Homework7

司可经济系 15320171151903

因果推断

奥维德在《变形记》曾经说过："原因是隐藏的，但结果是已知的"。单纯的 p(y|x) 或 p(x,y)并不能告诉我们 x 和 y 之间是否存在因果关系。因果推理还要涉及因果效应和因果机制问题："x 对 y 有因果关系吗?如果是的话，影响有多大?""如果因果关系存在，它发生的机制是什么?"为观察到的现象寻找因果解释的冲动和能力，自人类发展的一开始，就是人类的一个基本特征，是现代科学和社会科学的目标。

为什么我们想知道事物是如何运作的?一个显而易见的答案是，它对我们的行为方式有很大的影响，每一个与行动效果有关的问题都必须由因果关系来决定，仅仅只是统计资料是不够的。真正的理解能够在各种各样的情况下做出预测，包括新的假设情况。

因果推断用的最多的模型是 Rubin Causal Model(RCM;Rubin1978)和 Causal Diagram(Pearl1995)。潜在结果框架，也被称为鲁宾因果模型(RCM)，是一个因果推理框架，它将观察到的数据概念化，就像它们是实验的结果一样，要么由研究人员进行(就像在实际实验中一样)，要么由研究对象自己进行(就像在观察性研究中一样)。类似于一个实验，当研究 x 对 y 的因果效应时，x 被称为处理对象或干预，y 被称为结果。

假设 x 取一组离散值{1，…，A}。RCM 假设 y∈{Y^1，……，Y^A}，其中{Ya}$^A_{A=1}$为一组随机变量，每个 Y_a 为 x=a 处理下的潜在结果:Y^a=y|do(x=a)因此，在 RCM 下，干预 x 与结局 y 之间的关系用联合分布 p（x,Y^1，…Y^4,）和

$$y = \sum_{a=1}^{A} \mathcal{Y}^a \mathcal{I}(x = a)$$

现在考虑一个二进制处理 x∈{0,1}。潜在结果为 Y_0、Y_1，结果 y 可表示为:y=xY^1+(1-x)Y^0。如果 p（y^0）≠p（y^1），则 x 对 y 有因果关系。因果效应是通过比较潜在的结果来定义的。那么我们如何衡量因果效应的大小呢?

让 τ≡Y^1−Y^0，平均处理效应(ATE)是 E(τ)，平均治疗效果治疗(ATT)等于 E(τ|x=1)，平均治疗效果治疗(ATU)为 E(τ|x=0)。观察数据为 D={(x_1, y_1)，(x_N, y_N)}, 其中 x_i∈(0,1),y_i=$x_iY_i^1$+(1−x_i)Y_i^0,

$$\left\{\left(x_1, \mathcal{Y}_1^0, \mathcal{Y}_1^1\right), \ldots, \left(x_N, \mathcal{Y}_N^0, \mathcal{Y}_N^1\right)\right\} \overset{i.i.d.}{\sim} p\left(x, \mathcal{Y}^0, \mathcal{Y}^1\right)$$

$\tau_i \equiv Y_i^1 - Y_i^0$ 被称为个人的干预效果。τ_i 从未被观测到。对于每个个体，我们只观察是 $y_i=Y_i^0$ 还是 $y_i=Y_i^1$。未被观察到的潜在结果称为反事实结果。干预前，任何结果都是潜在的结果。干预后，观察到的(已实现的)结果和与事实相反的结果。

由于没有观察到与事实相反的结果，我们无法了解个体干预效果。这被称为因果推理的基本问题。我们只能从总体上了解因果效应。因此，当我们学习因果关系时，我们应该始终清楚地了解它所定义的群体。

给定观测数据 D，可以得到 p（y_1|x=1）=p(y|x=1)和 p（y_0|x=0）=p(y|x=0)，然而，要计算 ATT，我们需要关于 p（y_0|x=1）的信息:

$$ATT=E[Y_1-Y_0|x=1]=E[y_1|x=1]-E[y_0|x=1]。$$

类似地，为了计算 ATU，我们需要关于 p（y_1|x=0）的信息。为了计算，我们需要关于 p（y_0|x=1）和 p（y_1|x=0）的信息：

$ATE=E[Y_1-Y_0]=E[Y_1-Y_0|x=1]p(x=1)+E[Y_1-Y_0|x=0]p(x=0)=ATT\times p(x=1)+ATU\times p(x=0)$。我们可以把因果学习看作是试图学习这些反事实的结果概率。

因果图（Causal Diagrams）G 是一个可以用来表示因果结构的图，因此它描述了我们关于因果机制的定性知识。比如一幅吞了大象的蟒蛇图。我们可以写出一个完整的因果模型:

$\log h^e N$（0,0.1）

$\log l^e \sim N$（0.5,0.1）

$\log l^b \sim N(1.5,0.2)$

$a|l^e,l^b,l^b>l^e \sim U(0,l^b-l^e)$

$$y \leftarrow \begin{cases} h^e \mathcal{I}(a \le x \le a+\ell^e)\mathcal{I}(E=1) & \ell^e < \ell^b \\ 0 & \ell^e \ge \ell^b \end{cases},$$

y 是蟒蛇的高度,x 是沿着蟒蛇的身体距离,(h^e,l^e)分别为大象宝宝的高度和长度,l^b 是蟒蛇的长度,E∈{0,1}为蟒蛇吞食大象的事件。用一个图来描述变量之间的因果关系，是很自然和直观的事情。所以，两者比较起来，RCM 更加精确，而 因果图更加直观。