$\hat{P} = P + jQ = \frac{VI}{2} \cos(\varphi_V - \varphi_I) + j\frac{VI}{2} \sin(\varphi_V - \varphi_I) = \frac{VI}{2} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} . \quad (11.94)$$

Ancora possiamo scrivere

$$\begin{aligned} |\hat{P}| &= \sqrt{P^2 + Q^2} \\ P &= |\hat{P}| \cos(\varphi_V - \varphi_I) \quad , \\ Q &= |\hat{P}| \sin(\varphi_V - \varphi_I) \end{aligned} \quad (11.95)$$

con $A = |\hat{P}|$ che prende il nome di **potenza apparente**.

Come possiamo ricavare \hat{P} a partire dai fasori $\bar{v} = V e^{j\varphi_V}$ e $\bar{i} = I e^{j\varphi_I}$ che rappresentano la tensione e la corrente del lato del circuito che stiamo considerando? Un primo tentativo potrebbe essere quello di calcolare

$$\bar{v}\bar{i} = V e^{j\varphi_V} I e^{j\varphi_I} = VI e^{j(\varphi_V + \varphi_I)} \quad , \quad (11.96)$$

che però non porta ad un risultato corretto. In primo luogo perché (si veda l'equazione 11.94) il modulo andrebbe diviso per 2 e poi perché la fase della potenza \hat{P} dipenderebbe da $\varphi_V + \varphi_I$ e non da $\varphi_V - \varphi_I$. Un secondo tentativo, allora, sarà quello di valutare

$$\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} = \frac{VI}{2} e^{j\varphi_V} e^{-j\varphi_I} = \frac{VI}{2} e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} \quad . \quad (11.97)$$

Si ottiene quindi

$$\hat{P} = P + jQ = \frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} \quad (11.98)$$

e, ovviamente, $P = \text{Re}\{\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2}\}$ e $Q = \text{Im}\{\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2}\}$.

Poiché la potenza complessa introdotta nella 11.94 è stata definita a partire da una tensione ed una corrente di lato (e relativi fasori) prese con la convenzione normale, si tratta di una *potenza complessa assorbita*. Se fossimo interessati alla **potenza complessa erogata** dovremmo calcolare $-\hat{P} = -\frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2}$, ovvero potremmo scegliere \bar{v} e \bar{i} con la convenzione dei generatori.

11.11.1 Un primo esempio di calcolo della potenza complessa

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 11.18 che evolve in regime sinusoidale alla pulsazione di riferimento ω . Si calcoli la potenza complessa assorbita dal bipolo composito connesso al generatore \bar{E} .

Possiamo procedere calcolando l'impedenza equivalente al bipolo composito che risulta essere data dalla connessione in serie dell'induttore L e del parallelo tra R e C , ovvero

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} \\ &= j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC} \end{aligned} \quad . \quad (11.99)$$

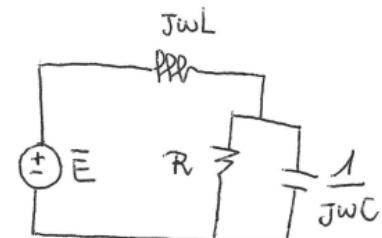


Figura 11.18: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

La corrente rappresentata dal fasore \bar{i} è dunque pari a $\frac{\bar{E}}{Z(j\omega)}$, cioè

$$\bar{i} = \frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \bar{E} . \quad (11.100)$$

La potenza complessa assorbita dal bipolo composito è pari a

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \frac{\bar{E}\bar{i}^*}{2} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \left(\frac{1 + j\omega RC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} \right)^* \\ &= \frac{|\bar{E}|^2 [(1 + j\omega RC)(R - \omega^2 RLC - j\omega L)]^*}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} \\ &= \underbrace{\frac{|\bar{E}|^2}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} (R - \omega^2 RLC + \omega^2 RLC)}_{\kappa} . \\ &- \underbrace{j \frac{|\bar{E}|^2}{2[(R - \omega^2 RLC)^2 + (\omega L)^2]} (\omega R^2 C - \omega^3 R^2 L C^2 - \omega L)}_{\kappa} \\ &= \kappa [R - j(\omega R^2 C - \omega^3 R^2 L C^2 - \omega L)] \end{aligned} \quad (11.101)$$

11.12 Il teorema di Boucherot

IL TEOREMA DI BOUCHEROT può essere visto come l'estensione al dominio dei fasori del teorema di Tellegen (cfr. paragrafo 3.2). In particolare, si consideri un circuito il cui grafo ad n nodi sia connesso e i cui l lati siano orientati secondo la convenzione normale. Se si introducono i vettori v ed i che raccolgono le tensioni e le corrispondenti correnti descrittive del circuito, il teorema di Tellegen afferma che $v^T i = 0$.

Questa relazione può essere estesa ai fasori che rappresentano le tensioni e le correnti di lato qualora il circuito evolva in regime sinusoidale. Infatti, sappiamo che i fasori soddisfano le equazioni di Kirchhoff del circuito e i vettori \bar{v} e \bar{i} sono quindi compatibili con il grafo. Tuttavia la relazione $\bar{v}^T \bar{i} = 0$ non generalizza il teorema di Tellegen dato che i termini $\bar{v}_k \bar{i}_k$ che la costituiscono ($k = 1, \dots, l$) non rappresentano la potenza complessa assorbita dal lato k -esimo.

Si noti però che anche il vettore \bar{i}^* rappresenta un insieme di correnti compatibili con il grafo del circuito. Infatti, se consideriamo la generica KCL al nodo j -esimo del grafo, possiamo scrivere

$$\sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \bar{i}_h = \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} + j \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} = 0 , \quad (11.102)$$

con N_j il numero di lati che incidono al nodo j e α_h un coefficiente che vale $+1$ o -1 in base al verso della corrente \bar{i}_h (ad esempio $+1$ se entrante nel nodo j e -1 se uscente). Dalla scrittura precedente si deriva che (cfr. paragrafo 11.2.1) che

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} &= 0 \\ \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} &= 0 \end{aligned} , \quad (11.103)$$

e quindi anche \bar{i}^* è compatibile con la KCL al nodo j dato che

$$\sum_{h=1}^{N_j} \bar{i}_h^* = \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Re}\{\bar{i}_h\} - j \sum_{h=1}^{N_j} \alpha_h \operatorname{Im}\{\bar{i}_h\} = 0 . \quad (11.104)$$

Questo ragionamento si estende a tutti i nodi del grafo e quindi possiamo generalizzare il teorema di Tellegen nel modo seguente

$$\frac{1}{2} \bar{v}^T \bar{i}^* = \sum_{k=1}^l P_k + j Q_k = 0 , \quad (11.105)$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l P_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^l Q_k &= 0 \end{aligned} . \quad (11.106)$$

Quest'ultima coppia di relazioni è il teorema di Boucherot da cui si evince che in un circuito che funzioni in regime sinusoidale, il cui grafo sia connesso, esiste un principio di conservazione della potenza attiva e della potenza reattiva.

11.12.1 Un esempio di applicazione

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 11.19 e si calcoli la potenza reattiva Q_a^E erogata dal generatore indipendente di tensione che è rappresentato dal fasore \bar{E} . Applicando il teorema di Boucherot possiamo scrivere che

$$Q_a^E + \underbrace{Q_a^{R_1}}_{=0} + \underbrace{Q_a^{R_2}}_{=0} + Q_a^C = Q_a^E + Q_a^C = 0 \quad (11.107)$$

da cui si ricava che $-Q_a^E = Q_a^C = Q_a^E$. Possiamo quindi ricavare la potenza reattiva assorbita dal condensatore per valutare la potenza reattiva erogata dal generatore di tensione.

$$\bar{v}_C = \frac{\frac{1}{R_2 + j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{R_2 + j\omega C}} \bar{E} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C} \bar{E} \quad (11.108)$$

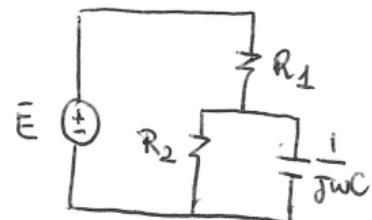


Figura 11.19: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

Sapendo che $Q_a^C = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C \bar{i}_C^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C (\text{j}\omega C \bar{v}_C)^*}{2} \right\}$, si ottiene
 $Q_e^E = -\omega C \frac{|\bar{v}_C|^2}{2}$, ovvero

$$Q_e^E = -\frac{\omega C}{2} \frac{R_2^2 E^2}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2} . \quad (11.109)$$

11.12.2 Un secondo esempio di applicazione

SI CALCOLI LA POTENZA COMPLESSA erogata dai due generatori in figura 11.20 rappresentati dai fasori \bar{A} ed \bar{E} . Si procede applicando la sovrapposizione degli effetti e passivando per primo il generatore \bar{A} . Così facendo il condensatore rimane appeso e possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P_a^E + P_a^R &= 0 \\ Q_a^E + Q_a^L &= 0 \end{aligned} , \quad (11.110)$$

da cui

$$\begin{aligned} P_e^E = P_a^R &= \text{Re} \left\{ \frac{\bar{v}_R \bar{i}_R^*}{2} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{\bar{E} \left(\frac{\bar{E}}{R} \right)^*}{2} \right\} = \frac{E^2}{2R} \\ Q_e^E = Q_a^L &= \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_L \bar{i}_L^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{E} \left(\frac{\bar{E}}{\text{j}\omega L} \right)^*}{2} \right\} = \frac{E^2}{2\omega L} \end{aligned} . \quad (11.111)$$

Passivando adesso il generatore di tensione, il resistore e l'induttore sono corto circuitati. Il generatore non eroga quindi potenza attiva dato che rimane solo il condensatore ad assorbire potenza complessa. Per quanto riguarda Q_e^A , invece, possiamo scrivere

$$Q_e^A = Q_a^C = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{v}_C \bar{i}_C^*}{2} \right\} = \text{Im} \left\{ \frac{\frac{\bar{A}}{\text{j}\omega C} \bar{A}^*}{2} \right\} = -\frac{A^2}{2\omega C} . \quad (11.112)$$

11.13 Il rifasamento

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO in figura 11.21 in cui un generatore di tensione sinusoidale alla pulsazione ω è connesso ad un'impedenza $Z(j\omega) = |Z|e^{\text{j}\varphi_Z}$ attraverso una *linea di trasmissione* che modelliamo con un resistore di resistenza R . Possiamo quindi pensare che l'impedenza sia un utilizzatore della potenza erogata da \bar{E} e il flusso di potenza tra i due bipoli avvenga attraverso un collegamento non ideale ma con perdite che assumiamo puramente resistivo. Applicando il teorema di Boucherot possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P_e^E &= P_a^R + P_a^Z \\ Q_e^E &= Q_a^Z \end{aligned} , \quad (11.113)$$

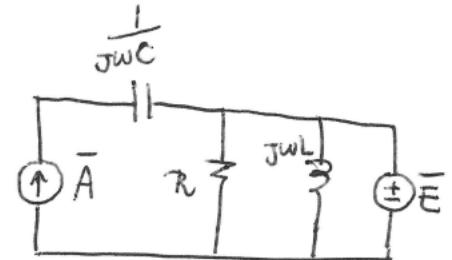


Figura 11.20: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

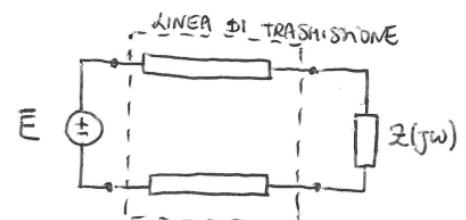


Figura 11.21: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

e quindi una parte della potenza attiva erogata da \bar{E} viene assorbita dalla connessione.

Se si indica con \bar{I} la corrente che circola nel circuito, $P_a^R = \frac{R|\bar{I}|^2}{2}$ e

$$P_a^Z = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{v}_Z \bar{I}^*}{2} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{|Z| e^{j\varphi_Z} \bar{I}^*}{2} \right\} = \frac{|\bar{I}| |\bar{v}_Z|}{2} \cos \varphi_Z . \quad (11.114)$$

Il modulo della corrente che circola nel resistore è quindi pari a $|\bar{I}| = \frac{2P_a^Z}{|\bar{v}_Z| \cos \varphi_Z}$ ed è minima in funzione della fase di Z quando $\cos \varphi_Z = 1$. La potenza attiva assorbita dalla linea è quindi minimizzata se il carico è puramente resistivo. Gli scambi di potenza reattiva, infatti, nonostante siano mediamente nulli sul periodo, avvengono attraverso una corrente che fluisce sulla linea e che contribuisce a perdite di potenza inutili. La potenza attiva erogata dal generatore, infatti, viene utilizzata dal carico (si pensi ad un motore elettrico che gira) mentre la potenza reattiva non dà contributi utili ma il suo effetto in termini di perdite non è nullo.

PER OTTIMIZZARE IL CIRCUITO dobbiamo agire sull'impedenza Z in modo tale che venga vista come puramente resistiva. Dato che, tipicamente, gli utilizzatori sono impedenze di tipo induttivo, possiamo provare a bilanciare la parte immaginaria dell'impedenza di carico collegandole un **condensatore di riferimento** C_{RIF} in parallelo (figura 11.22). Questo perché la reattanza del carico sarà positiva e quella del condensatore negativa e miriamo a scegliere C_{RIF} in modo tale che, complessivamente, $\operatorname{Im}\{Z(j\omega)\}||\frac{1}{j\omega C_{RIF}}\} = 0^6$.

In assenza del condensatore di riferimento la potenza apparente assorbita dall'impedenza $Z(j\omega)$ è pari a

$$A_Z = \sqrt{P_Z^2 + Q_Z^2} = \frac{|\bar{v}_Z||\bar{I}|}{2} \quad (11.115)$$

$$\text{e di conseguenza } |\bar{I}| = \frac{2\sqrt{P_Z^2 + Q_Z^2}}{|\bar{v}_Z|}.$$

Inserendo il condensatore di riferimento, è necessario agire modificando il modulo della tensione \bar{E} affinché ai capi dell'impedenza $Z(j\omega)$ si misuri la stessa tensione $|\bar{v}_Z|$ che si rilevava in assenza di C_{RIF} . In questo caso quindi, la potenza apparente assorbita dall'impedenza equivalente $Z_{RIF}(j\omega) = Z(j\omega)||\frac{1}{j\omega C_{RIF}}$ è

$$\hat{A}_{Z_{RIF}} = \sqrt{P_Z^2 + (Q_Z + Q_{C_{RIF}})^2} = \frac{|\bar{v}_Z||\bar{I}_{RIF}|}{2} \quad (11.116)$$

è di conseguenza $|\bar{I}_{RIF}| = \frac{2\sqrt{P_Z^2 + (Q_Z + Q_{C_{RIF}})^2}}{|\bar{v}_Z|}$ è il modulo del fasore della corrente che scorre in R .

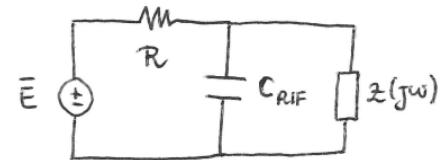


Figura 11.22: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

⁶ In linea di principio nulla vieta di riferire $Z(j\omega)$ collegandole in serie un condensatore di riferimento. Tuttavia, questa scelta porterebbe a modificare la tensione ai capi dell'impedenza di carico mentre la connessione in parallelo lascia tale tensione pressoché inalterata se la caduta ai capi di R_L è piccola rispetto alle tensioni in gioco.

Poiché $Q_{C_{RIF}} = -\frac{\omega C_{RIF} |\bar{v}_Z|^2}{2}$, è possibile scegliere una C_{RIF} tale che $Q_Z + Q_{C_{RIF}} = 0$ minimizzando quindi il modulo della corrente che scorre in R e che comporta un assorbimento indesiderato da parte della linea. Il valore da scegliere sarà

$$C_{RIF} = \frac{2Q_Z}{\omega |\bar{v}_Z|^2} = \frac{2}{\omega |\bar{v}_Z|^2} \underbrace{\frac{|\bar{v}_Z|^2 \sin \varphi_Z}{2|Z|}}_{Q_Z} = \frac{\sin \varphi_Z}{\omega |Z|} . \quad (11.117)$$

Dagli esercizi seguenti vedremo che il calcolo della capacità di rifasamento (o anche dell'induttanza di rifasamento se l'impedenza da rifasare fosse di tipo capacitivo) può essere fatto seguendo vie alternative a quella descritta ma simili dal punto di vista concettuale.

11.13.1 Un esempio di rifasamento

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 11.23 e si calcoli il valore della capacità C tale da rifasare l'impedenza "vista" dal condensatore ai morsetti A e B . In altre parole si cerca il valore di C tale che la potenza reattiva Q_e^E , erogata da \bar{E} sia nulla.

Come prima cosa possiamo calcolare l'espressione dell'impedenza da rifasare scollegando il generatore \bar{E} e il condensatore C .

$$\bar{v} = R\bar{i} + j\omega L(\bar{i} + \alpha\bar{i}) = (R + j\omega L(\alpha + 1))\bar{i} , \quad (11.118)$$

da cui $Z(j\omega) = R + j\omega L(\alpha + 1)$. In base al teorema di Boucherot sappiamo che $Q_a^E + Q_a^{Z||C} = 0$, ovvero $Q_e^E = Q_a^{Z||C}$. Per fare sì che $Q_a^{Z||C}$ sia nulla è sufficiente che $\text{Im}\{C||Z(j\omega)\} = 0$.

$$\begin{aligned} C||Z(j\omega) &= \frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L(\alpha+1)} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L(\alpha + 1)}{1 - \omega^2 LC(\alpha + 1) + j\omega RC} \\ &= \frac{(R + j\omega L(\alpha + 1))(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1) - j\omega RC)}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \end{aligned} . \quad (11.119)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\{C||Z(j\omega)\} &= \frac{\omega L(\alpha + 1)(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1)) - \omega R^2 C}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \\ &= \frac{\omega L(\alpha + 1) - \omega R^2 C - \omega^3 L^2 C(\alpha + 1)^2}{(1 - \omega^2 LC(\alpha + 1))^2 + (\omega RC)^2} \end{aligned} . \quad (11.120)$$

Per annullare $\text{Im}\{C||Z(j\omega)\}$ è necessario scegliere

$$C = \frac{L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2} . \quad (11.121)$$

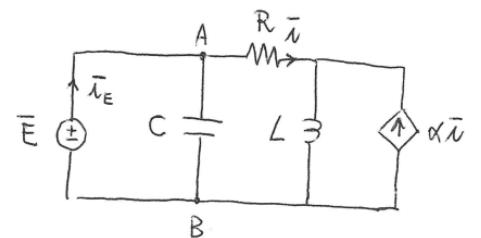


Figura 11.23: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω .

ALTERNATIVAMENTE È POSSIBILE imporre che sia nulla $Q_e^E = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{E}\bar{i}_E^*}{2} \right\}$.

$$\bar{i}_E = \bar{E} \left(j\omega C + \underbrace{\frac{1}{R + j\omega L(\alpha + 1)}}_{\frac{1}{C||Z(j\omega)}} \right), \quad (11.122)$$

quindi

$$Q_e^E = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{E}\bar{i}_E^*}{2} \right\} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \text{Im} \left\{ \left(j\omega C + \frac{R - j\omega L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2} \right)^* \right\}, \quad (11.123)$$

che è nulla se

$$C = \frac{L(\alpha + 1)}{R^2 + \omega^2 L^2(\alpha + 1)^2}, \quad (11.124)$$

11.14 Condizione di massimo trasferimento di potenza attiva

LA RICERCA DELLA CONDIZIONE DI massimo trasferimento di potenza attiva è duale rispetto al riferimento. L'idea è capire come deve essere fatta l'impedenza di carico affinché la potenza attiva trasferita da \bar{E} a $Z(j\omega)$ sia massima, cioè si minimizzi quella assorbita dall'impedenza $Z_g(j\omega)$. $Z_g(j\omega)$ e \bar{E} costituiscono l'equivalente Thevenin del circuito di alimentazione connesso al carico $Z(j\omega)$ (cfr. figura 11.23).

Assumendo $Z_g(j\omega) = R_g(\omega) + jX_g(\omega)$ e $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$,

$$\begin{aligned} P_a^Z + jQ_a^Z &= \frac{\bar{v}\bar{i}^*}{2} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\bar{E}Z(j\omega)}{\bar{v}}}_{\bar{v}} \underbrace{\frac{\bar{E}^*}{(Z(j\omega) + Z_g(j\omega))^*}}_{\bar{i}^*} \\ &= \frac{1}{2} \frac{|\bar{E}|^2 Z(j\omega)}{|Z(j\omega) + Z_g(j\omega)|^2} \\ &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega) + jX(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 + (X(\omega) + X_g(\omega))^2} \end{aligned} \quad (11.125)$$

L'ottimizzazione di

$$P_a^Z = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 + (X(\omega) + X_g(\omega))^2} \quad (11.126)$$

deve essere fatta rispetto a $R(\omega)$ e $X(\omega)$. In particolare, è necessario scegliere $X(\omega) = -X_g(\omega)$ per minimizzare il denominatore della

11.126 e quindi massimizzare P_a^Z che diventa

$$\tilde{P}_a^Z = P_a^Z \Big|_{X(\omega) = -X_g(\omega)} = \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2}. \quad (11.127)$$

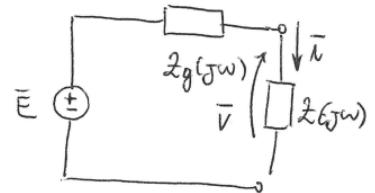


Figura 11.24: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . $Z_g(j\omega)$ e \bar{E} costituiscono l'equivalente Thevenin del circuito di alimentazione connesso al carico $Z(j\omega)$.

Adesso è necessario massimizzare la 11.127 rispetto a $R(\omega)$. Per fare ciò calcoliamo

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)} &= \frac{d}{dR(\omega)} \left[\frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^2} \right] \\ &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{(R(\omega) + R_g(\omega))^2 - 2R(\omega)(R(\omega) + R_g(\omega))}{(R(\omega) + R_g(\omega))^4} . \\ &= \frac{|\bar{E}|^2}{2} \frac{R_g(\omega) - R(\omega)}{(R(\omega) + R_g(\omega))^3} \end{aligned} \quad (11.128)$$

Si verifica facilmente che per $R(\omega) = R_g(\omega)$ la $\frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)}$ è nulla e ci troviamo in corrispondenza di un massimo locale di \tilde{P}_a^Z dato che $\frac{d\tilde{P}_a^Z}{dR(\omega)} > 0$ se $R(\omega) < R_g(\omega)$ e viceversa.

La condizione di massimo trasferimento di potenza attiva è dunque

$$Z(j\omega) = Z_g^*(j\omega) , \quad (11.129)$$

condizione che comporta anche l'annullarsi della potenza reattiva erogata dal generatore \bar{E} che vede ai suoi capi

$$Z(j\omega) + Z_g^*(j\omega) = 2R(\omega) \in \mathbb{R} . \quad (11.130)$$

12

12.1 Circuiti del primo ordine degeneri

QUANDO SONO STATI INTRODOTTI i circuiti dinamici RC ed RL del primo ordine (cfr. capitolo 10), si è assunto che un bipolo composto \mathcal{N}_R , costituito da N –terminali lineari e generatori indipendenti di tensione e/o corrente, fosse connesso, attraverso il suo modello equivalente di Thevénin o di Norton, ad un condensatore lineare o ad un induttore lineare. Alla base di questa modelizzazione si è assunto inoltre che i circuiti così ottenuti fossero non degeneri, ovvero che i modelli equivalenti di Thevénin e Norton fossero entrambi definiti per \mathcal{N}_R , e si avesse quindi $R_{TH} = 1/G_{NR}$. Cosa accadrebbe se \mathcal{N}_R non fosse definito su base tensione, ovvero ammettesse solo il modello equivalente di Thevénin con $R_{TH} = 0$? In questo caso, il circuito lineare dinamico del primo ordine si ridurrebbe alla connessione di un generatore di tensione E_{TH} e di un condensatore o di un induttore.

NEL PRIMO CASO si otterebbe un “maglia CE” che può essere pensata come il limite per R_{TH} che tende a 0 di un circuito RC serie. La costante di tempo del circuito assumerebbe il valore

$$\tau_{CE} = \lim_{R_{TH} \rightarrow 0} R_{TH}C = 0 , \quad (12.1)$$

corrispondente ad una frequenza libera $\lambda_{CE} = -\infty$. Questo comporterebbe una risposta in transitorio che si esaurisce istantaneamente e, del resto, qualunque sia lo stato iniziale del condensatore C , non appena esso viene connesso al generatore E_{TH} , la tensione v_C ai suoi capi, ovvero la *candidata* ad essere variabile di stato del circuito, “si adatta” alla tensione imposta dal generatore. In questa condizione di lavoro, la tensione v_C non è una variabile di stato dato che il suo valore non dipende più dalla sua storia pregressa ma è forzato, istante per istante, dal generatore E_{TH} .

NEL SECONDO CASO si osserva invece una “maglia LE” come limite di un circuito RL serie. In questo caso

$$\tau_{LE} = \lim_{R_{TH} \rightarrow 0} \frac{L}{R_{TH}} = \infty , \quad (12.2)$$

corrispondente ad una frequenza libera $\lambda_{LE} = 0$. In questa condizione, la corrente i_L dell’induttore, candidata ad essere variabile di stato, è a tutti gli effetti variabile di stato e il circuito non è *asintoticamente stabile* ma semplicemente *stabile*. Vediamo con un esempio cosa vuol dire.

CONSIDERIAMO IL CIRCUITO RL SERIE in figura 12.1. Sappiamo che, data una condizione iniziale $i_L(0) = I_0^1$, la variabile di stato evolve per $t \in [0, +\infty)$ come

$$i_L^1(t) = \left(I_0^1 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} . \quad (12.3)$$

Se scegliessimo invece una condizione iniziale $i_L(0) = I_0^2 = I_0^1 + \delta I_0$ avremmo

$$i_L^2(t) = \left(I_0^2 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} = \left(I_0^1 + \delta I_0 - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R} . \quad (12.4)$$

Si verifica banalmente che

$$|i_L^1(t) - i_L^2(t)| = |\delta I_0| e^{-\frac{R}{L}t} , \quad (12.5)$$

il che significa che l’effetto di una perturbazione della condizione iniziale tende a svanire per t che tende all’infinito, cioè $i_L^1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} i_L^2(t)$. In questo caso il circuito si dice *asintoticamente stabile*. Qualora si avesse $R = 0$, ovvero $\lambda = 0$, la perturbazione della condizione iniziale del circuito si propagherebbe inalterata nel tempo, $|i_L^1(t) - i_L^2(t)| = |\delta I_0|$. Il circuito si dice in questo caso semplicemente *stabile*: il circuito non è in grado di annullare l’effetto della perturbazione per t che tende all’infinito.

SITUAZIONI DUALI RISPETTO ALLE DUE finora analizzate si osservano quando \mathcal{N}_R non è definito su base corrente, ovvero ammette solo il modello equivalente di Norton con $G_{NR} = 0$. Ci si imbatte in “tagli CA”, come degenerazione di circuiti RC parallelo, e “tagli LA”, come degenerazione di circuiti RL parallelo.

NEL PRIMO CASO, una “taglio CA” genera la situazione analogica alla “maglia LE”. La candidata ad essere variabile di stato, cioè la tensione v_C ai capi del condensatore, è variabile di stato a tutti gli effetti ma con una $\lambda_{CA} = 0$ ($\tau_{CA} = \infty$). Il circuito sarà quindi semplicemente *stabile*.

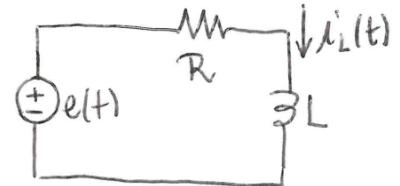


Figura 12.1: Circuito RL serie con $e(t) = E$.

NEL SECONDO CASO, una “taglio LA” genera la situazione analoga alla “maglia CE”. La candidata ad essere variabile di stato non è variabile di stato e $\lambda_{LA} = -\infty$, ovvero $\tau_{LA} = 0$. La corrente nell’induttore, infatti, viene forzata istante per istante dal generatore di corrente A_{NR} come accadeva per v_C e E_{TH} nel caso della “maglia CE”.

COME CASI PARTICOLARI delle situazioni generiche descritte si hanno

- C ed $E_{TH} = 0$: il condensatore è corto circuitato ovvero si scarica istantaneamente.
- L ed $E_{TH} = 0$: l’induttore mantiene la condizione iniziale $i_L(t_0) = I_0$ per t che tende all’infinito. Nella maglia circola quindi una corrente costante non nulla e la caduta ai capi dell’induttore è nulla.
- C ed $A_{NR} = 0$: il condensatore mantiene la condizione iniziale $v_C(t_0) = V_0$ per t che tende all’infinito. Non circola quindi corrente nel condensatore, che è appeso, e si misura una tensione costante ai suoi capi.
- L ed $A_{NR} = 0$: l’induttore appeso si scarica istantaneamente.

12.2 Circuiti dinamici riducibili a circuiti del primo ordine

INTRODUCIAMO QUESTA CLASSE DI CIRCUITI mediante una esempio. Si consideri il circuito in figura 12.2, con $e(t) = \alpha t$ ($[\alpha] = \text{Vs}^{-1}$), per il quale possiamo scrivere

$$e(t) = v_{C_1}(t) + v_{C_2}(t) , \quad (12.6)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt}e(t) = \frac{d}{dt}v_{C_1}(t) + \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) . \quad (12.7)$$

Usando la KCL al nodo in cui confluiscono C_1 , C_2 , R_1 ed R_2 , si ottiene quindi

$$C_1 \frac{d}{dt}v_{C_1}(t) = C_1 \left(\frac{d}{dt}e(t) - \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) \right) = C_2 \frac{d}{dt}v_{C_2}(t) + \frac{v_{C_2}}{R_1} + \frac{v_{C_2}}{R_2} , \quad (12.8)$$

che si riscrive come

$$\frac{d}{dt}v_{C_2}(t) = -\frac{1}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)} v_{C_2} + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{d}{dt}e(t) . \quad (12.9)$$

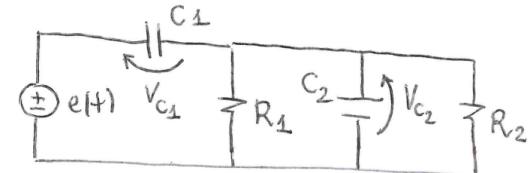


Figura 12.2: Si noti la “maglia CE” che coinvolge $e(t)$, C_1 e C_2 .

Si noti che l'equazione di stato ottenuta presenta la dipendenza della derivata della variabile di stato dalla derivata dell'ingresso, cosa questa che non accadeva quando non ci si trovava in presenza di "maglie CE". Questo circuito infatti contiene una tale degenerazione come evidenziato dalla KVL 12.6. La presenza di tale maglia implica una **relazione algebrica** tra le candidate ad essere variabile di stato (v_{C_1} e v_{C_2} in questo caso) e gli ingressi (in questo caso il solo $e(t)$). Una delle due candidate, nell'esempio in questione, non sarà quindi una variabile di stato dato che il suo valore dipende, istante per istante, dall'altra variabile di stato e dall'ingresso.

POSSIAMO GENERALIZZARE IL RISULTATO anticipato con l'esempio.

In un circuito che contiene N -terminali lineari, tempo invarianti, generatori indipendenti di tensione e/o corrente, e M variabili elettriche candidate ad essere variabili di stato, il numero delle variabili di stato effettive è pari a $M - \kappa$, dove κ è il numero di relazioni algebriche linearmente indipendenti che sussistono tra le M candidate e (eventualmente) gli ingressi.

Nel caso in cui il circuito abbia M candidate e presenti $M - 1$ delle suddette relazioni algebriche linearmente indipendenti, si riduce di fatto ad un circuito del primo ordine in cui l'equazione di stato, detta $x(t)$ la candidata che sia variabile di stato a tutti gli effetti, è del tipo

$$\frac{d}{dt}x(t) = \lambda x(t) + \alpha_1 u_1(t) + \dots + \alpha_P u_P(t) + \beta_1 \frac{d}{dt}u_1(t) + \dots + \beta_P \frac{d}{dt}u_P(t), \quad (12.10)$$

dove $u_p(t)$, per $p = 1, \dots, P$ sono gli ingressi del circuito e i coefficienti α_p e β_p non sono necessariamente tutti nulli.

Risulta quindi evidente che sarà sufficiente una sola condizione iniziale del circuito in $t = t_0$, assegnata per la variabile di stato $x(t)$, dato che le altre candidate avranno in $t = t_0$ un valore che dipende, secondo le relazioni algebriche esistenti, da $x(t_0)$ e da $u_p(t_0)$ (e non necessariamente da tutti i $p = 1, \dots, P$).

A TITOLO DI ESEMPIO si consideri il circuito in figura 12.3. Si possono evidenziare le seguenti relazioni algebriche indipendenti

$$\begin{aligned} e(t) + v_{C_1}(t) - v_{C_2}(t) &= 0 \\ v_{C_1}(t) &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (12.11)$$

Dato $M = 3$ il numero di candidate, si ha $\kappa = 2$ e quindi il circuito è del primo ordine. L'equazione di stato che ne governa la dinamica è

$$\frac{d}{dt}i_L = -\frac{R_2}{L}i_L, \quad (12.12)$$

corredatta della condizione iniziale $i_L(t_0) = I_0$. Nell'esempio si vede chiaramente che ci sono 2 "maglie CE" ovvero le relazioni algebriche evidenziate nella 12.11.

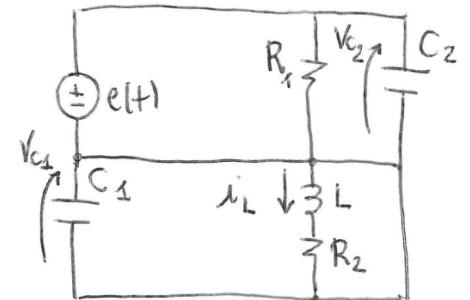


Figura 12.3: Il circuito contiene 3 candidate ad essere variabili di stato: v_{C_1} , v_{C_2} e i_L .

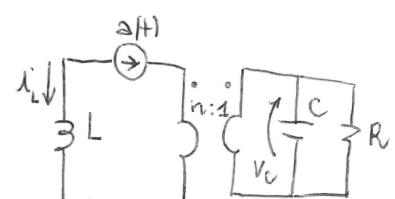


Figura 12.4: Il circuito contiene 2 candidate ad essere variabili di stato: v_C ed i_L .

SI CONSIDERI ORA IL CIRCUITO in figura 12.4. Si nota banalmente la presenza della relazione algebrica $i_L(t) + a(t) = 0$ (un “taglio LA”) e l’equazione di stato è

$$\frac{d}{dt}v_C = -\frac{1}{R_2C}v_C + \frac{1}{nC}a(t) . \quad (12.13)$$

Si hanno quindi $M = 2$ candidate ma una sola variabile di stato, la tensione $v_C(t)$.

ESISTONO TUTTAVIA CASI in cui la presenza di “maglie CE” e/o “tagli LA” non è evidente e le relazioni algebriche tra candidate ad essere variabili di stato e (eventualmente) gli ingressi vengono messe in luce elaborando le KVL e/o le KCL tenendo conto anche delle equazioni costitutive dei componenti.

Si consideri ad esempio il circuito in figura 12.5 in cui il doppio bipolo è descritto dalla matrice ibrida \mathcal{H}

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} . \quad (12.14)$$

Analizzando la matrice si nota che $v_1 = av_2$ e che quindi $v_C - ae(t) = 0$. Questa relazione algebrica implica che v_C non sia variabile di stato seppur candidata ma il circuito non presenta esplicitamente alcuna “maglia CE”.

12.3 Circuiti del primo ordine con ingresso discontinuo

FINORA NON CI SIAMO MAI OCCUPATI di casi in cui un circuito dinamico del primo ordine (o riconducibile al primo ordine) presenti un ingresso discontinuo. Tuttavia è fatto comune che le reti elettriche presentino fenomeni di discontinuità, pensiamo, ad esempio ad ogni volta che usiamo un interruttore per accendere o spegnere una luce. In laboratorio, ad esempio, abbiamo un pulsante che ci permette di accendere o spegnere un generatore di tensione e questa operazione corrisponde, per il circuito, ad avere un ingresso discontinuo.

INTRODUCIAMO LA FUNZIONE GRADINO $u(t)$ definita come

$$\begin{cases} u(t) = 0, & t < 0 \\ u(t) = 1, & t > 0 \end{cases} , \quad (12.15)$$

che in $t = 0$ presenta un discontinuità di prima specie.

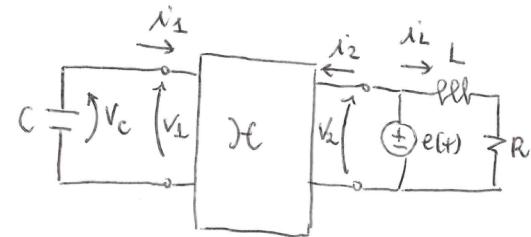


Figura 12.5: Il circuito contiene 2 candidate ad essere variabili di stato: v_C ed i_L .

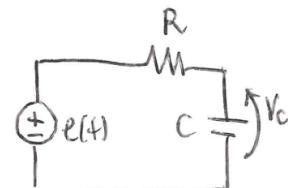


Figura 12.6: $e(t) = Eu(t - \bar{t})$.

CONSIDERIAMO ADESSO IL SEMPLICE CIRCUITO RC serie in figura 12.6 in cui l'ingresso è pari a $e(t) = Eu(t - \bar{t})$ (sia per esempio $\bar{t} > 0$), cioè una funzione che vale

$$\begin{cases} 0, & t < \bar{t} \\ E > 0, & t > \bar{t} \end{cases} . \quad (12.16)$$

Ipotizziamo che il circuito sia in funzione da $t = -\infty$ e che quindi, dato che $\lambda = -\frac{1}{RC} < 0$, si trovi a regime stazionario per $t = \bar{t}^- = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} t$.

Qualunque fosse la condizione iniziale $v_C(-\infty)$, il condensatore sarà scarico per $t = \bar{t}^-$, cioè $v_C(\bar{t}^-) = 0$. Cosa accade tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ a cavallo della discontinuità? Per rispondere è sufficiente analizzare l'equazione di stato

$$\frac{d}{dt}v_C(t) + \frac{1}{RC}v_C(t) = \frac{e(t)}{RC} . \quad (12.17)$$

Tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ l'ingresso presenta una discontinuità di prima specie e quindi anche la parte a sinistra del segno di egualianza nella 12.17 deve presentare tale discontinuità. Tuttavia, poiché la parte a sinistra del segno di egualianza contiene sia la variabile di stato sia la sua derivata rispetto al tempo (si ricordi che qualunque funzione è "più continua" o "continua tanto quanto" la sua derivata) sarà quest'ultima a presentare tale discontinuità tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ mentre la variabile di stato è continua, ovvero $v_C(\bar{t}^-) = v_C(\bar{t}^+)$. Si dice che la variabile di stato è "più continua" dell'ingresso¹.

Risolvere il circuito nell'intervallo $(\bar{t}^-, +\infty)$ equivale a risolverlo in $[\bar{t}, +\infty)$ con condizione iniziale $v_C(\bar{t}) = 0$. La soluzione sarà quindi $v_C(t) = E(1 - e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}})$. Il grafico della soluzione è riportato in figura 12.7 in alto.

12.3.1 Sulla continuità delle variabili di stato

UNA PROPRIETÀ MOLTO IMPORTANTE DELLE GRANDEZZE DI STATO DI UN CIRCUITO è che (nell'ipotesi che le grandezze impresse dai generatori indipendenti siano limitate) esse sono continue. In altri termini, anche laddove per via di generatori con comportamenti discontinui o di interruttori (cfr. paragrafo 12.4) alcune grandezze del circuito possono subire dei salti di discontinuità², ciò non accade mai per le grandezze di stato. Questa proprietà, detta proprietà di *continuità delle variabili di stato*, è molto importante e assai utile nella soluzione dei circuiti dinamici. Essa può essere dimostrata attraverso un ragionamento che è allo stesso tempo semplice e "rigoroso".

¹ In circuiti che presentano relazioni algebriche tra le variabili di stato e (eventualmente) gli ingressi, a destra del segno di egualianza può in generale comparire anche la derivata degli ingressi rispetto al tempo (cfr. equazione 12.10). In questi casi la variabile di stato può essere "discontinua tanto quanto" gli ingressi.

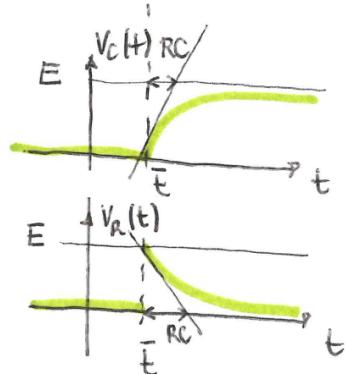


Figura 12.7: Per t prossimo a \bar{t} da sinistra il condensatore è scarico ed inizia a caricarsi con continuità in $t = \bar{t}$.

² Una funzione reale $f(t)$ ha una discontinuità di prima specie in un punto $t = \bar{t}$ se $f(\bar{t}^+)$ e $f(\bar{t}^-)$ esistono (finiti) ed $f(\bar{t}^+) \neq f(\bar{t}^-)$; la differenza $f(\bar{t}^+) - f(\bar{t}^-)$ è il salto di discontinuità di $f(t)$ per $t = \bar{t}$. $f(t)$ si dice generalmente continua in un intervallo $[a, b]$ se e solo se $f(t)$ è continua in $[a, b]$ eccetto che in un numero finito di punti in cui presenta discontinuità di prima specie.

CONCENTRIAMOCI SUL CONDENSATORE. *Le variabili di stato di un circuito sono necessariamente limitate*, altrimenti l'energia immagazzinata nel circuito sarebbe infinita e ciò non può accadere. Ad esempio per il condensatore la tensione dovrà essere limitata. Poiché in ogni circuiti dinamico, tutte le grandezze non di stato possono essere espresse come una combinazione lineare delle variabili di stato e degli ingressi³, allora anche l'intensità di corrente del condensatore è limitata.⁴ Consideriamo allora l'equazione costitutiva del condensatore in forma integrale

$$v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau , \quad (12.18)$$

e ipotizziamo che a cavallo di t_0 la corrente i_C , seppur limitata presenta un salto di discontinuità. La 12.18 calcolata tra t_0^- e t_0^+ diventa allora

$$v_C(t_0^+) = v_C(t_0^-) + \frac{1}{C} \int_{t_0^-}^{t_0^+} i_C(\tau) d\tau = v_C(t_0^-) , \quad (12.19)$$

dato che l'integrale su un intervallo infinitesimo di una funzione limitata è identicamente nullo.

SI POTEVA PROCEDERE NELL'ESEMPIO presentato nel paragrafo precedente integrando la 12.17 a cavallo della discontinuità dell'ingresso.

$$\int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{d}{dt} v_C(t) dt + \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{1}{RC} v_C(t) dt = \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{e(t)}{RC} dt \quad (12.20)$$

che equivale a

$$\int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} dv_C(t) = v_C(\bar{t}^+) - v_C(\bar{t}^-) = 0 \quad (12.21)$$

dato che $v_C(t)$ e $e(t)$ sono limitate.

SI NOTI PERÒ CHE, in generale, le variabili di circuito con ingressi discontinui non sono tutte "più continue" dell'ingresso: è una caratteristica delle variabili di stato. Consideriamo infatti la tensione v_R ai capi del resistore R in figura 12.6. Essa sarà pari a $Ri_C(t)$, ovvero sarà nulla per $t = \bar{t}^-$ (il condensatore è in regime stazionario e quindi è un aperto) e

$$Ri_C(t) = RC \frac{d}{dt} \left[E \left(1 - e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}} \right) \right] = E e^{\frac{t-\bar{t}}{RC}} , \quad (12.22)$$

per $t \in (\bar{t}^+, +\infty)$. Si noti che il limite sinistro e destro di v_R sono diversi ($0 \neq E$) e quindi la tensione è discontinua come $e(t)$ in $t = \bar{t}$ (cfr. figura 12.7 in basso).

³ C'è un modo molto semplice ed efficace per rendersi conto di ciò. Cosa significa esprimere le grandezze del circuito in funzione delle grandezze di stato? Significa considerare le tensioni dei condensatori e le intensità di corrente degli induttori come variabili indipendenti (cioè come se fossero note). Si consideri allora il circuito ottenuto sostituendo a ciascun condensatore un generatore di tensione con la stessa tensione del condensatore ed a ciascun induttore un generatore di corrente con la stessa intensità di corrente dell'induttore. Per costruzione questo circuito, a cui si dà il nome di *circuito resistivo associato*, descrive il legame tra le grandezze di stato e tutte le altre grandezze del circuito dinamico. Siccome il circuito resistivo associato è adinamico e lineare la relazione tra una generica grandezza ed i generatori è di tipo algebrico lineare. Attraverso il circuito resistivo associato è possibile esprimere tutte le grandezze di un circuito dinamico in funzione delle grandezze di stato e delle grandezze impresse dai generatori indipendenti, ed in particolare le intensità di corrente dei condensatori e le tensioni degli induttori.

⁴ Si osservi che questa proprietà non vale se in parallelo al condensatore c'è un interruttore che si chiude. Un analogo risultato vale per le tensioni degli induttori se non vi sono interruttori in serie agli induttori che si aprono. Nei due casi citati, infatti, ci troveremmo in presenza di una "maglia CE" e di un "taglio LA".

Si poteva arrivare a questo risultato scrivendo l'equazione differenziale (ingresso-uscita) che lega $v_R(t)$ all'ingresso $e(t)$. Si ha infatti che $e(t) = v_C + v_R$ e quindi $\frac{d}{dt}e(t) = \frac{d}{dt}v_C + \frac{d}{dt}v_R = \frac{i_C}{C} + \frac{d}{dt}v_R$. Ricordando che $v_R = Ri_C$ si ottiene

$$\frac{d}{dt}v_R = -\frac{1}{RC}v_R + \frac{d}{dt}e(t) . \quad (12.23)$$

Integriamo adesso tra \bar{t}^- e \bar{t}^+ , si scrive

$$\int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{d}{dt}v_R(t)dt + \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{1}{RC}v_R(t)dt = \int_{\bar{t}^-}^{\bar{t}^+} \frac{d}{dt}e(t)dt \quad (12.24)$$

da cui

$$v_R(\bar{t}^+) - v_R(\bar{t}^-) = e(\bar{t}^+) - e(\bar{t}^-) = E - 0 . \quad (12.25)$$

In conclusione $v_R(\bar{t}^+) = E + v_R(\bar{t}^-) = E$. Del resto è ciò che si ottiene valutando in \bar{t}^+ la KVL $e(t) = v_C(t) + v_R(t)$ dopo aver ricavato $v_C(\bar{t}^+) = v_C(\bar{t}^-)$.

12.3.2 Un esempio non banale

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 12.8 che sia assume a regime per $t = 0^-$. Gli ingressi sono definiti come segue

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A, & t > 0 \end{cases}, \quad (12.26)$$

$$e(t) = \begin{cases} E, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}. \quad (12.27)$$

Si è interessati a determinare $i_R(0^-)$ e $i_R(t)$ per $t \in (0^+, +\infty)$.

In $t = 0^-$ il circuito è quello in figura 12.9 in cui il generatore di corrente è nullo, il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Siamo infatti a regime, per ipotesi, e a regime stazionario poiché $e(t) = E$. In queste condizioni il generatore pilotato si comporta come un resistore di resistenza $-r$ dato che è pilotato dalla stessa corrente che lo attraversa, infatti $i_L(0^-) = i_R(0^-)$. Possiamo quindi ricavare

$$i_R(0^-) = \frac{E}{r - R} . \quad (12.28)$$

Passiamo adesso all'istante $t = 0^+$ in cui $e(t)$ "si spegne" e $a(t)$ "si accende" (cfr. figura 12.10). Si nota l'esistenza di un legame algebrico tra le grandezze candidate ad essere variabili di stato, infatti,

$$v_C(t) - ri_L(t) = 0 . \quad (12.29)$$

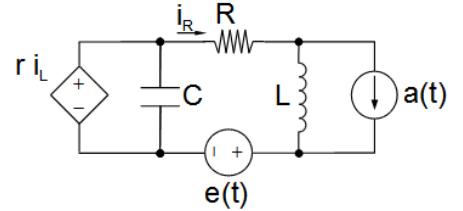


Figura 12.8: Si assume $0 < r < R$.

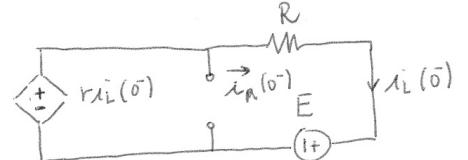


Figura 12.9: Il circuito in $t = 0^-$.

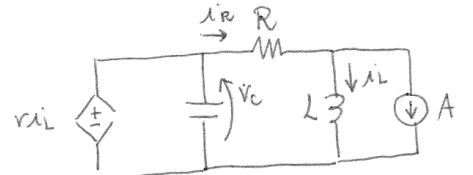


Figura 12.10: Il circuito per $t \in (0^+, +\infty)$.

Il circuito è quindi del primo ordine e la sua equazione di stato, scritta ad esempio in $i_L(t)$ è

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = -\frac{R-r}{L}i_L(t) - \frac{RA}{L}, \quad (12.30)$$

da cui si ricava $\lambda = -\frac{R-r}{L} < 0$, dato che, per ipotesi, $0 < r < R$ ⁵. Risolvere l'equazione di stato per determinare $i_L(t)$ ci consente di determinare anche $i_R(t)$ dato che $i_R = i_L + A$. In particolare, integrando l'equazione di stato tra 0^- e 0^+ si ricava che $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{r-R}$ e quindi $i_R(0^+) = \frac{E}{r-R} + A$. La soluzione dell'equazione di stato per $t \geq 0$ comporta

$$i_L(t) = ke^{-\frac{R-r}{L}t} + H \quad (12.31)$$

dove H si determina imponendo

$$\frac{d}{dt}H = -\frac{R-r}{L}H - \frac{RA}{L}, \quad (12.32)$$

ovvero⁶ $H = \frac{RA}{r-R}$.

La costante k la si ricava a partire dalla condizione iniziale e si ricava

$$i_L(0) = i_L(0^+) = \frac{E}{r-R} = k + \frac{RA}{r-R}, \quad (12.33)$$

ovvero $k = \frac{E-RA}{r-R}$. La corrente cercata che scorre nel resistore sarà quindi

$$i_R(t) = i_L(t) + A = \frac{E-RA}{r-R}e^{-\frac{R-r}{L}t} + \frac{rA}{r-R}. \quad (12.34)$$

Si noti quindi che

- la variabile di stato $i_L(t)$ è continua in $t = 0$ mentre la corrente $i_R(t)$ è discontinua come gli ingressi;
- la relazione $v_C(t) = ri_L(t)$ consente di poter utilizzare alternativamente $v_C(t)$ come variabile di stato e anch'essa risulta continua in $t = 0$.

12.4 Circuiti del primo ordine con tasti

NEL PARAGRAFO PRECEDENTE abbiamo introdotto circuiti dinamici del primo ordine caratterizzati da ingressi discontinui. Dagli esempi proposti è facile convincersi che, di fatto, la soluzione di questi circuiti consiste in un'analisi fatta su intervalli temporali definiti dagli istanti di tempo in cui le discontinuità degli ingressi si manifestano.

Un altro caso tipico in cui si ripropone un'analisi ad intervalli è quello in cui nel circuito siano presenti dei tasti (interruttori e/o

⁵ Si noti che essendo la frequenza libera una caratteristica della rete passivata (non dipende cioè dagli ingressi), per questo circuito essa è la stessa per $t \in (-\infty, \infty)$. L'ipotesi di partenza, dunque, che assumeva il regime per $t = 0^-$, è corretta.

⁶ Questo risultato lo si poteva ottenere risolvendo il circuito a regime stazionario per t che tende all'infinito, dato che è stabile e con ingressi costanti.

deviatori) che in determinati istanti di tempo prefissati agiscono commutando la loro posizione e cambiando, di fatto, la topologia del circuito. Si procede risolvendo il circuito in ciascuno degli intervalli di funzionamento facendo particolare attenzione a cosa accade a cavallo degli istanti di commutazione in cui le variabili di stato evolveranno genericamente con continuità (se non sono presenti relazioni algebriche tra le candidate ad essere variabili di stato ed (eventualmente) gli ingressi) e le altre variabili elettriche potranno essere discontinue.

12.4.1 Un esempio semplice

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 12.1 che evolve in regime stazionario per $t = 0^-$. In $t = 0$ il tasto connesso in serie ad R_2 si apre lasciando quest'ultimo appeso. Come si procede per il calcolo di $v_C(t)$ per $t \in (0^-, +\infty)$? Innanzitutto si ricava $v_C(0^-)$ sapendo che $e(t) = E$. In $t = 0^-$ il condensatore si comporta come un circuito aperto e quindi

$$v_C(0^-) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} . \quad (12.35)$$

La presenza del tasto è di fatto equivalente a modellare R_2 come un resistore di resistenza tempo variante. L'equazione di stato che regola la dinamica del circuito sarà quindi

$$\frac{d}{dt} v_C(t) = -\underbrace{\frac{R_1 + R_2(t)}{R_1 R_2(t) C}}_{\lambda(t)} v_C(t) + \frac{E}{R_1 C} . \quad (12.36)$$

La frequenza libera del circuito $\lambda(t)$ è una funzione del tempo generalmente continua per $t \in (-\infty, +\infty)$ dato che

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^-} \lambda(t) &= -\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C}, \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda(t) &= -\frac{1}{R_1 C} \end{aligned} \quad , \quad (12.37)$$

quindi, integrando l'equazione di stato tra 0^- e 0^+ si ottiene $v_C(0^+) = v_C(0^-)$. L'equazione di stato, per $t \in (0^+, +\infty)$ diventa

$$\frac{d}{dt} v_C(t) = -\frac{1}{R_1 C} v_C(t) + \frac{E}{R_1 C} , \quad (12.38)$$

da cui $v_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}} \right)$.

Se l'incognita del problema fosse stata la corrente $i_{R_1}(t)$ avremmo agito sempre risolvendo il circuito in due intervalli di tempo distinti e avremmo però trovato un andamento discontinuo dell'incognita. Infatti, a ridosso della discontinuità per $t = 0^-$, avremmo avuto

$$i_{R_1}(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad (12.39)$$

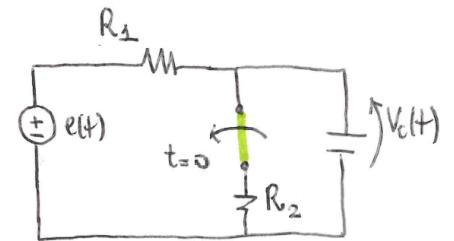


Figura 12.11: Il tasto si apre per $t = 0$ ed il resistore R_2 che gli è connesso in serie rimane appeso.

e

$$i_{R_1}(0^+) = \frac{E - v_C(0^+)}{R_1} = \frac{E}{R_1}. \quad (12.40)$$

Per $t \in (0^+, \infty)$ si ricava $i_{R_1}(t) = \frac{E - E \left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right)}{R_1} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}}$.

12.4.2 Un esempio avanzato

IL CIRCUITO IN FIGURA 12.12, per il quale si assume

$$R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C = 0, \quad (12.41)$$

evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω per $t = \frac{\pi}{2\omega}^-$ e i due tasti sono disposti in modo tale da lasciare R_2 appeso ed R_1 in serie con l'induttore di induttanza L . In $t = \frac{\pi}{2\omega}^+$, invece, la topologia del circuito cambia e si ottengono due sotto circuiti che evolvono autonomamente, l'uno rispetto all'altro, essendo R_1 appesa. Siamo interessati a determinare l'andamento di $i_L(t)$ per $t \in (\frac{\pi}{2\omega}^-, +\infty)$.

Il fasore associato al generatore di tensione $e(t) = E \cos \omega t$ è il numero reale E . Il fasore che rappresenta la corrente cercata è pari a

$$\begin{aligned} \bar{i}_L &= \frac{\frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}}}{R_0 + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}}{R_0 + \frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{\frac{R_1 + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}}{\frac{R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C + j\omega(R_0 R_1 C + L)}{1 - \omega^2 LC + j\omega R_1 C}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{\frac{R_1 + j\omega L}{R_0 + R_1 - \omega^2 R_0 L C + j\omega(R_0 R_1 C + L)}}{1 - \frac{j\omega(R_0 R_1 C + L)}{R_1 + j\omega L}} \frac{E}{R_1 + j\omega L} \\ &= \frac{E}{j\omega(R_0 R_1 C + L)} = -j \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)} \end{aligned}, \quad (12.42)$$

da cui $i_L(t) = \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)} \sin \omega t$ e $i_L(\frac{\pi}{2\omega}) = \frac{E}{\omega(R_0 R_1 C + L)}$.

Poiché gli ingressi sono limitati e, come discusso in precedenza, la presenza di tasti produce variazioni dei parametri circuituali che introducono salti di discontinuità limitati, la variabile di stato $i_L(t)$ sarà continua per $t = \frac{\pi}{2\omega}$.

CON LA COMMUTAZIONE DEI TASTI, la topologia del circuito muta. A sinistra si crea un circuito RC serie con ingresso sinusoidale.

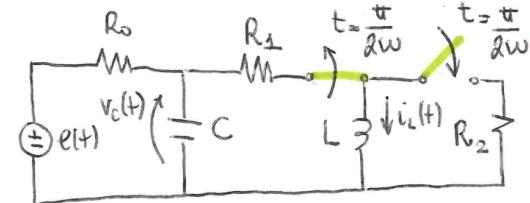


Figura 12.12: I tasti si aprono/chiudono contemporaneamente per $t = \frac{\pi}{2\omega}$. $e(t) = E \cos \omega t$.

La sua evoluzione sarà governata da un risposta in transitorio e da un regime chiaramente di tipo sinusoidale. A destra, invece, l'induttore forma una maglia con il resistore R_2 e quindi la corrente in esso immagazzinata in $t = \frac{\pi}{2\omega}$ fluisce nella maglia fino a scaricarlo completamente. L'energia immagazzinata in $t = \frac{\pi}{2\omega}$, ovvero

$$w_a^L = \frac{1}{2} L i_L^2 \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) = \frac{1}{2} L \frac{E^2}{\omega^2 (R_0 R_1 C + L)^2} , \quad (12.43)$$

verrà dissipata integralmente dal resistore. Si ricava banalmente che, per $t \in [\frac{\pi}{2\omega}, +\infty)$,

$$i_L(t) = \frac{E}{\omega (R_0 R_1 C + L)} e^{-\frac{R_2}{L}(t-\frac{\pi}{2\omega})} . \quad (12.44)$$

L'andamento della corrente $i_L(t)$ è riportato in figura 12.13.

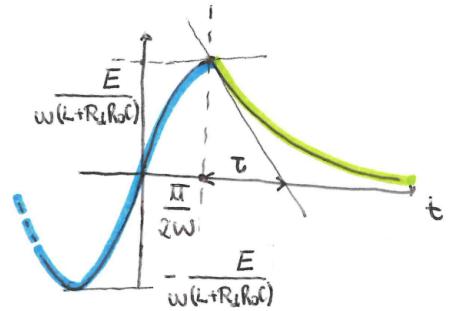


Figura 12.13: Andamento della corrente $i_L(t)$ a cavallo dell'apertura/chiusura del tasto.

13

13.1 Il trasformatore: equazioni costitutive

I TRASFORMATORI SONO DIFFUSAMENTE IMPIEGATI nei circuiti di comunicazione, nelle apparecchiature di misura e nei sistemi di potenza. Il trasformatore più semplice può essere realizzato con due circuiti mutuamente accoppiati come in figura 13.1. I due circuiti, primario e secondario, sono realizzati avvolgendo del filo conduttore, smaltato con vernice isolante, su un supporto materiale, fatto di ferrite o lamine sottili di acciaio speciale.

Una prima ipotesi fondamentale alla base del modello che viene presentato è l'assumere nulla la resistività degli avvolgimenti. Detto ciò, applicando la legge di Faraday-Henry (cfr. paragrafo 8.2) a due linee chiuse, in parte coincidenti con i due avvolgimenti, si ottiene

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{d}{dt} \Phi_1(t) \\ v_2(t) &= \frac{d}{dt} \Phi_2(t) \end{aligned} \quad , \quad (13.1)$$

dove Φ_1 e Φ_2 sono i flussi concatenati con l'avvolgimento 1 e 2, rispettivamente, dovuti ai campi magnetici \bar{B}_1 e \bar{B}_2 prodotti dalle correnti i_1 e i_2 che circolano negli avvolgimenti¹.

Per ricavare dalla 13.1 le relazioni tra le intensità di corrente e le tensioni dei due avvolgimenti, dobbiamo fare alcune ipotesi. Assumiamo dunque che

- il supporto materiale sia costituito da materiale magnetico ideale, in cui siano trascurabili gli effetti dovuti a fenomeni non lineari, come la saturazione e l'isteresi magnetica, e con permeabilità magnetica μ molto grande rispetto a quella del vuoto μ_0 ;
- assumiamo di poter trascurare le correnti elettriche che nascono per induzione nell'anello di materiale magnetico (un materiale magnetico può essere un buon conduttore di corrente elettrica);

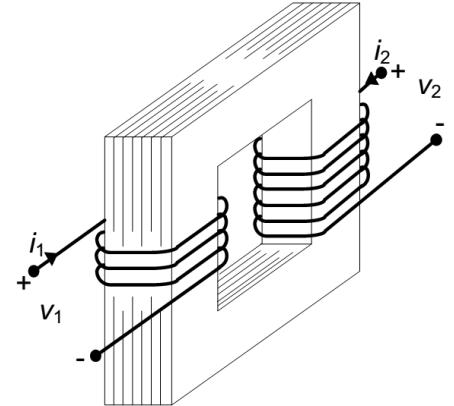


Figura 13.1: Due avvolgimenti di filo conduttore realizzati su un nucleo ferromagnetico.

¹ $\Phi_1 = \int_{S_1} \bar{B}_1 \cdot \hat{n}_{N_1} dS_1$, dove S_1 è una qualsiasi superficie aperta che ha come bordo il primo avvolgimento e \hat{n}_{N_1} è il versore normale alla superficie in orientato concordemente con il verso di riferimento della corrente i_1 , secondo la regola del cavatappi (cfr. figura 1.20). Φ_2 è definito in modo analogo.

- assumiamo che siano trascurabili gli effetti dovuti al campo elettrico nella legge di Ampère-Maxwell.

In queste ipotesi

- vale la sovrapposizione degli effetti per i flussi rispetto alle intensità di corrente;
- solo le correnti dei due avvolgimenti producono campo magnetico;
- la relazione tra i flussi e le intensità di corrente è di tipo algebrico lineare.

Allora per i flussi Φ_1 e Φ_2 si ha:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1 i_1 + M_{12} i_2 \\ \Phi_2 &= M_{21} i_1 + L_2 i_2\end{aligned}, \quad (13.2)$$

dove L_1 , L_2 , M_{12} , M_{21} , sono quattro parametri indipendenti dalle due intensità di corrente i_1 e i_2 e costanti nel tempo. Il flusso $\Phi_1 = L_1 i_1$ è il flusso concatenato con l'avvolgimento primario quando l'intensità di corrente i_2 del secondario è uguale a zero, ed analogamente $\Phi_2 = L_2 i_2$ è il flusso concatenato con l'avvolgimento secondario quando la intensità di corrente i_1 del primario è uguale a zero. Quindi L_1 ed L_2 , sono, rispettivamente, i *coefficienti di autoinduzione* dell'avvolgimento 1 e dell'avvolgimento 2 considerati non interagenti, cioè isolati (magneticamente) l'uno dall'altro. I coefficienti M_{12} rappresenta il rapporto tra il flusso del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento 1 e l'intensità di corrente i_2 quando $i_1 = 0$, mentre M_{21} rappresenta il rapporto tra il flusso del campo magnetico concatenato con l'avvolgimento 2 e l'intensità di corrente i_1 quando $i_2 = 0$. I coefficienti di autoinduzione sono intrinsecamente positivi, come accade per l'induttore e la sua autoinduttanza; quelli di mutua induzione possono essere positivi o negativi a causa delle diverse possibili combinazioni delle orientazioni scelte per i versi di riferimento delle intensità di corrente nei due avvolgimenti. Dato che si potrebbe dimostrare che $M_{12} = M_{21}$, chiamiamo M il coefficiente di mutua induzione che si misura in *henry* [H] come L_1 ed L_2 .

COMBINANDO LE EQUAZIONI 13.1 e 13.2 e assumendo M positivo si ricavano le equazioni costitutive del trasformatore o degli **induttori accoppiati**

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{array} \right. . \quad (13.3)$$

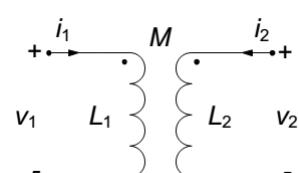


Figura 13.2: Simbolo del trasformatore o degli induttori accoppiati.

Il trasformatore è dunque un doppio bipolo dinamico lineare. In figura 13.2 ne riportiamo il simbolo circuitale comunemente adottato. Nel simbolo sono indicati i versi di riferimento che bisogna scegliere per entrambe le intensità di corrente affinché il contributo di mutua induzione compaia con il segno positivo nelle relazioni caratteristiche: i versi di riferimento devono essere entrambi entranti (o entrambi uscenti) dalla coppia di terminali contrassegnati con i due pallini. Va da sé che alle equazioni differenziali 13.3 bisogna affiancare, come per tutti gli elementi dinamici, le condizioni iniziali che in questo caso corrispondono ai valori delle intensità di corrente i_1 ed i_2 ad un istante assegnato $t = t_0$. Le correnti $i_1(t)$ ed $i_2(t)$ dipendono evidentemente sia dalla storia delle tensioni $v_1(t)$ e $v_2(t)$ nell'intervallo $[t_0, t]$ che dai loro valori iniziali.

Si noti che in regime sinusoidale alla pulsazione ω , il trasformatore è caratterizzato dalla matrice di impedenze

$$Z(j\omega) = \begin{bmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{bmatrix}. \quad (13.4)$$

Inoltre, in regime stazionario, si ottiene $v_1 = v_2 = 0$ da cui si deduce che il trasformatore ideale in regime stazionario non si comporta assolutamente come un trasferitore ideale di potenza.

13.2 Il trasformatore: potenza ed energia

LA POTENZA ISTANTANEA ASSORBITA dal trasformatore, è pari a

$$\begin{aligned} p_a(t) &= v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \\ &= \left(L_1 \frac{d}{dt}i_1 + M \frac{d}{dt}i_2 \right) i_1 + \left(M \frac{d}{dt}i_1 + L_2 \frac{d}{dt}i_2 \right) i_2 \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} w_a(t) \end{aligned}, \quad (13.5)$$

dove $w_a(t)$ è l'energia immagazzinata all'istante t .

La potenza istantanea è quindi un differenziale esatto e

$$\int_{t_1}^{t_2} p_a(t) dt = w_a(t_2) - w_a(t_1). \quad (13.6)$$

L'espressione dell'energia $w_a(t)$ può essere riscritta come una forma quadratica, ovvero

$$w_a(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (13.7)$$

Poiché L_1 ed L_2 sono positivi e M^2 potrà essere al massimo pari a $L_1 L_2$ nel caso limite in cui i due avvolgimenti fossero così vicini da essere praticamente coincidenti, il determinante della matrice che definisce la forma quadratica sarà $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$ da cui la forma quadratica è semidefinita positiva e quindi l'energia $w_a(t)$ immagazzinata nel trasformatore è sempre positiva o nulla. Il trasformatore è dunque un componente passivo dal punto di vista energetico: non è in grado cioè di erogare più energia di quella immagazzinata.

13.2.1 Il trasformatore in accoppiamento critico

LA CONDIZIONE $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$, che lega tra loro i tre parametri che definiscono il mutuo accoppiamento, è detta condizione di *fisica realizzabilità* per il trasformatore. Il coefficiente di mutua induzione è spesso espresso in funzione del *coefficiente d'accoppiamento* k definito da

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} , \quad (13.8)$$

che naturalmente, tenendo conto della precedente condizione, dovrà verificare la relazione $k \leq 1$ avendo assunto $M > 0$. Più in generale, assumendo anche valori di M negativi, $k \in [-1, 1]$ e con $|k| = 1$ il trasformatore si dice in accoppiamento critico, ovvero gli induttori sono perfettamente accoppiati.²

In questo caso, se consideriamo l'equazione 13.2, che diventa

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_1 i_1 + \sqrt{L_1 L_2} i_2 \\ \Phi_2 &= \sqrt{L_1 L_2} i_1 + L_2 i_2 \end{aligned} , \quad (13.9)$$

risulta evidente che non esiste una relazione biunivoca tra le correnti i_1, i_2 e i flussi Φ_1, Φ_2 . Infatti,

$$\begin{aligned} \sqrt{L_1 L_2} \Phi_1 &= \sqrt{L_1 L_2} (L_1 i_1 + \sqrt{L_1 L_2} i_2) \\ &= L_1 (\sqrt{L_1 L_2} i_1 + L_2 i_2) \\ &= L_1 \Phi_2 \end{aligned} , \quad (13.10)$$

quindi

$$\Phi_1 = \frac{L_1}{\sqrt{L_1 L_2}} \Phi_2 . \quad (13.11)$$

Le variabili di stato del trasformatore si riducono quindi da due ad una soltanto.

IN ACCOPPIAMENTO CRITICO è possibile introdurre i due circuiti equivalenti in figura 13.3. Si consideri, ad esempio, il circuito di sinistra e si fissi $n = L_1/M$.³ Se $k = 1$, ovvero $M = \sqrt{L_1 L_2}$, dalla 13.3 si

² La condizione $k = 0$ corrisponde invece a totale assenza di accoppiamento, condizione che si è sempre assunta finora tra gli induttori presenti in un generico circuito.

³ Si noti che in accoppiamento critico $\frac{M}{L_1} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \frac{L_2}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{L_2}{M}$.

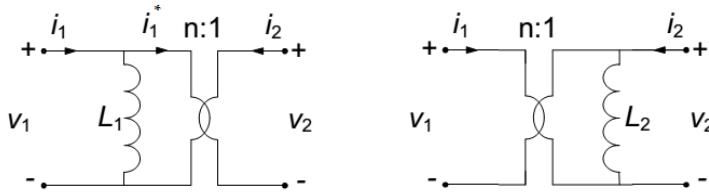


Figura 13.3: Circuiti equivalenti del trasformatore in accoppiamento critico.

ottiene $v_1 = \frac{L_1}{M}v_2$, infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = L_1 \left(\frac{d}{dt}i_1 + \frac{M}{L_1} \frac{d}{dt}i_2 \right) \\ v_2 = M \left(\frac{d}{dt}i_1 + \underbrace{\frac{L_2}{M}}_{M/L_1} \frac{d}{dt}i_2 \right) = \frac{M}{L_1}v_1 \end{array} \right. . \quad (13.12)$$

La relazione $v_1 = \frac{L_1}{M}v_2$ è valida anche per il circuito equivalente che stiamo considerando. Inoltre, per quest'ultimo possiamo scrivere

$$i_1^* = -\frac{1}{n}i_2 \quad (13.13)$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}i_1^* = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt}i_2 . \quad (13.14)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} v_1 &= L_1 \frac{d}{dt}(i_1 - i_1^*) \\ &= L_1 \frac{d}{dt}i_1 + \frac{L_1}{n} \frac{d}{dt}i_2 \\ &= L_1 \frac{d}{dt}i_1 + M \frac{d}{dt}i_2 \end{aligned} \quad (13.15)$$

Si procede analogamente per verificare la validità del circuito equivalente di destra in figura 13.3.

13.3 Un modello equivalente del trasformatore non in accoppiamento critico

IMPUGANDO IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA e una coppia di induttori è possibile definire modelli circuituali equivalenti al trasformatore anche non in condizione di accoppiamento critico. Si consideri ad esempio il circuito in figura 13.4.

Per questo circuito possiamo scrivere

$$\begin{aligned} v_1^* &= nv_2 \\ i_1^* &= -\frac{1}{n}v_2 \end{aligned} . \quad (13.16)$$

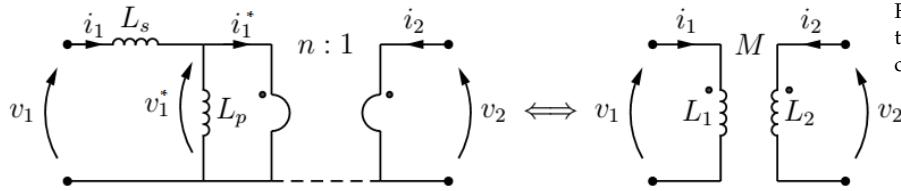


Figura 13.4: Circuito equivalente ad un trasformatore non in accoppiamento critico.

Utilizziamo le prove semplici e assegnamo $i_2 = 0$. Si ricava $v_1 = (L_s + L_p) \frac{d}{dt} i_1$ da cui si deduce che $L_1 = L_s + L_p$. Inoltre $v_2 = \frac{v_1^*}{n} = \frac{L_p}{n} \frac{d}{dt} i_1$ da cui $M = \frac{L_p}{n}$.

Se adesso imponiamo $i_1 = 0$ si ricava $v_1 = v_1^* = -L_p \frac{d}{dt} i_1^* = -L_p \frac{d}{dt} \left(-\frac{i_2}{n} \right) = \frac{L_p}{n} \frac{d}{dt} i_2$. Questo conferma del fatto che $M_{12} = M_{21} = M$. Inoltre $v_2 = \frac{v_1^*}{n} = \frac{1}{n} \left(-L_p \frac{d}{dt} i_1^* \right) = \frac{1}{n} \left(-L_p \frac{d}{dt} \left(-\frac{i_2}{n} \right) \right) = \frac{L_p}{n^2} \frac{d}{dt} i_2$. Da cui si conclude che $L_2 = \frac{L_p}{n^2}$. Riassumendo

$$\begin{aligned} L_1 &= L_s + L_p \\ L_2 &= \frac{L_p}{n^2} \\ M &= \frac{L_p}{n} \end{aligned} \quad (13.17)$$

da cui $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{L_p}{\sqrt{L_p(L_s+L_p)}}$.

Esistono evidentemente anche le formule inverse che permettono di ricavare i parametri del circuito equivalente a partire dai parametri del trasformatore

$$\begin{aligned} n &= k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \\ L_p &= k^2 L_1 \\ L_s &= (1 - k^2) L_1 \end{aligned} \quad (13.18)$$

13.4 Un esempio

SI CONSIDERI IL CIRCUITO IN FIGURA 13.5 che evolve in regime sinusoidale. Sapendo che $a(t) = A \sin \omega t$ e $e(t) = E \sin \omega t$, determinare il fasore \bar{v}_C corrispondente a $v_C(t)$.

Risolviamo il problema sovrapponendo gli effetti dei due generatori e consideriamo il circuito in cui si sia passivato $e(t)$. Nel dominio dei fasori il circuito diventa quello riportato in figura F:TR6.

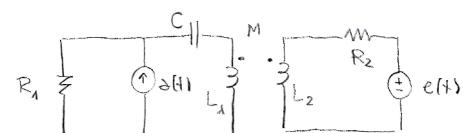


Figura 13.5: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Il trasformatore non è in accoppiamento critico.

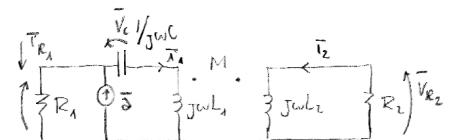


Figura 13.6: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Il generatore corrispondente a e è stato passivato.

Notando che $\bar{i}_1 = j\omega C \bar{v}_C$ e $\bar{i}_2 = -\bar{v}_2/R_2$, possiamo scrivere le seguenti equazioni

$$\begin{aligned}\bar{v}_C &= R_1(\underbrace{\bar{a} - j\omega C \bar{v}_C}_{\bar{i}_{R_1}}) - \bar{v}_1 \\ \bar{v}_1 &= j\omega L_1(j\omega C \bar{v}_C) + j\omega M \left(-\frac{\bar{v}_2}{R_2}\right) \quad . \quad (13.19) \\ \bar{v}_2 &= j\omega M(j\omega C \bar{v}_C) + j\omega L_2 \left(-\frac{\bar{v}_2}{R_2}\right)\end{aligned}$$

Dalle terza equazione si ricava quindi

$$\bar{v}_2 \left(1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}\right) = -\omega^2 MC \bar{v}_C \quad (13.20)$$

e

$$\bar{v}_2 = -\frac{\omega^2 MR_2 C}{R_2 + j\omega L_2} \bar{v}_C \quad . \quad (13.21)$$

Sostituendo nella seconda delle 13.19 si ottiene

$$\bar{v}_1 = \left(-\omega^2 L_1 C + j\frac{\omega^3 M^2 C}{R_2 + j\omega L_2}\right) \bar{v}_C \quad . \quad (13.22)$$

Infine, sostituendo nella prima delle 13.19 si ottiene

$$\bar{v}_C \left(1 + j\omega R_1 C - \omega^2 L_1 C + j\frac{\omega^3 M^2 C}{R_2 + j\omega L_2}\right) = R_1 \bar{a} \quad (13.23)$$

e quindi

$$\bar{v}_C = \frac{R_1(R_2 + j\omega L_2)\bar{a}}{(1 - \omega^2 L_1 C + \omega R_1 C)(R_2 + j\omega L_2) + j\omega^3 M^2 C} \quad . \quad (13.24)$$

Passivando adesso $a(t)$ si ottiene il circuito in figura 13.7.

Possiamo scrivere

$$\bar{v}_1 = R_1(-j\omega C \bar{v}_C) - \bar{v}_C = j\omega L_1(j\omega C \bar{v}_C) + j\omega M \bar{e} \quad , \quad (13.25)$$

da cui

$$\bar{v}_C = -\frac{j\omega M \bar{e}}{1 - \omega^2 L_1 C + j\omega R_1 C} \quad . \quad (13.26)$$

In conclusione il fasore cercato è dato dalla somma dei due contributi scritti nella 13.24 e nella 13.26.

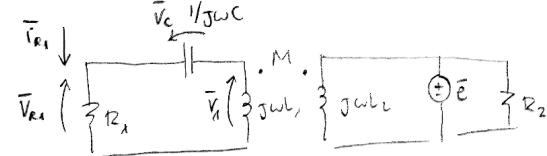


Figura 13.7: Il circuito evolve in regime sinusoidale alla pulsazione ω . Il generatore corrispondente a \bar{a} è stato passivato.